62HCG8

अध्याय छः

घातांक (Exponents)

भूमिका (Introduction)

एक पुरानी कहावत है कि ''खबरें जंगल में आग की तरह फैलती हैं'' क्या वास्तव में खबरें भी उतनी ही जल्दी फैलती हैं जितनी जल्दी जंगल की आग ?

आइए, हिसाब लगाकर देखें कि खबरें इतनी जल्दी कैसे फैलती हैं :–

एक व्यक्ति राजधानी से कोई खबर लेकर अपने शहर पहुंचता है तथा वह 3 व्यक्तियों को यह खबर सुनाता है। मानाकि इस कार्य के लिए उसे 5 मिनट का समय लगता है। यही खबर प्रत्येक व्यक्ति द्वारा 3–3 व्यक्तियों को अगले 5 मिनट में दी जाती है। इस प्रकार पहले 5 मिनट में जो खबर 3 व्यक्तियों को मालूम थी, दूसरे 5 मिनट में वह खबर और 3×3 अर्थात 9 व्यक्तियों तक पहुंच गई। अगले 5 मिनट में यह खबर 9×3 व्यक्तियों तक अर्थात 27 तक पहुंचेगी तथा पुनः अगले 5 मिनट में यही खबर 27×3 अर्थात 81 और नये व्यक्तियों तक पहुंच जायेगी। इसी प्रकार 60 मिनट में यह खबर एक व्यक्ति से शुरू करके कितने व्यक्तियों तक पहुचेगी? आइए करके देखें:–

5 मिनट में खबर पहुँचती है	: 3	नये व्यक्तियों तक
10 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 = 9$	नये व्यक्तियों तक
15 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times 3 = 27$	नये व्यक्तियों तक
20 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$	नये व्यक्तियों तक
25 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$	नये व्यक्तियों तक
30 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$	नये व्यक्तियों तक
35 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times$ ---------- 7 बार $= 2187$	नये व्यक्तियों तक
40 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times$ --------- 8 बार $= 6561$	नये व्यक्तियों तक
45 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times$ ----------- 9 बार $= 19683$	नये व्यक्तियों तक
50 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times$ --------- 10 बार $= 59049$	नये व्यक्तियों तक
55 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times$ --------- 11 बार $= 177147$	नये व्यक्तियों तक
60 मिनट में खबर पहुँचती है	: $3 \times 3 \times$ --------- 12 बार $= 531441$	नये व्यक्तियों तक

इस प्रकार 60 मिनट में इसके जानने वालों की कुल संख्या =

$$= 1+3+9+27+81+243+729+2187+6561+19683+59049+177147+531441$$
$$= 797161$$

हमने यहां यह माना है कि सभी लोग लगातार खबर बांटने का काम कर रहे हैं और हर नए व्यक्ति को एक ही खबर सुना रहे हैं। प्रत्येक व्यक्ति मात्र एक बार ही तीन नए व्यक्ति को खबर सुना रहा है।

आप देख रहे हैं कि मात्र 60 मिनट में एक व्यक्ति से शुरू होकर कोई खबर किस तरह से सात लाख से अधिक लोगों के बीच फैल सकती है।

शतरंज के खेल का आविष्कार भारत में हुआ था। इससे जुड़ी एक मज़ेदार कहानी इस प्रकार है – जब यहां के राजा को पता चला कि बुद्धिमता पूर्ण इस खेल का आविष्कारक उन्हीं के राज्य का एक विद्वान है, तो आविष्कारक को बुलाकर राजा ने कहा, ''मैं तुम्हारे इस अनूठे आविष्कार के लिए तुम्हें पुरस्कार देना चाहता हूँ।'' यह सुनकर विद्वान ने अपना सिर झुका लिया।

राजा ने कहा – मेरे पास पर्याप्त धन है। मैं तुम्हारी कोई भी इच्छा पूरी कर सकता हूँ। माँगो जो तुम्हारी इच्छा हो, डरो मत।

विद्वान ने कहा – राजन्! आपकी उदारता महान है। आप मुझे शतरंज के पहले घर (खाना) के लिए गेहूँ का एक दाना दिलाने की आज्ञा दें। दूसरे घर के लिए 2 दाने दिलाने की, तीसरे घर के लिए 4, चौथे घर के लिए 8, पांचवे घर के लिए 16, छठवें घर के लिए 32, ...

बस करो ...., राजा ने क्रोधित होकर उसे बीच में रोक दिया।

तुम्हें शतरंज के पूरे 64 घरों के लिए दाने मिल जायेंगे। हर घर में दानों की संख्या पिछले घर से दुगुनी होनी चाहिए, यही तुम्हारी शर्त है ना, परन्तु यह जान लो कि इतना छोटा ईनाम मांगकर तुम मेरी उदारता का अपमान कर रहे हो।

क्या आप बता सकते हैं कि चौसठवें खाने में राजा को गेहूँ के कितने दाने देने पड़ेंगे?

गणना बहुत बड़ी होती जा रही है लेकिन मजेदार बात यह है कि यहां 2 का 2 के साथ बार–बार गुणा करना पड़ रहा है। जैसे :–

पहले घर में दाना	:	1
दूसरे घर में दाने	:	2
तीसरे घर में दाने	:	2×2
चौथे घर में दाने	:	$2 \times 2 \times 2$
पांचवे घर में दाने	:	$2 \times 2 \times 2 \times 2$
छठवें घर में दाने	:	$2 \times 2 \times$ ----- 5 बार
__________		__________
__________		__________

इसी प्रकार,

चौसठवें घर में दाने : $2 \times 2 \times$ -------------- 63 बार

निश्चित ही यह संख्या बहुत बड़ी होगी, पर क्या आप कहानी का अंत जानना नहीं चाहेंगे? क्या राजा आविष्कारक को यह ईनाम दे सकेगा?

आविष्कारक को 18446744073709551615 दाने गेहू के देने पड़ेंगे और पूरी पृथ्वी की ज़मीन पर अगर गेहूँ की खेती की जाए तब भी इतना गेहूं नहीं मिलेगा। अब आप ही सोचिए यह है ना एक बहुत बड़ी संख्या?

$2 \times 2 \times$ --------- 63 बार करने पर कितनी बड़ी संख्या प्राप्त होगी? तो क्या किसी संख्या में उसी संख्या से बार–बार गुणा करने की प्रक्रिया को लिखने का कोई और तरीका हो सकता है?

प्राकृत संख्याओं के घात (Exponents in Natural Numbers)

कक्षा के सभी विद्यार्थी यही सोच रहे थे कि किसी राशि का उसी राशि के साथ गुणा करने की प्रक्रिया का प्रयोग गणित में और कहाँ किया गया है?

तभी अनु ने आशु से कहा – "हम क्षेत्रफल निकालने में इकाई सेमी × सेमी को सेमी^{2} लिखते हैं। इसी प्रकार आयतन निकालते समय भी इकाई सेमी × सेमी × सेमी को सेमी^{3} लिखते हैं। क्या इसी प्रकार $2\times2\times2$ को 2^3 नहीं लिखा जा सकता?

अनु ने किसी राशि को उसी राशि से बार–बार गुणा करने को संक्षेप में लिखने का ठीक तरीका सुझाया। क्या आप $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ को संक्षेप में लिख सकते है?

जिस प्रकार $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$ है

उसी प्रकार $a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$ तथा $x \times x \times x \times x = x^4$ होता है।

आप भी किसी राशि का उसी राशि के साथ बार–बार गुणा को संक्षेप में लिखिए :–

(i) $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$ = ------------------------

(ii) $r \times r \times r \times r \times r$ = ------------------------

(iii) $17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$ = ------------------------

(iv) $101 \times 101 \times 101 \times 101 \times 101$ = ------------------------

किसी संख्या का उसी संख्या के साथ बार–बार गुणा करने को आप संक्षेप में लिखना सीख चुके हैं। इस संक्षिप्त रूप को हम **घातीय संकेतन** भी कहते हैं। आइए, देखें कि इन्हें किस तरह से पढ़ा जाता है :–

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ यहाँ 3 आधार है तथा 4 घात है।

$p \times p \times p \times p \times p \times p = p^6$ यहाँ p आधार है तथा 6 घात है।

$r \times r \times$ ------------- 17 बार $= r^{17}$ यहाँ r आधार है तथा 17 घात है।

क्रियाकलाप 1. (Activity 1)

नीचे लिखे व्यंजकों के आधार एवं घात को उनके सामने दिए गए स्थानों में लिखिए :–

3^5 में आधार = 3 और घात = 5

7^{19} में आधार = ---------- और घात = -----------------

x^a में आधार = ---------- और घात = -----------------

p^q में आधार = ---------- और घात = -----------------

x^y में आधार = ---------- और घात = -----------------

अब आप समझ चुके होंगे कि घातीय रूप में लिखने का वास्तविक उद्देश्य किसी बहुत बड़ी राशि को संक्षिप्त रूप में लिखना है।

जैसे सूर्य से पृथ्वी की दूरी 150000000 किलोमीटर है जो एक बहुत बड़ी राशि है इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

150000000 किमी = $15 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 15 \times 10^7$ किमी

विस्तृत रूप को संक्षिप्त रूप में लिखना तो आप सीख चुके हैं। अब कुछ घातीय रूप को विस्तृत रूप में लिखिए :–

1. $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$
2. $3^6 =$ --------------------
3. $5^5 =$ --------------------
4. $r^7 =$ --------------------
5. $2^m =$ --------------------

रहीम को यह समझ में नहीं आ रहा था कि वह 2^m को विस्तृत रूप में कैसे लिखे क्योंकि m का कोई निश्चित मान नहीं है। क्या आप के पास रहीम की समस्या का जवाब है?

पहले भी आपने देखा है कि शतरंज के 64 वें खाने में राजा को $2 \times 2 \times 2 \times$ ----- 63 बार अर्थात् 2^{63} दाने गेहूँ के देने थे।

उसी प्रकार

$2^m = 2 \times 2 \times 2 \times$ ------------- m बार लिख सकते हैं।

इसी प्रकार हम x^m और y^n को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं –

$x^m = x \times x \times x \times$ ------------- m बार और

$y^n = y \times y \times$ ---- ------------- n बार लिख सकते हैं।

घातांक के नियम (Laws of Exponents)

आप जानते हैं कि $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ होता है। इसमें 2 के गुणकों का अलग–अलग समूह बनाकर कई प्रकार से लिख सकते हैं। जैसे :–

$2^5 = 2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^1 \times 2^4$

$2^5 = (2 \times 2)(2 \times 2 \times 2) = 2^2 \times 2^3$

$2^5 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2^3 \times 2^2$

$2^5 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2 = 2^4 \times 2^1$

यहाँ 2^5 को 2 के आधार वाले व्यंजकों में कई प्रकार से लिखा गया है। आप भी नीचे दिए गए घातीय व्यंजकों को समान आधार वाले दो व्यंजकों के गुणांक के रूप में लिखिए और घातों का योगफल प्राप्त कीजिए :–

सारणी 1

क्रमांक	घातीय व्यंजक	विस्तृत रूप में लिखकर दो समूहों में बांटना (समूह अपनी इच्छा से बनाइए)	प्रत्येक समूह को घातीय व्यंजक के रूप में लिखिए	घातों का योगफल
1.	a^7	$\underline{a \times a \times a \times a} \times \underline{a \times a \times a}$	$a^4 \times a^3$	$4 + 3 = 7$
2.	x^5			
3.	y^{10}			
4.	27^7			
5.	7^{12}			

ऊपर घातीय व्यंजकों के विस्तार रूप को देखिए तथा नीचे दिए हुए बॉक्स को भरिए :–

$a^7 = a^5 \times \boxed{a^2}$ $\qquad x^5 = x^3 \times \boxed{}$ $\qquad y^{10} = y^7 \times \boxed{}$

$27^7 = 27^4 \times \boxed{}$ $\qquad 7^{12} = 7^8 \times \boxed{}$

क्या दो समान आधार वाली राशियों का गुणा करने पर उन राशियों के घातों का गुणनफल वाली राशि के घात से कोई सम्बन्ध है? लिखिए।

आइए देखें कि सामान आधार वाली घातीय व्यंजकों का गुणा कैसे होता है :–

$x^3 \times x^4 = x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^7 = x^{(3+4)}$

$x^5 \times x^3 = x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^8 = x^{(5+3)}$

$y^{19} \times y^{21} = (y \times y \times$ ------------------ 19 बार) $\times (y \times y \times$ ----- 21बार)

क्या आप बता सकते हैं कि ऊपर y का y के साथ कितनी बार गुणा होगा ? गुणनफल में y आधार लें, तो उसका घात क्या होगा ?

y का y के साथ $(19 + 21) = 40$ बार गुणा हो रहा है।

अतः गुणनफल y^{40} होगा।

अतः हम कह सकते है कि “**जब दो समान आधार वाली घातीय राशियों का गुणा होता है, तो गुणनफल में आधार वही रहता है तथा उनकी घातें आपस में जुड़ जाती हैं।**”

जैसे :–

$3^{99} \times 3^{13} = 3^{(99+13)} = 3^{112}$

क्या आप $x^m \times x^n$ का गुणनफल बता सकते हैं?

$x^m \times x^n = x \times x$ ---------m बार और n बार अर्थात् $(m + n)$ बार गुणा हो रहा है।

अतः **नियम 1** $\boxed{x^{m} \times x^{n} = x^{m+n}}$

आप भी दो समान आधार वाली घातीय राशियाँ सोचिए और उनका गुणा ऊपर दिये गये नियम 1 की सहायता से कीजिए :–

1.	3^5	$\times$	3^9	$=$	3^{14}	(उदाहरण)
2.	3^{10}	$\times$	3^4	$=$	3^{14}	(उदाहरण)
3.		$\times$		$=$		
4.		$\times$		$=$		
5.		$\times$		$=$		

किसी संख्या का उसी संख्या से बार–बार गुणा करने को घातीय रूप में लिखना आप सीख चुके हैं तथा आपने समान आधार वाली घातीय राशियों का गुणा करना भी समझ लिया है। अपने समझ के आधार पर क्या आप 8^2 को 2 की आधार वाली घातीय राशियों में बदल सकते हैं?

राजू ने प्रश्न को इस तरह से हल किया :–

$8^2 = 8 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

राधा ने प्रश्न को दूसरे तरीके से हल किया। उसने $8 = 2^3$ लिखकर 2^3 का 2^3 के साथ दो बार गुणा किया :–

$8^2 = 8 \times 8 = 2^3 \times 2^3 = 2^{(3+3)} = 2^6$

इन हलों को देखकर रहीम ने कहा – दोनों तरीकों से तो एक ही उत्तर आ रहा है, किन्तु यदि 8^{12} जैसी कोई बड़ी घात वाली राशि हो तो क्या करेंगे ?

राधा अपने तरीके से हल करने लगी :–

$8^{12} = 8 \times 8 \times 8 \times$ ----------------------------------12 बार

$= 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times$ -----------------------------12 बार

$= 2^{(3+3+3+\text{-----------}12\text{बार})}$

$= 2^{(3\times12)}$

$= 2^{36}$

राधा ने तो हल कर लिया परन्तु राजू के तरीके से 2 इतने ज्यादा बार आ रहे थे कि उसने राधा के तरीके से हल करना उचित समझा।

राधा ने अपने साथियों को कुछ सवाल दिए और पूछा कि निम्नांकित घातीय राशियों को उनके सामने लिखे आधार वाली घातीय राशियों में लिखिए।

1. $(27)^6$ को 3 के आधार वाली घातीय राशि में
2. $(25)^5$ को 5 के आधार वाली घातीय राशि में
3. $(64)^6$ को 4 के आधार वाली घातीय राशि में

आइए, राधा द्वारा पूछे गए सवालों पर विचार करें :–

$(64)^6$ को 4 के आधार वाली घातीय राशि में लिखने के लिए हमें 64 को 4 के घातीय रूप में बदलना होगा, अर्थात्

$$\begin{aligned}(64)^6 &= (4 \times 4 \times 4)^6\\ &= (4^3)^6\\ &= 4^3 \times 4^3 \times 4^3 \times 4^3 \times 4^3 \times 4^3\\ &= 4^{(3+3+3+3+3+3)}\\ &= 4^{18}\end{aligned}$$

ऊपर सवाल में $(64)^6$ में 64 को 4^3 के रूप में लिख सकते हैं तथा $(4^3)^6$ में 4^3 का 4^3 के साथ 6 बार गुणा होगा अर्थात् $4^{(3\times6)} = 4^{18}$

स्पष्ट है कि 4 की घात 3 पूरे की घात 6 को हल करने पर घातांकों का आपस में गुणा होता है।

और एक उदाहरण देखिए – $(25)^5 = (5^2)^5$

$$\begin{aligned}&= 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2\\ &= 5^{(2+2+2+2+2)}\\ &= 5^{10}\end{aligned}$$

क्रियाकलाप 2. (Activity 2)

निम्न को सरल कीजिए :–

(i) $(2^3)^5 =$
(ii) $(14^2)^4 =$
(iii) $(10^2)^5 =$
(iv) $(x^2)^3 =$
(v) $(a^7)^9 =$
(vi) $(x^2)^m =$
(vii) $(y^n)^6 =$
(viii) $(x^m)^n =$

प्रश्न (viii) को आपने कैसे हल किया। उसकी व्याख्या अपनी कॉपी में कीजिए।

$(x^m)^n = x^m \times x^m \times$ ---------------------------- n बार

$= x^{(m+m+ \text{-----------------------------} n \text{ बार})}$

हम जानते हैं कि :–

$m + m = 2 \times m$

$m + m + m = 3 \times m$

$m + m +$ ----------------------- 8 बार $= 8 \times m$

$m + m +$ ----------------------- 12 बार $= 12 \times m$

अतः $m + m +$ ----------- n बार $= n \times m$ या $m \times n$

अतः नियम 2 $\boxed{(x^m)^n = x^{m\times n}}$

इसी प्रकार, $(p^q)^r = p^{q \times r} = p^{qr}$

स्पष्ट है कि घात की घात वाली राशियों को सरल करने पर घातों का आपस में गुणा हो जाता है।

क्रियाकलाप 3.

निम्नांकित प्रश्नों को नियम–2 की सहायता से हल करके घातीय रूप में लिखिए :–

(i) $(7^5)^9 = 7^{5 \times 9} = 7^{45}$

(ii) $(2^9)^{13} =$

(iii) $(a^b)^c =$

(iv) $(x^2)^3 =$

(v) $(31^{12})^3 =$

अब गुणनफल के रूप में लिखी जा सकने वाले निम्न संख्याओं पर विचार कीजिए :–

(i) $6^3 = (2 \times 3)^3$
$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$
$= 2^3 \times 3^3$

(ii) $35^4 = (5 \times 7)^4$
$= (5 \times 7) \times (5 \times 7) \times (5 \times 7) \times (5 \times 7)$
$= (5 \times 5 \times 5 \times 5) \times (7 \times 7 \times 7 \times 7)$
$= 5^4 \times 7^4$

(iii) $77^5 = (7 \times 11)^5$
$= (7 \times 11) \times (7 \times 11) \times (7 \times 11) \times (7 \times 11) \times (7 \times 11)$
$= (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) \times (11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11)$
$= 7^5 \times 11^5$

इन प्रश्नों पर विचार करते हुए रहीम ने सोचा कि यदि 26^m हो तब उसे किस रूप में लिखेंगे।

$26^m = (2 \times 13)^m = (2 \times 13) \times (2 \times 13) \times (2 \times 13)$ -------------- m बार
$= (2 \times 2 \times 2$ -------- m बार$) \times (13 \times 13 \times 13$ -------- m बार$)$
$= 2^m \times 13^m$

रज़िया ने रहीम से पूछा यदि $(ab)^m$ हो तब इसे किस रूप में लिख सकेंगे? रहीम ने बताया, ''ठीक ऊपर के प्रश्नों में जिस तरह से लिखा गया है, उसी तरह'', अर्थात

$(ab)^m = (ab) \times (ab) \times (ab) \times$ ----------------m बार
$= (a \times a \times a$ ------------- m बार$) \times (b \times b \times b$ ------------- m बार$)$
$= a^m b^m$

अतः **नियम** 3. $\boxed{(ab)^m = a^m b^m}$

प्रश्नावली 6.1 (Exercise 6.1)

1. निम्नलिखित को घातीय संकेतन में लिखिए –

(a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 =$

(b) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$

(c) $a \times a \times a \times a \times a \times a \times a =$

(d) $b \times b \times b \times b =$

2. निम्नलिखित को गुणनखण्डों में तोड़कर घातीय रूप में लिखिए:–

(a) 15^4 (b) 42^5 (c) 51^3 (d) 21^m (e) 65^6

3. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :–

(a) $(a \times b \times c)^p = a^p \times b^p \times c^p$

(b) $30^5 = 2^5 \times 3^5 \times 5^5$ (c) $616^9 = 7^9 \times 8^9 \times 11^9$

4. निम्नलिखित को नियम 3 का उपयोग कर घातांक रूप में लिखिए।

(a) $6^8 \times 7^8$ (b) $a^3 \times b^3$

(c) $p^9 \times q^9 \times r^9$ (d) $a^n \times b^n \times c^n \times d^n$

5. निम्नलिखित में घात के नियमों को ध्यान रखते हुए सही अथवा गलत बताइए।

(a) $2^3 \times 2^4 = 2^7$ (b) $5^{15} \times 5^5 = 5^{20}$

(c) $2^4 \times 3^2 = 2^6$ (d) $(27)^2 = (3^3)^2$

(e) $(2^3)^4 = (2^4)^3$

प्राकृत संख्याओं में भाग व घात (Divison with exponent in Natural Numbers)

फातिमा ने मोनू से पूछा, समान आधार वाली घातीय राशियों को गुणा करना तो हमने सीख लिया लेकिन समान आधार वाली घातीय राशियों का भाग कैसे करेंगे?

मोनू ने कहा, चलो करके देखते हैं –

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} = 2\times2 = 2^2$$

कमली और आशू ने भी इसी प्रकार के सवाल हल किए :–

(i) $$\frac{5^8}{5^4} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5\times5\times5} = 5\times5\times5\times5 = 5^4$$

(ii) $$\frac{7^9}{7^6} = \frac{7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7\times7} = 7\times7\times7 = 7^3$$

फातिमा ने सभी हलों को देखकर साथियों से कहा कि जिस तरह दो समान आधार वाली घातीय राशियों का गुणा करने पर घातें जुड़ती हैं उसी प्रकार दो समान आधार वाली घातीय राशियों में भाग क्रिया करने पर अंश की घात में से हर की घात घटा देते है।

जैसे :– $2^5 \div 2^3$ के भागफल का घात $5 - 3 = 2$ होता है, $5^8 \div 5^4$ के भागफल का घात $8 - 4 = 4$ एवं $7^9 \div 7^6$ के भागफल का घात $9 - 6 = 3$ है। अर्थात

$a^m \div a^n$ के भागफल का घात $m - n$ होगा।

अत **नियम 4:** $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

तभी मोनू ने कहा "यह तो ठीक है, परंतु यदि अंश और हर की घातीय संख्याएं समान हों तो क्या होगा? चलो हल करके देखें –

जैसे : $\dfrac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0$

परन्तु $\dfrac{7^5}{7^5} = \dfrac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7} = 1$

$\therefore\ 7^0 = 1$

तो क्या किसी घातीय राशि का घात शून्य होने पर उसका मान 1 होता है।

जैसे $\frac{p^n}{p^n} = 1$ होगा परन्तु सूत्र से

$\frac{p^n}{p^n} = p^{n-n} = p^0$

अतः **नियम 5** $\boxed{p^0 = 1}$

अब ज़रा निम्न संख्याओं पर विचार करें।

$\frac{1}{5^2} = \frac{5^0}{5^2} = 5^{0-2} = 5^{-2}$ ($5^0 = 1$ से)

$= \frac{1}{6^{35}} = \frac{6^0}{6^{35}} = 6^{0-35} = 6^{-35}$ ($6^0 = 1$ से)

$\frac{1}{4^{90}} = \frac{4^0}{4^{90}} = 4^{0-90} = 4^{-90}$ ($4^0 = 1$ से)

इन प्रश्नों का अवलोकन करते हुए फातिमा ने विचार किया कि यदि घातीय संख्याओं में हर को अंश के स्थान पर ले जाएं तब उनके घात के धनात्मक पूर्णांक, ऋणात्मक में एवं ऋणात्मक पूर्णांक धनात्मक में बदल जाता है, अर्थात यदि हमारे पास

$\frac{1}{a^4}$ हो तब $\frac{1}{a^4} = \frac{a^0}{a^4} = a^{0-4} = a^{-4}$ होगा

यदि $\frac{1}{a^m}$ हो तब $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$

अतः **नियम 6** $\boxed{\frac{1}{a^m} = a^{-m}}$ या $\boxed{\frac{1}{a^{-m}} = a^m}$

परन्तु यदि अंश को हर में ले जाएं तो क्या होगा, जैसा हमने ऊपर उदाहरणों में देखा है कि $\frac{1}{7^{-3}} = 7^3$ या $\frac{1}{a^{-4}} = a^4$ या $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$

उदाहरण : 1 x का मान ज्ञात कीजिए।

$2^x = \frac{1}{4}$

हल :

$2^x = \frac{1}{4}$

$2^x = 2^{-2}$

$\therefore\ x = -2$

प्रश्नावली 6.2 (Exercise 6.2)

(1) निम्न को नियम–4 की सहायता से घातीय रूप में हल करें।

(a) $6^5 \div 6^3$ (b) $27^8 \div 27^2$

(c) $13^m \div 13^n$ (d) $(mn)^7 \div (mn)^2$

(e) $x^{11} \div x^4$

(2) निम्न को सिद्ध कीजिए।

(a) $\frac{6^5}{6^4} = 6$ (b) $\frac{p^9}{p^4} = p^5$ (c) $\frac{16^{2m}}{16^m} = 16^m$

(3) निम्नलिखित को धनात्मक घात के रूप में लिखिए।

(a) 12^{-3} (b) 19^{-5}

(c) 3^{-4} (d) 5^{-3}

(4) निम्न के हर को अंश में बदलिए।

(a) $\frac{1}{35^4}$ (b) $\frac{1}{x^5}$

(5) निम्न के अंश को हर में बदलिए।

(a) $\frac{3^{-9}}{1}$ (b) $\frac{a^m}{b^m}$ (c) $\frac{p^{-8}}{p}$

(6) निम्नलिखित का मान लिखिए :–

(a) 273^o (b) $\left(\frac{x^5}{x^2}\right)^0$ (c) $\left(\frac{27p^{21}}{p^{11}}\right)^0$

(7) x का मान क्या होगा

(a) $2^x = 4$ (b) $4^x = 64$ (c) $8^x = 1$

(d) $3^x = \frac{1}{3}$ (e) $4^x = \frac{1}{64}$ (f) $3^{2x+4} = 3 \times 243$

(8) विश्व की जनसंख्या लगभग 5×10^9 हैं तथा विश्व का सतही क्षेत्रफल लगभग 4×10^{11} वर्ग किलोमीटर हैं तो प्रति वर्ग किलोमीटर लगभग कितने व्यक्ति रहते होंगे?

हमने सीखा (We have learnt)

1. किसी संख्या का उसी संख्या के साथ बार–बार गुणा करने को संक्षिप्त रुप में प्रदर्शित करना घातीय संकेतन कहलाता है।
2. जब दो समान आधार वाली घातीय राशियों का आपस में गुणा होता है, तो गुणनफल में आधार वही रहता है तथा घातें आपस में जुड़ जाती हैं।

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

3. यदि अंश और हर में समान आधार वाली घातीय राशि हो तो हल करते समय आधार वहीं रहता है तथा अंश के घात में से हर की घात को घटा देते हैं।

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

4. यदि घातीय संख्या का भी घातांक दिया हो तो हल करते समय घातांकों का आपस में गुणा हो जाता है।

$$(x^m)^n = x^{m \times n}$$

5. यदि किसी संख्या की घात शून्य हो तो उसका मान 1 होता है।

$$x^\circ = 1$$

6. यदि लिखी गयी संख्या में कोई घात न हो तो उसका अर्थ उस संख्या के ऊपर घात 1 है।

$$x = x^1$$

7. यदि घातीय संख्याओं में हर को अंश के स्थान पर ले जाएं या अंश को हर में ले जाएं तो संख्या का धनात्मक घात ऋणात्मक घात में एवं ऋणात्मक घात, धनात्मक में बदल जाता है।

जैसे : $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$ एवं $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$

❖❖❖