16

प्रायिकता एवं प्रायिकता बंटन
(Probability and Probability Distribution)

16.01 भूमिका (Introduction)

पूर्व कक्षा में हम प्रायिकता को किसी यादृच्छिक परीक्षण की घटनाओं के घटित होने अथवा घटित नहीं होने की अनिश्चितता के आंकिक माप के रूप में पढ़ चुके है। साथ ही समसंभाव्य परिणामों की अवस्था में प्रायिकता के अभिगृहितीय दृष्टिकोण तथा चिरसम्मत सिद्धान्त का भी अध्ययन किया जा चुका है।

इस अध्याय में किसी घटना की सप्रतिबंध प्रायिकता (जब एक घटना घटित हो चुकी हो तथा दूसरी घटना घटित हो रही हो) का अध्ययन करेंगे। सप्रतिबंध प्रायिकता की अवधारणा की सहायता से स्वतंत्र घटनाओं, प्रायिकता के गुणन नियम, प्रतिलोम प्रायिकता ज्ञात करने के लिए बेज प्रमेय के बारे में समझेंगे। इस अध्याय के उत्तरार्द्ध में यादृच्छिक चर तथा इसके प्रायिकता बंटन व किसी प्रायिकता बंटन के माध्य व प्रसरण के बारे में भी अध्ययन करेंगे। अन्त में एक महत्वपूर्ण असंतत प्रायिकता बंटन (द्विपद बंटन) का अध्ययन करेंगे।

16.02 सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional Probability)

सप्रतिबंध प्रायिकता की अवधारणा को समझने के लिए एक ऐसे यादृच्छिक परीक्षण पर विचार करते है जिसके परिणाम समसंभाव्य है।

दो न्याय्य सिक्कों को उछालने के परीक्षण पर विचार करते हैं जिसका प्रतिदर्श समष्टि निम्न है:

$$S=\{HH, HT, TH, TT\},$$ जहाँ H = चित, T = पट।

चूंकि दोनों सिक्के न्याय्य है अतः हम प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक प्रतिदर्श बिन्दु की प्रायिकता $1/4$ निर्दिष्ट कर सकते है। माना A घटना ''कम से कम एक चित प्रकट होना'' तथा B घटना ''प्रथम सिक्के पर पट प्रदर्शित होना'' को निरूपित करते है।

तब $$A=\{HT, TH, HH\},\ B=\{TH, TT\}$$

अतः $$P(A)=P(\{HT\})+P(\{TH\})+P(\{HH\})$$
$$=1/4+1/4+1/4=3/4$$

तथा $$P(B)=P(\{TH\})+P(\{TT\})$$
$$=1/4+1/4=1/2$$

साथ ही $$A\cap B=\{TH\}$$

अतः $$P(A\cap B)=P(\{TH\})=1/4$$

अब माना हमें घटना A की प्रायिकता ज्ञात करनी है जबकि घटना B घटित हो चुकी हो। घटना B के घटित होने की जानकारी होने पर यह निश्चित है कि घटना A की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए उन प्रतिदर्श बिन्दुओं पर विचार नहीं किया जायेगा जिनमें पहले सिक्के पर पट नहीं है। अतः घटना B का वह प्रतिदर्श बिन्दु जो घटना A के भी अनुकूल है; TH है।

B को प्रतिदर्श समष्टि मानते हुए घटना A की प्रायिकता $=1/2$ या घटना A के घटित होने की प्रायिकता जबकि घटना B घटित हो चुकी हो $=1/2$

घटना A की यह प्रायिकता सप्रतिबंध प्रायिकता कहलाती है तथा इसे $P(A/B)$ से निरूपित करते हैं।

अर्थात् $$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{1}{2}$$

घटना A की सप्रतिबंध प्रायिकता $P(A/B)$ को निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है।

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{(A\cap B)\text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}{B\text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}$$

$$=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

अंश व हर को प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की कुल संख्या से विभाजित करने पर $P(A/B)$ को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

जो केवल तभी वैध है जबकि $P(B)\neq 0$

परिभाषाः यदि किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित A तथा B दो घटनाएँ हो, तो घटना B के घटित होने की जानकारी होने पर घटना A की सप्रतिबंध प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात की जाती हैः

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)};\ P(B)\neq 0$$

इसी प्रकार घटना A के घटित होने की जानकारी होने पर घटना B की सप्रतिबंध प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात की जा सकती है

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)};\ P(A)\neq 0$$

16.3 सप्रतिबंध प्रायिकता के गुणधर्म (Properties of conditional probability)

माना A तथा B किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ है तब

(i) $$P\left(\frac{S}{B}\right)=P\left(\frac{B}{B}\right)=1$$

हम जानते है कि $$P\left(\frac{S}{B}\right)=\frac{P(S\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

पुनः $$P\left(\frac{B}{B}\right)=\frac{P(B\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

अतः $$P\left(\frac{S}{B}\right)=P\left(\frac{B}{B}\right)=1$$

(ii) $$P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)=1-P\left(\frac{A}{B}\right)$$

गुण (i) से $$P\left(\frac{S}{B}\right)=1$$

$\Rightarrow$ $$P\left(\frac{A\cup \bar{A}}{B}\right)=1 \qquad [\because S=A\cup \bar{A}]$$

$\Rightarrow$ $$P\left(\frac{A}{B}\right)+P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)=1 \qquad [\because A \text{ तथा } \bar{A} \text{ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं}]$$

अतः $$P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)=1-P\left(\frac{A}{B}\right).$$

(iii) यदि प्रतिदर्श समष्टि S की A तथा B कोई दो घटनाएँ हो तथा F एक अन्य घटना इस प्रकार से हो कि $P(F)\neq 0$ तब

(a) $$P\left(\frac{A\cup B}{F}\right)=P\left(\frac{A}{F}\right)+P\left(\frac{B}{F}\right)-P\left(\frac{A\cap B}{F}\right)$$

तथा यदि A व B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो, तो

(b) $$P\left(\frac{A\cup B}{F}\right)=P\left(\frac{A}{F}\right)+P\left(\frac{B}{F}\right)$$

हम जानते है कि

$$P\left(\frac{A\cup B}{F}\right)=\frac{P\left[(A\cup B)\cap F\right]}{P(F)}$$

$$=\frac{P\left[(A\cap F)\cup(B\cap F)\right]}{P(F)}$$

$$=\frac{P(A\cap F)+P(B\cap F)-P(A\cap B\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}+\frac{P(B\cap F)}{P(F)}-\frac{P\left[(A\cap B)\cap F\right]}{P(F)}$$

$$=P\left(\frac{A}{F}\right)+P\left(\frac{B}{F}\right)-P\left(\frac{A\cap B}{F}\right).$$

विशेष स्थिति: यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो, तो $P\left(\frac{A\cap B}{F}\right)=0$

अतः $$P\left(\frac{A\cup B}{F}\right)=P\left(\frac{A}{F}\right)+P\left(\frac{B}{F}\right).$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. यदि $P(A)=6/11$, $P(B)=5/11$ और $P(A\cup B)=7/11$ हो, तो ज्ञात कीजिए।

(i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A/B)$ (iii) $P(B/A)$

हल: (i) हम जानते है कि $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$\Rightarrow$ $$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{6}{11}+\frac{5}{11}-\frac{7}{11}=\frac{4}{11}$$

(ii) $$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{4/11}{5/11}=\frac{4}{5}$$

(iii) $$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{4/11}{6/11}=\frac{2}{3}$$

उदाहरण-2. एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/असत्य प्रकार के आसान प्रश्न, 200 सत्य/असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न, 500 बहु-विकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न तथा 400 बहु-विकल्पीय प्रकार के कठिन प्रश्नों का संग्रह है। यदि प्रश्नों के संग्रह में से एक प्रश्न यादृच्छया चुना जाए तो इस प्रश्न के आसान होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि यह प्रश्न बहु-विकल्पीय प्रश्न है?

हल: माना A घटना 'चुने गए प्रश्न का आसान प्रश्न होना' और B घटना 'चुने गए प्रश्न का बहु-विकल्पीय प्रश्न होना' को निरूपित करते है। हमें $P(A/B)$ ज्ञात करना है।

$$n(A)=300+500=800,\ n(B)=500+400=900$$

समुच्चय $A\cap B$ में चुने गए प्रश्न का आसान बहु-विकल्पीय प्रश्न होना प्रदर्शित करता है।

अतः $$n(A\cap B)=500$$

अभीष्ट प्रायिकता $$=P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{500}{900}=\frac{5}{9}.$$

उदाहरण-3. एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है। निम्न प्रत्येक अवस्था में $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

(i)	A : तीसरी उछाल पर चित,	B : पहली दोनों उछालों पर चित
(ii)	A : कम से कम दो चित,	B : अधिकतम दो चित
(iii)	A : अधिकतम दो पट	B : कम से कम एक पट

हल: एक सिक्के को तीन बार उछालने के परीक्षण में प्रतिदर्श समष्टि निम्न है:

$$S=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$$

(i) $A=\{HHH,\ HTH,\ THH,\ TTH\},\ B=\{HHH,\ HHT\}$

तब $$A\cap B=\{HHH\}$$

$\Rightarrow$ $$n(A)=4,\ n(B)=2,\ n(A\cap B)=1$$

अतः $$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{2}.$$

(ii) $A=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH\},\ B=\{HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$

तब $$A\cap B=\{HHT,\ HTH,\ THH\}$$

$\Rightarrow$ $$n(A)=4,\ n(B)=7,\ n(A\cap B)=3$$

अतः $$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{3}{7}.$$

(iii) $A=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$,

$B=\{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

तब $A\cap B=\{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$

$\Rightarrow$ $n(A)=7,\ n(B)=7,\ n(A\cap B)=6$

अतः $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{6}{7}.$

उदाहरण-4. एक काले तथा एक लाल पासे को क्रम में उछाला गया है। तब (i) पासों पर प्राप्त अंकों का योग 9 से अधिक होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह ज्ञात है कि काले पासे पर अंक 5 प्रकट हुआ है।

(ii) पासों पर प्राप्त अंकों का योग 8 होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह ज्ञात है कि लाल पासे पर प्रकट अंक 4 से कम है।

हल: (i) माना A घटना 'पासों पर प्राप्त अंकों का योग 9 से अधिक होना' तथा B घटना 'काले पासे पर अंक 5 का प्रकट होना' को निरूपित करते है। हमें $P(A/B)$ ज्ञात करना है।

तब $A=\{(5, 5), (6, 4), (4, 6), (6, 5), (5, 6), (6, 6)\}$, $B=\{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$

$A\cap B=\{(5, 5), (5, 6)\}$

$\Rightarrow$ $n(A)=6,\ n(B)=6,\ n(A\cap B)=2$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $=P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$

(ii) माना A घटना 'पासों पर प्राप्त अंकों का योग 8 होना' तथा B घटना' लाल पासें पर प्रकट अंक का 4 से कम होना' को निरूपित करते है। हमें $P(A/B)$ ज्ञात करना है।

तब $A=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$B=\{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3),$

$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

$A\cap B=\{(6, 2), (5, 3)\}$

$\Rightarrow$ $n(A)=5,\ n(B)=18,\ n(A\cap B)=2$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $=P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}.$

उदाहरण-5. एक पासे को तीन बार उछाला गया है इस प्रयोग से संबंधित घटनाओं A व B को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है:

A : तीसरी उछाल पर अंक 4 का प्रकट होना, B : पहली दो उछालों पर क्रमशः 6 तथा 5 प्रकट होना।

इस अवस्था में $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

हल: एक पासे को तीन बार उछालने के परीक्षण से संबद्ध प्रतिदर्श समष्टि में प्रतिदर्श बिन्दुओं की कुल संख्या $=6\times6\times6=216$

तब $A=\{(1, 1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 4), (1, 5, 4), (1, 6, 4)$

$(2, 1, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 4), (2, 5, 4), (2, 6, 4)$

$(3, 1, 4), (3, 2, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 4), (3, 5, 4), (3, 6, 4)$

$(4, 1, 4), (4, 2, 4), (4, 3, 4), (4, 4, 4), (4, 5, 4), (4, 6, 4)$

$$(5, 1, 4), (5, 2, 4), (5, 3, 4), (5, 4, 4), (5, 5, 4), (5, 6, 4)$$
$$(6, 1, 4), (6, 2, 4), (6, 3, 4), (6, 4, 4), (6, 5, 4), (6, 6, 4)\}$$

$$B = \{(6, 5, 1), (6, 5, 2), (6, 5, 3), (6, 5, 4), (6, 5, 5), (6, 5, 6)\}$$

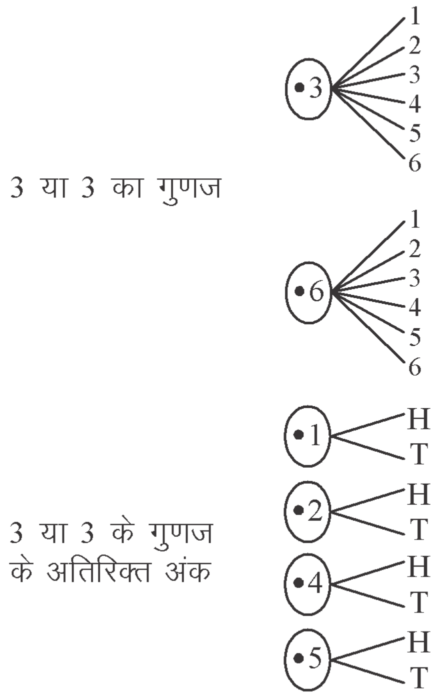
$$A \cap B = \{(6, 5, 4)\}$$

$$\Rightarrow \quad n(A) = 36,\ n(B) = 6,\ n(A \cap B) = 1$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{6}.$

उदाहरण-6. एक पासे को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि पासे पर प्राप्त अंक 3 या 3 का गुणज हो, तो पासे को पुनः उछाला जाता है तथा यदि प्राप्त अंक 3 या 3 के गुणज के अतिरिक्त हो तो एक सिक्के को उछाला जाता है। यदि घटना 'कम से कम एक पासे पर 3 प्रकट होना' का घटित होना दिया गया है तो घटना 'सिक्के पर पट आना' की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः उपर्युक्त परीक्षण के परिणामों को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है



आकृति 16.01

इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि निम्न हैः

$$S = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)$$
$$(6, 5), (6, 6), (1, H), (1, T), (2, H), (2, T), (4, H), (4, T), (5, H), (5, T)\}$$

माना A घटना 'सिक्के पर पट आना' तथा B घटना 'कम से कम एक पासे पर 3 प्रकट होना' को निरूपित करते है।

तब $\quad A = \{(1, T), (2, T), (4, T), (5, T)\};\ B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 3)\}$

$$A \cap B = \phi$$

$$\Rightarrow \quad n(A) = 4,\ n(B) = 7,\ n(A \cap B) = \phi$$

अभीष्ट प्रायिकता $= P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{0}{7} = 0$

प्रश्नमाला 16.1

1. यदि $P(A)=7/13, P(B)=9/13$ और $P(A\cap B)=4/13$ हो तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

2. यदि $P(B)=0.5$ और $P(A\cap B)=0.32$ हो तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $2P(A)=P(B)=5/13$ और $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{2}{5}$ हो तो $P(A\cup B)$ ज्ञात कीजिए।

4. यदि $P(A)=0.6, P(B)=0.3$ और $P(A\cap B)=0.2$ हो तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ तथा $P\left(\frac{B}{A}\right)$ ज्ञात कीजिए।

5. यदि $P(A)=0.8, P(B)=0.5$ और $P\left(\frac{B}{A}\right)=0.4$ हो तो ज्ञात कीजिए।

   (i) $P(A\cap B)$ (ii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (iii) $P(A\cup B)$

6. एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि दोनों बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लडका है तो दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

7. दो सिक्कों को एक बार उछाला गया हैं इस प्रयोग से संबंधित घटनाओं A व B को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है, तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।
   (i) A : एक सिक्के पर पट प्रकट होता है ; B : एक सिक्के पर चित प्रकट होता है।
   (ii) A : कोई पट प्रकट नहीं होता है ; B : कोई चित प्रकट नहीं होता है।

8. एक पारिवारिक चित्र में माता, पिता व पुत्र यादृच्छया सीधी रेखा में खड़े है। इससे सम्बद्ध घटनाओं A व B को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है, तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए। यदि
   A : पुत्र एक सिरे पर खड़ा है,
   B : पिता मध्य में खड़े है

9. एक न्याय्य पासे की उछाला गया है। घटनाओं $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3\}$ व $C=\{2, 3, 4, 5\}$ के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

   (i) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ व $P\left(\frac{B}{A}\right)$ (ii) $P\left(\frac{A}{C}\right)$ व $P\left(\frac{C}{A}\right)$ (iii) $P\left(\frac{A\cup B}{C}\right)$ व $P\left(\frac{A\cap B}{C}\right)$

10. यह दिया गया है कि दो पासों को फेंकने पर प्राप्त अंक भिन्न-भिन्न है। दोनों पासों पर प्राप्त अंकों का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

11. एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक अंक लिख कर रखे गए और उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया। इस बक्से में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर अंक 3 से अधिक है, तो इस अंक के सम होने की क्या प्रायिकता है?

12. एक विद्यालय में 1000 विद्यार्थी है, जिनमें से 430 लड़कियाँ है। यह ज्ञात है कि 430 में से 10% लड़कियाँ कक्षा XII में पढ़ती है। क्या प्रायिकता है कि एक यादृच्छता चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है यदि यह ज्ञात है कि चुना गया विद्यार्थी लड़की है?

13. एक पासे को दो बार उछाला गया तथा प्रकट हुए अंकों का योग 6 पाया गया। अंक 4 के कम से कम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

14. एक सिक्के को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो, तो सिक्के को पुनः उछाले परन्तु यदि सिक्के पर पट प्रकट हो तो एक पासे को फेंके। यदि घटना 'कम से कम एक पट प्रकट होना' का घटित होना दिया गया है तो घटना' पासे पर 4 से बड़ा अंक प्रकट होना' की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16.04 प्रायिकता का गुणन नियम (Multiplication theorem on probability)

माना एक प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ A तथा B है। तब समुच्चय $A \cap B$ घटनाओं A तथा B के युगपत घटित होने को प्रदर्शित करता है। घटना $A \cap B$ को AB से भी निरूपित किया जाता है।

हम जानते है कि घटना A की सप्रतिबंध प्रायिकता

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)};\ P(B) \neq 0$$

$\Rightarrow$
$$P(A \cap B) = P(B)P\left(\frac{A}{B}\right) \quad \text{(i)}$$

पुनः
$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)};\ P(A) \neq 0$$

या
$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad [\because\ B \cap A = A \cap B]$$

अतः
$$P(A \cap B) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) \quad \text{(ii)}$$

(i) व (ii) से
$$P(A \cap B) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)P\left(\frac{A}{B}\right),\ \text{जहाँ } P(A) \neq 0 \text{ व } P(B) \neq 0$$

यही प्रायिकता का गुणन नियम कहलाता है।

टिप्पणीः माना A, B व C किसी प्रतिदर्श समष्टि की घटनाएँ है तो

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P\frac{B}{A}P\frac{C}{A \cap B}$$
$$= P(A)P\left(\frac{B}{A}\right)P\left(\frac{C}{AB}\right)$$

अर्थात् प्रायिकता के गुणन नियम का विस्तार तीन या तीन से अधिक घटनाओं के लिए भी किया जा सकता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. एक थैलें में 10 सफेद और 15 काली गेंदे है। दो गेंदे एक के बाद एक निकाली जाती है और पहली गेंद दूसरी के निकालने से पहले वापस नहीं रखी जाती है, तब पहली गेंद के सफेद तथा दूसरी गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः माना A "पहली सफेद गेंद के निकलने" की घटना है तथा B "दूसरी काली गेंद के निकलने" की घटना है।

हमें $(A \cap B)$ ज्ञात करना है।

अतः $P(A) = P$ (पहली सफेद गेंद का निकलना) $= \frac{{}^{10}C_1}{{}^{25}C_1} = \frac{10}{25}$

दिया गया है कि पहली गेंद दूसरी के निकालने से पहले वापस नहीं रखी जाती है अतः अब थैले में 9 सफेद तथा 15 काली गेंदे रह गई है। इसलिए, दूसरी काली गेंद के निकलने की प्रायिकता जबकि पहली गेंद का सफेद होना हमें ज्ञात है यह घटना B की सप्रतिबंध प्रायिकता $P(B/A)$ ही है।

$\therefore$
$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{{}^{15}C_1}{{}^{24}C_1} = \frac{15}{24}$$

प्रायिकता के गुणन नियम से
$$P(A \cap B) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{10}{25} \times \frac{15}{24} = \frac{1}{4}.$$

उदाहरण-8. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक-एक करके तीन पत्ते बिना प्रतिस्थापन के निकाले गए। इनमें से पहले दो पत्तों का बादशाह तथा तीसरे पत्ते का बेगम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: माना K 'निकाले गए पत्ते का बादशाह होना' तथा Q 'निकाले गए पत्ते का बेगम होना' की घटना को निरूपित करते हे हमें $P(KKQ)$ ज्ञात करना है।

अब $P(K) = P$ (पहली बार में निकाले गए पत्ते का बादशाह होना) $= 4/52$

पहले पत्ते के निकाले जाने के बाद अब गड्डी में 51 पत्ते शेष है जिनमें 3 बादशाह है।

अतः $P\left(\frac{K}{K}\right) = P$ (दूसरी बार में निकाले गए पत्ते का बादशाह होना जबकि यह ज्ञात है कि पहले बादशाह निकाला जा चुका है) $= \frac{3}{51}$

दो पत्तों के निकाले जाने के बाद अब गड्डी में 50 पत्ते शेष है।

अब $P\left(\frac{Q}{KK}\right) = P$ (तीसरी बाद में निकाले गए पत्ते का बेगम होना जबकि यह ज्ञात है कि 2 बादशाह निकाले जा चुके है) $= \frac{4}{50}$

प्रायिकता के गुणन नियम से

$$P(KKQ) = P(K)P\left(\frac{K}{K}\right)P\left(\frac{Q}{KK}\right)$$

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}.$$

16.05 स्वतंत्र घटनाएँ (Independent events)

यदि A तथा B दो घटनाएँ इस प्रकार की हों कि किसी एक घटना का घटित होना दूसरी घटना के घटित होने पर कोई प्रभाव नहीं डालती हो तो वे घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती है।

दो घटनाओं A तथा B को स्वतंत्र घटनाएँ कहते है

यदि $$P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A) \text{ जबकि } P(B) \neq 0$$

तथा $$P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) \text{ जबकि } P(A) \neq 0$$

प्रायिकता के गुणन प्रमेय से

$$P(A \cap B) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right)$$

यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हो तो

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

टिप्पणी: तीन घटनाएँ A, B व C स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती है यदि और केवल यदि

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

व $$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

यदि उपर्युक्त में से कम से कम एक भी शर्त सत्य नहीं होती है तो दी गई घटनाओं को स्वतंत्र नहीं कहा जा सकता है।

उदाहरणार्थ: एक अनभिनत पासे को दो बार उछाला गया है। मानाकि A तथा B क्रमशः घटनाओं 'पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना 'और' दूसरी उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' को निरूपित करते है तब हमें इन घटनाओं के स्वातंत्र्य का परीक्षण करना है।

एक पासे को दो बार उछालने पर निर्मित प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow \qquad n(S) = 36$

पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होने का अर्थ है कि पहली उछाल पर विषम संख्या तथा दूसरी उछाल पर कोई भी संख्या प्राप्त हो तब

$$n(A) = 18$$

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार $\qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

तथा $\qquad P(A \cap B) = P$ (दोनों उछालों पर विषम अंक प्राप्त होना) $= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

[(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5) इस परीक्षण से संबंधित प्रतिदर्श बिन्दु है।]

स्पष्टतः $\qquad P(A \cap B) = 1/4 = 1/2 \times 1/2 = P(A)P(B)$

अतः घटनाएँ A व B स्वतंत्र घटनाएँ है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-9. घटनाएँ A तथा B इस प्रकार की है कि $P(A) = 1/2,\ P(B) = 7/12$ तथा P(A – नहीं या B – नहीं) $= 1/4$ तब क्या A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ है?

हल: दिया है $\qquad P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{7}{12},\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{1}{4}$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \qquad P(\overline{A \cap B}) = \frac{1}{4} \qquad \left[\because P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})\right]$

$\Rightarrow \qquad 1 - P(A \cap B) = \frac{1}{4} \qquad \left[\because P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)\right]$

$\Rightarrow \qquad P(A \cap B) = 1 - 1/4 = 3/4$

साथ ही $\qquad P(A)P(B) = 1/2 \times 7/12 = 7/24$

$\because \qquad P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

अतः A तथा B स्वतंत्र घटनाएं नहीं हैं।

उदाहरण-10. एक न्याय्य सिक्के और एक अनभिनत पासे को उछाला गया हैं माना A घटना 'सिक्के पर चित प्रकट होना' तथा B घटना 'पासे पर अंक 3 प्रकट होना' को निरूपित करते है। निरीक्षण कीजिए कि घटनाएँ A और B स्वतंत्र है या नहीं।

हलः इस प्रयोग से सम्बद्ध प्रतिदर्श समष्टि निम्न है–

$$S = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$$

तथा $A = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6)\}$, $B = \{(H, 3), (T, 3)\}$

$\therefore$ $$A \cap B = \{(H, 3)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

स्पष्टतया $$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

अतः घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण-11. एक पासे पर अंक 1, 2, 3 लाल रंग से तथा 4, 5, 6 हरे रंग से लिखे गए है। इस पासे को उछाला गया है। माना A घटना 'अंक सम है' तथा B घटना 'अंक लाल है' को निरूपित करते है। क्या घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र है?

हलः एक पासे को एक बार उछालने पर प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

तब $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ तथा $A \cap B = \{2\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

स्पष्टतया $$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A).P(B).$$

अतः घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ नहीं हैं।

उदाहरण-12. एक पासे को एक बार उछाला गया है। माना A घटना 'पासे पर प्राप्त अंक के 3 का गुणज होना' तथा B घटना 'पासे पर प्राप्त अंक सम होना' को निरूपित करते है। क्या घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र है?

हलः एक पासे को एक बार उछालने पर प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

तब $A = \{3, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ तथा $A \cap B = \{6\}$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

स्पष्टतया $$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A)P(B)$$

अतः घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण-13. घटनाएँ A तथा B इस प्रकार की है कि $P(A) = 1/2$, $P(A \cup B) = 3/5$ तथा $P(B) = r$ तब r ज्ञात कीजिए। यदि

(i) ये घटनाएँ परस्पर अपवर्जी है।

(ii) ये घटनाएँ स्वतंत्र है।

हलः (i) यदि घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो, तो

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$3/5 = 1/2 + r \quad \Rightarrow \quad r = 1/10$$

(ii) यदि घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हो, तो

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (1/2)r$$

दिया है $\quad P(A \cup B) = 3/5$

$\Rightarrow \quad P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/5$

$\Rightarrow \quad 1/2 + r - P(A \cap B) = 3/5$

$\Rightarrow \quad 1/2 + r - (1/2)r = 3/5$

$\Rightarrow \quad 1/2 + (1/2)r = 3/5$

$\Rightarrow \quad r/2 = 3/5 - 1/2$

$\Rightarrow \quad r = 1/5$

उदाहरण-14. तीन सिक्कों को उछाला गया है। माना A घटना 'तीन चित या तीन पट प्राप्त होना'; B घटना' कम से कम दो चित प्राप्त होना' तथा C घटना 'अधिकतम दो चित प्राप्त होना' को निरूपित करते है। ज्ञात कीजिए कि निम्न युग्मों (A, B), (A, C) तथा (B, C) में से कौन-कौन से स्वतंत्र घटनाएँ है? कौन-कौन से युग्म आश्रित घटनाएँ है?

हलः तीन सिक्कों को उछालने के परीक्षण से प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि निम्न है:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

तब $\quad A = \{HHH, TTT\}, \; B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

तथा $\quad C = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT\}$

इस अवस्था में

$$A \cap B = \{HHH\}, \; A \cap C = \{TTT\} \text{ तथा } B \cap C = \{HHT, HTH, THH\}$$

$$P(A) = 2/8 = 1/4, \quad P(B) = 4/8 = 1/2, \quad P(C) = 7/8$$

$$P(A \cap B) = 1/8, \quad P(A \cap C) = 1/8, \quad P(B \cap C) = 3/8$$

स्पष्टतया $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/4 \times 1/2 = 1/8$

इसी प्रकार $\quad P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$

तथा $\quad P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$

अतः A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ है जबकि A व C तथा B व C आश्रित घटनाएँ हैं।

उदाहरण-15. यदि किसी यादृच्छिक प्रयोग से सम्बद्ध A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ है तो सिद्ध कीजिए:

(i) $\bar{A}$ तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ है।

(ii) A तथा $\bar{B}$ स्वतन्त्र घटनाएँ है

(iii) $\bar{A}$ तथा $\bar{B}$ भी स्वतन्त्र घटनाएँ है।

हलः दिया है कि A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ है अतः

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

वेन आरेख से स्पष्ट है कि $A \cap B$ तथा $\bar{A} \cap B$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ इस प्रकार से है कि

$$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$$

प्रायिकता के योग प्रमेय से

$$P(B)=(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$$

$$\Rightarrow \qquad P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$$

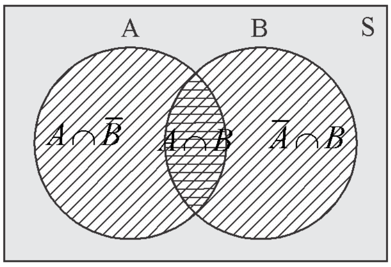
$$=P(B)-P(A)P(B) \qquad [\because P(A\cap B)=P(A)P(B)]$$

$$=P(B)[1-P(A)]$$

$$=P(B)P(\overline{A})$$

$$=P(\overline{A})P(B)$$

अतः $\overline{A}$ तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।



आकृति 16.02

(ii) वेन आरेख से स्पष्ट है कि $A\cap B$ तथा $A\cap\overline{B}$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ इस प्रकार है कि

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$$

प्रायिकता के योग प्रमेय से

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$$

$$\Rightarrow \qquad P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)[1-P(B)]$$

$$=P(A)P(\overline{B})$$

अतः A तथा $\overline{B}$ स्वतन्त्र घटनाएँ है।

(iii)
$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$$

$$=1-P(A\cup B)$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=[1-P(A)]-P(B)[1-P(A)]$$

$$=[1-P(A)][1-P(B)]$$

$$=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

अतः $\overline{A}$ तथा $\overline{B}$ स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण-16. यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हो तो कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: P (कम से कम एक घटना का घटित होना) $= P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \qquad [\because \text{ घटनाएँ A तथा B स्वतन्त्र है।}]$$

$$= P(A) + P(B)[1 - P(A)]$$

$$= P(A) + P(B)P(\bar{A}) \qquad [\because P(A) + P(\bar{A}) = 1]$$

$$= 1 - P(\bar{A}) + P(B)P(\bar{A})$$

$$= 1 - P(\bar{A})[1 - P(B)]$$

$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$$

प्रश्नमाला 16.2

1. यदि दो घटनाएँ A तथा B इस प्रकार से है कि $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/2$ तथा $P(A \cap B) = 1/8$ तो $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ज्ञात कीजिए।
2. यदि $P(A) = 0.4$, $P(B) = p$ व $P(A \cup B) = 0.6$ तथा A और B स्वतन्त्र घटनाएँ है तब p का मान ज्ञात कीजिए।
3. यदि A और B स्वतन्त्र घटनाएँ है तथा $P(A) = 0.3$ व $P(B) = 0.4$ तब ज्ञात कीजिए।

   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (iv) $P\left(\frac{B}{A}\right)$
4. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ है जहाँ $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ तब ज्ञात कीजिए।

   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap \bar{B})$ (iii) $P(A \cup B)$ (iv) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
5. एक थैले में 5 सफेद, 7 लाल और 8 काली गेंदे है। यदि चार गेंदों को एक-एक कर बिना प्रतिस्थापन के निकाला जाए तो सभी गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. यदि एक पासे को तीन बार उछाला जाये तो कम से कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
7. 52 पत्तों की गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किये दो पत्ते निकाले गए है। इन दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. दो सिक्कों को उछाला गया है। दो चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि यह ज्ञात है कि कम से कम एक चित आ चुका है।
9. एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिन्दी का, 40% अंग्रेजी का और 20% दोनों अखबार पढ़ते है। एक छात्रा को यादृच्छया चुना जाता है।
   (i) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिन्दी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है।
   (ii) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
   (iii) यदि वह अंग्रेजी का अखबार पढती है तो उसके हिन्दी का अखबार भी पढने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
10. A, किसी पुस्तक की 90% समस्याओं को तथा B, उसी पुस्तक की 70% समस्याओं को हल कर सकता है। पुस्तक से यादृच्छया चयनित किसी समस्या को उनमें से कम से कम एक के द्वारा हल किए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
11. तीन विद्यार्थियों को गणित की एक समस्या को हल करने के लिए दिया गया। इन विद्यार्थियों के द्वारा समस्या को हल करने की प्रायिकता क्रमशः 1/2, 1/3 व 1/4 है। समस्या के हल हो जाने की क्या प्रायिकता है?
12. एक थैले में 5 सफेद तथा 3 काली गेंदे है। थैले में से 4 गेंदें उत्तरोतर बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती है। इन गेंदों के एकान्तरतः विभिन्न रंगों के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

13. , d fo' ksk l eL; kd ks A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः 1/2 व 1/3 हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से समस्या को हल करने का प्रयास करते है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) समस्या हल हो जाती है।

(ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

16.06 एक प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन (Partition of a sample space)

घटनाओं $E_1, E_2, ..., E_n$ का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करता है यदिः

(i) $E_i \cap E_j = \phi,\ i = j,\ i,\ j = 1, 2, 3, ..., n$

(ii) $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = S$ तथा

(iii) $P(E_i) > 0,$ प्रत्येक $i = 1, 2, ..., n$

के लिए दूसरे शब्दों में घटनाएं $E_1, E_2, ..., E_n$ प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करती हैं। यदि वे युग्मतः असंयुक्त हैं; समग्र हैं तथा उनकी प्रायिकता शून्येतर है।

उदाहरणार्थः माना कोई घटना E और उसकी पूरक घटना E' प्रतिदर्श समष्टि S का विभाजन है, क्योंकि

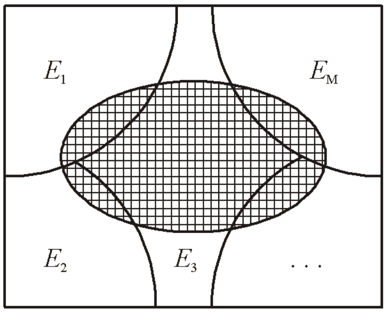
$$E \cap E' = \phi \text{ और } E \cup E' = S.$$

16.07 संपूर्ण प्रायिकता का प्रमेय (Theorem of total probability)

कथनः माना $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है और प्रत्येक घटना $E_1, E_2, ..., E_n$ की प्रायिकता शून्येतर है। मान लीजिए A प्रतिदर्श समष्टि के संगत एक घटना है, तब

$$P(A) = P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right) + ... + P(E_n)P\left(\frac{A}{E_n}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P\left(\frac{A}{E_j}\right)$$



आकृति 16.03

प्रमाणः दिया है $E_1, E_2, ..., E_n$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है।

$\therefore$ $S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$ (1)

और $E_i \cap E_j = \phi \quad \forall\ i \neq j,\ i,\ j = 1, 2, ..., n$

ज्ञात है कि किसी घटना A के लिए

$$A = A \cap S$$

$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n)$$

$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)$$

$\because$ $A \cap E_i$ और $A \cap E_j$ क्रमशः समुच्चयों E_i और E_j के उपसमुच्चय हैं जो $i \neq j$ के लिए असंयुक्त हैं।

$\therefore$ $i \neq j,\ i,\ j = 1, 2, ..., n$ के लिए $A \cap E_i$ और $A \cap E_j$ भी असंयुक्त हैं।

$\therefore$ $P(A) = P\left[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)\right]$

$$= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

अब $P(A \cap E_i) = P(E_i)P\left(\frac{A}{E_i}\right),$ $\quad [\because\ P(E_i) \neq 0\ \forall\ i = 1, 2, ..., n]$

प्रायिकता के गुणन नियम से

$$P(A)=P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)+...+P(E_n)P\left(\frac{A}{E_n}\right)$$

या
$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(E_j)P\left(\frac{A}{E_j}\right).$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-17. किसी कक्षा के दो तिहाई विद्यार्थी लड़के है तथा शेष लड़कियाँ है। किसी लड़की के प्रथम श्रेणी प्राप्त करने की प्रायिकता 0.25 व लड़के के प्रथम श्रेणी प्राप्त करने की प्रायिकता 0.28 है। तब यादृच्छया चुने गए किसी विद्यार्थी के प्रथम श्रेणी प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः माना E_1 घटना 'किसी कक्षा में से लड़के का चयन करना', E_2 घटना 'किसी कक्षा में से लड़की का चयन करना' तथा A घटना 'विद्यार्थी को प्रथम श्रेणी प्राप्त होना' को निरूपित करते है।

तब
$$P(E_1)=2/3, P(E_2)=1/3$$

तथा
$$P\left(\frac{A}{E_1}\right)=0.28,\quad P\left(\frac{A}{E_2}\right)=0.25$$

संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय से
$$P(A)=P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)=\frac{2}{3}\times0.28+\frac{1}{3}\times0.25=0.27$$

16.08 बेज प्रमेय (Baye's Theorem)

गणितज्ञ जॉन बेज ने प्रतिलोम प्रायिकता ज्ञात करने की समस्या का समाधान सप्रतिबन्ध प्रायिकता में उपयोग द्वारा किया है। उनके द्वारा बनाया गया सूत्र 'बेज प्रमेय' के नाम से जाना जाता है।

कथनः यदि $E_1,E_2,...,E_n$ अरिक्त घटनाएं हैं, जो कि प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन का निर्माण करती हैं अर्थात् $E_1,E_2,...,E_n$, युग्मतः असंयुक्त हैं और $E_1\cup E_2\cup,...,\cup E_n=S$ और A कोई ऐसी घटना है कि जिसकी प्रायिकता शून्येतर है, तो

$$P\left(\frac{E_i}{A}\right)=\frac{P(E_i)P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n}P(E_j)P\left(\frac{A}{E_j}\right)},\quad i=1,2,3,...,n$$

प्रमाणः हम जानते हैं कि

$$P\left(\frac{E_i}{A}\right)=\frac{P(A\cap E_i)}{P(A)}=\frac{P(E_i)P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{P(A)}$$ (प्रायिकता के गुणन नियम से)

$$=\frac{P(E_i)P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n}P(E_j)P\left(\frac{A}{E_j}\right)}$$ (सम्पूर्ण प्रायिकता के नियम से)

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-18. एक बोल्ट बनाने के कारखाने में मशीने (यंत्र) A, B और C, कुल उत्पादन का क्रमशः 25%, 35% और 40% बोल्ट बनाती है। इन मशीनो के उत्पादन का क्रमशः 5, 4 और 2 प्रतिशत त्रूटिपूर्ण है। बोल्टों के कुल उत्पादन में से एक बोल्ट यादृच्छया निकाला जाता है और वह त्रुटिपूर्ण पाया जाता है। इसकी क्या प्रयिकता है कि यह बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया है?

हलः माना घटनाएं B_1, B_2 तथा B_3 निम्न प्रकार हैं–

B_1 : बोल्ट मशीन A द्वारा बनाया गया है

B_2 : बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया है

B_3 : बोल्ट मशीन C द्वारा बनाया गया है

घटनाएं B_1, B_2, B_3 परस्पर अपवर्जी और परिपूर्ण हैं।

माना घटना E निम्न प्रकार हैः

E : बोल्ट खराब हैं।

घटना E घटनाओं B_1 या B_2 या B_3 के साथ घटित होती है।

दिया हैः
$$P(B_1) = 25\% = \frac{25}{100} = 0 \cdot 25$$
$$P(B_2) = 35\% = \frac{35}{100} = 0 \cdot 35$$

और
$$P(B_3) = 4\% = \frac{40}{100} = 0 \cdot 40$$

पुनः $P\left(\frac{E}{B_1}\right) =$ बोल्ट के खराब होने की प्रायिकता जबकि वह मशीन B द्वारा निर्मित है
$$= 5\% = \frac{5}{100} = 0 \cdot 05$$

इसी प्रकार,
$$P\left(\frac{E}{B_2}\right) = 0 \cdot 04, \; P\left(\frac{E}{B_3}\right) = 0 \cdot 02$$

बेज प्रमेय द्वारा,
$$P\left(\frac{B_2}{E}\right) = \frac{P(B_2)P\left(\frac{E}{B_2}\right)}{P(B_1)P\left(\frac{E}{B_1}\right) + P(B_2)P\left(\frac{E}{B_2}\right) + P(E_3)P\left(\frac{E}{B_3}\right)}$$
$$= \frac{0 \cdot 35 \times 0 \cdot 04}{0 \cdot 25 \times 0 \cdot 05 + 0 \cdot 35 \times 0 \cdot 04 + 0 \cdot 40 \times 0 \cdot 02}$$
$$= \frac{0 \cdot 0140}{0 \cdot 0345} = \frac{28}{69}$$

उदाहरण-19. तीन सर्वसम डिब्बे I, II और III दिए गए हैं। जहाँ प्रत्येक डिब्बे में दो सिक्के है। डिब्बे I में दोनो सिक्के सोने के है, डिब्बे II में दोनों सिक्के चाँदी के है और डिब्बे III में एक सोने और एक चाँदी का सिक्का है। एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से एक सिक्का निकालता है। यदि निकाला गया सिक्का सोने का है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का है?

हल: माना डिब्बे I, II, III को क्रमशः E_1, E_2, E_3 से निरूपित करते हैं।

तब $$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

माना घटना A "निकाला गया सिक्का सोने का है" को दर्शाती है।

तब डिब्बे I से सोने का सिक्का निकालने की प्रायिकता,

$$P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{2}{2} = 1$$

डिब्बे II से सोने का एक सिक्का निकालने की प्रायिकता,

$$P\left(\frac{A}{E_2}\right) = 0$$

डिब्बे III से सोने का एक सिक्का निकालने की प्रायिकता,

$$P\left(\frac{A}{E_3}\right) = \frac{1}{2}$$

अब डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का होने की प्रायिकता = निकाला गया सोने का सिक्का डिब्बे I की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right)$$

बेज प्रमेय द्वारा

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right) + P(E_3)P\left(\frac{A}{E_3}\right)}$$

$$= \frac{1/3 \times 1}{1/3 \times 1 + 1/3 \times 1/2}$$

$$= \frac{1/3}{1/3 + 1/6} = \frac{1/3}{2+1/6} = \frac{1/3}{3/6} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

उदाहरण-20. एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

हल: माना E_1 "व्यक्ति द्वारा पासे को उछालकर, उस पर आने वाली संख्या 6 है" की घटना है। S_1, पासे पर संख्या 6 आने की घटना और S_2 पासे पर संख्या 6 नहीं आने की घटना है। तब

संख्या 6 आने की घटना की प्रायिकता,

$$P(S_1) = \frac{1}{6}$$

संख्या 6 नहीं आने की घटना की प्रायिकता,

$$P(S_2)=\frac{5}{6}$$

व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे की संख्या 6 आयी है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तवक में 6 है, की प्रायिकता

$$=P\left(\frac{E}{S_1}\right)$$

$$= \text{व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता } =\frac{3}{4}$$

व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे पर संख्या 6 आयी है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 नहीं है, की प्रायिकता

$$=P\left(\frac{E}{S_2}\right)$$

= व्यक्ति द्वारा सत्य नहीं बोलने की प्रायिकता

$$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

अब, बेज प्रमेय द्वारा

व्यक्ति द्वारा यह बताने की प्रायिकता कि संख्या 6 प्रकट हुई है, जब वास्तव में संख्या 6 है

$$=P\left(\frac{S_1}{E}\right)=\frac{P(S_1)P\left(\frac{E}{S_1}\right)}{P(S_1)P\left(\frac{E}{S_1}\right)+P(S_2)P\left(\frac{E}{S_2}\right)}$$

$$=\frac{1/6\times 3/4}{1/6\times 3/4+5/6\times 1/4}=\frac{3/24}{3/24+5/24}=\frac{3/24}{8/24}$$

$$=\frac{3}{24}\times\frac{24}{8}=\frac{3}{8}$$

अतः अभष्ट प्रायिकता 3 / 8 है।

उदाहरण-21. मानाकि एक एच. आई. वी. परीक्षण की विश्वसनीयता निम्नलिखित प्रकार से निर्दिष्ट की गई है। एच. आई. वी. पोजिटिव व्यक्तियों के लिए परीक्षण 90% पता लगाने में और 10% पता न लगाने में सक्षम है। एच. आई. वी. से स्वतंत्र व्यक्तियों के लिए परीक्षण, 99% सही पता लगाता है यानि एच. आई. वी. नेगेटिव बताता है जबकि 1% परीक्षित व्यक्तियो के लिए एच. आई.वी. पोजिटिव बताता है। एक बड़ी जनसंख्या, जिसमें 0·1% व्यक्ति एच. आई. वी. ग्रसित है, में से एक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है और उस का परीक्षण किया जाने पर रोगविज्ञानी एच. आई. वी. की उपस्थिति बताता हैं क्या प्रायिकता है कि वह व्यक्ति वास्तव में एच.आई.वी. ग्रस्त है?

हलः माना,

E = चुने हुए व्यक्ति के वास्वत में एच.आई.वी. पोजीटिव होने की घटना

A = व्यक्ति के एच.आई.वी. परीक्षण में पोजीटिव होने की घटना

E' = चुने हुए व्यक्ति के एच.आई.वी. पोजीटिव न होने की घटना

स्पष्टतया $\{E, E'\}$ जनसंख्या में सभी व्यक्ति के प्रतिदर्श समष्टि का एक विभाजन है।

दिया है:

$$P(E)=0\cdot 1\%=\frac{0\cdot 1}{100}=0\cdot 001$$

$$P(E')=1-P(E)=1-0\cdot 001=0\cdot 999$$

व्यक्ति के परीक्षण में एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जबकि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव है

$$P\left(\frac{A}{E}\right)=90\%=\frac{9}{10}=0\cdot 9$$

व्यक्ति के परीक्षण में एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जबकि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव नहीं है

$$P\left(\frac{A}{E'}\right)=1\%=\frac{1}{100}=0\cdot 01$$

अब बेज प्रमेय द्वारा

$$P\left(\frac{E}{A}\right)=\frac{P(E)P\left(\frac{A}{E}\right)}{P(E)P\left(\frac{A}{E}\right)+P(E')P\left(\frac{A}{E'}\right)}$$

$$\therefore \qquad P\left(\frac{E}{A}\right)=\frac{0\cdot 001\times 0\cdot 9}{0\cdot 001\times 0\cdot 9+0\cdot 999\times 0\cdot 01}$$

$$=\frac{90}{1089}=0\cdot 083 \text{ (लगभग)}।$$

अतः एक यदृच्छया चुने गये व्यक्ति के वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव होने की प्रायिकता जबकि उसका एच.आई.वी. पोजीटिव $0\cdot 083$ है।

प्रश्नमाला 16.3

1. दो थेले I व II दिए गए है। थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदे है जबकि II थैले में 5 लाल और 6 काली गेंदे है। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद II थैले से निकाली गई है?
2. एक डॉक्टर को एक रोगी को देखने आना है। पहले के अनुभवों से यह ज्ञात है कि उसके ट्रेन, बस, स्कूटर या किसी अन्य वाहन से आने की प्रायिकताएँ $\frac{3}{10},\frac{1}{5},\frac{1}{10}$ या $\frac{2}{5}$ है। यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{4},\frac{1}{3}$ या $\frac{1}{12}$ है परन्तु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया, तो उसके ट्रेन से आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. प्रथम थेले में 3 लाल और 4 काली गेंदे है जबकि द्वितीय थैले में 4 लाल और 5 काली गेंद है। एक गेंद प्रथम थैले से द्वितीय थैले में स्थानांतरित की जाती है और तब एक गेंद को द्वितीय थैले से निकाला जाता है। निकाली गई गेंद लाल रंग की प्राप्त होती है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि स्थानांतरित गेंद काली है?
4. एक थेले में 4 लाल और 4 काली गेंदे है और एक अन्य थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदे है। इन दोनों थैलो में से एक थैले को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जोकि लाल है। इस बात की प्रायिकता है कि गेंद पहले थैले से निकाली गई है?
5. तीन सिक्के दिए गए हैं एक सिक्के के दोनों और चित है। दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित 75% बार प्रकट होता है और तीसरा सिक्का अनभिनत है। तीनों सिक्को में से एक सिक्के को यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह दोनों चित वाला सिक्का है?
6. किसी विशेष रोग के सही निदान के लिए रक्त की जाँच 99% असरदार है, जब वास्तव में रोगी उस रोग से ग्रस्त होता है। किन्तु $0\cdot 5\%$ बार किसी स्वस्थ व्यक्ति की रक्त जाँच करने पर निदान गलत सूचना देता है यानी व्यक्ति को रोग से ग्रसित बताता है। यदि किसी जनसंख्या में $0\cdot 1\%$ व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त है तो क्या प्रायिकता है कि कोई यादृच्छया चुना गया व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त होगा यदि उसके रक्त की जाँच में यह बताया जाता है कि उसे यह रोग है?

7. ; g Kkr gSfd , d egkfo| ky; d sNk=kesa s 60% छात्रावास में रहते हैं और 40% छात्रावास में नहीं रहते है। पूर्ववर्ती वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि छात्रावास में रहने वाले छात्रो में से 30% तथा छात्रावास में नहीं रहने वाले छात्रो में से 20% छात्रों ने A ग्रेड़ लिया। वर्ष के अन्त में महाविद्यालय के एक छात्र को यादृच्छया चुना गया और यह पाया गया कि उसे A ग्रेड़ मिला है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह छात्र छात्रावास में रहने वाला है?

8. एक बीमा कंपनी ने 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा किया। स्कूटर चालक, कार चालक तथा ट्रक चालक से दुर्घटना होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0·01, 0·03 व 0·15 है। बीमित व्यक्तियों में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है?

9. एक बहुविकल्पी प्रश्न का उत्तर देने मे ंएक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है। माना कि विद्यार्थी के प्रश्न के उत्तर ज्ञात होने की प्रायिकता 3 / 4 तथा अनुमान लगाने की प्रायिकता 1 / 4 है। यह मानते हुए कि विद्यार्थी के प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाने पर सही उत्तर देने की प्रायिकता 1 / 4 है, इस बात की क्या प्रायिकता है कि विद्यार्थी प्रश्न का उत्तर जानता है यदि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है?

10. कल्पना कीजिए कि 5% पुरुषों और 0·25% महिलाओं के बाल सफेद हैं। एक सफेद बालों वाले व्यक्ति को यादृच्छया चुना गया है। इस व्यक्ति के पुरुष होने की क्या प्रायिकता है? यह मानते हुए कि पुरुषों तथा महिलाओं की संख्या समान है।

11. दो दल एक निगम के निदेशक मंड़ल में स्थान पाने की प्रतिस्पर्धा में है। पहले तथा दूसरे दल के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0·6 व 0·4 है। इसके अतिरिक्त यदि पहला दल जीतता है तो एक नये उत्पाद के प्रारम्भ होने की प्रायिकता 0·7 है और यदि दूसरा दल जीतता है तो इस बात की संगत प्रायिकता 0·3 है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि नया उत्पाद दूसरे दल द्वारा प्रारंभ किया गया था।

12. माना कोई लड़की एक पासा उछालती है। यदि उसे 5 या 6 का अंक प्राप्त होता है तो वह सिक्के को तीन बार उछालती है और चितों की संख्या नोट करती है यदि उसे 1, 2, 3 या 4 का अंक प्राप्त होता है तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती हैं कि उस पर चित या पट प्राप्त हुआ। यदि उसे तथ्यतः एक चित प्राप्त होता हो तो उसके द्वारा उछाले गए पासे पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

13. 52 पत्तों की एक भली भाँति फेंटी गई गड्डी में से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं जो ईट के पत्ते है। खो गये पत्ते के ईट का पत्ता होने की क्या प्रायिकता है?

15. एक थैले में 3 लाल और 7 काली गेंदे है। एक-एक करके बिना प्रतिस्थापन के दो गेंदो का यादृच्छया चयन किया गया है। यदि द्वितीय चयनित गेंद लाल प्राप्त होती हो तो क्या प्रायिकता है कि प्रथम चयनित गेंद भी लाल है?

16.09 यादृच्छिक चर और इसके प्रायिकता बंटन (Random variables and its probability distribution)

पूर्व में हम यादृच्छिक परीक्षणों की अवधारणा तथा उनके प्रतिदर्श समष्टि के निर्माण के बारे में पढ़ चुके है। प्रतिदर्श समष्टि किसी यादृच्छिक परीक्षण के सभी संभव परिणामों को समुच्चय होता है। किसी यादृच्छिक परीक्षण के परिणामों का प्रकार संख्यात्मक अथवा असंख्यात्मक हो सकता है।

उदाहरण के लिए सिक्के को उछालने के परीक्षण में परिणाम अंसख्यात्मक (चित अथवा पट) प्राप्त होता है जबकि पासे को फेंकने के परीक्षण में परिणाम संख्यात्मक (1 अथवा 2 अथवा 3 अथवा 4 अथवा 5 अथवा 6) प्राप्त होता है।

इन यादृच्छिक परीक्षणों में से कई परीक्षणों में हम कई बार किसी विशेष परिणाम के इच्छुक नहीं होते बल्कि हमारी रूचि इन परिणामों से संबंधित किसी संख्या में होती है। जैसे–

(i) चार सिक्कों को उछालने के परीक्षण में हमारी रूचि केवल चितों की संख्या में हो सकती है न कि सिक्कों के चित और पट आने के अनुक्रम में

(ii) दो पासों के एक युग्म को फेंकने के परीक्षण में हम केवल दोनों पासों पर प्रकट संख्याओं के योग में इच्छुक हो सकते हैं।

उपर्युक्त परीक्षणों में से प्रत्येक परीक्षण में हमारे पास एक नियम है जिसके अन्तर्गत प्रत्येक परिणाम एक वास्तविक संख्या से सम्बद्ध होता है। यह वास्वतिक संख्या यादृच्छिक परीक्षण के प्रत्येक परिणाम के लिए भिन्न-भिन्न भी हो सकती है तथा इसका मान परीक्षण के परिणामों पर निर्भर करता है अतः इसे यादृच्छिक चर कहते हैं।

परिभाषाः एक यादृचिछक चर वह फलन होता है जिसका प्रान्त किसी यादृच्दिक परीक्षण के परिणामों का समुच्चय (या प्रतिदर्श समष्टि) होता है तथा सहप्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है क्योंकि एक यादृच्छिक चर कोई भी वास्तविक मान ग्रहण कर सकता है।

एकविमीय यादृच्छिक चरों को सामान्यताः X, Y, Z आदि से निरूपित किया जाता है।

उदाहरण के लिए, एक सिक्के को तीन बार अनुक्रम में उछाले जाने के परीक्षण पर विचार करते है जिसका प्रतिदर्श समष्टि निम्न है

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

यदि X प्राप्त चितों की संख्या को व्यक्त करता हो तब X एक यादृच्छिक चर है तथा प्रत्येक परिणाम के लिए X का मान निम्न प्रकार से दिया जाता है:

$$X(HHH) = 3, \; X(HHT) = 2 = X(HTH) = X(THH),$$

$$X(HTT) = 1 = X(THT) = X(TTH), \; X(TTT) = 0$$

टिप्पणी: एक ही प्रतिदर्श समष्टि पर एक से अधिक यादृच्छिक चर परिभाषित किए जा सकते हैं।

यादृच्छिक चर दो प्रकार के होते है:–

(i) विविक्त यादृच्छिक चर

(ii) संतत यादृच्छिक चर

(i) विविक्त यादृच्छिक चर: यदि कोई यादृच्छिक चर या तो परिमित या गणनीय अनन्त मान ग्रहण करता है तो वह चर विविक्त यादृच्छिक चर कहलाता है। जैसे–

(a) किसी कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या

(b) किसी पुस्तक के प्रत्येक पृष्ठ में मुद्रण त्रुटियों की संख्या

(c) किसी कार्यालय में प्राप्त शिकायतों की संख्या

(d 5 लाल व 4 नीली गेंदों से भरे थैले में से निकाली गई लाल गेंदों की संख्या आदि

(ii) संतत यादृच्छिक चर: यदि कोई यादृच्छिक चर किसी निश्चित अन्तराल में सभी मानों को ग्रहण करता है तो वह संतत यादृच्छिक चर कहलाता है। जैसे–

(a) किसी व्यक्ति की ऊँचाई

(b) $X = \{x \in R \; : \; 0 < x < 1\}$ आदि

टिप्पणी: इस अध्याय में यादृच्छिक चर से तात्पर्य विविक्त यादृच्छिक चर से ही लिया जाएगा।

16.10 एक यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन (Probability distribution of a random variable)

किसी यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन उस चर द्वारा ग्रहण किए गए सभी संभव मानों तथा इन मानों के संगत प्रायिकताओं का विवरण होता है। यदि एक यादृच्छिक चर विभिन्न मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ को संगत प्रायिकताओं $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ के साथ ग्रहण करता है, तब प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार होगा

$$X = x \; : \; x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots x_n$$

$$P(X) \; : \; p_1 \quad p_2 \quad p_3 \ldots p_n$$

$$\text{जहाँ } p_i > 0 \text{ तथा } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

उदाहरण के लिए, हमे एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्राप्त चितों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात करना है। एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि निम्न है

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

यादृच्छिक चर X, यदि चितों की संख्या को व्यक्त करता हो तब प्रत्येक परिणाम के लिए X का मान निम्न प्रकार से दिया जाता है:

$$X(HH) = 2, \; X(HT) = 1 = X(TH), \; X(TT) = 0$$

अतः इस परीक्षण में चर X द्वारा ग्रहण किए गए मान क्रमशः 0, 1 व 2 है जिनकी संगत प्रायिकताएँ क्रमशः 1 / 4, 2 / 4 व 1 / 4 है। अतः प्रायिकता बंटन होगा

$$X = x \quad : \quad 0 \qquad 1 \qquad 2$$

$$P(X) \quad : \quad 1/4 \qquad 2/4 \qquad 1/4$$

जहाँ $p_i > 0$ तथा $\sum p_i = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1,$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-22. एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है।

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

ज्ञात कीजिए

(i) k (ii) $P(X < 6)$ (iii) $P(X \geq 6)$ (iv) $P(0 < X < 5)$

हलः (i) प्रायिकता बंटन में सभी प्रायिकताओं का योग सदैव 1 होता है। अतः

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=1$$

$\Rightarrow \quad 0 + k + 2k + 2k + 3k + k^2 + 2k^2 + 7k^2 + k = 1$

$\Rightarrow \quad 10k^2 + 9k - 1 = 0$

या $\quad (10k - 1)(k + 1) = 0$

या $\quad 10k - 1 = 0 \qquad [\because k \geq 0]$

$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{10}$

(ii) $\quad P(X<6) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$\Rightarrow \quad 0 + k + 2k + 2k + 3k + k^2$

$\Rightarrow \quad k^2 + 8k$

$\Rightarrow \quad (1/10)^2 + 8(1/10) = \frac{81}{100}$

(iii) $\quad P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7)$

$\Rightarrow \quad 2k^2 + 7k^2 + k$

$\Rightarrow \quad 9k^2 + k$

$\Rightarrow \quad 9(1/10)^2 + 1/10 = \frac{19}{100}$

(iv) $\quad P(0 < X < 5) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$\Rightarrow \quad k + 2k + 2k + 3k = 8k$

$\Rightarrow \quad 8/10 = 4/5$

उदाहरण-23. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से तीन पत्ते निकाले गए है। इक्कों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि तीन पत्ते निकालने में इक्कों की सख्या को X से व्यक्त करते है। यहाँ X एक यादृच्छिक चर है जो 0, 1, 2, और 3 मान ले सकता है।

$$P(X=0) = \text{कोई इक्का प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता} = \frac{{}^{48}c_3}{{}^{52}c_3} = \frac{4324}{5525}$$

$$P(X=1) = \text{एक इक्का तथा दो दूसरे पत्ते प्राप्त होने की प्रायिकता} = \frac{{}^{4}c_1 \times {}^{48}c_2}{{}^{52}c_3} = \frac{1128}{5525}$$

$$P(X=2) = \text{दो इक्के तथा एक अन्य पत्ता प्राप्त होने की प्रायिकता} = \frac{{}^{4}c_2 \times {}^{48}c_1}{{}^{52}c_3} = \frac{72}{5525}$$

$$P(X=3) = \text{तीन इक्के प्राप्त होने की प्रायिकता} = \frac{{}^{4}c_3}{{}^{52}c_3} = \frac{1}{5525}$$

अतः यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्न होगा

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{4324}{5525}$	$\frac{1128}{5525}$	$\frac{72}{5525}$	$\frac{1}{5525}$

उदाहरण-24. माना किसी यादृच्छिक चुने गए विद्यालयी दिवस में पढ़ाई के घंटों को X से दर्शाया जाता है। X के मान x लेने की प्रायिकता निम्न है, जहाँ k एक अज्ञात अचर है।

$$P(X=x)=\begin{cases} 0\cdot 1 & ; \quad \text{यदि } x=0 \\ kx & ; \quad \text{यदि } x=1 \text{ या } 2 \\ k(5-x) & ; \quad \text{यदि } x=3 \text{ या } 4 \\ 0 & ; \quad \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(i) k का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) इस बात की क्या प्रियकता है कि आप

(a) कम से कम दो घंटे पढ़ते है?

(b) तथ्यतः दो घंटे पढ़ते हैं?

(c) अधिकतम दो घंटे पढ़ते है?

हलः X का प्रायिकता बंटन है

$$\begin{array}{cccccc} X & : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ P(X) & : & 0\cdot 1 & k & 2k & 2k & k \end{array}$$

(i) दिया गया बंटन प्रायिकता बंटन है अतः

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$

$$0\cdot 1+k+2k+2k+k=1$$

$\Rightarrow$ $\quad 6k=0\cdot 9$

or $\quad k=0\cdot 15$

(ii) (a) अभीष्ट प्रायिकता

जब $P(X \ge 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$$= 2k + 2k + k = 5k = 5 \times 0{\cdot}15 = 0{\cdot}75.$$

(b) अभीष्ट प्रायिकता

जब $P(X=2) = 2k = 2 \times 0{\cdot}15 = 0{\cdot}30.$

(c) अभीष्ट प्रायिकता

जब $P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$= 0{\cdot}1 + k + 2k = 3k + 0{\cdot}1$$

$$= 0{\cdot}1 + 3 \times 0{\cdot}15 = 0{\cdot}55$$

उदाहरण-25. एक सिक्के को इस प्रकार अभिनत किया गया है कि सिक्के पर चित आने की संभावना पट आने की अपेक्षा तीन गुना है। यदि सिक्के को दो बार उछाला जाता हो तो पटों की संख्या के लिए प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हलः माना सिक्के की एक उछाल में पट प्राप्त करने की प्रायिकता p है। तब चित आने की प्रायिकता $3p$ होगी।
सिक्के की एक उछाल में "चित प्राप्त करना" तथा "पट प्राप्त करना" परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष घटनाएँ है अतः

$$P(H) + P(T) = 1$$

$\Rightarrow$ $3p + p = 1$

या $p = 1/4$

अतः $P(H) = \frac{3}{4}$ व $P(T) = \frac{1}{4}$

माना सिक्के की दो उछालों में पटों की संख्या को X से निरूपित करते है। तब X; 0, 1 और 2 मान ग्रहण कर सकता है।

$P(X=0) =$ कोई पट प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता

= दोनों चित प्राप्त होने की प्रायिकता

= P(HH)

= P(H) P(H) {∵ दोनो परीक्षण स्वतंत्र है}

$$= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$P(X=1) =$ एक चित और एक पट प्राप्त होने की प्रायिकता

= P(HT) + P(TH)

= P(H) P(T) + P(T) P(H)

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$P(X=2) =$ दोनों पट प्राप्त होने की प्रायिकता

$$= P(TT) = P(T)\,P(T) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

अतः X का प्रायिकता बंटन है

X :	0	1	2
$P(X)$:	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

16.11 यादृच्छिक चर का माध्य (Mean of a random variable)

कई व्यवहारिक समस्याओं में किसी यादृच्छिक चर के माध्य, माध्यिका व बहुलक इत्यादि को एकल संख्या से निरूपित करना आवश्यक होता है। यहाँ हम यादृच्छिक चर के माध्य के बारे में अध्ययन करेंगे।

माना X एक यादृच्छिक चर है जिसके संभावित मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ के संगत प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, \ldots, p_n$ है। किसी यादृच्छिक चर X के माध्य को X की प्रत्याशा भी कहते हैं जिसे $E(x)$ से व्यक्त करते हैं।

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

अतः किसी यादृच्छिक चर X का माध्य μ चर X के संभावित मानों का भारित समान्तर माध्य होता हैं जबकि प्रत्येक मान को उसकी संगत प्रायिकता से भारित किया गया हो। उदाहरण के लिए, एक पासे को फेंकने के परीक्षण में प्राप्त अंक की प्रत्याशा या माध्य ज्ञात करना है।

एक पासे को फेंकने पर निर्मित प्रतिदर्श समष्टि $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

तब चर X का प्रायिकता बंटन निम्न होगा–

$X = x$	:	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

अतः $\mu = E(X) = \sum x_i p_i$

$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6$$

$$= 1 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + 3 \times 1/6 + 4 \times 1/6 + 5 \times 1/6 + 6 \times 1/6$$

$$= 21/6 = 7/2$$

टिप्पणीः इसका अर्थ यह कदापि नहीं है कि एक पासे को फेंकने के परीक्षण में अंक $7/2$ प्राप्त होता है। यह अंक इंगित करता है कि यदि पासे को दीर्घ अवधि तक उछाला जाए तो खिलाडी को औसत उछाल पर अंक $7/2$ प्राप्त होगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-26. तीन सिक्कों को एक साथ उछाला गया है। सिक्कों पर चितों की संख्या को यादृच्छिक चर X मानते हुए X का माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः तीन सिक्के को एक साथ उछालने के परीक्षण में सिक्कों पर प्राप्त चितों की संख्या को माना X से निरूपित करते है। तब X; 0, 1, 2 और 3 मान ग्रहण कर सकता है।

$$P(X = 0) = P(TTT) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P(\text{HTT या TTH या THT}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P(\text{HHT या THH या HTH}) = \frac{3}{8}$$

तथा $P(X = 3) = P(HHH) = \frac{1}{8}$

चर X का प्रायिकता बंटन निम्न है–

$X = x$	0	1	2	3
$P(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

चर X का माध्य $= \overline{X} = E(X) = \sum x_i p_i$

$$= 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 2 \times 3/8 + 3 \times 1/8 = 12/8 = 3/2$$

उदाहरण-27. ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी प्रकार से फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापन के साथ निकाले जाते है। इक्कों की संख्या का प्रायिकता बंटन तथा माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः माना इक्कों की संख्या एक यादृच्छिक चर X है।

चर X; 0, 1 और 2 मान ग्रहण कर सकता है।

P(X = 0) = कोई इक्का प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता

= P(इक्का नहीं और इक्का नहीं) =P (इक्का नहीं) . P (इक्का नहीं)

$= 48/52 \times 48/52 = 144/169$

P(X = 1) = एक इक्का प्राप्त होने की प्रायिकता

= P(इक्का और इक्का नहीं अथवा इक्का नहीं और इक्का)

= P(इक्का) P(इक्का नहीं) + P(इक्का नहीं) P(इक्का)

$= 4/52 \times 48/52 + 48/52 \times 4/52 = 24/169$

P(X = 2) = दोनों इक्के प्राप्त होने की प्रायिकता

=P(इक्का और इक्का)

=P(इक्का) P(इक्का)

$= 4/52 \times 4/52 = 1/169$

चर X का प्रायिकता बंटन निम्न है–

X	:	0	1	2
$P(X)$	:	144/169	24/169	1/169

चर X का माध्य $= \overline{X} = E(X) = \sum x_i p_i$

$= 0 \times 144/169 + 1 \times 24/169 + 2 \times 1/169 = 26/169.$

16.12 यादृच्छिक चर का प्रसरण (Variance of a random variable)

माना X एक यादृच्छिक चर है जिसके संभावित मानों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के संगत प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, \ldots, p_n$ है तब चर X का प्रसरण var(X) या σ_X^2 द्वारा निरूपित किया जाता है।

$$\sigma_X^2 = \text{var}(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल "$+\sqrt{\text{var}(X)}$" मानक विचलन कहलाता है।

$$\sigma_X = +\sqrt{\text{var}(X)} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i}$$

प्रसरण ज्ञात करने का वैकल्पिक सूत्र

$$\text{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + \mu^2 - 2\mu x_i\right) p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \sum_{i=1}^{n} \mu^2 p_i - 2\sum_{i=1}^{n} \mu x_i p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p_i - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \mu^2(1) - 2\mu(\mu)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \qquad \text{जहाँ } E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

उदाहरणार्थः एक न्याय्य सिक्के की तीन उछालों पर प्राप्त चितों की संख्या का प्रसरण ज्ञात करना है। एक न्याय्य सिक्के की तीन उछालों के परीक्षण में निर्मित प्रतिदर्श समष्टि S={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} है।

माना चर X प्राप्त चितों की संख्या को व्यक्त करता है। तब X का मान 0, 1, 2 या 3 हो सकता है जिनके संगत प्रायिकताएँ क्रमशः $1/8, 3/8, 3/8$ या $1/8$ हैं।

चर X का प्रायिकता बंटन निम्न होगा–

$X = x$	:	0	1	2	3
$P(X)$	:	1/8	3/8	3/8	1/8

चर X का प्रसरण var (X) $= E(X^2) - [E(X)]^2$

जहाँ
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$$

$$= 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 2 \times 3/8 + 3 \times 1/8 = 3/2$$

तथा
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4$$

$$= (0)^2 \times 1/8 + (1)^2 \times 3/8 + (2)^2 \times 3/8 + (3)^2 \times 1/8$$

$$= 0 + 3/8 + 12/8 + 9/8 = 3$$

अतः
$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 3 - (3/2)^2 = 3 - 9/4 = 3/4.$$

उदाहरण-28. दो पासों को एक साथ उछाला गया है। यदि X अंक छः प्राप्त करने की संख्याओं को व्यक्त करता हो तो X का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

हलः दो पासों को एक साथ उछालने पर प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि निम्न है–

$$X = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix}$$

X एक यादृच्छिक चर है जो दो पासों को एक साथ उछालने पर अंक छः प्राप्त करने की संख्याओ ंको व्यक्त करता है तब X; 0, 1 और 2 मान ग्रहण कर सकता है।

$P(X=0)=$ किसी भी पासे पर अंक छः प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता $=25/36$

$P(X=1)=$ एक पासे पर अंक छः प्राप्त होने की प्रायिकता $=10/36$

$P(X=2)=$ दोनों पासों पर अंक छः प्राप्त होने की प्रायिकता $=1/36$

चर X का प्रायिकता बंटन निम्न है–

X	:	0	1	2
$P(X)$	:	$25/36$	$10/36$	$1/36$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0\times 25/36+1\times 10/36+2\times 1/36=12/36=1/3$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = (0)^2\times 25/36+(1)^2\times 10/36+(2)^2\times 1/36=14/36=7/18$$

अतः $$\text{var}(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{18}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{18}.$$

उदाहरण-29. प्रथम छः धनपूर्णांकों में से दो संख्याएँ यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापन) चुनी जाती है। माना X दोनों संख्याओं में से बड़ी संख्या को व्यक्त करता है। तब X का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

हलः इस स्थिति में X; 2, 3, 4, 5, 6 मान ग्रहण कर सकता है।

$P(X=2)=$ दानों संख्याओं में से बड़ी संख्या 2 होने की प्रायिकता

$=P$ (प्रथम चयन में 1 तथा द्वितीय चयन में 2 आना) या (प्रथम चयन में 2 तथा द्वितीय चयन में 1 आना)

$=1/6\times 1/5+1/6\times 1/5=2/30=1/15$

$P(X=3)=$ दोनों संख्याओं में से बड़ी संख्या 3 होने की प्रायिकता

$=P$ (प्रथम चयन में 3 से कम तथा द्वितीय चयन में 3 आना) या (प्रथम चयन में 3 तथा द्वितीय चयन में 3 से कम आना)

$=2/6\times 1/5+1/6\times 2/5=4/30=2/15$

इसी प्रकार $P(X=4)=3/6\times 1/5+1/6\times 3/5=6/30=1/5$

तथा $P(X=5)=4/6\times 1/5+1/6\times 4/5=8/30=4/15$

व $P(X=6)=5/6\times 1/5+1/6\times 5/5=10/30=1/3$

अतः X का प्रायिकता बंटन निम्न हैः–

X	:	2	3	4	5	6
$P(X)$	:	$1/15$	$2/15$	$1/5$	$4/15$	$1/3$

$$E(X)=\sum x_i p_i = 2\times 1/15+3\times 2/15+4\times 1/5+5\times 4/15+6\times 1/3=70/15=14/3$$

$$E(X^2)=\sum x_i^2 p_i=(2)^2\times 1/15+(3)^2\times 2/15+(4)^2\times 1/5+(5)^2\times 4/15+(6)^2\times 1/3$$

$$=4/15+18/15+16/5+100/15+36/3=350/15=70/3$$

$$\text{var}(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=70/3-(14/3)^2=70/3-196/9=14/9.$$

उदाहरण-30. एक कक्षा में 15 छात्र है जिनकी आयु 14, 17, 15, 14, 21, 17, 19, 20, 16, 18, 20, 17, 16, 19 और 20 वर्ष है। एक छात्र को इस प्रकार चुना गया कि प्रत्येक छात्र के चुने जाने की संभावना समान है तथा चुने गए छात्र की आयु X को लिखा गया। यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन क्या है? X का माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हलः X; 14, 15, 16, 17,18, 19, 20 और 21 मान ग्रहण कर सकता है।

अतः $P(X=14)=2/15,\quad P(X=15)=1/15,\quad P(X=16)=2/15,\quad P(X=17)=3/15,$

$P(X=18)=1/15,\quad P(X=19)=2/15,\quad P(X=20)=3/15,\quad P(X=21)=1/15$

अतः X का प्रायिकता बंटन निम्न है:–

X	:	14	15	16	17	18	19	20	21
$P(X)$	:	2/15	1/15	2/15	3/15	1/15	2/15	3/15	1/15

X का माध्य $=E(X)=\sum x_i p_i$

$$=14\times 2/15+15\times 1/15+16\times 2/15+17\times 3/15+18\times 1/15+19\times 2/15+20\times 3/15+21\times 1/15$$

$$=263/15=17{\cdot}53$$

$$=E(X^2)=\sum x_i^2 p_i$$

$$=(14)^2\times 2/15+(15)^2\times 1/15+(16)^2\times 2/15+(17)^2\times 3/15+(18)^2\times 1/15+(19)^2\times 2/15+(20)^2\times 3/15+(21)^2\times 1/15$$

$$=\frac{392}{15}+\frac{225}{15}+\frac{512}{15}+\frac{867}{15}+\frac{324}{15}+\frac{722}{15}+\frac{1200}{15}+\frac{441}{15}=\frac{4683}{15}$$

$$\text{var}(X)=E(X^2)-\{\text{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{4683}{15}-\left(\frac{263}{15}\right)^2=\frac{70245-69169}{225}=\frac{1076}{225}$$

मानक विचलन $=+\sqrt{\text{प्रसरण}}=\sqrt{\dfrac{1076}{225}}=2{\cdot}186$

प्रश्नमाला 16.4

1. ज्ञात कीजिए निम्नलिखित प्रायिकता बंटनों में कौनसा एक यादृच्छिक चर X के लिए संभव है।

(i)

X	:	0	1	2
$P(X)$	:	0.4	0.4	0.2

(ii)

X	:	0	1	2
$P(X)$	:	0.6	0.1	0.2

(iii)

X	:	0	1	2	3	4
$P(X)$	:	0.1	0.5	0.2	–.01	0.3

2. दो सिक्कों के युगपत उछाल में चितों की संख्या को यादृच्छिक चर X मानते हुए प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
3. चार खराब संतरे, 16 अच्छे संतरों में भूलवश मिला दिए गए है। दो संतरों के निकाले में खराब संतरों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
4. एक कलश में 4 सफेद तथा 3 लाल गेंदे है। तीन गेंदों के यादृच्छया निकाल में लाल गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
5. 10 वस्तुओं के ढ़ेर में 3 वस्तुएँ त्रुटिपूर्ण है। इस ढ़ेर में से 4 वस्तुओं का एक प्रतिदर्श यादृच्छया निकाला जाता है। माना प्रतिदर्श में त्रुटिपूर्ण वस्तुओं की संख्या को यादृच्छिक चर X द्वारा निरूपित किया जाता है। ज्ञात कीजिए–

(i) X का प्रायिकता बंटन (ii) $P(X\le 1)$ (iii) $P(X<1)$ (iv) $P(0<X<2)$.

6. एक पासे को इस प्रकार भारित किया गया है कि पासे पर सम संख्या आने की संभावना विषम सख्या आने की अपेक्षा दुगुनी हैं। यदि पासे को दो बार उछाला गया है, तब दोनों उछालों में पूर्ण वर्गों को यादृच्छिक चर X मानते हुए प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
7. एक कलश में 4 सफेद तथा 6 लाल गेंदे है। इस कलश में से चार गेंदे यादृच्छया निकाली जाती है। सफेद गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
8. पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विकों (doublets) की संख्या का प्रयिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
9. पासों के एक युग्म को उछाला जाता है। माना यादृच्छिक चर X, पासों पर प्राप्त अंकों के योग को निरूपित करता है। चर X का माध्य ज्ञात कीजिए।
10. एक अनभिनत पासे को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं का प्रसरण ज्ञात कीजिए।
11. एक बैठक में 70% सदस्यों ने किसी प्रस्ताव का पक्ष लिया और 30% सदस्यों ने विरोध किया। बैठक में से एक सदस्य को यादृच्छया चुना गया और माना $X = 0$, यदि उस चयनित सदस्य ने प्रस्ताव का विरोध किया हो तथा $X = 1$, यदि सदस्य प्रस्ताव के पक्ष में हो तब X का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए।
12. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोतर बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते है। बादशाहों की संख्या का माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

16.13 बरनौली परीक्षण (Bernoulli trials)

किसी यादृच्छिक प्रयोग के परीक्षणों को बरनौली परीक्षण कहते है यदि वे निम्नलिखित शर्तों को सन्तुष्ट करते है:–

(i) परीक्षणों की संख्या निश्चित (परिमित) होनी चाहिए।

(ii) परीक्षण स्वतंत्र होने चाहिए।

(iii) प्रत्येक परीक्षण के तथ्यतः दो ही परिणाम सफलता या असफलता होने चाहिए।

(iv) प्रत्येक परीक्षण में किसी परिणाम की प्रायिकता समान रहनी चाहिए।

उदाहरण के लिए एक सिक्के को 100 बार उछालने के परीक्षण पर विचार करते है। यह परीक्षण 100 बरनौली परीक्षणों की स्थिति है क्योंकि जब हम एक सिक्के को उछालते हैं या एक पासे को फेंकते हैं या कोई अन्य प्रयोग करते हैं तब यह एक परीक्षण कहलाता हैं। इन बरनौली परीक्षणों में से प्रत्येक परीक्षण का परिणाम सफलता (माना सिक्के की उछाल पर चित आना) या असफलता (पट आना) के रूप में प्राप्त होता है। इन सभी 100 उछालों में सफलता की प्रायिकता (p) एकसमान है। साथ ही सिक्के की उत्तरोतर उछालें स्वतंत्र प्रयोग होती हैं।

16.14 द्विपद बंटन (Binomial distribution)

माना एक यादृच्छिक प्रयोग की n बार पुनरावृत्ति की गई है। अतः यह एक n-बरनौली परीक्षणों वाला प्रयोग है, जहाँ प्रत्येक परीक्षण स्वंतत्र है तथा प्रत्येक परीक्षण में घटना के घटित होने को सफलता को S व घटित नहीं होने को असफलता को F से निरूपित करते है।

माना प्रत्येक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता (p) व असफलता की प्रायिकता $(q = 1 - p)$ अचर है।

तब मिश्र प्रायिकता प्रमेय से n-बरनौली परीक्षणों वाले प्रयोग में r सफलताओं तथा शेष $(n-r)$ असफलताओं की प्रायिकता

$$\begin{aligned} P(X=r) &= P(r\text{सफलताए}).P\left[(n-r)\text{असफलताए}\right] \\ &= P(\underbrace{SSS...S}_{r\text{ बार}}\ \underbrace{FFF...F}_{(n-r)\text{बार}}) \\ &= P(S)P(S)P(S)...P(S)\ \ P(F)P(F)P(F)...P(F) \\ &= ppp....p\ \ qqq...q \end{aligned}$$

$$P(X=r) = p^r q^{n-r}$$

यह संबंध n- बरनौली परीक्षणों वाले प्रयोग में एक विशेष क्रम में r सफलताओं व $(n-r)$ असफलताओं को दर्शाता है। परन्तु n परीक्षणों में से r सफलताएँ ${}^nc_r$ विधियों से प्राप्त की जा सकती है तथा इन प्रत्येक विधियों में प्रायिकता $p^r q^{n-r}$ समान रहती है।

अतः n-बरनौली परीक्षणों में r सफलताओं की प्रायिकता

$$P(X=r) = {}^nc_r p^r q^{n-r}; \quad r = 0,1,2,....,n \text{ तथा } q = 1-p$$

n-बरनौली परीक्षणों वाले एक प्रयोग में सफलताओं संख्या X का बंटन निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

X	0	1	2	...	r	...	n
$P(X)$	${}^nC_0p^0q^{n-0}={}^nC_0q^n$	${}^nc_1p^1q^{n-1}$	${}^nc_2p^2q^{n-2}$	...	${}^nc_rp^rq^{n-r}$	...	${}^nc_np^nq^{n-n}={}^nc_np^n$

उपर्युक्त प्रायिकता बंटन द्विपद बंटन कहलाता है क्योंकि ${}^nc_oq^n, {}^nc_oq^{n-1}\,\mathrm{p}^1,\ldots,\ {}^nc_np^n;\ (q+p)^n$ के द्विपद प्रसार में उत्तरोत्तर पद है। यहाँ n व p प्राचल है क्योंकि n तथा p के मान ज्ञात होने पर संपूर्ण प्रायिकता बंटन को ज्ञात किया जा सकता है।

एक n-बरनौली परीक्षणों तथा प्रत्येक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता p वाले द्विपद बंटन को $B(n,p)$ से व्यक्त किया जाता है।

टिप्पणी: $$\sum_{r=0}^{n}P(X=r)=\sum_{r=o}^{n}{}^nC_rp^rq^{n-r}$$

$$={}^nC_0p^oq^n+{}^nC_1p^1q^{n-1}+\ldots+{}^nC_np^nq^{n-n}=(q+p)^n=1.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-31. पासों के एक जोड़े को 7 बार फेंका गया है। यदि 'पासों पर प्राप्त अंकों का योग 7 होना' सफलता मानी जाए तो क्या प्रायिकता है

(i) कोई सफलता नहीं (ii) छः सफलताएँ (iii) कम से कम छः सफलताएँ (iv) अधिकतम छः सफलताएँ

हलः माना पासों के एक जोड़े को एक बार फेंकने पर पासों पर प्राप्त अंकों के योग के 7 होने की प्रायिकता p है। तब $p=6/36=1/6$

[$\because$ पासों पर प्राप्त अंकों का योग 7 निम्न छ तरीकों से आ सकता है।]

$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$$

$$q=1-p=1-1/6=5/6$$

माना पासों के एक जोड़े की 7 फेंक में सफलताओं की संख्या को X से निरूपित करते है।

तब X प्राचलों $n=7$ तथा $p=1/6$ सहित एक द्विपद चर इस प्रकार से है कि

$$P(X=r)={}^7c_r(1/6)^r(5/6)^{7-r};\quad r=0,1,2,3,4,5,6,7$$

(i) P (कोई सफलता नहीं) $=P(X=0)$

$$={}^7C_o\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{7-0}=\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

(ii) P (छः सफलताएँ) $=P(X=6)$

$$={}^7C_6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{7-6}=\frac{35}{6^7}$$

(iii) P (कम से कम छः सफलताएँ) $=P(X\geq 6)$

$$=P(X=6)+P(X=7)$$

$$={}^7C_6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{7-6}+{}^7C_7\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right)^{7-7}$$

$$=7\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^7=\frac{1}{6^5}$$

(iv) P (अधिकतम छः सफलताएँ) $= P(X \le 6)$

$$= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$

$$= 1 - P(X > 6)$$

$$= 1 - P(X = 7)$$

$$= 1 - {}^7C_7\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{7}\right)^{7-7} = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^7.$$

उदाहरण-32. एक अनभिनत पासे को बार-बार तब तक उछाला जाता है जब तक कि उस पर 6 का अंक तीन बार प्राप्त नहीं हो जाता। इस बात की क्या प्रायिकता है कि पासे पर तीसरा 6 का अंक उसे छठी बार उछालने पर प्राप्त होता है।

हल: एक पासे की एक फेंक में 6 के अंक प्राप्त होने की प्रायिकता माना p है। तब $p = \frac{1}{6},\ q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ तीसरा 6 का अंक छठी बार उछालने पर प्राप्त होने का अर्थ यह है कि पहले पाँच उछालों में 6 का अंक दो बार प्राप्त हो तथा छठी उछाल में तीसरा 6 का अंक प्राप्त हो।

अतः अभीष्ट प्रायिकता = P (पहले 5 उछालों में दो 6 के अंक प्राप्त करना) . P(छठी उछाल में 6 का अंक प्राप्त करना)

$$= \left({}^5C_2 p^2 q^{5-2}\right)(p) = {}^5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{10 \times 125}{6^6} = \frac{625}{23328}.$$

उदाहरण-33. एक न्याय्य सिक्के को 5 बार उछाला गया है। कम से कम 3 चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: एक न्याय्य सिक्के की एक उछाल में चित प्राप्त करने की प्रायिकता माना p है। तब $p = 1/2,\ q = 1/2$ माना एक सिक्के की 5 उछालों में चितों की संख्या को X से निरूपित करते है। तब X प्राचलों $n = 5$ तथा $p = 1/2$ के साथ द्विपद चर इस प्रकार से है कि

$$P(X = r) = {}^5C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{5-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r = {}^5C_r\left(\frac{1}{2}\right)^5;\ \text{जहाँ } r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= P$ (कम से कम 3 चित प्राप्त होना)

$$= P(X \ge 3)$$

$$= P(X=3)+(X=4)+(X=5)$$

$$= {}^5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \left({}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{10+5+1}{32}\right) = \frac{1}{2}$$

उदाहरण-34. एक पासे को 6 बार उछाला गया है। यदि 'पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना' एक सफलता है तो निम्नलिखित की प्रायिकताएँ क्या होंगी?

(i) तथ्यतः 5 सफलताएँ (ii) कम से कम 5 सफलताएँ (iii) अधिकतम 5 सफलताएँ।

हल: एक पासे के एक उछाल में विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता माना p है। तब $p = 3/6 = 1/2$ तथा $q = 1 - p = 1 - 1/2 = 1/2$

इन छः परीक्षणों में सफलताओं की संख्या को माना X से व्यक्त करते है तब X प्राचलों $n = 6$ व $p = 1/2$ सहित द्विपद चर है।

$$P(X = r) = {}^6C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{6-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r = {}^6C_r\left(\frac{1}{2}\right)^6;\ \text{जहाँ } r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(i) P (तथ्यत: 5 सफलताएँ) $= P(X=5) = {}^6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{32}$.

(ii) P (कम से कम 5 सफलताएँ) $= P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6)$

$$= {}^6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}^6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{64}.$$

(iii) P (अधिकतम 5 सफलताएँ) $= P(X \leq 5)$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= 1 - P(X > 5)$$

$$= 1 - P(X = 6)$$

$$= 1 - {}^6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

उदाहरण-35. एक व्यक्ति के लक्ष्य भेदन की प्रायिकता $1/4$ है। वह कम से कम कितनी बार गोली चलाए कि लक्ष्य को कम से कम एक बार भेदने की प्रायिकता $2/3$ से अधिक हो?

हल: माना कि व्यक्ति n बार गोली चलाता है।

प्रश्नानुसार $p = 1/4$ तथा $q = 1 - p = 1 - 1/4 = 3/4$ माना व्यक्ति के द्वारा लक्ष्य भेदनों की संख्या को X से निरूपित करते है। तब

$$P(X=r) = {}^nC_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{n-r} \text{ ; जहाँ } r = 0, 1, 2, \ldots, n$$

दिया गया है कि P (कम से कम एक बार लक्ष्य भेदन) $> 2/3$

$$P(X \geq 1) > 2/3$$

$$\Rightarrow \quad 1 - P(X=0) > 2/3$$

$$\Rightarrow \quad 1 - {}^nC_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{n-0} > \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad n = 4, 5, 6, \ldots \quad \left[\because \left(\frac{3}{4}\right)^1 > \frac{1}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 > \frac{1}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^3 > \frac{1}{3} \text{ परन्तु} \left(\frac{3}{4}\right)^4 < \frac{1}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^5 < \frac{1}{3}, \ldots\right]$$

अत: व्यक्ति को कम से कम 4 गोली चलानी होगी।

उदाहरण-36. एक व्यक्ति के एक कदम आगे चलने की प्रायिकता 0.4 तथा एक कदम पीछे हटने की प्रायिकता 0.6 है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि ग्यारह कदमों के पश्चात् वह व्यक्ति शुरूआती बिन्दु से एक कदम दूर है?

हलः माना व्यक्ति के एक कदम आगे चलने की प्रायिकता p है तब $p = 0.4$, $q = 1 - p = 1 - 0.4 = 0.6$ माना आगे की दिशा में चले गए कदमों की संख्या को अब X से निरूपित करते हैं। अतः X प्राचलों $n = 11$ तथा $p = 0.4$ के साथ एक द्विपद चर इस प्रकार से है कि

$$P(X = r) = {}^{11}C_r (0.4)^r (0.6)^{11-r}; r = 0, 1, 2, \ldots.., 11$$

चूंकि व्यक्ति शुरूआती बिन्दु से एक कदम दूर है अतः वह ग्यारह कदमों के पश्चात् शुरूआती बिन्दु से या तो एक कदम आगे है या पीछे है। यदि व्यक्ति एक कदम आगे की ओर है तब वह छः कदम आगे व पाँच कदम पीछे चल चुका है। तथा यदि व्यक्ति एक कदम पीछे की ओर है तब वह पाँच कदम आगे व छः कदम पीछे चल चुका है।

अतः $X = 5$ या $X = 6$

अभीष्ट प्रायिकता $= P[(X = 5)$ या $(X = 6)]$

$= P(X = 5) + P(X = 6)$ (दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ है।)

$$= {}^{11}c_5 (0{\cdot}4)^5 (0{\cdot}6)^{11-5} + {}^{11}c_6 (0{\cdot}4)^6 (0{\cdot}6)^{11-6}$$

$$= {}^{11}c_5 (0{\cdot}4)^5 (0{\cdot}6)^6 + {}^{11}c_6 (0{\cdot}4)^6 (0{\cdot}6)^5 = 462 (0{\cdot}24)^5 .$$

प्रश्नमाला 16.5

1. यदि एक न्याय्य सिक्के को 10 बार उछाला गया हो तो निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए
   (i) तथ्यतः छः चित (ii) कम से कम छः चित (iii) अधिकतम छः चित
2. एक कलश में 5 सफेद, 7 लाल और 8 काली गेंदे है। यदि चार गेंदे एक-एक करके प्रतिस्थापन सहित निकाली जाती है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि
   (i) सभी सफेद गेंदे हो (ii) केवल तीन गेंदे हो
   (iii) कोई भी सफेद गेंद नही हो (iv) कम से कम तीन सफेद गेंदे हो।
3. एक बाधा दौड़ में एक खिलाड़ी को 10 बाधाएँ पार करनी है। खिलाड़ी के द्वारा प्रत्येक बाधा को पार करने की प्रायिकता $5/6$ है। इस बात की क्या प्रायिकता हैं कि वह 2 से कम बाधाओं को गिरा देगा (पार नहीं कर पाएगा)?
4. पाँच पासों को एक साथ फेंका गया है। यदि एक पासे पर सम अंक आने को सफलता माना जाए तो अधिकतम 3 सफलताओं की प्रयिकता ज्ञात कीजिए।
5. 10% खराब अंड़ों वाले एक ढेर से 10 अंड़े उत्तरोतर प्रतिस्थापन के साथ निकाले गए है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि 10 अंड़ों के प्रतिदर्श में कम से कम एक खराब अंड़ा है।
6. एक व्यक्ति एक लॉटरी के 50 टिकट खरीदता है, जिसमें उसके प्रत्येक में जीतने की प्रायिकता $1/100$ है। इस बात की क्या प्रायिकता हैं कि वह
   (i) कम से कम एक बार (ii) तथ्यतः एक बार (iii) कम से कम दो बार, इनाम जीत लेगा।
7. किसी कारखाने में बने एक बल्ब की 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज होने की प्रायिकता 0.05 हैं प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस प्रकार के 5 बल्बों में से
   (i) एक भी नही (ii) एक से अधिक नहीं (iii) एक से अधिक (iv) कम से कम एक
   150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज हो जाएंगे।
8. एक बहु-विकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न है जिनमें प्रत्येक के तीन संभावित उत्तर है जिनमें से केवल एक ही सही उत्तर हैं इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगा कर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर दे देगा?
9. एक सत्य-असत्य प्रकार के 20 प्रश्नों वाली परीक्षा में माना एक विद्यार्थी एक न्याय्य सिक्के को उछालकर प्रत्येक प्रश्न का उत्तर निर्धारित करता है। यदि पासे पर चित प्रकट हो तो वह प्रश्न का उत्तर 'सत्य' देता है और यदि पट प्रकट हो तो 'असत्य' लिखता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह कम से कम 12 प्रश्नो का सही उत्तर देता हैं

10. एक थैले में 10 गेंदे है जिनमें से प्रत्येक पर 0 से 9 तक के अंकों में से एक अंक लिखा है। यदि थैले से 4 गेंदे उत्तरोतर पुनः वापस रखते हुए निकाली जाती है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उनमें से किसी भी गेंद पर अंक 0 नहीं लिखा हो?

11. 52 ताश के पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से 5 पत्ते उत्तरोतर प्रतिस्थापन सहित निकाले जाते है। इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) सभी 5 पत्ते हुकुम के हो? (ii) केवल 3 पत्तें हुकुम के हो?

(iii) एक भी पत्ता हुकुम का नहीं हो?

12. माना चर X का बंटन $B(6,1/2)$ द्विपद बंटन है सिद्ध कीजिए कि $X=3$ अधिकतम प्रायिकता वाला परिणाम है।

13. पासों के एक जोड़े को 4 बार उछाला जाता है। यदि पासों पर प्राप्त अंकों का द्विक होना सफलता मानी जाए तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

विविध उदाहरण

उदाहरण-37. A और B एकान्तरतः एक पासे के जोड़े को उछालते है। यदि B के 7 फेंकने से पहले A, 6 फेंकता है तब A जीतता है तथा यदि A के 6 फेंकने से पहले B, 7 फेंकता है तब B जीतता है। यदि A खेलना प्रारंभ करे तो, A के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः पासों के एक युग्म को फेंकने पर 6 निम्न पाँच तरीकों से प्राप्त किया जा सकता है

$\{(1,5)\ (2,4)\ (3,3)\ (4,2)\ (5,1)\}$ अतः पासों के एक युग्म को फेंकने पर 6 आने की प्रायिकता $=5/36$

तथा 6 नहीं आने की प्रायिकता $=1-5/36=31/36$

इसी प्रकार पासों के एक युग्म को फेंकने पर 7 निम्न छः तरीकों से प्राप्त किया जा सकता है।

$\{(1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)(6,1)\}$

अतः पासों के एक युग्म को फेंकने पर 7 आने की प्रायिकता $=6/36=1/6$

तथा 7 नहीं आने की प्रायिकता $=1-1/6=5/6$ माना दो घटनाएँ A तथा B इस प्रकार से परिभाषित है कि

A 'पासों के एक युग्म की एक फेंक में 6 आना'

B 'पासों के एक युग्म की एक फेंक में 7 आना'

तब $P(A)=\dfrac{5}{36},\quad P(\overline{A})=\dfrac{31}{36}$

तथा $P(B)=\dfrac{1}{6}$ व $P(\overline{B})=\dfrac{5}{6}$

A	A_W	$A_LB_LA_W$	$A_LB_LA_LB_LA_W$	...
B	A_LB_W	$A_LB_LA_LB_W$	$A_LB_LA_LB_LA_LB_W$	...

जहाँ A_W व A_L क्रमशः A के जीतने व नहीं जीतने की घटनाएँ है। इसी प्रकार B_W व B_L क्रमशः B के जीतने व नहीं जीतने की घटनाएँ है।

यदि A खेल आरंभ करता है तो A के जीतने की प्रायिकता

$$P(A_W)+P(A_LB_LA_W)+(A_LB_LA_LB_LA_W)+\ldots$$

$=P$ (प्रथम फेंक में 6 आना) $+P$(प्रथम फेंक में नही 6 आना तथा द्वितीय फेंक में 7 नहीं आना व तृतीय फेंक में 6 आना)+...

$=P$ (प्रथम फेंक में 6 आना) $+P$ (प्रथम फेंक में 6 नहीं आना) P (द्वितीय फेंक में 7 नहीं आना)

P (तृतीय फेंक में 6 आना) + . . . (चूंकि दोनों घटनाएँ स्वतंत्र है।)

$$=P(A)+P(\overline{A})P(\overline{B})P(A)+\ldots$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36} + \ldots$$

$$= \frac{5}{36}\left[1 + \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right) + \ldots\right]$$

$$= \frac{5}{36} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)\right]}$$ [अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के योग से $S_\infty = \frac{a}{1-r}$]

$$= \frac{5}{36} \frac{36 \times 6}{216 - 155} = \frac{30}{61}.$$

उदाहरण-38. यदि एक द्वितीय क्रम के सारणिक का प्रत्येक अवयव शून्य या एक हो तो सारणिक का मान धनात्मक होने की क्या प्रायिकता है? (यह मानते हुए कि सारणिक के प्रत्येक अवयव को स्वतंत्र रूप से चुना जा सकता है तथा प्रत्येक के चुने जाने की प्रायिकता $1/2$ है।)

हलः माना दिया गया सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

जहाँ $a_{ij} = 0$ या 1; $i, j = 1, 2$

यह स्पष्ट है कि $\Delta \le 0$ यदि $a_{11} = 0$ या $a_{22} = 0$ अतः ना तो $a_{11} = 0$ ना ही $a_{22} = 0$ $\Rightarrow$ $a_{11} = 1 = a_{22}$ जब $a_{11} = a_{22} = 1$ तब $\Delta = 0$ यदि $a_{12} = a_{21} = 1$ अतः $a_{11} = a_{22} = 1$ तथा $a_{12} \ne 1$, $a_{21} \ne 1$ सारणिक Δ के मानों के लिए निम्न तीन संभावनाएँ हैः–

$$a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 0$$

$$a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 1$$

$$a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 0$$

अभीष्ट प्रायिकता $= P(a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 0) + P(a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 1)$

$$+ P(a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 0)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

उदाहरण-39. द्विपद बंटन $B(4, 1/3)$ का माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः माना X वह यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता बंटन $B(4, 1/3)$ है।

यहाँ $n = 4, p = 1/3, q = 1 - p = 1 - 1/3 = 2/3$

तथा $P(X = x) = {}^4C_x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $x = 0, 1, 2, 3, 4$

अतः प्रायिकता बंटन निम्न है

$X:$	0	1	2	3	4
$P(x_i):$	${}^4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^{4-0}\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{16}{81}$	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81}$	${}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^{4-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$	${}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^{4-3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$	${}^4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^{4-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

माध्य $\mu = E(X) = \sum x_i p_i$

$$= 0\times\frac{16}{81} + 1\times\frac{32}{81} + 2\times\frac{24}{81} + 3\times\frac{8}{81} + 4\times\frac{1}{81}$$

$$= \frac{32+48+24+4}{81} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$$

विविध प्रश्नमाला—16

1. दो घटनाएँ A तथा B परस्पर स्वतंत्र कहलाती है यदि

(क) $P(A) = P(B)$ (ख) $P(A) + P(B) = 1$

(ग) $P(\bar{A}\bar{B}) = [1-P(A)][1-P(B)]$ (घ) A और B परस्पर अपवर्जी है।

2. पासों के एक जोड़े को उछालने पर प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य अंक प्राप्त करने की प्रायिकता निम्नलिखित में से क्या है?

(क) 1 / 3 (ख) 0 (ग) 1 / 36 (घ) 1 / 12

3. यदि A और B ऐसी घटनाएँ है कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$ तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है:

(क) $P\left(\frac{A}{B}\right) < P(A)$ (ख) $P\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(A)$ (ग) $P\left(\frac{A}{B}\right) = P\frac{(B)}{(A)}$ (घ) इनमें से कोई नहीं

4. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते यादृच्छया निकाले जाते है। माना यादृच्छिक चर X, इक्कों की संख्या को निरूपित करता है, तब X का माध्य ज्ञात कीजिए।

(क) 5 / 13 (ख) 1 / 13 (ग) 37 / 221 (घ) 2 / 13

5. एक यादृच्छिक चर X मान 0, 1, 2, 3 ग्रहण करता है। चर X का माध्य 1·3 हैं। यदि $P(X=3) = 2P(X=1)$ तथा $P(X=2) = 0{\cdot}3$ हो तो $P(X=0)$ है।

(क) 0·2 (ख) 0·4 (ग) 0·3 (घ) 0·1

6. एक छात्रा के धावक होने की प्रायिकता 4 / 5 है। 5 छात्राओं में से 4 छात्राओं की धावक होने की प्रायिकता है:

(क) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)$ (ख) ${}^5C_1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$ (ग) ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^4$ (घ) इनमें से कोई नहीं

7. एक बक्से में 100 वस्तुएँ है जिसमें से 10 खराब हैं 5 वस्तुओं के नमूने में से, किसी भी वस्तु के खराब नहीं होने की प्रायिकता है:

(क) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (ख) 10^{-1} (ग) $\frac{9}{10}$ (घ) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$

8. एक दंपति के दो बच्चे हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए
   (i) दोनों बच्चे लड़के हैं, यदि यह ज्ञात है कि बड़ा बच्चा लड़का है।
   (ii) दोनों बच्चे लड़कियाँ हैं, यदि यह ज्ञात है कि बड़ा बच्चा लड़की है।
   (iii) दोनों बच्चे लड़के हैं, यदि यह ज्ञात है कि कम से कम एक बच्चा लड़का है।

9. 1 से 11 तक के पूर्णाकों मे से यादृच्छया दो पूर्णांकों को चुना गया है। दोनों पूर्णाकों के विषम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि दोनों पूर्णांको का योग सम है।

10. एक आवणिक संरचना के दो सहायक निकाय A तथा B है। पूर्ववर्ती निरीक्षण द्वारा निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात हैः–

P (A का असफल होना) = 0·2

P (केवल B का असफल होना) = 0·15

P (A तथा B का असफल होना) = 0·15

ज्ञात कीजिए।

(i) A के असफल होने की प्रायिकता जबकि B असफल हो चुका हो।

(ii) केवल A के असफल होने की प्रायिकता।

11. माना A तथा B दो स्वतन्त्र घटनाएँ है। इन दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता 1 / 8 तथा दोनों घटनाओं के घटित नहीं होने की प्रायिकता 3 / 8 है। $P(A)$ तथा $P(B)$ ज्ञात कीजिए।

12. अनिल 60% स्थितियों में सत्य कहता है तथा आनन्द 90% स्थितियों में सत्य कहता है। किसी कथन पर उनके एक दूसरे से विरोधाभासी होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

13. तीन व्यक्ति A, B व C बारी–बारी से एक सिक्का उछालते हैं। जिसके पहले चित आता है वही जीतता है। यह मानते हुए कि खेल अनिश्चित काल तक जारी रहता है, यदि A खेलना आरंभ करता हो तो उनकी जीत की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

14. अगले 25 वर्षों में एक व्यक्ति के जीवित रहने की प्रायिकता 4 / 5 है तथा उसकी पत्नि के उन्हीं 25 वर्षों जीवित रहने की प्रायिकता 3 / 4 है। प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए जबकि-

(i) दोनों 25 वर्ष तक जीवित रहे।

(ii) दोनों में से कम से कम एक 25 वर्षो तक जीवित रहे।

(iii) केवल पत्नि 25 वर्ष तक जीवित रहे।

15. बच्चों के तीन समूहों मे क्रमशः 3 लड़कियाँ और 1 लड़का, 2 लड़कियाँ और 2 लड़के तथा 1 लड़की और 3 लड़के हैं। प्रत्येक समूह में से यादृच्छया एक बच्चे का चयन किया जाता है। इस प्रकार चुने गए तीनों बच्चों में 1 लड़की तथा 2 लड़कों के होने कि प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16. प्रथम थैले में 3 काली और 4 सफेद गेंदे है जबकि द्वितीय थैले में 4 काली और 3 सफेद गेंदे है। एक अनभिनत पासे को उछाला जाता है यदि पासे पर 1 या 3 का अंक प्रकट होता है तब प्रथम थैले में से एक गेंद निकाली जाती है तथा यदि अन्य अंक प्रकट होता है तब द्वितीय थैले में से एक गेंद निकाली जाती है। निकाली गई गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

17. किसी व्यक्ति ने एक निर्माण कार्य का ठेका लिया, वहाँ हड़ताल होने की प्रायिकता 0·65 है। हड़ताल न होने तथा हड़ताल होने की स्थितियों में निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0·80 तथा 0·32 है। निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

18. प्रथम थैले में 8 सफेद तथा 7 काली गेंदे है जबकि द्वितीय थैले में 5 सफेद और 4 काली गेंदे है। प्रथम थैले में से एक गेंद का यादृच्छया चयन किया जाता है और उसे द्वितीय थैले की गेंदो के साथ मिला दिया जाता है। तब इसमें से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंद सफेद है।

19. एक परीक्षा में एक बहुविकल्पीय प्रश्न जिसके चार विकल्प है का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो अनुमान लगाता है या नकल करता है या प्रश्न का उत्तर जानता है। विद्यार्थी के द्वारा अनुमान लगाने तथा नकल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः 1/3 व 1/6 है। उसके द्वारा सही उत्तर दिए जाने की प्रायिकता 1/8 है जबकि यह ज्ञात है कि उसने नकल की है। विद्यार्थी के द्वारा प्रश्न का उत्तर जानने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है।

20. एक पत्र दो शहरों TATANAGAR या CALCUTTA में से किसी एक शहर से आया हुआ है। पत्र के लिफाफे पर केवल दो क्रमागत अक्षर TA दिखाई देते है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पत्र

(i) CALCUTTA (ii) TATANAGAR, से आया हुआ है।

21. एक निर्माता के पास तीन यन्त्र संचालक A, B तथा C है। प्रथम संचालक A, 1% त्रुटिपूर्ण वस्तुएँ उत्पादित करता है, जबकि अन्य दो संचालक B तथा C क्रमशः 5% तथा 7% त्रुटिपूर्ण वस्तुएँ उत्पादित करते है। A कार्य पर कुल समय का 50% लगाता है, B कुल समय का 30% तथा C कुल समय का 20% लगाता है। यदि एक त्रुटिपूर्ण वस्तु उत्पादित है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह यंत्र A से उत्पादित है?

22. किसी यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन P(X) निम्न है, जहाँ k कोई सख्या है:

$$P(X=x)=\begin{cases} k & ; \text{ यदि } x=0 \\ 2k & ; \text{ यदि } x=1 \\ 3k & ; \text{ यदि } x=2 \\ 0 & ; \text{ अन्यथा} \end{cases}$$

(i) k का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) $P(X<2), P(X\le 2)$ तथा $P(X\ge 2)$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. एक यादृच्छिक चर X सभी ऋणेतर पूर्णांक मान ग्रहण कर सकता है तथा चर X की मान r के ग्रहण करने की प्रायिकता α^r के समानुपाती है जहाँ $0<\alpha<1$ तब $P(X=0)$ ज्ञात कीजिए।

24. माना X एक यादृच्छिक चर है जो मान x_1, x_2, x_3, x_4 इस प्रकार ग्रहण करता है कि

$$2P(X=x_1)=3P(X=x_2)=P(X=x_3)=5P(X=x_4)$$

चर X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

25. एक न्याय्य सिक्के को एक चित अथवा पाँच पट आने तक उछाला जाता है। यदि X, सिक्के की उछालों की संख्या को निरूपित करता हो तो X का माध्य ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित A व B दो घटनाएँ हो तो घटना A की सप्रतिबन्ध प्रायिकता जबकि घटना B घटित हो चुकी हो, निम्न प्रकार ज्ञात की जाती है:

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}; \qquad P(B)\ne 0.$$

इसी प्रकार $$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}; \qquad P(A)\ne 0$$

2. $0\le P\left(\frac{A}{B}\right)\le 1, \qquad P\left(\frac{\overline{A}}{B}\right)=1-P\left(\frac{A}{B}\right)$

3. यदि प्रतिदर्श समष्टि S की A तथा B कोई दो घटनाएँ हो तथा F एक अन्य घटना इस प्रकार से हो कि $P(F)\ne 0$ तब

$$P\left(\frac{A\cup B}{F}\right)=P\left(\frac{A}{F}\right)+P\left(\frac{B}{F}\right)-P\left(\frac{A\cap B}{F}\right)$$

4. प्रायिकता का गुणन नियम

$$P(A\cap B)=P(A)P\left(\frac{B}{A}\right); \quad P(A)\ne 0 \text{ या } P(A\cap B)=P(B)P\left(\frac{A}{B}\right); \quad P(B)\ne 0$$

5. यदि A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हो तो

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=P(A), P(B)\ne 0; \qquad P\left(\frac{B}{A}\right)=P(B), P(A)\ne 0$$

तथा $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

6. संपूर्ण प्रायिकता का प्रमेय–माना किसी यादृच्छिक प्रयोग से सम्बद्ध प्रतिदर्श समष्टि S है तथा n घटनाएँ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष घटनाएँ है तथा $P(A_j) \neq 0;\ j = 1, 2, \ldots, n$

माना E कोई घटना है जो A_1 या A_2 या $A_3 \ldots$ या A_n के साथ घटित होती है, तब

$$P(E) = P(A_1)P\left(\frac{E}{A_1}\right) + P(A_2)P\left(\frac{E}{A_2}\right) + \ldots + P(A_n)P\left(\frac{E}{A_n}\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P\left(\frac{E}{A_j}\right)$$

7. बेज प्रमेय – माना किसी यादृच्छिक प्रयोग से सम्बद्ध n परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष घटनाएँ है, जहाँ प्रत्येक घटना के घटित होने की प्रायिकता शून्येतर है तथा इस प्रयोग से संबंधित प्रतिदर्श समष्टि S है। माना E कोई घटना है जो A_1 या A_2 या $\ldots A_n$ के साथ घटित होती है तब

$$P\left(\frac{A_i}{E}\right) = \frac{P(A_i)P\left(\frac{E}{A_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P\left(\frac{E}{A_j}\right)}$$

8. एक यादृच्छिक चर किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि पर परिभाषित वास्तविक मान फलन होता है।

9. यदि एक यादृच्छिक चर विभिन्न मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ को संगत प्रायिकताओं $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ के साथ ग्रहण करता है तब चर का प्रायिकता बंटन निम्न होगा–

$$\begin{matrix} X = x & : & x_1 & x_2 & x_3 \ldots x_n \\ P(x) & : & p_1 & p_2 & p_3 \ldots p_n \end{matrix}\ ; \text{ जहाँ } p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

10. माना X एक यादृच्छिक चर है जिसके संभावित मानों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के संगत प्रायिकतायें क्रमशः $p_1, p_2, \ldots, p_n$ है।

(a) चर X के माध्य $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ को μ से निरूपित किया जाता है। किसी यादृच्छिक चर X के माध्य को X की प्रत्याशा भी कहते है जिसे E(X) से व्यक्त करते है।

(b) चर X का प्रसरण

$$= \text{var}(X) = \sigma_x^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

(c) $\text{var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

(d) ऋणेत्तर संख्या

$$\sigma_x = +\sqrt{\text{var}(x)} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i}$$

को यादृच्छिक चर X का मानक विचलन कहते हैं।

11. किसी यादृच्छिक प्रयोग के परीक्षणों को बरनौली परीक्षण कहते है यदि वे निम्नलिखित शर्तो को सन्तुष्ट करते हो:

(i) परीक्षणों की संख्या निश्चित (परिमित) होनी चाहिये।

(ii) परीक्षण स्वतन्त्र होने चाहिए।

(iii) प्रत्येक परीक्षण के तथ्यतः दो ही परिणाम सफलता या असफलता होने चाहिए।

(iv) प्रत्येक परीक्षण में किसी परिणाम की प्रायिकता समान रहनी चाहिए।

12. f) i n c&u $B(n, p)$ में r सफलताओं की प्रायिकता

$$P(X = r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}; \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ जहाँ } q = 1 - p.$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 16.1

1. 4/9 2. 16/25 3. 11/26 4. $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{2}{3},\ P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{3}$ 5. (i) 0·32 ; (ii) 0·64 ; (iii) 0·98

6. 1/3 7. (i) $P\left(\frac{A}{B}\right)=1$ (ii) $P\left(\frac{A}{B}\right)=0$ 8. $P\left(\frac{A}{B}\right)=1$

9. (i) $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{1}{2},\ P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{3}$; (ii) $P\left(\frac{A}{C}\right)=\frac{1}{2},\ P\left(\frac{C}{A}\right)=\frac{2}{3}$; (iii) $P\left(\frac{A\cup B}{C}\right)=\frac{3}{4},\ P\left(\frac{A\cap B}{C}\right)=\frac{1}{4}$

10. 1/15 11. 4/7 12. 0·1 13. 2/5 14. 2/9

प्रश्नमाला 16.2

1. 3/8 2. 1/3 3. (i) 0·12 ; (ii) 0·58 ; (iii) 0·3; (iv) 0·4 4. (i) 0·18 ; (ii) 0·12 ; (iii) 0·72 ; (iv) 0·28

5. 1/969 6. 7/8 7. 25/102 8. 1/3 9. (i) 1/5; (ii) 1/3 ; (iii) 1/2

10. 0·97 11. 3/4 12. 1/7 13. (i) 2/3 ; (ii) 1/2

प्रश्नमाला 16.3

1. 35/68 2. 1/2 3. 16/31 4. 2/3 5. 4/9 6. 22/133 7. 9/13

8. 1/52 9. 12/13 10. 20/21 11. 2/9 12. 8/11 13. 11/50 14. 2/9

प्रश्नमाला 16.4

1. (i)

2.

$X=x$	0	1	2
$P(x)$	1/4	1/2	1/4

3.

$X=x$	0	1	2
$P(x)$	12/19	32/95	3/95

4.

$X=x$	0	1	2	3
$P(x)$	4/35	18/35	12/35	1/35

5. (i)

$X=x$	0	1	2	3
$P(x)$	1/6	1/2	3/10	1/30

(ii) 2/3 (iii) 1/6 (iv) 1/2

6.

$X=x$	0	1	2
$P(x)$	4/9	4/9	1/9

7.

$X=x$	0	1	2	3	4
$P(x)$	1/14	8/21	6/14	4/35	1/210

8.

$X=x$	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

9. 7 10. 35/12 11. 7/10, 21/100

12. $\frac{34}{221},\ \frac{6800}{(221)^2},\ 0·37$

प्रश्नमाला 16.5

1. (i) $105/512$; (ii) $193/512$; (iii) $53/64$

2. (i) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ (ii) $3\left(\frac{1}{4}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ (iv) $\frac{13}{4^4}$

3. $\frac{5^{10}}{2\times 6^9}$

4. $\frac{13}{16}$

5. $1-\frac{9^{10}}{10^{10}}$

6. (i) $1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$ (ii) $\frac{1}{2}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$ (iiii) $1-\frac{149}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$

7. (i) $\left(\frac{19}{20}\right)^5$ (ii) $\frac{6}{5}\left(\frac{19}{20}\right)^4$ (iii) $1-\frac{6}{5}\left(\frac{19}{20}\right)^4$ (iv) $1-\left(\frac{19}{20}\right)^5$

8. $\frac{11}{243}$

9. $\frac{{}^{20}C_{12}+{}^{20}C_{13}+\ldots+{}^{20}C_{20}}{2^{20}}$

10. $\left(\frac{9}{10}\right)^4$

11. (i) $\frac{1}{1024}$; (ii) $\frac{45}{512}$; (iii) $\frac{243}{1024}$

13. $\frac{25}{216}$

विविध प्रश्नमाला—16

1. (ग)
2. (ग)
3. (ख)
4. (घ)
5. (ख)
6. (ग)
7. (घ)
8. (i) $1/2$; (ii) $1/2$; (iii) $1/3$
9. $3/5$
10. (i) $1/2$; (ii) 0.05
11. $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{4}$ या $P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{1}{2}$
12. 0.42
13. $4/7, 2/7, 1/7$
14. (i) $\frac{3}{5}$; (ii) $\frac{19}{20}$; (iii) $\frac{3}{20}$
15. $\frac{13}{32}$
16. $\frac{11}{21}$
17. 0.488
18. $\frac{83}{150}$
19. $\frac{24}{29}$
20. (i) $\frac{4}{11}$; (ii) $\frac{7}{11}$
21. $\frac{5}{34}$
22. (i) $\frac{1}{6}$; (ii) $P(X<2)=\frac{1}{2},\ P(X\le 2)=1,\ P(X\ge 2)=\frac{1}{2}$
23. $(1-\alpha)$
24.

X :	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X)$:	$\frac{15}{61}$	$\frac{10}{61}$	$\frac{30}{61}$	$\frac{6}{61}$

25. 1.9