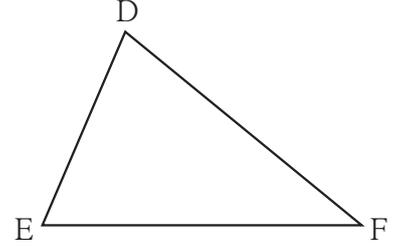




थोड़ा याद करें -

साथ की आकृति से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर खोजिए ।

- भुजा DE का सम्मुख कोण कौनसा है ?
- $\angle E$ किस भुजा का सम्मुख कोण है ?
- भुजा DE तथा भुजा DF में समाविष्ट कोण कौनसा ?
- $\angle E$ तथा $\angle F$ में समाविष्ट भुजा कौनसी ?
- भुजा DE के संलग्न कौनसे कोण है ?



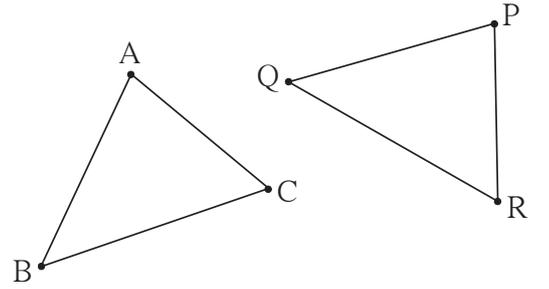
- जो आकृतियाँ परस्पर हूबहू मिलती है उन आकृतियों को सर्वांगसम आकृति कहते हैं ।
- जिन रेखाखंडों की लंबाई समान होती है वे रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं ।
- जिन कोणों के माप समान होते हैं वे कोण सर्वांगसम होते हैं ।



आओ जानें

त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruence of triangles)

कृति : संलग्न आकृतियाँ देखो । पारदर्शक ट्रेसिंग पेपर पर ΔABC बनाकर वह कागज ΔPQR पर रखकर देखिए । बिंदु A को बिंदु P पर, बिंदु B को बिंदु Q पर तथा बिंदु C को बिंदु R पर रखकर देखो दोनों त्रिभुज हूबहू मिलते हैं (ढक लेते हैं) अर्थात् वे सर्वांगसम है ऐसा दिखाई देगा ।



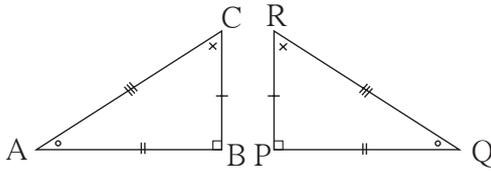
कृति में ΔABC को ΔPQR पर रखने की एक पद्धति दी गई है । परंतु बिंदु A को Q पर, बिंदु B को R पर तथा बिंदु C को P पर रखने पर त्रिभुज परस्पर हूबहू नहीं मिलेंगे । अर्थात् विशिष्ट पद्धति से ही उन्हें एक दूसरे से मिलाना होता है । एक दूसरे से मिलाने की पद्धति एक-एक संगति द्वारा दर्शाई जाती है । बिंदु A की संगति बिंदु P से है, इसे $A \leftrightarrow P$ ऐसा लिखते हैं । यहाँ $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$ इस संगति से त्रिभुज सर्वांगसम है । इस पद्धति से त्रिभुज सर्वांगसम होने पर $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,

$\angle C \cong \angle R$ तथा रेख $AB \cong$ रेख PQ , रेख $BC \cong$ रेख QR , रेख $CA \cong$ रेख RP ऐसी छह सर्वांगसमता प्राप्त होती है। इसलिए ΔABC तथा ΔPQR , $ABC \leftrightarrow PQR$ इस संगति द्वारा सर्वांगसम है, ऐसा कहा जाता है। तथा $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ऐसा लिखते हैं। इस प्रकार लिखने में $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$ यह शीर्षबिंदुओं की एकैकी संगति तथा उसके कारण प्राप्त छह सर्वांगसमताओं का अंतर्भाव होता है। इसलिए दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं यह लिखते समय शीर्षबिंदुओं का क्रम सर्वांगसमता की एकैकी संगति का पालन करता हो इस ओर ध्यान दीजिए।



आओ चर्चा करें

ΔABC तथा ΔPQR इन सर्वांगसम त्रिभुजों के सर्वांगसम घटक समान चिहनों द्वारा दर्शाए गए हैं।



अनिल का लेखन : $\Delta ABC \cong \Delta QPR$
 रेहाना का लेखन : $\Delta BAC \cong \Delta PQR$
 सुरजित का लेखन : $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

अनिल, रेहाना तथा सुरजित ने इन त्रिभुजों के सर्वांगसमता का लेखन निम्नानुसार किया था।

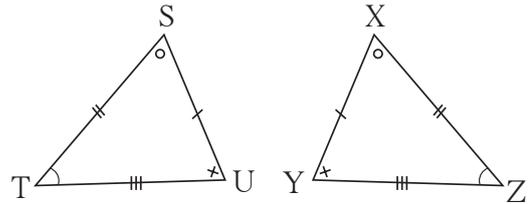
इनमें से कौन-सा लेखन सही है तथा कौन-सा गलत है। चर्चा कीजिए।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) साथ की आकृति में समान चिहनों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं।

(i) शीर्षबिंदुओं के जिस एकैकी संगति द्वारा वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं उस संगति में त्रिभुजों की सर्वांगसमता दो प्रकार से लिखिए।

(ii) $\Delta XYZ \cong \Delta STU$ यह लेखन सही है या गलत, कारणसहित लिखिए।



हल : निरीक्षण द्वारा दिए गए त्रिभुज $STU \leftrightarrow XZY$ इस एकैकी संगति द्वारा सर्वांगसम हैं।

(i) एक प्रकार : $\Delta STU \cong \Delta XZY$, दूसरा प्रकार: $\Delta UST \cong \Delta YXZ$

इसी सर्वांगसमता को और अन्य प्रकार से लिखने का प्रयास कीजिए।

(ii) इन त्रिभुजों की सर्वांगसमता $\Delta XYZ \cong \Delta STU$ ऐसी लिखने पर भुजा $ST \cong$ भुजा XY ऐसा अर्थ होगा और यह गलत है।

$\therefore \Delta XYZ \cong \Delta STU$ यह लेखन गलत है।

($\Delta XYZ \cong \Delta STU$ इस लेखन द्वारा और भी कुछ गलतियाँ होती हैं । वे विद्यार्थियों को खोजनी हैं परंतु उत्तर क्यों गलत है ? यह बताने के लिए एक गलती दिखाना पर्याप्त है ।)

उदा. (2) आगे दी गई आकृति में, त्रिभुजों की जोड़ी में समान चिहनों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । उन त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं के कौन-से एकैकी संगति द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यह बताकर त्रिभुजों की सर्वांगसमता चिह्न द्वारा दर्शाइए ।

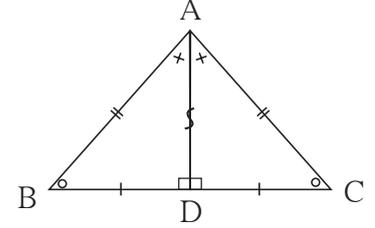
हल : ΔABD तथा ΔACD में भुजा AD

सामान्य रेखाखंड है ।

प्रत्येक रेखाखंड स्वयं के सर्वांगसम होता है ।

संगति : $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C, D \leftrightarrow D. \Delta ABD \cong \Delta ACD$

टीप : सामान्य भुजा पर ' s ' ऐसा चिह्न लगाने की पद्धति है ।

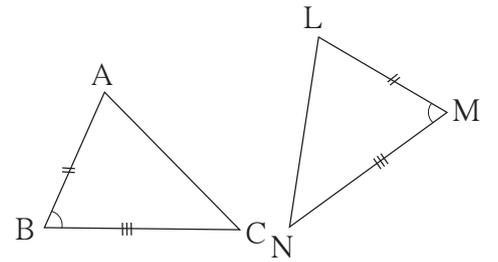


किसी जोड़ी के त्रिभुज सर्वांगसम हैं यह दिखाने के लिए सभी छह घटकों की सर्वांगसमता दिखाने की आवश्यकता नहीं होती । एक त्रिभुज के तीन विशिष्ट घटक दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हों तो शेष तीन घटकों की जोड़ियाँ भी परस्पर सर्वांगसम होती हैं, अर्थात् वे विशिष्ट तीन घटक सर्वांगसमता की कसौटी निश्चित करते हैं ।

कुछ त्रिभुजों की रचना करना हमने सीखा है । जो तीन घटक दिए गए हों तो त्रिभुज की एकमेव आकृति बनाई जा सकती है वे ही घटक सर्वांगसमता की कसौटियाँ निश्चित करते हैं, इसे हम जाँच कर देखेंगे ।

(1) दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण : भुकोभु कसौटी

भुजाओं की दो जोड़ियाँ सर्वांगसम हों तथा उनमें समाविष्ट कोण भी सर्वांगसम हो, ऐसे ΔABC तथा ΔLMN बनाइए ।



ΔABC तथा ΔLMN में $l(AB) = l(LM), l(BC) = l(MN), m\angle ABC = m\angle LMN$
 ΔABC को ट्रेसिंग पेपर पर बनाकर ट्रेसिंग पेपर ΔLMN पर इस प्रकार रखिए की शीर्षबिंदु A को शीर्षबिंदु L पर, भुजा AB को भुजा LM पर, $\angle B$ को $\angle M$ तथा भुजा BC को भुजा MN पर रखेंगे । $\Delta ABC \cong \Delta LMN$ है ऐसा दिखाई देगा ।

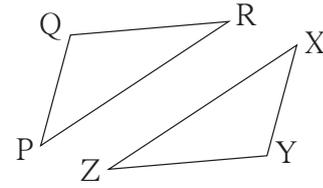
(2) तीन संगत भुजाएँ : भुभुभु कसौटी

$$l(PQ) = l(XY), l(QR) = l(YZ), l(RP) = l(ZX)$$

इस प्रकार त्रिभुज ΔPQR तथा ΔXYZ बनाइए ।

ट्रेसिंग पेपर पर ΔPQR बनाकर वह ΔXYZ पर

$P \leftrightarrow X, Q \leftrightarrow Y, R \leftrightarrow Z$ इस प्रकार एकैकी संगति से रखिए । $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ दिखाई देगा ।



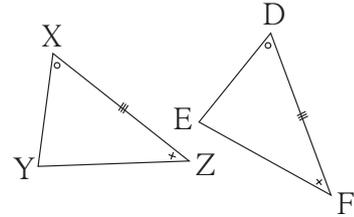
(3) दो कोण तथा समाविष्ट भुजा : कोभुको कसौटी

ΔXYZ तथा ΔDEF ऐसे बनाइए कि,

$$l(XZ) = l(DF), \angle X \cong \angle D \text{ तथा } \angle Z \cong \angle F$$

ट्रेसिंग पेपर पर ΔXYZ बनाकर वह पेपर ΔDEF पर

रखिए । $X \leftrightarrow D, Y \leftrightarrow E, Z \leftrightarrow F$ इस संगति के अनुसार $\Delta XYZ \cong \Delta DEF$ दिखाई देंगे ।

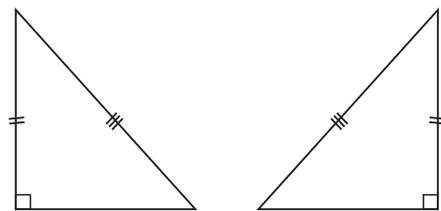


(4) कोकोभु (अथवा भुकोको) कसौटी :

दो त्रिभुजों में संगत कोणों की दो जोड़ियाँ सर्वांगसम हों, तो शेष कोण भी सर्वांगसम होते हैं । क्योंकि त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल 180° होता है । इसलिए कोई दो कोण तथा एक कोण की संलग्न भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण तथा संगत भुजा से सर्वांगसम हो तो कोभुको कसौटी की शर्त पूरी होती है तथा वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

(5) समकोण त्रिभुज की कर्ण भुजा कसौटी

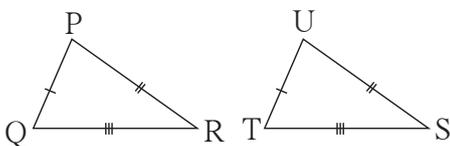
समकोण त्रिभुज का विकर्ण तथा एक भुजा दी गई हो तो एकमेव त्रिभुज की रचना की जा सकती है । किसी समकोण त्रिभुज का विकर्ण तथा एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हो ऐसे दो समकोण त्रिभुज बनाकर उपरोक्त विधि के अनुसार वे सर्वांगसम है क्या ? जाँच कीजिए ।



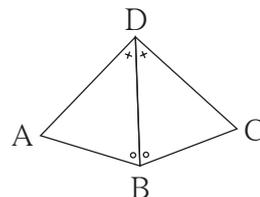
हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आगे दी गई आकृतियों के त्रिभुजों की प्रत्येक जोड़ी में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज किस कसौटी के अनुसार तथा शीर्षबिंदुओं के किस एकैकी संगति के अनुसार सर्वांगसम हैं ? लिखिए ।

(i)

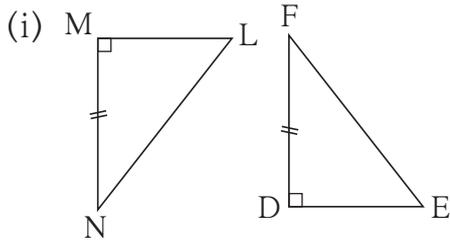


(ii)

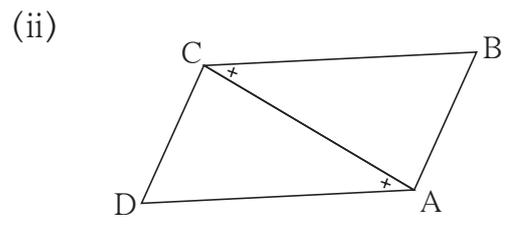


- हल : (i) भु-भु-भु कसौटी द्वारा $PQR \leftrightarrow UTS$ इस संगति से
(ii) को-भु-को कसौटी द्वारा $DBA \leftrightarrow DBC$ इस संगति से

उदा. (2) आगे दी गई आकृतियों के त्रिभुज की प्रत्येक जोड़ियों में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं। प्रत्येक आकृति के नीचे त्रिभुजों की सर्वांगसमता की कसौटी लिखी गई है। उस कसौटी द्वारा त्रिभुजों को सर्वांगसम होने के लिए और क्या जानकारी देना आवश्यक है तथा वह जानकारी देने के बाद त्रिभुज शीर्षबिंदुओं की किस एकैकी संगति द्वारा सर्वांगसम होंगे, लिखिए।



कर्ण भुजा कसौटी

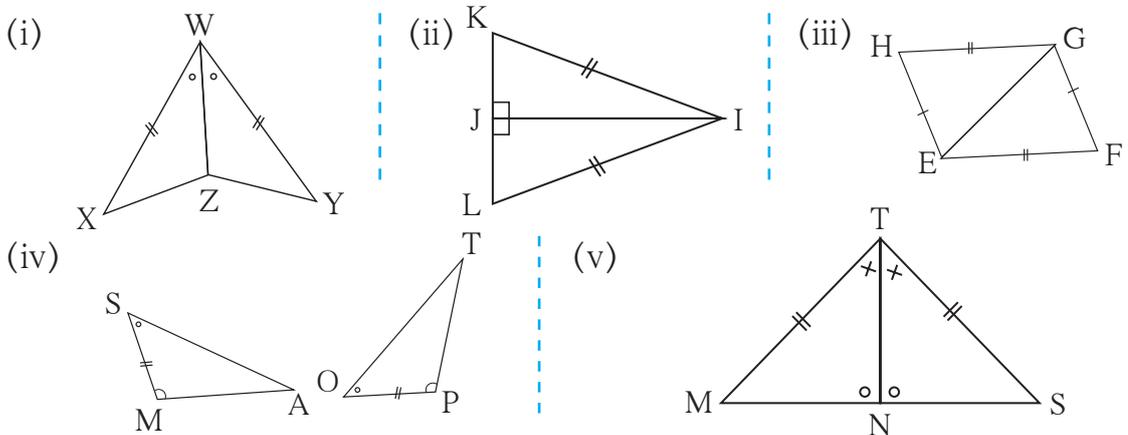


कोभुको कसौटी

- हल : (i) दिए गए त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। उनकी एक-एक भुजा सर्वांगसम है। इसलिए उनके रेख LN तथा EF विकर्ण सर्वांगसम है, यह जानकारी देना आवश्यक है। यह जानकारी देने पर $LMN \leftrightarrow EDF$ इस संगति द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।
(ii) आकृति के त्रिभुजों की रेख CA सामान्य भुजा है इसलिए $\angle DCA \cong \angle BAC$ यह जानकारी देने पर $DCA \leftrightarrow BAC$ इस संगति द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

प्रश्नसंग्रह 13.1

1. आगे दी गई आकृतियों के त्रिभुजों की प्रत्येक जोड़ी में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम है। प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज किस कसौटी तथा शीर्षबिंदुओं की किस एकैकी संगति द्वारा सर्वांगसम हैं, लिखिए।





मैंने यह समझा

- (1) **भु-को-भु कसौटी** : यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजा तथा उनके द्वारा समाविष्ट कोण से सर्वांगसम हों तो, वे त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- (2) **भु-भु-भु कसौटी**: यदि किसी त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीन संगत भुजाओं से सर्वांगसम हों, तो वे दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- (3) **को-भु-को कसौटी** : यदि किसी त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा के सर्वांगसम होती हों तो, वे त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- (4) **को-को-भु कसौटी** : यदि किसी त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट न हो ऐसी भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत कोण तथा उनमें समाविष्ट न हो ऐसी संगत भुजा से सर्वांगसम हों, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।
- (5) **कर्ण-भुजा कसौटी** : किसी समकोण त्रिभुज का विकर्ण और एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के विकर्ण तथा संगत भुजा के सर्वांगसम हों तो वे दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

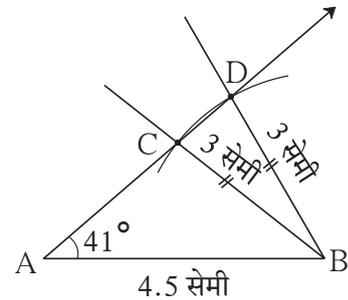
अधिक जानकारी हेतु

किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट न हो ऐसा कोण दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हों, तो क्या वे दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होंगे ?

ΔABC तथा ΔABD में,

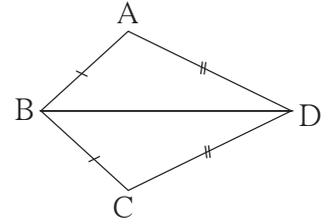
AB सामान्य भुजा है । भुजा $BC \cong$ भुजा BD , $\angle A$ सामान्य कोण है । परंतु सर्वांगसम भुजाओं द्वारा वह कोण समाविष्ट किया गया कोण नहीं है । अर्थात् एक त्रिभुज के तीन घटक दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हैं परंतु वे त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं ।

इस आधार पर किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनके द्वारा समाविष्ट न किया गया कोण दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हो, तो वे दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ही ऐसा नहीं है ।



हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आकृति में, □ ABCD की सर्वांगसम भुजाएँ समान के चिहनों द्वारा दर्शाई गई है। इस आकृति में सर्वांगसम कोणों की जोड़ियाँ हैं क्या, खोजिए।

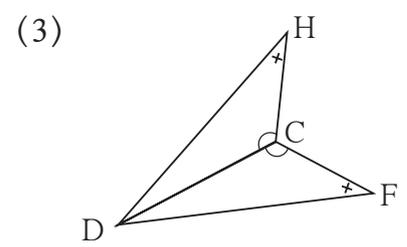
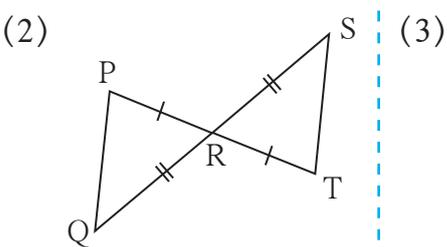
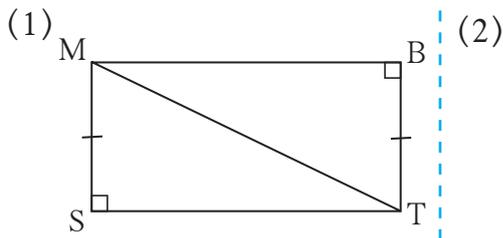


हल : ΔABD तथा ΔCBD में,
 भुजा $AB \cong$ भुजा CB (दिया गया है)
 भुजा $DA \cong$ भुजा DC (दिया गया है)
 भुजा BD सामान्य भुजा है।
 $\therefore \Delta ABD \cong \Delta CBD$ (भु-भु-भु कसौटी के अनुसार)

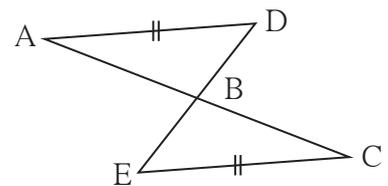
$\therefore \angle BAD \cong \angle BCD$
 $\therefore \angle ABD \cong \angle CBD$
 $\angle ADB \cong \angle CDB$ } (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण)

प्रश्नसंग्रह 13.2

1. आगे दी गई प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुजों में समान चिहनों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं। प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज, शीर्षबिंदुओं के किस संगति से तथा किस कसौटी द्वारा सर्वांगसम हैं लिखिए। प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुजों में शेष संगत सर्वांगसम घटक लिखिए।



2*. संलग्न आकृति में, रेखा $AD \cong$ रेखा EC है और कौन-सी जानकारी देने पर ΔABD तथा ΔEBC भुकोको कसौटी के अनुसार सर्वांगसम होंगे ?



उत्तर सूची

प्रश्नसंग्रह 13.1 1. (i) भुकोभु, $XWZ \leftrightarrow YWZ$ (ii) कर्णभुजा $KJI \leftrightarrow LJI$
 (iii) भुभुभु $HEG \leftrightarrow FGE$ (iv) कोभुको $SMA \leftrightarrow OPT$ (v) कोभुको या भुकोको $MTN \leftrightarrow STN$

प्रश्नसंग्रह 13.2 1. (1) $\Delta MST \cong \Delta TBM$ - कर्णभुजा, भुजा $ST \cong$ भुजा MB ,
 $\angle SMT \cong \angle BTM$, $\angle STM \cong \angle BMT$ (2) $\Delta PRQ \cong \Delta TRS$ - भुकोभु,
 भुजा $PQ \cong$ भुजा TS , $\angle RPQ \cong \angle RTS$, $\angle PQR \cong \angle TSR$

(3) $\Delta DCH \cong \Delta DCF$ - भुकोको, $\angle DHC \cong \angle DFC$, भुजा $HC \cong$ भुजा FC

2. $\angle ADB \cong \angle CEB$ तथा $\angle ABD \cong \angle CBE$ अथवा $\angle DAB \cong \angle ECB$

तथा $\angle ABD \cong \angle CBE$

