باب 5

5162CH05

پیچیدہ اعداد اور دودرجی مساواتیں
(COMPLEX NUMBERS AND QUADRATIC EQUATIONS)

❖ ریاضی سائنس کی ملکہ ہے اور حساب ریاضی کی ملکہ ہے (GAUSS) ❖

5.1 تعارف (Introduction)

ڈبلیو۔آر۔ ہیملٹن
(1805-1865)

پچھلی جماعتوں میں ہم نے ایک اور دو Variable والی خطی مساواتیں اور ایک (variable) میں دو درجی مساواتوں کا مطالعہ کیا ہے۔ ہم نے یہ دیکھا ہے کہ مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا کوئی حقیقی حل نہیں ہے کیونکہ $x^2 + 1 = 0$ سے ہمیں $x^2 = -1$ حاصل ہوتا ہے اور تمام حقیقی اعداد کا مربع مثبت ہوتا ہے۔ اس لیے ہمیں حقیقی اعداد کے نظام کو ایک بڑے نظام میں بڑھانے کی ضرورت ہے تا کہ ہم $x^2 = -1$ مساوات کا حل نکال سکیں۔ حقیقت میں ہمارا اصل مقصد ہے مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کو حل کرنا جہاں $D = b^2 - 4ac < 0$ ہو، جو کہ حقیقی اعداد کے نظام میں ممکن نہیں ہے۔

5.2 پیچیدہ اعداد (Complex Numbers)

مان لیجیے ہم $\sqrt{-1}$ کو علامت 'i' سے ظاہر کرتے ہیں۔ تب ہمارے پاس ہے $i^2 = -1$ ۔ اس کا مطلب ہے 'i' مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا حل ہے۔

$(a + ib)$ کی شکل کا نمبر جہاں a اور b حقیقی اعداد میں پیچیدہ عدد کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $2 + i3$ ، $(-1) + i\sqrt{3}$ ،

$4+i\left(\frac{-1}{11}\right)$ پیچیدہ اعداد ہیں۔

پیچیدہ عدد $z=a+ib$ میں a حقیقی حصہ کہلاتا ہے اور اسے Re z سے ظاہر کیا جاتا ہے اور b تصوری (خیالی) حصہ کہلاتا ہے اور اسے Im z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $z=2+i5$ ہو تو $\text{Re}\, z=2$ اور $\text{Im}\, z=5$ ہوگا۔

دو پیچیدہ اعداد $z_1=a+ib$ اور $z_2=c+id$ اس وقت برابر ہوں گے جب $a=c$ اور $b=d$ ہوگا۔

مثال 1 اگر $4x+i(3x-y)=3+i(-6)$ جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں تو x اور y کی قیمت معلوم کرو۔

حل ہمارے پاس ہے $4x+i(3x-y)=3+i(-6)$

حقیقی اور خیالی حصوں کو برابر کرنے پر ہمیں ملتا ہے $4x=3, 3x-y=-6$

جس کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $x=\frac{3}{4}$ اور $y=\frac{33}{4}$

5.3 پیچیدہ اعداد کا الجبرا (Algebra of Complex Numbers)

اس سیکشن میں ہم پیچیدہ اعداد کے الجبر کو واضح (develop) کریں گے۔

5.3.1 دو پیچیدہ اعداد کا جوڑ (*Addition of two complex numbers*)

مان لیجئے $z_1=a+ib$ اور $z_2=c+ib$ کوئی دو پیچیدہ اعداد ہیں۔ تب z_1+z_2 کا جوڑ اس طرح دکھایا جائے گا۔ $(a+b)+i(b+d)$ $=z_1+z_2$ جو کہ پھر ایک پیچیدہ عدد ہے۔

مثال کے طور پر $(2+i3)+(-6+i5)=(2-6)+i(3+5)=-4+i8$

پیچیدہ اعداد کا جوڑ مندرجہ ذیل خصوصیات رکھتا ہے۔ جو ہم بغیر ثابت کئے دے رہے ہیں۔

(i) بندشی قانون (Closure law) دو پیچیدہ اعداد کا جوڑ ایک پیچیدہ عدد ہے، i.e. z_1+z_2 ایک پیچیدہ عدد ہے تمام z_1، z_2 پیچیدہ اعداد کے لئے۔

(ii) تقلیبی قانون (Commutative law) کوئی بھی دو پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کے لیے

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$

(iii) تلازمی قانون (The Associative law) کن ہی یا کسی بھی تین پیچیدہ اعداد z_1، z_2، z_3 کے لیے

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$

(iv) جمعی تماثلی کا وجود (The existence of additive identity) ایک پیچیدہ عدد $0+i0$ (جسے 0 سے ظاہر کرتے ہیں) موجود۔ جسے ہم جمعی تماثلی کہتے ہیں یا صفر پیچیدہ عدد۔ اس طرح ہر پیچیدہ عدد z کے لئے

$$z+0=z$$

(v) جمعی معکوس کا وجود (The existence of additive inverse) ہر ایک پیچیدہ عدد $z=a+ib$ کے لئے ہمارے پاس $-a+i(-b)$ پیچیدہ عدد موجود ہے جسے ہم (–z) سے ظاہر کرتے ہیں، جمعی معکوس یا z کا منفی کہلاتا ہے۔ہم یہ دیکھتے ہیں کہ $z+(z)=0$ (جمعی تماثل)

5.3.2 (Difference of two complex numbers) دو دیے ہوئے پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کے لیے

فرق z_1-z_2 کو اس طرح define کیا جاتا ہے۔

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$$

مثال کے طور پر، $(6+3i)-(2-i)=(6+3i)+(-2+i)=4+4i$

اور $(2-i)-(6+3i)=(2-i)+(-6-3i)=-4-4i$

5.3.3 دو پیچیدہ اعداد کی ضرب (Multiplication of two complex numbers)

مان لیجئے $z_1=a+ib$ اور $z_2=c+id$ کوبھی دو پیچیدہ اعداد ہیں۔تب z_1 اور z_2 کی ضرب اس طرح بیان کی جائے گی۔

$$z_1 z_2=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

مثال کے طور پر $(3+i5)(2+i6)=(3\times2-5\times6)+i(3\times6+5\times2)=-24+i28$

پیچیدہ اعداد کی مندرجہ ذیل خاصیتیں رکھتی ہیں جو ہم بغیر Proof کے نیچے دے رہے ہیں۔

(i) بندشی قانون (Closure Law) دو پیچیدہ اعداد کا حاصل ضرب ایک پیچیدہ عدد ہے۔تمام پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کا ضریب $z_1 z_2$ ایک پیچیدہ عدد ہے۔

(ii) تقلیبی قانون (The commutative law) کن ہی دو پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کے لیے

$$z_1 z_2=z_2 z_1$$

(iii) تلازمی قانون (The associative law) کن ہی تین پیچیدہ اعداد z_1 ، z_2 ، z_3 کے لیے

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

(iv) ضربی تماثلی کا وجود (The existence of multiplicative identity) ایک پیچیدہ عدد $1 + i0$ (1 سے ظاہر ہوتا ہے) وجود میں آتا ہے، ضربی تماثلی کہلاتا ہے، اس طرح $z1 = z$ ہر پیچیدہ عدد z کے لئے۔

(v) ضربی معکوس کا وجود (The existence of multiplicative inverse) ہر ایک غیر صفر پیچیدہ عدد $z = a + ib$ یا $a + bi (a \neq 0, b \neq 0)$ کے لئے، ہمارے پاس پیچیدہ عدد ہے ($\frac{1}{z}$ یا z^{-1} سے ظاہر ہوتا ہے) $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ ، z کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔ اس طرح $z.\frac{1}{z} = 1$ (ضربی تماثلی)

(vi) تقسیمی قانون (The distributive law) کنہیں تین پیچیدہ اعداد z_1 ، z_2 ، z_3 کے لئے۔

(a) $z_1 (z_2 z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(b) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

5.3.4 دو پیچیدہ اعداد کی تقسیم (*Division of two complex numbers*)

دیے ہوئے دو پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کے لیے جہاں $z_2 \neq 0$ خارج قسمت (the quotient) $\frac{z_1}{z_2}$ اس طرح define کیا گیا ہے

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

مثال کے طور پر مان لیجیے $z_1 = 6 + 3i$ اور $z_2 = 2 - i$

تب

$$\frac{z_1}{z_2} = \left((6+3i) \times \frac{1}{2-i}\right) = (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right) = \frac{1}{5}[12 - 3 + i(6+6)] = \frac{1}{5}(9+12i)$$

5.3.5 i کی قوت (*Power of i*)

$i^3 = i^2 i = (-1)\, i = -1$ ، $\qquad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = (i^2)^2 = (-1)^2 i = i$ ، $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 i = -1$

ساتھ ہی ہمارے پاس ہے

$i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$ ، $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$

$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i$ ، $i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$

عام طور پر کسی پر صحیح عدد 'k' کے لیے $i^{4k} = 1$ ، $i^{4k+1} = i$ ، $i^{4k+2} = -1$ ، $i^{4k+3} = -i$

5.3.6 منفی حقیقی عدد کے جزر (The square roots of a negative real number) یہ

نوٹ کریجئے کہ $i^2 = -1$ اور $(-i)^2 = i^2 = -1$

اس لیے، -1 کے جزر i اور $-i$ ہیں۔ حالانہ علامتی طور پر $\sqrt{-1}$ ، اس کا مطلب ہے صرف i ۔

اب ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ i اور $-i$ دونوں مساوات $x^2 + 1 = 0$ یا $x^2 = -1$ کے حل ہیں۔

اسی طرح، $\left(\sqrt{3}i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3(-1) = -3$

$\left(-\sqrt{3}i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2 = -3$

اس لئے، -3 کے جذر $\sqrt{3}\,i$ اور $-\sqrt{3}i$ ہیں۔

دوبارہ، علامت $\sqrt{-3}$ کا مطلب ہے صرف $\sqrt{3}i$ کو ظاہر کرنا اس طرح (i.e,) $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$

عام طور پر اگر a ایک مثبت حقیقی عدد ہے، $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i$

ہم پہلے سے ہی جانتے ہیں کہ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ تمام مثبت حقیقی اعداد a اور b کے لیے۔ یہ نتیجہ اس وقت بھی صحیح ہے جب یا تو $a > 0$ ، $b < 0$ یا $a < 0$ ، $b > 0$ ۔ کیا ہے اگر $a < 0$ ، $b < 0$ ؟ ہمیں جانچ کرنی چاہئے۔

یہ نوٹ کریجئے

$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$ (by assuming $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ for all real numbers)

$= \sqrt{1} = 1$, which is a contradiction to the fact that $i^2 = -1$

اس لیے اگر دونوں a اور b منفی حقیقی اعداد ہیں تو $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$

اس لیے آگے، اگر a اور b صفر ہیں تو صاف طور پر $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}=0$

5.3.7 تماثلات (Identities) ہم ذیل تماثلہ ثابت کرتے ہیں

$(z_1+z_2)^2=z_1^2+z_2^2+2_{z_1z_2}$، تمام پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کے لئے۔

ثبوت ہمارے پاس ہے، $(z_1+z_2)^2=(z_1+z_2)(z_1+z_2)$

$=(z_1+z_2)z_1+(z_1+z_2)z_2$ (تقسیمی قانون)

$=z_1^2+z_2z_1+z_1z_2+z_2^2$ (تقسیمی قانون)

$=z_1^2+z_1z_2+z_1z_2+z_2^2$ (ضرب کا تقلیبی قانون)

$=z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$

اسی طرح ہم مندرجہ ذیل تماثلات ثابت کر سکتے ہیں۔

(i) $(z_1-z_2)^2=z_1^2-2z_1z_2+z_2^2$

(ii) $(z_1+z_2)^3=z_1^3+3z_1^2z_2+3z_1z_2^2+z_2^3$

(iii) $(z_1-z_2)^3=z_1^3-3z_1^2z_2+3z_1z_2^2-z_2^3$

(iv) $z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2)$

حقیقت میں بہت سے دوسرے تماثلات جو تمام حقیقی اعداد کے لیے درست ہیں۔ پیچیدہ اعداد کے لیے بھی درست ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

مثال 2 ذیل کو $a+bi$ کی شکل میں لکھیے:

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

حل (i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)=\frac{-5}{8}i^2=\frac{-5}{8}(-1)=\frac{5}{8}=\frac{5}{8}+i0$

(ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3=2\times\frac{1}{8\times8\times8}\times i^5=\frac{1}{256}\left(i^2\right)^2 i=\frac{1}{256}i$

مثال 3 $(5-3i)^3$ کو $a+bi$ کی شکل میں لکھئے۔

حل ہمارے پاس ہے $(5-3i)^3 = 5^3 - 3\times 5^2 \times (3i) + 3\times 5\,(3i)^2 - (3i)^3$

$$= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i$$

مثال 4 $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ کو $a+ib$ کی شکل میں لکھئے

حل ہمارے پاس ہے $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right) = \left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$

$$= -6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}i^2$$

$$= \left(-6+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)i$$

5.4 ایک پیچیدہ عدد کا مقیاس اور زوجی
(The Modulus and the conjugate of a complex number)

مان لیجئے $z = a+ib$ ایک پیچیدہ عدد ہے۔ تب z کا مقیاس (modules) جسے $|z|$ ظاہر کیا جاتا ہے اسے غیر منفی حقیقی عدد ie $\sqrt{a^2+b^2}$ کہتے ہیں $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ اور z کا زوجی (Conjugate) جسے $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $a-ib$ پیچیدہ ہے۔ i.e., $\bar{z} = a-ib$

مثال کے طور پر، $|3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$, $|2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$

اور $\overline{3+i} = 3-i$, $\overline{2-5i} = 2+5i$, $\overline{-3i-5} = 3i-5$

دیکھئے کہ غیر صفر پیچیدہ عدد z کا ضربی معکوس اسطرح دیا جاتا ہے۔

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

یا $z\bar{z} = |z|^2$

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ provided $|z_2| \neq 0$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \, \bar{z}_2$ (iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (v) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ اگر $z_2 \neq 0$

مثال 5 $2-3i$ کا ضربی معکوس معلوم کیجئے

حل مان لیا $z = 2-3i$

تب $\bar{z} = 2+3i$ اور $|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

اس لئے $2-3i$ کا ضربی معکوس دیا گیا ہے

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

اوپر دیا ہوا عمل نیچے دیئے گئے طریقے سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال 6 ذیل کو $a+ib$ کی شکل میں ظاہر کیجئے۔

(i) $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ (ii) i^{-35}

حل (i) ہمارے پاس ہے،

$$\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2}$$

$$= \frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2} = \frac{3(1+2\sqrt{2}i)}{3} = 1+2\sqrt{2}i$$

(ii) $$i^{-35} = \frac{1}{i^{35}} = \frac{1}{\left(i^2\right)^{17} i} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = i$$

مشق 5.1

تمام دیئے ہوئے پیچیدہ اعداد مشق 1 تا 10 کو $a+ib$ کی شکل میں لکھئے

.1 $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$ .2 i^9+i^{19} .3 i^{-39}

.4 $3(7+i7)+i(7+i7)$ .5 $(1-i)-(-1+i6)$

.6 $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i\frac{5}{2}\right)$ .7 $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$

.8 $(1-i)^4$ .9 $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$ .10 $\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3$

دیئے ہوئے مشق میں 11 تا 13 پیچیدہ عدد کے ضربی معکوس معلوم کیجئے۔

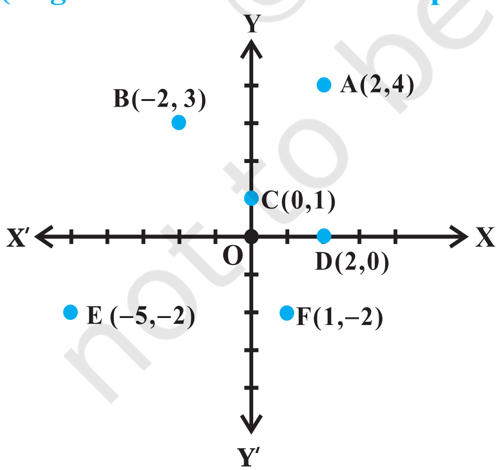
.11 $4-3i$ .12 $\sqrt{5}+3i$ .13 $-i$

.14 نیچے دی ہوئی expression کو $a+ib$ کی شکل میں ظاہر کیجئے:

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.5 آرگنڈ مستوی اور قطبی تعبیر (اظہار) (Argand Plane and Polar Representation)

ہم پہلے یہ جانتے ہیں کہ ہر حقیقی اعداد کے مرتب جوڑے (x,y) کے مطابق ہمیں مستوی XY میں ایک یکتا نقطہ ملتا ہے اور اس کے برعکس باہمی عمودی لائنوں کے سیٹ کے حوالے سے۔ x-axis اور y-axis کہا جاتا ہے۔ پیچیدہ عدد $x+iy$ جو مرتب جوڑے (x,y) کے مطابق جیومیٹری کے انداز سے یکتا نقطہ $P(x,y)$ سے XY مستوی میں ظاہر کیا جا سکتا ہے اور اس کے برعکس۔



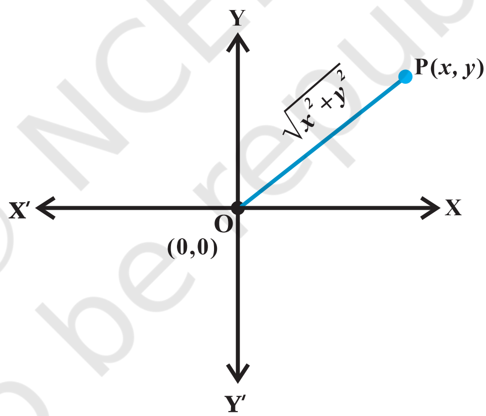
شکل 5.1

کچھ پیچیدہ اعداد جیسے $2+4i$، $-2+3i$، $0+1i$

، $2+0i$ ، $-5-2i$ اور $1+2i$ مرتب جوڑے $(2,4)$ ، $(-2,3)$ ، $(0,1)$ ، $(2,0)$ ، $(-5,-2)$ اور $(1,-2)$ کے مطابق بالترتیب مطابق ہیں جیومیٹری کلی نقطہ A B' C' D' E' اور F سے دکھایا گیا ہے شکل 5.1 میں۔

ایسی مستوی جس میں ہر نقطہ (Point) کو ایک پیچیدہ عدد دیا گیا (assigned) ہو پیچیدہ مستوی یا آرگنڈ مستوی (Argand Plane) کہلاتی ہے۔

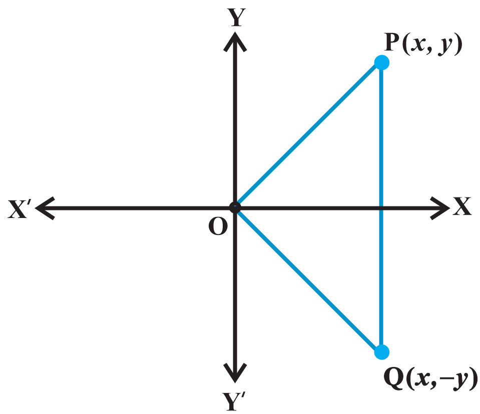
حالانکہ، آرگنڈ مستوی میں پیچیدہ عدد $x+iy=\sqrt{x^2+y^2}$ کا مقیاس (modulus) نقطہ $P(x,y)$ اور $O(0,0)$ کے درمیان فاصلہ ہے۔ شکل 5.2 دیکھئے، x-axis پر نقطہ پیچیدہ اعداد $a+i0$ کے مطابق میں اور y-axis پر نقطہ پیچیدہ اعداد شکل $0+ib$ کے مطابق ہیں ۔ آرگنڈ مستوی میں x-axis اور y-axis کو بالترتیب حقیقی محور (Real axis) اور خیالی محور (Imaginary axis) کہا جاتا ہے۔



شکل 5.2

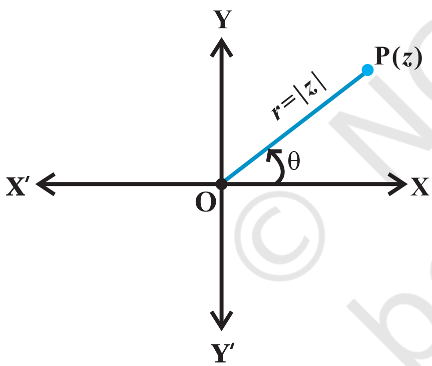
پیچیدہ عدد $z=x+iy$ اور اس کے کنجوگیٹ $z=x-iy$ کو آرگنڈ مستوی میں بالترتیب نقطے $P(x,y)$ اور $P(x,-y)$ سے دکھایا جاتا ہے۔

جیومیٹریکل انداز میں نقطہ (x,y) نقطہ $(x,-y)$ کا شیشہ میں دکھائی دینے والا عکس ہے جو ایک حقیقی محور پر ہے۔ (شکل 5.3 دیکھئے)



شکل 5.3

5.5.1 ایک پیچیدہ عدد کا قطبی اظہار (Polar representation of a complex number)



شکل 5.4

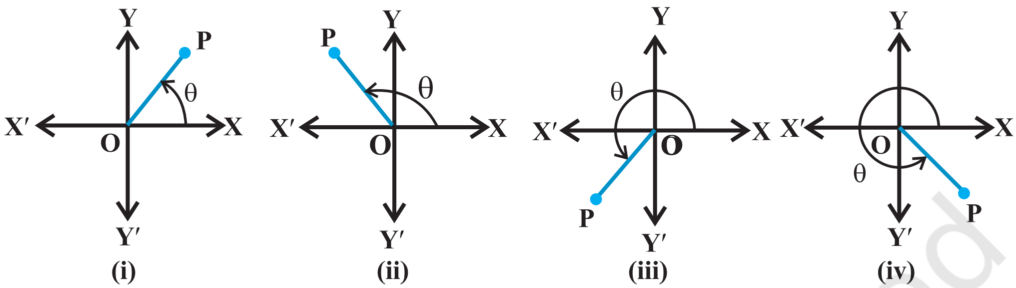
مان لیجیے ایک نقطہ P غیر صفر پیچیدہ عدد $z = x + iy$ کو ظاہر کرتا ہے۔ مان لیجیے سمتی قطعہ خط OP کی لمبائی r ہے اور یہ x-axis کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ شکل 5.4

ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ نقطہ P یکتا طور پر حقیقی اعداد کے مرتب جوڑے (r, θ) سے حاصل کیا گیا ہے جسے ہم نقطہ P کے قطبی مختص (Polar co-ordinates) کہتے ہیں۔

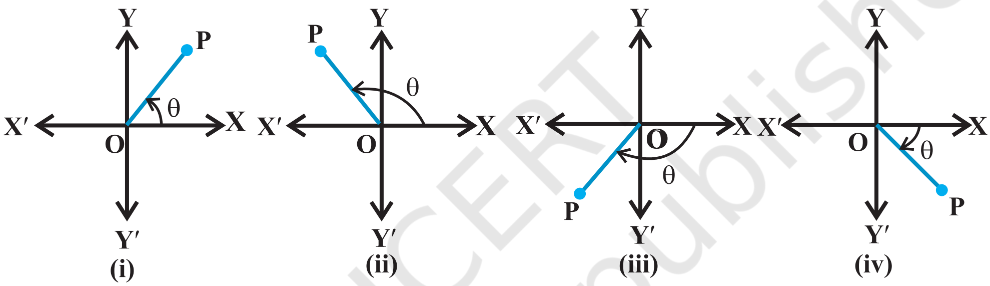
ہمارے پاس ہے $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ اور اسلئے $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بعد والا پیچیدہ عدد کی قطبی شکل کہلاتا ہے۔ یہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ ، z کا مقیاس (modules) ہے اور θ جسے ہم z کا آرگومینٹ یا دلیل (amplitude) کہتے ہیں، اور اسے argz سے ظاہر کرتے ہیں۔

کسی بھی پیچیدہ عدد $z \neq 0$ کیلئے "θ" کی صرف ایک قیمت ہوتی ہے جہاں $0 \le \theta < 2\pi$ ہو۔ حالانکہ کوئی بھی دوسرا وقفہ جس کی لمبائی 2π ہو، مثال کے طور پر $-\pi < \theta < \pi$ اس طرح کا ایک وقفہ ہو سکتا ہے۔ ہم θ کی ایسی قیمت لیں گے تاکہ $-\pi < \theta \le \pi$ ، اسے z کا پرنسپل آرگومینٹ کہا جاتا ہے اور arg z سے ظاہر کیا جاتا ہے جب تک دوسری طرح

سے واضح نہ کیا جائے۔ (شکل 5.5 اور 5.6 دیکھئے)



شکل 5.5 $(0 \le \theta < 2\pi)$



شکل 5.6 $(-\pi < \theta \le \pi)$

مثال 7 پیچیدہ عدد $z = 1 + i\sqrt{3}$ کا قطبی شکل میں اظہار کیجیے۔

حل مان لیا $1 = r\cos\theta$، $\sqrt{3} = r\sin\theta$

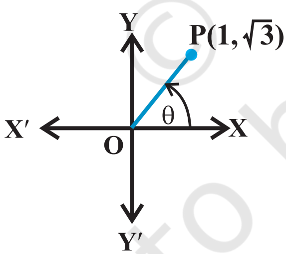
مربع کرنے اور جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$$

یعنی، $r = \sqrt{4} = 2$ (conventionally, $r > 0$)

اس لیے، $\cos\theta = \frac{1}{2}$، $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جو $\theta = \frac{\pi}{3}$ دیتا ہے۔

اس لئے، مطلوب قطبی شکل $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ہے



شکل 5.7

پیچیدہ عدد $z = 1 + i\sqrt{3}$ شکل 5.7 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 8 پیچیدہ عدد $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ کو قطبی شکل میں بدلئے۔

حل دیا ہوا پیچیدہ عدد $\dfrac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3} = -4\left(1-i\sqrt{3}\right) = -4+i4\sqrt{3}$$

مان لیا $\quad -4 = r\cos\theta, 4\sqrt{3} = r\sin\theta$

مربع کرنے اور جوڑنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

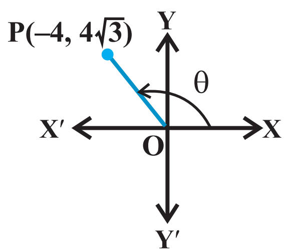
$$16+48 = r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)$$

جو دیتا ہے $\quad r^2 = 64, i.e., r = 8$

اس لئے $\quad \cos\theta = -\dfrac{1}{2}, \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

اس لئے مطلوبہ قطبی شکل $8\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ہے۔



شکل 5.8

مشق 5.2

ہر ایک پیچیدہ اعداد کے مقیاس (modules) اور دلیل (Arguments) معلوم کیجئے (مشق 1 تا 2)

.1 $z = -1 - i\sqrt{3}$ $\qquad$ **.2** $z = -\sqrt{3} + i$

تمام پیچیدہ اعداد (مشق 3 تا 4) کو قطبی شکل میں لکھئے۔

.3 $1-i$ $\qquad$ **.4** $-1+i$ $\qquad$ **.5** $-1-i$

.6 -3 $\qquad$ **.7** $\sqrt{3}+i$ $\qquad$ **.8** i

5.6 دو درجی مساوات (Quadratic equations)

ہم پہلے ہی دو درجی مساوات سے واقف ہیں اور انہیں حقیقی اعداد میں حل کر چکے ہیں جہاں ممیز (discriminant) غیر صفر ہو یعنی، ≥ 0

ہم مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کو لیتے ہیں:

$ax^2 + bx + c = 0$ جہاں a، b، c حقیقی ضریب ہیں اور $a \neq 0$

ساتھ ہی ہم مانتے ہیں کہ $b^2 - 4ac < 0$

اب ہم جانتے ہیں کہ پیچیدہ اعداد کے سیٹ میں منفی حقیقی اعداد کا جذر کیسے معلوم کرتے ہیں۔ اس لئے اوپر دی ہوئی مساوات کا حل پیچیدہ اعداد کے سیٹ میں بھی موجود ہے اور اس طرح دیا گیا ہے۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$$

نوٹ اس وقت کچھ لوگ اس بات کو جاننے میں دلچسپی رکھتے ہوں گے کہ ایک مساوات کے کتنے جز ہوں گے؟ اس سلسلے میں ذیل میں دیا گیا الجبرے پر مبنی بنیادی مسئلہ (Fundamental theorem of Algebra) اس طرح ہے (بغیر ثبوت کے)۔

"کثیر رکنی مساوات کا کم از کم ایک جذر ہوتا ہے"

اس مسئلہ کے نتائج سے ایک بہت ہی اہم نتیجہ پر پہنچے ہیں۔

"'n' درجہ والی کثیر رکنی مساوات کے n جذر ہوتے ہیں"

مثال 9 $x^2 + 2 = 0$ کو حل کیجیے

حل ہمارے پاس ہے $x^2 + 2 = 0$

یا $x^2 = -2$ i.e., $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$

مثال 10 $x^2 + x + 1 = 0$ کو حل کیجیے

حل یہاں، $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

اس لئے، $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ اس کے حل ہیں۔

مثال 11 $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ کو حل کیجیے۔

حل مساوات کا ممیّز (discriminant) یہ ہے

$$1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$$

اس لئے حل ہیں $\dfrac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$

مشق 5.3

ذیل میں دی گئی تمام مساواتیں حل کیجیے:

1. $x^2 + 3 = 0$
2. $2x^2 + x + 1 = 0$
3. $x^2 + 3x + 9 = 0$
4. $-x^2 + x - 2 = 0$
5. $x^2 + 3x + 5 = 0$
6. $x^2 - x + 2 = 0$
7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$
8. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 0$
9. $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$
10. $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

متفرق مثالیں

مثال 12 $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ کا زوجی (Conjugate) معلوم کیجیے

حل ہمارے پاس ہے $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$

$$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

اس لیے $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ کا زوجی $\dfrac{63}{25} + \dfrac{16}{25}i$ ہے۔

مثال 13 مندرجہ ذیل پیچیدہ اعداد کا مقیاس اور دلیل معلوم کیجیے:

(i) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (ii) $\dfrac{1}{1+i}$

حل (i) ہمارے پاس ہے $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{1+i}{1-i}\times\dfrac{1+i}{1+i}=\dfrac{1-1+2i}{1+1}=i=0+i$

اب، ہم رکھتے ہیں $0=r\cos\theta$ ، $1=r\sin\theta$

مربع کرنے اور جمع کرنے پر $r^2=1$ i.e., $r=1$

تا کہ $\cos\theta=0$ ، $\sin\theta=1$

اس لئے $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

اس لئے، $\dfrac{1+i}{1-i}$ کا مقیاس '1' ہے اور دلیل $\dfrac{\pi}{2}$ ہے۔

(ii) ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1+1}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$$

مان لیجئے $\dfrac{1}{2}=r\cos\theta$ ، $-\dfrac{1}{2}=r\sin\theta$

اوپر (i) کی طرح عمل کر کے ہمیں حاصل ہوتا ہے $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

اس لئے $\theta=\dfrac{-\pi}{4}$

اس لئے $\dfrac{1}{1+i}$ کا مقیاس $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ہے اور دلیل $\dfrac{-\pi}{4}$ ہے۔

مثال 14 اگر $x+iy=\dfrac{a+ib}{a-ib}$ ہے تو ثابت کیجئے کہ $x^2+y^2=1$ ہے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$x+iy=\frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)}=\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2qb}{a^2+b^2}i$$

تا کہ، $x-iy=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

اس لئے،

$$= \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1 \; x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

مثال 15 حقیقی θ معلوم کیجئے تا کہ

$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ خالص حقیقی ہو۔

حل ہمارے پاس ہے،

$$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} = \frac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}$$

$$= \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} = \frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} + \frac{8i\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

کیونکہ ہمیں پیچیدہ اعداد حقیقی دیئے گئے ہیں، اس لئے

$$\frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0, \text{i.e.}, \sin\theta = 0$$

اس طرح $\theta = n\pi, n \in \mathbf{Z}$

مثال 16 پیچیدہ عدد $z = \dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ کو قطبی شکل میں لکھئے۔

حل ہمارے پاس ہے $z = \dfrac{i-1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2\left(i+\sqrt{3}-1\sqrt{3}i\right)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

اب رکھیے $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = r\cos\theta, \quad \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = r\sin\theta$

مربع کرنے اور جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{4} = \frac{2\times 4}{4} = 2$$

اس لئے $r=\sqrt{2}$ جس سے حاصل ہوتا ہے $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

اس لئے، $\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{12}$ (کیوں؟)

اس لئے $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ قطبی شکل ہے۔

متفرق مشق

.1 نکالئے $\left[i^{18}+\left(\dfrac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$

.2 کہیں دو پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کیلئے ثابت کیجئے

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2)=\mathrm{Re}\,z_1\,\mathrm{Re}\,z_2-\mathrm{Im}\,z_1\ \mathrm{Im}\,z_2$$

.3 $\left(\dfrac{1}{1-4i}-\dfrac{2}{1+i}\right)\left(\dfrac{3-4i}{5+i}\right)$ کو معیاری شکل میں مختصر کیجئے۔

.4 اگر $x-iy=\sqrt{\dfrac{a-ib}{c-id}}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $x^2+y^2=\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

.5 مندرجہ ذیل کو قطبی شکل میں لکھئے

(i) $\dfrac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\dfrac{1+3i}{1-2i}$

6 تا 9 تمام مساوات کو حل کیجئے۔

.6 $3x^2-4x+\dfrac{20}{3}=0$ .7 $x^2-2x+\dfrac{3}{2}=0$

.8 $27x^2-10x+1=0$ .9 $21x^2-28x+10=0$

.10 اگر $z_1=2-i$ ، $z_2=1+i$ ہو تو $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1+z_2+i}\right|$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

.11 اگر $a+ib=\dfrac{(x+i)^2}{2x^2+1}$ تو ثابت کیجئے کہ $a^2+b^2=\dfrac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$

.12 مان لیجیے $z_1 = 2 - i$ ، $z_2 = -2 + i$ معلوم کیجیے

(i) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{z_1}\right)$ (ii) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z_1\bar{z}_1}\right)$

.13 پیچیدہ عدد $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ کے مقیاس اور دلیل معلوم کیجیے۔

.14 اگر $(x-iy)(3+5i)$ ، $(-6-24i)$ کا زوجی ہے تو حقیقی اعداد x اور y معلوم کیجیے

.15 $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$ کا مقیاس معلوم کیجیے

.16 اگر $(x+iy)^3 = u+iv$ تو ثابت کیجیے کہ $\dfrac{u}{x} + \dfrac{v}{y} = 4\left(x^2 - y^2\right)$ ہے

.17 اگر α اور β دو مختلف دو پیچیدہ اعداد ہوں جبکہ $|\beta| = 1$ تب $\left|\dfrac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|$ معلوم کیجیے۔

.18 $|1-i|^x = 2^x$ کا غیر صفر صحیح عددی حل معلوم کیجیے۔

.19 اگر $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = \mathrm{A}+i\mathrm{B}$, تو ثابت کیجیے کہ

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\left(e^2+f^2\right)\left(g^2+h^2\right) = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2$$

.20 اگر $\left(\dfrac{1+i}{1+i}\right)^m = 1$ تو m کی کم ترین صحیح عددی قدر معلوم کیجیے۔

خلاصہ (Summary)

- $a+ib$ کی شکل کا عدد، جہاں a اور b حقیقی اعداد ہیں، پیچیدہ عدد کہلاتا ہے۔ اس پیچیدہ عدد کا a حقیقی حصہ کہلاتا ہے اور b خیالی

- مان لیجیے $z_1 = a+ib$ اور $z_2 = c+id$ تب

  (i) $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$

  (ii) $z_1 z_2 = (ac-bd) + i(ad+bc)$

- کسی غیر صفر پیچیدہ عدد $z = a+ib \quad (a \neq 0, b \neq 0)$ کے لیے ایک پیچیدہ عدد $\dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ ملتا

ہے۔ جسے $\frac{1}{z}$ یا z^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ z کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔ تا کہ

$$(a+ib)\left[\frac{a^2}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}\right]=1+i.0=1$$

- کسی بھی صحیح عدد k کے لیے $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$
- پیچیدہ عدد $z=a+ib$ کا زوجی جو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے $\bar{z}=a-ib$ ہوتا ہے۔
- پیچیدہ عدد $z=x+iy$ کی قطبی شکل $r(Cos\theta+iSin\theta)$ ہے۔ جہاں $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (z کا مقیاس) اور $Cos\theta=\frac{x}{r}$، $Sin\theta=\frac{y}{r}$ (θ، z کی دلیل ہے). θ کی قیمت تا کہ $-\pi<\theta\leq\pi$ کی پرنسپل دلیل کہلاتی ہے۔
- n درجہ والی کثیر رکنی مساوات کے n جذر ہوتے ہیں۔
- دو درخی مساوات $ax^2+bx+c=0$ جہاں $a,b,c\in R$ کے حل $x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}i}{2a}$ ہیں $a\neq 0,\sqrt{b^2-4ac}<0$

تاریخ کے اوراق سے

یہ حقیقت کہ حقیقی اعداد کے نظام میں ایک منفی عدد کا جذر المربع نہیں ہوتا یونان کی دین ہے، لیکن اس کا سہرا ہندوستانی ریاضی داں مہاویرا (850 عیسوی) کے سر بندھتا ہے جس نے سب سے پہلے اس شکل کو صاف طور پر بیان کیا۔ وہ اپنی تصنیف Ganitsasara میں بیان کرتا ہے کہ چیزوں کی قدرت میں ایک منفی (مقدار) ایک مربع (مقدار) نہیں ہوتی، یعنی اس کا کوئی جذر المربع نہیں ہوتا۔ ایک دوسرا ریاضی داں بھاسکرا اپنی تصنیف Bijaganita جو 1150 عیسوی میں لکھی گئی تھی، لکھتا ہے کہ منفی مقدار کا کوئی جذر المربع نہیں ہوتا کیونکہ یہ ایک مربع نہیں ہے۔ کارڈن (Cardan) نے (1545) میں درج ذیل مسئلہ کے حل پر غور کیا۔

$$xy=40,\quad x+y=10$$

اس نے حل کیا $x = 5 + \sqrt{-15}$ اور $y = 5 - \sqrt{-15}$ درج بالا مثال کے حل کے طور پر جس کو اس نے یہ کہہ کر رد کر دیا ہے یہ اعداد بیکار ہیں۔ البرٹ گرارڈ (Albert Girard) (1625 عیسوی) نے منفی اعداد کے جذر المربع کو قبول کر لیا اور کہا کہ اس سے ہم مساوات کے اتنے ہی جذر معلوم کر سکتے ہیں جتنا اس کا درجہ ہوتا ہے۔ یولر (Euler) پہلا شخص تھا جس نے علامت $i = \sqrt{-1}$ سے متعارف کرایا اور ڈبلیو۔ آر۔ ہمیلٹن (W.R.Hamilton) (1830 عیسوی) نے پیچیدہ عدد $a + ib$ کو حقیقی عدد کے ایک مرتب جوڑ (a,b) سے متعلق کیا۔ اسطرح اس نے ایک خالص ریاضی کی تعریف دی اور تصوراتی اعداد کے استعمال کو ختم کیا۔