अनुक्रम, श्रेढ़ी तथा श्रेणी

Ex 8.1

प्रश्न 1. निम्न अनुक्रमों में से कौनसे अनुक्रम स.श्रे. में हैं?
(i) 2, 6, 11, 17,........
(ii) 1, 1.4, 1.8, 2.2, ...
(iii) -7, -5, -3, -1, ...
(iv) 1, 8, 27, 64, ...

हल- (i) संख्या 6, पूर्व संख्या 2 से 4 अधिक जबकि संख्या 11 पूर्व संख्या 6 से 5 अधिक है। इसलिए (i) समान्तर श्रेढी में नहीं है।

(ii) समान्तर श्रेढी में है। चूंकि प्रत्येक संख्या अपनी पूर्व संख्या से 0.4 अधिक है। इसलिए समान्तर श्रेढ़ी में है।

(iii) समान्तर श्रेढ़ी में है। चूंकि प्रत्येक संख्या अपनी पूर्व संख्या से 2 अधिक है।

(iv) समान्तर श्रेढी में नहीं है। चूंकि सार्वअन्तर समान नहीं है।

प्रश्न 2. उन अनुक्रमों के प्रथम पद, सार्वअन्तर तथा 5 वें पद ज्ञात कीजिए, जिनके n वें पद निम्नलिखित हैं

(i) $3n + 7$
(ii) $a + (n – 1)d$
(iii) $5 – 3n$

हल- (i) दिया है
$T_n = 3n + 7$
$n = 1, 2, 3$ रखने पर
$T_1 = 3 \times 1 + 7 = 3 + 7 = 10$
$T_2 = 3 \times 2 + 7 = 6 + 7 = 13$
$T_3 = 3 \times 3 + 7 = 9 + 7 = 16$
प्रथम पद (a) = 10, सार्वअन्तर $d = 13 – 10 = 3$
5 वें पद् $T_5 = 3 \times 5 + 7 = 15 + 7 = 22$

(ii) $T_n = a + (n – 1)d$
$n = 1, 2, 3$ रखने पर
$T_1 = a + (1 – 1)d = a + 0 = a$

$T_2 = a + (2 – 1)d = a + d$
$T_3 = a + (3 – 1)d = a + 2d$
प्रथम पद = a, सार्वअन्तर = a + 2d – a – d = d
और $T_5 = a + 4d$

(iii) $T_n = 5 – 3n$
n = 1, 2, 3 रखने पर।
$T_1 = 5 – 3 \times 1 = 5 – 3 = 2$
$T_2 = 5 – 3 \times 2 = 5 – 6 = – 1$
$T_3 = 5 – 3 \times 3 = 5 – 9 = – 4$
प्रथम पद = 2, सार्वअन्तर d = -3
और $T_5 = 5 – 3 \times 5 = 5 – 15 = -10$

प्रश्न 3. दर्शाइए कि निम्नलिखित n वें पदों वाले अनुक्रम स. श्रे. नहीं है।

(i) $\frac{n}{n+1}$
(ii) $n^2 + 1$

हल- (i) यहाँ दिया है

$$T_n = \frac{n}{n+1}$$

n के स्थान पर (*n* + 1) रखने पर

$$T_{n+1} = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

यह अन्तर n पर निर्भर है। अतः अनुक्रम स. श्रे. नहीं है।

(ii) यहाँ दिया है।
$T_n = n^2 + 1$
n के स्थान पर (n + 1) रखने पर
$T_{n+1} = (n + 1)^2 + 1 \Rightarrow n^2 + 2n + 2$
$T_{n+1} – T_n = n^2 + 2n + 2 – n^2 – 1$
$= 2n + 1$
यह अन्तर n पर निर्भर है। अतः अनुक्रम स. श्रे. नहीं है।

प्रश्न 4. समान्तर श्रेढ़ी 2 + 5 + 8 + 11 +…….. का कौनसा पद 65 है?
या

हल- दी गयी समान्तर श्रेढी
2 + 5 + 8 + 11 + …..
प्रथम पदं a = 2, सार्वअन्तर d = 5 – 2 = 3
अन्तिम पद l = 65, पदों की संख्या (n) = ?

अन्तिम पद $l = T_n = a + (n – 1)d$
मान रखने पर।
$65 = 2 + (n – 1) \times 3$
यो $65 – 2= (n – 1) \times 3$
या $63 = (n – 1) \times 3$
या $\frac{63}{3} = (n – 1)$
या $21 = (n – 1)$
$\therefore n = 21 + 1 = 22$
अतः 22वाँ पद 65 होगा।

प्रश्न 5. समान्तर श्रेढ़ी 4 +9+ 14 + 19 +……… + 124 के अन्त से 13वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल- दी गयी समान्तर श्रेढी
4 + 9 + 14 + 19 +……… + 124
सार्वअन्तर (d) = 9 – 4 = 5

$\because$ अन्त से nवाँ पद = $l – (n – 1)d$ होता है।
अतः अन्त से 13वाँ पद $= 124 – (13 – 1) \times 5$
$= 124 – 12 \times 5.$
$= 124 – 60 = 64$

प्रश्न 6. यदि समान्तर श्रेढी 2 + 5 + 8 + 11 +……… की अन्तिम पद 95 हो, तो श्रेढ़ी के पदों की संख्या ज्ञात कीजिये।

हल- दी गयी समान्तर श्रेढी
2 + 5 + 8 + 11 + ...
अन्तिम पद l = 95, n = ?
प्रथम पद (a) = 2, सार्वअन्तर (d) = 5 – 2 = 3
T = a + (n – 1)d

95 = 2 + (n – 1) × 3
95 – 2 = (n – 1) × 3
93 = (n – 1) × 3
$\frac{93}{3}$ = (n – 1)
31 = n – 1 ⇒ n = 31 + 1 = 32
अतः पदों की संख्या = 32

प्रश्न 7. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का 9वाँ पद शून्य है, तो सिद्ध कीजिए कि 29वाँ पद, 19वें पद का दुगुना होता है।

हल- दिया है
9वाँ पद शून्य है।
0 = a + (9 – 1)d ∵ T_n = a + (n – 1)d
a + 8d = 0 ....(1)
T_{29} = a + (29 – 1)d
T_{29} = 1 + 28d....(2)

T_{19} = + (19 – 1)d
T_{19} = a + 18d ....(3)
समी. (1) से a = -8d
∴ T_{29} = -8d + 28d = 20d ....(4)
और T_{19} =-8d + 18d = 10d ......(5)
समी. (4), समी. (5) का दुगुना है, अतः 29वाँ पद, 19वें पद का दुगुना है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 8. 3 से विभाज्य दो अंकों वाली प्राकृत संख्याएँ कितनी हैं ?

हल- 3 से विभाज्य दो अंकों वाली प्राकृत संख्याएँ निम्न होंगी
3 + 6 + 9 + 12 + 15 +............ 99
प्रथम पद (a) = 3, सार्वअन्तर d = 6 – 3 = 3
अन्तिम पद् T_n = 99
T_n = a + (n – 1)d
99 = 3 + (n – 1) × 3

$99 - 3 = (n - 1) \times 3$

$\frac{96}{3} = (n - 1)$

$32 = n - 1 \Rightarrow n = 32 + 1 = 33$

अतः 3 से विभाज्य दो अंकों वाली प्राकृत संख्याएँ 33 होंगी।

प्रश्न 9. यदि किसी स. श्रेणी का pवाँ पद q तथा धुवाँ पद p हों, (p + q)वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल- प्रश्नानुसार दिया है

$T_p = q$

$T_q = P$

$T_{p+q} = ?$

प्रश्नानुसार $q = (d + (p - 1)d$ .....(1)

$p = a + (q - 1)d$ .....(2)

समी. (1) में से (2) घटाने पर।

$q - p = d(p - 1 - q + 1)$

$q - p = (p - q)$

$\therefore d = \frac{(q-p)}{(p-q)} = -1$

d का मान समी. (1) में रखने पर

$q = a + (p - 1)$

$q = a + (p - 1) \times (-1)$

या $q = a - p + 1$

$\therefore a = q + p - 1$

$T_{p+q} = a + (p + q - 1)d$ ....(3)

समी. (3) में a तथा d का मान रखने पर

$T_{p+q} = q + p - 1 + (p + q - 1) \times (-1)$

$= q + p - 1 - p - q + 1$

$T_{p+q} = 0$ (शून्य)

प्रश्न 10. यदि किसी स. श्रे. का pवाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा qवाँ पद $\frac{1}{p}$ हो, तो सिद्ध कीजिए pqवाँ पद इकाई है।

हल- दिया है- $T_p = \frac{1}{q}$, $T_q = \frac{1}{p}$

सिद्ध करना है- $T_{pq} = 1$

प्रश्नानुसार, $T_p = a + (p - 1)d$

$\frac{1}{q} = a + (p - 1)d$ ...(1)

$T_q = a + (q - 1)d$

$$\frac{1}{p} = a + (q - 1)d \qquad ....(2)$$

समी. (1) में से (2) को घटाने पर

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = d(p - 1 - q + 1)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{p-q}{pq} = d(p - q)$$

$$\therefore \qquad d = \frac{(p-q)}{pq(p-q)} = \frac{1}{pq}$$

समी. (1) में d का मान रखने पर

$$\frac{1}{q} = a + (p - 1) \times \frac{1}{pq}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{q} = a + \frac{p}{pq} - \frac{1}{pq}$$

$$\frac{1}{q} = a + \frac{1}{q} - \frac{1}{pq}$$

$$\therefore \qquad a = \frac{1}{pq}$$

$$T_{pq} = a + (pq - 1)d$$

$$= \frac{1}{pq} + (pq - 1) \times \frac{1}{pq}$$

$$= \frac{1}{pq} + \frac{pq}{pq} - \frac{1}{pq} = \frac{pq}{pq} = 1$$

अतः $T_{pq} = 1$

अतः pqवाँ पद इकाई है। इतिसिद्धम् ।

Ex 8.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित श्रेढ़ियों को योगफल ज्ञात कीजिए

(i) 7 + 11 + 15 + 19 + ... 20 पदों तक।

(ii) $\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+$ .... 10 पदों तक।

(iii) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+$ ...... 6 पदों तक।

हल- (i) दिया है
a = 7, सार्वअन्तर d = 11 – 7 = 4
पदों की संख्या (n) = 20

हम जानते हैं $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$$\therefore \quad S_{20} = \frac{20}{2}[2\times 7+(20-1)\times 4]$$
$$= 10(14+19\times 4) = 10(14+76)$$
$$= 10\times 90 = 900$$

(ii) दिया है—$a = \frac{1}{3}$, $d = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$\therefore \quad S_{10} = \frac{10}{2}\left(2\times\frac{1}{3}+(10-1)\times\frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{10}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{9\times 2}{3}\right)$$
$$= \frac{10}{2}\left(\frac{2}{3}+6\right) = 5\times\frac{20}{3} = \frac{100}{3}$$

(iii) दिया है—$a = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $d = \sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$d = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad S_6 = \frac{6}{2}\left(2\times\frac{1}{\sqrt{2}+1}+(6-1)\times 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}+5\right)$$

$$= 3\left(\frac{2+5\sqrt{2}+5}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$= 3\left(\frac{7+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)$$

प्रश्न 2. 1 से 101 तक के विषम पूर्णांकों का योगफल ज्ञात कीजिए जो 3 से विभाज्य है।

हल- 1 से 101 तक 3 से विभाज्य पूर्णांक निम्न होंगे—
3 + 6 + 9 + 12 + ... 99
दिया है— a = 3, d = 6 – 3 = 3
l = a_n = 99 और S_n = ?

∴ $a_n = a + (n - 1)d$
99 = 3 + (n – 1) × 3
99 = 3 + 3n – 3
99 = 3n ∵ $n\frac{99}{3} = 33$

इसलिए $S_{33} = \frac{33}{2}(3 + 99) = \frac{33\times102}{2}$
= 33 x 51
S_{33} = 1683

प्रश्न 3. उस स. श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका r वाँ पद 2r + 3 है।

हल- दिया है–T_r = 2 + 3, r = 1, 2, 3, ...
T_1 = 2 x 1 + 3 = 2 + 3 = 5

$T_2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$
$T_3 = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$
$T_4 = 2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$
5 + 7 + 9 + 11 + ... n पद

इसलिए a = 5, a = 7 – 5 = 2

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$
$$= \frac{n}{2}(2 \times 5 + (n-1) \times 2)$$
$$= \frac{n}{2}(10 + 2n - 2)$$
$$= \frac{n}{2}(2n + 8)$$
$$= \frac{2n(n+4)}{2} = n(n + 4)$$

प्रश्न 4. किसी स. श्रे. के n पदों का योगफल $n^2 + 2n$ है। प्रथम पद तथा सार्वअन्तर ज्ञात कीजिये।

हल- दिया है– $S_n = n^2 + 2n$
$S_{n-1} = (n-1)^2 + 2(n-1)$
$= n^2 - 2n + 1 + 2n - 2$
$S_{n-1} = n^2 - 1$

हम जानते हैं- $T_n = S_n - S_{n-1}$
$= n^2 + 2n - (n^2 - 1)$
$= n^2 + 2n - n^2 + 1 = 2n + 1$
$T_n = 2n + 1$
n = 1, 2, 3, ... रखने पर।
$T_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$
$T_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$
$T_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$
अतः श्रेढ़ी का प्रथम पद a = 3
और सार्वअन्तर d = 5 – 3 = 2

प्रश्न 5. यदि स. श्रे. 1, 6, 11, ... के n पदों का योगफल 148 है, तो पदों की संख्या तथा अन्तिम पद ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है
$a = 1, d = 6 - 1 = 5, S_n = 148$,
$n = ?, a_n = ?$

हम जानते हैं- $S_n = \frac{n}{2}(2n + (n - 1)d)$
$148 = \frac{n}{2}(2 \times 1 + (7 - 1) \times 5)$
या $148 \times 2 = n(2 + 5n - 5)$
या $296 = n(5n - 3)$
या $5n^2 - 3n - 296 = 0$

गुणनखण्ड करने पर
$5n^2 - 40n + 37n - 296 = 0$
$5n(n - 8) + 37(n - 8) = 0.$
$(5n + 37)(n - 8) = 0$
$\therefore n = 8, \frac{-37}{5}$

n का मान पूर्णांक होता है। इसलिए $n \neq \frac{-37}{5} \therefore n = 8$
$\therefore a_8 = a + (8 - 1)d$
$a_8 = a + 7d = 1 + 7 \times 5$
$= 1 + 35 = 36$
अतः पदों की संख्या $n = 8$
और अन्तिम पद $a_8 = 36$

प्रश्न 6. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के p पदों का योगफल तथा q पदों का योगफल समान है, तो (p + q) पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है।
अतः
प्रथम 2 पदों का योगफल = $\frac{p}{2}[2a+(p - 1)d]$ ....(i)
तथा प्रथम q पदों का योगफल = $\frac{q}{2}[2a+(q - 1)d)$ ....(ii)
प्रश्नानुसार p पदों का योगफल = q पदों का योगफल

अर्थात् $\frac{p}{2}[2a+(p - 1)d) = \frac{q}{2}[2a+(q - 1)d]$
$2ap + p(p - 1)d = 2aq + q(q - 1)d$
या $2a(p - q) + [p(p - 1) - q(q - 1)]d = 0$
या $2a(p - q) + [(p^2 - q^2) - (p - q)]d = 0$
या $2a(p - q) + (p - q)[p + q - 1)]d = 0$

p – q से भाग देने पर

2 + (p + q- 1) d = 0 ….(iii)

अब $(p+q)$ पदों का योगफल $= \frac{p+q}{2}[2a+(p+q-1)d]$

$$\left[\because S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]\right]$$

$= \frac{p+q}{2} \times 0$ [समीकरण (iii) से मान रखने पर]

= 0 इतिसिद्धम्

प्रश्न 7. यदि किसी स. श्रे. के n, 2n, 3n पदों का योगफल क्रमशः S_1, S_2, तथा S_3 हों, तो सिद्ध कीजिए कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ होगा।

हल- माना स. श्रे. का प्रथम पद a है तथा सार्वअन्तर d है। अतः।
प्रश्नानुसार

$$S_1 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \quad ....(1)$$

$$S_2 = \frac{n}{2}[2a + (2n-1)d] \quad ....(2)$$

$$S_3 = \frac{n}{2}[2a + (3n-1)d] \quad ....(3)$$

अब सिद्ध करना है—

$$S_3 = 3(S_2 - S_1)$$

$$\text{R.H.S.} = 3(S_2 - S_1)$$

$$= 3\left[\frac{2n}{2}(2a+(2n-1)d) - \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)\right]$$

$$= \frac{3n}{2}[49 + 2(2n-1)d - 2a - (n-1)d]$$

$$= \frac{3n}{2}[(49-29) + (4n-2-n+1)d]$$

$$= \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)d]$$

$$= S_3 = \text{L.H.S.}$$

अतः $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 8. यदि n पदों वाली m समान्तर श्रेढ़ियों के योगफल $S_1, S_2, S_3, ..., S_m$ हैं। इनके प्रथम पद क्रमशः 1, 2, 3, ……, m तथा सार्वअन्तर क्रमशः 1, 3, 5, ……, (2m – 1) है, तो सिद्ध कीजिए

$S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_m = \frac{mn}{2}(mn + 1)$

हल- समान्तर श्रेढ़ियों के प्रथम पद a क्रमशः = 1, 2, 3, ... m तथा
सार्वअन्तर d क्रमशः 1, 3, 5, ... 2m – 1
पदों की संख्या = n
हमें ज्ञात करना है-$S_1 + S_2 + S_3 + ... S_m$

अब सूत्र $S_m = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ से

$$S_1 = \frac{n}{2}[2.1 + (n-1).1] = \frac{2n}{2} + \frac{n}{2}(n-1)$$

$$S_2 = \frac{n}{2}[2.2 + (n-1).3] = \frac{4n}{2} + \frac{3n}{2}(n-1)$$

$$S_3 = \frac{n}{2}[2.n + (n-1).5] = \frac{6n}{2} + \frac{5n}{2}(n-1)$$

....

....

....

$$S_m = \frac{n}{2}[2m + (n-1).(2m-1)]$$

$$= \frac{2nm}{2} + \frac{n(2m-1)}{2}(n-1)$$

स्तम्भानुसार योग करने पर

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_m = n[1 + 2 + 3 + ... m] + \frac{n(n-1)}{2}[1 + 3 + ... (2m-1)]$$

$$= n\left[\frac{m(m+1)}{2}\right] + \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{m}{2}(2.1 + (m-1).2)\right]$$

$$= n\left[\frac{m(m+1)}{2}\right] + \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{m}{2}\{2 + 2m - 2\}\right]$$

$$= \frac{nm}{2}[m + 1 + nm - m]$$

$$= \frac{nm}{2}(nm + 1)$$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 9. यदि किसी स. श्रे. के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$$

हल- माना कि समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद A तथा सार्वअन्तर D है, तब

$$S_p = \frac{p}{2}[2A+(p-1)D]$$

प्रश्न से $S_p = a$

$$\therefore \frac{p}{2}[2A+(p-1)D] = a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{p} = \frac{1}{2}[2A+(p-1)D]$$

दोनों पक्षों में (q – r) से गुणा करने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{p}(q-r) = \frac{1}{2}(q-r)[2A+(p-1)D]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{p}(q-r) = \frac{1}{2}(q-r).2A+\frac{1}{2}(q-r)(p-1)D$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{p}(q-r) = (q-r)A+\frac{1}{2}(q-r)(p-1)D \text{....(i)}$$

इसी प्रकार—

$$\frac{b}{q}(r-p) = (r-p)A+\frac{1}{2}(r-p)(q-1)D \text{...(ii)}$$

तथा $\frac{c}{r}(p-q) = (p-q)A+\frac{1}{2}(p-q)(r-1)D$ ...(iii)

समीकरण (i), (ii) व (iii) को जोड़ने पर

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)$$

$$= \left[(q-r)A+\frac{1}{2}(q-r)(p-1)\,D\right]$$

$$+\left[(r-p)A+\frac{1}{2}(r-p)(q-1)\,D\right]$$

$$+\left[(p-1)A+\frac{1}{2}(p-q)(r-1)\,D\right]$$

$$= [(q-r)\,A+(r-p)\,A+(p-q)\,A]+$$

$$\left[\frac{1}{2}(q-r)(p-1)\,D+\frac{1}{2}(r-p)(q-1)\,D+\frac{1}{2}(p-q)(r-1)\,D\right]$$

$$= A[q-r+r.p+p-q]+\frac{1}{2}D$$

$$[pq-pr+r-q+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q]$$

$$= A\times 0+\frac{1}{2}D\times 0$$

$$= 0+0=0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 10. स. श्रे. में वे तीन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 12 है। तथा उनके धनों का योगफल 408 है।

हल- समान्तर श्रेढ़ी में तीन संख्याएँ निम्न होंगी
$a - d, a, a + d$

प्रश्नानुसार
$a - d + a + a + d = 12$
या $3a = 12$
$\therefore a = \frac{12}{3} = 4$
$(4 - d)^3 + a^3 + (a + d)^3 = 408$

a का मान रखने पर

$(4 - d)^3 + (4)^3 + (4 + d)^3 = 408$
$(4 - d)^3 + (4 + d)^3 = 408 - 64 = 344$
$(4)^3 - d^3 - 12d(4 - d) + (4)^3 + d^3 + 12d(4 + d) = 344$
$64 + 64 - 12d(4 - 4 - 4 - d) = 344$

$12d^2 + 12d \times 2d = 344$
$12d^2 = 344 - 128$
$24d^2 = 216$
$d^2 = \frac{216}{24} = 9 \therefore d = \pm 3$
अतः समान्तर श्रेढ़ी में तीन संख्याएँ निम्न होंगी
$4 - 3, 4, 4 + 3$
अर्थात् 1, 4, 7 जबकि d धनात्मक लेते हैं।
या 7, 4, 1, जबकि d ऋणात्मक लेते हैं।

प्रश्न 11. यदि 1 तथा 51 के मध्य n स.मा. इस प्रकार प्रविष्ट किये गये हों कि चौथे तथा सातवें समान्तर माध्य का अनुपात 3 : 5 है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि 1 तथा 51 के बीच n संख्याएँ क्रमशः $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ हैं अतः समान्तर श्रेढ़ी जो प्राप्त होगी
$1, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 51
यहाँ पर $a = 1, T_{n+2} = 51$
$T_{n+2} = a + (a + 2 - 1)d$
या $51 = a + (a + 1)$
या $51 = 1 + (n + 1)d$
$\therefore d = \frac{50}{n+1}$
$A_4 = a + 4d = 1 + 4 \times \frac{50}{n+1}$

$$= 1 + \frac{200}{n+1}$$

तथा $$A_7 = a + 7d = 1 + \frac{7 \times 50}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{350}{n+1}$$

दिया गया है—

$$\frac{A_4}{A_7} = \frac{3}{5}$$

मान रखने पर

$$\frac{1+\frac{200}{n+1}}{1+\frac{350}{n+1}} = \frac{3}{5}$$

या $$\frac{n+1+200}{n+1+350} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{n+201}{n+351} = \frac{3}{5}$$

या 5n + 1005 = 3n + 1053

या 2n = 1053 – 1005 = 48

∴ n = 24

प्रश्न 12. यदि x, y, z स. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए

(i) y + z, z + x, x + y स. श्रे. में हैं।

(ii) $\frac{1}{yz}, \frac{1}{zx}, \frac{1}{xy}$ स. श्रे. में हैं।

(iii) $(x - y)(y - z) = \frac{(z-x)^2}{4}$

(iv) $(x - z)^2 = 4(y^2 - xz)$

(v) $xy + yz + zx = \frac{x^2 + z^2 + 4xz}{2}$

हल- (i) यदि x, y, z स. श्रे. में हैं, तब हमें सिद्ध करना है कि

y + z, z + x, x + y स. श्रे. में होंगे।

y + z, z + x, x + y A.P. में हैं।

∴ (z + x) – (y + z) = (x + y) – (z + x)

या z + x – y – z = x + y – z – x

या x – y = y – z

या 2y = x + z
अर्थात् x, y, z स. श्रे. में है। इतिसिद्धम्

(ii) $\frac{1}{yz}, \frac{1}{zx}, \frac{1}{xy}$ A.P. में हैं।

∴ $$\frac{1}{zx} - \frac{1}{yz} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{zx}$$

$$\frac{(y-x)}{xyz} = \frac{(z-y)}{xyz}$$

या $$y - x = z - y$$

या $$2y = z + x$$

अर्थात् x, y, z स. श्रे. में हैं। **इतिसिद्धम्**

(iii) $(x - y)(y - z) = \frac{(z-x)^2}{4}$

$\because$ x, y, z A.P. में हैं।

$$\therefore \quad 2y = x + z$$

$$y = \frac{x+z}{2}$$

L.H.S.

$$(x - y)(y - z) = \left(x - \left(\frac{x+z}{2}\right)\right)\left(\frac{x+z}{2} - z\right)$$

$$= \left(\frac{2x - x - z}{2}\right) \times \left(\frac{x + z - 2z}{2}\right)$$

$$= \frac{(x-z)\times(x-z)}{4} = \frac{(x-z)^2}{4}$$

= R.H.S. इतिसिद्धम्

(iv) $(x - z)^2 = 4(y^2 - xz)$

x, y, z A.P. में हैं।

$$\therefore \quad 2y = x + z$$

या $$y = \left(\frac{x+z}{2}\right)$$

•, R.H.S.

$$4(y^2 - xz) = 4\left(\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 - xz\right)$$

$$= 4\left(\frac{x^2 + z^2 + 2xz}{4} - xz\right)$$

$$= 4\left(\frac{x^2 + z^2 + 2xz - 4xz}{4}\right)$$

$$= x^2 + z^2 - 2xz$$

$= (x - z)^2 =$ L.H.S. इतिसिद्धम्

(v) $xy + yz + zx = \frac{x^2 + z^2 + 4xz}{2}$

x, y, z A.P. में हैं।

$$\therefore \quad 2y = x + z$$

$$y = \frac{x+z}{2}$$

L.H.S. $xy + yz + zx$

$\Rightarrow \quad y(x + z) + zx$

y का मान रखने पर

$$\left(\frac{x+z}{2}\right)(x + z) + zx$$

$$= \frac{(x+z)^2 + 2zx}{2} = \frac{x^2 + z^2 + 2xz + 2xz}{2}$$

$$= \frac{x^2 + z^2 + 4xz}{4} = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 13. यदि $x^2(y + z), y^2(z + x), z^2(x + y)$ स. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि या तो x, y, z स. श्रे. में हैं या $xy + yz + zx = 0$ होगा।

हल- $x^2(y + z), y^2(z + x), z^2(x + y)$ A.P में हैं।

$\therefore y^2(z + x) - x^2(y + z) = z^2(x + y) - y^2(z + x)$

$\Rightarrow y^2z + y^2x - x^2y - x^2z = z^2x + z^2y - y^2z - y^2x$

$\Rightarrow y^2z - x^2z + xy(y - x) = z^2x - y^2x + zy(z - y)$

$\Rightarrow z(y^2 - x^2) + xy(y - x) = x(z^2 - y^2) + zy(z - y)$

$\Rightarrow (y - x)(y + x) + xy(y - x) = x(z - y)(z + y) + zy(z - y)$

$\Rightarrow (xy + yz + zx)(y - x) = (z - y)(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow (xy + yz + zx)(y - x) - (z - y)(xy + yz + zx) = 0$

$\Rightarrow (xy + yz + zx)(y - x - z + y) = 0$

$\Rightarrow (xy + yz + zx)(2y - (x + z)) = 0$

$\Rightarrow xy + yz + zx = 0$

या $2y - (x + z) = 0$

या $2y = x + z$

अर्थात् x, y, z A.P में होंगे। इतिसिद्धम्

प्रश्न 14. समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{30}$ का योगफल ज्ञात कीजिये, दिया हुआ है $a_1 + a_7 + a_{10} + a_{21} + a_{24} + a_{30} = 540$

हल- दिया गया है

$a_1 + a_7 + a_{10} + a_{21} + a_{24} + a_{30} = 540$

या $a_1 + (a_1 + 6d) + (a_1 + 9d) + (a_1 + 20d) + (a_1 + 23d) + (a_1 + 29d) = 540$

या $6d_1 + 87d = 540$

या $3(2a_1 + 29d) = 540$
या $2a_1 + 29d = \frac{540}{3} = 180$
$\therefore 2a_1 + 29d = 180$. ....(1)
हमें मान ज्ञात करना है
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{30}$

$$\therefore \quad S_{30} = \frac{30}{2}[2a_1 + (30 - 1)d]$$

$$S_{30} = 15[2a_1 + 29d]$$

$$\because S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$\therefore \quad S_{30} = 15 \times 180$$

$$\because \text{समी. (1) से } 2a_1 + 29d = 180$$

$$S_{30} = 2700$$

प्रश्न 15. एक बहुभुज के अन्तः कोण समान्तर श्रेढ़ी में हैं। सबसे छोटा अन्त:कोण 52° तथा क्रमिक अन्त:कोणों का अन्तर 8° हो, तो बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल- हम जानते हैं कि n भुजाओं वाले बहुभुज के अन्त:कोणों का
योग = $(2n – 4) \times 90°$
= $180n – 360°$ ....(1)

अब प्रश्नानुसार कोणों का क्रम निम्न होगा
52°, 60°, 68°,...........
यहाँ $a = 52°$, $d = 60° – 52° = 8°$
$S_n = \frac{n}{2}[2 + (n – 1)d]$
$180n – 360 = \frac{n}{2}[2 \times 52 + (n – 1) \times 8]$
या $180n – 360 = n[52 + 47 – 4]$
या $180n – 360 = n(4n + 48)$
या $180n – 360= 4n(n + 12)$
या $45n – 90 = n(n + 12)$
या $45n – 90 = n^2 + 12n$
या $n^2 – 33n + 90 = 0$
$(n – 30)(n – 3)= 0$
$n = 3, 30$
$n = 30$ सम्भव नहीं है। अतः $n = 3$

Ex 8.3

प्रश्न 1.(i) श्रेढ़ीं 1 + 3 + 9 + 27 + ... का 7 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
(ii)
$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ .....$$
का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल- (i) 1 + 3 + 9 + 27 +...का 7 वाँ पद ?
प्रथम पद (a) = 1

सार्वअनुपात r = $\frac{3}{1}$ = 3
पदों की संख्या n = 7

हम जानते हैं— $T_n = ar^{n-1}$
$\therefore$ $T_7 = 1 \times (3)^{7-1} = 3^6$
$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
$= 729$

(ii) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ .....$ का 10वाँ पद

प्रथम पद $(a) = \sqrt{2}$

सार्वअनुपात $r = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

हम जानते हैं— $T_n = ar^{n-1}$

$\therefore$ $T_{10} = \sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^9$

$= \frac{\sqrt{2}}{512}$

प्रश्न 2. (i) श्रेढी 64 + 32 + 16 + 8 +..... का कौनसा पद 1/64 है ?
(ii) श्रेढ़ी
$$6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\ .....$$
का कौनसा 3/256 है ?

हल- (i) श्रेढ़ी 64 + 32 + 16 + 8 +.....
प्रथम पद (a) = 64

$$\text{सार्वअनुपात} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$$T_n = \frac{1}{64}$$

$$n = ?$$

$$\because \quad T_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{64} = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{या} \quad \frac{1}{64 \times 64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{या} \quad \frac{1}{2^6 \times 2^6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{या} \quad \frac{1}{2^{12}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{या} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

आधार समान हैं घातें भी बराबर होंगी
$\therefore 12 = n - 1 \Rightarrow n = 13$
(ii)
$6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} +$ ..... का कौनसा $\frac{3}{256}$ है ?
दिया है—
प्रथम पद $(a) = 6$

सार्वअनुपात $r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

माना T_n पद $\frac{3}{256}$ है।

$$\therefore \quad T_n = ar^{n-1}$$

$$\frac{3}{256} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{256 \times 6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{512} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

आधार समान हैं घातें भी बराबर होंगी।

$\therefore n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10$

प्रश्न 3. गुणोत्तर श्रेढ़ी 5 + 10 + 20 + 40 +...... का सार्वअनुपात तथा n वाँ पद ज्ञात कीजिये ।

हल- गुणोत्तर श्रेढी

5 + 10 + 20 + 40 + ...

प्रथम पद (a) = 5

सार्वअनुपात = $\frac{10}{5}$ = 2

श्रेढ़ी का nवाँ पद $T_n = ar^{n-1}$

$= 5.(2)^{n-1} = 5.2^{n-1}$

प्रश्न 4. गुणोत्तर श्रेढ़ी 2, 6, 18, 54,........., 118098 का अन्त से 5वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है

a = 2

r = $\frac{6}{2}$ = 3

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$118098 = 2 \times 3^{n-1}$$

या $$\frac{118098}{2} = 3^{n-1}$$

या 59049 = 3

या $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{n-1}$

$(3)^{10} = 3^{n-1}$

आधार समान हैं घातें भी बराबर होंगी।

$\therefore 10 = n - 1 \therefore n = 10 + 1 = 11$

हम जानते हैं अन्त से p वाँ पद = ar^{n-p} होता है।
= $2 \times (3)^{11-5} = 2 \times (3)^6$
= 1458

प्रश्न 5. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 32 तथा 7वाँ पद 8192 है, तो श्रेढ़ी को 10वाँ पद ज्ञात कीजिये ।

हल- दिया है– $T_3 = 32$
$T_7 = 8192$
$T_{10} = ?$

प्रश्नानुसार $32 = T_3 = ar^2$ ....(1)
$8192 = T_7 = ar^6$ ....(2)
समी.(2) में समी. (1) का भाग देने पर

$$\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{8192}{32}$$

$r^4 = 256$
$\therefore r = (256)^{1/4} = (2^8)^{1/4} = 2^{8/4}$
$r = 2^2 = 4$

r का मान समी. (1) में रखने पर।
$32 = a \times (4)^2$
$16d = 32 \therefore a = \frac{32}{16} = 2$

इसलिए $T_{10} = ar^9 = 2 \times (4)^9$
$= 2 \times (2^2)^9$
$= 2^1 \times 2^{18} = 2^{19}$

प्रश्न 6. गुणोत्तर श्रेढी ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 1 तथा सातवाँ पद 16 है ।

हल- दिया है $T_3 = 1$
तथा $T_7 = 16$
प्रश्नानुसार $T_3 = 1 = ar^2$ ....(1)
$T_7 = 16 = ar^6$ ....(2)
समी. (2) में समी. (1) का भाग देने पर

$$\frac{16}{1} = \frac{ar^6}{ar^2}$$

$$\Rightarrow \quad 16 = r^4 \therefore r = (16)^{1/4} = (2^4)^{1/4}$$

$$r = 2$$

r का मान समी. (1) में रखने पर

$$1 = a(2)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 4a \therefore a = \frac{1}{4}$$

गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ar^3, ...$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\times 2, \frac{1}{4}\times 4, \frac{1}{4}\times 8$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$$

प्रश्न 7. (i) 3 तथा 48 के मध्य 3 गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिये ।
(ii) 2 व 256 के मध्य 6 गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

हल- (i) माना 3 तथा 48 के मध्य तीन गुणोत्तर माध्य G_1, G_2, G_3 है
अतः 3, G_1, G_2, G_3, 48 गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।
प्रथम पद a = 3

अन्तिम पद (b) = 48
और पदों की संख्या = 5
$b = ar^{n-1} \therefore 48 = 3(r)^{5-1}$
या $\frac{48}{3} = r^4$

या $r^4 = 16 \therefore r = (16)^{1/4} = (2^4)^{1/4}$
r = 2
$\therefore G_1 = ar = 3 \times 2 = 6$

$G_2 = a^2 = 3 \times (2)^2 = 3 \times 4 = 12$
$G_3 = ar^3 = 3 \times (2)^3 = 3 \times 8 = 24$
अतः 3 और 48 के मध्य तीन गुणोत्तर माध्य 6, 12 तथा 24 होंगे।

(ii) दिया है a = 2 तथा b = 256
2 व 256 के मध्य 6 गुणोत्तर माध्य G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 हैं।

$2, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, 256$
$\therefore b = ar^{n-1}$

$256 = 2.(r)^{8-1}$
या $\frac{256}{2} = r^7$
या $128 = r^7 \therefore r = (128)^{1/7} = (2^7)^{1/7}$
इसलिए $r = 2$
अतः $G_1 = ar = 2 \times 2 = 4$
$G_2 = ar^2 = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$
$G_3 = ar^3 = 2 \times 2^3 = 2 \times 8 = 16$

$G_4 = ar^4 = 2 \times 2^4 = 2 \times 16 = 32$
$G_5 = ar^5 = 2 \times 2^5 = 2 \times 32 = 64$
$G_6 = ar^6 = 2 \times 2^6 = 2 \times 64 = 128$
अतः 2 व 256 के मध्य 6 गुणोत्तर माध्य 4, 8, 16, 32, 64 तथा 128 होंगे।

प्रश्न 8. x के किस मान के लिए संख्याएँ x, x + 3, x + 9 गुणोत्तर श्रेढ़ी। में हैं ?

हल- यहाँ पर संख्याएँ x, x + 3, x + 9 GP. में हैं। इसलिए
$(x + 3)^2 = (x) \times (x + 9) \because b^2 = ac$
$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 9x$
या $3x = 9 \therefore x = 3$
अतः x = 3 के लिए संख्याएँ x, x + 3 तथा x + 9 गुणोत्तर श्रेढी में होंगी।

प्रश्न 9. ऐसे चार पद ज्ञात कीजिये जो गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 4 अधिक है तथा दूसरी पद चौथे पद से 36 अधिक है।

हल- माना गुणोत्तर श्रेढ़ी के चार पद निम्न हैं—
$a, ar; ar^2, ar^3$
प्रश्नानुसार $a + 4 = ar^2$ प्रथम शर्त से
$ar = ar^3 + 36$ दूसरी शर्त से
$ar^2 - a = 4$

$a(r^2 - 1) = 4$ ....(1)
$ar^3 - ar = -36$
$ar(r^2 - 1) = -36$ ....(2)
समी. (2) में (1) का भाग देने पर

$$\frac{ar(r^2-1)}{a(r^2-1)} = \frac{-36}{4}$$

या $\boxed{r = -9}$

समी. (1) में मान रखने पर

$a((-9)^2 - 1) = 4$

$a(81 - 1) = 4$

$$\Rightarrow \quad 80a = 4 \therefore a = \frac{4}{80} = \frac{1}{20}$$

अत: गुणोत्तर श्रेढ़ी के चार पद होंगे—

$$\frac{1}{20}, \frac{-9}{20}, \frac{81}{20}, \frac{-729}{20}$$

प्रश्न 10. किसी गु. श्रे. का चौथा पद p, सातवाँ पद q तथा दसवाँ पद r है, तो सिद्ध कीजिये $q^2 = pr$

हल- दिया है

$T_4 = p$,

$T_7 = q$

$T_{10} = r$

प्रश्नानुसार लेने पर

$p = T_4 = ar^3$ ....(1)

$q = T_7 = ar^6$ ....(2)

$r = T_{10} = ar^9$ ....(3)

सिद्ध करना है- $q^2 = pr$

R.H.S. $pr = ar^3 . ar^9$

(p तथा r का मान समी. (1) तथा (3) में रखा है।)

$= a^2 r^{12}$

$= (ar^6)^2 = (q)^2 =$ L.H.S.

अतः L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 11. यदि गु. श्रे. में (p + q) वाँ पद x तथा (p – q) वाँ पद y है, तो p वाँ पद ज्ञात कीजिये।

हल- दिया है-

$T_{p+q} = x$

$T_{p-q} = y$

प्रश्नानुसार $x = ar^{p+q-1}$ ....(1)
$y = ar^{p-q-1}$ ....(2)

समीकरण (1) तथा (2) को गुणा करने पर
$xy = ar^{p+q-1} \times ar^{p-q-1}$
$xy = a^2 r^{p+q-1+p-q-1}$
$xy = a^2 r^{2p-2} = (ar^{p-1})^2$

$\therefore ar^{p-1} = \sqrt{xy}$
अतः गु. श्रे. का p वाँ पद = $\sqrt{xy} \because T_p = ar^{p-1}$

प्रश्न 12. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेढ़ी में तथा $a^x = b^y = c^z$ है तो सिद्ध कीजिये कि
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$$

हल- माना कि $a^x = b^y = c^z = k$ हैं तो
$a = k^{1/x}, b = k^{1/y}, c = k^{1/z}$ ....(i)
$\because$ a, b, c गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

इसलिये शर्त $b^2 = ac$ ....(ii)
समी. (i) से मान रखने पर
$(k^{1/y})^2 = kl^{1/x}.k^{1/z}$

या $k^{2/y} = k^{1/x+1/z}$
यहाँ पर आधार समान हैं इसलिये घातें भी समान होंगी।
$$\frac{2}{y} = \frac{1}{x}+\frac{1}{z}$$
इतिसिद्धम्

प्रश्न 13. यदि a तथा b के बीच n गु.मा. प्रविष्ट किये जायें तो सिद्ध कीजिये कि सभी गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल $\left(\sqrt{ab}\right)^n$ होगा।

हल- यदि a वे b के मध्य n गु.मा. हों, तो सार्वअनुपात
$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$
अब प्रश्नानुसार n माध्यों का गुणनफल
$= (ar) (ar^2) (ar^3) (ar^4) ..... (ar^n)$

r का मान रखने पर

$$= \left[a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right] . \left[a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}\right] . \left[a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}\right] \left[a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{4}{n+1}}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left[a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right]$$

$$= a^n \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+1} + \ldots\ldots \frac{n}{n+1}}$$

$$= a^n \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}[1+2+3+4 \ldots\ldots n \text{ पद}]}$$

$$= a^n \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]} = a^n \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{a^n \times b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}}} = a^{\frac{n}{2}} . b^{\frac{n}{2}} = (ab)^{\frac{n}{2}} = \left(\sqrt{ab}\right)^n \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 14. x, y, z गु. श्रे. में हैं । x, y का स.मा. A_1 तथा y, z का स.मा. A_2 है, तो सिद्ध कीजिए

(i) $\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} = \frac{2}{y}$ (ii) $\frac{x}{A_1} + \frac{z}{A_2} = 2$

हल- दिया है x, y, z गु. श्रे. में हैं।
$y^2 = xz$ ....(i)
प्रश्नानुसार

$$A_1 = \frac{x+y}{2} \quad \ldots.(ii)$$

$$A_2 = \frac{y+z}{2} \quad \ldots.(iii)$$

चूँकि x, y का स.मा. A_1 और y, z का स.मा. A_2 है।

(i) L.H.S. $\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2} = \frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}$

$$= 2\left[\frac{y+z+x+y}{(x+y)(y+z)}\right]$$

$$= 2\left[\frac{2y+z+x}{xy+xz+y^2+yz}\right]$$

$$= 2\left[\frac{2y+z+x}{xy+y^2+y^2+yz}\right]$$

$\because$ समी. (1) से $xz = y^2$

$$= 2\left[\frac{2y+z+x}{2y^2+xy+yz}\right]$$

$$= \frac{2}{y}\left[\frac{2y+z+x}{2y+x+z}\right] = \frac{2}{y}$$

= R.H.S.

(ii) L.H.S. $= \frac{x}{A_1} + \frac{z}{A_2}$

A_1 व A_2 का मान रखने पर

$$= \frac{x}{\frac{x+y}{2}} + \frac{z}{\frac{y+z}{2}}$$

$$= \frac{2x}{x+y} + \frac{2z}{y+z}$$

$$= \frac{2x(y+z)+2z(x+y)}{(x+y)(y+z)}$$

$$= 2\left[\frac{xy+xz+zx+zy}{(x+y)(y+z)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2\left[\frac{xy+2zx+zy}{xy+xz+y^2+yz}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2\left[\frac{xy+2zx+zy}{xy+xz+xz+yz}\right] \qquad \because y^2 = xz$$

$$\Rightarrow \quad 2\left[\frac{xy+2zx+zy}{xy+2zx+yz}\right] = 2 = \text{R.H.S.}$$

Ex 8.4

प्रश्न 1. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी का योगफल ज्ञात कीजिये।

(i) 2 + 6 + 18 + 54 + ... 7 पदों तक।

(ii)

$\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \ldots\ldots$ 8 पदों तक।

(iii) $a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + \ldots\ldots$ 10 पदों तक।

हल- (i) 2 + 6 + 18 + 54 + ... 7 पदों तक।

दिया है- a= 2

r = $\frac{6}{2}$ = 3

n = 7

इसलिये $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ सूत्र से

$$S_7 = \frac{2(3^7 - 1)}{3-1}$$

$$= \frac{2(3^7 - 1)}{2} = 3^7 - 1$$

= 2187 – 1

= 2186

(ii) $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ + ... 8 पदों तक।

प्रथम पद $a = \frac{2}{9}$

सार्वअनुपात $$r = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = -\frac{1}{3} \times \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$n = 8$$

यहाँ पर $r < 1$ इसलिए सूत्र $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ से

$$S_8 = \frac{\frac{2}{9}\left(1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^8\right)}{1 + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{9}\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^8\right)}{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{9} \times \frac{2}{5}\left(\frac{2^8 - 3^8}{2^8}\right)$$

$$= \frac{4}{45} \times \left(\frac{256 - 6561}{256}\right)$$

$$= \frac{-4 \times 6305}{45 \times 256} = \frac{-6305}{2880}$$

(iii) $a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + \ldots\ldots$ 10 पदों तक।
प्रथम पद = a^8

$$\text{सार्वअनुपात} = -\frac{a^7b}{a^8} = -\frac{b}{a}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ से}$$

$$S_{10} = \frac{a^8\left(1-\left(\frac{-b}{a}\right)^{10}\right)}{1+\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{\frac{a^8(a^{10}-b^{10})}{a^{10}}}{\frac{a+b}{a}}$$

$$= \frac{a(a^{10}-b^{10})}{a^2(a+b)}$$

$$= \frac{a^{10}-b^{10}}{a(a+b)}$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी का योगफल ज्ञात कीजिये
(i) 2 + 6 + 18 + 54 + …….. + 486
(ii) 64 + 32 + 16 + ……… + $\frac{1}{4}$

हल- (i) दिया है—प्रथम पद (a) = 2
सार्वअनुपात $r = \frac{6}{2} = 3$
$a_n = 486$

हम जानते हैं- $a_n = ar^{n-1}$
$486 = 2.(3)^{n-1}$
या $\frac{486}{2} = (3)^{n-1}$
या $243 = (3)^{n-1}$
या $3^5 = (3)^{n-1}$
आधार समान हैं, घातें भी बराबर होंगी।
∴ $n - 1 = 5$
$n = 6$

इसलिए

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$ का प्रयोग करने पर

$$S_6 = \frac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(3^6 - 1)}{2} = 3^{6} - 1$$

$S_6 = 729 - 1 = 728$

(ii) प्रथम पद a = 64

$$\text{सार्वअनुपात } r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{4},\ S_n = ?$$

हम जानते हैं— $a_n = ar^{n-1}$

$$\frac{1}{4} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4 \times 64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

इसलिये
$$S_9 = \frac{64\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2 \times 64\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)$$

$$S_9 = \frac{2^7(2^9 - 1)}{2^9} = \frac{2^9 - 1}{2^2}$$

$$= \frac{512 - 1}{4} = \frac{511}{4}$$

प्रश्न 3. गु. श्रे. 4, 12, 36, ... के कितने पदों का योगफल 484 है?

हल- दिया है

$a = 4$

$r = \frac{12}{4} = 3$

$S_n = 484$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} \text{ से}$$

$$484 = \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$484 = 2(3^n - 1)$

$242 = 3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = 242$

$3^n = 242 + 1 = 243$

$\therefore 3^n = 3^5 \therefore n = 5$

प्रश्न 4. किसी गु. श्रे. के प्रथम 5 पदों का योगफल 124 तथा सार्वअनुपात 2 है। श्रेढ़ी का प्रथम पद ज्ञात कीजिये।

हल- दिया है

$S_5 = 124$

$r = 2$

$a = ?$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ से}$$

$n = 5$ रखने पर

$$S_5 = \frac{a(2^5 - 1)}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 124 = \frac{a(2^5 - 1)}{1}$$

$$124 = a(32 - 1)$$

$$31a = 124$$

$$\therefore \quad a = \frac{124}{31} = 4$$

प्रश्न 5. किसी गु. श्रे. का सार्वअनुपात 2, अन्तिम पद 160 तथा योगफल 310 है। श्रेढी का प्रथम पद ज्ञात कीजिये।

हल- दिया है
$r = 2$
$a_n = 160$
$S_n = 310$
सूत्र – $a_n = ar^{n-1}$
$160 = a.\ 2^{n-1}$ ....(1)

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ से}$$

$$310 = \frac{a(2^n - 1)}{2 - 1} = a(2^n - 1) \ldots.(2)$$

समी. (2) में (1) का भाग देने पर

$$\frac{310}{160} = \frac{a(2^n - 1)}{a.2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{31}{16} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{31}{16} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

या
$$\frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{31}{16} = \frac{32 - 31}{16} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

आधार समान हैं घातें भी बराबर होंगी।
इसलिये $n – 1 = 4$
$n = 4 + 1 = 5$

प्रश्न 6. निम्नलिखित श्रेढ़ियों के प्रथम n पदों को योगफल ज्ञात कीजिए।
(i) 7 + 77 + 777 + ...
(ii) .5 + .55 + .555 +.........
(iii) .9 + .99 + .999 +.........

हल- (i) माना

$S_n = 7 + 77 + 777 + \ldots\ldots\ldots$ n पदों तक

$S_n = 7[1 + 11 + 111 + \ldots\ldots\ldots$ n पदों तक]

$= \frac{7}{9}[9 + 99 + 999 + \ldots\ldots$ ॥ पदों तक]

$= \frac{7}{9}$ [(10 − 1) + (100 − 1) + (1000 − 1) + ... n पदों तक]

$= \frac{7}{9}$ [10 + 100 + 1000 + ... n पदों तक − n]

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$$

$$= \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$$

(ii) माना

$S_n = .5 + 55 + .555 + \ldots\ldots$ पदों तक

S_n = 5[.1 + .11 + .111 + ... n पदों तक]

$$= \frac{5}{9}[.9 + .99 + .999 + \ldots\ldots\ n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{5}{9}[(1 - 0.1) + (1 - 0.01) + (1 - 0.001) + \ldots\ldots\ n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{5}{9}\left[(1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ n \text{ पदों तक}) - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\ldots n \text{ पद तक}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[n - \frac{\frac{1}{10}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{10}}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[n - \frac{1}{9}\left(\frac{10^n - 1}{10^n}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[n - \frac{1}{9} + \frac{1}{9.10^n}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{9n-1}{9} + \frac{1}{9.10^n}\right] = \frac{5}{9 \times 9}\left[9n - 1 + \frac{1}{10^n}\right]$$

$$= \frac{5}{81}\left[9n - 1 + \frac{1}{10^n}\right]$$

(iii) .9 + 99 +999 + ... n पदों तक

माना

S_n = 9 + .99 + .999 + ... n पदों तक

= (1 – 0.1) + (1 – 0.01) + (1 – 0.001) + ... n पदों तक

$= (1 + 1 + 1 + 1 + \ ....\ n \text{ पद}) -$

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+.....n \text{ पद}\right)$$

$$= n - \frac{\frac{1}{10}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= n - \frac{1}{10}\times\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$= n - \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

प्रश्न 7. निम्नलिखित आवर्ती दशमलव विस्तार वाली परिमेय संख्याओं का भिन्नात्मक रूप ज्ञात कीजिए

(i) $2.3\overline{5}$ (ii) $.6\overline{25}$ (iii) $2.\overline{752}$

हल- (i)

$$2.3\overline{5} = 2.35555\ ....$$

$$= 2 + 0.3 + 0.05 + 0.005 + 0.0005 + ...$$

$$= 2 + 0.3 + \frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000} + ...$$

$$= 2 + \frac{3}{10} + 5\left[\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+......\right]$$

$$= 2 + \frac{3}{10} + 5\left[\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}\right] \quad \because\ S_\infty = \frac{a}{1-r} \text{ से}$$

$$= 2 + \frac{3}{10}+\frac{5\times10}{9\times10^2}$$

$$= 2 + \frac{3}{10}+\frac{1}{18}=\frac{212}{90}=\frac{106}{45}$$

(ii)

$.6\overline{25}$

$$.6\overline{25} = 0.625252525\ ....$$

$$= .6 + .025 + .00025 + .0000025 + ...$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{25}{10^3} + \frac{25}{10^5} + \frac{25}{10^7} + ...$$

$$= \frac{3}{5} + 25\left[\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + ...\right]$$

$$= \frac{3}{5} + 25\left[\frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}}\right] \qquad \because S_\infty = \frac{a}{1-r} \text{ से}$$

$$= \frac{3}{5} + 25 \times \frac{\frac{1}{10^3}}{\frac{10^2 - 1}{10^2}}$$

$$= \frac{3}{5} + 25 \times \frac{1}{99 \times 10}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{5}{99 \times 2} = \frac{198 \times 3 + 25}{990}$$

$$= \frac{594 + 25}{990} = \frac{619}{990}$$

(iii)

$2.\overline{752}$

$$2.\overline{752} = 2.752752752 + ...$$

$$= 2 + 0.752 + 0.000752 + 0.000000752 + ...$$

$$= 2 + 752\left[\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + ...\right]$$

$$= 2 + 752 \left[\frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} \right] \quad [\because S_\infty = \frac{a}{1-r} \text{ से}]$$

$$= 2 + 752 \times \frac{1}{999} = 2 + \frac{752}{999}$$

$$= \frac{1998 + 752}{999} = \frac{2750}{999}$$

प्रश्न 8. किसी अनन्त गु. श्रे. का प्रथम पद 64 है तथा प्रत्येक पद उसके बाद आने वाले पदों के योगफल का तीन गुणा है। श्रेढ़ी ज्ञात कीजिये।

हल- दिया है-
a = 64
माना गु. श्रे. a, ar, ar^2, ar^3 .... है।

प्रश्नानुसार

$$a = 3\left(\frac{ar}{1-r}\right) \quad [\because S_\infty = \frac{a}{1-r} \text{ से}]$$

⇒ a – ar = 3ar
⇒ a = 3ar + ar = 4ar
4r = 1
$r = \frac{1}{4}$

मान रखने पर

$$64, 64 \times \frac{1}{4}, 64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2, 64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3, 64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$64, 16, 4, 1, \frac{1}{4}, \ldots\ldots..$$

प्रश्न 9. यदि $y = x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots \infty$, जहाँ $|x| < 1$ हो, तब सिद्ध कीजिये $x = \frac{y}{1+y}$

हल- दिया है- $y = x + x^2 + x^3 + \ldots.. \infty$ (अनन्त गु. श्रे.)

$y = x[1 + x + x^2 + ...\infty]$

सूत्र $S_\infty = \left(\frac{a}{1-r}\right)$ से

$$\Rightarrow \quad y = x\left[\frac{1}{1-x}\right] \quad ....(1)$$

अब $\frac{y}{1+y}$ में y का मान समी. (1) से रखने पर

$$\frac{\frac{x}{1-x}}{1+\frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{(1-x)}}{\frac{(1-x+x)}{(1-x)}}$$

$$= \frac{x}{(1-x)} \times \frac{(1-x)}{1} = x \text{ (इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 10. यदि x = 1 + a + a^2 +......∞, जहाँ |a| < 1 तथा y = 1 + b + b^2 +......∞, जहाँ |b| < 1 हो, तब सिद्ध कीजिए- 1 + ab + a^2b^2 + ... ∞ = $\frac{xy}{x+y-1}$

हल- दिया है-

$x = 1 + a + a^2 + a^3 + ...\infty$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{1-a} \quad ....(1)$$

$$y = 1 + b + b^2 + b^3 \ ..... \ \infty$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{1-b} \quad ....(2)$$

सिद्ध करना है—

$$1 + ab + a^2b^2 + \ ..... \ \infty = \frac{xy}{x+y-1}$$

L.H.S. $= 1 + ab + a^2b^2 + a^3b^3 + ...$

(अनन्त. गु. श्रे.)

$\therefore \quad S_\infty = \frac{1}{1-ab}$ (अनन्त गु. श्रे. के योग से)

$$S_\infty = \frac{1}{1-ab} \quad ....(3)$$

R.H.S. $= \dfrac{xy}{x+y-1}$ में x एवं y का मान समी. (1) व समी. (2) में रखने पर

$$= \dfrac{\dfrac{1}{(1-a)} \times \dfrac{1}{(1-b)}}{\dfrac{1}{1-a} + \dfrac{1}{1-b} - 1} = \dfrac{\dfrac{1}{(1-a)(1-b)}}{\dfrac{1-b+1-a-(1-a)(1-b)}{(1-a)(1-b)}}$$

$$= \dfrac{1}{2-a-b-(1-a)(1-b)}$$

$$= \dfrac{1}{2-a-b-1+b+a-ab}$$

$$= \dfrac{1}{1-ab} \quad \text{....(4)}$$

समी. (3) व समी. (4) से ⇒ L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 11. श्रेढ़ी का योग ज्ञात कीजिये

$$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^4}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}\right) + \ldots\ldots \infty \text{ तक}$$

हल-

$$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^4}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}\right) + \ldots\ldots \infty \text{ तक}$$

$$= \left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots\ldots\right)$$

हम जानते हैं $S_\infty = \frac{a}{1-r}$, अनन्त गु. श्रे. का योग

Ex 8.5

प्रश्न 1. निम्नलिखित श्रेणियों का n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए

(i) $1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots\ldots.$

(ii) $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots\ldots$

(iii) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \ldots\ldots$

हल- (i) दी गयी श्रेणी

$1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots..$

एक समान्तरीय गु. श्रे. है अतः दी गयी श्रेणी का n वाँ पद

$T_n = [a + (n-1)d]AR^{n-1}$

यहाँ $a = 1$, $d = 1$ तथा $A = 1$, $R = \frac{1}{2}$ है।

$$T_n = [1 + (n-1)1]\left[1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{n}{2^{n-1}}$$

अब माना

$$S = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots\ldots \frac{n}{2^{n-1}} \quad \ldots(1)$$

श्रेणी (1) में गु. श्रे. के सार्वअनुपात $\frac{1}{2}$ का गुणा कर एक पद आगे बढ़ाकर लिखने पर।

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots\ldots \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \quad \ldots(2)$$

समी. (1) में से समी. (2) घटाने पर

$$\frac{1}{2}S = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots\ldots \frac{n}{2^{n-1}}\right] = \frac{n}{2^n}$$

यहाँ $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$

अब सूत्र $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-2}$ से

$$\frac{1}{2}S = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{2(2^n-1)}{2^n} - \frac{n}{2^n}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{4(2^n-1)}{2^n} - \frac{2n}{2^n}$$

$$\Rightarrow \quad S = 4 - \frac{4}{2^n} - \frac{2n}{2^n}$$

$$\Rightarrow \quad S = 4 - \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad S = 4 - \frac{(2+n)}{2^{n-1}}$$

(ii) दी गयी श्रेणी $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots\dots$ n पदों तक
एक समान्तरीय गु. श्रे. है।
अब सूत्र T_n $[a + (n-1)d]$ $[AR^{n-1}]$ से।

यहाँ दिया है– $a = 1$, $d = 2$, $A = 1$, $R = x$ है।
$\therefore T_n = [1 + (n-1)2]\ [1.x^{n-1}]$
$T_n = (2n-1)x^{n-1}$
अतः $S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots\dots (2n-1)x^{n-1}$ ....(1)

श्रेणी (1) में गु. श्रे. के सार्वअनुपात x का गुणा करने पर
$xS = x + 3x^2 + 5x^3 + \dots\dots (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n$ ....(2)
समी. (1) में से (2) को घटाने पर

$S(1-x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots\dots + 2x^{n-1} - (2n-1)^n$
$S(1-x) = 1 + 2[x + x^2 + x^3 + \dots\dots (n-1)$ पदों तक$] - (2n-1)x^n$

यहाँ पर a = x, r = x, n = n – 1

अब सूत्र $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ से

$$S(1-x) = 1 + 2\left(\frac{x(1-x^{n-1})}{1-x}\right) - (2n-1)x^n$$

$$\Rightarrow \qquad S = \frac{1}{1-x} + \frac{2x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2} - \frac{(2n-1)x^n}{(1-x)}$$

$$S = \frac{1-(2n-1)x^n}{(1-x)} + \frac{2x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}$$

(iii)

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \ldots\ldots$$

यहाँ पर A.P. का 7वाँ पद $(-1)^{n-1}$ n
और GP का 7वाँ पद $5.5^{n-1} = 5^n$
माना

$$S = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} = \frac{4}{5^4} + \ldots\ldots \frac{(-1)^{n-1}n}{5^n}$$

गु. श्रे. का सार्वअनुपात $\frac{1}{5}$ से गुणा करके आगे एक पद खिसकाकर लिखने पर

$$\frac{1}{5}S = \frac{1}{5^2} - \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} - \frac{4}{5^5} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-2}(n-1)}{5^n} + \frac{(-1)^n n}{5^{n+1}}$$

दोनों को जोड़ने पर

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)S = \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \ldots\ldots \frac{(-1)^{n-1}.1}{5^n} + \frac{(-1)^{n-1}.n}{5^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{5}S = \frac{1}{5}\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{5}}\right] + \frac{(-1)^{n-1}.n}{5^{n+1}}$$

$$\therefore S_n = a\left[\frac{1-r^n}{1-r}\right], r < 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{5}S = \left[\frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{6}\right] + \frac{(-1)^{n-1}.n}{5^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{5}{6}\left[\frac{1-(-1)^n\left(\frac{1}{5}\right)^n}{6}\right] + \frac{(-1)^{n-1}.n}{5^{n+1}} \times \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{5}{36} - \frac{5(-1)^n}{6^2(5^n)} + \frac{(-1)^{n-1}.n}{6.5^n}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{5}{36} + \frac{5(-1)^{n-1}}{6^2.5^n} + \frac{(-1)^{n-1}.n}{6.5^n}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{5}{36} + \frac{(-1)^{n-1}}{6^2.5^n}\ [5 + 6n]$$

अतः श्रेणी का योग

$$S = \frac{5}{36} + (-1)^{n-1}\frac{5+6n}{6^2.5^n}$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित श्रेणियों का अनन्त पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{3}{7} + \frac{5}{21} + \frac{7}{63} + \frac{9}{189} + \ldots\ldots$

(ii) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \ldots\ldots$

(iii) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots\ldots, |x| < 1$

हल- (i) माना

$$S = \frac{3}{7} + \frac{5}{21} + \frac{7}{63} + \frac{9}{189} + \dots\dots\ \infty$$

गु. श्रे. के सार्वअनुपात $\frac{1}{3}$ से गुणा करने पर और एक पद छोड़कर लिखने पर

$$\frac{1}{3}S = \frac{3}{21} + \frac{5}{63} + \frac{7}{189} + \dots\dots$$

घटाने पर

$$S - \frac{1}{3}S = \frac{3}{7} + \left[\frac{2}{21} + \frac{2}{63} + \frac{2}{189} + \dots\dots\infty\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}S = \frac{3}{7} + \frac{\frac{2}{21}}{1 - \frac{1}{3}} \qquad \because S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

और $a = \frac{2}{21}$

और सार्वअनुपात $= \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}S = \frac{3}{7} + \frac{2 \times 3}{21 \times 2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}S = \frac{3}{7} + \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{2}{3}S = \frac{4}{7}$$

$$\therefore \quad S = \frac{4}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{7}$$

(ii) माना

$$S = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots\dots$$

गु. श्रे. के सार्वअनुपात $\frac{1}{3}$ से गुणा करने पर और एक पद छोड़कर लिखने पर

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} - \dots\dots\dots\dots$$

जोड़ने पर

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)S = \frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^4}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{4}{3}S = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$$ सूत्र $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ से

यहाँ पर $a = \frac{1}{3}$ और $r = -\frac{1}{3}$

$$\frac{4}{3}S = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

(iii) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots\ldots. |x| < 1$

माना $S = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots\ldots, |x| < 1$

गु. श्रे. के सार्वअनुपात x से गुणा करने पर और एक पद छोड़कर लिखने पर।

$xS = x - 2x^2 + 3x^2 \ldots\ldots$

$$S(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots\ldots\ldots$$

$$S(1+x) = \frac{1}{1+x}$$ $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ से

यहाँ पर $a = 1$, सार्वअनुपात $r = -x$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{(1+x)^2}$$

प्रश्न 3. निम्नलिखित श्रेणियों का n वाँ पद तथा n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए-

(i) 2 + 5 + 14 + 41+ 122 + ...

(ii) $3.2 + 5.2^2 + 7.2^3 + \ldots.$

(iii) $1 + 4x + 2x^2 + 10x^3 + \ldots\ldots$

हल- (i) दी गयी श्रेणी 2 + 5 + 14 + 41 + 122 + ... में स्पष्ट है कि इस श्रेणी के क्रमागत पदों का अन्तर 5 – 2 = 3, 14 – 5 = 9, 41 – 14 = 27 अर्थात् 3, 9, 27 .... GP. में है|

माना दी गयी श्रेणी का योग S व n वाँ पद T_n है। माना

$S = 2 + 5 + 14 + 41 + \ldots\ldots T_n$ ....(1)

एक पद आगे बढ़ाकर लिखने पर
$S = 2 + 5 + 14 + \ldots\ldots T_{n+1} + T_n$ ....(2)

समी. (1) में से समी. (2) घटाने पर
$0 = 2 + 3 + 9 + 27 + \ldots\ldots$ n पदों तक – T_n
$\therefore T_n = 2 + [3 + 9 + 27 + \ldots\ldots (n - 1)$ पदों तक]
यहाँ a = 3, r = 3, n = n – 1

अब सूत्र $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$$T_n = 2 + \left[\frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}\right] = 2 + \frac{3^n - 3}{2}$$

$$= \frac{3^n + 1}{2} \quad \ldots(3)$$

अब समी. (3) में $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$ रखने पर

$$T_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2},\ T_2 = \frac{3^2}{2} + \frac{1}{2},\ T_3 = \frac{3^4}{2} + \frac{1}{2}$$

....

....

$$T_n = \frac{3^n}{2} + \frac{1}{2}$$

स्तम्भानुसार योग करने पर

$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots + T_n =$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{2} + \ldots\ldots n \text{ पदों तक}\right) +$$

$$= \frac{1}{2}[3 + 3^2 + 3^3 + \ldots\ldots n \text{ पदों तक}] + \frac{n}{2}$$

यहाँ $a = 3, r = 3, n = n$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3(3^n - 1)}{3 - 1}\right] + \frac{n}{2} = \frac{1}{4}[3^{n+1} + 2n - 3]$$

(ii) $3.2 + 5.2^2 + 7.2^3 + ...$
दी गयी श्रेणी
$3.2 + 5.2^2 + 7.2^3 + ...$ n पदों तक

एक समान्तरीय गु. श्रे. है।
यहाँ a = 3, d = 2, A = 2, R = 2
अब सूत्र $T_n = [a + (n - 1)4] [AR^{n-1}]$
$T_n = [3 + (n - 1)2][2. 2^{n-1}]$
$T_n = (2n + 1)2^n$

अतः $S = 3.2 + 5.2^2 + 7.2^3 + ... (2n + 1)2^n$ ....(1)
समी. (1) में गु. श्रे. के सार्वअनुपात को गुणा कर एक पद खिसका कर लिखने पर।
$2S = 3.2^2 + 5.2^3 + ... (2n - 1)2^n + (2n + 1)2^{n+1}$ ....(2)

समी. (1) में से (2) को घटाने पर
$-S = 3.2 + 2.2^2 + 2.2^3 + ... 2.2^n - (2n + 1)^{n+1}$
$-S = 6 + [2^3 + 2^4 +...... 2^{n+1}]- (2n + 1).2^{n+1}$

यहाँ $a = 2^3, r = 2, n = n - 1$

अब सूत्र $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ से

$$-S = \frac{6 + 2^3(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (2n + 1)2^{n+1}$$
$$-S = 6 + 2^{n+2} - 8 - (2n + 1)2^{n+1}$$
$$-S = -2 + 2.2^{n+1} - (2n + 1)2^{n+1}$$

दोनों पक्षों में (-) का गुणा करने पर।
$S = 2 - 2.2^{n+1} + (2n + 1)2^{n+1}$
$= (2n - 1). 2^{n+1} + 2$

(iii) $1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + ...$
दी गयी श्रेणी $1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + ...$ n पदों तक एक समान्तरीय गु. श्रे. है।
अब सूत्र $T_n = [a + (n - 1)d] [AR^{n-1}]$ से

यहाँ a = 1, d = 3 तथा A = 1, R = x
$T_n = [1 + (n - 1) x 3] [1 . x^{n-1}]$
$T_n = (3n - 2)x^{n-1}$
अतः
$S = 1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + ... (3n - 2)^{n-1}$ ....(1)

समी. (1) में गु. श्रे. के सार्वअनुपात x का गुणा करने पर
$xS = x + 4x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots (3n - 5)x^{n-1} + (3n - 2)x^n$ ....(2)
समी. (1) में से (2) को घटाने पर

$(1 - x)S = 1 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + \ldots\ldots 3.x^{n-1} - (3n - 2)x^n$

$$(1 - x)S = 1 + \frac{3x.(1 - x^{n-1})}{(1 - x)} - (3n - 2)x^n$$

इसलिये $$S = \frac{1}{(1 - x)} + \frac{3x(1 - x^{n-1})}{(1 - x)^2} - \frac{(3n - 2)x^n}{1 - x}$$

प्रश्न 4. श्रेणी $2 + 5x + 8x^2 + 11x^3 + \ldots\ldots$ का n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए तथा इससे अनन्त श्रेणी के योगफल का भी निगमन कीजिए, यदि $|x| < 1$.

हल- दी गयी श्रेणी
$2 + 5x + 8x^2 + 11x^3 + \ldots\ldots$ n पदों तक एक समान्तरीय गु. श्रे. है।

अब सूत्र $T_n = [a + (n - 1)d]\ [AR^{n-1}]$ से
यहाँ $a = 2$, $d = 3$ तथा $A = 1$, $R = x$
$T_n = [2 + (n - 1) \times 3]\ [1 . x^{n-1}]$
$T_n = (3n - 1)x^{n-1}$

अतः $S = 2 + 5x + 8x^2 + 11x^3 + \ldots.. + (3n - 1)x^{n-1}$ ....(1)
समी. (1) में गु. श्रे. के सार्वअनुपात x का गुणी करके एक पद
आगे की ओर लिखने पर

$xS = 2x + 5x^2 + 8x^3 + \ldots\ldots + (3n - 4)x^{n-1} + (3n - 1)x^n$ ....(2)
समी. (1) में से (2) को घटाने पर

$S - xS = 2 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + \ldots\ldots 3.x^{n-1} - (3n - 1)x^n$

$$(1-x)S = 2 + \left[\frac{3x.(1-x^{n-1})}{(1-x)}\right] - (3n-1)x^n$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{(1-x)} + \frac{3x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2} - \frac{(3n-1)x^n}{(1-x)}$$

$$= \frac{2}{(1-x)} + \frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{3x^n}{(1-x)^2} - \frac{(3n-1)x^n}{(1-x)}$$

$$= \frac{2+x}{(1-x)^2} - \frac{3x^n}{(1-x)^2} - \frac{(3n-1)x^n}{(1-x)}$$

यहाँ पर दिया गया है $|x| < 1$ तथा श्रेणी में पदों की संख्या अनन्त है, तब $x^n \to 0$

अतः $$S_\infty = \frac{2+x}{(1-x)^2} - \frac{3\times 0}{(1-x)^2} - \frac{(3n-1)\times 0}{(1-x)}$$

$$S_\infty = \frac{2+x}{(1-x)^2}$$

Ex 8.6

प्रश्न 1. उस श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिये जिसका n वाँ पद है

(i) $3n^2 + 2n + 5$

(ii) $4n^3 + 7n + 1$

(iii) $n(n + 1)(n + 2)$

हल- (i) प्रश्नानुसार

$T_n = 3n^2 + 2n + 5$

दिये हुए n पदों का योग

$$\Sigma T_n = S_n = 3\Sigma n^2 + 2\Sigma n + 5\Sigma 1$$

$$S_n = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2} + 5n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) + 5n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}[2n+1+2] + 5n$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+3)}{2} + 5n$$

(ii) प्रश्नानुसार

$T_n = 4n^3 + 7n + 1$

दिये हुए n पदों का योग

$$\Sigma T_n = S_n = 4\Sigma n^3 + 7\Sigma n + \Sigma 1$$

$$\Rightarrow S_n = 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{7n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{4n^2(n+1)^2}{4} + \frac{7n(n+1)}{2} + n$$

$$= n^2(n+1)^2 + \frac{7n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}[2n(n+1)+7] + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n^2+2n+7)}{2} + n$$

(iii) प्रश्नानुसार

$T_n = n(n + 1)(n + 2)$

$T_n = n(n^2 + 3n + 2)$

$= n^3 + 3n^2 + 2n$

दिये हुए n पदों का योग

$$\Rightarrow \quad S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\ [n(n+1) + 2(2n+1) + 4]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\ [n^2 + n + 4n + 2 + 4]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\ [n^2 + 5n + 6]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिये

(i) $3^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 + \ldots\ldots\ldots$

(ii) $2^3 + 5^3 + 8^3 + 11^3 + \ldots\ldots\ldots$

(iii) $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots\ldots\ldots$

हल- (i) यहाँ पर श्रेणी का n वाँ पद T, है।

$T_n = (3 + (n - 1) \times 4)^2$

चूँकि श्रेढी समान्तर क्रम है

$= (3 + 4n - 4)^2 = (4n - 1)^2$

$T_n = 16n^2 - 8n + 1$

$\therefore\ \Sigma T_n = S_n = 16\Sigma n^2 - 8\Sigma n + \Sigma 1$

$$S_n = \frac{16n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{8n(n+1)}{2} + n$$

$$S_n = \frac{8n(n+1)(2n+1)}{3} - 4n(n+1) + n$$

$$= \frac{4}{3}n(n+1)\ [2.(2n+1) - 3] + n$$

$$= \frac{4}{3}n(n+1)\ (4n-1) + n$$

(ii) दी गयी श्रेणी का वाँ पद T, है।

$T_n = [2 + (7 - 1) \times 3]^3$

चूंकि श्रेढी समान्तर है।।

$T_n = (3n - 1)^3$

$= (3n)^3 - (1)^3 - 3 \times 3n \times 1(3n - 1)$

$T_n = 27n^3 - 1 - 27n + 9n$

$T_n = 27n^3 - 27n + 9n - 1$

$$\therefore \Sigma T_n = S_n = 27\Sigma n^3 - 27\Sigma n^2 + 9\Sigma n - \Sigma 1$$

$$S_n = 27\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{27n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{9n(n+1)}{2} - n$$

$$S_n = \frac{27n^2(n+1)^2}{4} - \frac{27n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{9n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{27n^2(n+1)^2}{4} - \frac{9n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{9n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{9}{4} n(n+1)[3n(n+1) - 2(2n+1) + 2] - n$$

$$= \frac{9}{4} n(n+1)[3n^2 + 3n - 4n - 2 + 2] - n$$

$$= \frac{9}{4} n(n+1)[3n^2 - n] - n$$

$$= \frac{9}{4} n^2(n+1)(3n-1) - n$$

(iii) $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots\ldots\ldots$

दी गयी श्रेणी का n वाँ पद

$T_n = n.[2 + (n - 1) \times 1]^2$

∵ श्रेणी समान्तर क्रम में है।

$= [n + 1]^2 = n(n^2 + 2n + 1)$

$T_n = n^3 + 2n^2 + n$

$\therefore \sum T_n = S_n = \sum n^3 + 2\sum n^2 + \sum n$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [3n(n+1) + 4(2n+1) + 6]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [3n^2 + 3n + 8n + 4 + 6]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [3n^2 + 11n + 10]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [3n^2 + 6n + 5n + 10]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ (n+2)(3n+5)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$$

प्रश्न 3. निम्नलिखित श्रेणियों का n वाँ पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिये
(i) 1.3 + 3.5 + 5.7 + ……
(ii) 1.2.4 + 2.3.7 + 3.4.10 + ………

हल- (i) दी हुई श्रेणी दो समान्तर श्रेढ़ियों से मिलकर बनी हुई है, दोनों का अलग-अलग T_n वाँ पद निकाल कर संयुक्त श्रेणी, का T_n वाँ पद निकालने पर

$T_n = (2n - 1)(2n + 1)$

$T_n = (2n)^2 - (1)^2 = 4n^2 - 1$

$\therefore \sum T_n = S_n = 4\sum n^2 - \sum 1$

$$S_n = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - n$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - n$$

$$S_n = \frac{n}{3}\ [2(n+1)(2n+1) - 3]$$

$$= \frac{n}{3}\ [2(2n^2 + 3n + 1) - 3]$$

$$= \frac{n}{3}\ (4n^2 + 6n - 1)$$

(ii) दी हुई श्रेणी तीन समान्तर श्रेणियों से मिलकर बनी हुई है। तीनों का अलग-अलग T_n वाँ पद निकालकर संयुक्त श्रेणी का T_n वाँ पद निकालने पर

$T_n = n(n + 1)(3n + 1)$

$n(3n^2 + 4n + 1)$

$T_n = 3n^3 + 4n^2 + n$

$\therefore \sum T_n = S_n = 3\sum n^3 + 4\sum n^2 + \sum n$

$$S_n = 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{3}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [9n(n+1) + 8(2n+1) + 6]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [9n^2 + 9n + 16n + 8 + 6]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [9n^2 + 25n + 14]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(9n+7)}{12}$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(9n+7)$$

प्रश्न 4. निम्नलिखित श्रेणियों का n वाँ पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिये
(i) 3 + 8 + 15 + 24 + ...
(ii) 1 + 6 + 13 + 22 + ...

हल- (i) दी गई श्रेणी के क्रमागत पद युग्मों का अन्तर 5, 7, 9, ... स. श्रे. में है। अतः इसका n वाँ पद तथा n पदों का योगफल अन्तर विधि से ज्ञात करेंगे।
माना कि श्रेणी का n वाँ पद T_n तथा n पदों को योगफल S_n है। तब
$S_n = 3 + 8 + 15 + 24 + \ldots\ldots + T_n$.....(1)

एक स्थान आगे बढ़ाकर लिखने पर
$S_n = 3 + 8 + 15 + \ldots\ldots + T_{n-1} + T_n$ ....(2)
समी. (1) में से (2) को घटाने पर।
0 = 3 + {5 + 7 + 9 +....... + (n – 1) पद} – T_n
या T_n = 3 + {5 + 7 + 9 + ... + (n – 1) पद}

$$T_n = 3 + \frac{(n-1)}{2}\ \{2.5 + (n-2).2\}$$
$$= 3 + \frac{(n-1)}{2}\ (2n+6)$$
$$= 3 + (n-1)(n+3)$$
$$= 3 + n^2 + 2n - 3$$
$$T_n = n^2 + 2n = n(n+1)$$
$$\therefore \Sigma T_n = S_n = \Sigma n^2 + 2\Sigma n$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1)$$

= n(n + 1) (2n + 1 + 6)
S_n = n(n + 1) (2n +7)

(ii) दी गई श्रेणी के क्रमागत पद युग्मों का अन्तर 5, 7, 9, ... स. श्रे. में है। अतः इसका n वाँ पद तथा n पदों का योगफल अन्तर विधि से ज्ञात करेंगे।
माना कि श्रेणी का n वाँ पद T_n तथा n पदों का योगफल S_n है। तब
$S_n = 1 + 6 + 13 + 22 + \ldots\ldots + T_n$ .....(1)
एक स्थान आगे बढ़ाकर लिखने पर।
$S_n = 1 + 6 + 13 + 22 + \ldots\ldots + T_{n-1} + T_n$ ....(2)
समी. (1) में से (2) को घटाने पर
0 = 1 + {5 + 7 + 9 +....... + (n – 1) पद}- T_n

या' $T_n = 1 + \{5 + 7 + 9 + \ldots\ldots + (n-1)$ पद}

$$T_n = 1 + \frac{(n-1)}{2}\ [2.5 + (n-2).2]$$

$$= 1 + \frac{(n-1)}{2}\ (10 + 2n - 4)$$

$$= 1 + \frac{(n-1)}{2}\ .\ (2n + 6)$$

$$= 1 + (n-1)(n+3)$$

$$T_n = 1 + n^2 + 2n - 3$$

$$T_n = n^2 + 2n - 2$$

$$\therefore\ \Sigma T_n = S_n = \Sigma n^2 + 2\Sigma n - 2\Sigma 1$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2} - 2n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) - 2n$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}\ (2n + 1 + 6) - 2n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} - 2n$$

प्रश्न 5. निम्नलिखित श्रेणियों का n वाँ पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए
(i) 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) +......
(i) $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) +$..........

हल- (i) दी गयी श्रेणी का नावाँ पद

$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots. n$ पद

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\,[n^2 + n]$$

$$\therefore \quad \Sigma T_n = S_n = \frac{1}{2}\Sigma n^2 + \frac{1}{2}\Sigma n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\,[2n + 1 + 3]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(ii) दी गयी श्रेणी का n वाँ पद

$T_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots.. n^2$

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

चूँकि हम जानते हैं—प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots.. n^2 = \Sigma n^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ होता है।

$$T_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

इसलिये

$$\Sigma T_n = S_n = \frac{1}{3}\Sigma n^3 + \frac{1}{2}\Sigma n^2 + \frac{1}{6}\Sigma n$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{12} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [n(n+1) + 2n + 1 + 1]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [n^2 + n + 2n + 2]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\ [n^2 + 3n + 2]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{12}$$

$$= \frac{1}{12}\ n(n+1)^2(n+2)$$

Ex 8.7

प्रश्न 1. निम्नलिखित हरात्मक श्रेढ़ियों के सम्मुख दिया गया पद ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ 6वाँ पद

(ii) $\frac{1}{9}, \frac{1}{19}, \frac{1}{29}, \frac{1}{39}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ 18वाँ पद

(iii) $\frac{1}{14}, \frac{2}{29}, \frac{1}{15}, \frac{2}{31}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ 10वाँ पद

हल- (i)

$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$ H.P. में है।

∴ 2, 5, 8, 11 A.P में होंगे।

A.P का 6 वाँ पद् $T_6 = 4 + 5d$ ....(1)

यहाँ पर a = 2, d = 5 – 2 = 3

समी. (1) में मान रखने पर।
T_6 = 2 + 5 x 3 = 2 + 15 = 17
अत: HP का 6वाँ पद = $\frac{1}{17}$ होगा।

(ii)
$\frac{1}{9}, \frac{1}{19}, \frac{1}{29}, \frac{1}{39}$ H.P. में है।
∴ 9, 19, 29, 39 A.P में होंगे।
A.P. का 18वाँ पद T_{18} = a + 17d

यहाँ पर a = 9, सार्वअन्तर d = 19 – 9 = 10
इसलिए A.P का T_{18} = 9 + 17 x 10
= 9 + 170 = 179
इसलिए हरात्मक श्रेढ़ी का 18वाँ पद = $\frac{1}{179}$ होगा।

(iii)
$\frac{1}{14}, \frac{2}{29}, \frac{1}{15}, \frac{2}{31}$ H.P. में है।
इसलिए $\frac{14}{1}, \frac{29}{2}, \frac{15}{1}, \frac{31}{2}$, A.P. में होंगे।
यहाँ पर प्रथम पद a = 14, सार्वअन्तर = $\frac{29}{2} - 14$ = $\frac{1}{2}$
इसलिए A.P. का 10वाँ पद

T_{10} = 1 + 9d
a तथा d का मान रखने पर
$$T_{10} = 14 + 9 \times \frac{1}{2} = \frac{37}{2}$$
अतः H.P. का 10वाँ पद = $\frac{2}{37}$

प्रश्न 2. निम्नलिखित ह. श्रे. के n वें पद ज्ञात कीजिए
(i) $\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}$, ...
(ii) $\frac{2}{a+b}, \frac{1}{a}, \frac{2}{3a-b}$, ...

हल- (i)

$\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}$, ... H.P. में है।

इसलिए $\frac{5}{1}, \frac{9}{2}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}$, ... A.P. में होंगे।

A.P. का nवाँ पद $\quad T_n = a + (n-1)d$

यहाँ पर $a = 5$, $d = \frac{9}{2} - 5 = -\frac{1}{2}$

इसलिए $\quad T_n = 5 + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$= 5 - \frac{(n-1)}{2} = \frac{10-n+1}{2}$$

$$T_n = \frac{11-n}{2}$$

अत: H.P. का nवाँ पद $= \frac{2}{11-n}$

(ii)

$\frac{2}{a+b}, \frac{1}{a}, \frac{2}{3a-b}$, ... H.P. में है।

इसलिए $\frac{a+b}{2}, a, \frac{3a-b}{2}$ ...... A.P. में होंगे।

A.P. का $\quad T_n = A + (n-1)d$

यहाँ पर प्रथम पद $A = \frac{a+b}{2}$,

सार्वअन्तर $\quad d = a - \left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$d = \frac{a-b}{2}$$

$$\therefore \quad T_n = \frac{a+b}{2} + (n-1)\frac{(a-b)}{2}$$

$$T_n = \frac{(a+b)+(n-1)(a-b)}{2}$$

$$T_n = \frac{a+b+na-nb-a+b}{2}$$

$$T_n = \frac{na+(2-n)b}{2}$$

अत: H.P. का $T_n = \frac{2}{na+(2-n)b}$

प्रश्न 3. वह ह. श्रे. ज्ञात कीजिये जिसका दूसरा पद $\frac{2}{5}$ तथा सातवाँ पद $\frac{4}{25}$ है।

हल - दिया है
HP का दूसरा पद = $\frac{2}{5}$
इसलिए A.P. का दूसरा पद = $\frac{5}{2}$ होगा।
इसी तरह से A.P. का सातवाँ पद = $\frac{25}{4}$
प्रश्नानुसार

$$T_2 = a + d = \frac{5}{2} \qquad ....(1)$$

$$T_7 = a + 6d = \frac{25}{4} \qquad ....(2)$$

समी. (1) में (2) को घटाने पर

$$-5d = \frac{5}{2} - \frac{25}{4} = \frac{10-25}{4}$$

$$-5d = -\frac{15}{4} \quad \therefore d = \frac{15}{4 \times 5} = \frac{3}{4}$$

d का मान समी. (1) में रखने पर

$$a + \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \quad \therefore a = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}$$

$$a = \frac{7}{4}$$

अत: समान्तर श्रेणी

$$a, a+d, a+2d, a+3d$$

$$\frac{7}{4}, \frac{7}{4}+\frac{3}{4}, \frac{7}{4}+\frac{2\times3}{4}, \frac{7}{4}+\frac{3\times3}{4}$$

$$\frac{7}{4}, \frac{10}{4}, \frac{13}{4}, \frac{16}{4} \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

इसलिए हरात्मक श्रेढ़ी होगी—

$$\frac{4}{7}, \frac{4}{10}, \frac{4}{13}, \frac{4}{16} \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

प्रश्न 4. यदि एक ह. श्रे. का 7वाँ पद $\frac{17}{2}$ एवं 11वाँ पद $\frac{13}{2}$ हो, तो उसका 20वाँ पद ज्ञात कीजिये।

हल- दिया है
H.P. का 7वाँ पद = $\frac{17}{2}$
तथा H.P. का 11वाँ पद = $\frac{13}{2}$

इसलिये इसके संगत।
A.P. का 7वाँ पद = $\frac{2}{17}$ होगा।
और 11वाँ पद = $\frac{2}{13}$ होगा।
प्रश्नानुसार

$$T_7 = a + 6d = \frac{2}{17} \quad \ldots(1)$$

$$T_{11} = a + 10d = \frac{2}{13} \quad \ldots(2)$$

समी. (1) में से (2) को घटाने पर।

$$-4d = \frac{2}{17} - \frac{2}{13} = \frac{26-34}{17\times13}$$

$$\Rightarrow \quad -4d = \frac{-8}{17\times13}$$

$$\therefore \quad d = \frac{2}{17\times13} = \frac{2}{221}$$

d का मान समी. (1) में रखने पर

$$a + 6 \times \frac{2}{221} = \frac{2}{17}$$

$$a = \frac{2}{17} - \frac{12}{221} = \frac{26-12}{221}$$

$$a = \frac{14}{221}$$

समान्तर श्रेढी का 20वाँ पद

$$T_{20} = a + 19d$$

$$= \frac{14}{221} + \frac{19 \times 2}{221} = \frac{52}{221}$$

$$T_{20} = \frac{52}{221} = \frac{4}{17}$$

इसलिए हरात्मक श्रेढ़ी का 20वाँ पद = $\frac{17}{4}$ होगा।

प्रश्न 5. ज्ञात कीजिए

(i) 1 तथा $\frac{1}{16}$ के मध्य 4 ह.मा.
(ii) $\frac{1}{19}$ तथा $\frac{1}{7}$ के मध्य 5 ह.मा.
(iii) $-\frac{2}{5}$ तथा $\frac{4}{25}$ के मध्य एक ह.मा

हल- (i) माना कि 1 तथा $\frac{1}{16}$ के मध्य ह.मा. H1, H2, H3, H4, हैं।
अतः 1, H2, H3, H4, H5, $\frac{1}{16}$ ह. श्रे. में हैं।
संगत स. श्रे. का प्रथम पद 1 तथा छठा पद 16 होगा।
a + 5d = 16 ....(1)
∴ 1 + 5d = 16 ⇒ 5d = 15 ⇒ d = 3

अतः 1 तथा 16 के मध्य चार स. मा. निम्नलिखित होंगे-
a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d
1 + 3, 1 + 2 x 3, 1 + 3 x 3, 1 + 3 x 4
या 4, 7, 10, 13
अत: अभीष्ट ह.मा.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}$$

होंगे।

(ii) माना कि $\frac{1}{19}$ तथा $\frac{1}{7}$ के मध्य ह. मा. H1, H2, H3, H4, H5, हैं।
अतः $\frac{1}{19}$, H1, H2, H3, H4, H5, $\frac{1}{7}$ हरात्मक श्रेढ़ी में है।

संगत समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a = 19,
सातवाँ पद = 7
$T_7 = a + 6d = 7$
19 + 6d = 7

या 6d = 7 – 19 = – 12
$d = \frac{-12}{6} = -2$
अतः 19 तथा 7 के मध्य पाँच समान्तर माध्य निम्नलिखित हैं
a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d
19 – 2, 19 – 2 x 2, 19 – 3 x 2, 19 – 4 x 2,

19 – 5 x 2
17, 15, 13, 11 तथा 9
अतः अभीष्ट हरात्मक माध्य
$\frac{1}{17}, \frac{1}{15}, \frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{9}$
होंगे।

(iii) $-\frac{2}{5}$ तथा $\frac{4}{25}$ के मध्य एक ह. मा.
$-\frac{2}{5}$, H, $\frac{4}{25}$

$$\therefore \quad H = \frac{2ab}{a+b} \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{2\times\left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{25}\right)}{-\frac{2}{5}+\frac{4}{25}} = \frac{-\frac{16}{125}}{-\frac{30}{125}}$$

$$\therefore \quad H = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

प्रश्न 6. यदि ह. श्रे. का pवाँ, qवाँ तथा rवाँ पद क्रमशः a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिए-
bc(q – r) + ca(r – p) + ab(p – q) = 0

हल- दिया है
हरात्मक श्रेढ़ी के लिए।
$T_p = a, T_q = b, T_r = c$

$$\therefore \quad \frac{1}{A+(p-1)d} = a \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{1}{A+(q-1)d} = b \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{1}{A+(r-1)d} = c \qquad \ldots(3)$$

यहाँ A संगत स. श्रे. का प्रथम पद तथा d सार्वअन्तर हैं।
a, b, c के मान (p – q)ab + (q – r)bc + (r – p)ac में रखने पर।

$$\frac{(q-r)}{[A+(q-1)d][A+(r-1)d]} + \frac{(r-p)}{[A+(p-1)d][A+(r-1)d]} + \frac{p-q}{[A+(p-1)d][A+(q-1)d]}$$

⇒ (q – r)[A + (p – 1)] + (r – p)[A + (q – 1)d] + (p – q)[A + (r – 1)d.
कोष्ठकों को हल करने पर

A[q – r + r – p + p – q] + d[(q – r) (p – 1) + (r – p) (q – 1) + (p – q) (r – 1)]
A x 0 + d[qp – q – rp + r + rq – r – pq + p + pr – p – qr + q]

A x 0 + d x 0 = 0
यहाँ प्रत्येक पद के संगत ऋणात्मक पद उपस्थित हैं।
अतः इसको मान शून्य के बराबर होता है।
∴ bc(q – r) + ca(r – p) + ab(p – q) = 0 इतिसिद्धम्।

प्रश्न 7. यदि a, b, c ह. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिये कि a, a – c, a – b, ह. श्रे. में होंगे।

हल- माना
a, a – c, a – b H.P. में है।

$\therefore \quad \frac{1}{a}, \frac{1}{a-c}, \frac{1}{a-b}$ A.P. में होंगे।

अर्थात्

$$\frac{1}{a-c}-\frac{1}{a} = \frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a-a+c}{(a-c)a} = \frac{a-c-a+b}{(a-b)(a-c)}$$

या $$\frac{c}{(a-c)a} = \frac{b-c}{(a-b)(a-c)}$$

या $$\frac{c}{a} = \frac{b-c}{a-b}$$

ac – bc = ab – ac
या ac + ac = ab + bc

2ac = b(a + c)
या $b = \frac{2ac}{a+c}$
अर्थात् a, b, c H.P. में होंगे I इतिसिद्धम्

प्रश्न 8. यदि a, b, c ह. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$$

हल- L.H.S.

$$= \frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$$

यहाँ पर a, b, c H.P. में हैं ∴ $b = \frac{2ac}{a+c}$
b का मान रखने पर

$$\frac{1}{\frac{2ac}{a+c}-a}+\frac{1}{\frac{2ac}{a+c}-c}$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{2ac+a^2-ac}+\frac{a+c}{2ac-ac-c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{ac-a^2}+\frac{a+c}{ac-c^2}$$

$$(a+c)\left[\frac{ac-c^2+ac-a^2}{(ac-a^2)(ac-c^2)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{-(a+c)(a^2+c^2-2ac)}{a(c-a)\,.\,c(a-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{-(a+c)(a-c)^2}{-ac(a-c)^2}=\frac{a+c}{ac}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{ac}+\frac{c}{ac} \Rightarrow \frac{1}{c}+\frac{1}{a}$$

या $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ **इतिसिद्धम्**

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{a+c}{ac} \qquad \text{....(1)}$$

लेकिन a, b, c H.P. में है।

$\therefore \quad b=\frac{2ac}{a+c}$

या $\quad \frac{b}{2}=\frac{ac}{a+c}$

या $\quad \frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}$

समी. (1) में मान रखने पर

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{2}{b} = \text{R.H.S.}$$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 9. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का ह. मो. ज्ञात कीजिये।

हल- माना समीकरण

$ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α तथा β हैं। इसलिए

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
$\alpha\beta = \frac{c}{a}$
मूल α तथा β को हरात्मक माध्य

$$= \frac{2\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

मान रखने पर $\dfrac{2 \times \frac{c}{a}}{-\frac{b}{a}} = -\frac{2c}{b}$

प्रश्न 10. यदि किसी ह. श्रे. का pवाँ पद q तथा qवाँ पद p हो, तो सिद्ध कीजिये कि उसका (p + q)वाँ पद $\frac{pq}{p+q}$ होगा।
हल- H.P. का pव पद = q
∴ A.P. का pवाँ पद = $\frac{1}{q}$
H.P. का qवाँ पद = p
∴ A.P. का qवाँ पद = $\frac{1}{p}$
प्रश्नानुसार

$$T_p = a + (p - 1)d = \frac{1}{q}$$

या $a + (p - 1)d = \frac{1}{q}$ ....(1)

$$T_q = a + (q - 1)d = \frac{1}{p}$$

या $a + (q - 1)d = \frac{1}{p}$ ....(2)

समी. (1) में से (2) को घटाने पर

$$(p - 1 - q + 1)d = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \quad (p-q)d = \frac{p-q}{pq} \Rightarrow d = \frac{1}{pq}$$

d का मान समी. (1) में रखने पर

$$a + (p-1) \times \frac{1}{pq} = \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \quad a + \frac{p}{pq} - \frac{1}{pq} = \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \quad a + \frac{1}{q} - \frac{1}{pq} = \frac{1}{q}$$

इसलिए $\quad a = \frac{1}{pq}$.

हमें यहाँ पर H.P. का (p + q)वाँ पद ज्ञात करना है।
इसके संगत A.P का $T_{p+q} = a + (p + q - 1)d$
a तथा d का मान रखने पर

$$T_{p+q} = \frac{1}{pq} + (p+q-1) \times \frac{1}{pq}$$

$$= \frac{1}{pq} + \frac{p+q}{pq} - \frac{1}{pq} = \frac{p+q}{pq}$$

अतः A.P. का (p + q)वाँ पद का मान = $\frac{p+q}{pq}$
इसलिए HP. का (p + q)वाँ पद का मान $\frac{pq}{p+q}$ होगा।
इतिसिद्धम्

प्रश्न 11. यदि समीकरण $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$ के मूल समान हों, तो सिद्ध कीजिये कि a, b, c हरात्मक श्रेढ़ी में होंगे।

हल- दिया है—$a(b - c)x^2 + b(c - q) + c(a - b) = 0$ के मूल समान हैं। मूल समान होने के लिए विवेचक
$B^2 - 4AC = 0$
यहाँ $A = a(b - c)$, $B = b(c - a)$, $C = c(a - b)$
इसलिए $[b(c - a)]^2 - 4a(b - c) . c(d - b) = 0$
$b^2(c - a)^2 - 4ac(b - c) (d - b) = 0$
$b^2(c^2 + a^2 - 2ac) - 4ac(ab - b^2 - ac + cb) = 0$
$b^2(c^2 + a - 2ac) - 4a^2bc + 4acb^2 + 4a^2c^2 - 4ac^2b = 0$
$b^2[c^2 + a^2 - 2ac + 4ac] - 4a^2cb - 4ac^2b + 4a^2c^2 = 0$

$b^2(c + a)^2 - 4acb(a + c) + (2ac)^2 = 0$

$[b(c + a)] - 2(2ac)[b(a + c)] + (2ac)^2 = 0$

$[b(c + a) - 2ac]^2 = 0$

$b(c + a) - 2ac = 0$

$\Rightarrow b = \frac{2ac}{a+c} \Rightarrow a, b, c$ हरात्मक श्रेढ़ी में हैं। इतिसिद्धम्

प्रश्न 12. यदि एक छात्र अपने घर से विद्यालय 8 किमी. प्रति घं. की गति से जाता है तथा 6 किमी. प्रति घं. की गति से लौटता है, तो उसकी औसत गति ज्ञात कीजिए जबकि घर से विद्यालय की दूरी 6 किमी. है। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हल- यहाँ a = 8 किमी. प्रति घण्टा

तथा b = 6 किमी. प्रति घण्टा

इसलिए

माध्य $H = \frac{2ab}{a+b}$

$$H = \frac{2 \times 8 \times 6}{8+6} = \frac{96}{14} = \frac{48}{7}$$

$H = 6\frac{6}{7}$ **किमी. प्रति घण्टा उत्तर**

सत्यापन-घर से विद्यालय 6 किमी. दूरी तय करने का समय

$= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ घण्टा

अब विद्यालय से घर 6 किमी. दूरी तय करने का समय

$= \frac{6}{6} = 1$ घण्टा

अत: घर से विद्यालय और विद्यालय से घर की कुल दूरी

$6 + 6 = 12$ किमी. $1\frac{3}{4}$ घण्टा में तय करती है।

इसलिए औसत गति $= \frac{12}{1\frac{3}{4}} = \frac{12 \times 4}{7} = \frac{48}{7}$ किमी. प्रति घण्टा

Ex 8.8

प्रश्न 1. दो संख्याओं का स.मा. 50 तथा ह.मा. 18 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल- माना संख्याएँ a तथा b हैं।

तब प्रश्नानुसार स.मा. = 50

$\therefore \frac{a+b}{2} = 50$

या a + b = 100 .... (1)
ह.मा. = 18

∴ $\frac{2ab}{a+b} = 18$
या 2ab = 18(a + b)
या ab = 9(a + b) ..(2)
समी. (1) से मान रखने पर
ab = 9 x 100 = 900

∴ ab = 900 ....(3)
हम जानते हैं
$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
$(a - b)^2$ = (100)2 – 4 x 900
= 10000 – 3600 = 6400
∴ a – b = 80. ....(4)

समी. (1) तथा (4) को जोड़ने पर
a + b + a – b = 100 + 80 = 180
या 2a = 180
∴ a = 90

a का मान समी. (1) में रखने पर
90 + b = 100
∴ b = 10
अतः दी गई संख्याएँ = 90, 10 हैं।

प्रश्न 2. यदि दो संख्याओं के ह.मा. और गु.मी. में अनुपात 12 : 13 हो, तो सिद्ध कीजिए कि संख्याओं में अनुपात 4 : 9 है।

हल- माना दो राशियाँ a व b हैं तथा उनके ह.मा. व गु.मा. क्रमशः
H व G है।
दिया है

$$\frac{H}{G} = \frac{12}{13}$$

अब सूत्र $H = \frac{2ab}{a+b}$ तथा $G = \sqrt{ab}$ से

प्रश्नानुसार

$$\frac{\frac{2ab}{a+b}}{\sqrt{ab}} = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2ab}{(a+b)} \times \frac{1}{\sqrt{ab}} = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{12}{13}$$

योगान्तर अनुपात नियम से

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{13+12}{13-12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} = \frac{25}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \pm\frac{5}{1}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{5}{1}$$

पुनः योगान्तर अनुपात नियम से

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{5+1}{5-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{6}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{9}{4}$$

अतः संख्याओं का अनुपात = 9 : 4

अब ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{5}{1}$$

योगान्तर अनुपात से

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{-5+1}{-5-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{-4}{-6} \Rightarrow \frac{2}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{2}{3}$$

वर्ग करने पर $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$

अतः संख्याओं a व b का अनुपात = 4 : 9
अतः अभीष्ट संख्याओं का अनुपात = 4 : 9 या 9 : 4 होगा।

प्रश्न 3. दो संख्याओं के स.मा. तथा गु.मा. को अन्तर 2 है, गु.मी. तथा ह.मा. का अन्तर 1.2 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल- माना दो संख्याएँ a व b हैं तथा उनके मध्य स.मा., गु.मा. एवं ह.मा. क्रमशः A, G व H है।
प्रश्नानुसार,
A = G + 2 ....(1)

एवं $H = G - 1.2$
$H = G - \frac{6}{5}$ ...(2)
$\frac{a+b}{2} = A \Rightarrow a + b = 2A$ ...(3)
$ab = G^2$ ...(4)

समी. (1) व समी. (2) का गुणा करने पर

$$A \times H = (G + 2)\left(G - \frac{6}{5}\right)$$

$5G^2 = (G + 2)(5G - 6)$
$5G^2 = 5G^2 - 6G + 10G - 12$
$4G = 12 \Rightarrow G = 3$

G का मान समी. (1) में रखने पर
$A = 3 + 2 = 5$
अब A व G के मान समी. (3) व समी. (4) में रखने पर।
$a + b = 2 \times 5 = 10$ ....(5)
$ab = (3)^2 = 9$ ....(6)

$$a - b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$$

$$a - b = \sqrt{(10)^2 - 4 \times 9} = \sqrt{100 - 36}$$

$\Rightarrow a - b = 8$ ....(7)
समी. (5) व समी. (7) को जोड़ने पर।
$2a = 18 \Rightarrow a = 9$
समी. (5) में a का मान रखने पर।
$a + b = 10 \Rightarrow b = 1$
अभीष्ट संख्याएँ 9 व 1 हैं।

प्रश्न 4. तीन राशियाँ a, b, c गु.श्रे. में हैं तथा $a^x = b^y = c^z$ है, तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z ह.श्रे. में होंगे।

हल- दिया है-
a, b, c गु.श्रे. में है। इसलिए
$b^2 = ac$ ......(1)
तथा $a^x = b^y = c^z = k$ (माना)
$\therefore a = (k)^{1/x}$

$b = (k)^{1/y}$

$c = (k)^{1/z}$
समी. (1) में मान रखने पर
$(k^{1/y})^2 = k^{1/x} (k)^{1/z}$
$k^{2/x} = (k)^{1/x+1/z}$

आधार समान है। इसलिए घातें भी बराबर होंगी। इसलिए

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{y} = \frac{x+z}{xz}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2xz}{x+z}$$

इसलिए हम कह सकते हैं कि x, y, z ह.श्रे. में होंगे।

प्रश्न 5. तीन राशियाँ a, b, c ह.श्रे. में हैं। सिद्ध कीजिए कि 2a – b, b, 2c – b गु.श्रे. में होंगे।

हल- माना कि 2a – b, b, 2c – b गु. श्रे. में है। इसलिए
$(b)^2 = (2a - b) \times (2c - b)$ (सूत्र $b^2 = ac$ से)
$b^2 = 4ac - 2ab - 2bc + b^2$
$2ab + 2bc = 4ac$
$2b(a + c) = 4ac$
या $b(a + c) = 2ac$

या $b = \frac{2ac}{a+c}$
अतः कहा जा सकता है कि a, b, c हरात्मक श्रेढ़ी में होंगे
जबकि 2a – b, b, 2c – b गु. श्रेढ़ी में है।

प्रश्न 6. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं, x, y, z ह.श्रे. में हैं तथा ax, by, cz गु.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए।

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

हल- दिया है $2b = a + c$ ....(1)
$y = \frac{2xz}{x+z}$ ....(2)

$b^2y^2 = ax.cz$ ....(3)
सिद्ध करना है

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$

समी. (1) तथा (2) को गुणा करने पर

$$2by=\frac{2xz(a+c)}{x+z}$$

$$\Rightarrow \qquad by=\frac{xz(a+c)}{(x+z)}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow \qquad b^2y^2=\frac{x^2yz^2(a+c)^2}{(x+z)^2} \qquad ....(4)$$

$$\Rightarrow \qquad axcz=\frac{x^2z^2(a+c)^2}{(x+z)^2}$$

(समी. (3) के प्रयोग से)

$$\Rightarrow \qquad ac=\frac{xz(a+c)^2}{(x+z)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(a+c)^2}{ac}=\frac{(x+z)^2}{xz}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a^2+c^2+2ac}{ac}=\frac{x^2+z^2+2xz}{xz}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}+z=\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+z$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{x}{z}+\frac{z}{x}$$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 7. दो धनात्मक राशियों a तथा b के मध्य दो स.मा. A_1, A_2, दो गु.मा. G_1, G_2, तथा दो ह.मा. H_1, H_2, हो, तो सिद्ध कीजिए-

(i) $A_1H_2 = A_2H_1 = G_1G_2 = ab$
(ii) $G_1G_2 : H_1H_2 = (A_1 + A_2) : (H_1 + H_2)$

हल- (i) दिया है a व b के मध्य दो स.मा. A_1 व A_2 हैं।

$$\Rightarrow \qquad A_1 = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3} \qquad \text{....(1)}$$

$$\left[\because A_1 = a + d, A_2 = a + 2d, \text{ यहाँ } d = \frac{b-a}{n+1}, n = 2\right]$$

$$A_2 = a + \frac{2(b-a)}{3} = \frac{a+2b}{3} \qquad \text{....(2)}$$

a व B के मध्य दो ह.मा. H_1 व H_2 हैं।

$$\Rightarrow \qquad H_1 = \frac{a}{1+ad} = \frac{a}{1+a\left(\frac{a-b}{ab\times 3}\right)}$$

$$\left[\because d = \frac{a-b}{ab(n+1)} \text{ यहाँ } n = 2\right]$$

$$H_1 = \frac{a}{\frac{3b+a-b}{3b}} = \frac{3ab}{a+2b} \qquad \text{....(3)}$$

$$H_2 = \frac{3ab}{2a+b} \qquad \text{....(4)}$$

$$\because H_2 = \frac{a}{1+2ad}$$

a व b के मध्य दो गु.मा. हैं।

$$\Rightarrow \qquad G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2+1}} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{....(5)}$$

$$G_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{....(6)}$$

हमें सिद्ध करना है

$A_1H_2 = A_2H_1 = G_1G_2 = ab$

अब हम प्राप्त करेंगे

$$A_1H_2 = \frac{2a+b}{3} \times \frac{3ab}{2a+b} = ab$$

[A_1 व H_2 का मान रखने पर]

$$A_2H_1 = \frac{a+2b}{3} \times \frac{3ab}{2a+2b} = ab$$

$$G_1G_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \times a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^2\left(\frac{b}{a}\right) = ab$$

$A_1H_2 = A_2H_1 = G_1G_2$

(ii) L.H.S. = $G_1G_2 : H_1H_2$

$$= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \times a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} : \frac{3ab}{a+2b} \times \frac{3ab}{2a+b}$$

$$= a^2\left(\frac{b}{a}\right) : \frac{9a^2b^2}{(a+2b)(2a+b)}$$

$$= ab : \frac{9a^2b^2}{(a+2b)(2a+b)}$$

$$= \frac{(a+2b)(2a+b)}{9ab} \quad ....(1)$$

R.H.S. $= A_1 + A_2 : H_1 + H_2$

$$A_1 + A_2 = \frac{2a+b}{3} + \frac{a+2b}{3} = \frac{3a+3b}{3}$$

$$= a + b$$

$$H_1 + H_2 = \frac{3ab}{a+2b} + \frac{3ab}{2a+b}$$

$$= \frac{3ab[2a+b+a+2b]}{(a+2b)(2a+b)}$$

$$= \frac{3ab[3a+3b]}{(a+2b)(2a+b)} = \frac{9ab(a+b)}{(a+2b)(2a+b)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(a+b)}{1} \times \frac{(a+2b)(2a+b)}{9ab(a+b)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(a+2b)(2a+b)}{9ab} \quad ....(2)$$

समी. (1) व समी. (2) से
L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 8. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं, b, c, d गु. श्रे. में हैं तथा c, d, e ह.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि a, c, e गु.श्रे. में होंगे।

हल- दिया है- a, b, c स.श्रे. में हैं।
$\therefore b = \frac{a+c}{2}$ ....(1)
b, c, d गु.श्रे. में हैं।
$\therefore c^2 = bd$ ....(2)

c, d, e ह.श्रे. में हैं।

$d = \frac{2ce}{c+e}$ ......(3)
समी. (2) में समी. (1) तथा (3) का मान रखने पर

$$c^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right) \times \frac{2ce}{c+e}$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = \frac{(a+c) \times ce}{c+e}$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{(a+c) \times e}{c+e}$$

$\Rightarrow c^2 + ec = ae + ce$
$\Rightarrow c^2 = ae$
अर्थात् a, c, e गु.श्रे. में होंगे। इतिसिद्धम्

प्रश्न 9. यदि तीन राशियाँ a, b, c स.श्रे. तथा ह.श्रे. दोनों में हों, सिद्ध कीजिए कि वे गु.श्रे. में भी होंगी।

हल- दिया है-तीन राशियाँ a, b, c स.श्रे. तथा ह.श्रे. दोनों में इसलिए प्रश्नानुसार लिखा जा सकता है|
$\therefore b = \frac{a+c}{2}$ ...(1)
$b = \frac{2ac}{a+c}$ ....(2)

समी. (1) तथा (2) को बराबर करने पर

$$\frac{a+c}{2} = \frac{2ac}{(a+c)}$$

$$\Rightarrow \quad (a+c)^2 = 4ac$$

$$= \frac{(a+c)^2}{4} = ac \Rightarrow \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac$$

समी. (1) से $\quad b = \frac{a+c}{2}$

$\therefore b^2 = ac$
अर्थात् a, b, c गु.श्रे. में भी होंगी। इतिसिद्धम्

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. श्रेढी -4, -1, + 2, +5,..... का 10वाँ पद है

(A) 23
(B) -23

(C) 32
(D) -32
हल : (A)

प्रश्न 2. एक स. श्रे. का 9वाँ पद 35 तथा 19वाँ पद 75 हो, तो इसका 20वाँ पद होगा

(A) 78
(B) 79
(C) 80
(D) 81
हल : (B)

प्रश्न 3. श्रेढी 1, 3, 5, ... के n पदों का योगफल है

(A) $(n - 1)^2$
(B) $(n + 1)^2$
(C) $(2n - 1)^2$
(D) n^2

हल : (D)

प्रश्न 4. यदि किसी स.श्रे. का प्रथम पद 5, अन्तिम पद 45 तथा पदों का योगफल 400 हो, तो पदों की संख्या है
(A) 8
(B) 10
(C) 16
(D) 20
हल : (C)

प्रश्न 5. यदि किसी स.श्रे. का तीसरा पद 18 तथा सातवाँ पद 30 है, तो उसके प्रथम 17 पदों का योगफल होगा-

(A) 600
(B) 612
(C) 624
(D) 636
हल : (B)

प्रश्न 6. यदि (x + 1), 3x, (4x + 2) स.श्रे. में हो, तो इस श्रेढ़ी का पाँचवाँ पद होगा

(A) 14
(B) 19
(C) 24
(D) 28

हल : (C)

प्रश्न 7. a, b, c स.श्रे. में हैं। a तथा b का स.मा. x, b तथा c का स.मा. y हों, तो x तथा y का स.मा. होगा

(A) a
(B) b
(C) c
(D) a + c

हल : (B)

प्रश्न 8. किसी स.श्रे. के n पदों का योगफल $3n^2 + 5n$ है। इसका 27वाँ पद है

(A) 160
(B) 162
(C) 164
(D) 166

हल : (C)

प्रश्न 9. 20 तथा 30 के मध्य 50 समान्तर माध्यों का योगफल है

(A) 1255
(B) 1205
(C) 1250
(D) 1225

हल : (C)

प्रश्न 10. गु.श्रे.

$\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \ldots\ldots$

का सार्वअनुपात है

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) 3

हल : (A)

प्रश्न 11. श्रेढ़ी 96, 48, 24, 12, ... $\frac{3}{16}$ में पदों की संख्या है–

(A) 8
(B) 10
(C) 12
(D) 15
हल : (B)

प्रश्न 12. $9^{1/3} \times 9^{1/9} \times 9^{1/27} \times ...... \infty$ का मान है

(A) 1
(B) 3
(C) 9
(D) 27
हल : (B)

प्रश्न 13. श्रेढ़ी

$\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+ ....$

के अनन्त पदों का योगफल हैं

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $3\sqrt{3}$

(C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{3}{2}$

हल : (C)

प्रश्न 14. श्रेणी

$\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4} + ...$

के अनन्त पदों का योगफल है

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{16}$

(C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{7}{16}$

हल : (B)

प्रश्न 15. यदि गु.श्रे. का तीसरा पद 2 है, तो उसके प्रथम पाँच पदों का गुणनफल है

(A) 4
(B) 16
(C) 32
(D) 64
हल : (C)

प्रश्न 16. n के किस मान के लिए व्यंजक
$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$
a तथा b के बीच गु.मा. होगा

(A) 1
(B) 2
(C) 0
(D) $-\frac{1}{2}$

हल : (D)

प्रश्न 17. यदि a और b के मध्य G_1 तथा G_2 दो गु.मा. हों, तो G_1G_2 का मान है

(A) $\sqrt{ab}$
(B) ab
(C) $(ab)^2$
(D) $(ab)^3$
हल : (B)

प्रश्न 18. -9 और 4 के मध्य गु.मा. है
(A) -36
(B) 6

(C) -6
(D) 36
हल : (C)

प्रश्न 19. श्रेढ़ी
$\frac{1}{2}, \frac{5}{13}, \frac{5}{16}, \ldots\ldots\ldots$
है

(A) स.श्रे.
(B) गु.श्रे.
(C) ह.श्रे.
(D) अन्य श्रेणी

हल : (C)

प्रश्न 20. श्रेढ़ी
$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \ldots\ldots$
का छठा पद है
(A) $\frac{1}{13}$
(B) $\frac{1}{16}$
(C) $\frac{1}{15}$
(D) इनमें से कोई नहीं

हल : (B)

प्रश्न 21. यदि a, b, c, d ह. श्रे. में है, तो सत्य कथन है
(A) ab > cd
(B) ac > bd
(C) ad > bc
(D) इनमें से कोई नहीं

हल : (C)

प्रश्न 22. दो संख्याओं का ह.मा. 4, स.मा. A तथा गु.मा. G है। यदि $2A + G^2 = 27$ है तो संख्याएँ हैं

(A) 6, 4
(B) 8, 2

(C) 8, 6
(D) 6, 3

हल : (D)

प्रश्न 23. दो संख्याओं के ह.मी. तथा गु.मा. का अनुपात 12 : 13 है, तो संख्याओं का अनुपात होगा
(A) 1 : 2
(B) 2 : 3
(C) 3 : 5
(D) 4 : 9
हल : (D)

प्रश्न 24. यदि दो संख्याओं a तथा b के बीच स.मा., गु.मा. एवं ह.मा. क्रमशः A, G एवं H हों, तो A, G H होंगे

(A) ह.श्रे. में
(B) गु.श्रे. में
(C) स.श्रे. में
(D) इनमें से कोई नहीं
हल : (B)

प्रश्न 25. यदि संख्याएँ a तथा b के बीच ह.मा. H हो, तो $\frac{H}{a} + \frac{H}{b}$ का मान है

(A) 2
(B) $\frac{a+b}{2}$
(C) $\frac{ab}{2}$
(D) इनमें से कोई नहीं

हल : (A)

प्रश्न 26. यदि a, b, c है. श्रे. में हों, तो सत्य कथन है

(A) $ac = b^2$
(B) $\sqrt{ac} < b$
(C) $a + c = 2b$
(D) $\sqrt{ac} > b$

हल : (D)

प्रश्न 27. यदि किसी श्रेणी का nवाँ पद $\frac{n^2}{3^n}$ हो, तो अनुक्रम के प्रथम 3 पद लिखिये।

हल :

$$T_n = \frac{n^2}{3^n}$$

$$T_1 = \frac{(1)^2}{3^1} = \frac{1}{3},\ T_2 = \frac{(2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$T_3 = \frac{(3)^2}{3^3} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

अतः अनुक्रम के तीन पद निम्न होंगे

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}$$

प्रश्न 28. श्रेढी 72, 70, 68, 66,….. का कौनसा पद 40 है ?

हल- दिया है
प्रथम पद (a) = 72
सार्वअन्तर = 70 – 72 = (-2)
T_n = 40
T_n = a + (n – 1)d

40 = 72 + (n – 1) x (-2)
40 – 72 = (n – 1) x (-2)
$\frac{-32}{-2}$ = n – 1 ⇒ n – 1 = 16 ∴ n = 17
अतः श्रेढी का 17वाँ पद 40 है।

प्रश्न 29. यदि एक स.श्रे. में m तथा n पदों के योगफल का अनुपात $m^2 : n^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि mवें तथा nवें पदों का अनुपात (2m – 1) : (2n – 1) होगा।

हल- दिया है-

$$S_m = \frac{m}{2}\ (2a + (m - 1)d) \qquad ....(1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\ (2a + (n - 1)d) \qquad ....(2)$$

दिया है— $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$

समी. (1) में (2) का भाग देने पर

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{\frac{m}{2}(2a+(m-1)d)}{\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m^2}{n^2} = \frac{m(2a+(m-1)d)}{n(2a+(n-1)d)}$$

अर्थात् $$\frac{2a+(m-1)d}{2a+(n-1)d} = \frac{m}{n}$$

या $$\frac{a+\left(\frac{m-1}{2}\right)d}{a+\left(\frac{n-1}{2}\right)d} = \frac{m}{n} \quad ....(3)$$

समी. (3) में m के स्थान पर (2m – 1) और n के स्थान पर (2n – 1) रखने पर

$$\frac{a+\left(\frac{2m-1-1}{2}\right)d}{a+\left(\frac{2n-1-1}{2}\right)d} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

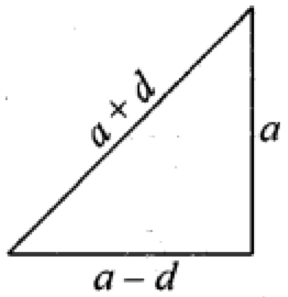
$$\Rightarrow \quad \frac{a+(m-1)d}{a+(n-1)d} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

$$\frac{T_m}{T_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 30. यदि किसी समकोण त्रिभुज की भुजाएँ स.श्रे. में हैं, तो उसकी भुजाओं की लम्बाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।
[संकेत : $(a + d)^2 = (a - d)^2 + a^2 \Rightarrow \frac{a}{d} = 4$]

हल- माना त्रिभुज की भुजाएँ a – d, a, a +d हैं।
$(a + d)^2 = (a - d)^2 + a^2$
$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 - 2ad + d^2 + a^2$
$a^2 + 2ad + d^2 = 2a^2 - 2ad + d^2$
$a^2 = 4ad$
$a = 4d$

त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई का अनुपात



a – d : a : a + d
4d – d : 4d, 4d + d
या 3d : 4d : 5d
या 3 : 4 : 5

प्रश्न 31. $-\frac{2}{7}$**,a,**$-\frac{7}{2}$ **गु. श्रे. में हो तो a का मान लिखिए।**

हल-

$-\frac{2}{7}$,a,$-\frac{7}{2}$ → GP में हैं।
तब

$$a = \sqrt{\left(\frac{-2}{7}\right)\times\left(\frac{-7}{2}\right)}$$

$$a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

प्रश्न 32. श्रेणी 1 – 1 + 1 – 1 +..... का n पदों तक योगफल लिखिये।

हल- श्रेणी GP. है।

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1(1-(-1)^n)}{1+1}$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{2}$$

प्रश्न 33. $2^{1/2} . 4^{1/8} . 16^{1/32}$**....... ∞ का लिखिए।**

हल- $(2)^{1/2} . (2^2)^{1/8} . (2^4)^{1/32}$ ......∞

$(2)^{1/2} . (2)^{2/8} . (2)^{4/32} .... \infty$
$(2)^{1/2} . (2)^{1/4} . (2)^{1/8} .... \infty$
$(2)^{1/2+1/4+1/8} + ... \infty$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} + ... \infty$ का योग करने पर

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \because a = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$$

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

अतः श्रेणी का योग

$$(2)^1 = 2$$

प्रश्न 34. n के किस मान के लिए व्यंजक

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n},$$

दो राशियाँ a तथा b का ह.मा. होगा?

हल- दिया है

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \frac{2ab}{a+b}$$

$(a^{n+1} + b^{n+1})(a + b) = 2ab(a^n + b^n)$
$a^{n+2} + a.b^{n+1} + b.a^{n+1} + b^{n+2} = 2ba^{n+1} + 2ab^{n+1}$

$\Rightarrow a^{n+2} + b^{n+2} - ab^{n+1} - ba^{n+1} = 0$
$\Rightarrow a(a^{n+1} - b^{n+1}) - b(a^{n+1} - b^{n+1}) = 0$
$\Rightarrow (a - b) (a^{n+1} - b^{n+1}) = 0$

यदि $a - b = 0$.
$a = b$ जो कि सम्भव नहीं।
चूँकि a तथा b दो राशियाँ अलग-अलग हैं,
यदि $a^{n+1} - b^{n+1} = 0$

$a^{n+1} = b^{n+1}$

या $$\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

आधार समान हैं। घातें भी बराबर होंगी।
अर्थात् $n + 1 = 0 \therefore n = -1$

प्रश्न 35. यदि a तथा b के स.मा. और ह.मा. क्रमशः A तथा H हों, तो सिद्ध कीजिए–

$$\frac{a-A}{a-H} \times \frac{b-A}{b-H} = \frac{A}{H}$$

हल- दिया a तथा b का समान्तर माध्य A है।
$\therefore A = \frac{a+b}{2}$ ....(1)

a तथा b का हरात्मक माध्य H है।

$$\therefore \quad H = \frac{2ab}{a+b}$$

L.H.S. $\frac{a-A}{a-H} \times \frac{b-A}{b-H}$

a तथा H का मान रखने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{a - \frac{a+b}{2}}{a - \frac{2ab}{a+b}} \times \frac{b - \frac{a+b}{2}}{b - \frac{2ab}{a+b}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{2a-a-b}{2}}{\frac{a^2+ab-2ab}{a+b}} \times \frac{\frac{2b-a-b}{2}}{\frac{ab+b^2-2ab}{a+b}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(a-b)\times(a+b)}{a(a-b)} \times \frac{(b-a)\times(a+b)}{b(b-a)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{a} \times \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b)^2}{ab}$$

$$\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{2ab}{a+b}\right)} = \frac{A}{H} \text{ R.H.S.}$$

अतः L.H.S. = R.H.S. इतिसिद्धम्
अथवा IInd Method :

माना a व b का गु.मा. G है।
$G^2 = ab$
$\therefore AH = G^2$ [$\because$ G A व H का गुणोत्तर माध्य होता है।]
AH = ab

अब $$\text{L.H.S.} = \frac{a-A}{a-H} \times \frac{b-A}{b-H}$$

$$= \frac{ab - aA - Ab - A^2}{ab - aH - bH + H^2}$$

$$= \frac{AH - aA - Ab + A^2}{AH - aH - bH + H^2} = \frac{A(H - a - b + A)}{H(A - a - b + H)}$$

$$= \frac{A}{H} = \text{R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S. **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 36. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं और b, c, d ह.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिये कि ad = bc होगा।

हल- a, b, c → A.P में है।
$\therefore b = \frac{a+c}{2}$ ...(1)

b, c, d → H.P. में है।
$c = \frac{2bd}{b+d}$ ....(2)

$\therefore bc = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{2bd}{b+d}$
या bc(b + d) = (a + c) . bd
या c(b + d) = (a + c). d

या bc + cd = ad + c . d
या bc = ad इतिसिद्धम्

प्रश्न 37. यदि a + b + ... + l गुणोत्तर श्रेढ़ी में है, तो सिद्ध कीजिये इसका योग = $\frac{bl-a^2}{b-a}$

हल- a + b + ... + l GP. में हैं।
n वाँ पद

$$T_n = AR^{n-1}$$

यहाँ पर दिया है—$A = a$, $R = \frac{b}{a}$, $T_n = l$

$$l = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \quad ....(1)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{1-\frac{b}{a}} \quad ....(2)$$

समी. (1) में $\left(\frac{b}{a}\right)$ से गुणा करने पर

$$\frac{lb}{a} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \times \left(\frac{b}{a}\right)^1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\frac{lb}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad ....(3)$$

समी. (2) में (3) से $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ का मान रखने पर

$$S_n = \frac{a\left(1-\frac{lb}{a^2}\right)}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a\left(1-\frac{lb}{a^2}\right)}{\frac{a-b}{a}}$$

$$= \frac{a \times a\left(1-\frac{lb}{a^2}\right)}{a-b} \Rightarrow \frac{a^2\left(1-\frac{lb}{a^2}\right)}{a-b}$$

$$S_n = \frac{a^2 - lb}{a-b} = \frac{lb - a^2}{b-a}$$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 38. अनुक्रम 3, 33, 333, ... के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल- माना

S_n = 3 + 33 + 333 + ... n पद

$S_n = 3[1 + 11 + 111 + \ldots\ldots n$ पद]

$$= \frac{3}{9}[9 + 99 + 999 + \ldots\ldots n \text{ पद}]$$

$$= \frac{3}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots\ldots n \text{ पद}]$$

$$= \frac{3}{9}(10 + 100 + 1000 + \ldots\ldots n \text{ पद})$$

$$- \frac{3}{9}(1 + 1 + 1 + \ldots\ldots n \text{ पद})$$

$$= \frac{3}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots n \text{ पद})$$

$$- \frac{3}{9}(1 + 1 + 1 + \ldots\ldots n \text{ पद})$$

$$= \frac{3}{9}\left[\frac{10.(10^n-1)}{10-1} = \right] - \frac{3}{9}n$$

$$= \frac{30(10^n-1)}{9\times 9} = \frac{3}{9}n \Rightarrow \frac{30(10^n-1)}{81} - \frac{3}{9}n$$

प्रश्न 39. अनुक्रम 1, 2, 4, 8, 16, 32 तथा अनुक्रम 32, 8, 2, 1/2, 1/8, 1/32 के संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम को योगफल ज्ञात कीजिए।

हल- $1 \times 32 + 2 \times 8 + 4 \times 2 + 8 \times \frac{1}{2} + 16 \times \frac{1}{8} + 32 \times \frac{1}{32}$
32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1
= 63
अथवा
यदि संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम अनन्त तक है।
$1 \times 32 + 2 \times 8 + 4 \times 2 + 8 \times \frac{1}{2} + 16 \times \frac{1}{8} + 32 \times \frac{1}{32} + \ldots\ldots$
32 + 16 + 8 +4 + 2 + 1 + ...

$$S_\infty = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} \qquad \because S_\infty = \frac{a}{1-r} \text{ से}$$

$S_\infty = 32 \times 2 = 64$

प्रश्न 40. n का मान ज्ञात कीजिये, ताकि

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$

a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य है।

हल- दिया है
a तथा b के मध्य में गुणोत्तर माध्यम

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$ है।

इसलिये

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+1} + b^{n+1} = \sqrt{ab}\,(a^n + b^n)$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+1} + b^{n+1} = a^{(n+1/2)} \,.\, b^{1/2} + a^{1/2} \,.\, b^{n+1/2}$$

$$\Rightarrow a^{n+1} - a^{n+1/2} \,.\, b^{1/2} = a^{1/2} \,.\, b^{(n+1/2)} - b^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = b^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}} \qquad \left(\because a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \neq 0, \; a \neq b\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0} \Leftrightarrow n + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}$$

प्रश्न 41. यदि G_1 तथा G_2, a और B के बीच दो गुणोत्तर माध्य हैं तो सिद्ध कीजिये G_1G_2 = ab

हल- a, G_1, G_2, b → GP. में होंगे।
यहाँ पर कुल पद् = 4
प्रथम पद = a
अन्तिम पद = b

$$a_n = ar^{n-1}$$
$$b = a(r)^{4-1}$$
$$\frac{b}{a} = r^3 \therefore r = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$$

हम जानते हैं $G_1 = ar$

$$= a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$$

इसी प्रकार $G_2 = ar^2$

$$G_2 = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$$

L.H.S. $G_1G_2 = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3} \times a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$

$$= a^2 . \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = a^2 . \left(\frac{b}{a}\right)^1$$

$= a^2 . \frac{b}{a} = ab$
= RHS
∴ LHS = RHS
इतिसिद्धम्

प्रश्न 42. यदि दो संख्याओं a तथा b के बीच के समान्तर माध्ये (A.M.) तथा गुणोत्तर माध्य (GM.) में अनुपात m : n है तो सिद्ध कीजिये कि

$a : b = m + \sqrt{m^2 - n^2} : m - \sqrt{m^2 - n^2}$ **है।**

हल- दिया है
a व b दो राशियाँ हैं।
इनके बीच समान्तर माध्य (A.M.) = $\frac{a+b}{2}$

$$\frac{\text{समान्तर माध्य}}{\text{गुणोत्तर माध्य}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}} = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

प्रश्नानुसार

$$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{m}{n}$$

अब, उपर्युक्त में योगान्तरानुपात का प्रयोग करने पर

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{m+n}{m-n}$$

या $$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} = \frac{m+n}{m-n}$$

या $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$$

पुनः उपर्युक्त में योगान्तरानुपात का प्रयोग करने पर

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{\left(\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}\right)^2}{\left(\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{m+n+m-n+2\sqrt{m+n}\sqrt{m-n}}{m+n+m-n-2\sqrt{m+n}\sqrt{m-n}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{2m+2\sqrt{m^2-n^2}}{2m-2\sqrt{m^2-n^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}$$

अतः

$$a : b = m+\sqrt{m^2-n^2} : m-\sqrt{m^2-n^2}$$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 43. दो संख्याओं का स.मा. 50 तथा ह.मा. 18 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल- माना दो संख्याएँ a व b हैं।

समान्तर माध्य (A.M.) = $\frac{a+b}{2}$
50 = $\frac{a+b}{2}$
या a + b = 100 ....(1)

हरात्मक माध्य (H.M.) = $\frac{2ab}{a+b}$
$18 = \frac{2ab}{a+b}$
या 18(a + b) = 2ab
18 x 100 = 2ab (∵ a + b = 100, समी. (1) से)
या ab = 900 ....(2)

हम जानते हैं $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
$= (100)^2 - 4 \times 900$
= 10000 – 3600 = 6400
∴ a – b = 80 ....(3)

समी. (1) तथा (3) को जोड़ने पर
2a = 180 ∴ a = $\frac{180}{2}$
a = 90
a का मान समी. (1) में रखने पर
90 + b = 100 ∴ b = 10
अतः संख्याएँ 90, 10 हैं।

प्रश्न 44. दो संख्याओं के स.मा. तथा गु.मा. को अन्तर 2 है, गु.मी. तथा ह.मा. का अन्तर 1.2 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
हल- माना दो संख्याएँ a व b हैं तथा उनके मध्य स.मा., गु.मा. एवं
ह.मा. क्रमशः A, G व H है।

प्रश्नानुसार A – G = 2 ....(1)

$$G - H = 1.2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \quad ....(2)$$

$$\frac{a+b}{2} = A \Rightarrow a + b = 2A \quad ....(3)$$

$$ab = G^2 \quad ....(4)$$

समी. (1) से

$$A = G + 2$$

समी. (2) से $H = G - \frac{6}{5}$

इसलिए $A \times H = (G + 2) \times \left(G - \frac{6}{5}\right)$

5AH = (G + 2) (5G – 6)

$5G^2 = 5G^2 - 6G + 10G - 12$

4G = 12 ⇒ G = 3

G का मान समी. (1) में रखने पर

A = 3 + 2 = 5

अब A व G के मान समी. (३) व समी. (4) में रखने पर

a + b = 2 x 5 = 10 .....(5)

$ab = (3)^2 = 9$ .....(6)

$$a - b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$$

$$a - b = \sqrt{(10)^2 - 4 \times 9}$$

$$= \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64}$$

⇒ a – b = 8 ......(7)

समी. (5) व समी. (7) को जोड़ने पर

2a = 18 ⇒ a = 9

समी. (5) में a का मान रखने पर

9 + b = 10 ⇒ b = 1

अतः अभीष्ट संख्याएँ 9 व 1 हैं।

प्रश्न 45. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं, x, y, z है.श्रे. में हैं तथा ax, by, cz गु.श्रे. में है, तो सिद्ध कीजिये

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

हल- दिया है- 2b = a + c ....(1)

$y = \frac{2xz}{x+z}$ ......(2)
$b^2y^2 = ax \cdot cz$ ....(3)
सिद्ध करना है।

$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$
समी. (1) तथा (2) को गुणा करने पर

$$2by = \frac{2xz(a+c)}{x+z} \Rightarrow by = \frac{xz(a+c)}{(x+z)}$$

दोनों ओर का वर्ग करने पर

$$\Rightarrow \quad b^2y^2 = \frac{x^2z^2(a+c)^2}{(x+z)^2} \quad ....(4)$$

$$\Rightarrow \quad axcz = \frac{x^2z^2(a+c)^2}{(x+z)^2}$$

[समी. (3) के प्रयोग से]

$$\Rightarrow \quad ac = \frac{xz(a+c)^2}{(x+z)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(a+c)^2}{ac} = \frac{(x+z)^2}{xz}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+c^2+2ac}{ac} = \frac{x^2+z^2+2xz}{xz}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2 = \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{x}{z} + \frac{z}{x}$$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 46. दो धनात्मक राशियों / तथा 6 के मध्य दो से.मी. A_1, A_2, दो गु.मी. G_1, G_2 तथा दो ह.मा. H_1, H_2 हो तो सिद्ध कीजिए
$A_1H_2 = A_2H_1 = G_1G_2 = ab$

हल- दिया है a व b के मध्य दो स.मी. A_1 व A_2 है।

$$\Rightarrow \qquad A_1 = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3} \qquad \text{....(1)}$$

$$[\because A_1 = a + d, A_2 = a + 2d,$$

$$\text{जहाँ } d = \frac{b-a}{n+1}, n = 2]$$

$$A_2 = a + \frac{2(b-a)}{3} = \frac{a+2b}{3} \qquad \text{....(2)}$$

a व b के मध्य दो ह.मा. H_1 व H_2 हैं।

$$\Rightarrow \qquad H_1 = \frac{a}{1+ad} = \frac{a}{1+a.\left(\frac{a-b}{ab \times 3}\right)}$$

$$H_1 = \frac{a}{\frac{3b+a-b}{3b}} = \frac{3ab}{a+2b} \qquad \text{....(3)}$$

$$H_2 = \frac{3ab}{2a+b} \qquad \text{....(4)}$$

$$[\because H_2 = \frac{a}{1+2ad}]$$

a वे b के मध्य दो गु.मा. हैं।

$$\Rightarrow \qquad G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2+1}} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{.....(5)}$$

$$G_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{....(6)}$$

$$\text{अब} \qquad A_1H_2 = \frac{2a+b}{3} \times \frac{3ab}{2a+b} = ab$$

यहाँ पर A_1 व H_2 का मान रखा गया है।

$$A_2H_1 = \frac{a+2b}{3} \times \frac{3ab}{a+2b} = ab$$

$$G_1G_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \times a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^2\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= ab \Rightarrow A_1H_2 = A_2H_1 = G_1G_2$$

इतिसिद्धम्