अथवा हम कह सकते हैं कि $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

जुबेदा ने कहा लेकिन इसका उपयोग करते हुए हम केवल n वर्ष के अंत में देय कुल राशि का सूत्र प्राप्त करते हैं, न कि चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र। अरुणा ने तुरंत कहा कि हम जानते हैं :

चक्रवृद्धि ब्याज = कुल राशि – मूलधन

अर्थात् $CI = A - P$, इसलिए हम चक्रवृद्धि ब्याज भी आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 11 : ₹ 12,600 का 2 वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

हल : हमें प्राप्त है, $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

यहाँ मूलधन (P) = ₹ 12600, दर (R) = ₹ 10

वर्षों की संख्या $(n) = 2$ $A = ₹\ 12600\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 = ₹\ 12600\left(\frac{11}{10}\right)^2$

$$= ₹\ 12600 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = ₹\ 15246$$

चक्रवृद्धि ब्याज (CI) = A – P = ₹ 15246 – ₹ 12600 = ₹ 2646

प्रयास कीजिए

1. ₹ 8000 का 2 वर्ष के लिए 5% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए यदि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

8.8 दर का वार्षिक अथवा अर्धवार्षिक संयोजन

शायद आप जानना चाहेंगे कि 'दर' के बाद 'वार्षिक संयोजन' क्यों लिखा हुआ था। क्या इसका कोई अर्थ है?

अवश्य ही इसका अर्थ है, क्योंकि हम ब्याज की दर का अर्धवार्षिक अथवा तिमाही संयोजन भी कर सकते हैं।

आइए, देखते हैं क्या होता है, यदि ₹ 100 को एक वर्ष अथवा अर्धवार्षिक चक्रवृध्धि व्याज पर रखा जाए तो, कितना परिवर्तन होगा?

जब ब्याज वार्षिक संयोजित न हो तो समय अवधि और दर

वह समय अवधि जिसके पश्चात् प्रत्येक बार नया मूलधन बनाने के लिए ब्याज को जोड़ा जाता है, **रूपांतरण अवधि** कहलाता है। जब ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित किया जाता है तो एक वर्ष में प्रत्येक छमाही के दो रूपांतरण अवधि होती है। ऐसी स्थितियों में अर्धवार्षिक दर वार्षिक दर की आधी होगी। यदि ब्याज को तिमाही संयोजित किया जाए तो क्या होगा? इस स्थिति में एक वर्ष में 4 रूपांतरण अवधि होंगी और तिमाही दर वार्षिक दर का एक चौथाई होगी।

P = ₹ 100 और 10% वार्षिक दर	P = ₹ 100 और 10% वार्षिक दर पर
पर ब्याज का संयोजन वार्षिक समय अवधि 1 वर्ष है	ब्याज का संयोजन अर्धवार्षिक समय अवधि 6 महीने अथवा $\frac{1}{2}$ वर्ष है
$I = \frac{100 \times 10 \times 1}{100} = ₹\ 10$	$I = \frac{100 \times \boxed{10 \times \frac{1}{2}}}{100} = ₹\ 5$
$A = ₹\ 100 + ₹\ 10$ $= ₹\ 110$	$A = ₹\ 100 + ₹\ 5 = ₹\ 105$ अब अगले छह महीने के लिए $P = ₹\ 105$
	अत:, $I = ₹\ \frac{105 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 5.25$ और $A = ₹\ 105 + ₹\ 5.25 = ₹\ 110.25$

दर आधी हो जाती है।

क्या आपने देखा कि यदि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है, तो हम ब्याज का अभिकलन दो बार करते हैं। इसलिए समय अवधि दुगुना हो जाती है और दर आधी कर दी जाती है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में ब्याज संयोजन के लिए समय अवधि और दर ज्ञात कीजिए :

1. $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 8% वार्षिक दर पर उधार ली गई एक राशि पर ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।
2. 2 वर्ष के लिए 4% वार्षिक दर पर उधार ली गई एक राशि पर ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक राशि 16% वार्षिक दर पर 1 वर्ष के लिए उधार ली जाती है। यदि ब्याज प्रत्येक तीन महीने बाद संयोजित किया जाता है, तो 1 वर्ष में कितनी बार ब्याज देय होगा।

उदाहरण 12 : यदि ब्याज का संयोजन अर्धवार्षिक होता है तो $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर पर उधार लिए गए ₹ 12,000 के कर्ज का भुगतान करने के लिए कितनी राशि देनी पड़ेगी।

हल :

प्रथम छह महीनों के लिए मूलधन = ₹ 12,000	प्रथम छह महीनों के लिए मूलधन = ₹ 12,000
$1\frac{1}{2}$ वर्षों में 3 छमाही होती हैं। इसलिए ब्याज संयोजन 3 बार होना है। ब्याज की दर = 10% का आधा = 5% अर्धवार्षिक $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ $= ₹\ 12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ $= ₹\ 12000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$ = ₹ 13891.50	समय = 6 महीने = $\frac{6}{12}$ वर्ष = $\frac{1}{2}$ वर्ष दर = 10% $I = ₹\ \frac{12000 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 600$ A = P + I = ₹ 12000 + ₹ 600 = ₹ 2600 यह अगले 6 महीने के लिए मूलधन है। $I = ₹\ \frac{12600 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 630$ तीसरी अवधि का मूलधन = ₹ 12600 + ₹ 630 = ₹ 13230 $I = ₹\ \frac{13230 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 661.50$ A = P + I = ₹ 13230 + ₹ 661.50 = ₹ 13891.50

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित के लिए भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए :

1. ₹ 2400 पर 5% वार्षिक दर से ब्याज वार्षिक संयोजन करते हुए 2 वर्ष के अंत में।
2. ₹ 1800 पर 8% वार्षिक दर से ब्याज तिमाही संयोजन करते हुए 1 वर्ष के अंत में।

उदाहरण 13 : ₹ 10,000 की राशि का 1 वर्ष और 3 महीने के लिए $8\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर से निवेश करने पर चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

हल : मयूरी ने सर्वप्रथम समय को वर्षों में परिवर्तित किया

1 वर्ष 3 महीने = $1\frac{3}{12}$ वर्ष = $1\frac{1}{4}$ वर्ष

मयूरी ने ज्ञात सूत्र में मान रखने का प्रयत्न किया और

$A = ₹\ 10000\left(1+\frac{17}{200}\right)^{1\frac{1}{4}}$ प्राप्त किया।

वह परेशान थी। उसने अपने अध्यापक से पूछा कि वह भिन्न रूपी घात को कैसे ज्ञात करेगी। अध्यापक ने उसे निम्नलिखित संकेत दिया :

पहले अवधि के एक पूरे हिस्से अर्थात् 1 वर्ष के लिए राशि ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसे मूलधन के रूप में उपयोग करते हुए $\frac{1}{4}$ वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

$$A = ₹\ 10000\left(1+\frac{17}{200}\right)$$

$$= ₹\ 10000 \times \frac{217}{200} = ₹\ 10850$$

अब यह राशि अगले $\frac{1}{4}$ वर्ष के लिए मूलधन का काम करेगी। हम ₹ 10,850 का $\frac{1}{4}$ वर्ष के लिए साधारण ब्याज ज्ञात करते हैं।

$$\text{साधारण ब्याज (SI)} = ₹\ \frac{10850 \times \frac{1}{4} \times 17}{100 \times 2}$$

$$= ₹\ \frac{10850 \times 1 \times 17}{800} = ₹\ 230.56$$

$$\text{प्रथम वर्ष का ब्याज} = ₹\ 10850 - ₹\ 10000 = ₹\ 850$$

$$\text{और अगले } \frac{1}{4} \text{ वर्ष का ब्याज} = ₹\ 230.56$$

$$\text{इस प्रकार कुल चक्रवृद्धि ब्याज} = 850 + 230.56 = ₹\ 1080.56$$

8.9 चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र के अनुप्रयोग

कुछ ऐसी स्थितियाँ हैं जहाँ पर हम चक्रवृद्धि ब्याज के कुल राशि ज्ञात करने के सूत्र का उपयोग कर सकते हैं। इनमें से कुछ निम्नलिखित हैं :

(i) जनसंख्या में वृद्धि (अथवा ह्रास)

(ii) यदि बैक्टीरिया वृद्धि की दर ज्ञात है तो उनकी कुल वृद्धि ज्ञात करना।

(iii) किसी वस्तु का मान ज्ञात करना यदि मध्यवर्ती वर्षों में इसके मूल्य में वृद्धि अथवा कमी होती है।

उदाहरण 14 : वर्ष 1997 के अंत में किसी शहर की जनसंख्या 20,000 थी। इसमें 5% वार्षिक दर से वृद्धि हुई। वर्ष 2000 के अंत में उस शहर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

हल : प्रत्येक वर्ष जनसंख्या में 5% की वृद्धि होती है, इसलिए प्रत्येक नए वर्ष की नई जनसंख्या होती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि यह संयोजित रूप में बढ़ रही है।

1998 के शुरू में जनसंख्या = 20, 000 (इसे हम प्रथम वर्ष के लिए मूलधन मानते हैं)

$$5\% \text{ की दर से वृद्धि} = \frac{5}{100} \times 20,000 = 1000$$

$$\text{वर्ष 1999 की जनसंख्या} = 20000 + 1000 = 21000$$

इसे दूसरे वर्ष के लिए मूलधन मान लीजिए।

5% की दर से वृद्धि $= \frac{5}{100} \times 21000 = 1050$

वर्ष 2000 में जनसंख्या $= 21000 + 1050 = 22050$

इसे तीसरे वर्ष के लिए मूलधन समझ लीजिए।

5% की दर से वृद्धि $= \frac{5}{100} \times 22050 = 1102.5$

वर्ष 2000 के अंत में जनसंख्या $= 22050 + 1102.5 = 23152.5$

अथवा सूत्र की सहायता से वर्ष 2000 के अंत में जनसंख्या $= 20000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$

$$= 20000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = 23152.5$$

इसलिए, लगभग जनसंख्या $= 23{,}153$

अरुणा ने पूछा, यदि जनसंख्या में कमी होती है तो क्या करना है। तब अध्यापक ने निम्नलिखित उदाहरण की चर्चा की।

उदाहरण 15 : एक T.V. ₹ 21,000 में खरीदा गया। एक वर्ष पश्चात् T.V. के मूल्य में 5% अवमूल्यन हो गया (अवमूल्यन का अर्थ है वस्तु के उपयोग और उम्र के कारण उसके मूल्य में कमी होना)। एक वर्ष पश्चात् T.V. का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन = ₹ 21,000

अवमूल्यन (कमी) = प्रतिवर्ष ₹ 21,000 का 5%

$= ₹ \frac{21{,}000 \times 5 \times 1}{100} = ₹\ 1050$

एक वर्ष के अंत में T.V. का मूल्य = ₹ 21,000 – ₹ 1050 = ₹ 19,950

विकल्पतः, हम इसे निम्नलिखित विधि से सीधे प्राप्त कर सकते हैं

1 वर्ष के अंत में मूल्य $= ₹\ 21{,}000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)$

$= ₹\ 21{,}000 \times \frac{19}{20} = ₹\ 19{,}950$

प्रयास कीजिए

1. ₹ 10,500 मूल्य की एक मशीन का 5% की दर से अवमूल्यन होता है। एक वर्ष पश्चात् इसका मूल्य ज्ञात कीजिए।
2. एक शहर की वर्तमान जनसंख्या 12 लाख है यदि वृद्धि की दर 4% है तो 2 वर्ष पश्चात् शहर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 8.3

1. निम्नलिखित के लिए कुल राशि एवं चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए :

(a) ₹ 10, 800 पर 3 वर्ष के लिए $12\frac{1}{2}$ % वार्षिक दर से वार्षिक रूप से संयोजित करने पर।

(b) ₹ 18,000 पर $2\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से वार्षिक रूप से संयोजित करने पर।

(c) ₹ 62,500 पर $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 8% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक रूप से संयोजित करने पर।

(d) ₹ 8000 पर 1 वर्ष के लिए 9% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक रूप से संयोजित करने पर। (आप सत्यापन करने के लिए साधारण ब्याज के सूत्र का उपयोग करते हुए एक के बाद दूसरे वर्ष के लिए परिकलन कर सकते हैं)

(e) ₹ 10,000 पर 1 वर्ष के लिए 8% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक रूप से संयोजित करने पर।

2. कमला ने एक स्कूटर खरीदने के लिए किसी बैंक से ₹ 26400 15% वार्षिक दर से उधार लिए जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होना है। 2 वर्ष और 4 महीने के अंत में उधार चुकता करने के लिए उसे कितनी राशि का भुगतान करना पड़ेगा?

(**संकेत :** ब्याज को वार्षिक संयोजित करते हुए पहले 2 वर्ष के लिए A ज्ञात कीजिए और दूसरे वर्ष की कुल राशि पर $\frac{4}{12}$ वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।)

3. फैबिना ने ₹ 12,500 3वर्ष के लिए 12% वार्षिक दर से साधारण ब्याज पर उधार लिए और राधा ने उतनी ही राशि उतने ही समय के लिए 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार ली जबकि ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होना है। किसे अधिक ब्याज का भुगतान करना है और कितना अधिक करना है?

4. मैंने जमशेद से ₹ 12,000 2 वर्ष के लिए 6% वार्षिक दर से साधारण ब्याज पर उधार लिए। यदि मैंने यह राशि 6% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार ली हुई होती तो मुझे कितनी अतिरिक्त राशि का भुगतान करना पड़ता?

5. वासुदेवन ने 12% वार्षिक दर पर ₹ 60,000 का निवेश किया। यदि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है तो ज्ञात कीजिए कि वह (i) 6 महीने के अंत में (ii) एक वर्ष के अंत में, कुल कितनी राशि प्राप्त करेगा?

6. आरिफ ने एक बैंक से ₹ 80,000 का कर्ज लिया। यदि ब्याज की दर 10% वार्षिक है तो $1\frac{1}{2}$ वर्ष पश्चात् उसके द्वारा भुगतान की जाने वाली राशियों में अंतर ज्ञात कीजिए। यदि ब्याज (i) वार्षिक संयोजित होता है (ii) अर्धवार्षिक संयोजित होता है।

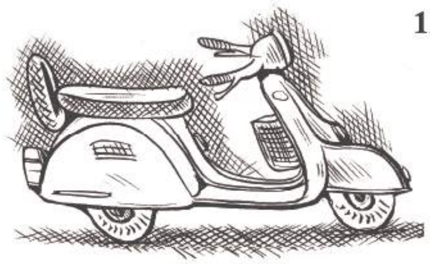
7. मारिया ने किसी व्यापार में ₹ 8000 का निवेश किया। उसे 5% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज का भुगतान किया जाएगा। यदि ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है तो

(i) दो वर्ष के अंत में उसके नाम से जमा की गई राशि ज्ञात कीजिए।

(ii) तीसरे वर्ष का ब्याज ज्ञात कीजिए।

8. ₹ 10,000 पर $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज और कुल राशि ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होना है। क्या यह ब्याज उस ब्याज से अधिक होगा जो उसे वार्षिक रूप से संयोजित करने पर प्राप्त होगा?

9. यदि राम ₹ 4096 18 महीने के लिए 12% वार्षिक दर पर उधार देता है और ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है तो ज्ञात कीजिए कि राम कुल कितनी राशि प्राप्त करेगा।
10. 5% वार्षिक दर से बढ़ते हुए वर्ष 2003 के अंत में एक स्थान की जनसंख्या 54,000 हो गई। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :
    (i) वर्ष 2001 में जनसंख्या
    (ii) वर्ष 2005 में कितनी जनसंख्या होगी?
11. एक प्रयोगशाला में, किसी निश्चित प्रयोग में बैक्टीरिया की संख्या 2.5% प्रति घंटे की दर से बढ़ रही है। यदि प्रयोग के शुरू में बैक्टीरिया की संख्या 5,06,000 थी तो 2 घंटे के अंत में बैक्टीरिया की संख्या ज्ञात कीजिए।
12. एक स्कूटर ₹ 42,000 में खरीदा गया। 8% वार्षिक दर से इसके मूल्य का अवमूल्यन हो गया। 1 वर्ष के बाद स्कूटर का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हमने क्या चर्चा की?

1. अंकित मूल्य पर दी गई छूट **बट्टा** कहलाती है।
   बट्टा = अंकित मूल्य − विक्रय मूल्य
2. यदि बट्टा प्रतिशत दिया हुआ है तो बट्टे का परिकलन किया जा सकता है। बट्टा = अंकित मूल्य का बट्टा प्रतिशत।
3. किसी वस्तु को खरीदने के बाद उस पर किए गए अतिरिक्त खर्चे क्रय मूल्य में शामिल कर लिए जाते हैं और ये खर्चे **ऊपरी खर्चे** कहलाते हैं। क्रय मूल्य = खरीद मूल्य + ऊपरी खर्चे
4. किसी वस्तु को बेचने पर सरकार द्वारा बिक्री कर लिया जाता है और इसे बिल की राशि में जोड़ दिया जाता है। बिक्री कर = बिल राशि का कर %
5. जी.एस.टी. माल और सेवा कर का संक्षिप्त रूप है। यह कर माल की आपूर्ति या सेवा या दोनों पर लगाया जाता है।
6. पिछले वर्ष की कुल राशि ($A = P + I$) पर परिकलित किया गया ब्याज चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।
7. (i) जब ब्याज वार्षिक संयोजित होता है तो

   कुल राशि $(A) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$, जहाँ P मूलधन, R ब्याज की दर और n समय है।

   (ii) जब ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है तो

   कुल राशि $= P\left(1+\frac{R}{200}\right)^{2n}$ जहाँ $\begin{cases} \frac{R}{2} \text{ ब्याज की अर्धवार्षिक दर} \\ 2n = \text{छमाहियों (अर्धवर्षों) की संख्या} \end{cases}$

अध्याय

9

बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ

0853CH09

9.1 व्यंजक क्या है?

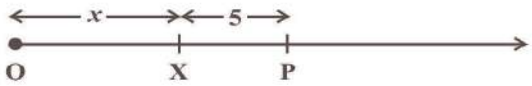
पिछली कक्षाओं में हम बीजीय व्यंजकों (अथवा केवल व्यंजकों) के बारे में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। $x + 3$, $2y - 5$, $3x^2$, $4xy + 7$ इत्यादि व्यंजकों के उदाहरण हैं।

आप और अधिक व्यंजक बना सकते हैं। जैसा कि आप जानते हैं व्यंजकों का निर्माण चरों एवं अचरों की सहायता से होता है। व्यंजक $2x + 3$ को चर x एवं अचरों 2 तथा 3 से बनाया गया है। व्यंजक $4xy + 7$ को चरों x तथा y एवं अचरों 4 तथा 7 से बनाया गया है।

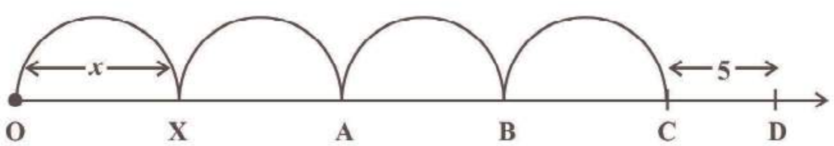
हम जानते हैं कि व्यंजक $2y - 5$ में y का मान कुछ भी हो सकता है। यह $2, 5, -3, 0, \frac{5}{2}, \frac{-7}{3}$ इत्यादि हो सकता है। वास्तव में y के असंख्य विभिन्न मान हो सकते हैं। व्यंजक के चर का मान बदलने पर व्यंजक का मान बदल जाता है। इस प्रकार y को विभिन्न मान देने पर $2y - 5$ का मान बदलता जाता है। जब $y = 2$, $2y - 5 = 2\,(2) - 5 = -1$, जब $y = 0$, $2y - 5 = 2 \times 0 - 5 = -5$ इत्यादि। y के कुछ अन्य दिए हुए मानों के लिए व्यंजक $2y - 5$ के मान ज्ञात कीजिए।

संख्या रेखा और व्यंजक

व्यंजक $x + 5$ की चर्चा करते हैं। आइए, मान लेते हैं कि संख्या रेखा पर चर x की स्थिति X है।



X, संख्या रेखा पर कहीं भी हो सकता है परंतु यह निश्चित है कि $x + 5$ का मान, x के दाईं तरफ़ 5 इकाई की दूरी पर बिंदु P से निरूपित किया जाएगा। इसी प्रकार, $x - 4$ का मान X के बाईं तरफ़ 4 इकाई की दूरी पर होगा। $4x$ एवं $4x + 5$ की स्थिति के बारे में क्या कहा जा सकता है?



$4x$ की स्थिति बिंदु C पर होगी। मूल बिंदु से C की दूरी X की दूरी से चार गुना होगी। $4x + 5$ की स्थिति D, C के दाईं तरफ़ 5 इकाई की दूरी पर होगी।

प्रयास कीजिए

- एक चर वाले और दो चरों वाले व्यंजकों के पाँच-पाँच उदाहरण दीजिए।
- $x, x - 4, 2x + 1, 3x - 2$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

9.2 पद, गुणनखंड एवं गुणांक

व्यंजक $4x + 5$ को लीजिए। यह व्यंजक $4x$ एवं 5 दो पदों से बना हुआ है। **पदों को जोड़कर व्यंजक बनाया जाता है। पद स्वयं भी गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में बनाए जा सकते हैं।** पद $4x$ अपने गुणनखंडों 4 एवं x का गुणनफल है। पद 5 केवल एक गुणनखंड 5 से बना हुआ है। क्योंकि -5 यह एक सांख्यिक पद है।

व्यंजक $7xy - 5x$ के दो पद $7xy$ एवं $-5x$ हैं। पद $7xy$ गुणनखंडों 7, x एवं y का गुणनफल है। किसी पद का संख्यात्मक गुणनखंड उसका **संख्यात्मक गुणांक (Numerical Coefficient) या गुणांक** कहलाता है। पद $7xy$ का गुणांक 7 है और पद $-5x$ का गुणांक -5 है।

प्रयास कीजिए

व्यंजक $x^2y^2 - 10x^2y + 5xy^2 - 20$ के प्रत्येक पद के गुणांक को पहचानिए।

9.3 एकपदी, द्विपद एवं बहुपद

जिस व्यंजक में केवल एक पद होता है उसे **एकपदी** कहते हैं। दो पदों वाला व्यंजक **द्विपद** कहलाता है। तीन पदों वाले व्यंजक को **त्रिपद** कहते हैं और इसी प्रकार अन्य। व्यापकत: एक अथवा अधिक पदों वाला व्यंजक जिसके गुणांक शून्येतर हों और जिसके चरों की घात ऋणेतर पूर्णांक हों, **बहुपद** कहलाता है। बहुपद के पदों की संख्या एक अथवा एक से अधिक कुछ भी हो सकती है।

एकपद के उदाहरण : $4x^2, 3xy, -7z, 5xy^2, 10y, -9, 82mnp$ इत्यादि।

द्विपद के उदाहरण : $a + b, 4l + 5m, a + 4, 5 - 3xy, z^2 - 4y^2$ इत्यादि।

त्रिपद के उदाहरण : $a + b + c, 2x + 3y - 5, x^2y - xy^2 + y^2$ इत्यादि।

बहुपद के उदाहरण : $a + b + c + d, 3xy, 7xyz - 10, 2x + 3y + 7z + 10$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित बहुपदों को एकपद, द्विपद एवं त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए :
   $-z + 5, x + y + z, y + z + 100, ab - ac, 17$
2. बनाइए :
   (a) तीन ऐसे द्विपद जिनमें केवल एक चर x हो।
   (b) तीन ऐसे द्विपद जिनमें x और y चर हों।
   (c) तीन एकपद जिनमें x और y चर हों।
   (d) चार अथवा अधिक पदों वाले 2 बहुपद।

9.4 समान एवं असमान पद

निम्नलिखित व्यंजकों को देखिए :

$7x, 14x, -13x, 5x^2, 7y, 7xy, -9y^2, -9x^2, -5yx$

इनमें समान पद इस प्रकार है :

(i) $7x, 14x,$ एवं $-13x$ (ii) $5x^2$ एवं $-9x^2$

(iii) $7xy$ एवं $-5yx$

$7x$ एवं $7y$ समान पद क्यों नहीं हैं?

$7x$ एवं $7xy$ समान पद क्यों नहीं हैं?

$7x$ एवं $5x^2$ समान पद क्यों नहीं हैं?

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से प्रत्येक के दो समान पद लिखिए :

(i) $7xy$ (ii) $4mn^2$ (iii) $2l$

9.5 बीजीय व्यंजकों का योग एवं व्यवकलन

पिछली कक्षाओं में हमने यह भी सीखा है कि बीजीय व्यंजकों को कैसे जोड़ा और घटाया जाता है, उदाहरणार्थ $7x^2 - 4x + 5$ एवं $9x - 10$, को जोड़ने के लिए हम इस प्रकार करते हैं :

$$\begin{array}{r} 7x^2 - 4x + 5 \\ + \qquad 9x - 10 \\ \hline 7x^2 + 5x - 5 \end{array}$$

विचार कीजिए कि हम योगफल कैसे ज्ञात करते हैं। जोड़े जाने वाले प्रत्येक व्यंजक को हम विभिन्न पंक्तियों में लिखते हैं। ऐसा करते समय हम समान पदों को एक दूसरे के ऊपर-नीचे लिखते हैं और, जैसा ऊपर दर्शाया गया है, हम उन समान पदों को जोड़ते हैं। अत: $5 + (-10) + 5 - 10 = -5$ इसी प्रकार, $-4x + 9x = (-4 + 9)x = 5x$. आइए कुछ और उदाहरण हल करते हैं।

उदाहरण 1 : $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9zx - 4y$, $-3xz + 5x - 2xy$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : समान पदों को एक दूसरे के ऊपर-नीचे रखकर तीन व्यंजकों को विभिन्न पंक्तियों में लिखते हुए, हम प्राप्त करते हैं :

$$\begin{array}{lccccc} & 7xy & + 5yz & -3zx & & \\ + & & 4yz & + 9zx & & -4y \\ + & -2xy & & -3zx & +5x & \\ \hline & 5xy & + 9yz & +3zx & +5x & -4y \end{array}$$

(ध्यान दीजिए xz और zx एक समान हैं)

इस प्रकार व्यंजकों का योग $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$ है। ध्यान दीजिए दूसरे व्यंजक के पद $-4y$ और तीसरे व्यंजक के पद $5x$ को योगफल में वैसे ही लिखा गया है जैसे वे हैं क्योंकि दूसरे व्यंजकों में उनका कोई समान पद नहीं है।

उदाहरण 2 : $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$ में से $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ को घटाइए।

हल :

$$\begin{array}{cccccc} 7x^2 & - 4xy & + 8y^2 & + 5x & - 3y & \\ 5x^2 & & - 4y^2 & & + 6y & - 3 \\ (-) & & (+) & & (-) & (+) \\ \hline 2x^2 & - 4xy & + 12y^2 & + 5x & - 9y & + 3 \end{array}$$

नोट किसी संख्या का घटाना उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ने के समान है। इस प्रकार -3 को घटाना, $+3$ को जोड़ने के समान है, इसी प्रकार $6y$ को घटाना, $-6y$ को जोड़ने जैसा है। $-4y^2$ को घटाना $4y^2$ को जोड़ने के समान है और इसी प्रकार अन्य दूसरी पंक्ति के प्रत्येक पद के नीचे तीसरी पंक्ति में लिखे चिह्न से यह जानने में सहायता मिलती है कि कौन सी संक्रिया की जाती हैं।

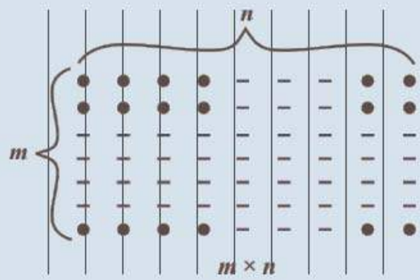
प्रश्नावली 9.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक के पदों एवं गुणांकों को पहचानिए :
   (i) $5xyz^2 - 3zy$ (ii) $1 + x + x^2$ (iii) $4x^2y^2 - 4x^2y^2z^2 + z^2$
   (iv) $3 - pq + qr - rp$ (v) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - xy$ (vi) $0.3a - 0.6ab + 0.5b$
2. निम्नलिखित बहुपदों को एकपदी, द्विपद एवं त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए। कौन-सा बहुपद इन तीन श्रेणियों में से किसी में भी नहीं है?
   $x + y$, 1000, $x + x^2 + x^3 + x^4$, $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$, $4z - 15z^2$, $ab + bc + cd + da$, pqr, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$
3. निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :
   (i) $ab - bc$, $bc - ca$, $ca - ab$ (ii) $a - b + ab$, $b - c + bc$, $c - a + ac$
   (iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4$, $5 + 7pq - 3p^2q^2$ (iv) $l^2 + m^2$, $m^2 + n^2$, $n^2 + l^2$, $2lm + 2mn + 2nl$
4. (a) $12a - 9ab + 5b - 3$ में से $4a - 7ab + 3b + 12$ को घटाइए।
   (b) $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$ में से $3xy + 5yz - 7zx$ को घटाइए।
   (c) $18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$ में से $4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ को घटाइए।

9.6 बीजीय व्यंजकों का गुणन

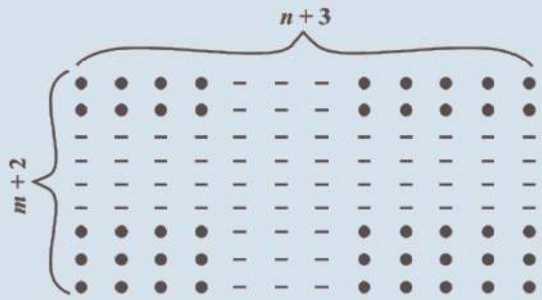
(i) बिंदुओं के निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

बिंदुओं के प्रतिरूप	बिंदुओं की कुल संख्या
	4×9
	5×7



$m \times n$

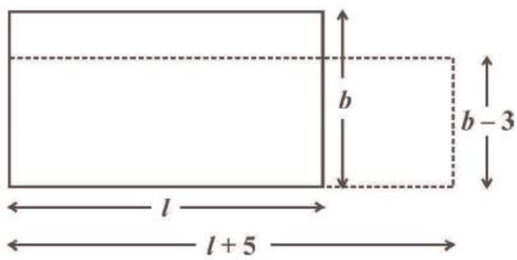
बिंदुओं की संख्या ज्ञात करने के लिए हमें पंक्तियों की संख्या के व्यंजक को स्तंभों की संख्या के व्यंजक से गुणा करना है।



$(m + 2) \times (n + 3)$

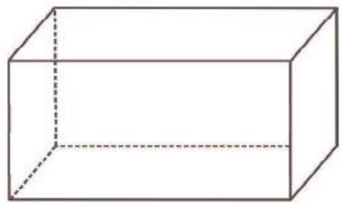
यहाँ पंक्तियों की संख्या 2 बढ़ाई गई है, अर्थात् $m + 2$ और स्तंभों की संख्या 3 बढ़ाई गई है, अर्थात् $n + 3$

(ii) क्या आप ऐसी और परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें दो बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ता हो? अमीना उठकर कहती है। "हम आयत के क्षेत्रफल के बारे में सोच सकते हैं।" आयत का क्षेत्रफल $l \times b$, हैं जिसमें l लंबाई है और b चौड़ाई है। यदि आयत की लंबाई 5 इकाई बढ़ा दी जाए, अर्थात्, $(l + 5)$ कर दी जाए और चौड़ाई 3 इकाई कम कर दी जाए अर्थात् $(b - 3)$ कर दी जाए तो आयत का क्षेत्रफल $(l + 5) \times (b - 3)$ होगा।



आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें $l \times b$ अथवा $(l + 5) \times (b - 3)$ के रूप के बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ता है।

(iii) क्या आप आयतन के बारे में सोच सकते हैं? (एक आयताकार बक्से का आयतन उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल से प्राप्त होता है।)



(iv) सरिता कहती है कि जब हम वस्तुएँ खरीदते हैं तो हमें गुणा करना पड़ता है। उदाहरणार्थ यदि प्रति दर्जन केलों का मूल्य p रुपये है और स्कूल पिकनिक के लिए z दर्जन केलों की आवश्यकता है, तो हमें $(p \times z)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ेगा।

मान लीजिए, प्रति दर्जन केलों का मूल्य 2 रुपये कम होता और पिकनिक के लिए 4 दर्जन कम केलों की आवश्यकता होती तो, प्रति दर्जन केलों का मूल्य $(p-2)$ रुपये होता और $(z - 4)$ दर्जन केलों की आवश्यकता होती। इसलिए, हमें $(p - 2) \times (z - 4)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ता है।

प्रयास कीजिए

क्या आप ऐसी और दो परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं जहाँ हमें बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ सकता है?

[**नोट :** • चाल और समय के बारे में सोचिए।

• साधारण ब्याज, मूलधन और साधारण ब्याज की दर इत्यादि के बारे में सोचिए।]

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में हमने दो अथवा अधिक राशियों का गुणन किया है। यदि राशियाँ बीजीय व्यंजकों के रूप में दी हुई हैं और हमें उनका गुणनफल ज्ञात करना है तो इसका अर्थ यह हुआ कि हमें यह जानना चाहिए कि यह गुणनफल कैसे प्राप्त किया जाए। आइए, इसे क्रमानुसार करते हैं। सबसे पहले हम दो एकपदियों का गुणन करते हैं।

9.7 एकपदी को एकपदी से गुणा करना

9.7.1 दो एकपदियों को गुणा करना

हम प्रारंभ करते हैं

$4 \times x = x + x + x + x = 4x$ से जो पहले सीख चुके हैं।

इसी प्रकार, $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

अब निम्नलिखित गुणनफलों पर विचार कीजिए :

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

ध्यान दीजिए एकपदियों के तीनों गुणनफल $3xy$, $15xy$, $-15xy$ भी एकपदी हैं।

कुछ और उपयोगी उदाहरण इस प्रकार हैं :

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

नोट कीजिए : $5 \times 4 = 20$

अर्थात्, गुणनफल का गुणांक = प्रथम एकपदी का गुणांक × द्वितीय एकपदी का गुणांक और

$x \times x^2 = x^3$

अर्थात्, गुणनफल का बीजीय गुणनखंड = प्रथम एकपदी का बीजीय गुणनखंड × द्वितीय एकपदी का बीजीय गुणनखंड।

ध्यान दीजिए कि हमने दोनों एकपदियों के बीजीय भागों के विभिन्न चरों की घातों को कैसे इकट्ठा किया है। ऐसा करने के लिए हमने घातों के नियमों का उपयोग किया है।

9.7.2 तीन अथवा अधिक एकपदियों को गुणा करना

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$

$= 120\,(x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

यह स्पष्ट है कि हम सर्वप्रथम पहले दो एकपदियों को गुणा करते हैं और इस प्रकार गुणनफल के रूप में प्राप्त एकपदी को तीसरे एकपदी से गुणा करते हैं। बहुसंख्य एकपदियों को गुणा करने के लिए इस विधि का विस्तार किया जा सकता है।

प्रयास कीजिए

$4x \times 5y \times 7z$ ज्ञात कीजिए :
सर्वप्रथम $4x \times 5y$ ज्ञात कीजिए और फिर उसे $7z$ से गुणा कीजिए, अथवा सर्वप्रथम $5y \times 7z$ ज्ञात कीजिए और इसे $4x$ से गुणा कीजिए। क्या परिणाम एक जैसा है? आप क्या विचार करते हैं? क्या गुणा करते समय क्रम का महत्त्व है?

हम दूसरे तरीके से भी इस गुणनफल को ज्ञात कर सकते हैं : $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3$
$= (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3) = 120\, x^6y^6$

उदाहरण 3 : एक आयत के, जिसकी लंबाई और चौड़ाई दी हुई है, क्षेत्रफल की सारणी को पूरा कीजिए :

हल :

लंबाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
$2l^2m$	$3lm^2$	....

उदाहरण 4 : निम्नलिखित सारणी में तीन आयताकार बक्सों की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई दी हुई हैं। प्रत्येक का आयतन ज्ञात कीजिए :

	लंबाई	चौड़ाई	ऊँचाई	घनफल
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$	....
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m	....
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$	....

हल : आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

अत: (i) आयतन $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$
$= 2 \times 3 \times 5 \times (ax) \times (by) \times (cz) = 30abcxyz$

(ii) आयतन $= m^2n \times n^2p \times p^2m$
$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2) = m^3n^3p^3$

(iii) आयतन $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$
$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3 = 64q^6$

प्रश्नावली 9.2

1. निम्नलिखित एकपदी युग्मों का गुणनफल ज्ञात कीजिए :
   (i) $4, 7p$ (ii) $-4p, 7p$ (iii) $-4p, 7pq$ (iv) $4p^3, -3p$
   (v) $4p, 0$
2. निम्नलिखित एकपदी युग्मों के रूप में लंबाई एवं चौड़ाई रखने वाले आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
   (p, q); $(10m, 5n)$; $(20x^2, 5y^2)$; $(4x, 3x^2)$; $(3mn, 4np)$

3. गुणनफलों की सारणी को पूरा कीजिए :

प्रथम एकपदी → द्वितीय एकपदी ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	...	...	...	...	...
$-5y$	...	...	$-15x^2y$	...	...	...
$3x^2$	...	...	...	...	...	...
$-4xy$	...	...	...	...	...	...
$7x^2y$	...	...	...	...	...	...
$-9x^2y^2$	...	...	...	...	...	...

4. ऐसे घना आकार बक्सों का आयतन ज्ञात कीजिए जिनकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः निम्नलिखित हैं :

(i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$ (iii) $xy, 2x^2y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$

5. निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$ (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$
(iv) $a, 2b, 3c, 6abc$ (v) $m, -mn, mnp$

9.8 एकपदी को बहुपद से गुणा करना

9.8.1 एकपदी को द्विपद से गुणा करना

आइए, एकपदी $3x$ को द्विपद $5y + 2$ से गुणा करते हैं, अर्थात्, $3x \times (5y + 2)$ ज्ञात करते हैं। स्मरण कीजिए कि $3x$ और $(5y + 2)$ संख्याओं को निरूपित करते हैं। इसलिए विवरण के नियम का उपयोग करते हुए, $3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$

हम सामान्यतः अपने परिकलनों में वितरण के नियम का उपयोग करते हैं। उदाहरणार्थ

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$
$= 7 \times 100 + 7 \times 6$ (यहाँ हमने वितरण नियम का उपयोग किया है।)
$= 700 + 42 = 742$
$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$
$= 7 \times 40 - 7 \times 2$ (यहाँ हमने वितरण नियम का उपयोग किया है।)
$= 280 - 14 = 266$

इसी प्रकार, $(-3x) \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

और $5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy.$

द्विपद एवं एकपदी के गुणनफल के बारे में आपका क्या विचार है? उदाहरणार्थ $(5y + 2) \times 3x = ?$ हम $7 \times 3 = 3 \times 7$; अथवा व्यापक रूप से $a \times b = b \times a$ के रूप में क्रमविनिमेय नियम का उपयोग कर सकते हैं।

इसी प्रकार $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2) = 15xy + 6x$ है।

प्रयास कीजिए

गुणनफल ज्ञात कीजिए : (i) $2x\,(3x + 5xy)$ (ii) $a^2\,(2ab - 5c)$

9.8.2 एकपदी को त्रिपद से गुणा करना

$3p \times (4p^2 + 5p + 7)$ लीजिए। पहले की तरह हम वितरण नियम का उपयोग कर सकते हैं।

$$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$$
$$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$$

त्रिपद के प्रत्येक पद को एकपदी से गुणा कीजिए और गुणनफल को जोड़ दीजिए।

> विचार कीजिए वितरण नियम के उपयोग से हम एक पद का एक पद के साथ गुणन करने में सक्षम हैं।

प्रयास कीजिए

$(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 5 : व्यंजकों को सरल कीजिए और निर्देशानुसार मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x\,(x - 3) + 2$; $x = 1$ के लिए (ii) $3y\,(2y - 7) - 3\,(y - 4) - 63$; $y = -2$ के लिए

हल :

(i) $x\,(x - 3) + 2 = x^2 - 3x + 2$

$x = 1$ के लिए, $x^2 - 3x + 2 = (1)^2 - 3\,(1) + 2$

$= 1 - 3 + 2 = 3 - 3 = 0$

(ii) $3y(2y - 7) - 3\,(y - 4) - 63 = 6y^2 - 21y - 3y + 12 - 63$

$= 6y^2 - 24y - 51$

$y = -2$ के लिए, $6y^2 - 24y - 51 = 6\,(-2)^2 - 24(-2) - 51$

$= 6 \times 4 + 24 \times 2 - 51$

$= 24 + 48 - 51 = 72 - 51 = 21$

उदाहरण 6 : जोड़िए :

(i) $5m\,(3 - m)$ एवं $6m^2 - 13m$ (ii) $4y\,(3y^2 + 5y - 7)$ एवं $2\,(y^3 - 4y^2 + 5)$

हल :

(i) प्रथम व्यंजक $5m\,(3 - m) = (5m \times 3) - (5m \times m) = 15m - 5m^2$

अब द्वितीय व्यंजक जोड़ने पर $15m - 5m^2 + 6m^2 - 13m = m^2 + 2m$

(ii) प्रथम व्यंजक $= 4y\,(3y^2 + 5y - 7) = (4y \times 3y^2) + (4y \times 5y) + (4y \times (-7))$

$= 12y^3 + 20y^2 - 28y$

द्वितीय व्यंजक $= 2\,(y^3 - 4y^2 + 5) = 2y^3 + 2 \times (-4y^2) + 2 \times 5$

$= 2y^3 - 8y^2 + 10$

दोनों व्यंजकों को जोड़ने पर

$$\begin{array}{rrrrr} & 12y^3 & + & 20y^2 - 28y & \\ + & 2y^3 & - & 8y^2 & + 10 \\ \hline & 14y^3 & + & 12y^2 - 28y & + 10 \end{array}$$

उदाहरण 7 : $2pq\,(p+q)$ में से $3pq\,(p-q)$ को घटाइए।

हल : हम प्राप्त करते हैं $3pq\,(p-q) = 3p^2q - 3pq^2$ और

$$2pq\,(p+q) = 2p^2q + 2pq^2$$

घटाने पर

$$\begin{array}{rcr} 2p^2q & + & 2pq^2 \\ 3p^2q & - & 3pq^2 \\ - & + & \\ \hline -p^2q & + & 5pq^2 \end{array}$$

प्रश्नावली 9.3

1. निम्नलिखित युग्मों में प्रत्येक के व्यंजकों का गुणन कीजिए :

(i) $4p,\ q+r$ (ii) $ab,\ a-b$ (iii) $a+b,\ 7a^2b^2$ (iv) $a^2-9,\ 4a$

(v) $pq+qr+rp,\ 0$

2. सारणी पूरा कीजिए :

	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	गुणनफल
(i)	a	$b+c+d$	—
(ii)	$x+y-5$	$5xy$	—
(iii)	p	$6p^2-7p+5$	—
(iv)	$4p^2q^2$	p^2-q^2	—
(v)	$a+b+c$	abc	—

3. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(a^2)\times(2a^{22})\times(4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right)\times\left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

(iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right)\times\left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x\times x^2\times x^3\times x^4$

4. (a) $3x\,(4x-5)+3$ को सरल कीजिए और (i) $x=3$ एवं (ii) $x=\frac{1}{2}$ के लिए इसका मान ज्ञात कीजिए।

(b) $a\,(a^2+a+1)+5$ को सरल कीजिए और (i) $a=0$, (ii) $a=1$ एवं (iii) $a=-1$ के लिए इसका मान ज्ञात कीजिए।

5. (a) $p\,(p-q),\ q\,(q-r)$ एवं $r\,(r-p)$ को जोड़िए।

(b) $2x\,(z-x-y)$ एवं $2y\,(z-y-x)$ को जोड़िए।

(c) $4l\,(10n-3m+2l)$ में से $3l\,(l-4m+5n)$ को घटाइए।

(d) $4c\,(-a+b+c)$ में से $3a\,(a+b+c)-2b\,(a-b+c)$ को घटाइए।

9.9 बहुपद को बहुपद से गुणा करना

9.9.1 द्विपद को द्विपद से गुणा करना

आइए, एक द्विपद $(2a + 3b)$ को दूसरे द्विपद $(3a + 4b)$ से गुणा करते हैं। जैसा कि हमने पहले किया है, वैसे ही गुणन के वितरण नियम का अनुसरण करते हुए हम इसे भी क्रम से करते हैं;

$$(3a + 4b) \times (2a + 3b) = 3a \times (2a + 3b) + 4b \times (2a + 3b)$$
$$= (3a \times 2a) + (3a \times 3b) + (4b \times 2a) + (4b \times 3b)$$
$$= 6a^2 + 9ab + 8ba + 12b^2$$
$$= 6a^2 + 17ab + 12b^2 \qquad \text{(क्योंकि } ba = ab \text{ है।)}$$

> ध्यान दीजिए एक द्विपद का प्रत्येक पद दूसरे द्विपद के प्रत्येक पद से गुणा होता है।

जब हम एक द्विपद का एक द्विपद के साथ गुणन करते हैं, तो हम आशा करते हैं कि $2 \times 2 = 4$ पद उपस्थित होने चाहिए परंतु इनमें से दो पद समान हैं जिनको एक साथ इकट्ठा कर दिया है और इस प्रकार हमें 3 पद प्राप्त होते हैं।

बहुपद को बहुपद से गुणा करते समय हमें समान पदों को ढूँढ़ लेना चाहिए और उन्हें मिला लेना चाहिए।

उदाहरण 8 : गुणा कीजिए :

(i) $(x - 4)$ एवं $(2x + 3)$ को (ii) $(x - y)$ एवं $(3x + 5y)$ को

हल :

(i) $(x - 4) \times (2x + 3) = x \times (2x + 3) - 4 \times (2x + 3)$
$$= (x \times 2x) + (x \times 3) - (4 \times 2x) - (4 \times 3) = 2x^2 + 3x - 8x - 12$$
$$= 2x^2 - 5x - 12 \qquad \text{(समान पदों को जोड़ने पर)}$$

(ii) $(x - y) \times (3x + 5y) = x \times (3x + 5y) - y \times (3x + 5y)$
$$= (x \times 3x) + (x \times 5y) - (y \times 3x) - (y \times 5y)$$
$$= 3x^2 + 5xy - 3yx - 5y^2 = 3x^2 + 2xy - 5y^2 \qquad \text{(समान पदों को जोड़ने पर)}$$

उदाहरण 9 : गुणा कीजिए :

(i) $(a + 7)$ और $(b - 5)$ को (ii) $(a^2 + 2b^2)$ और $(5a - 3b)$ को

हल :

(i) $(a + 7) \times (b - 5) = a \times (b - 5) + 7 \times (b - 5)$
$$= ab - 5a + 7b - 35$$

नोट कीजिए कि इस गुणन में कोई भी समान पद नहीं हैं।

(ii) $(a^2 + 2b^2) \times (5a - 3b) = a^2 (5a - 3b) + 2b^2 \times (5a - 3b)$
$$= 5a^3 - 3a^2b + 10ab^2 - 6b^3$$

9.9.2 द्विपद को त्रिपद से गुणा करना

इस गुणन में हमें त्रिपद के प्रत्येक पद को द्विपद के प्रत्येक पद से गुणा करना पड़ेगा। इस प्रकार हमें $3 \times 2 = 6$ पद प्राप्त होंगे, यदि एक पद को एक पद से गुणा करने पर समान पद बनते हैं, तो प्राप्त पदों की संख्या घटकर पाँच या उससे भी कम हो सकती है।

$$\underbrace{(a+7)}_{\text{द्विपद}} \times \underbrace{(a^2+3a+5)}_{\text{त्रिपद}} = a \times (a^2+3a+5) + 7 \times (a^2+3a+5)$$ वितरण नियम के उपयोग से

$$= a^3 + 3a^2 + 5a + 7a^2 + 21a + 35$$
$$= a^3 + (3a^2 + 7a^2) + (5a + 21a) + 35$$
$$= a^3 + 10a^2 + 26a + 35$$ (अंतिम परिणाम में केवल 4 पद ही क्यों हैं?)

उदाहरण 10 : सरल कीजिए : $(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c$

हल : हम प्राप्त करते हैं :

$$(a + b)(2a - 3b + c) = a(2a - 3b + c) + b(2a - 3b + c)$$
$$= 2a^2 - 3ab + ac + 2ab - 3b^2 + bc$$
$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac$$

(ध्यान दीजिए $-3ab$ एवं $2ab$ समान पद हैं।)

और $(2a - 3b)c = 2ac - 3bc$ है।

इसलिए, $(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c = 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - (2ac - 3bc)$

$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - 2ac + 3bc$$
$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + (bc + 3bc) + (ac - 2ac)$$
$$= 2a^2 - 3b^2 - ab + 4bc - ac$$

प्रश्नावली 9.4

1. द्विपदों को गुणा कीजिए :

(i) $(2x + 5)$ और $(4x - 3)$ (ii) $(y - 8)$ और $(3y - 4)$

(iii) $(2.5l - 0.5m)$ और $(2.5l + 0.5m)$ (iv) $(a + 3b)$ और $(x + 5)$

(v) $(2pq + 3q^2)$ और $(3pq - 2q^2)$

(vi) $\left(\frac{3}{4}a^2 + 3b^2\right)$ और $4\left(a^2 - \frac{2}{3}b^2\right)$

2. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(5 - 2x)(3 + x)$ (ii) $(x + 7y)(7x - y)$

(iii) $(a^2 + b)(a + b^2)$ (iv) $(p^2 - q^2)(2p + q)$

3. सरल कीजिए :

(i) $(x^2 - 5)(x + 5) + 25$ (ii) $(a^2 + 5)(b^3 + 3) + 5$

(iii) $(t + s^2)(t^2 - s)$

(iv) $(a + b)(c - d) + (a - b)(c + d) + 2(ac + bd)$

(v) $(x + y)(2x + y) + (x + 2y)(x - y)$ (vi) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(vii) $(1.5x - 4y)(1.5x + 4y + 3) - 4.5x + 12y$

(viii) $(a + b + c)(a + b - c)$

9.10 सर्वसमिका क्या है?

समिका $(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$ को लीजिए। a के किसी मान $a = 10$ के लिए हम इस समिका के दोनों पक्षों का मान ज्ञात करेंगे।

$a = 10$ के लिए बायाँ पक्ष LHS $= (a + 1)(a + 2) = (10 + 1)(10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

दायाँ पक्ष RHS $= a^2 + 3a + 2 = 10^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

अतः $a = 10$ के लिए समिका के दोनों पक्षों के मान समान हैं।

आइए अब $a = -5$ लेते हैं।

$$\text{LHS} = (a + 1)(a + 2) = (-5 + 1)(-5 + 2) = (-4) \times (-3) = 12$$

$$\text{RHS} = a^2 + 3a + 2 = (-5)^2 + 3(-5) + 2$$
$$= 25 - 15 + 2 = 10 + 2 = 12$$

अतः $a = -5$ के लिए, भी LHS = RHS है।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं कि a के किसी भी मान के लिए, इस समिका का LHS = RHS है। **ऐसी समिका जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, सर्वसमिका कहलाती है।** इस प्रकार $(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$ एक सर्वसमिका है।

एक समीकरण अपने चर के केवल कुछ निश्चित मानों के लिए ही सत्य होता है, यह चर के सभी मानों के लिए सत्य नहीं होता है। उदाहरणार्थ समीकरण $a^2 + 3a + 2 = 132$ की चर्चा कीजिए। यह समीकरण $a = 10$ के लिए सत्य है जैसा कि हम उपर्युक्त पंक्तियों में देख चुके हैं। परंतु $a = -5$ अथवा $a = 0$ इत्यादि के लिए यह सत्य नहीं है।

दर्शाइए कि $a^2 + 3a + 2 = 132$, $a = -5$ एवं $a = 0$ के लिए सत्य नहीं है।

9.11 मानक सर्वसमिकाएँ

अब हम ऐसी तीन सर्वसमिकाओं के बारे में अध्ययन करेंगे जो बहुत उपयोगी हैं। एक द्विपद को दूसरे द्विपद से गुणा करते हुए इन सर्वसमिकाओं को प्राप्त किया जाता है।

सर्वप्रथम हम गुणनफल $(a + b)(a + b)$ अथवा $(a + b)^2$ के बारे में चर्चा करते हैं।

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a(a + b) + b(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \qquad (\text{क्योंकि } ab = ba)$$

अतः $$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \text{(I)}$$

स्पष्टतः यह एक सर्वसमिका है क्योंकि वास्तविक गुणन द्वारा LHS से RHS प्राप्त किया गया है। आप सत्यापित कर सकते हैं कि a तथा b के किसी भी मान के लिए, सर्वसमिका के दोनों पक्षों के मान समान हैं।

- इसके पश्चात् हम गुणनफल $(a - b)(a - b)$ अथवा $(a - b)^2$ के बारे में चर्चा करते हैं।

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b)$$
$$= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

अथवा $$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad \text{(II)}$$

- अंतत: $(a+b)(a-b)$ पर विचार करते हैं।

  हमें प्राप्त है : $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$

  $$= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \text{ (क्योंकि } ab = ba)$$

  अथवा $$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2} \qquad \text{(III)}$$

सर्वसमिका (I), (II) और (III) **मानक सर्वसमिकाएँ** कहलाती हैं।

प्रयास कीजिए

1. सर्वसमिका (I) में b के स्थान पर $-b$ रखिए। क्या आपको सर्वसमिका (II) प्राप्त होती है?

- अब हम एक और अधिक उपयोगी सर्वसमिका का अध्ययन करते हैं।

  $$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$$
  $$= x^2 + bx + ax + ab$$
  $$= x^2 + (b+a)x + ab$$

  अथवा $$\boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab} \qquad \text{(IV)}$$

प्रयास कीजिए

1. $a = 2, b = 3, x = 5$ के लिए सर्वसमिका (IV) का सत्यापन कीजिए।
2. सर्वसमिका (IV) में $a = b$ लेने पर, आप क्या प्राप्त करते हैं? क्या यह सर्वसमिका (I) से संबंधित है?
3. सर्वसमिका (IV) में $a = -c$ तथा $b = -c$ लेने पर, आप क्या प्राप्त करते हैं? क्या यह सर्वसमिका (II) से संबंधित हैं?
4. सर्वसमिका (IV) में $b = -a$ लीजिए। आप क्या पाते हैं? क्या यह सर्वसमिका (III) से संबंधित है?

हम देख सकते हैं कि सर्वसमिका (IV) अन्य तीनों सर्वसमिकाओं का व्यापक रूप है।

9.12 सर्वसमिकाओं का उपयोग

अब हम देखेंगे कि सर्वसमिकाओं का उपयोग द्विपद व्यंजकों के गुणन और संख्याओं के गुणन के लिए भी साधारण वैकल्पिक विधि प्रदान करता है।

उदाहरण 11 : सर्वसमिका (I) का उपयोग करते हुए (i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 103^2 ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) $$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \qquad \text{[सर्वसमिका (I) के उपयोग से]}$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

हम $(2x + 3y)^2$ का मान सीधे ज्ञात कर सकते हैं :

$$(2x+3y)^2 = (2x+3y)(2x+3y)$$
$$= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)$$

$$= 4x^2 + 6xy + 6\,yx + 9y^2 \qquad \text{(क्योंकि } xy = yx)$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2 \qquad \text{(क्योंकि } xy = yx)$$

सर्वसमिका (I) के उपयोग से हम $(2x + 3y)$ का वर्ग करने की वैकल्पिक विधि प्राप्त करते हैं। क्या आपने ध्यान दिया कि उपर्युक्त सीधी विधि की तुलना में सर्वसमिका विधि के चरणों की संख्या कम है? आप इस विधि की सरलता तब अधिक महसूस करेंगे जब आप $(2x + 3y)$ की तुलना में अधिक जटिल द्विपद व्यंजकों का वर्ग करने का प्रयत्न करेंगे।

(ii) $(103)^2 = (100 + 3)^2$

$= (100)^2 + 2(100)(3) + (3)^2$ [नित्यसम (I) का उपयोग करने पर]

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

हम 103 को 103 से सीधे भी गुणा करके वांछित उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। क्या आपने ध्यान दिया कि 103 का सीधी विधि से वर्ग करने की तुलना में सर्वसमिका (I) ने हमें सरल विधि प्रदान की है? 1013 का वर्ग करने का प्रयत्न कीजिए। आप इस स्थिति में भी सीधे गुणन विधि की तुलना में सर्वसमिकाओं के उपयोग की विधि को अधिक सरल पाएँगे।

उदाहरण 12 : सर्वसमिका (II) के उपयोग से (i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) $(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2\,(4p)\,(3q) + (3q)^2$ [सर्वसमिका (II) के उपयोग से]

$= 16p^2 - 24pq + 9q^2$

क्या आप सहमत हैं कि $(4p - 3q)^2$ का वर्ग करने के लिए सीधी विधि की तुलना में सर्वसमिकाओं की विधि ज़्यादा उबाने वाली है?

(ii) $(4.9)^2 = (5.0 - 0.1)^2 = (5.0)^2 - 2\,(5.0)\,(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01$

= 24ण00 + 0ण01 = 24ण01

क्या 4.9 का वर्ग करना, सीधी गुणन विधि की तुलना में सर्वसमिका (II) की सहायता से सरल नहीं है?

उदाहरण 13 : सर्वसमिका (III) का उपयोग करते हुए,

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right)$ (ii) $983^2 - 17^2$ (iii) 194×206 ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right) = \left(\frac{3}{2}m\right)^2 - \left(\frac{2}{3}n\right)^2$

$$= \frac{9}{4}m^2 - \frac{4}{9}n^2$$

इसको सीधे करने का प्रयास कीजिए। आप महसूस करेंगे कि हमारी सर्वसमिका (III) के उपयोग की विधि कितनी आसान है।

(ii) $983^2 - 17^2 = (983 + 17)\,(983 - 17)$

[यहाँ $a = 983$, $b = 17$, $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$]

इसलिए, $983^2 - 17^2 = 1000 \times 966 = 966000$

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6) = 200^2 - 6^2$

$= 40000 - 36 = 39964$

उदाहरण 14 : निम्नलिखित को ज्ञात करने के लिए, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ सर्वसमिका का उपयोग कीजिए।

(i) 501×502 (ii) 95×103

हल :

(i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2) = 500^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$
$= 250000 + 1500 + 2 = 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3) = 100^2 + (-5 + 3)\,100 + (-5) \times 3$
$= 10000 - 200 - 15 = 9785$

प्रश्नावली 9.5

1. निम्नलिखित गुणनफलों में से प्रत्येक को प्राप्त करने के लिए उचित सर्वसमिका का उपयोग कीजिए :

   (i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$ (iii) $(2a - 7)(2a - 7)$

   (iv) $(3a - \frac{1}{2})(3a - \frac{1}{2})$ (v) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$

   (vi) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$ (vii) $(6x - 7)(6x + 7)$ (viii) $(-a + c)(-a + c)$

   (ix) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a - 9b)(7a - 9b)$

2. निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात करने के लिए, सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का उपयोग कीजिए :

   (i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$

   (iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$

   (v) $(2x + 5y)(2x + 3y)$ (vi) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$

   (vii) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

3. सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित वर्गों को ज्ञात कीजिए :

   (i) $(b - 7)^2$ (ii) $(xy + 3z)^2$ (iii) $(6x^2 - 5y)^2$

   (iv) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p - 0.5q)^2$ (vi) $(2xy + 5y)^2$

4. सरल कीजिए :

   (i) $(a^2 - b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$

   (iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

   (v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$

   (vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$ (vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^3n^2$

5. दर्शाइए कि :

(i) $(3x + 7)^2 - 84x = (3x - 7)^2$ (ii) $(9p - 5q)^2 + 180pq = (9p + 5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}m - \frac{3}{4}n\right)^2 + 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq + 3q)^2 - (4pq - 3q)^2 = 48pq^2$

(v) $(a - b)(a + b) + (b - c)(b + c) + (c - a)(c + a) = 0$

6. सर्वसमिकाओं के उपयोग से निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए :

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2

(v) 5.2^2 (vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2

(ix) 10.5×9.5

7. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए :

(i) $51^2 - 49^2$ (ii) $(1.02)^2 - (0.98)^2$ (iii) $153^2 - 147^2$

(iv) $12.1^2 - 7.9^2$

8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का उपयोग करते हुए निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए :

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

हमने क्या चर्चा की?

1. **चरों** एवं **अचरों** की सहायता से व्यंजक बनते हैं।
2. **व्यंजक** बनाने के लिए पदों को जोड़ा जाता है। स्वयं पदों का निर्माण **गुणनखंडों** के गुणनफल के रूप में होता है।
3. व्यंजक जिनमें एक, दो तथा तीन पद होते हैं क्रमशः **एकपदी, द्विपदी** और **त्रिपदी** कहलाते हैं। सामान्यतः एक अथवा अधिक पदों वाला व्यंजक जिसमें पदों के गुणांक शून्येतर पूर्णांक हैं और चरों की घात ऋणेतर है, **बहुपद** कहलाता है।
4. समान चरों से **समान पद** बनते हैं, और इन चरों की घात भी समान होती है। समान पदों के गुणांक समान होने आवश्यक नहीं है।
5. बहुपदों को जोड़ने (अथवा घटाने) के लिए सबसे पहले समान पदों को ढूँढ़िए और उन्हें जोड़ (अथवा घटा) दीजिए, उसके पश्चात् असमान पदों को उपयोग में लीजिए।
6. बहुत सी परिस्थितियों में हमें बीजीय व्यंजकों को गुणा करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, जिसकी भुजाएँ बीजीय व्यंजकों के रूप में दी हुई हैं।
7. एकपदी को एकपदी से गुणा करने पर हमेशा एकपदी प्राप्त होता है।
8. बहुपद को एकपदी से गुणा करने के लिए बहुपद का प्रत्येक पद एकपदी से गुणा किया जाता है।
9. बहुपद का द्विपद (अथवा त्रिपद) से गुणन करने के लिए हम एक पद को एक-एक पद से गुणा करते हैं, अर्थात् बहुपद का प्रत्येक पद द्विपद (अथवा त्रिपद) के प्रत्येक पद से गुणा किया जाता है। ध्यान दीजिए इस प्रकार के गुणन में, हमें गुणनफल में समान पद प्राप्त हो सकते हैं और उन्हें मिलाना पड़ सकता है।

10. **सर्वसमिका** एक ऐसी समिका है जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, जबकि समीकरण चरों के कुछ निश्चित मानों के लिए सत्य होता है। समीकरण सर्वसमिका नहीं है।

11. निम्नलिखित मानक सर्वसमिकाएँ हैं :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (II)

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (III)

12. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (IV) एक अन्य उपयोगी सर्वसमिका है।

13. उपर्युक्त चार सर्वसमिकाएँ बीजीय व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात करने में एवं वर्ग करने में सहायक हैं। ये सर्वसमिकाएँ हमें संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करने के लिए सरल वैकल्पिक विधियाँ प्रदान करती हैं।

ठोस आकारों का चित्रण

अध्याय
10

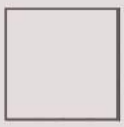
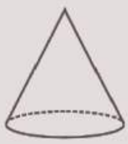
0853CH10

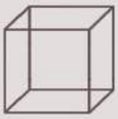
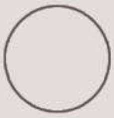
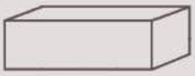
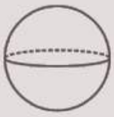
10.1 भूमिका

कक्षा VII में, आप समतल आकारों और ठोस आकारों के बारे में पढ़ चुके हैं। समतल आकारों के लंबाई और चौड़ाई जैसे दो मापन होते हैं और इसीलिए इन्हें द्विविमीय (two dimensional) आकार कहते हैं, जबकि ठोस आकारों के लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई या गहराई जैसे तीन मापन होते हैं। इसीलिए, इन आकारों को त्रिविमीय (three dimensional) आकार कहते हैं। साथ ही, एक ठोस वस्तु कुछ स्थान घेरती है। द्विविमीय और त्रिविमीय आकृतियों को संक्षेप में क्रमशः 2-D और 3-D आकृतियाँ भी कहा जा सकता है। आपको याद होगा कि त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि 2-D आकृतियाँ हैं, जबकि घन, बेलन, शंकु, गोला इत्यादि 3-D आकृतियाँ हैं।

इन्हें कीजिए

निम्नलिखित का मिलान कीजिए (आपके लिए, पहला मिलान किया हुआ है):

आकार	आकार का प्रकार	आकार का नाम
	त्रि-विमीय	गोला
	द्वि-विमीय	बेलन
	त्रि-विमीय	वर्ग
	द्वि-विमीय	वृत्त

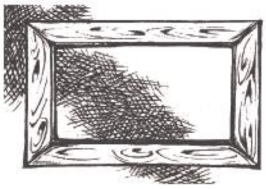
	त्रि-विमीय	घनाभ
	त्रि-विमीय	घन
	द्वि-विमीय	शंकु
	त्रि-विमीय	त्रिभुज

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त में से सभी आकार अकेले हैं। परंतु हमारे व्यावहारिक जीवन में, अनेक बार हमारे सम्मुख विभिन्न आकारों में संयोजन (combinations) आते हैं। उदाहरणार्थ, निम्नलिखित वस्तुओं को देखिए :

एक तंबू
बेलन पर एक शंकु आरोपित

एक डिब्बा
एक बेलनाकार खोल

आइसक्रीम
शंकु पर एक अर्धगोला आरोपित



एक फोटोफ्रेम
एक आयताकार पथ

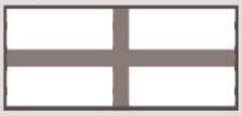
एक कटोरा
एक अर्धगोलाकार खोल

स्तंभ पर गुंबज
बेलन पर अर्धगोला आरोपित

इन्हें कीजिए

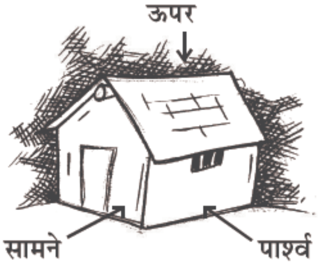
निम्नलिखित चित्रों (वस्तुओं) का उनके आकारों से मिलान कीजिए :

चित्र (वस्तु)		आकार
(i) एक कृषि योग्य खेत		एक आयताकार पार्क के अंदर दो लांबिक आयताकार पथ

(ii) एक गहरा छेद या नाली		एक वृत्ताकार मैदान के अनुदिश वृत्ताकार पथ
(iii) एक खिलौना		एक वर्गाकार खेत से संलग्न त्रिभुजाकार खेत
(iv) एक वृत्ताकार पार्क		एक बेलन में से शंकु खुरचकर निकालना
(v) परस्पर लांबिक (क्रास) पथ		एक शंकु पर आरोपित अर्धगोला

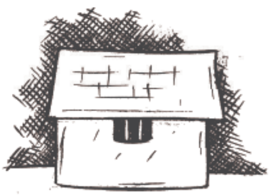
10.2 3-D आकारों के दृश्य

आप पढ़ चुके हैं कि त्रिविमीय वस्तुएँ विभिन्न स्थानों से भिन्न-भिन्न रूप में दिखाई दे सकती हैं। इसलिए इनको विभिन्न परिपेक्षों (दृष्टियों) से खींचा जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक दी हुई झोंपड़ी के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं :



एक झोंपड़ी


सामने से दृश्य

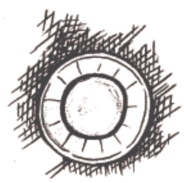

पार्श्व दृश्य


ऊपर से दृश्य

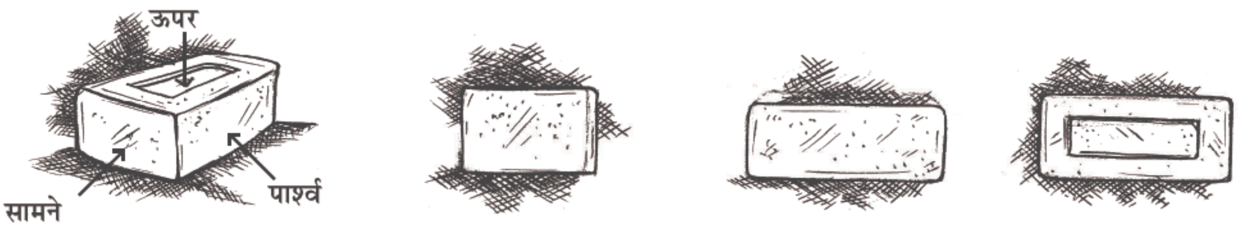
इसी प्रकार, एक गिलास के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं:


एक गिलास


पार्श्व दृश्य

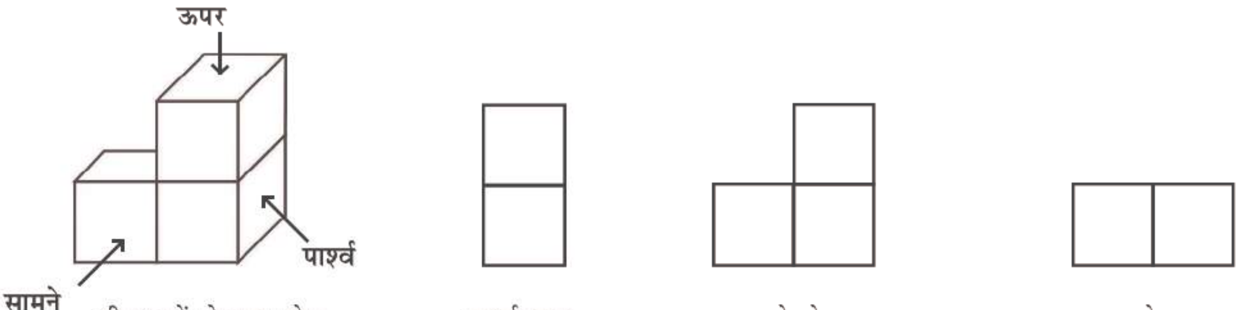

ऊपर से दृश्य

एक गिलास का ऊपर से दृश्य (top view) संकेंद्रीय वृत्तों का एक युग्म क्यों है? यदि इसे भिन्न दिशा से देखा जाए, तो क्या पार्श्व दृश्य कुछ और प्रकार का प्रतीत होगा? इसके बारे में सोचिए। अब एक ईंट के विभिन्न दृश्यों को देखिए।

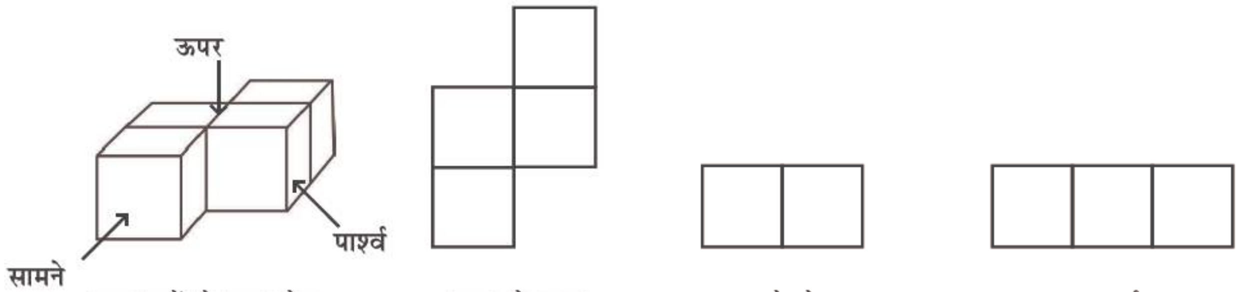


एक ईंट | सामने से दृश्य | पार्श्व दृश्य | ऊपर से दृश्य

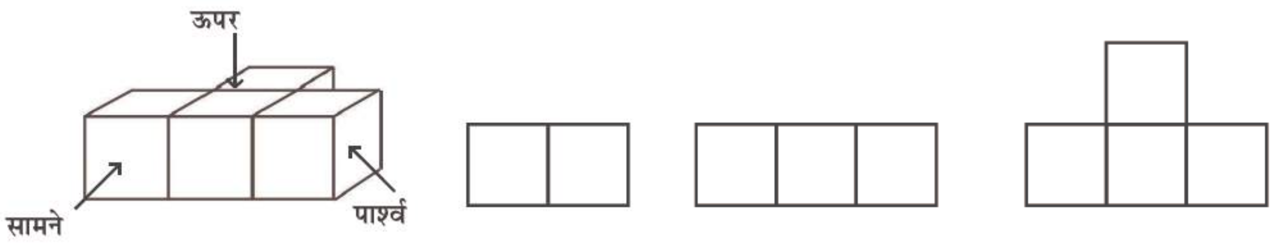
हम घनों को जोड़कर बनाई गई आकृतियों के भी विभिन्न दृश्य प्राप्त कर सकते हैं :



तीन घनों से बना ठोस | पार्श्व दृश्य | सामने से दृश्य | ऊपर से दृश्य



चार घनों से बना ठोस | ऊपर से दृश्य | सामने से दृश्य | पार्श्व दृश्य



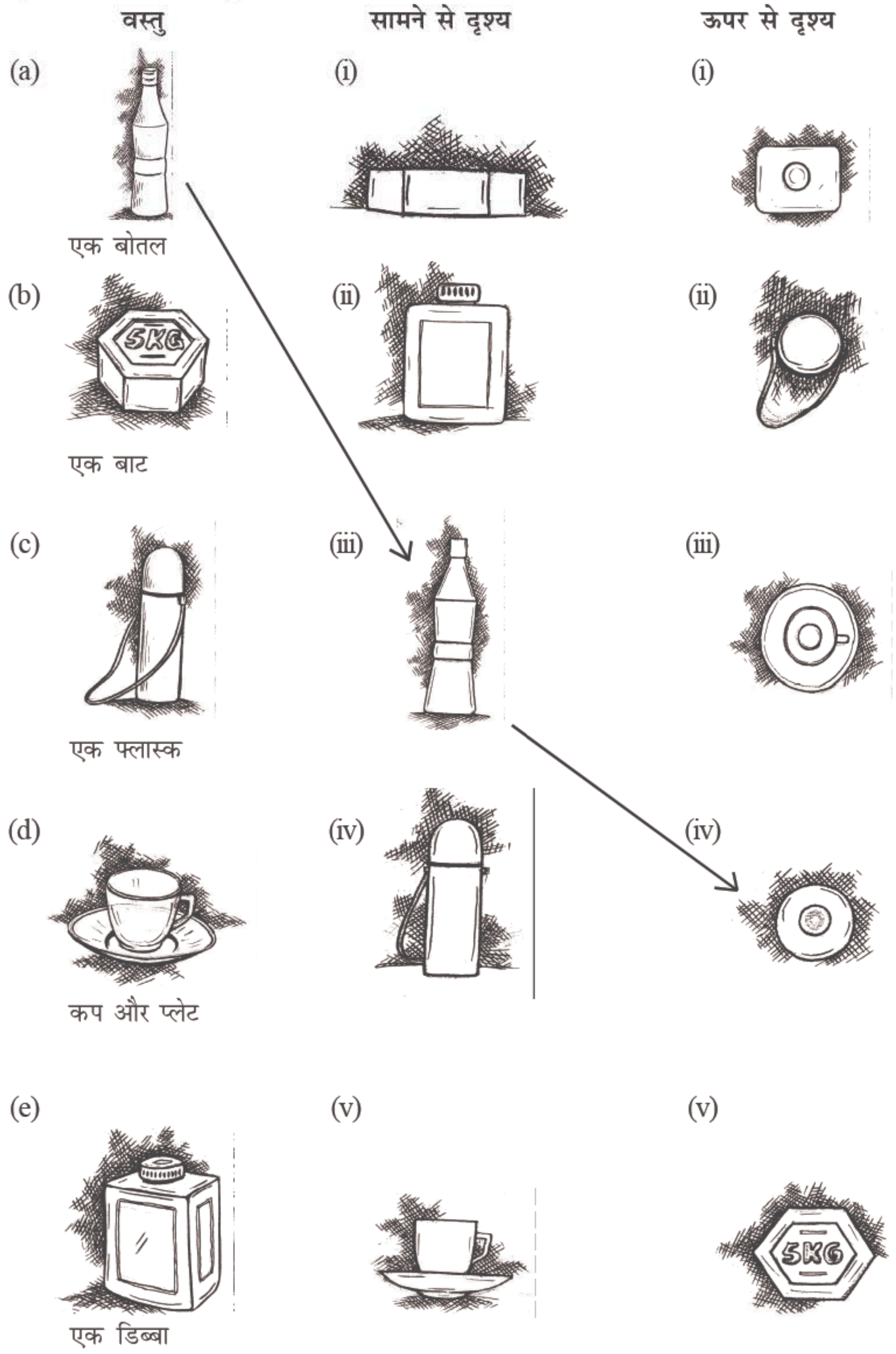
चार घनों से बना ठोस | पार्श्व दृश्य | सामने से दृश्य | ऊपर से दृश्य

इन्हें कीजिए

अपने आसपास की विभिन्न वस्तुओं को विभिन्न स्थितियों से देखिए। अपने मित्रों के साथ उनके विभिन्न दृश्यों की चर्चा कीजिए।

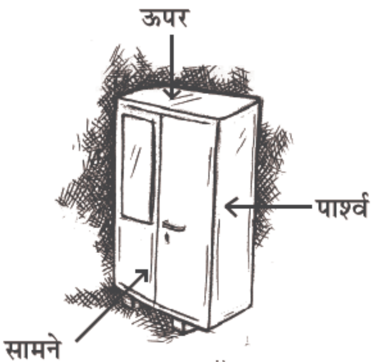
प्रश्नावली 10.1

1. दिए हुए प्रत्येक ठोस के लिए, दो दृश्य दिए गए हैं। प्रत्येक ठोस के लिए संगत, ऊपर से दृश्य और सामने से दृश्य का मिलान कीजिए। इनमें से एक आपके लिए किया गया है।



2. दिए हुए प्रत्येक ठोस के लिए, तीन दृश्य दिए गए हैं। प्रत्येक ठोस के संगत, ऊपर से दृश्य, सामने से दृश्य और पार्श्व दृश्य की पहचान कीजिए।

(a) वस्तु (i) (ii) (iii)



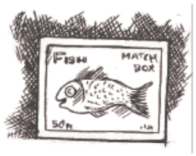
एक अलमारी



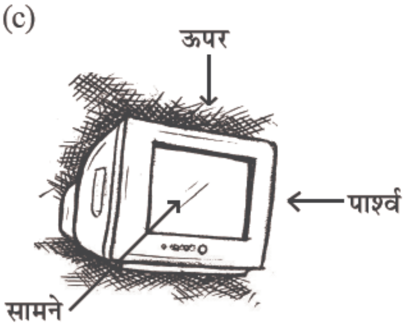
(b)

एक माचिस की डिब्बी



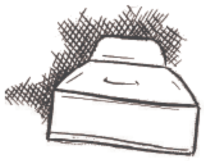


(c)

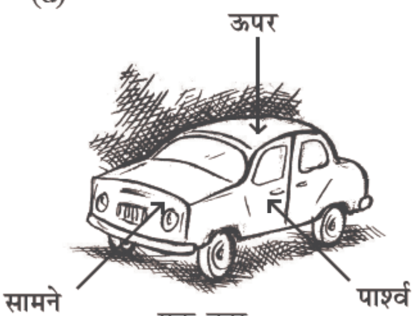


एक टेलीविज़न



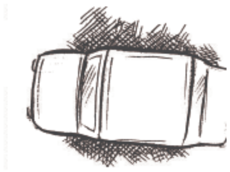


(d)



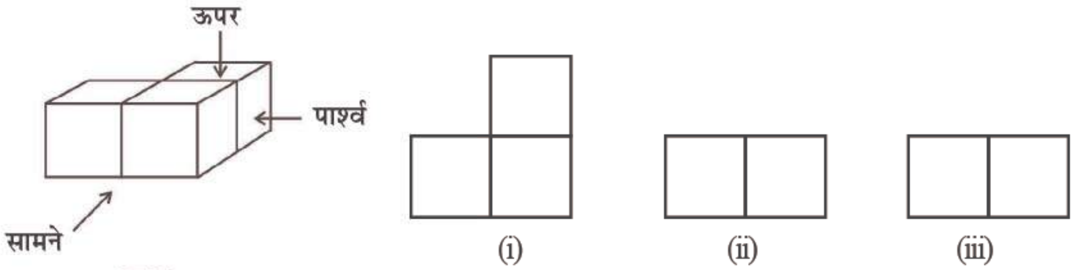
एक कार



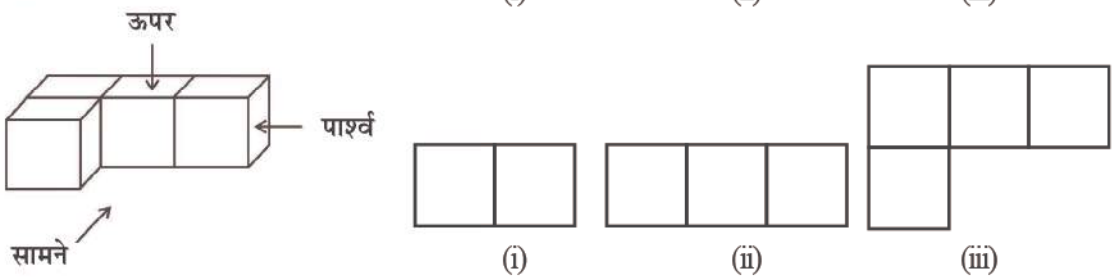


3. दिए हुए प्रत्येक ठोस के लिए, ऊपर से दृश्य, सामने से दृश्य और पार्श्व दृश्य की पहचान कीजिए :

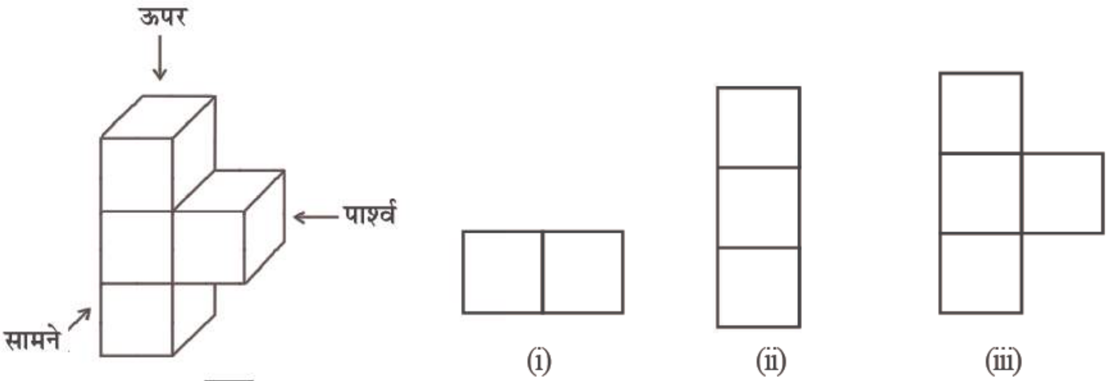
(a)



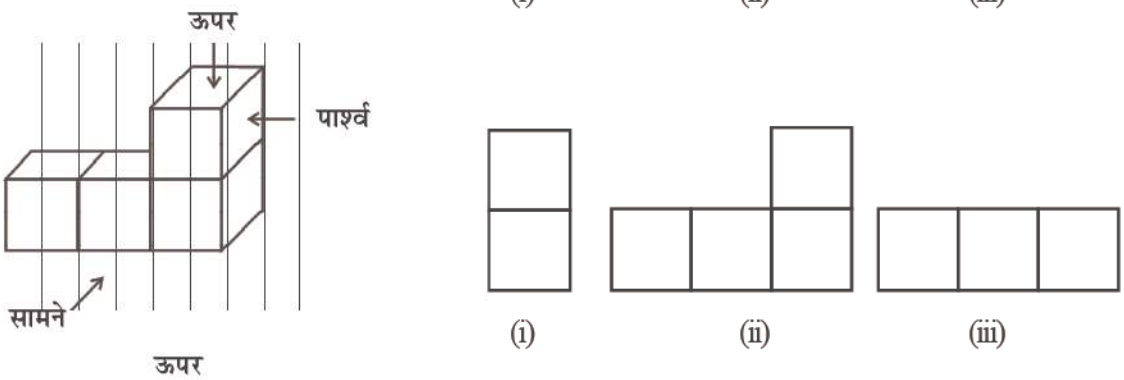
(b)



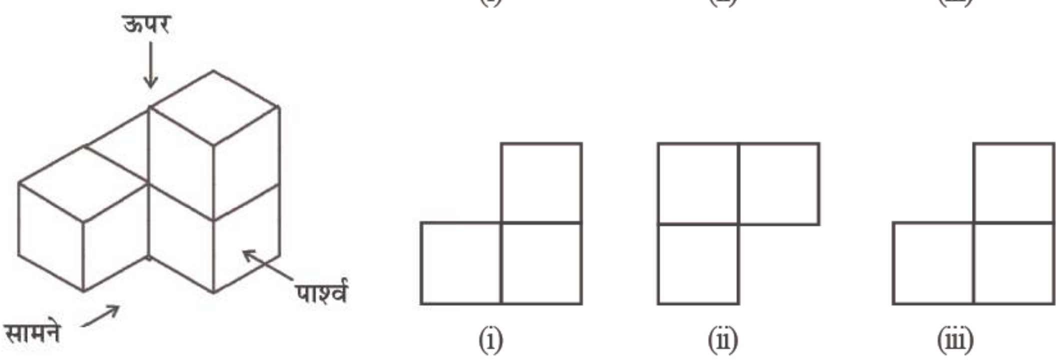
(c)



(d)

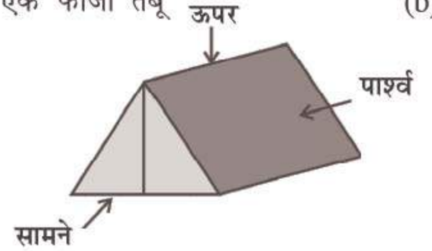


(e)

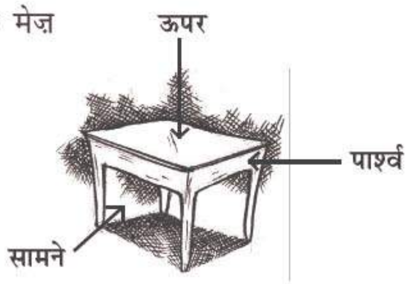


4. दी हुई वस्तुओं के, सामने से दृश्य, पार्श्व दृश्य और ऊपर से दृश्य खींचिए :

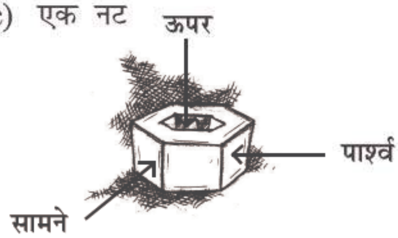
(a) एक फौजी तंबू



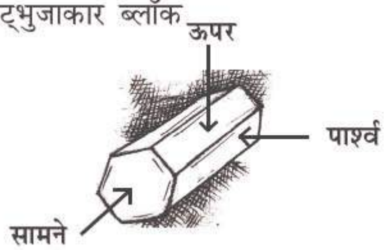
(b) एक मेज़



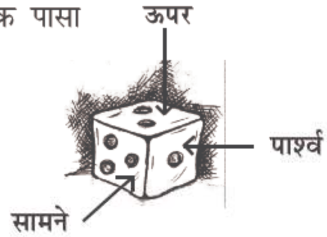
(c) एक नट



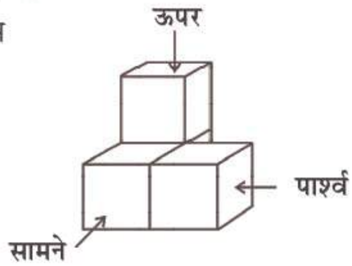
(d) एक षट्भुजाकार ब्लॉक



(e) एक पासा



(f) एक ठोस

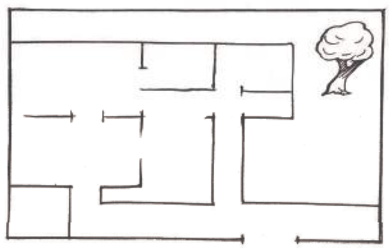


10.3 अपने आसपास के स्थान का प्रतिचित्रण

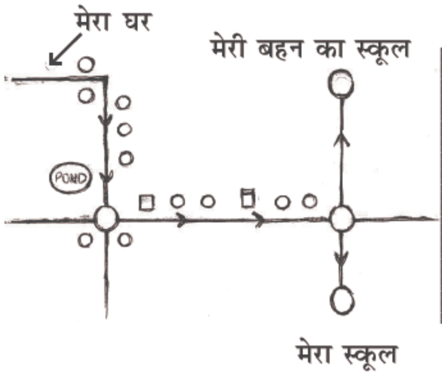
आप अपनी प्राथमिक कक्षाओं से ही मानचित्रों (maps) या प्रतिचित्रों के साथ कार्य करते आ रहे हैं। भूगोल (geography) में, आपसे मानचित्र पर एक विशेष राज्य, एक विशेष नदी, पर्वत इत्यादि का स्थान बताने को कहा गया था। इतिहास में, आपसे बहुत पहले हुई घटना के स्थान को बताने को संभवत: कहा गया होगा। आपने नदियों, सड़कों, रेल लाइनों, व्यापारिक तथा अन्य बहुत से मार्गों को खींचा (या उनका चित्रण किया) है।

हम मानचित्रों को किस प्रकार पढ़ते हैं? एक मानचित्र को पढ़ते समय, हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं और क्या समझ सकते हैं? एक मानचित्र में कौन-सी सूचनाएँ होती हैं और कौन-सी सूचनाएँ नहीं होती हैं? क्या यह एक चित्र से किसी अर्थ में भिन्न है? इस अनुच्छेद में, हम इन प्रश्नों में से कुछ के उत्तर ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे। किसी घर के मानचित्र को देखिए, जिसका चित्र साथ में ही दिया गया है (आकृति 10.1)।

आकृति 10.1



इस आकृति से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? जब हम कोई चित्र खींचते हैं, तो हम उसकी स्पष्ट दिखाई देने वाली जानकारियों की वास्तविकता को निरूपित करने का प्रयत्न करते हैं, जबकि एक मानचित्र किसी एक वस्तु का अन्य वस्तुओं के संदर्भ में केवल स्थान दर्शाता है। दूसरी बात यह है कि भिन्न-भिन्न व्यक्ति चित्रों का एक दूसरे से पूर्णतया भिन्न विवरण दे सकते हैं, जो इस पर निर्भर करेगा कि वे घर को किस स्थान से देख रहे हैं। परंतु यह एक मानचित्र की स्थिति में सत्य नहीं है। प्रेक्षक की स्थिति कहीं भी हो, घर का मानचित्र वही रहता है। दूसरे शब्दों में, **एक चित्र खींचने के लिए, परिप्रेक्ष्य अति महत्त्वपूर्ण है, परंतु यह एक मानचित्र के लिए अनुकूल नहीं है।**



आकृति 10.2

अब एक मानचित्र (आकृति 10.2) को देखिए जो एक सात वर्ष के बच्चे राघव ने अपने घर से अपने स्कूल तक के मार्ग के लिए खींचा है। इस मानचित्र से क्या आप बता सकते हैं कि

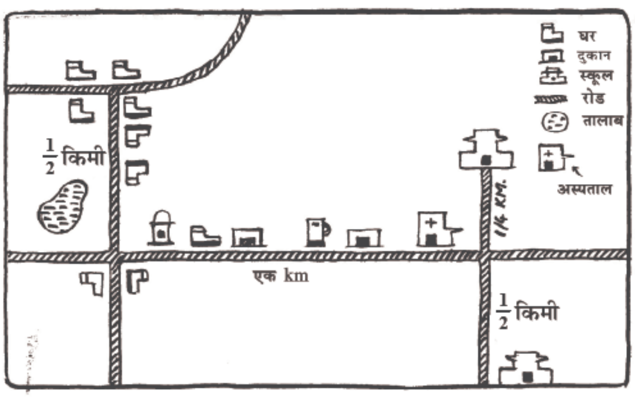
(i) राघव का स्कूल उसके घर से कितनी दूर है?

(ii) मानचित्र में प्रत्येक वृत्त क्या एक गोल चक्कर दर्शाएगा?

(iii) घर से किसका स्कूल अधिक निकट है–राघव का या उसकी बहन का?

दिए हुए मानचित्र को देखकर, उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर देना बहुत कठिन है। क्या आप बता सकते हैं कि क्यों?

इसका कारण यह है कि हम नहीं जानते कि इसमें दूरियाँ सही (उचित) प्रकार से खींची गई हैं अथवा खींचे गए वृत्त गोल चक्कर हैं या कुछ और निरूपित करते हैं।



आकृति 10.3

दुकान

अब एक अन्य मानचित्र को देखिए, जो उसकी 10 वर्षीय बहन मीना ने अपने घर से अपने स्कूल का मार्ग दर्शाने के लिए खींचा है (आकृति 10.3)।

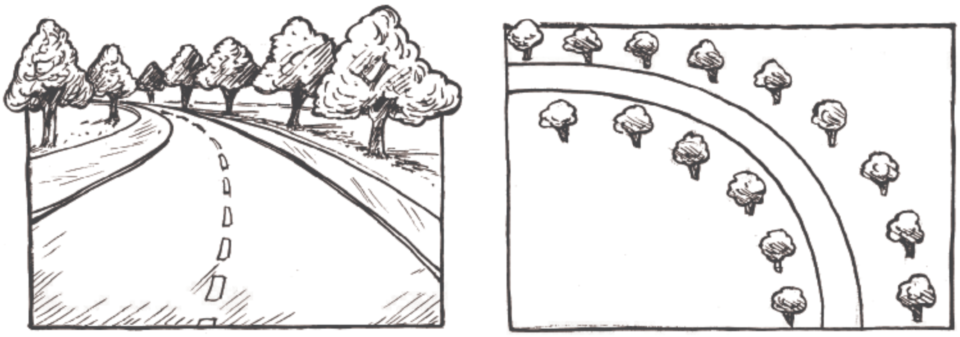
यह मानचित्र पिछले मानचित्र से भिन्न है। यहाँ, मीना ने भिन्न-भिन्न सीमा-चिह्नों (landmarks) के लिए भिन्न-भिन्न संकेतों का प्रयोग किया है। दूसरी बात यह है कि लंबी दूरियों के लिए लंबे रेखाखंड खींचे गए हैं तथा छोटे रेखाखंड खींचे गए हैं। अर्थात् उसने इस मानचित्र को एक पैमाने (scale) के अनुसार खींचा है। अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं :

- राघव का स्कूल उसके निवास स्थान से कितनी दूरी पर है?
- किसका स्कूल उनके घर से अधिक निकट है–राघव का या मीना का?
- मार्ग में कौन-कौन से महत्त्वपूर्ण सीमा-चिह्न हैं?

इस प्रकार, हम यह अनुभव करते हैं कि कुछ संकेतों का प्रयोग करने और दूरियों का वर्णन करने (जानकारी देने) से हमें मानचित्र को पढ़ने में सहायता मिलती है। ध्यान दीजिए कि मानचित्र पर दर्शाई गई दूरियाँ भूमि पर वास्तविक दूरियों के समानुपातिक (proportional) हैं। यह एक उपयुक्त पैमाना मानकर किया जाता है। एक मानचित्र को खींचते (या पढ़ते) समय यह ध्यान रखना चाहिए उसे किस पैमाने से खींचना है (या वह किस पैमाने से खींचा गया है), अर्थात् कितनी वास्तविक दूरी को मानचित्र पर 1 mm या 1 cm दूरी से व्यक्त किया गया है। इसका अर्थ

है कि यदि कोई व्यक्ति, एक मानचित्र खींचता है, तो उसे यह निर्णय करना पड़ता है कि उस मानचित्र में 1 cm स्थान एक निश्चित दूरी जैसे कि 1 km या 10 km दर्शाता है। यह पैमाना एक मानचित्र से दूसरे मानचित्र में बदल सकता है, परंतु एक ही मानचित्र में नहीं बदलता है। उदाहरणार्थ, भारत के मानचित्र को गुजरात के मानचित्र के साथ रखकर देखिए।

आप देखेंगे कि जब मानचित्रों को विभिन्न पैमानों के अनुसार खींचा जाता है, तो दो मानचित्रों में दूरियाँ बदल जाती हैं। अर्थात् गुजरात के मानचित्र में 1 cm स्थान भारत के मानचित्र की दूरियों की तुलना में छोटी दूरियाँ निरूपित करेगा। स्थान जितना बड़ा होगा और खींचे गए मानचित्र का साइज़ जितना छोटा होगा उतनी ही अधिक दूरी 1 cm द्वारा निरूपित होगी। इस प्रकार, सारांश, हम कह सकते हैं कि

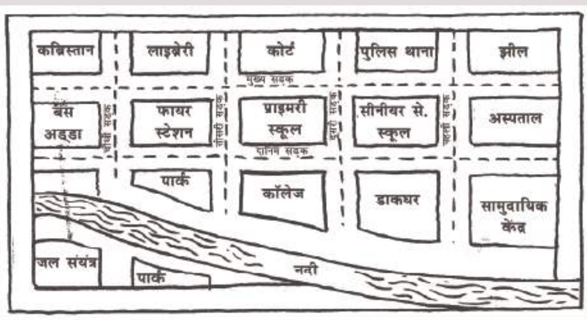


आकृति 10.4

1. एक मानचित्र एक विशेष वस्तु/स्थान की अन्य वस्तुओं/स्थानों के संदर्भ में स्थिति दर्शाता है।
2. विभिन्न वस्तुओं / स्थानों को दर्शाने के लिए उपयुक्त संकेतों का प्रयोग किया जाता है।
3. एक मानचित्र में कोई संदर्भ या परिप्रेक्ष्य नहीं होता है, अर्थात् प्रेक्षक के निकट वाली वस्तुएँ उसी साइज़ में दर्शाई जाती हैं, जितनी दूर वाली। उदाहरणार्थ, आकृति 10.4 को देखिए।
4. प्रत्येक मानचित्र में एक पैमाना संबद्ध होता है, जो एक विशेष मानचित्र के लिए स्थिर (fixed) होता है। यह वास्तविक दूरियों को कागज़ पर समानुपातिक रूप से छोटा (कम) कर देता है।

इन्हें कीजिए

1. एक नगर के संलग्न मानचित्र को देखिए (आकृति 10.5) :



आकृति 10.5

(a) मानचित्र में इस प्रकार रंग भरिए : नीला – जल, लाल – फायर स्टेशन, नारंगी – लाइब्रेरी, पीला – स्कूल, हरा – पार्क, गुलाबी – सामुदायिक केंद्र, बैंगनी – अस्पताल, भूरा – कब्रिस्तान।

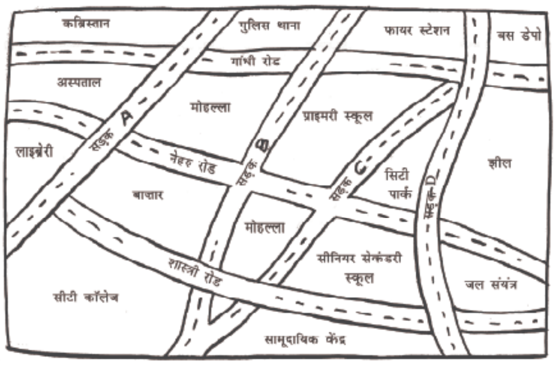
(b) दूसरी सड़क और दानिम सड़क के प्रतिच्छेदन (intersection) पर एक हरा 'X' अंकित कीजिए। जहाँ नदी, तीसरी सड़क से मिलती है, वहाँ एक काला 'Y' अंकित कीजिए तथा मुख्य सड़क और पहली सड़क के प्रतिच्छेदन पर एक लाल 'Z' अंकित कीजिए।

(c) कॉलेज से झील तक के लिए एक छोटा सड़क का मार्ग गहरे गुलाबी रंग में खींचिए।

2. अपने घर से अपने स्कूल तक के मार्ग का उस पर आने वाले महत्त्वपूर्ण सीमा-चिह्नों को दर्शाते हुए एक मानचित्र खींचिए।

प्रश्नावली 10.2

1. एक नगर के दिए हुए मानचित्र को देखिए। निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :



   (a) इस मानचित्र में इस प्रकार रंग भरिए :
   नीला – जल; लाल – फायर-स्टेशन; नारंगी – लाइब्रेरी; पीला – स्कूल; हरा – पार्क; गुलाबी – कॉलेज; बैंगनी – अस्पताल; भूरा – कब्रिस्तान।

   (b) सड़क C और नेहरू रोड के प्रतिच्छेदन पर एक हरा 'X' तथा गांधी रोड और सड़क A के प्रतिच्छेदन पर एक हरा 'Y' खींचिए।

   (c) लाइब्रेरी से बस डिपो तक एक छोटा सड़क मार्ग लाल रंग से खींचिए।

   (d) कौन अधिक पूर्व में है – सिटी पार्क या बाज़ार?

   (e) कौन अधिक दक्षिण में है – प्राइमरी स्कूल या सीनियर सैकेंडरी स्कूल?

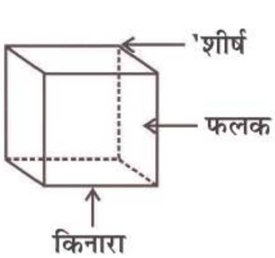
2. उचित पैमाने और विभिन्न वस्तुओं के लिए संकेतों का प्रयोग करते हुए, अपनी कक्षा के कमरे का एक मानचित्र खींचिए।

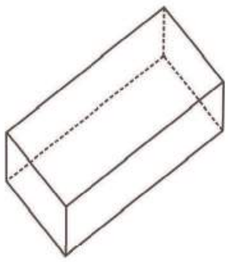
3. उचित पैमाने और विभिन्न विशेषताओं (वस्तुओं) जैसे खेल का मैदान, मुख्य भवन, बगीचा इत्यादि के लिए संकेतों का प्रयोग करते हुए, अपने विद्यालय परिसर (compound) का एक मानचित्र खींचिए।

4. अपने मित्र के मार्गदर्शन के लिए एक मानचित्र खींचिए ताकि वह आपके घर बिना किसी कठिनाई के पहुँच जाए।

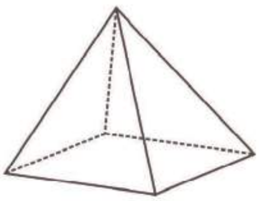
10.4 फलक, किनारे और शीर्ष

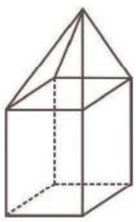
नीचे दिए ठोसों को देखिए :

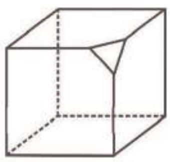




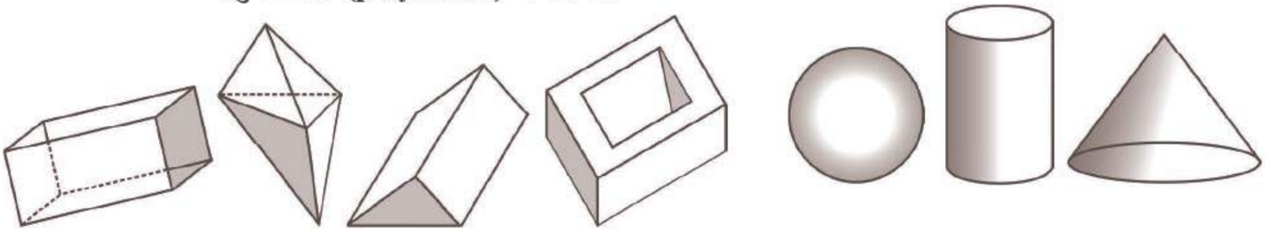
पहेली : मेरा कोई शीर्षों नहीं है। मेरा कोई सपाट फलकों नहीं है। मैं कौन हूँ?





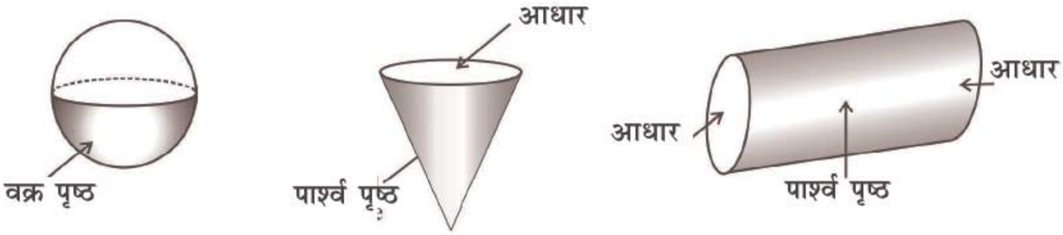


उपरोक्त ठोसों में से प्रत्येक ठोस बहुभुजीय क्षेत्रों (polygonal regions) से मिलकर बना है, जो उसके **फलक (faces)** कहलाते हैं। ये फलक **किनारों** या **कोरों (edges)** में मिलते हैं, जो रेखाखंड हैं तथा ये किनारे शीर्षों में मिलते हैं, जो **बिंदु** हैं। ऐसे ठोसों को **बहुफलक** या **बहुफलकी (polyhedra)** कहते हैं।



ये बहुफलक हैं। **ये बहुफलक नहीं हैं।**

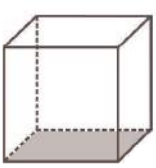
बहुफलक उन ठोसों से किस प्रकार भिन्न हैं जो बहुफलक नहीं (अबहुफलक) हैं? निम्न आकृतियों का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए। आप तीन प्रकारों के सामान्य ठोसों के बारे में जानते हैं।



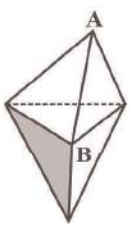
उत्तल बहुफलक : आपको उत्तल (convex) बहुभुज की अवधारणा के बारे में याद होगा। उत्तल बहुफलक की अवधारणा भी उसी प्रकार की है।

ये उत्तल बहुफलक हैं। **ये उत्तल बहुफलक नहीं हैं।**

सम बहुफलक : एक बहुफलक तब **सम बहुफलक (regular polyhedron)** कहलाता है जब उसके सभी फलक सर्वांगसम सम बहुभुजों (regular polygons) से बने हों तथा **प्रत्येक** शीर्ष पर मिलने वाले फलकों की संख्या समान हो।

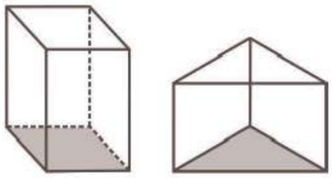


यह एक सम बहुफलक है। इसके सभी फलक सर्वांगसम सम बहुभुज हैं। फलकों की समान संख्याओं से शीर्ष बनते हैं।

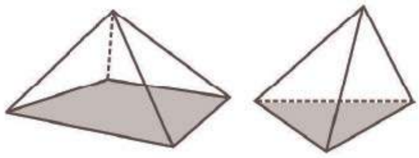


यह एक सम बहुफलक नहीं है। सभी फलक सर्वांगसम नहीं हैं, परंतु शीर्ष फलकों की समान संख्याओं से नहीं बनते हैं। A पर 3 फलक मिलते हैं, परंतु B पर 4 फलक मिलते हैं।

हमारे आसपास बहुफलक परिवार (कुल या family) में मिलने वाले दो महत्त्वपूर्ण सदस्य प्रिज़्म (prisms) और पिरामिड (pyramids) हैं।



ये प्रिज़्म हैं।



ये पिरामिड हैं।

हम कहते हैं कि एक बहुफलक **प्रिज़्म** होता है, जब उसका आधार (base) और ऊपरी सिरा (top) सर्वांगसम बहुभुज हों तथा उसके अन्य फलक, अर्थात् पार्श्व फलक (lateral faces) समांतर चतुर्भुजों के आकार के हों।

इसके दूसरी ओर, एक **पिरामिड** वह बहुफलक होता है जिसका आधार (कितनी भी भुजाओं वाला) एक बहुभुज होता है तथा इसके पार्श्व फलक एक शीर्ष वाले त्रिभुज होते हैं। (यदि आप एक बहुभुज के सभी कोनों या शीर्षों को एक ऐसे बिंदु से मिला दें जो उसके तल (plane) में न हो, तो आपको पिरामिड का एक मॉडल (model) प्राप्त हो जाएगा।)

एक प्रिज़्म या पिरामिड को उसके आधार के अनुसार नामांकित किया जाता है। इस प्रकार, एक षट्भुजीय (hexagonal) प्रिज़्म का आधार एक षट्भुज होता है तथा एक त्रिभुजाकार पिरामिड का आधार एक त्रिभुज होता है। तब, एक आयताकार प्रिज़्म क्या है? एक वर्ग पिरामिड क्या है? स्पष्टतः, इनके आधार क्रमशः आयत और वर्ग हैं।

इन्हें कीजिए

निम्नलिखित बहुफलकों के लिए फलकों (faces), किनारों (edges) और शीर्षों (vertices) की संख्याओं को सारणीबद्ध कीजिए : (यहाँ V शीर्षों की संख्या, F फलकों की संख्या तथा E किनारों की संख्या प्रदर्शित करता है।)

ठोस	F	V	E	F+V	E+2
घनाभ					
त्रिभुजाकार					
त्रिभुजाकार प्रिज़्म					
वर्ग आधार वाला पिरामिड					
वर्ग आधार वाला प्रिज़्म					

आप अंतिम दो स्तंभों से क्या निष्कर्ष निकालते हैं? क्या प्रत्येक स्थिति में आप $F+V=E+2$, अर्थात् $F+V-E=2$ प्राप्त करते हैं? यह संबंध **ऑयलर सूत्र (Euler's Formula)** कहलाता है। वास्तव में, यह सूत्र प्रत्येक बहुफलक के लिए सत्य है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि किसी ठोस में से कोई टुकड़ा काट दिया जाए, तो F, V और E में क्या परिवर्तन होता है? (प्रारंभ करने के लिए, एक प्लास्टिसीन का घन लीजिए तथा उसका एक कोना काटकर इसकी खोज कीजिए।)

प्रश्नावली 10.3

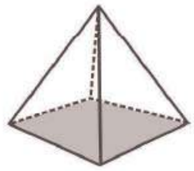
1. क्या किसी बहुफलक के फलक नीचे दिए अनुसार हो सकते हैं?
   (i) 3 त्रिभुज (ii) 4 त्रिभुज (iii) एक वर्ग और चार त्रिभुज
2. क्या ऐसा बहुफलक संभव है जिसके फलकों की संख्या कोई भी संख्या हो?
   (**संकेत :** एक पिरामिड के बारे में सोचिए।)
3. निम्नलिखित में से कौन-कौन प्रिज़्म हैं?

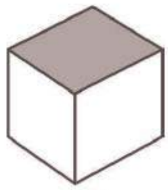
(i)

एक कील

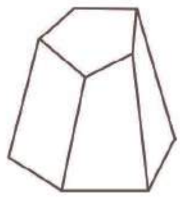
(ii)

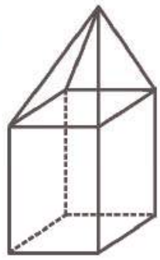
बिना छिली हुई पेंसिल

(iii)

कागज़ों पर रखने का भार

(iv)

एक बॉक्स

4. (i) प्रिज़्म और बेलन किस प्रकार एक जैसे हैं?
   (ii) पिरामिड और शंकु किस प्रकार एक जैसे हैं?
5. क्या एक वर्ग प्रिज़्म और एक घन एक ही होते हैं? स्पष्ट कीजिए।
6. इन ठोसों के लिए ऑयलर सूत्र का सत्यापन कीजिए :

(i)


(ii)


7. ऑयलर सूत्र का प्रयोग करते हुए, अज्ञात संख्या को ज्ञात कीजिए :

फलक	?	5	20
शीर्ष	6	?	12
किनारे	12	9	?

8. क्या किसी बहुफलक के 10 फलक, 20 किनारे और 15 शीर्ष हो सकते हैं?

हमने क्या चर्चा की?

1. 2D और 3D वस्तुओं को पहचानना।
2. संयोजित या वस्तुओं के मेल में विभिन्न आकारों को पहचानना।
3. भिन्न-भिन्न स्थानों से 3D वस्तुओं के भिन्न-भिन्न दृश्य मिलते हैं।
4. एक मानचित्र एक चित्र से भिन्न होता है।
5. एक मानचित्र एक विशेष वस्तु/ स्थान की अन्य वस्तुओं/ स्थानों के संदर्भ में सही-सही स्थितियाँ दर्शाता है।
6. विभिन्न वस्तुओं/ स्थानों को दर्शाने के लिए, मानचित्र में संकेतों का प्रयोग किया जाता है।
7. एक मानचित्र में कोई संदर्भ या परिप्रेक्ष्य नहीं होता है।
8. प्रत्येक मानचित्र में एक पैमाना संबद्ध होता है, जो एक विशेष मानचित्र के लिए एक ही रहता है।
9. किसी भी बहुफलक के लिए सूत्र $F + V - E = 2$ सत्य होता है, जहाँ F फलकों की संख्या, V शीर्षों की संख्या तथा E किनारों की संख्या को प्रदर्शित करता है। यह संबंध **ऑयलर सूत्र** कहलाता है।

अध्याय 11

क्षेत्रमिति

0853CH11

11.1 भूमिका

हम अध्ययन कर चुके हैं कि किसी बंद समतल आकृति की सीमा के चारों ओर की दूरी उसक परिमाप कहलाता है और उस आकृति द्वारा घिरे हुए क्षेत्र को उसका क्षेत्रफल कहते हैं। हम त्रिभुज आयत, वृत्त इत्यादि विभिन्न समतल आकृतियों का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख चुके हैं तथा आयताकार आकार के किनारों अथवा पगडंडियों का क्षेत्रफल भी सीख चुके हैं।

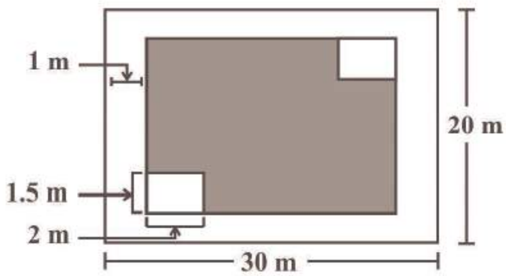
इस अध्याय में हम चतुर्भुज जैसी दूसरी बंद आकृतियों के क्षेत्रफल एवं परिमाप से संबंधित समस्याएँ हल करने का प्रयत्न करेंगे। हम घन, घनाभ और बेलन जैसे ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन का भी अध्ययन करेंगे।

11.2 आइए स्मरण करते हैं

अपने पूर्व ज्ञान के सर्वेक्षण के लिए हम एक उदाहरण की चर्चा करते हैं।
यह एक आयताकार बगीचे की आकृति है जिसकी लंबाई 30 मीटर और चौड़ाई 20 मीटर है। (आकृति 11.1)

(i) इस बगीचे को चारों ओर से घेरने वाली बाड़ की लंबाई क्या है? बाड़ की लंबाई ज्ञात करने के लिए हमें इस बगीचे का परिमाप ज्ञात करने की आवश्यकता है जो कि 100 मीटर है (जाँच कीजिए)।

(ii) कितनी भूमि बगीचे द्वारा व्याप्त है? इस बगीचे द्वारा व्याप्त भूमि ज्ञात करने के लिए हमें इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता है जो कि 600 वर्ग मीटर (m^2) है (कैसे?)



आकृति 11.1

(iii) बगीचे के परिमाप के साथ-साथ अंदर की तरफ़ एक मीटर चौड़ा रास्ता है जिस पर सीमेंट लगवाना है। यदि 4 वर्ग मीटर (m^2) क्षेत्रफल पर सीमेंट लगवाने के लिए एक बोरी सीमेंट चाहिए तो इस पूरे रास्ते पर सीमेंट लगवाने के लिए कितनी सीमेंट की बोरियों की आवश्यकता है?

हम कह सकते हैं कि उपयोग की

$$\text{गई सीमेंट की बोरियों की संख्या} = \frac{\text{रास्ते का क्षेत्रफल}}{\text{1 बोरी द्वारा सीमेंट किया गया क्षेत्रफल}}$$

सीमेंट से बनने वाले रास्ते का क्षेत्रफल =
बगीचे का क्षेत्रफल – बगीचे का वह क्षेत्रफल जिस पर सीमेंट नहीं होना है।

रास्ते की चौड़ाई 1 मीटर है, इसलिए सीमेंट नहीं किए जाने वाला आयताकार क्षेत्रफल $(30 - 2) \times (20 - 2)\ m^2$ है। यह $28 \times 18\ m^2$ है।

अतः उपयोग किए जाने वाले सीमेंट की बोरियों की संख्या = ...

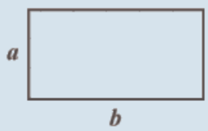
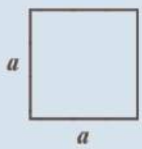
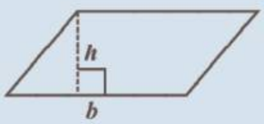
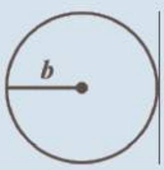
(iv) जैसा कि आरेख (आकृति 11.1) में दर्शाया गया है। इस बगीचे में फूलों की दो आयताकार क्यारियाँ हैं, जिनमें से प्रत्येक का आकार $1.5\ m \times 2\ m$ है और शेष बगीचे के ऊपर घास है। घास द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आयताकार क्यारियों का क्षेत्रफल = ...

रास्ते पर सीमेंट लगवाने के बाद बगीचे का बचा हुआ क्षेत्रफल = ...

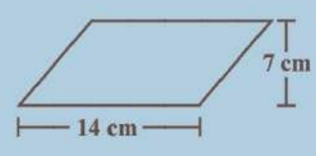
घास द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल = ...

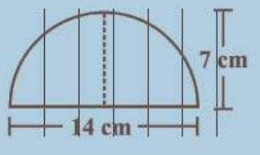
यदि हमें कुछ निश्चित माप दिए हुए हैं, तो आयतों के अतिरिक्त हम कुछ और ज्यामितीय आकारों का भी क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। निम्नलिखित का स्मरण करने और मिलान करने का प्रयत्न कीजिए।

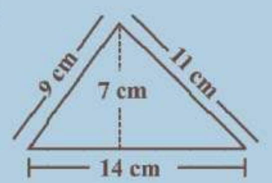
आरेख	आकार	क्षेत्रफल
	आयत	$a \times a$
	वर्ग	$b \times h$
	त्रिभुज	πb^2
	समांतर चतुर्भुज	$\frac{1}{2} b \times h$
	वृत्त	$a \times b$
क्या आप उपर्युक्त आकारों में से प्रत्येक के परिमाप का सूत्र लिख सकते हैं?		

प्रयास कीजिए

(a) निम्नलिखित आकृतियों का उनके क्षेत्रफलों से मिलान कीजिए :





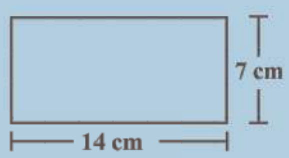


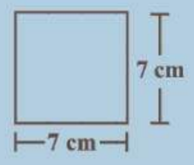
49 cm^2

77 cm^2

98 cm^2

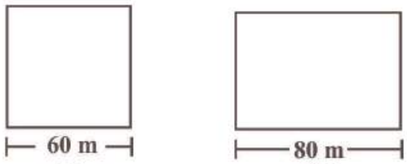
(b) प्रत्येक आकार का परिमाप लिखिए।





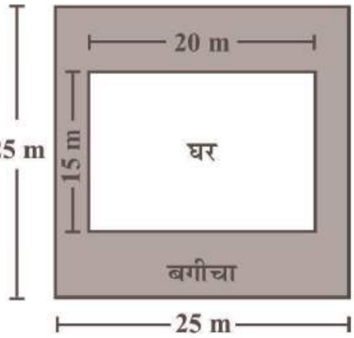
प्रश्नावली 11.1

1. जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है, एक आयताकार और एक वर्गाकार खेत के माप दिए हुए हैं। यदि इनके परिमाप समान हैं, तो किस खेत का क्षेत्रफल अधिक होगा?

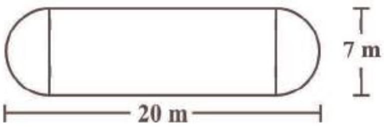


(a) (b)

2. श्रीमती कौशिक के पास चित्र में दर्शाए गए मापों वाला एक वर्गाकार प्लाट है। वह प्लॉट के बीच में एक घर बनाना चाहती हैं। घर के चारों ओर एक बगीचा विकसित किया गया है। 55 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से इस बगीचे को विकसित करने का व्यय ज्ञात कीजिए।



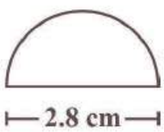
3. जैसा कि आरेख में दर्शाया गया है, एक बगीचे का आकार मध्य में आयताकार है और किनारों पर अर्धवृत्त के रूप में है। इस बगीचे का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए [आयत की लंबाई 20 – (3.5 + 3.5) मीटर है।]



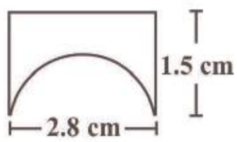
4. फर्श बनाने के लिए उपयोग की जाने वाली एक टाइल का आकार समांतर चतुर्भुज का है जिसका आधार 24 cm और संगत ऊँचाई 10 cm है। 1080 वर्ग मीटर क्षेत्रफल के एक फर्श को ढकने के लिए ऐसी कितनी टाइलों की आवश्यकता है? (फर्श के कोनों को भरने के लिए आवश्यकतानुसार आप टाइलों को किसी भी रूप में तोड़ सकते हैं।

5. एक चींटी किसी फर्श पर बिखरे हुए विभिन्न आकारों के भोज्य पदार्थ के टुकड़ों के चारों ओर घूम रही है। भोज्य पदार्थ के किस टुकड़े के लिए चींटी को लंबा चक्कर लगाना पड़ेगा? स्मरण रखिए, वृत्त की परिधि सूत्र $c = 2\pi r$; जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है, की सहायता से प्राप्त की जा सकती है।

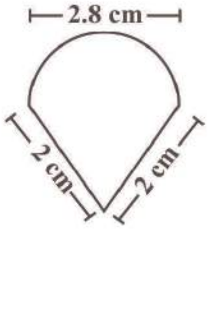
(a)

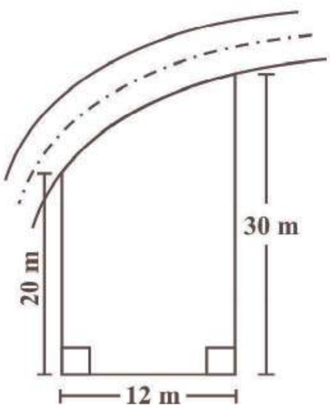


(b)

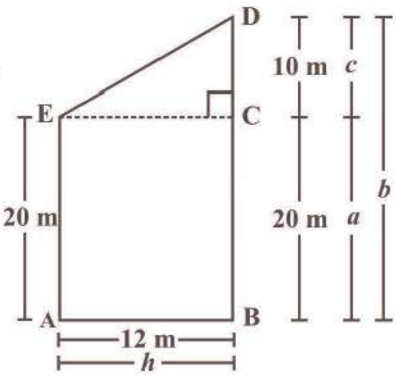


(c)





आकृति 11.2



आकृति 11.3

($b = c + a = 30$ m)

11.3 समलंब का क्षेत्रफल

नज़मा के पास मुख्य मार्ग के नजदीक एक प्लॉट है (आकृति 11.2)। उसका प्लॉट पड़ोस के दूसरे आयताकार प्लॉटों के आकार का नहीं है। इस प्लॉट में सम्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म समांतर है। इसलिए यह लगभग समलंब के आकार का है। क्या आप इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

आइए, जैसा कि आकृति 11.3 में दर्शाया गया है, हम इस प्लॉट के शीर्षों को नाम देते हैं। EC $\parallel$ AB, खींचकर हम इसे दो भागों में बाँट सकते हैं जिनमें एक आयताकार आकार है और दूसरा त्रिभुज के आकार का है (यह C पर समकोण है) जैसा कि आकृति 11.3 में दर्शाया गया है।)

Δ ECD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60 \text{ m}^2$.

आयत ABCE का क्षेत्रफल $= h \times a = 12 \times 20 = 240 \text{ m}^2$.

समलंब चतुर्भुज ABDE का क्षेत्रफल $=$ Δ ECD का क्षेत्रफल $+$ आयत ABCE का क्षेत्रफल

$= 60 + 240 = 300 \text{ m}^2$

हम इन दो क्षेत्रफलों को संयुक्त रूप में लिखते हैं। इस प्रकार

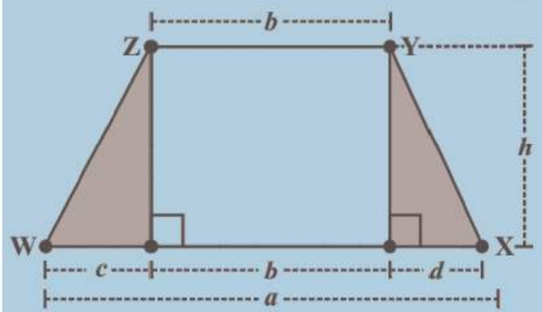
समलंब ABDE का क्षेत्रफल $= (\frac{1}{2} h \times c) + (h \times a) = h\left(\frac{c}{2} + a\right)$

$$= h\left(\frac{c + 2a}{2}\right) = h\left(\frac{c + a + a}{2}\right)$$

$$= h\frac{(b+a)}{2} = \text{ऊँचाई } \frac{(\text{समांतर भुजाओं का योग})}{2}$$

इस व्यंजक में h, b तथा a का मान रखने पर हम $h\frac{(b+a)}{2} = 300 \text{ m}^2$ प्राप्त करते हैं।

प्रयास कीजिए

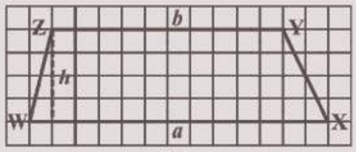


आकृति 11.4

1. नज़मा की बहन के पास भी एक समलंब के आकार का प्लॉट है जैसा कि आकृति 11.4 में दर्शाया गया है इसे तीन भागों में बाँटिए। दर्शाइए कि समलंब WXYZ का क्षेत्रफल $= h\frac{(a+b)}{2}$
2. यदि $h = 10$ cm, $c = 6$ cm, $b = 12$ cm, $d = 4$ cm, तो इसके प्रत्येक भाग का मान अलग-अलग ज्ञात कीजिए और WXYZ का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इनका योग कीजिए। h, a तथा b का मान व्यंजक $\frac{h(a+b)}{2}$ में रखते हुए इसका सत्यापन कीजिए।

इन्हें कीजिए

1. आलेख कागज़ (ग्राफ पेपर) के अंदर कोई भी समलंब WXYZ खींचिए जैसा कि आकृति 11.5 में दर्शाया गया है और इसे काटकर बाहर निकाल लीजिए।

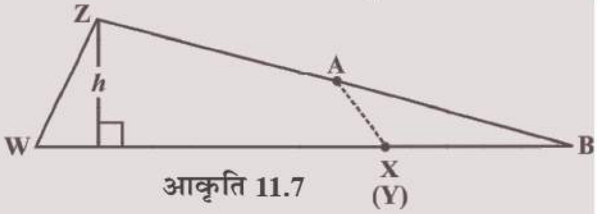


आकृति 11.5

2. भुजा XY को मोड़कर इसका मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए और इसे A नाम दीजिए (आकृति 11.6)

आकृति 11.6

3. भुजा ZA के साथ-साथ काटते हुए समलंब WXYZ को दो भागों में काटिए। Δ ZYA को ऐसे रखिए जैसा कि आकृति 11.7 में दर्शाया गया है जिसमें AY को AX के ऊपर रखा गया है।
   बड़े त्रिभुज के आधार की लंबाई क्या है? इस त्रिभुज के क्षेत्रफल का व्यंजक लिखिए (आकृति 11.7)।



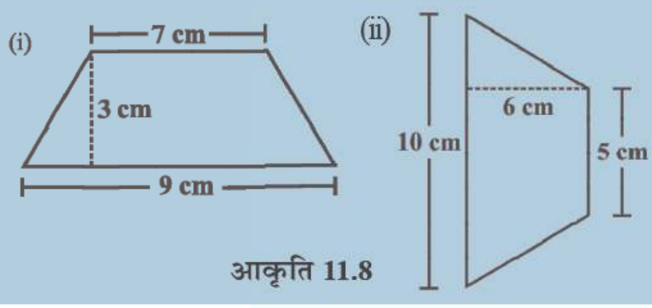
आकृति 11.7

4. इस त्रिभुज WZB और समलंब WXYZ का क्षेत्रफल समान है। (कैसे)? त्रिभुज के क्षेत्रफल के व्यंजक का उपयोग करते हुए समलंब के क्षेत्रफल का व्यंजक प्राप्त कीजिए।

इस प्रकार समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें समांतर भुजाओं की लंबाई और इन दो समांतर भुजाओं के बीच लंबवत् दूरी की आवश्यकता है। समांतर भुजाओं की लंबाइयों का योग और इनके बीच की लंबवत् दूरी के गुणनफल के आधे से हमें समलंब का क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

प्रयास कीजिए

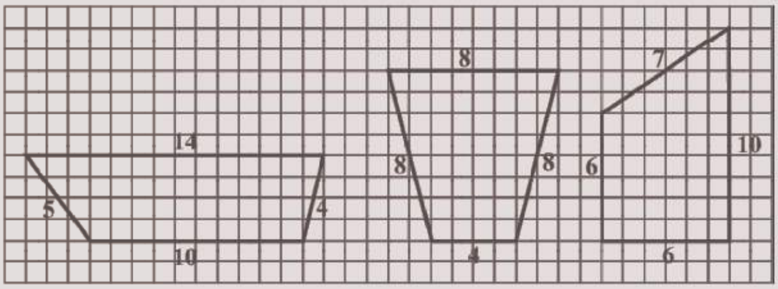
निम्नलिखित समलंबों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.8)



आकृति 11.8

इन्हें कीजिए

कक्षा VII में हमने विभिन्न परिमापों लेकिन समान क्षेत्रफलों वाले समांतर चतुर्भुजों की रचना करना सीखा है। क्या यह समलंबों के लिए भी किया जा सकता है? जाँच कीजिए क्या विभिन्न परिमापों वाले निम्नलिखित समलंब क्षेत्रफल में समान हैं : (आकृति 11.9)



आकृति 11.9

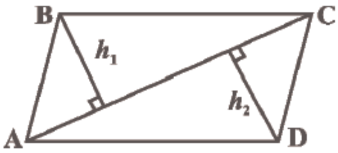
हम जानते हैं कि सभी सर्वांगसम आकृतियाँ क्षेत्रफल में समान होती हैं। क्या हम कह सकते हैं कि समान क्षेत्रफल वाली आकृतियाँ सर्वांगसम भी होती हैं? क्या ये आकृतियाँ सर्वांगसम हैं?

एक वर्गाकार शीट पर कम से कम तीन ऐसे समलंब खींचिए जिनके परिमाप समान हों परंतु क्षेत्रफल विभिन्न हों।

11.4 सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफल

किसी सामान्य चतुर्भुज का एक विकर्ण खींचकर उसे दो त्रिभुजों में विभक्त किया जा सकता है। यह 'विभक्त करने की क्रिया' सामान्य चतुर्भुज के लिए सूत्र ज्ञात करने में सहायता करती है। दी हुई आकृति का अध्ययन कीजिए। (आकृति 11.10)

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल



आकृति 11.10

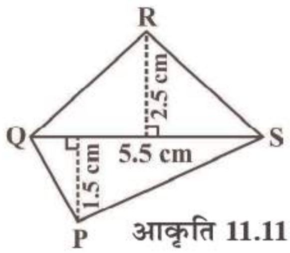
$$= (\Delta \text{ ABC का क्षेत्रफल}) + (\Delta \text{ ADC का क्षेत्रफल})$$

$$= (\frac{1}{2}\text{AC} \times h_1) + (\frac{1}{2}\text{AC} \times h_2) = \frac{1}{2}\text{AC} \times (h_1 + h_2)$$

$$= \frac{1}{2}\, d\,(h_1 + h_2) \text{ यहाँ AC की लंबाई } d \text{ है।}$$

उदाहरण 1 : आकृति 11.11 में दर्शाए गए चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $d = 5.5$ cm, $h_1 = 2.5$ cm, $h_2 = 1.5$ cm,



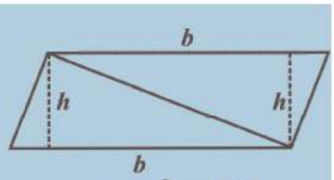
आकृति 11.11

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\, d(h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5 + 1.5)\ \text{cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times 4\ \text{cm}^2 = 11\ \text{cm}^2$$

प्रयास कीजिए

हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज भी एक चतुर्भुज है। आइए, इसे भी हम दो त्रिभुजों में विभक्त करते हैं और इन दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। इस प्रकार समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात करते हैं। क्या यह सूत्र आपको पूर्व में ज्ञात सूत्र से मेल खाता है? (आकृति 11.12)



आकृति 11.12

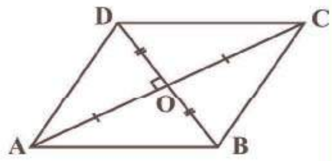
11.4.1 विशेष चतुर्भुजों का क्षेत्रफल

त्रिभुजों में विभक्त करने वाली इस विधि को हम समचतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करने में उपयोग कर सकते हैं। आकृति 11.13 में ABCD एक समचतुर्भुज है। इसलिए इसके विकर्ण एक दूसरे के लंब समद्विभाजक हैं।

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= (\Delta$ ACD का क्षेत्रफल$) + (\Delta$ ABC का क्षेत्रफल$)$

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times OD\right) + \left(\frac{1}{2} \times AC \times OB\right) = \frac{1}{2} AC \times (OD + OB)$$

$$= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$ जहाँ $d_1 = AC$ तथा $d_2 = BD$ है।



आकृति 11.13

दूसरे शब्दों में, समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा होता है।

उदाहरण 2 : एक ऐसे समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्णों की लंबाइयाँ 10 cm और 8.2 cm हैं।

हल : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} d_1 d_2$, जहाँ d_1, d_2 विकर्णों की लंबाइयाँ हैं।

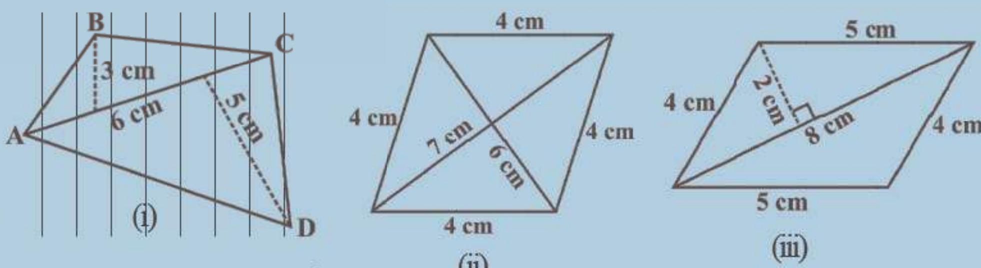
$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2\ \text{cm}^2 = 41\ \text{cm}^2.$$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

समांतर चतुर्भुज का विकर्ण खींचकर इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटा जाता है। क्या समलंब को भी दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है?

प्रयास कीजिए

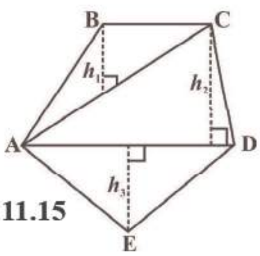
निम्नलिखित चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.14)



आकृति 11.14

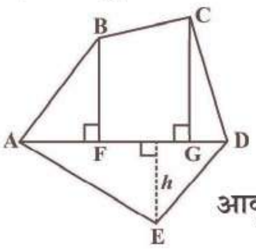
11.5 बहुभुज का क्षेत्रफल

हम एक चतुर्भुज को त्रिभुजों में खंडित करते हैं और इसका क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। इसी प्रकार की विधि बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उपयोग की जा सकती है। एक पंचभुज के लिए निम्नलिखित पर विचार कीजिए (आकृति 11.15, 11.6)



आकृति 11.15

विकर्ण AC तथा AD की रचना करते हुए पंचभुज ABCDE को तीन भागों में बाँटा गया है। इसलिए ABCDE का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔADC का क्षेत्रफल + ΔAED का क्षेत्रफल।

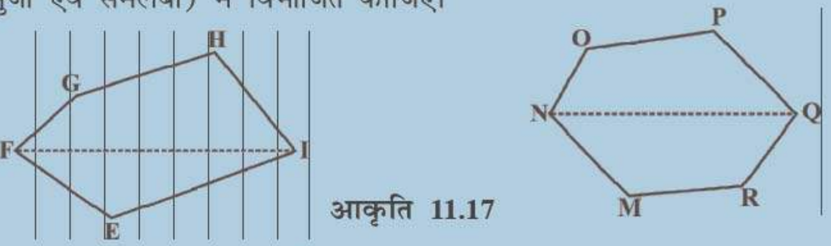


आकृति 11.16

एक विकर्ण AD और इस पर दो लंब BF एवं CG की रचना करते हुए पंचभुज ABCDE को चार भागों में बाँटा गया है। इसलिए ABCDE का क्षेत्रफल = समकोण त्रिभुज AFB का क्षेत्रफल + समलंब BFGC का क्षेत्रफल + समकोण त्रिभुज CGD का क्षेत्रफल + Δ AED का क्षेत्रफल (समलंब BFGC की समांतर भुजाओं को पहचानिए)

प्रयास कीजिए

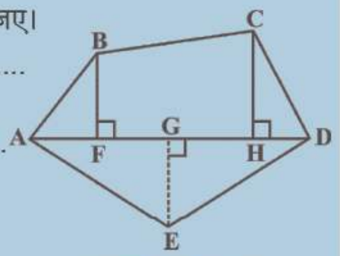
(i) निम्नलिखित बहुभुजों (आकृति 11.17) का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इन्हें विभिन्न भागों (त्रिभुजों एवं समलंबों) में विभाजित कीजिए।



आकृति 11.17

बहुभुज EFGHI का एक विकर्ण FI है। बहुभुज MNOPQR का एक विकर्ण NQ है।

(ii) बहुभुज ABCDE को विभिन्न भागों में बाँटा गया है जैसा कि आकृति 11.18 में दर्शाया गया है। यदि AD = 8 cm, AH = 6 cm, AG = 4 cm, AF = 3 cm और लंब BF = 2 cm, CH = 3 cm, EG = 2.5 cm तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.18

बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल = Δ AFB का क्षेत्रफल + ...

Δ AFB का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times \text{AF} \times \text{BF} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 2 =$ ....

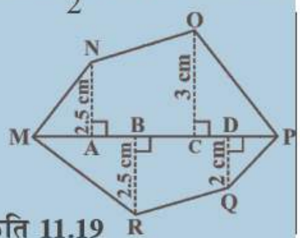
समलंब FBCH का क्षेत्रफल $= \text{FH} \times \dfrac{(\text{BF} + \text{CH})}{2}$

$$= 3 \times \frac{(2+3)}{2} \quad [\text{FH} = \text{AH} - \text{AF}]$$

ΔCHD का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times \text{HD} \times \text{CH} =$ ....; ΔADE का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times \text{AD} \times \text{GE} =$ ....

इसलिए बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल = ...

(iii) आकृति 11.19 में दर्शाई गई बहुभुज MNOPQR में यदि MP = 9 cm, MD = 7 cm, MC = 6 cm, MB = 4 cm, MA = 2 cm हो, तो बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। NA, OC, QD एवं RB विकर्ण MP पर खींचे गए लंब हैं।



आकृति 11.19

उदाहरण 1 : समलंब के आकार के एक खेत का क्षेत्रफल 480 m^2 हैं; दो समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 15 m है और उनमें से एक समांतर भुजा की लंबाई 20 m है। दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : समलंब की समांतर भुजाओं में से एक की लंबाई $a = 20$ m, मान लीजिए दूसरी समांतर भुजा b है, ऊँचाई $h = 15$ m

समलंब का दिया हुआ क्षेत्रफल $= 480 \text{ m}^2$

$$\text{समलंब का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} h\,(a + b)$$

$$\text{इसलिए} \quad 480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20 + b) \quad \text{अथवा} \quad \frac{480 \times 2}{15} = 20 + b$$

$$\text{अथवा} \quad 64 = 20 + b \qquad \text{अथवा} \quad b = 44 \text{ m}$$

अतः समलंब की दूसरी समांतर भुजा 44 m है।

उदाहरण 2 : एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 240 cm^2 है और विकर्णों में से एक की लंबाई 16cm है। दूसरा विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए एक विकर्ण की लंबाई $d_1 = 16$ cm

और दूसरे विकर्ण की लंबाई $= d_2$

$$\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} d_1 . d_2$$

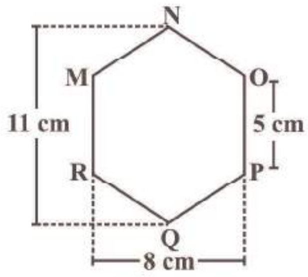
$$\therefore 240 = \frac{1}{2} \times 16 \times d_2$$

$$\therefore \frac{240 \times 2}{16} = d_2$$

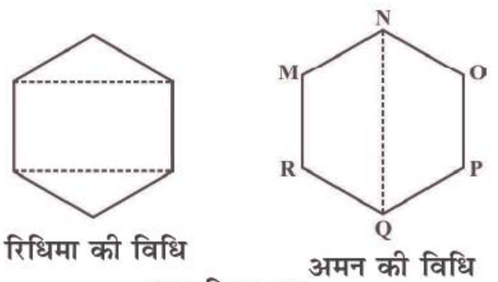
अतः, $d_2 = 30$ cm

इस प्रकार दूसरे विकर्ण की लंबाई 30 cm है।

उदाहरण 3: MNOPQR (आकृति 11.20) एक षड्भुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 5 cm है। अमन और रिधिमा ने इसे दो विभिन्न प्रकार से विभाजित किया (आकृति 11.21)। दोनों प्रकार का उपयोग करते हुए इस षड्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



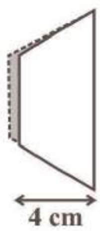
आकृति 11.20



आकृति 11.21

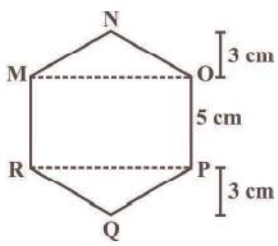
हल : अमन की विधि :

क्योंकि यह एक षड्भुज है इसलिए NQ इस षड्भुज को दो सर्वांगसम समलंबों में विभाजित करता है। आप इसे कागज़ मोड़ने की विधि से सत्यापित कर सकते हैं। (आकृति 11.22)



आकृति 11.22

अब समलंब MNQR का क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{(11+5)}{2} = 2 \times 16 = 32$ cm^2.



आकृति 11.23

इसलिए षड्भुज MNOPQR का क्षेत्रफल $= 2 \times 32 = 64$ cm^2.

रिधिमा की विधि :

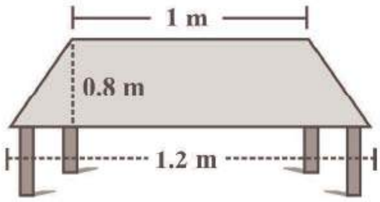
Δ MNO और Δ RPQ सर्वांगसम त्रिभुज हैं जिनमें से प्रत्येक का शीर्षलंब 3 cm है (आकृति 11.23) (1)

आप इन त्रिभुजों को काटकर और एक-दूसरे के ऊपर रखकर इसका सत्यापन कर सकते हैं।

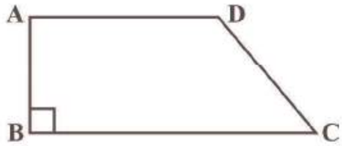
Δ MNO का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12 \text{ cm}^2 = \Delta$ RPQ का क्षेत्रफल आयत MOPR का क्षेत्रफल $= 8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$.

अब, षड्भुज MNOPQR का क्षेत्रफल $= 40 + 12 + 12 = 64 \text{ cm}^2$.

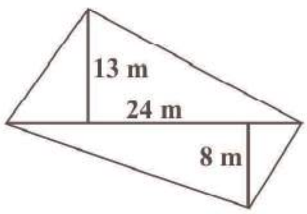
प्रश्नावली 11.2



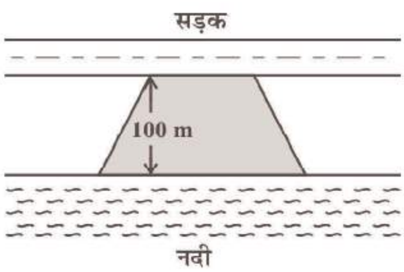
1. एक मेज़ के ऊपरी पृष्ठ (सतह) का आकार समलंब जैसा है। यदि इसकी समांतर भुजाएँ 1 m और 1.2 m हैं तथा इन समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 0.8 m है, तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक समलंब का क्षेत्रफल 34 cm^2 है और इसकी ऊँचाई 4 cm है। समांतर भुजाओं में से एक की 10 cm लंबाई है। दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।



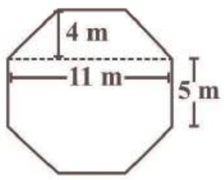
3. एक समलंब के आकार के खेत ABCD की बाड़ की लंबाई 120 m है। यदि BC = 48 m, CD = 17 m और AD = 40 m है, तो इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। भुजा AB समांतर भुजाओं AD तथा BC पर लंब है।



4. एक चतुर्भुज आकार के खेत का विकर्ण 24 m है और शेष सम्मुख शीर्षों से इस विकर्ण पर खींचे गए लंब 8 m एवं 13 m हैं। खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. किसी समचतुर्भुज के विकर्ण 7.5 cm एवं 12 cm हैं। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 5 cm और शीर्षलंब 4.8 cm है। यदि एक विकर्ण की लंबाई 8 cm है तो दूसरे विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।
7. किसी भवन के फर्श में समचतुर्भुज के आकार की 3000 टाइलें हैं और इनमें से प्रत्येक के विकर्ण 45 cm एवं 30 cm लंबाई के हैं। 4 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से इस फर्श को पॉलिश करने का व्यय ज्ञात कीजिए।



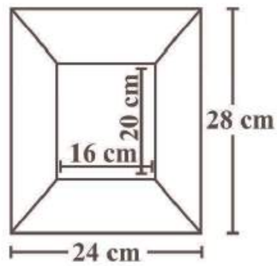
8. मोहन एक समलंब के आकार का खेत खरीदना चाहता है। इस खेत की नदी के साथ वाली भुजा सड़क के साथ वाली भुजा के समांतर हैं और लंबाई में दुगुनी है। यदि इस खेत का क्षेत्रफल $10{,}500 \text{ m}^2$ हैं और दो समांतर भुजाओं के बीच की लंबवत् दूरी 100 m है, तो नदी के साथ वाली भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।



9. एक ऊपर उठे हुए चबूतरे का ऊपरी पृष्ठ अष्टभुज के आकार का है। जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। अष्टभुजी पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. एक पंचभुज आकार का बगीचा है जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ज्योति और कविता ने इसे दो विभिन्न तरीकों से विभाजित किया। दोनों तरीकों का उपयोग करते हुए इस बगीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या आप इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने की कोई और विधि बता सकते हैं?

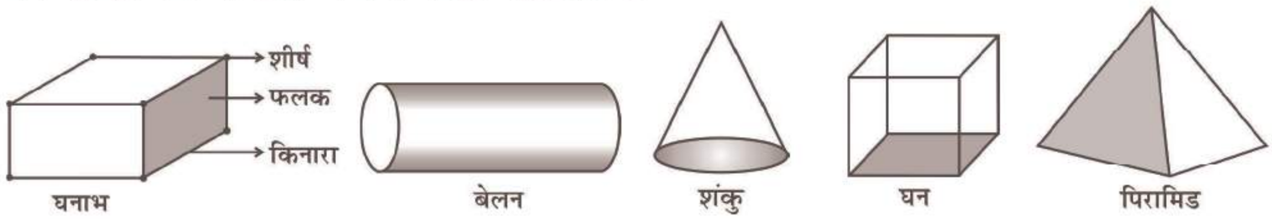
11. संलग्न पिक्चर फ्रेम के आरेख की बाहरी एवं अंत: विमाएँ क्रमश: 24 cm × 28 cm एवं 16 cm × 20 cm हैं। यदि फ्रेम के प्रत्येक खंड की चौड़ाई समान है, तो प्रत्येक खंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



11.6 ठोस आकार

आप अपनी पिछली कक्षाओं में अध्ययन कर चुके हैं कि द्विविमीय आकृतियों को त्रिविमीय आकारों के फलकों के रूप में पहचाना जा सकता है। अभी तक हमने जिन ठोसों का अध्ययन किया है उन पर ध्यान दीजिए (आकृति 11.24)।

ध्यान दीजिए कि कुछ आकारों में दो या दो से अधिक समरूप (सर्वांगसम) फलक हैं। उनको नाम दीजिए। कौन से ठोसों में सभी फलक सर्वांगसम हैं?

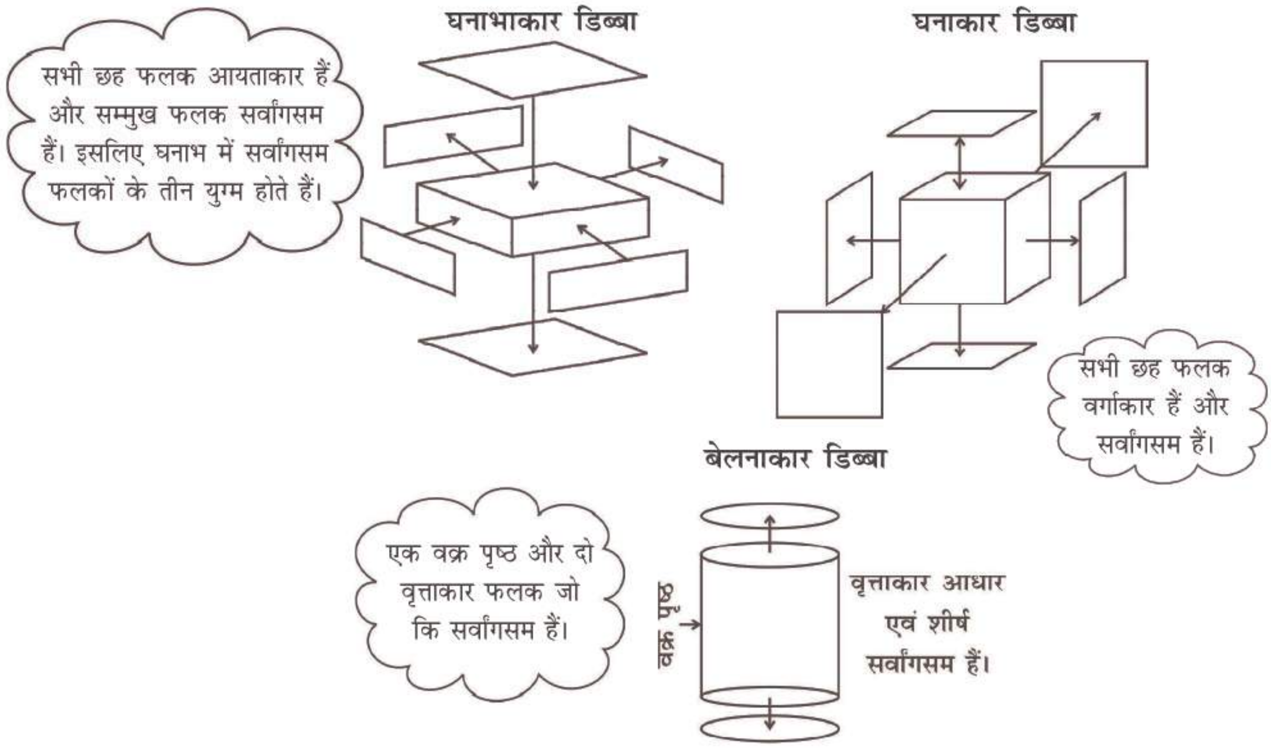


आकृति 11.24

इन्हें कीजिए

साबुन, खिलौने, मंजन, अल्पाहार इत्यादि प्राय: घनाभकार, घनाकार अथवा बेलनाकार डिब्बों में बंद आते हैं। ऐसे डिब्बों को एकत्रित कीजिए (आकृति 11.25)।

आकृति 11.25



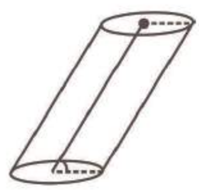
अब एक समय में एक प्रकार के डिब्बे को लीजिए। इसके सभी फलकों को काटिए। प्रत्येक फलक के आकार को देखिए और समान फलकों को एक-दूसरे के ऊपर रखकर डिब्बे में फलकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

अपने प्रेक्षणों को लिखिए।

आकृति 11.26

(यह एक लंब वृत्तीय बेलन है।)

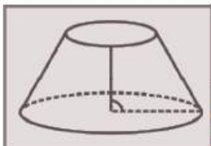
क्या आपने निम्नलिखित पर ध्यान दिया– बेलन के, सर्वांगसम वृत्ताकार फलक एक-दूसरे के समांतर हैं (आकृति 11.26)। ध्यान दीजिए कि वृत्ताकार फलकों के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड आधार पर लंब है। ऐसे बेलन लंबवृत्तीय बेलन कहलाते हैं। हम केवल इस प्रकार के बेलनों का ही अध्ययन करेंगे, यद्यपि दूसरे प्रकार के बेलन भी होते हैं (आकृति 11.27)।



आकृति 11.27

(यह एक लंब वृत्तीय बेलन नहीं है।)

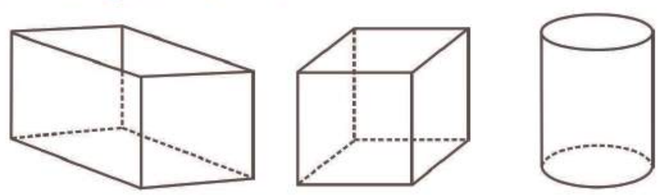
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



संलग्न आकृति में दर्शाए गए ठोस को बेलन कहना क्यों गलत है?

11.7 घन, घनाभ और बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

इमरान, मोनिका और जसपाल क्रमशः समान ऊँचाई वाले घनाभाकार, घनाकार और बेलनाकार डिब्बों को पेंट कर रहे हैं (आकृति 11.28)।



आकृति 11.28

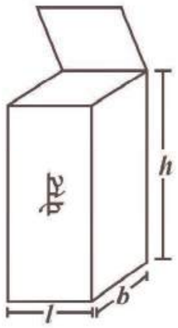
वे यह ज्ञात करने का प्रयास करते हैं कि किसने अधिक क्षेत्रफल को पेंट किया है। हरी उन्हें सुझाव देता है कि प्रत्येक डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करना उनकी मदद करेगा।

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और इनका योग कीजिए। किसी ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल उसके फलकों के क्षेत्रफलों का योग होता है। और अधिक स्पष्ट करने के लिए हम प्रत्येक आकार को एक-एक करके लेते हैं।

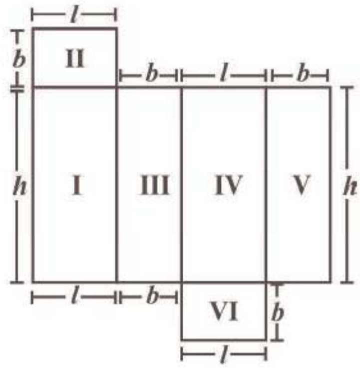
11.7.1 घनाभ

मान लीजिए, आप एक घनाभकार डिब्बे (आकृति 11.29) को काटकर और खोलकर समतल फैला देते हैं (आकृति 11.30), हमें एक जाल (नेट) प्राप्त होता है।

प्रत्येक भुजा की विमा लिखिए। आप जानते हैं कि घनाभ में सर्वांगसम फलकों के तीन युग्म होते हैं। प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आप कौन-सा व्यंजक (सूत्र) उपयोग कर सकते हैं?



आकृति 11.29



आकृति 11.30

डिब्बे के सभी फलकों का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हम देखते हैं कि घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = क्षेत्रफल I + क्षेत्रफल II + क्षेत्रफल III + क्षेत्रफल IV + क्षेत्रफल V + क्षेत्रफल VI

$= h \times l + b \times l + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$

इसलिए कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l) = 2(lb + bh + hl)$

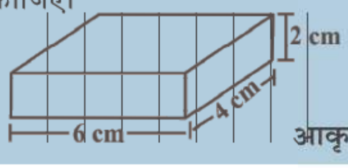
जिसमें h, l और b क्रमशः घनाभ की ऊँचाई, लंबाई और चौड़ाई हैं।

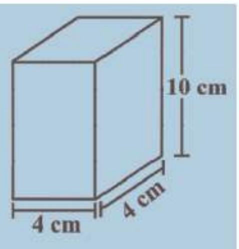
यदि उपर्युक्त दर्शाए गए डिब्बे की ऊँचाई, लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 20 cm, 15 cm और 10 cm हैं, तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(20 \times 15 \ + \ 20 \times 10 \ + \ 10 \times 15)$

$= 2\,(300 + 200 + 150) = 1300\ m^2$

प्रयास कीजिए

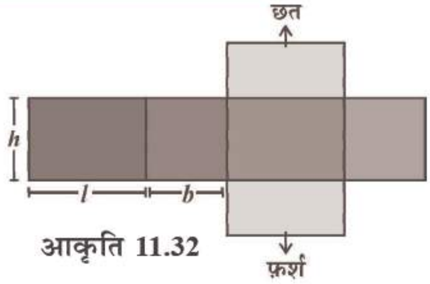
निम्नलिखित घनाभों (आकृति 11.31) का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।





आकृति 11.31

- घनाभ की दीवारें (तल एवं शीर्ष के अतिरिक्त फलक) पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल प्रदान करती हैं। उदाहरणतः जिस घनाभाकार कमरे में आप बैठे हुए हैं उस कमरे की चारदीवारों का कुल क्षेत्रफल कमरे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल है (आकृति 11.32)। अतः घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $2(h \times l + b \times h)$ अथवा $2h\,(l + b)$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।



आकृति 11.32

इन्हें कीजिए

(i) एक घनाभाकार डस्टर (जिसे आपके अध्यापक कक्षा में उपयोग करते हैं) के पार्श्व पृष्ठ को भूरे रंग के कागज़ की पट्टी से इस प्रकार ढकिए कि यह डस्टर के पृष्ठ के चारों ओर बिल्कुल ठीक बैठे। कागज़ को हटाइए। कागज़ का क्षेत्रफल मापिए। क्या यह डस्टर का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल है?

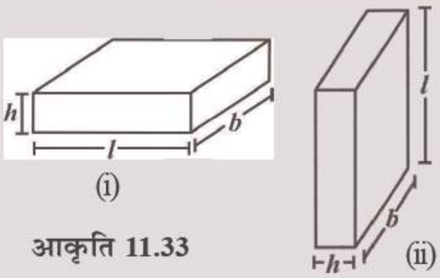
(ii) अपनी कक्षा के कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई मापिए और निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

(a) खिड़कियों और दरवाजों के क्षेत्रफल को छोड़कर कमरे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(b) इस कमरे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(c) सफेदी किए जाने वाला, कमरे का कुल क्षेत्रफल।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



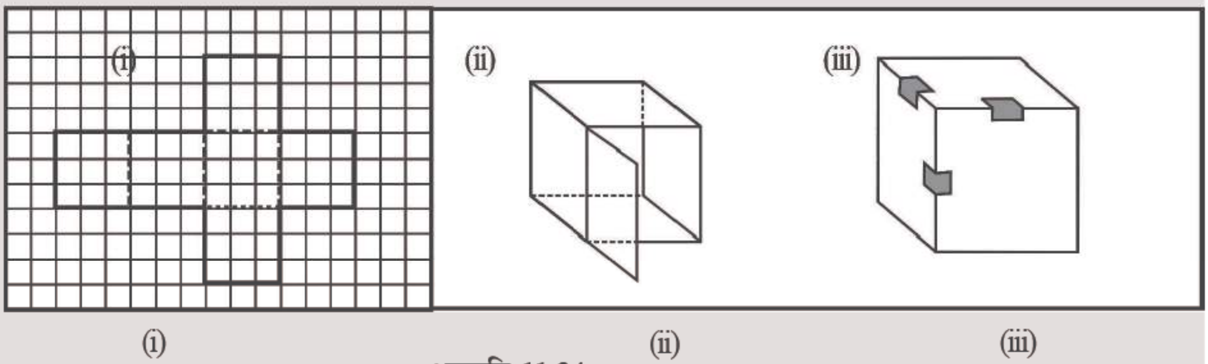
आकृति 11.33

1. क्या हम कह सकते हैं कि घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल ?
2. यदि हम किसी घनाभ (**आकृति** 11.33(i)) की ऊँचाई और आधार की लंबाई को परस्पर बदलकर एक दूसरा घनाभ (आकृति 11.33(ii)), प्राप्त कर लें तो क्या पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल बदल जाएगा?

11.7.2 घन

इन्हें कीजिए

एक वर्गांकित कागज़ पर दर्शाए गए पैटर्न को खींचिए और उसे काटिए (आकृति 11.34(i))। आप जानते हैं कि यह पैटर्न घन का जाल (नेट) है। इसे रेखाओं के अनुदिश मोड़िए (आकृति 11.34(ii)) और घन बनाने के लिए किनारों पर टेप लगाइए (आकृति 11.34(iii))

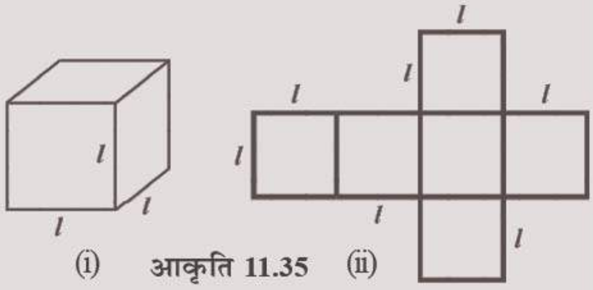


आकृति 11.34

(a) इस घन की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या है? ध्यान दीजिए घन के सभी फलक वर्गाकार हैं। इसलिए घन की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान होती है (आकृति 11.35(i))।

(b) प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल लिखिए। क्या सभी फलकों के क्षेत्रफल समान हैं?

(c) इस घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल लिखिए।

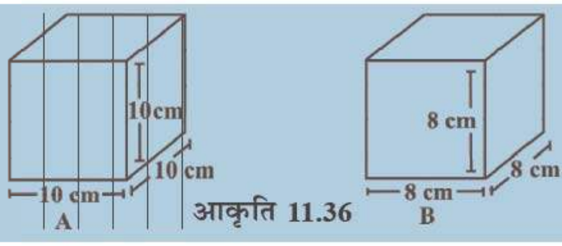


आकृति 11.35

(d) यदि घन की प्रत्येक भुजा l है, तो प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल क्या होगा (आकृति 11.35(ii))। क्या हम कह सकते हैं कि l भुजा वाले घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6l^2$ है?

प्रयास कीजिए

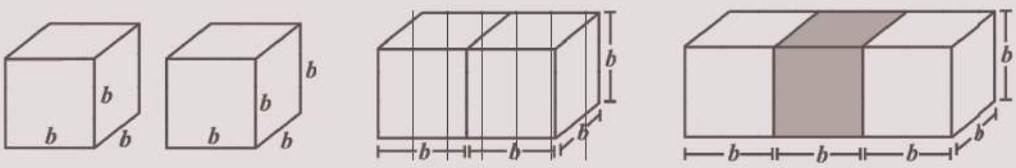
घन A का पृष्ठीय क्षेत्रफल और घन B का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.36)।



आकृति 11.36

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

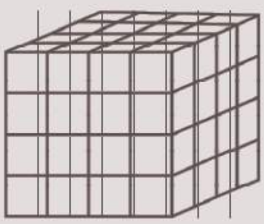
(i) b भुजा वाले दो घनों को मिलाकर एक घनाभ बनाया गया है (आकृति 11.37)। इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है? क्या यह $12b^2$ है? क्या ऐसे तीन घनों को मिलाकर बनाए गए घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $18b^2$ है? क्यों?



आकृति 11.37

(ii) न्यूनतम पृष्ठीय क्षेत्रफल का घनाभ निर्मित करने के लिए समान भुजा वाले 12 घनों को किस प्रकार व्यवस्थित करेंगे?

(iii) किसी घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल पर पेंट करने के पश्चात् उस घन को समान विमाओं वाले 64 घनों में काटा जाता है (आकृति 11.38)। इनमें से कितने घनों का कोई भी फलक पेंट नहीं हुआ है? कितने घनों का 1 फलक पेंट हुआ है? कितने घनों के 2 फलक पेंट हुए हैं? कितने घनों के तीन फलक पेंट हुए हैं?



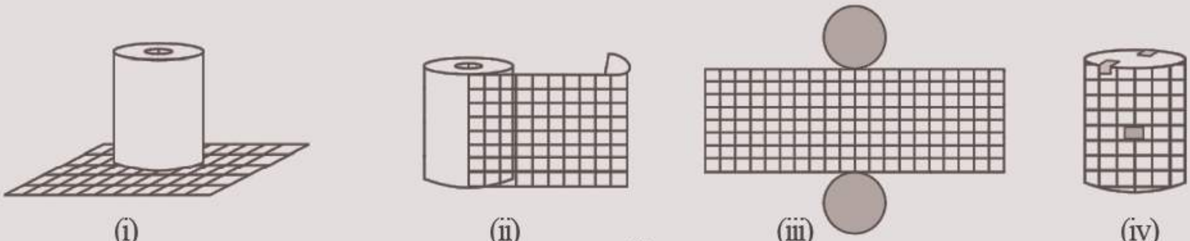
आकृति 11.38

11.7.3 बेलन

जितने भी बेलन हम देखते हैं उनमें से अधिकतर लंब वृत्तीय बेलन है। उदाहरणत: एक टिन, एक गोल खंभा, ट्यूबलाइट, पानी के पाइप इत्यादि :

इन्हें कीजिए

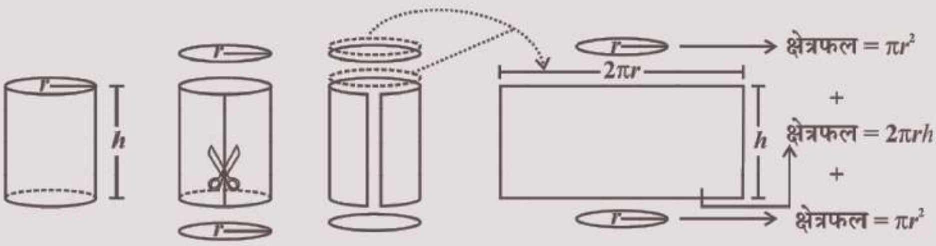
(i) एक बेलनाकार कैन अथवा डिब्बा लीजिए और इसके आधार का ग्राफ पेपर पर बनाइए और इसे काटकर बाहर निकाल लीजिए (आकृति 11.39(i))। एक ऐसा ग्राफ पेपर लीजिए जिसकी चौड़ाई कैन की ऊँचाई के समान हो। इस पट्टी को कैन के चारों ओर इस प्रकार लपेटिए ताकि यह कैन के चारों ओर बिल्कुल ठीक बैठे (अतिरिक्त कागज़ को हटा दीजिए) (आकृति 11.39(ii)) टुकड़ों को एक दूसरे से मिलाकर टेप लगाइए (आकृति 11.39(iii)) ताकि एक बेलन बन जाए (आकृति 11.39(iv)) कैन के चारों ओर लपेटे गए कागज़ का आकार क्या है।



आकृति 11.39

नि:संदेह यह आकार में आयताकार है। जब आप इस बेलन के भागों को एक दूसरे से मिलाकर टेप लगा देते हैं तो आयताकार पट्टी की लंबाई वृत्त की परिधि के समान है। वृत्ताकार आधार की त्रिज्या (r) और आयताकार पट्टी की लंबाई (l) एवं चौड़ाई (h) को नोट कीजिए। क्या $2\pi r$ = पट्टी की लंबाई? जाँच कीजिए क्या आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल $2\pi rh$ है? गिनती कीजिए कि वर्गांकित कागज़ की कितनी वर्ग इकाई बेलन को निर्मित करने में उपयोग की गई है। जाँच कीजिए क्या यह गिनती $2\pi r(r + h)$ के मान के लगभग समान है।

(ii) हम बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल के रूप में संबंध $2\pi r(r + h)$ का निगमन दूसरी विधि से भी कर सकते हैं। जैसा निम्नलिखित आकृति में दर्शाया गया है वैसे ही एक बेलन को काटने की कल्पना कीजिए (आकृति 11.40):



आकृति 11.40

नोट : जब तक कुछ कहा न गया हो हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

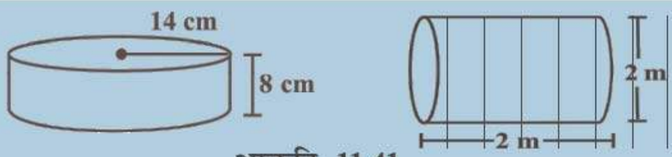
इसलिए बेलन का पार्श्व पृष्ठीय (वक्र पृष्ठीय) क्षेत्रफल $2\pi rh$ है।

बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$ या $2\pi r(r + h)$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित बेलनों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.41)

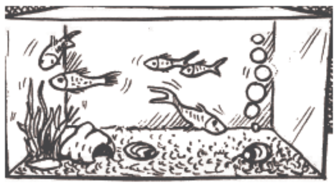


आकृति 11.41

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

नोट कीजिए कि किसी बेलन का पार्श्व पृष्ठीय (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, आधार की परिधि × बेलन की ऊँचाई के समान होता है। क्या हम घनाभ के पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल को आधार का परिमाप × घनाभ की ऊँचाई के रूप में लिख सकते हैं?

उदाहरण 4 : एक मछलीघर घनाभ के आकार का है जिसके बाह्य माप 80 cm × 30 cm × 40 cm हैं। इसके तल, पृष्ठभाग वाले फलक और पीछे वाले फलक को रंगीन कागज़ से ढकना है। आवश्यक कागज़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : मछलीघर की लंबाई $= l = 80$ cm

मछलीघर की चौड़ाई $= b = 30$ cm

मछलीघर की ऊँचाई $= h = 40$ cm

आधार का क्षेत्रफल $= l \times b = 80 \times 30 = 2400 \text{ cm}^2$

पृष्ठभाग वाले फलक का क्षेत्रफल $= b \times h = 30 \times 40 = 1200 \text{ cm}^2$

पीछे वाले फलक का क्षेत्रफल $= l \times h = 80 \times 40 = 3200 \text{ cm}^2$

वांछित क्षेत्रफल = आधार का क्षेत्रफल + पीछे वाले फलक का क्षेत्रफल + (2 × पृष्ठभाग वाले फलक का क्षेत्रफल)

$= 2400 + 3200 + (2 \times 1200) = 8000 \text{ cm}^2$

अत: वांछित रंगीन कागज़ का क्षेत्रफल 8000 cm^2 है।

उदाहरण 5 : एक घनाभाकार कक्ष की आंतरिक माप 12 m × 8 m × 4 m है। यदि सफ़ेदी कराने का खर्च ₹ 5 प्रति वर्ग मीटर है तो उस कक्ष की चार दीवारों पर सफ़ेदी कराने का खर्च ज्ञात कीजिए। यदि उस कमरे की छत की भी सफ़ेदी कराई जाए तो सफ़ेदी कराने का खर्च कितना होगा?

हल : मान लीजिए, कमरे की लंबाई $= l = 12$ m

कमरे की चौड़ाई $= b = 8$ m , कमरे की ऊँचाई $= h = 4$ m

कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × कमरे की ऊँचाई

$= 2\,(l + \text{b}) \times h = 2\,(12 + 8) \times 4$

$= 2 \times 20 \times 4 = 160 \text{ m}^2$

सफ़ेदी कराने का प्रति वर्गमीटर खर्च = ₹ 5

इसलिए कमरे की चार दीवारों पर सफ़ेदी कराने का कुल खर्च $= 160 \times 5 =$ ₹ 800

छत का क्षेत्रफल $= l \times b = 12 \times 8 = 96 \text{ m}^2$

छत पर सफ़ेदी कराने का कुल खर्च $= 96 \times 5 =$ ₹ 480

सफ़ेदी कराने का कुल खर्च = चार दीवारों को रंगने का खर्च + छत को रंगने का खर्च

$= 800 + 480 =$ ₹ 1280

उदाहरण 6 : एक भवन में 24 बेलनाकार खंभे हैं। प्रत्येक खंभे की त्रिज्या 28 सेमी और ऊँचाई 4 मी है। ₹ 8 प्रति वर्ग मीटर की दर से सभी खंभे के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : बेलनाकार खंभे की त्रिज्या, $r = 28 \text{ cm} = 0.28 \text{ m}$

ऊँचाई, $h = 4 \text{ m}$

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

खंभे का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.28 \times 4 = 7.04 \text{ m}^2$

ऐसे 24 खंभों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 7.04 \times 24 = 168.96 \text{ m}^2$

1 m^2 पर पेंट कराने का खर्च = ₹ 8

अत: 168.96 m^2 क्षेत्रफल पर पेंट कराने का खर्च $= 168.96 \times 8 =$ ₹ 1351.68

उदाहरण 7 : एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 cm और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 cm^2 है।

हल : मान लीजिए, बेलन की ऊँचाई $= h$, त्रिज्या $= r = 7\text{cm}$

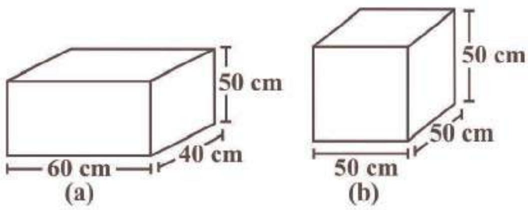
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(h + r)$

अर्थात् $$2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + h) = 968 \quad \text{या} \quad h = 15 \text{ cm}$$

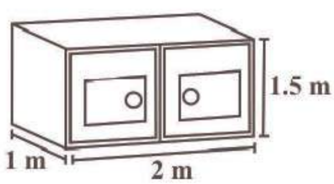
अत: बेलन की ऊँचाई 15 cm है।

प्रश्नावली 11.3

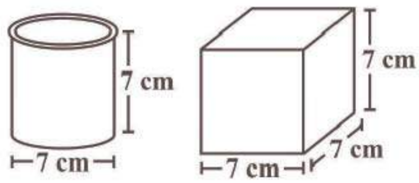
1. दो घनाभाकार डिब्बे हैं जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है। किस डिब्बे को बनाने के लिए कम सामग्री की आवश्यकता है?



2. 80 cm × 48 cm × 24 cm माप वाले एक सूटकेस को तिरपाल के कपड़े से ढकना है। ऐसे 100 सूटकेसों को ढकने के लिए 96 cm चौड़ाई वाले कितने मीटर तिरपाल के कपड़े की आवश्यकता है?
3. एक ऐसे घन की भुजा ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 600 cm^2 है।
4. रूखसार ने 1 m × 2 m × 1.5 m माप वाली एक पेटी को बाहर से पेंट किया। यदि उसने पेटी के तल के अतिरिक्त उसे सभी जगह से पेंट किया हो तो ज्ञात कीजिए कि उसने कितने पृष्ठीय क्षेत्रफल को पेंट किया।



5. डैनियल एक ऐसे घनाभाकार कमरे की दीवारों और छत को पेंट कर रहा है जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 15 m, 10 m एवं 7 m हैं। पेंट की प्रत्येक कैन की सहायता से 100 m^2 क्षेत्रफल को पेंट किया जा सकता है। तो उस कमरे के लिए उसे पेंट की कितनी कैनों की आवश्यकता होगी?



6. वर्णन कीजिए कि दाईं तरफ दी गई आकृतियाँ किस प्रकार एक समान हैं और किस प्रकार एक दूसरे से भिन्न हैं? किस डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है?

7. 7 m त्रिज्या और 3 m ऊँचाई वाला एक बंद बेलनाकार टैंक किसी धातु की एक चादर से बना हुआ है। उसे बनाने के लिए वांछित धातु की चादर की मात्रा ज्ञात कीजिए।

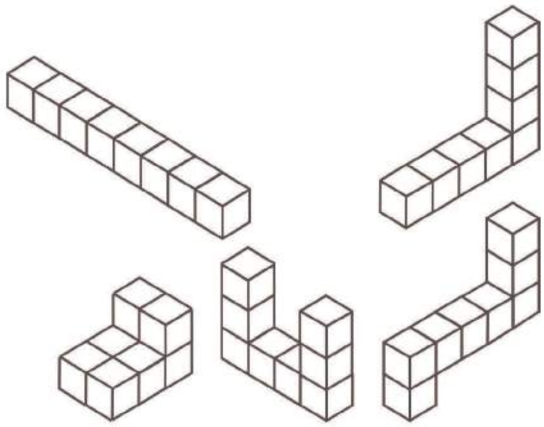
8. एक खोखले बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4224 cm^2 है। इसे इसकी ऊँचाई के अनुदिश काटकर 32 cm चौड़ाई की एक आयताकार चादर बनाई जाती है। आयताकार चादर का परिमाप ज्ञात कीजिए।

9. किसी सड़क को समतल करने के लिए एक सड़क रोलर को सड़क के ऊपर एक बार घूमने के लिए 750 चक्कर लगाने पड़ते हैं। यदि सड़क रोलर का व्यास 84 cm और लंबाई 1 m है तो सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. एक कंपनी अपने दूध पाउडर को ऐसे बेलनाकार बर्तनों में पैक करती है जिनका व्यास 14 cm और ऊँचाई 20 cm है। कंपनी बर्तन के पृष्ठ के चारों ओर एक लेबल लगाती है (जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है)। यदि यह लेबल बर्तन के तल और शीर्ष दोनों से 2 cm की दूरी पर चिपकाया जाता है तो लेबल का क्षेत्रफल क्या है?

11.8 घन, घनाभ और बेलन का आयतन

एक त्रिविमीय वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह उसका **आयतन** कहलाता है। अपने आसपास की वस्तुओं के आयतन की तुलना करने का प्रयत्न कीजिए। उदाहरणत: किसी कमरे के अंदर रखी हुई अलमारी की तुलना में कमरे का आयतन अधिक है। इसी प्रकार आपके पेंसिल बक्स का आयतन इसके अंदर रखे पेन और मिटाने वाली रबर के आयतन से अधिक है। क्या आप इनमें से किसी भी वस्तु का आयतन माप सकते हैं?



आकृति 11.42

स्मरण कीजिए, हम किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं। यहाँ हम ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का उपयोग करेंगे क्योंकि घन सबसे अधिक सुविधाजनक ठोस आकार हैं (ठीक उसी प्रकार जैसे किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल मापने के लिए वर्ग सबसे अधिक सुविधाजनक आकार है)।

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम क्षेत्र को वर्ग इकाइयों में विभाजित करते हैं, इसी प्रकार, किसी ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हमें उस ठोस को घन इकाइयों में विभाजित करने की आवश्यकता है।

विचार कीजिए कि निम्नलिखित ठोसों में से प्रत्येक का आयतन 8 घन इकाई है (आकृति 11.42)।

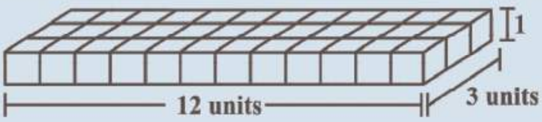
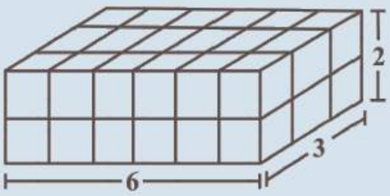
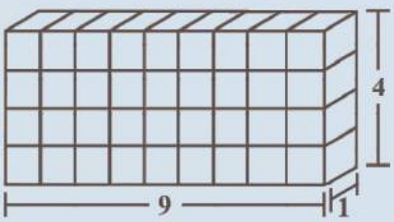
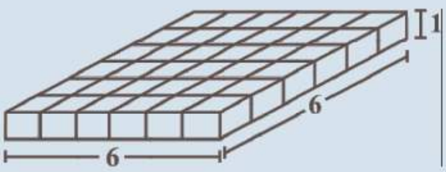
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि किसी ठोस का आयतन मापने के लिए हम उसमें स्थित घन इकाइयों को गिनते हैं।

$$\begin{aligned}
1 \text{ घन सेंटीमीटर} &= 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3 \\
&= 10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 10\text{ mm} = \ldots\ldots\ldots\ldots\text{ mm}^3 \\
1 \text{ घन मीटर} &= 1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m} = 1\text{ m}^3 \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{ cm}^3 \\
1 \text{ घन मिलीमीटर} &= 1\text{ mm} \times 1\text{ mm} \times 1\text{ mm} = 1\text{ mm}^3 \\
&= 0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{ cm}^3
\end{aligned}$$

अब हम घनाभ, घन और बेलन का आयतन ज्ञात करने के लिए कुछ व्यंजक (सूत्र) ज्ञात करते हैं। आइए, प्रत्येक ठोस पर एक-एक करके चर्चा करते हैं।

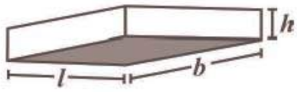
11.8.1 घनाभ

समान आकार (प्रत्येक घन की लंबाई समान) वाले 36 घन लीजिए एक घनाभ बनाने के लिए उन्हें व्यवस्थित कीजिए। आप इन्हें अनेक रूपों में व्यवस्थित कर सकते हैं। निम्नलिखित सारणी पर विचार कीजिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

	घनाभ	लंबाई	चौड़ाई	ऊँचाई	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

आप क्या देखते करते हैं?

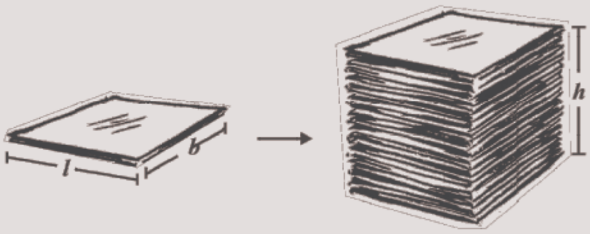
क्योंकि इन घनाभों को बनाने के लिए हमने 36 घनों का उपयोग किया है इसलिए प्रत्येक घनाभ का आयतन 36 घन इकाई है। इसके अतिरिक्त प्रत्येक घनाभ का आयतन उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल के समान है। उपर्युक्त उदाहरण से हम कह सकते हैं कि घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$ है। क्योंकि $l \times b$ आधार का क्षेत्रफल है इसलिए हम यह भी कह सकते हैं कि घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई।



इन्हें कीजिए

एक कागज़ की शीट लीजिए और इसके क्षेत्रफल को मापिए। इसी के समान आकार वाली कागज़ की शीटों का ढेर लगाकर एक घनाभ बनाइए (आकृति11.43)। इस ढेर की ऊँचाई मापिए। शीट के क्षेत्रफल और शीटों की ऊँचाई का गुणनफल ज्ञात करते हुए घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।

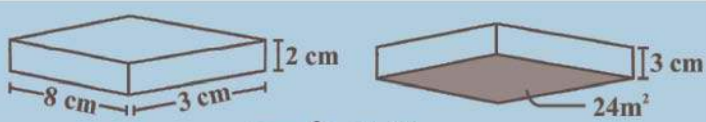
यह क्रियाकलाप इस विचार को दर्शाता है कि ठोस के आयतन का निगमन इस विधि से भी किया जा सकता है (यदि किसी ठोस का आधार और शीर्ष सर्वांगसम हैं और एक दूसरे के समांतर हैं और इसके किनारे आधार पर लंब हैं) क्या आप ऐसी वस्तुओं के बारे में सोच सकते हैं जिनका आयतन इस विधि का उपयोग करते हुए ज्ञात किया जा सकता है?



आकृति 11.43

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित घनाभों (आकृति 11.44) का आयतन ज्ञात कीजिए :



आकृति 11.44

11.8.2 घन

घन, घनाभ का एक अनोखा (विशेष) उदाहरण है जिसमें $l = b = h$. अतः घन का आयतन $= l \times l \times l = l^3$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित घनों का आयतन ज्ञात कीजिए :

(a) 4 cm भुजा वाला (b) 1.5 m भुजा वाला

इन्हें कीजिए

समान आकार वाले 64 घनों को जितने रूपों में आप व्यवस्थित कर सकते हैं उतने रूपों में व्यवस्थित करते हुए घनाभ बनाइए। प्रत्येक रूप का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या समान आयतन वाली ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल समान होता है?

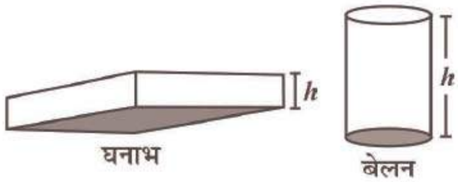
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक कंपनी बिस्कुट बेचती है। बिस्कुटों को पैक करने के लिए घनाभाकार डिब्बों का उपयोग किया जा रहा है। डिब्बा A → 3 cm × 8 cm × 20 cm, डिब्बा B → 4 cm × 12 cm × 10 cm

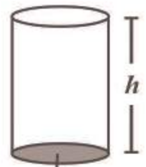
डिब्बे का कौन सा आकार कंपनी के लिए आर्थिक दृष्टि से लाभदायक रहेगा? क्यों? क्या आप ऐसे किसी और आकार (विमाएँ) के डिब्बे का सुझाव दे सकते हैं जिसका आयतन इनके समान हो परंतु इनकी तुलना में आर्थिक दृष्टि से अधिक लाभदायक हो।

11.8. 3 बेलन

हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और ऊँचाई का गुणनफल ज्ञात करते हुए ज्ञात किया जा सकता है। क्या इसी प्रकार हम बेलन का आयतन ज्ञात कर सकते हैं?



घनाभ की तरह बेलन में भी एक आधार और शीर्ष होता है जो एक दूसरे के सर्वांगसम और समांतर होते हैं। घनाभ की तरह इसका वक्रपृष्ठ आधार पर लंब होता है।



इसलिए घनाभ का आयतन $=$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= l \times b \times h = lbh$

बेलन का आयतन $=$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

11.9 आयतन और धारिता

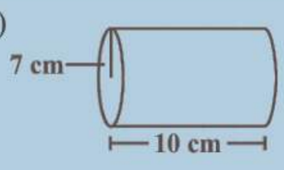
इन दो शब्दों में अधिक अंतर नहीं है।

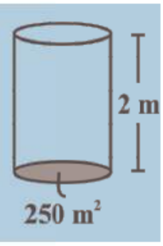
(a) किसी वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह की मात्रा उसका आयतन कहलाता है।

(b) किसी बर्तन में भरी गई वस्तु की मात्रा उसकी धारिता कहलाती है।

प्रयास कीजिए

संलग्न बेलनों का आयतन ज्ञात कीजिए :

(i) 

(ii) 

नोट : यदि किसी पानी रखे जाने वाले टिन के बर्तन में 100 cm^3 पानी भरा जा सकता है तो उस टिन के बर्तन की धारिता 100 cm^3 है।

धारिता को लीटरों में भी मापा जाता है। लीटर और cm^3 में निम्नलिखित संबंध है : 1 mL = 1 cm^3,1 L = 1000 cm^3. अत: 1 m^3 = 1000000 cm^3 = 1000 L.

उदाहरण 8 : एक ऐसे घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 275 cm^3 और आधार का क्षेत्रफल 25 cm^2 है।

हल : घनाभ का आयतन $=$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

अत: घनाभ की ऊँचाई $= \dfrac{\text{घनाभ का आयतन}}{\text{आधार का क्षेत्रफल}} = \dfrac{275}{25} = 11$ cm

इस प्रकार घनाभ की ऊँचाई 11 cm है।

उदाहरण 9 : एक घनाभाकार गोदाम, जिसकी माप 60 m × 40 m × 30 m है, के अंदर कितने घनाभाकार डिब्बे रखे जा सकते हैं, यदि एक डिब्बे का आयतन 0.8 मी³ है?

हल : एक डिब्बे का आयतन = 0.8 मी³

गोदाम का आयतन = 60 × 40 × 30 = 72000 मी³

$$\text{गोदाम के अंदर रखे जा सकने वाले डिब्बों की संख्या} = \frac{\text{गोदाम का आयतन}}{\text{1 डिब्बे का आयतन}}$$

$$= \frac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90{,}000$$

इस प्रकार गोदाम के अंदर रखे जा सकने वाले डिब्बों की संख्या 90,000 है।

उदाहरण 10 : 14 cm चौड़ाई वाले एक आयताकार कागज़ को चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर 20 cm त्रिज्या वाला एक बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए (आकृति 11.45)। (π के लिए $\frac{22}{7}$ लीजिए)

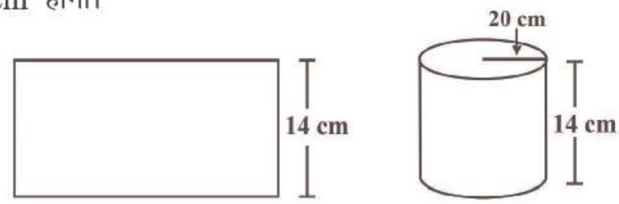
हल : कागज़ का चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर बेलन का निर्माण किया गया है, इसलिए कागज़ की चौड़ाई बेलन की ऊँचाई होगी और बेलन की त्रिज्या 20 cm होगी।

बेलन की ऊँचाई $= h = 14$ cm

त्रिज्या $= r = 20$ cm

बेलन का आयतन $= V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600 \text{ cm}^3$$



आकृति 11.45

अत: बेलन का आयतन 17600 cm^3 है।

उदाहरण 11 : 11 cm × 4 cm माप वाले आयताकार कागज़ के टुकड़े को बिना अतिव्यापन किए, मोड़कर एक 4cm ऊँचाई का बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : कागज़ की लंबाई बेलन के आधार की परिधि बन जाती है और चौड़ाई, ऊँचाई बन जाती है। मान लीजिए बेलन की त्रिज्या $= r$ और ऊँचाई $= h$

बेलन के आधार की परिधि $= 2\pi r = 11$

अथवा $\quad 2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$

इसलिए $\quad r = \frac{7}{4}$ cm

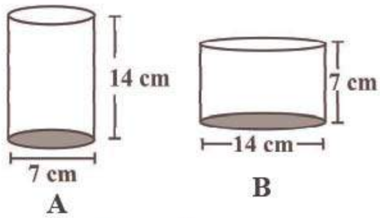
बेलन का आयतन $= V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3 = 38.5 \text{ cm}^3.$$

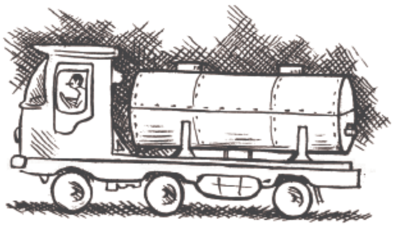
अत: बेलन का आयतन 38.5 cm^3 है।

प्रश्नावली 11.4

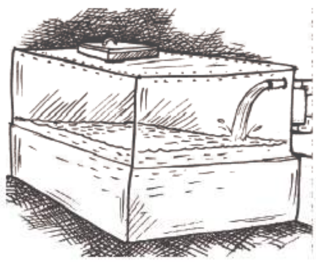
1. आपको एक बेलनाकार टैंक दिया हुआ है, निम्नलिखित में से किस स्थिति में आप उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे और किस स्थिति में आयतन :
   (a) यह ज्ञात करने के लिए कि इसमें कितना पानी रखा जा सकता है।
   (b) इसका प्लास्टर करने के लिए वांछित सीमेंट बोरियों की संख्या।
   (c) इसमें भरे पानी से भरे जाने वाले छोटे टैंकों की संख्या।



2. बेलन A का व्यास 7 cm और ऊँचाई 14 cm है। बेलन B का व्यास 14 cm और ऊँचाई 7 cm है। परिकलन किए बिना क्या आप बता सकते हैं कि इन दोनों में किसका आयतन अधिक है। दोनों बेलनों का आयतन ज्ञात करते हुए इसका सत्यापन कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या अधिक आयतन वाले बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल भी अधिक है।
3. एक ऐसे घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसके आधार का क्षेत्रफल 180 cm^2 और जिसका आयतन 900 cm^3 है?

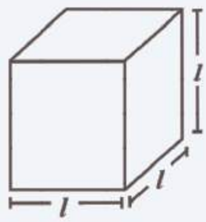


4. एक घनाभ की विमाएँ 60 cm × 54 cm × 30 cm हैं। इस घनाभ के अंदर 6 cm भुजा वाले कितने छोटे घन रखे जा सकते हैं।
5. एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 1.54 m^3 और जिसके आधार का व्यास 140 cm है?
6. एक दूध का टैंक बेलन के आकार का है जिसकी त्रिज्या 1.5 m और लंबाई 7 m है। इस टैंक में भरे जा सकने वाले दूध की मात्रा लीटर में ज्ञात कीजिए।
7. यदि किसी घन के प्रत्येक किनारे को दुगुना कर दिया जाए, तो
   (i) इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने गुना वृद्धि होगी?
   (ii) इसके आयतन में कितने गुना वृद्धि होगी?
8. एक कुंड के अंदर 60 लीटर प्रति मिनट की दर से पानी गिर रहा है। यदि कुंड का आयतन 108 m^3 है, तो ज्ञात कीजिए कि इस कुंड को भरने में कितने घंटे लगेंगे?

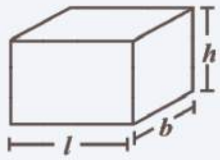


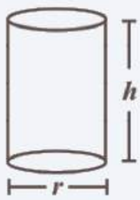
हमने क्या चर्चा की ?

1. समलंब का क्षेत्रफल
   (i) समलंब का क्षेत्रफल = समांतर भुजाओं की लंबाइयों के योग का आधा × उनके बीच की लंबवत् दूरी।
   (ii) समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = विकर्णों के गुणनफल का आधा



2. एक ठोस का **पृष्ठीय क्षेत्रफल** इसके फलकों के क्षेत्रफलों के योग के समान होता है।
3. घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$
   घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6l^2$
   बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r + h)$
4. किसी ठोस द्वारा घिरी हुई जगह की मात्रा इसका **आयतन** कहलाती है।
5. घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$
   घन का आयतन $= l^3$
   बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$





6. (i) 1 cm^3 = 1 mL
   (ii) 1L = 1000 cm^3
   (iii) 1 m^3 = 1000000 cm^3 = 1000L

अध्याय

12

घातांक और घात

0853CH12

12.1 भूमिका

क्या आप जानते हैं?

पृथ्वी का द्रव्यमान 5,970,000,000,000, 000, 000, 000, 000 kg है। हम पिछली कक्षा में पहले ही पढ़ चुके हैं कि इस प्रकार की बड़ी संख्याओं को (ज्यादा सुविधाजनक) घातांकों को उपयोग करते हुए कैसे लिख सकते हैं जैसे 5.97×10^{24} kg ।

घातांक

10^{24}

आधार

हम कहते हैं कि 10 की घात 24 ।

हम 10^{24} को 10 की घात 24 पढ़ते हैं।

हम जानते हैं $\quad 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

तथा $\quad 2^m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2$ (m बार)

2^{-2} किसके बराबर है अब हमें ज्ञात करना चाहिए?

यहाँ घातांक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

12.2 ऋणात्मक घातांकों की घात

आप जानते हैं कि $\quad 10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$$

$$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$$

$$10^{-1} = ?$$

जब घातांक 1 से कम होता है तब मान पूर्व मान का $\frac{1}{10}$ वाँ भाग हो जाता है

ऊपर के प्रतिरूप को आगे बढ़ाते हुए

हम पाते हैं $\quad 10^{-1} = \frac{1}{10}$

इसी प्रकार $\quad 10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$ । 10^{-10} किसके बराबर है?

निम्नलिखित को जानिए।

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$$

$$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$$

$$3^0 = 1 = \frac{3}{3}$$

संख्या को आधार 3 से विभाजित किया है।

इस प्रकार उपरोक्त प्रतिरूप को देखने पर हम कहते हैं

$$3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

इसी प्रकार 10^{-2} से पुनः आप प्राप्त कर सकते हैं,

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} \quad \text{या} \quad 10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} \quad \text{या} \quad 10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad \text{या} \quad 3^2 = \frac{1}{3^{-2}} \quad \text{इत्यादि।}$$

साधारणतया हम कह सकते हैं कि किसी शून्येतर परिमेय संख्या a, के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, जहाँ m एक धनात्मक परिमेय संख्या है। a^{-m}, a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

प्रयास कीजिए

गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए :

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) 7^{-2} (iv) 5^{-3} (v) 10^{-100}

$$10^{-1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

हमने सीखा कि संख्याओं को विस्तारित घातांक रूप में कैसे लिख सकते हैं, जैसे

$$1425 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

अब हमें देखना चाहिए कि 1425.36 को विस्तारित रूप में कैसे व्यक्त कर सकते हैं।

हम जानते हैं $1425.36 = 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$

$$= 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

प्रयास कीजिए

घातांकों का उपयोग करते हुए निम्न को विस्तारित रूप में लिखिए।

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

12.3 घातांक के नियम

हम सीख चुके हैं कि कोई भी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$, जहाँ m और n प्राकृत संख्याएँ हैं। यदि घातांक ऋणात्मक है तो भी क्या यह नियम सत्य है? हमें खोजना चाहिए।

(i) हम जानते हैं कि $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ और $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ कोई शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए

अतः, $2^{-3} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3 \times 2^2} = \frac{1}{2^{3+2}} = 2^{-5}$

-5 दो घातांकों -3 और -2 का योग है।

(ii) $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$ लेने पर

$$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \times (-3)^3} = \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^{-7}$$

$(-4)+(-3) = -7$

(iii) अब $5^{-2} \times 5^4$ को लिखिए।

$$5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2$$

$(-2)+4 = 2$

कक्षा VII में आप सीख चुके हैं कि कोई भी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, जहाँ m और n प्राकृत संख्याएँ हैं और $m > n$.

(iv) अब $(-5)^{-4} \times (-5)^2$ को लिखिए।

$$(-5)^{-4} \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^{-2}}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^{(-2)}$$

$(-4)+2 = -2$

साधारणतया हम कह सकते हैं कि किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$, जहाँ m और n परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

घातांक रूप को सरल कीजिए और लिखिए :

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $p^3 \times p^{-10}$ (iii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$

इसी प्रकार आप निम्न घातांकों के नियमों को सत्यापित कर सकते हैं जहाँ a और b शून्येतर परिमेय संख्याएँ और m, n कोई पूर्णांक हैं।

(i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

इन नियमों को आप कक्षा VII में धनात्मक घातांक में भी सीख चुके हैं।

(iv) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

आइए, उपरोक्त घातांकों के नियमों का उपयोग करते हुए कुछ उदाहरणों को हल करते हैं।

उदाहरण 1 : मान ज्ञात कीजिए :

(i) 2^{-3} (ii) $\dfrac{1}{3^{-2}}$

हल :

(i) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ (ii) $\dfrac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

उदाहरण 2 : सरल कीजिए :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10}$ (ii) $2^5 \div 2^{-6}$

हल :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10} = (-4)^{(5-10)} = (-4)^{-5} = \dfrac{1}{(-4)^5}$ ($a^m \times a^n = a^{m+n}$ तथा $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$)

(ii) $2^5 \div 2^{-6} = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$ ($a^m \div a^n = a^{m-n}$)

उदाहरण 3 : 4^{-3} को घात और उसके आधार 2 के रूप में लिखिए।

हल : हमें प्राप्त है, $4 = 2 \times 2 = 2^2$

अत: $(4)^{-3} = (2 \times 2)^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2 \times (-3)} = 2^{-6}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

उदाहरण 4 : सरल कीजिए और उत्तर घातांक के रूप में लिखिए।

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ (ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3}$

(iii) $\dfrac{1}{8} \times (3)^{-3}$ (iv) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4$

हल :

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5} = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5} = (2^{-3})^5 \times 2^{-5} = 2^{-15-5} = 2^{-20} = \dfrac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3} = [(-4) \times 5 \times (-5)]^{-3} = [100]^{-3} = \dfrac{1}{100^3}$

[नियम से $a^m \times b^m = (ab)^m$, $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$]

(iii) $\dfrac{1}{8} \times (3)^{-3} = \dfrac{1}{2^3} \times (3)^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3} = (2 \times 3)^{-3} = 6^{-3} = \dfrac{1}{6^3}$

(iv) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \dfrac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \dfrac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[(-1)^4 = 1]$

उदाहरण 5 : m का मान ज्ञात कीजिए ताकि $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

हल : $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

$(-3)^{m+1+5} = (-3)^7$

$(-3)^{m+6} = (-3)^7$

दोनों ओर की घातों के आधार समान हैं जो 1 तथा –1 से भिन्न हैं, अत: उनके घातांक समान होने चाहिए।

अत: $m + 6 = 7$ या $m = 7 - 6 = 1$

> $a^n = 1$ यदि $n = 0$ है। $a = 1$ या $a = -1$ के अतिरिक्त किसी भी a के लिए यह होगा। $a = 1$ के लिए $1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^{-2} = ... = 1$ या $(1)^n = 1$ असीमित n के लिए। $a = -1$ के लिए , $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = ... = 1$ या $(-1)^p = 1$, p कोई सम पूर्णांक।

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

अत: साधारणत: , $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

उदाहरण 6 : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ का मान प्राप्त कीजिए।

हल : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

उदाहरण 7 : सरल कीजिए

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

हल :

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$

$$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2} = \{9-8\} \div 16 = \frac{1}{16}$$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$

$$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$$

प्रश्नावली 12.1

1. मान ज्ञात कीजिए :

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

2. सरल कीजिए और उत्तर को धनात्मक घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

3. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^2$

4. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\frac{8^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$

5. m का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $5^m \div 5^{-3} = 5^5$

6. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

7. सरल कीजिए।

(i) $\frac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$ (ii) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

12.4 छोटी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग कर मानक रूप में व्यक्त करना

निम्न तथ्यों का अवलोकन कीजिए :

1. पृथ्वी से सूर्य की दूरी 149,600,000,000 m है।
2. प्रकाश का वेग 300,000,000 m/s है।
3. कक्षा VII की गणित की पुस्तक की मोटाई 20 mm है।
4. लाल रक्त कोशिकाओं का औसत व्यास 0.000007 mm
5. मनुष्य के बाल की मोटाई की परास 0.005 cm से 0.01 cm होती है।
6. पृथ्वी से चंद्रमा की दूरी लगभग 384,467,000 m होती है।
7. पौधों की कोशिकाओं का आकार 0.00001275 m है।
8. सूर्य की औसत त्रिज्या 695000 km है।
9. अंतरिक्ष शटल में ठोस राकेट बूस्टर को प्रेरित करने के लिए शटल का द्रव्यमान 503600 kg है।
10. एक कागज़ की मोटाई 0.0016 cm है।
11. कंप्यूटर चिप के एक तार का व्यास 0.000003 m है।
12. माउंट एवरेस्ट की ऊँचाई 8848 m है।

यहाँ कुछ संख्याओं का अवलोकन कीजिए जो हम पढ़ सकते हैं जैसे, 20cm (20मीमी), 8848 m 6,95,000 km । यहाँ कुछ बड़ी संख्याएँ भी हैं जैसे 150,000,000,000 m और कुछ बहुत छोटी संख्याएँ हैं जैसे 0.000007 m ।

उपरोक्त तथ्यों के आधार पर बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं की पहचान कीजिए और संगत सारणी में लिखिए।

बहुत बड़ी संख्याएँ	बहुत छोटी संख्याएँ
150,000,000,000 m	0.000007 m
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------

पिछली कक्षा में हमने सीखा कि किसी बहुत बड़ी संख्या को मानक रूप में कैसे व्यक्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$ । अब हमें 0.000007 को मानक रूप में व्यक्त करना चाहिए।

$$0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$$

$$0.000007 \text{ m} = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$$

इसी तरह एक कागज़ की मोटाई जो कि 0.0016 cm है, लिखिए।

$$0.0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$$

$$= 1.6 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

अतः हम कह सकते हैं कि कागज़ की मोटाई 1.6×10^{-3} cm है।

$\underbrace{150000000000}_{11\,10\,9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1}.$ दशमलव 11 स्थान बाईं तरफ़ खिसक गया है

$0.\underbrace{000007}_{1\,2\,3\,4\,5\,6}$ दशमलव छः स्थान दाईं तरफ़ खिसक गया है।

पुनः ध्यान दीजिए :
$0.\underbrace{0016}_{1\,2\,3}$ दशमलव तीन स्थान दाईं तरफ़ खिसक गया है।

प्रयास कीजिए

1. निम्न संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।
   (i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000
2. दिए गए तथ्यों को मानक रूप में लिखिए।

12.4.1 बहुत बड़ी संख्याओं और बहुत छोटी संख्याओं की तुलना

सूर्य का व्यास 1.4×10^9 m और पृथ्वी का व्यास 1.2756×10^7 m है। हम इनके व्यासों की तुलना करना चाहते हैं। सूर्य का व्यास $= 1.4 \times 10^9$ m; पृथ्वी का व्यास $= 1.2756 \times 10^7$ m

अतः $\frac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4 \times 100}{1.2756}$ जो कि लगभग 100 गुना है।

अतः सूर्य का व्यास, पृथ्वी के व्यास का लगभग 100 गुना है। लाल रक्त कोशिकाएँ जो कि 0.000007 m माप की है और पौधों की कोशिकाएँ जो कि 0.00001275 m माप की है इनके मापों की तुलना कीजिए।

लाल रक्त कोशिकाओं का आकार $= 0.000007 \text{ m} = 7 \times 10^{-6}$ m

पौधों की कोशिकाओं का आकार $= 0.00001275 \text{ m} = 1.275 \times 10^{-5}$ m

अतः, $\frac{7 \times 10^{-6}}{1.275 \times 10^{-5}} = \frac{7 \times 10^{-6-(-5)}}{1.275} = \frac{7 \times 10^{-1}}{1.275} = \frac{0.7}{1.275} = \frac{0.7}{1.3} = \frac{1}{2}$ (लगभग)

अतः लाल रक्त कोशिकाएँ आकार में, पौधों की कोशिकाओं की लगभग आधी हैं।

पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} kg और चंद्रमा का द्रव्यमान 7.35×10^{22} kg है। दोनों का कुल द्रव्यमान क्या होगा?

कुल द्रव्यमान $= 5.97 \times 10^{24} \text{ kg} + 7.35 \times 10^{22}$ kg

$= 5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= 597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= (597 + 7.35) \times 10^{22} = 604.35 \times 10^{22}$ kg

जब हम मानक रूप में लिखी संख्याओं को जोड़ते हैं तब हम इन्हें 10 की समान घात में बदलते हैं।

सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 1.496×10^{11} m और पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 3.84×10^8 m है। सूर्य ग्रहण के दौरान चंद्रमा पृथ्वी और सूर्य के बीच आ जाता है। इस समय चंद्रमा और सूर्य के बीच की दूरी कितनी होती है?

सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी $= 1.496 \times 10^{11}$ m

पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी $= 3.84 \times 10^8$ m

सूर्य और चंद्रमा के बीच की दूरी $= 1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^8$

$$= 1.496 \times 1000 \times 10^8 - 3.84 \times 10^8$$
$$= (1496 - 3.84) \times 10^8 \text{ m} = 1492.16 \times 10^8 \text{ m}$$

उदाहरण 8 : निम्न संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 0.000035 (ii) 4050000

हल : (i) $0.000035 = 3.5 \times 10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05 \times 10^6$

उदाहरण 9 : निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 3.52×10^5 (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

हल :

(i) $3.52 \times 10^5 = 3.52 \times 100000 = 352000$

(ii) $7.54 \times 10^{-4} = \dfrac{7.54}{10^4} = \dfrac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3 \times 10^{-5} = \dfrac{3}{10^5} = \dfrac{3}{100000} = 0.00003$

एक बार पुन: हमें मानक रूप में दी गई संख्याओं को समान घातांक वाली संख्याओं में बदलना है।

प्रश्नावली 12.2

1. निम्न संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942

(iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837

(v) 31860000000

2. निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^4 (iii) 3×10^{-8}

(iv) 1.0001×10^9 (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^6

3. निम्नलिखित कथनों में जो संख्या प्रकट हो रही है उन्हें मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 1 माईक्रॉन $\dfrac{1}{1000000}$ m के बराबर होता है।

(ii) एक इलेक्ट्रॉन का आवेश 0.000,000,000,000,000,000,16 कुलंब होता है।

(iii) जीवाणु की माप 0.0000005 m है।

(iv) पौधों की कोशिकाओं की माप 0.00001275 m है।

(v) मोटे कागज़ की मोटाई 0.07 mm है।

4. एक ढेर में पाँच किताबें हैं जिनमें प्रत्येक की मोटाई 20 mm तथा पाँच कागज़ की शीटें हैं जिनमें प्रत्येक की मोटाई 0.016 mm है। इस ढेर की कुल मोटाई ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की ?

1. ऋणात्मक घातांकों वाली संख्याएँ निम्न नियमों का पालन करती हैं।

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(d) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (e) $a^0 = 1$ (f) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

2. ऋणात्मक घातांकों का उपयोग करते हुए बहुत छोटी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

अध्याय
13

सीधा और प्रतिलोम समानुपात

0853CH13

13.1 भूमिका

मोहन स्वयं अपने और अपनी बहन के लिए चाय बनाता है। वह 300 mL पानी, 2 चम्मच चीनी, 1 चम्मच चाय-पत्ती और 50 mL दूध का उपयोग करता है। यदि वह पाँच व्यक्तियों के लिए चाय बनाए, तो उसे प्रत्येक वस्तु की कितनी मात्रा की आवश्यकता होगी?

यदि दो विद्यार्थी किसी सभा के लिए कुर्सियाँ व्यवस्थित करने में 20 मिनट का समय लगाते हैं, तो इसी कार्य को करने में 5 विद्यार्थी कितना समय लेंगे?

हमें अपने दैनिक जीवन में ऐसी अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है, जहाँ हमें यह देखना आवश्यक हो जाता है कि एक राशि में परिवर्तन होने से दूसरी राशि में भी परिवर्तन हो रहा है।

उदाहरणार्थ :

(i) यदि खरीदी गई वस्तुओं की संख्या में वृद्धि होती है, तो उनके कुल मूल्य में भी वृद्धि होती है।

(ii) बैंक में जितनी धनराशि अधिक जमा की जाएगी, उतना ही ब्याज अधिक अर्जित होगा।

(iii) जब किसी वाहन की चाल में वृद्धि होती है, उसके द्वारा वही दूरी तय करने में लिए गए समय में कमी होती है।

(iv) एक दिए हुए कार्य के लिए, जितने अधिक व्यक्ति कार्य पर लगाए जाएँगे, उतना ही उस कार्य को पूरा करने में कम समय लगेगा।

ध्यान दीजिए कि एक राशि में परिवर्तन से दूसरी राशि में परिवर्तन हो रहा है। ऐसी पाँच और स्थितियाँ लिखिए, जहाँ एक राशि में परिवर्तन होने से दूसरी राशि में भी परिवर्तन होता है।

मोहन द्वारा आवश्यक प्रत्येक वस्तु की मात्रा हम किस प्रकार ज्ञात करते हैं? या पाँच विद्यार्थियों द्वारा कार्य पूरा करने में लिए गए समय को हम किस प्रकार ज्ञात करेंगे? इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, हम अब कुछ विचरण (variation) की अवधारणाओं का अध्ययन करेंगे।

13.2 सीधा समानुपात

यदि 1kg चीनी का मूल्य ₹ 36 है, तो 3kg चीनी का मूल्य क्या होगा? यह ₹ 108 है। इसी प्रकार, हम 5kg या 8kg चीनी का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं।

निम्नलिखित सारणी का अध्ययन कीजिए :

चीनी का भार (kg में)	1	3	5	6	8	10
मूल्य (रुपयों में)	36	108	180	...	...	...

ध्यान दीजिए कि जैसे-जैसे चीनी के भार में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे उसके मूल्य में भी इस प्रकार से वृद्धि होती है कि इनका अनुपात (ratio) अचर रहता है।

एक और उदाहरण लीजिए। मान लीजिए एक कार 60 km की दूरी तय करने में 4 लीटर पेट्रोल का उपयोग करती है तो वह 12 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय करेगी? इसका उत्तर 180 km है। हमने इसे कैसे परिकलित किया? क्योंकि दूसरी स्थिति में 12 लीटर, अर्थात् 4 लीटर का तीन गुना पेट्रोल प्रयोग होता है, इसलिए तय की गई दूरी भी 60 km की तीन गुना होगी। दूसरे शब्दों में, जब पेट्रोल की खपत तीन गुना होगी, तो तय की गई दूरी भी पहली दूरी की तीन गुना होगी। मान लीजिए कि पेट्रोल की खपत x लीटर है तथा तय की गई संगत दूरी y km है। अब निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

पेट्रोल (x) लीटर में	4	8	12	15	20	25
दूरी (y) km में	60	...	180	...	...	...

हम पाते हैं कि जब x के मान में वृद्धि होती है, तब y के मान में भी इस प्रकार वृद्धि होती है कि अनुपात $\frac{x}{y}$ में कोई बदलाव नहीं आता है। यह अचर (मान लीजिए k) रहता है। इस स्थिति में, यह $\frac{1}{15}$ है, (इसकी जाँच कीजिए)।

यदि $\frac{x}{y} = k$ या $x = ky$ हो, तो हम कहते हैं कि **x और y में सीधा या प्रत्यक्ष समानुपात (direct proportion)** है [अथवा वे **अनुक्रमानुपाती (directly proportional)** हैं]। इस उदाहरण में, $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ है, जहाँ 4 और 12 पेट्रोल की खपत की लीटर में मात्राएँ (x) हैं तथा 60 और 180 km में दूरियाँ (y) हैं। अतः, जब x और y में **प्रत्यक्ष** या **सीधा अनुपात** होता है, तो हम $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ लिख सकते हैं। [x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान क्रमशः y_1, y_2 हैं।)

पेट्रोल की खपत और एक कार द्वारा तय की गई दूरी एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है। इसी प्रकार, व्यय की गई कुल धनराशि और खरीदी गई वस्तुओं की संख्या भी प्रत्यक्ष अनुपात का एक उदाहरण है।

प्रत्यक्ष अनुपात के कुछ और उदाहरणों के बारे में सोचिए। जाँच कीजिए कि क्या मोहन (प्रारंभिक उदाहरण में) पाँच व्यक्तियों के लिए चाय बनाने के लिए 750 mL पानी, 5 चम्मच चीनी,

$2\frac{1}{2}$ चम्मच चायपत्ती, 125 mL दूध का प्रयोग करेगा। आइए, निम्नलिखित क्रियाकलापों की सहायता से प्रत्यक्ष अनुपात की अवधारणा को और अधिक समझने का प्रयत्न करें।

इन्हें कीजिए

(i) • एक घड़ी लीजिए और उसकी मिनट वाली (बड़ी) सुई को 12 पर स्थिर कीजिए।
• मिनट की सुई द्वारा अपनी प्रारंभिक स्थिति से घूमे गए कोणों एवं बीते हुए समय को निम्नलिखित सारणी के रूप में लिखिए :

व्यतीत हुआ समय (T) (मिनटों में)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
घूमा गया कोण (A) (डिग्री में)	(A_1) 90	(A_2) ...	(A_3) ...	(A_4) ...
$\frac{T}{A}$	...	...	...	...

आप T और A के बारे में क्या देखते हैं? क्या इनमें साथ-साथ वृद्धि होती है? क्या $\frac{T}{A}$ प्रत्येक समय वही रहता है?

क्या मिनट की सुई द्वारा घूमा गया कोण व्यतीत हुए समय के अनुक्रमानुपाती (directly proportional) है? हाँ!

उपरोक्त सारणी से, आप यह भी देख सकते हैं कि

$$T_1 : T_2 = A_1 : A_2\text{, क्योंकि}$$
$$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1:2$$
$$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1:2$$

जाँच कीजिए कि क्या $T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ तथा $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$ है।

आप स्वयं अपने समय अंतराल लेकर, इस क्रियाकलाप को दोहरा सकते हैं।

(ii) अपने मित्र से निम्नलिखित सारणी को भरने के लिए कहिए तथा उसकी आयु और उसकी माँ की संगत आयु का अनुपात ज्ञात करने के लिए भी कहिए।

	पाँच वर्ष पहले की आयु	**वर्तमान आयु**	**पाँच वर्ष के बाद की आयु**
मित्र की आयु (F)			
माँ की आयु (M)			
$\frac{F}{M}$			

आप क्या देखते हैं? क्या F और M में साथ-साथ वृद्धि (या कमी) होती है? क्या $\frac{F}{M}$ प्रत्येक बार वही है? नहीं। आप इस क्रियाकलाप को अपने अन्य मित्रों के साथ दोहरा सकते हैं तथा अपने प्रेक्षणों को लिख सकते हैं।

इस प्रकार, यह आवश्यक नहीं है कि साथ-साथ बढ़ने (या घटने) वाले चर सदैव अनुक्रमानुपाती हों। उदाहरणार्थ :

(i) मानवों में भौतिक परिवर्तन समय के साथ होते रहते हैं, परंतु आवश्यक नहीं है कि ये एक पूर्व निर्धारित अनुपात में हों।

(ii) व्यक्तियों के भार और लंबाई में परिवर्तन किसी ज्ञात अनुपात में नहीं होते हैं।

(iii) किसी पेड़ की ऊँचाई और उसकी शाखाओं पर उगने वाली पत्तियों की संख्या में सीधा संबंध या अनुपात नहीं होता है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित सारणियों को देखिए तथा ज्ञात कीजिए कि क्या x और y अनुक्रमानुपाती हैं।

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. मूलधन = 1000 रुपये, ब्याज दर = 8% वार्षिक। निम्नलिखित सारणी को भरिए तथा ज्ञात कीजिए कि, किस प्रकार का ब्याज (साधारण या चक्रवृद्धि) समय अवधि के साथ प्रत्यक्ष अनुपात में बदलता या परिवर्तित होता है।

$$\frac{P \times r \times t}{100}$$

$$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - P$$

समय अवधि	1 वर्ष	2 वर्ष	3 वर्ष
साधारण ब्याज (रु में)			
चक्रवृद्धि ब्याज (रु में)			

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि हम समय अवधि और ब्याज की दर स्थिर रखें, तो साधारण ब्याज मूलधन के साथ प्रत्यक्ष अनुपात में परिवर्तित होता है। क्या ऐसा ही संबंध चक्रवृद्धि ब्याज के लिए भी होगा? क्यों?

आइए, अब कुछ उदाहरण हल करें, जहाँ हम प्रत्यक्ष अनुपात की अवधारणा का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 1 : एक विशेष प्रकार के 5 मीटर कपड़े का मूल्य 210 रुपये है। इसी प्रकार के 2, 4, 10 और 13 मीटर कपड़े के मूल्यों के लिए एक सारणी बनाइए।

हल : मान लीजिए कि कपड़े की लंबाई x मीटर है तथा उसका मूल्य (रुपयों में) y है।

x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

जैसे-जैसे कपड़े की लंबाई में वृद्धि होती है, उसके मूल्य में भी उसी अनुपात में वृद्धि होती जाती है। अतः, यह एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है।

हम $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ के प्रकार के संबंध का उपयोग करते हैं।

(i) यहाँ $x_1=5$, $y_1=210$ और $x_2=2$ है।

अतः, $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ से हमें $\frac{5}{210}=\frac{2}{y_2}$ प्राप्त होता है।

अर्थात्, $5y_2=2\times 210$ या $y_2=\frac{2\times 210}{5}=84$

(ii) यदि $x_3=4$, तो $\frac{5}{210}=\frac{4}{y_3}$ या $5y_3=4\times 210$ या $y_3=\frac{4\times 210}{5}=168$

[क्या हम यहाँ $\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$ का उपयोग कर सकते हैं? प्रयास कीजिए।]

(iii) यदि $x_4=10$, तो $\frac{5}{210}=\frac{10}{y_4}$ या $5\times y_4=10\times 210$ या $y_4=\frac{10\times 210}{5}=420$

(iv) यदि $x_5=13$, तो $\frac{5}{210}=\frac{13}{y_5}$ या $5\times y_5=13\times 210$ या $y_5=\frac{13\times 210}{5}=546$

[ध्यान दीजिए कि यहाँ हम $\frac{5}{210}$ के स्थान पर $\frac{2}{84}$ या $\frac{4}{168}$ या $\frac{10}{420}$ का भी उपयोग कर सकते हैं।]

उदाहरण 2 : 14 मीटर ऊँचे एक बिजली के खंभे की छाया 10 मीटर है। समान स्थितियों में उस पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी छाया 15 मीटर है।

हल : मान लीजिए कि पेड़ की ऊँचाई x मीटर है। हम नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी बनाते हैं :

वस्तु की ऊँचाई (मीटर में)	14	x
छाया की लंबाई (मीटर में)	10	15

ध्यान दीजिए कि वस्तु की ऊँचाई जितनी अधिक होगी, उसकी छाया की लंबाई उतनी ही अधिक होगी। अतः, यह एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है।

अर्थात्, $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ से हमें प्राप्त होता है : $\frac{14}{10}=\frac{x}{15}$ (क्यों?)

या $\frac{14\times 15}{10}=x$ या $\frac{14\times 3}{2}=x$

अतः $x=21$ । इस प्रकार पेड़ की ऊँचाई 21 मीटर है।

वैकल्पिक रूप से, हम $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ को $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ के रूप में लिख सकते हैं।

अतः $x_1:x_2=y_1:y_2$ या $14:x=10:15$

अतः $10\times x=15\times 14$ या $x=\frac{15\times 14}{10}=21$

उदाहरण 3 : यदि मोटे कागज़ की 12 शीटों (sheets) का भार 40 ग्राम है, तो ऐसे ही कागज़ की कितनी शीटों का भार $2\frac{1}{2}$ किलोग्राम होगा?

हल : मान लीजिए कि उन शीटों की संख्या x है जिनका भार $2\frac{1}{2}$ किलोग्राम है। हम उपरोक्त सूचना को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखते हैं :

शीटों की संख्या	12	x
शीटों का भार (ग्राम में)	40	2500

1 किलोग्राम = 1000 ग्राम
$2\frac{1}{2}$ किलोग्राम = 2500 ग्राम

शीटों की संख्या अधिक होगी, तो उनका भार भी उतना ही अधिक होगा। अत: शीटों की संख्या और उनके भार परस्पर अनुक्रमानुपाती हैं।

अत: $\frac{12}{40} = \frac{x}{2500}$

या $\frac{12 \times 2500}{40} = x$ या $750 = x$

अत: कागज़ की शीटों की वांछित संख्या 750 है।

वैकल्पिक विधि : दो राशियाँ x और y जो प्रत्यक्ष अनुपात में विचरण (vary) करती हैं में

$x = ky$ या $\frac{x}{y} = k$ का संबंध होता है।

यहाँ $k = \frac{\text{शीटों की संख्या}}{\text{ग्रामों में शीटों का भार}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$। अब x उन कागज़ की शीटों की संख्या है जिनका भार $2\frac{1}{2}$ kg (2500 gm) है। संबंध $x = ky$ का उपयोग करने पर, $x = \frac{3}{10} \times 2500 = 750$

इस प्रकार, कागज़ की 750 शीटों का भार $2\frac{1}{2}$ किलोग्राम होगा।

उदाहरण 4 : एक रेलगाड़ी 75 km/h की एकसमान (uniform) चाल से चल रही है।

(i) वह 20 मिनट में कितनी दूरी तय करेगी?

(ii) 250 km की दूरी तय करने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि 20 मिनट में तय की गई दूरी (km में) x है तथा 250 km की दूरी तय करने में लगने वाला समय (मिनटों में) y है।

1 घंटा = 60 मिनट

तय की गई दूरी (km में)	75	x	250
लिया गया समय (मिनटों में)	60	20	y

क्योंकि चाल एकसमान है, इसलिए तय की गई दूरी लिए गए समय के अनुक्रमानुपाती होगी।

(i) हमें प्राप्त है : $\frac{75}{60}=\frac{x}{20}$ या $\frac{75\times20}{60}=x$

या $x = 25$ । अत: रेलगाड़ी 20 मिनट में 25 km की दूरी तय करेगी।

(ii) साथ ही, $\frac{75}{60}=\frac{250}{y}$

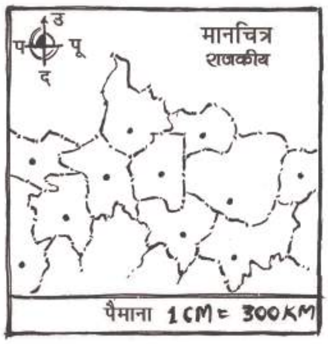
या $y=\frac{250\times60}{75}=200$ मिनट, अर्थात् 3 घंटे 20 मिनट

अत: 250 km की दूरी तय करने के लिए 3 घंटे 20 मिनट का समय लगेगा।

वैकल्पिक रूप से, जब x ज्ञात है, तो संबंध $\frac{x}{20}=\frac{250}{y}$ से y को ज्ञात किया जा सकता है।

> आप जानते हैं कि एक मानचित्र (map) एक बहुत बड़े क्षेत्र का लघु निरूपण होता है। प्राय: मानचित्र के सबसे नीचे वाले भाग में एक पैमाना (scale) दिया रहता है। यह पैमाना वास्तविक लंबाई और मानचित्र पर निरूपित लंबाई में संबंध दर्शाता है। इस प्रकार, मानचित्र का पैमाना मानचित्र पर दो बिंदुओं की दूरी और बड़े क्षेत्र पर दोनों बिंदुओं की वास्तविक दूरी का अनुपात होता है।
>
> उदाहरणार्थ, यदि मानचित्र पर 1 cm वास्तविक दूरी 8 km निरूपित करता है (अर्थात् पैमाना 1 cm : 8 km या 1 : 800000 है), तो उसी मानचित्र पर 2 cm वास्तविक दूरी 16 km निरूपित करता है। अत:, हम कह सकते हैं कि मानचित्र का पैमाना प्रत्यक्ष अनुपात की अवधारणा पर आधारित है।

उदाहरण 5 : एक मानचित्र का पैमाना 1 : 30000000 दिया है। दो नगर मानचित्र में 4 cm की दूरी पर हैं। उनके बीच की वास्तविक दूरी ज्ञात कीजिए।



हल : मान लीजिए कि मानचित्र दूरी x cm है तथा वास्तविक दूरी y cm है।

तब, $1 : 30000000 = x : y$ या $\frac{1}{3\times10^7}=\frac{x}{y}$

क्योंकि $x = 4$ है, इसलिए $\frac{1}{3\times10^7}=\frac{4}{y}$

अथवा $y = 4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7$ cm = 120 km

इस प्रकार, मानचित्र पर 4 cm की दूरी वाले नगरों की वास्तविक दूरी 1200 km है।

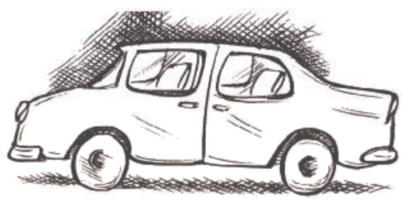
इन्हें कीजिए

अपने राज्य का एक मानचित्र लीजिए। वहाँ पर प्रयुक्त पैमाने को लिख लीजिए। पैमाने (ruler) का प्रयोग करते हुए, मानचित्र पर किन्हीं दो नगरों की दूरी मापिए। इन दोनों नगरों के बीच की वास्तविक दूरी परिकलित कीजिए।

प्रश्नावली 13.1

1. एक रेलवे स्टेशन के निकट कार पार्किंग शुल्क इस प्रकार हैं–

4 घंटों तक	₹ 60
8 घंटों तक	₹ 100
12 घंटों तक	₹ 140
24 घंटों तक	₹ 180



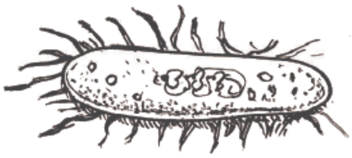
जाँच कीजिए कि क्या कार पार्किंग शुल्क पार्किंग समय के प्रत्यक्ष अनुपात में है।

2. एक पेंट के मूल मिश्रण (base) के 8 भागों में लाल रंग के पदार्थ का 1 भाग मिलाकर मिश्रण तैयार किया जाता है। निम्नलिखित सारणी में, मूल मिश्रण के वे भाग ज्ञात कीजिए जिन्हें मिलाए जाने की आवश्यकता है :

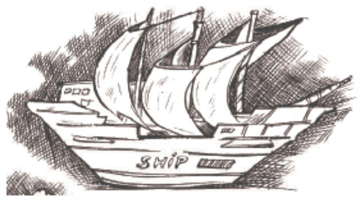
लाल रंग के पदार्थ के भाग	1	4	7	12	20
मूल मिश्रण के भाग	8	...	...	...	...

3. प्रश्न 2 में यदि लाल रंग के पदार्थ के 1 भाग के लिए 75 mL मूल मिश्रण की आवश्यकता है, तो मूल मिश्रण के 1800 mL में हमें कितना लाल रंग का पदार्थ मिलाना चाहिए?

4. किसी सॉफ्ट ड्रिंक फैक्ट्री में एक मशीन 840 बोतलें 6 घंटे में भरती है। वह मशीन पाँच घंटे में कितनी बोतलें भरेगी?



5. एक बैक्टीरिया (bacteria) या जीवाणु के फोटोग्राफ (चित्र) को 50,000 गुना आवर्धित करने पर उसकी लंबाई 5 cm हो जाती है, जैसा कि संलग्न चित्र में दिखाया गया है। इस बैक्टीरिया की वास्तविक लंबाई क्या है? यदि फोटोग्राफ को केवल 20,000 गुना आवर्धित किया जाए, तो उसकी आवर्धित लंबाई क्या होगी?



6. एक जहाज के मॉडल में, उसका मस्तूल (mast) 9 cm ऊँचा है, जबकि वास्तविक जहाज का मस्तूल 12 m ऊँचा है। यदि जहाज की लंबाई 28 m है, तो उसके मॉडल की लंबाई कितनी है?

7. मान लीजिए 2 kg चीनी में 9×10^6 क्रिस्टल हैं। निम्नलिखित चीनी में कितने चीनी के क्रिस्टल होंगे? (i) 5 kg (ii) 1.2 kg

8. रश्मि के पास एक सड़क का मानचित्र है, जिसके पैमाने में 1 cm की दूरी 18 km निरूपित करती है। वह उस सड़क पर अपनी गाड़ी से 72 km की दूरी तय करती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी मानचित्र में क्या होगी?

9. एक 5 m 60 cm ऊँचे ऊर्ध्वाधर खंभे की छाया की लंबाई 3 m 20 cm है। उसी समय पर ज्ञात कीजिए–

(i) 10 m 50 cm ऊँचे एक अन्य खंभे की छाया की लंबाई

(ii) उस खंभे की ऊँचाई जिसके छाया की लंबाई 5*m* है।

10. माल से लदा हुआ एक ट्रक 25 मिनट में 14 km चलता है। यदि चाल वही रहे, तो वह 5 घंटे में कितनी दूरी तय कर पाएगा?

इन्हें कीजिए

1. एक वर्गांकित कागज़ पर भिन्न-भिन्न भुजाओं के पाँच वर्ग खींचिए। निम्नलिखित सूचना को एक सारणी के रूप में लिखिए :

	वर्ग-1	वर्ग-2	वर्ग-3	वर्ग-4	वर्ग-5
एक भुजा की लंबाई (L)					
परिमाप (P)					
$\frac{L}{P}$					

क्षेत्रफल (A)					
$\frac{L}{A}$					

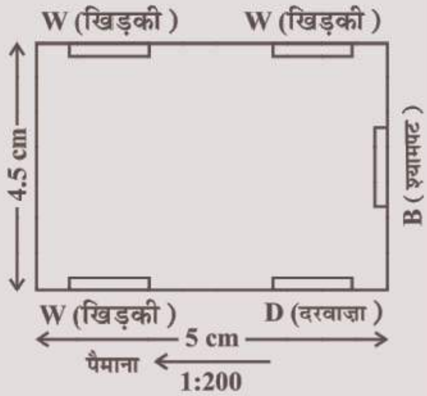
ज्ञात कीजिए कि क्या भुजा की लंबाई

(a) वर्ग के परिमाप के अनुक्रमानुपाती है। (b) वर्ग के क्षेत्रफल के अनुक्रमानुपाती है।

2. पाँच व्यक्तियों के लिए हलवा बनाने के लिए, निम्नलिखित सामग्री की आवश्यकता होती है : सूजी / रवा = 250 g, चीनी = 300 g, घी = 200 g, पानी = 500 ml

समानुपात की अवधारणा का प्रयोग करते हुए, अपनी कक्षा के लिए हलवा बनाने के लिए, इन सामग्रियों की मात्राओं में होने वाले परिवर्तनों का आकलन (estimate) कीजिए।

3. एक पैमाने का चुनाव करते हुए, अपनी कक्षा के कमरे का मानचित्र खींचिए, जिसमें खिड़कियाँ, दरवाजे, ब्लैकबोर्ड इत्यादि दर्शाए गए हों। (एक उदाहरण यहाँ दिया गया है।)



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

'सीधा समानुपात (विचरण)' की अब तक हल की गई समस्याओं में से कुछ को लीजिए। क्या आप सोचते हैं कि इन समस्याओं को इकाई की विधि या ऐकिक विधि (unitary method) से हल किया जा सकता है?

13.3 प्रतिलोम अनुपात

दो राशियाँ इस प्रकार भी परिवर्तित (बदल) हो सकती हैं कि यदि एक राशि में वृद्धि होती है, तो दूसरी राशि में कमी होती है तथा एक में कमी होने पर दूसरी में वृद्धि होती है। उदाहरणार्थ, जब किसी काम पर अधिक व्यक्ति लगाए जाते हैं, तो वह काम कम समय में पूरा हो जाता है। इसी प्रकार, यदि चाल बढ़ा दी जाए, तो एक निश्चित दूरी तय करने में कम समय लगता है। इसको समझने के लिए, आइए निम्नलिखित स्थिति को देखें :

ज़ाहिदा अपने स्कूल चार विभिन्न प्रकारों से जा सकती है। वह पैदल जा सकती है, दौड़ कर जा सकती है, साइकिल पर जा सकती है और कार में जा सकती है। संलग्न सारणी का अध्ययन कीजिए :

	पैदल चलकर	दौड़कर	साइकिल पर	कार द्वारा
चाल (km/hour में)	3	6	9	45
लिया गया समय (मिनटों में)	30	15	10	2

ध्यान दीजिए कि जब चाल में वृद्धि होती है, तो समान दूरी को तय करने में लगने वाले समय में कमी होती है। जब ज़ाहिदा दौड़कर अपनी चाल दुगुनी करती है, तो उसके द्वारा लिया गया समय $\frac{1}{2}$ हो जाता है।

जब वह अपनी चाल साइकिल पर तीन गुना करती है, तो उसके द्वारा लिया गया समय $\frac{1}{3}$ रह जाता है। इसी प्रकार, जब वह अपनी चाल 15 गुनी करती है, तो उसके द्वारा लिया गया समय $\frac{1}{15}$ रह जाता है। अर्थात् समय में होने वाली कमी का अनुपात चाल में होने वाली संगत वृद्धि के अनुपात का प्रतिलोम (inverse) होता है। क्या हम कह सकते हैं कि गति और समय व्युत्क्रमानुपात में परिवर्तित होते हैं।

> किसी संख्या का गुणनात्मक प्रतिलोम (inverse) उसका व्युत्क्रम (reciprocal) होता है। इस प्रकार, $\frac{1}{2}$, 2 का प्रतिलोम है। (ध्यान दीजिए कि $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ है।)

आइए, एक अन्य उदाहरण पर विचार करें। एक विद्यालय गणित की पाठ्यपुस्तकों के लिए 6000 रुपये खर्च करना चाहता है। 40 रुपये प्रति पुस्तक की दर से कितनी पुस्तकें खरीदी जा सकती हैं? स्पष्ट है कि 150 पुस्तकें खरीदी जा सकती हैं। यदि एक पाठ्यपुस्तक का मूल्य 40 रुपये से अधिक हो, तो उसी निश्चित राशि में 150 से कम पुस्तकें खरीदी जाएँगी। निम्नलिखित सारणी को देखिए :

प्रत्येक पुस्तक का मूल्य (₹ में)	40	50	60	75	80	100
खरीदी जा सकने वाली पुस्तकों की संख्या	150	120	100	80	75	60

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि यदि प्रत्येक पुस्तक के मूल्य में वृद्धि होती है, तो एक निश्चित फंड (राशि) में खरीदी जा सकने वाली पुस्तकों की संख्या में कमी हो जाएगी।

जब पुस्तक का मूल्य 40 रुपये से 50 रुपये होता है, तो इसकी वृद्धि का अनुपात 4:5 है तथा संगत पुस्तकों की संख्या 150 से कम होकर 120 होने पर अनुपात 5:4 है। इसका अर्थ है कि दोनों अनुपात एक-दूसरे के प्रतिलोम (inverse) हैं।

ध्यान दीजिए कि दोनों राशियों के संगत मानों का गुणनफल अचर अर्थात्

$$40 \times 150 = 50 \times 120 = 6000 \quad \text{है।}$$

यदि हम प्रत्येक पुस्तक के मूल्य (रु. में) को x तथा खरीदी गई पुस्तकों की संख्याओं का y से निरूपित करें, तो जब x में वृद्धि होती है, तब y में कमी होती है और विलोमत: यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि गुणनफल xy अचर रहता है। हम कहते हैं कि x, y के साथ प्रतिलोम रूप से विचरण (varies inversely) करता है तथा y, x के साथ प्रतिलोम रूप से विचरण करता है। इस प्रकार, दो राशियाँ x और y प्रतिलोम समानुपात में विचरित कही जाती हैं, यदि उनके बीच में $xy = k$ के प्रकार का कोई संबंध हो, जहाँ k कोई अचर है। यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगतमान क्रमश: y_1, y_2 हों, तो $x_1y_1 = x_2y_2 (= k)$, अर्थात् $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ होता है।

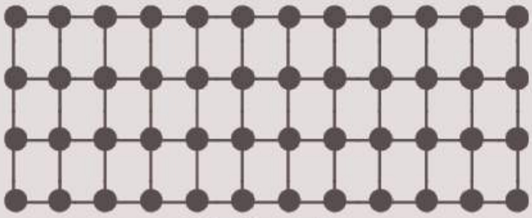
हम कहते हैं कि x और y **प्रतिलोम अनुपात (inverse proportion)** में हैं।

अत:, उपरोक्त उदाहरण में, एक पुस्तक का मूल्य और एक निश्चित धनराशि में खरीदी जाने वाली पुस्तकों की संख्या व्युत्क्रमानुपाती हैं। इसी प्रकार, एक वाहन की चाल और उसके द्वारा एक निश्चित दूरी तय करने में लिया गया समय परस्पर प्रतिलोम अनुपात में बदलते हैं। इसी प्रकार की कुछ अन्य राशियों के युग्मों के उदाहरणों के बारे में सोचिए जो प्रतिलोम अनुपात में बदलती (विचरित होती) हैं। अब आप फर्नीचर को व्यवस्थित करने की उस समस्या पर ध्यान दे सकते

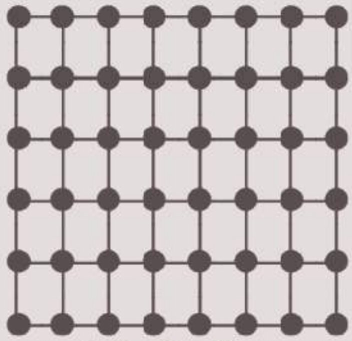
हैं, जो हमने इस अध्याय की भूमिका में वर्णित की थी। प्रतिलोम समानुपात को और अच्छी प्रकार से समझने के लिए एक क्रियाकलाप यहाँ दिया जा रहा है।

इन्हें कीजिए

एक वर्गांकित कागज़ लीजिए और उस पर 48 काउंटरों (counters) को पंक्तियों की विभिन्न संख्याओं में नीचे दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए :



4 पंक्तियाँ, 12 स्तंभ



6 पंक्तियाँ, 8 स्तंभ

पंक्तियों की संख्या (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
स्तंभों की संख्या (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

आप क्या देखते हैं? जब R में वृद्धि होती है, तो C में कमी होती है।

(i) क्या $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ है? (ii) क्या $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ है?

(iii) क्या R और C परस्पर व्युत्क्रमानुपाती हैं?

इस क्रियाकलाप को 36 काउंटरों के साथ प्रयास कीजिए।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित सारणियों को देखिए तथा ज्ञात कीजिए कि कौन-से चरों (यहाँ x और y) के युग्म परस्पर प्रतिलोम समानुपात में हैं :

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

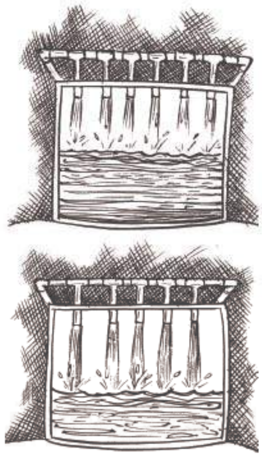
x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

आइए, कुछ ऐसे उदाहरणों पर विचार करें, जहाँ हम प्रतिलोम समानुपात की अवधारणा का प्रयोग करते हैं।

जब दो राशियाँ x और y प्रत्यक्ष या सीधे समानुपात में होती हैं (अर्थात् अनुक्रमानुपाती होती हैं), तो इन्हें $x \alpha y$ भी लिखा जाता है। जब दो राशियाँ x और y प्रतिलोम समानुपात में (अर्थात् व्युत्क्रमानुपाती) होती हैं, तो उन्हें $x \alpha \frac{1}{y}$ भी लिखा जाता है।

उदाहरण 7 : एक टंकी को 1 घंटे 20 मिनट में भरने के लिए 6 पाइपों (pipes) की आवश्यकता पड़ती है। यदि उसी प्रकार के केवल 5 पाइपों का ही उपयोग किया जाए, तो वह टंकी कितने समय में भरेगी?

हल : मान लीजिए कि टंकी को भरने का वांछित समय x मिनट है। तब, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :



पाइपों की संख्या	6	5
समय (मिनटों में)	80	x

पाइपों की संख्या जितनी कम होगी, टंकी को भरने में उतना ही अधिक समय लगेगा। अतः यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है।

अतः $80 \times 6 = x \times 5$ $(x_1 y_1 = x_2 y_2)$

या $\dfrac{80 \times 6}{5} = x$ या $x = 96$

इस प्रकार, टंकी को 5 पाइपों द्वारा 96 मिनट, अर्थात् 1 घंटा 36 मिनट में भरा जाएगा।

उदाहरण 8 : एक छात्रावास में 100 विद्यार्थी हैं और उनके भोजन की सामग्री 20 दिन के लिए पर्याप्त है। यदि इस समूह में 25 विद्यार्थी और आ जाएँ, तो यह भोजन सामग्री कितने दिन चलेगी?

हल : मान लीजिए कि भोजन सामग्री 125 विद्यार्थियों के लिए y दिन तक चलेगी। हम निम्नलिखित सारणी प्राप्त करते हैं :

विद्यार्थियों की संख्या	100	125
दिनों की संख्या	20	y

ध्यान दीजिए कि जितने विद्यार्थी अधिक होंगे उतने ही कम समय में भोजन सामग्री समाप्त हो जाएगी। अतः यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है।

इसलिए $100 \times 20 = 125 \times y$

या $\dfrac{100 \times 20}{125} = y$

या $y = 16$

वैकल्पिक रूप से, हम $x_1 y_1 = x_2 y_2$ को $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_2}{y_1}$ लिख सकते हैं।

अर्थात् $y_1 : x_2 = y_2 : y_1$

या $100 : 125 = y : 20$

या $y = \dfrac{100 \times 20}{125} = 16$

उदाहरण 9 : यदि 15 श्रमिक किसी दीवार को 48 घंटे में निर्मित कर सकते हैं, तो इसी कार्य को 30 घंटे में पूरा करने के लिए, कितने श्रमिकों की आवश्यकता होगी?

हल : मान लीजिए दीवार को 30 घंटे में निर्मित करने के लिए y श्रमिकों की आवश्यकता है। तब, हम निम्नलिखित सारणी प्राप्त करते हैं :

घंटों की संख्या	48	30
श्रमिकों की संख्या	15	y

स्पष्टतः, अधिक श्रमिक होने पर, दीवार बनने में कम समय लगेगा।
अतः यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है।

इसलिए, $48 \times 15 = 30 \times y$

अतः $\frac{48 \times 15}{30} = y$ या $y = 24$

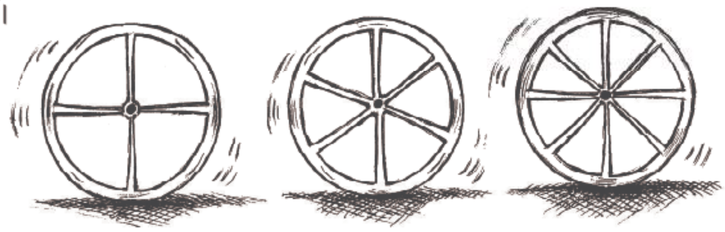
अर्थात् इस कार्य को 30 घंटे में समाप्त करने के लिए 24 श्रमिकों की आवश्यकता है।

प्रश्नावली 13.2

1. निम्नलिखित में से कौन प्रतिलोम अनुपात में हैं?
   (i) किसी कार्य पर लगे व्यक्तियों की संख्या और उस कार्य को पूरा करने में लगा समय।
   (ii) एक समान चाल से किसी यात्रा में लिया गया समय और तय दूरी।
   (iii) खेती की गई भूमि का क्षेत्रफल और काटी गई फसल।
   (iv) एक निश्चित यात्रा में लिया गया समय और वाहन की चाल।
   (v) किसी देश की जनसंख्या और प्रति व्यक्ति भूमि का क्षेत्रफल।
2. एक टेलीविज़न गेम शो (game show) में, ₹ 1,00,000 की पुरस्कार राशि विजेताओं में समान रूप से वितरित की जानी है। निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए तथा ज्ञात कीजिए कि क्या एक व्यक्तिगत विजेता को दी जाने वाली पुरस्कार की धनराशि विजेताओं की संख्या के अनुक्रमानुपाती है या व्युत्क्रमानुपाती है।

विजेताओं की संख्या	1	2	4	5	8	10	20
प्रत्येक विजेता का पुरस्कार (₹ में)	1,00,000	50,000	...	...	...	...	...

3. रहमान तीलियों या डंडियों का प्रयोग करते हुए, एक पहिया बना रहा है। वह समान तीलियाँ इस प्रकार लगाना चाहता है कि किन्हीं भी क्रमागत तीलियों के युग्मों के बीच के कोण बराबर हैं।



निम्नलिखित सारणी को पूरा करके, उसकी सहायता कीजिए :

तीलियों की संख्या	4	6	8	10	12
क्रमागत तीलियों के एक युग्म के बीच का कोण	90°	60°	...	...	...

(i) क्या तीलियों की संख्या और क्रमागत तीलियों के किसी युग्म के बीच का कोण प्रतिलोम समानुपात में है?

(ii) 15 तीलियों वाले एक पहिए के क्रमागत तीलियों के किसी युग्म का कोण परिकलित कीजिए।

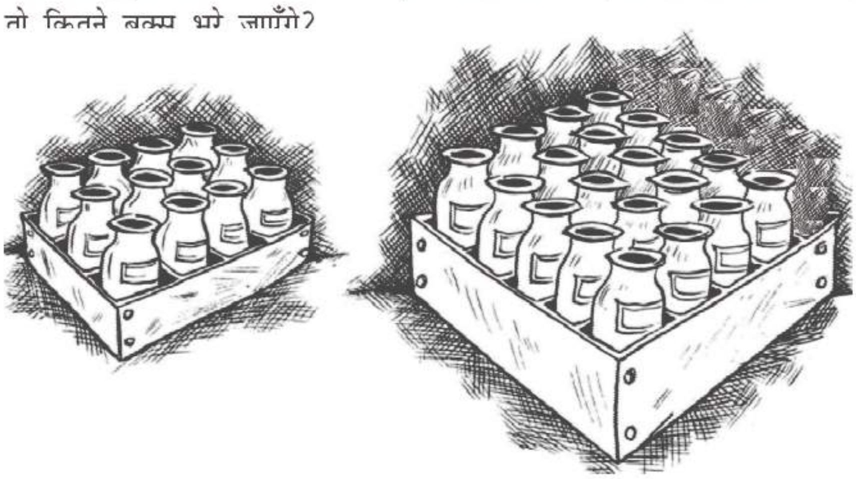
(iii) यदि क्रमागत तीलियों के प्रत्येक युग्म के बीच का कोण 40° है, तो आवश्यक तीलियों की संख्या कितनी होगी?

4. यदि किसी डिब्बे की मिठाई को 24 बच्चों में बाँटा जाए, तो प्रत्येक बच्चे को 5 मिठाइयाँ मिलती हैं। यदि बच्चों की संख्या में 4 की कमी हो जाए, तो प्रत्येक बच्चे को कितनी मिठाइयाँ मिलेंगी?

5. एक किसान की पशुशाला में 20 पशुओं के लिए 6 दिन का पर्याप्त भोजन है। यदि इस पशुशाला में 10 पशु और आ जाएँ, तो यह भोजन कितने दिन तक पर्याप्त रहेगा?

6. एक ठेकेदार यह आकलन करता है कि जसमिंदर के घर में पुनः तार लगाने का कार्य 3 व्यक्ति 4 दिन में कर सकते हैं। यदि वह तीन के स्थान पर चार व्यक्तियों को इस काम पर लगाता है, तो यह कार्य कितने दिन में पूरा हो जाएगा?

7. बोतलों के एक बैच (batch) को 25 बक्सों में रखा जाता है, जबकि प्रत्येक बक्स में 12 बोतलें हैं। यदि इसी बैच की बोतलों को इस प्रकार रखा जाए कि प्रत्येक बक्स में 20 बोतलें हों, तो कितने बक्स भरे जाएँगे?



8. एक फैक्ट्री को कुछ वस्तुएँ 63 दिन में बनाने के लिए 42 मशीनों की आवश्यकता होती है। उतनी ही वस्तुएँ 54 दिन में बनाने के लिए, कितनी मशीनों की आवश्यकता होगी?

9. एक कार एक स्थान तक पहुँचने में 60 km/h की चाल से चलकर 2 घंटे का समय लेती है। 80 km/h की चाल से उस कार को कितना समय लगेगा?

10. दो व्यक्ति एक घर में नई खिड़कियाँ 3 दिन में लगा सकते हैं।

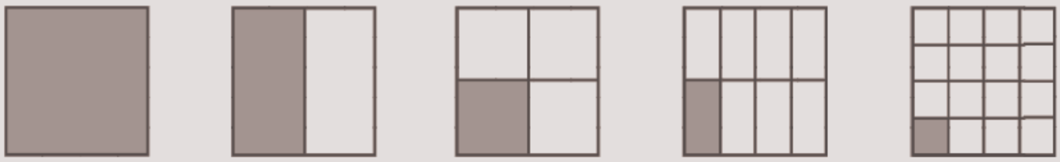
(i) कार्य प्रारंभ होने से पहले, एक व्यक्ति बीमार पड़ जाता है। अब यह कार्य कितने दिन में पूरा हो पाएगा?

(ii) एक ही दिन में खिड़कियाँ लगवाने के लिए, कितने व्यक्तियों की आवश्यकता होगी?

11. किसी स्कूल में, 45 मिनट अवधि के 8 कालांश होते हैं। यह कल्पना करते हुए कि स्कूल का कार्य समय उतना ही रहता है, यदि स्कूल में बराबर अवधि के 9 कालांश हों, तो प्रत्येक कालांश कितने समय का होगा?

इन्हें कीजिए

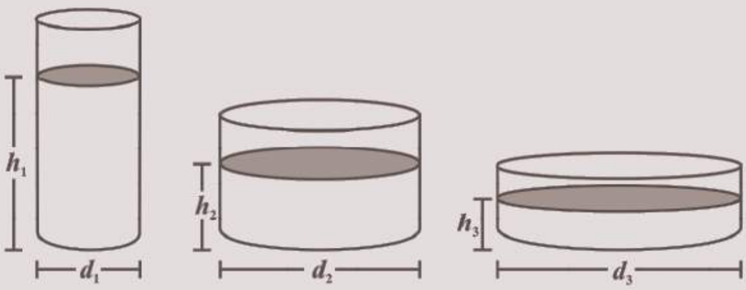
1. एक कागज़ की शीट लीजिए। इसे आकृति में दर्शाए अनुसार मोड़िए। प्रत्येक स्थिति में, भागों की संख्या तथा एक भाग का क्षेत्रफल लिखिए।



अपने प्रेक्षणों की सारणी बनाइए और उसकी अपने मित्रों से चर्चा कीजिए। क्या यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है? क्यों?

भागों की संख्या	1	2	4	8	16
प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल	कागज़ का क्षेत्रफल	कागज़ के क्षेत्रफल का $\frac{1}{2}$	...	...	...

2. वृत्तीय आधार वाले विभिन्न मापों के कुछ बर्तन लीजिए। प्रत्येक बर्तन में पानी की समान मात्रा भरिए। प्रत्येक बर्तन का व्यास और उस बर्तन में पानी किस ऊँचाई तक है उसे माप कर लिखिए। अपने प्रेक्षणों की एक सारणी बनाइए। क्या यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है?



बरतन का व्यास (cm में)			
पानी के स्तर की ऊँचाई (cm में)			

हमने क्या चर्चा की?

1. दो राशियाँ x और y प्रत्यक्ष या **सीधे समानुपात** में अथवा **परस्पर अनुक्रमानुपाती** कही जाती हैं, यदि वे साथ-साथ इस प्रकार बढ़ती (घटती) हैं कि उनके संगत मानों का अनुपात अचर रहता है। अर्थात्, यदि $\frac{x}{y} = k$ हो (जहाँ k एक धनात्मक अचर है), तो x और y परस्पर अनुक्रमानुपाती कहलाती हैं। इस प्रकार की स्थिति में, यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान क्रमशः y_1, y_2 हों तो $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ होता है।
2. दो राशियाँ x और y **प्रतिलोम समानुपात** में अथवा **परस्पर व्युत्क्रमानुपाती** कही जाती हैं, यदि x में हुई एक वृद्धि y में एक समानुपाती कमी उत्पन्न करे तथा x में हुई एक कमी y में एक समानुपाती वृद्धि उत्पन्न करे ताकि इनके संगत मानों का गुणनफल अचर रहे। अर्थात् यदि $xy = k$ हो, तो x और y परस्पर व्युत्क्रमानुपाती कहलाती हैं। इस स्थिति में, यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान क्रमशः y_1, y_2 हों, तो $x_1y_1 = x_2y_2$ या $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ होता है।

अध्याय

गुणनखंडन

14

0853CH14

14.1 भूमिका

14.1.1 प्राकृत संख्याओं के गुणनखंड

आपको याद होगा कि आपने गुणनखंडों (factors) के बारे में कक्षा VI में पढ़ा था। आइए, एक प्राकृत संख्या लेते हैं। मान लीजिए यह संख्या 30 है। हम इसे अन्य प्राकृत संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखते हैं, जैसे

$$30 = 2 \times 15$$
$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

इस प्रकार 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 और 30 संख्या 30 के गुणनखंड हैं। इनमें से 2, 3 और 5, संख्या 30 के अभाज्य गुणनखंड हैं (क्यों?)। जब कोई संख्या अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखी हो, तो वह उसका अभाज्य गुणनखंड रूप कहलाता है। उदाहरण के लिए 30 को अभाज्य गुणनखंड रूप में $2 \times 3 \times 5$ लिखते हैं।

> हम जानते हैं कि 30 को इस रूप में भी लिखा जा सकता है :
> $30 = 1 \times 30$
> इस प्रकार, 1 और 30 भी 30 के गुणनखंड हैं। आप देखेंगे कि 1 प्रत्येक संख्या का एक गुणनखंड होता है उदाहरणार्थ, $101 = 1 \times 101$ होता है।
> परंतु जब भी हम किसी संख्या को गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखेंगे, तो हम, 1 को गुणनखंड के रूप में तब तक नहीं लिखेंगे। जब तक विशेष रूप से आवश्यक न हो।

70 का अभाज्य गुणनखंड रूप $2 \times 5 \times 7$ है। 90 का अभाज्य गुणनखंड रूप $2 \times 3 \times 3 \times 5$ है, इत्यादि।

इसी प्रकार, हम बीजीय व्यंजकों (algebraic expression) को भी उनके गुणनखंडों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इसका हम इस अध्याय में अध्ययन करेंगे।

14.1.2 बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड

हम कक्षा VII में देख चुके हैं कि बीजीय व्यंजकों के पद (terms) गुणनखंडों के गुणनफलों के रूप में बनते हैं। उदाहरणार्थ, बीजीय व्यंजक $5xy + 3x$ में, पद $5xy$ गुणनखंडों 5, x और y से बना है, अर्थात्

$$5xy = 5 \times x \times y$$

ध्यान दीजिए कि $5xy$ के गुणनखंड 5, x और y को और आगे गुणनखंडित नहीं किया जा सकता है, अर्थात् उन्हें गुणनखंडों के

> ध्यान दीजिए कि 1 पद $5xy$, का एक गुणनखंड है, क्योंकि
> $$5xy = 1 \times 5 \times x \times y$$
> वास्तव में, 1 प्रत्येक पद का एक गुणनखंड होता है। प्राकृत संख्याओं की स्थिति की ही तरह, जब तक विशेष रूप से आवश्यक न हो, हम 1 को किसी भी पद का अलग से गुणनखंड नहीं लिखते हैं।

गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। हम कह सकते हैं कि $5xy$ के अभाज्य गुणनखंड (prime factors) 5, x और y हैं। बीजीय व्यंजकों में, हम 'अभाज्य' के स्थान पर शब्द 'अखंडनीय (irreducible)' का प्रयोग करते हैं। हम कहते हैं कि $5xy$ का अखंडनीय रूप $5 \times x \times y$ है। ध्यान दीजिए कि $5 \times (xy)$ पद $5xy$ का अखंडनीय रूप नहीं है, क्योंकि गुणनखंड xy को और आगे x एवं y के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, अर्थात् $xy = x \times y$ है।

अब, व्यंजक $3x\,(x + 2)$ पर विचार कीजिए। इसे गुणनखंडों 3, x और $(x + 2)$ के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अर्थात्

$$3x(x + 2) = 3 \times x \times (x + 2)$$

व्यंजक $3x\,(x + 2)$ के अखंडनीय गुणनखंड 3, x और $(x + 2)$ हैं।

इसी प्रकार, व्यंजक $10x\,(x + 2)\,(y + 3)$ को अखंडनीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जाता है :

$$10x\,(x + 2)\,(y + 3) = 2 \times 5 \times x \times (x + 2) \times (y + 3)$$

14.2 गुणनखंडन क्या है?

जब हम किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखंड करते हैं, तो हम उसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। ये गुणनखंड, संख्याएँ, बीजीय चर या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं। $3xy$, $5x^2y$, $2x\,(y + 2)$, $5\,(y + 1)\,(x + 2)$ जैसे व्यंजक पहले से ही गुणनखंड रूप में हैं। जैसा कि हम पहले से ही जानते हैं, हम उपरोक्त व्यंजकों के गुणनखंड इन्हें देखकर ही पढ़ सकते हैं।

इसके विपरीत $2x + 4$, $3x + 3y$, $x^2 + 5x$, $x^2 + 5x + 6$ जैसे व्यंजकों पर विचार कीजिए। यह स्पष्ट नहीं है कि इनके गुणनखंड क्या हैं। इस प्रकार के व्यंजकों के गुणनखंड करने के लिए, हमें क्रमबद्ध विधियाँ विकसित करने की आवश्यकता है। यही अब हम करेंगे।

14.2.1 सार्व गुणनखंडों की विधि

- हम एक सरल उदाहरण से प्रारंभ करते हैं : $2x + 4$ के गुणनखंड कीजिए।

  हम इसके प्रत्येक पद को अखंडनीय गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखेंगे :

$$2x = 2 \times x$$
$$4 = 2 \times 2$$

अतः $$2x + 4 = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

ध्यान दीजिए कि गुणनखंड 2 दोनों पदों में उभयनिष्ठ (सार्व) है।

देखिए, बंटन नियम द्वारा

$$2 \times (x + 2) = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

अतः हम लिख सकते हैं कि

$$2x + 4 = 2 \times (x + 2) = 2\,(x + 2)$$

इस प्रकार, व्यंजक $2x + 4$ वही है जो $2\,(x + 2)$ है। अब हम इसके गुणनखंड पढ़ सकते हैं : ये 2 और $(x + 2)$ हैं। ये गुणनखंड अखंडनीय हैं।

अब, $5xy + 10x$ के गुणनखंड कीजिए।

$5xy$ और $10x$ के अखंडनीय गुणनखंड रूप क्रमशः हैं :

$$5xy = 5 \times x \times y$$
$$10x = 2 \times 5 \times x$$

ध्यान दीजिए कि दोनों पदों में 5 और x उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं। अब,

$$5xy + 10x = (5 \times x \times y) + (5 \times x \times 2)$$
$$= (5x \times y) + (5x \times 2)$$

हम दोनों पदों को बंटन नियम द्वारा संयोजित करते हैं :

$$(5x \times y) + (5x \times 2) = 5x \times (y + 2)$$

अतः $5xy + 10x = 5x(y + 2)$ (यही वांछित गुणनखंड रूप है।)

उदाहरण 1 : $12a^2b + 15ab^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम पाते हैं :

$$12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$$
$$15ab^2 = 3 \times 5 \times a \times b \times b$$

इन दोनों पदों में 3, a और b सार्व गुणनखंड हैं

अतः

$$12a^2b + 15ab^2 = (3 \times a \times b \times 2 \times 2 \times a) + (3 \times a \times b \times 5 \times b)$$
$$= 3 \times a \times b \times [(2 \times 2 \times a) + (5 \times b)]$$
$$= 3ab \times (4a + 5b) \quad \text{(पदों को मिलाने पर)}$$
$$= 3ab\,(4a + 5b) \quad \text{(वांछित गुणनखंड रूप)}$$

उदाहरण 2 : $10x^2 - 18x^3 + 14x^4$ के गुणनखंड कीजिए।

हल :

$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$
$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$
$$14x^4 = 2 \times 7 \times x \times x \times x \times x$$

इन तीनों पदों में सार्व गुणनखंड 2, x और x हैं।

अतः

$$10x^2 - 18x^3 + 14x^4 = (2 \times x \times x \times 5) - (2 \times x \times x \times 3 \times 3 \times x)$$
$$+ (2 \times x \times x \times 7 \times x \times x)$$
$$= 2 \times x \times x \times [(5 - (3 \times 3 \times x) + (7 \times x \times x)]$$
$$= 2x^2 \times (5 - 9x + 7x^2) = \underbrace{2x^2(7x^2 - 9x + 5)}$$ (तीनों पदों को मिलाने पर)

क्या आप देख रहे हैं कि एक व्यंजक के गुणनखंड रूप में केवल एक ही पद होता है?

प्रयास कीजिए

गुणनखंड कीजिए :
(i) $12x + 36$ (ii) $22y - 33z$ (iii) $14pq + 35pqr$

14.2.2 पदों के पुनः समूहन द्वारा गुणनखंडन

व्यंजक $2xy + 2y + 3x + 3$ पर विचार कीजिए। आप देखेंगे कि पहले दो पदों में सार्व गुणनखंड 2 और y हैं तथा अंतिम दो पदों में सार्व गुणनखंड 3 है। परंतु सभी पदों में कोई सार्व गुणनखंड नहीं है। हम किस प्रकार प्रारंभ करेंगे?

आइए, $(2xy + 2y)$ को गुणनखंड रूप में लिखें।

$$2xy + 2y = (2 \times x \times y) + (2 \times y)$$
$$= (2 \times y \times x) + (2 \times y \times 1)$$
$$= (2y \times x) + (2y \times 1) = 2y\,(x + 1)$$

इसी प्रकार,

$$3x + 3 = (3 \times x) + (3 \times 1)$$
$$= 3 \times (x + 1) = 3\,(x + 1)$$

ध्यान दीजिए : यहाँ हमें 1 को गुणनखंड के रूप में दर्शाने की आवश्यकता है। क्यों?

अतः $$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x +1)$$

ध्यान दीजिए कि यहाँ दाएँ पक्ष के दोनों पदों में एक सार्व गुणनखंड $(x + 1)$ है। दोनों पदों को मिलाने पर,

$$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x + 1) = (x + 1)\,(2y + 3)$$

अब, व्यंजक $2xy + 2y + 3x + 3$ गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में है। इसके गुणनखंड $(x + 1)$ और $(2y + 3)$ हैं। ध्यान दीजिए कि ये गुणनखंड अखंडनीय हैं।

पुनः समूहन (regrouping) क्या है?

मान लीजिए कि उपरोक्त व्यंजक $2xy + 3 + 2y + 3x$ के रूप में दिया है, तब इसका गुणनखंडन देखना सरल नहीं है। इसी व्यंजक को $2xy + 2y + 3x + 3$ के रूप में पुनर्व्यवस्थित करने पर, इसके $(2xy + 2y)$ और $(3x + 3)$ समूह बनाकर गुणनखंडन किया जा सकता है, यही **पुनः समूहन** है।

पुनः समूहन एक से अधिक विधियों द्वारा संभव हो सकता है। मान लीजिए कि हम उपरोक्त व्यंजक को $2xy + 3x + 2y + 3$ के रूप में पुनः समूहन करते हैं। इससे भी हम गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं। आइए, प्रयास करें :

$$\begin{aligned}2xy + 3x + 2y + 3 &= 2 \times x \times y + 3 \times x + 2 \times y + 3\\ &= x \times (2y + 3) + 1 \times (2y + 3)\\ &= (2y + 3)\,(x + 1)\end{aligned}$$

गुणनखंड वही हैं (जैसा कि उन्हें होना चाहिए), यद्यपि वे विभिन्न क्रम में दिखाई दे रहे हैं।

उदाहरण 3 : $6xy - 4y + 6 - 9x$ के गुणनखंड कीजिए।

हल :

चरण 1 जाँच कीजिए कि क्या सभी पदों में कोई सार्व गुणनखंड है। यहाँ कोई नहीं है।

चरण 2 समूहन के बारे में सोचिए। ध्यान दीजिए कि पहले दो पदों में सार्व गुणनखंड $2y$ है। अतः,

$$6xy - 4y = 2y\,(3x - 2) \qquad \text{(a)}$$

अंतिम दो पदों के बारे में क्या कहा जा सकता है? उन्हें देखिए। यदि आप इनका क्रम बदलकर $-9x + 6$, लिख लें, तो गुणनखंड $(3x - 2)$ आ जाएगा।

अतः $$\begin{aligned}-9x + 6 &= -3\,(3x) + 3\,(2)\\ &= -3\,(3x - 2) \qquad \text{(b)}\end{aligned}$$

चरण 3 (a) और (b) को एक साथ रखने पर,

$$\begin{aligned}6xy - 4y + 6 - 9x &= 6xy - 4y - 9x + 6\\ &= 2y\,(3x - 2) - 3\,(3x - 2)\\ &= (3x - 2)\,(2y - 3)\end{aligned}$$

इस प्रकार, $(6xy - 4y + 6 - 9x)$ के गुणनखंड $(3x - 2)$ और $(2y - 3)$ हैं।

प्रश्नावली 14.1

1. दिए हुए पदों में सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

(i) $12x, 36$ (ii) $2y, 22xy$ (iii) $14\,pq, 28p^2q^2$

(iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6\,abc, 24ab^2, 12\,a^2b$

(vi) $16\,x^3, -4x^2, 32x$ (vii) $10\,pq, 20qr, 30rp$

(viii) $3x^2\,y^3, 10x^3\,y^2, 6\,x^2\,y^2z$

2. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :

(i) $7x - 42$ (ii) $6p - 12q$ (iii) $7a^2 + 14a$

(iv) $-16\,z + 20\,z^3$ (v) $20\,l^2\,m + 30\,a\,l\,m$

(vi) $5\,x^2\,y - 15\,xy^2$ (vii) $10\,a^2 - 15\,b^2 + 20\,c^2$

(viii) $-4\,a^2 + 4\,ab - 4\,ca$ (ix) $x^2\,y\,z + x\,y^2z + x\,y\,z^2$

(x) $a\,x^2\,y + b\,x\,y^2 + c\,x\,y\,z$

3. गुणनखंड कीजिए :

(i) $x^2 + x\,y + 8x + 8y$ (ii) $15\,xy - 6x + 5y - 2$

(iii) $ax + bx - ay - by$ (iv) $15\,pq + 15 + 9q + 25p$

(v) $z - 7 + 7\,x\,y - x\,y\,z$

14.2.3 सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखंडन

हम जानते हैं कि

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(I)}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2 \qquad \text{(III)}$$

निम्नलिखित हल किए उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाएगा कि गुणनखंडन के लिए इन सर्वसमिकाओं (identities) का किस प्रकार प्रयोग किया जा सकता है। पहले हम दिए हुए व्यंजक को देखते हैं। यदि यह उपरोक्त सर्वसमिकाओं में से किसी एक के दाएँ पक्ष के रूप का है, तो उस सर्वसमिका के बाएँ पक्ष के संगत व्यंजक से वांछित गुणनखंड प्राप्त हो जाते हैं।

उदाहरण 4 : $x^2 + 8x + 16$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : इस व्यंजक को देखिए। इसके तीन पद हैं। अत: इसमें सर्वसमिका III का प्रयोग नहीं किया जा सकता है। साथ ही, इसके पहले और तीसरे पद पूर्ण वर्ग हैं तथा बीच वाले पद का चिह्न धनात्मक है। अत: यह $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप का है, जहाँ $a = x$ और $b = 4$ हैं।

इस प्रकार, $a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + 2\,(x)\,(4) + 4^2$

$= x^2 + 8x + 16$

क्योंकि $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,

तुलना करने पर, $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (वांछित गुणनखंडन)

ध्यान दीजिए कि दिया हुआ व्यंजक $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप का है, जहाँ $a = 2y$, $b = 3$ तथा $2ab = 2 \times 2y \times 3 = 12y$ हैं।

उदाहरण 5 : $4y^2 - 12y + 9$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि $4y^2 = (2y)^2$, $9 = 3^2$ और $12y = 2 \times 3 \times (2y)$

अत: $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \times 3 \times (2y) + (3)^2$

$= (2y - 3)^2$ (वांछित गुणनखंडन)

उदाहरण 6 : $49p^2 - 36$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : यहाँ दो पद हैं। दोनों ही पूर्ण वर्ग हैं तथा दूसरा ऋणात्मक है अर्थात् यह व्यंजक $(a^2 - b^2)$ के रूप का है। यहाँ सर्वसमिका III का प्रयोग किया जाएगा।

$$49p^2 - 36 = (7p)^2 - (6)^2$$
$$= (7p - 6)(7p + 6) \text{ (वांछित गुणनखंडन)}$$

उदाहरण 7 : $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : दिए हुए व्यंजक के पहले तीन पदों से $(a - b)^2$ प्राप्त होता है। चौथा पद एक वर्ग है। इसलिए इस व्यंजक को दो वर्गों के अंतर के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है।

इस प्रकार $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2$ (सर्वसमिका II से)

$= [(a - b) - c)((a - b) + c)]$ (सर्वसमिका III से)

$= (a - b - c)(a - b + c)$ (वांछित गुणनखंडन)

ध्यान दीजिए कि वांछित गुणनखंडन प्राप्त करने के लिए, हमने किस प्रकार एक के बाद एक दो सर्वसमिकाओं का प्रयोग किया है।

उदाहरण 8 : $m^4 - 256$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $m^4 = (m^2)^2$ और $256 = (16)^2$

अतः दिए हुए व्यंजक में सर्वसमिका III का प्रयोग होगा।

इसलिए $m^4 - 256 = (m^2)^2 - (16)^2$

$= (m^2 - 16)(m^2 + 16)$ [(सर्वसमिका (III)से]

अब $m^2 + 16$ के आगे गुणनखंड नहीं किए जा सकते हैं, परंतु $(m^2 - 16)$ के सर्वसमिका III के प्रयोग से और भी गुणनखंड किए जा सकते हैं।

अब $m^2 - 16 = m^2 - 4^2$

$= (m - 4)(m + 4)$

इसलिए $m^4 - 256 = (m - 4)(m + 4)(m^2 + 16)$

14.2.4 $(x + a)(x + b)$ के रूप के गुणनखंड

आइए अब चर्चा करें कि हम एक चर वाले व्यंजकों, जैसे $x^2 + 5x + 6$, $y^2 - 7y + 12$, $z^2 - 4z - 12$, $3m^2 + 9m + 6$, इत्यादि के गुणनखंड किस प्रकार कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि ये व्यंजक $(a + b)^2$ या $(a - b)^2$ के प्रकार के नहीं है, अर्थात् ये पूर्ण वर्ग नहीं हैं। उदाहरणार्थ, $x^2 + 5x + 6$ में पद 6 एक पूर्ण वर्ग नहीं है। स्पष्टतः इस प्रकार के व्यंजक $(a^2 - b^2)$ के प्रकार के भी नहीं हैं।

परंतु ये $x^2 + (a + b)x + ab$ के प्रकार के प्रतीत होते हैं। इसलिए इस प्रकार के गुणनखंड करने के लिए, हम पिछले अध्याय में अध्ययन की गई सर्वसमिका सात(7) का प्रयोग कर सकते हैं। यह सर्वसमिका है :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \qquad \text{(IV)}$$

इसके लिए हमें x के गुणांक (coefficient) और अचर पद(constant term) को देखना होगा। आइए, निम्नलिखित उदाहरण में देखें कि ऐसा किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 9 : $x^2 + 5x + 6$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : यदि हम सर्वसमिका (IV) के दाएँ पक्ष (RHS) से $x^2 + 5x + 6$ की तुलना करें, तो हम पाएँगे कि $ab = 6$ और $a + b = 5$ है। यहाँ से हमें a और b ज्ञात करने चाहिए। तब $(x + a)$ और $(x + b)$ गुणनखंड होंगे।

यदि $ab = 6$ है, तो इसका अर्थ है कि a और b संख्या 6 के गुणनखंड हैं।

आइए, $a = 6$ और $b = 1$ लेकर प्रयास करें। इन मानों के लिए $a + b = 7$ है और 5 नहीं है। इसलिए यह विकल्प सही नहीं है।

आइए $a = 2$ और $b = 3$ लेकर प्रयास करें। इसके लिए, $a + b = 5$ है, जो ठीक वही है जो हम चाहते हैं।

तब, इस दिए हुए व्यंजक का गुणनखंड रूप $(x + 2)(x + 3)$ है।

व्यापक रूप में, $x^2 + px + q$ के प्रकार के बीजीय व्यंजक के गुणनखंड करने के लिए, हम q के (अर्थात् अचर पद के) दो गुणनखंड a और b इस प्रकार ज्ञात करते हैं कि

$ab = q$ और $a + b = p$ हो।

तब, यह व्यंजक हो जाता है : $x^2 + (a + b)x + ab$

या $x^2 + ax + bx + ab$

या $x(x + a) + b(x + a)$

या $(x + a)(x + b)$ जो, वांछित गुणनखंड हैं।

उदाहरण 10 : $y^2 - 7y + 12$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $12 = 3 \times 4$ और $3 + 4 = 7$ है।

इसलिए $y^2 - 7y + 12 = y^2 - 3y - 4y + 12$

$= y(y - 3) - 4(y - 3) = (y - 3)(y - 4)$

ध्यान दीजिए कि इस बार हमने a और b ज्ञात करने के लिए, दिए हुए व्यंजक की तुलना सर्वसमिका IV से नहीं की। पर्याप्त अभ्यास के बाद, आपको दिए हुए व्यंजकों के गुणनखंड करने के लिए उनकी तुलना सर्वसमिकाओं के व्यंजकों से करने की आवश्यकता नहीं है तथा आप सीधे ही गुणनखंड कर सकते हैं जैसा हमने ऊपर किया है।

उदाहरण 11 : $z^2 - 4z - 12$ के गुणनखंड प्राप्त कीजिए।

हल : यहाँ $ab = -12$ है। इसका अर्थ है कि a और b में से एक ऋणात्मक है। साथ ही, $a + b = -4$ है। इसका अर्थ है कि बड़े संख्यात्मक मान वाला ऋणात्मक है। हम $a = -4$ और $b = 3$; लेकर प्रयास करते हैं। परंतु यह कार्य नहीं करेगा, क्योंकि $a + b = -1$ है। इनसे अगले संभव मान $a = -6$ और $b = 2$ हैं, तब $a + b = -4$ है, जो हमें चाहिए।

अत: $z^2 - 4z - 12 = z^2 - 6z + 2z - 12$

$= z(z - 6) + 2(z - 6)$

$= (z - 6)(z + 2)$

उदाहरण 12 : $3m^2 + 9m + 6$ के गुणनखंड प्राप्त कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 3 सभी पदों का एक सार्व गुणनखंड है।

अत: $3m^2 + 9m + 6 = 3(m^2 + 3m + 2)$

अब, $m^2 + 3m + 2 = m^2 + m + 2m + 2$ (क्योंकि $2 = 1 \times 2$)

$= m(m + 1) + 2(m + 1)$

$= (m + 1)(m + 2)$

अत: $3m^2 + 9m + 6 = 3(m + 1)(m + 2)$

प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :
   (i) $a^2 + 8a + 16$ (ii) $p^2 - 10p + 25$ (iii) $25m^2 + 30m + 9$
   (iv) $49y^2 + 84yz + 36z^2$ (v) $4x^2 - 8x + 4$
   (vi) $121b^2 - 88bc + 16c^2$
   (vii) $(l + m)^2 - 4lm$ (संकेत : पहले $(l + m)^2$ को प्रसारित कीजिए।)
   (viii) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
2. गुणनखंड कीजिए :
   (i) $4p^2 - 9q^2$ (ii) $63a^2 - 112b^2$ (iii) $49x^2 - 36$
   (iv) $16x^5 - 144x^3$ (v) $(l + m)^2 - (l - m)^2$
   (vi) $9x^2y^2 - 16$ (vii) $(x^2 - 2xy + y^2) - z^2$
   (viii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$
3. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :
   (i) $ax^2 + bx$ (ii) $7p^2 + 21q^2$ (iii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$
   (iv) $am^2 + bm^2 + bn^2 + an^2$ (v) $(lm + l) + m + 1$
   (vi) $y(y + z) + 9(y + z)$ (vii) $5y^2 - 20y - 8z + 2yz$
   (viii) $10ab + 4a + 5b + 2$ (ix) $6xy - 4y + 6 - 9x$
4. गुणनखंड कीजिए :
   (i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $x^4 - (y + z)^4$
   (iv) $x^4 - (x - z)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$
5. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :
   (i) $p^2 + 6p + 8$ (ii) $q^2 - 10q + 21$ (iii) $p^2 + 6p - 16$

14.3 बीजीय व्यंजकों का विभाजन

हम सीख चुके हैं कि बीजीय व्यंजकों को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है। हम यह भी जानते हैं कि दो व्यंजकों को किस प्रकार गुणा किया जाता है। परंतु हमने एक बीजीय व्यंजक से दूसरे व्यंजक के विभाजन पर अभी तक चर्चा नहीं की है इस अनुच्छेद में, हम यही करना चाहते हैं।

आपको याद होगा कि विभाजन (division) गुणन (multiplication) की प्रतिलोम संक्रिया है। इस प्रकार, $7 \times 8 = 56$ से $56 \div 8 = 7$ या $56 \div 7 = 8$ प्राप्त होता है।

यही हम बीजीय व्यंजकों के विभाजन (या भाग देने) के लिए भी कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

(i) $$2x \times 3x^2 = 6x^3$$

अतः $$6x^3 \div 2x = 3x^2$$

तथा साथ ही, $$6x^3 \div 3x^2 = 2x$$

(ii) $$5x\,(x + 4) = 5x^2 + 20x$$

अतः $$(5x^2 + 20x) \div 5x = x + 4$$

तथा साथ ही, $(5x^2 + 20x) \div (x + 4) = 5x$

अब हम ध्यानपूर्वक देखेंगे कि एक व्यंजक को अन्य व्यंजक से किस प्रकार विभाजित किया जा सकता है। प्रारंभ करने के लिए, हम एक एकपदी (monomial) का एक अन्य एकपदी से विभाजन पर विचार करेंगे।

14.3.1 एकपदी का एक अन्य एकपदी से विभाजन

$6x^3 \div 2x$ पर विचार कीजिए।

हम $2x$ और $6x^3$ को अखंडनीय गुणनखंड रूपों में लिख सकते हैं :

$$2x = 2 \times x$$

$$6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$$

अब हम $2x$ को अलग करने के लिए, $6x^3$ के गुणनखंडों के समूह बनाते हैं।

$$6x^3 = 2 \times x \times (3 \times x \times x) = (2x) \times (3x^2)$$

इस प्रकार, $$6x^3 \div 2x = 3x^2$$

सार्व गुणनखंडों को निरस्त करने की एक संक्षिप्त विधि वह है जो हम संख्याओं के विभाजन में करते हैं।

जैसे $$77 \div 7 = \frac{77}{7} = \frac{7 \times 11}{7} = 11$$

इसी प्रकार, $$6x^3 \div 2x = \frac{6x^3}{2x}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 3 \times x \times x = 3x^2$$

उदाहरण 13 : निम्नलिखित विभाजन कीजिए :

(i) $-20x^4 \div 10x^2$ (ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$

हल :

(i) $-20x^4 = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

अतः $$(-20x^4) \div 10x^2 = \frac{-2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x}{2 \times 5 \times x \times x} = -2 \times x \times x = -2x^2$$

(ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$ $= \dfrac{7 \times x \times x \times y \times y \times z \times z}{2 \times 7 \times x \times y \times z}$

$= \dfrac{x \times y \times z}{2} = \dfrac{1}{2}xyz$

प्रयास कीजिए

भाग दीजिए :

(i) $24xy^2z^3$ को $6yz^2$ से (ii) $63a^2b^4c^6$ को $7a^2b^2c^3$ से

14.3.2 एक बहुपद का एक एकपदी से विभाजन

आइए, एक त्रिपद (trinomial) $4y^3 + 5y^2 + 6y$ का एकपदी $2y$ से विभाजन पर विचार करें।

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = (2 \times 2 \times y \times y \times y) + (5 \times y \times y) + (2 \times 3 \times y)$$

[यहाँ, हम बहुपद (polynomial) के प्रत्येक पद को गुणनखंड के रूप में लिखते हैं।] हम पाते हैं कि $2 \times y$ दो पदों में एक सार्व गुणनखंड है साथ ही, हम इसे तीसरे पद $5y^2$ के लिए भी एक सार्व गुणनखंड के रूप में बदल सकते हैं। तब, हम प्राप्त करते हैं :

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = 2 \times y \times (2 \times y \times y) + 2 \times y \times \left(\frac{5}{2} \times y\right) + 2 \times y \times 3$$

$$= 2y\,(2y^2) + 2y\left(\frac{5}{2}y\right) + 2y\,(3)$$

$$= 2y\left(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3\right)$$ (सार्व गुणनखंड $2y$ को अलग दर्शाया गया है

अतः $(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y$

$$= \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y} = \frac{2y\,(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3)}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

वैकल्पिक रूप में, हम त्रिपद के प्रत्येक पद को, निरस्तीकरण की विधि का प्रयोग करते हुए, उस एकपदी से भाग दे सकते थे :

> यहाँ हम अंश में बहुपद के प्रत्येक पद को हर में एकपदी से भाग देते हैं।

$$(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y = \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y} + \frac{5y^2}{2y} + \frac{6y}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

उदाहरण 14 : उपरोक्त दोनों विधियों का प्रयोग करते हुए, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$ को $8xyz$ से भाग दीजिए।

हल : $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times [(x \times x \times y \times z) + (x \times y \times y \times z) + (x \times y \times z \times z)]$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z \times (x + y + z) \quad \text{(सार्व गुणनखंड बाहर लेने पर)}$$

$$= 8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)$$

अतः $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

$$= \frac{8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)}{8 \times xyz} = 3 \times (x + y + z) = 3\,(x + y + z)$$

वैकल्पिक रूप में $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz = \dfrac{24x^2yz}{8xyz} + \dfrac{24xy^2z}{8xyz} + \dfrac{24xyz^2}{8xyz}$

$$= 3x + 3y + 3z = 3(x + y + z)$$

14.4 बहुपद का बहुपद से विभाजन

- $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$ पर विचार कीजिए।

  हर के साथ $(7x^2 + 14x)$ के गुणनखंडों की जाँच एवं मिलान करने के लिए, पहले इसके गुणनखंड करेंगे।

$$7x^2 + 14x = (7 \times x \times x) + (2 \times 7 \times x)$$

$$= 7 \times x \times (x + 2) = 7x(x + 2)$$

क्या यह अंश के प्रत्येक पद को हर में दिए द्विपद से भाग देने में कोई सहायता करेगा?

अब, $(7x^2 + 14x) \div (x + 2) = \dfrac{7x^2 + 14x}{x + 2}$

$$= \frac{7x(x + 2)}{x + 2} = 7x \text{ (गुणनखंड } (x + 2) \text{ को काटने पर)}$$

उदाहरण 15 : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ को $11x\,(x - 8)$ से भाग दीजिए।

हल : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$, के गुणनखंड करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 5x - 24)$$

(कोष्ठक में से सार्व गुणनखंड x^2 बाहर करने पर)

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 8x + 3x - 24)$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,[x\,(x - 8) + 3(x - 8)]$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\;(x - 8)\,(x + 3)$$

अतः $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x - 8)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 11 \times x \times x \times (x + 3) \times (x - 8)}{11 \times x \times (x - 8)}$$

$$= 2 \times 2 \times x\,(x + 3) = 4x(x + 3)$$

हम अंश और हर में से सार्व गुणनखंड 11, x और $(x - 8)$ को काट देते हैं।

उदाहरण 16 : $z(5z^2 - 80)$ को $5z(z + 4)$ से भाग दीजिए।

हल : भाज्य $= z(5z^2 - 80)$

$= z[(5 \times z^2) - (5 \times 16)]$

$= z \times 5 \times (z^2 - 16)$

$= 5z \times (z + 4)(z - 4)$ [सार्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ को प्रयोग करने पर]

इस प्रकार, $$z(5z^2 - 80) \div 5z(z + 4) = \frac{5z(z - 4)(z + 4)}{5z(z + 4)} = (z - 4)$$

प्रश्नावली 14.3

1. निम्नलिखित विभाजन कीजिए :
   (i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$ (iii) $66pq^2r^3 \div 11qr^2$
   (iv) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$
2. दिए हुए बहुपद को दिए हुए एकपदी से भाग दीजिए :
   (i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$
   (iii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 4x^2y^2z^2$ (iv) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$
   (v) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$
3. निम्नलिखित विभाजन कीजिए :
   (i) $(10x - 25) \div 5$ (ii) $(10x - 25) \div (2x - 5)$
   (iii) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (iv) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$
   (v) $96abc(3a - 12)(5b - 30) \div 144(a - 4)(b - 6)$
4. निर्देशानुसार भाग दीजिए :
   (i) $5(2x + 1)(3x + 5) \div (2x + 1)$ (ii) $26xy(x + 5)(y - 4) \div 13x(y - 4)$
   (iii) $52pqr(p + q)(q + r)(r + p) \div 104pq(q + r)(r + p)$
   (iv) $20(y + 4)(y^2 + 5y + 3) \div 5(y + 4)$ (v) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \div x(x + 1)$
5. व्यंजक के गुणनखंड कीजिए और निर्देशानुसार भाग दीजिए :
   (i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(m^2 - 14m - 32) \div (m + 2)$
   (iii) $(5p^2 - 25p + 20) \div (p - 1)$ (iv) $4yz(z^2 + 6z - 16) \div 2y(z + 8)$
   (v) $5pq(p^2 - q^2) \div 2p(p + q)$
   (vi) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$ (vii) $39y^3(50y^2 - 98) \div 26y^2(5y + 7)$

14.5 क्या आप त्रुटि ज्ञात कर सकते हैं?

कार्य (Task) 1 एक समीकरण को हल करते समय, सरिता निम्नलिखित प्रकार से हल करती है :

$$3x + x + 5x = 72$$

अत: $$8x = 72$$

और इसलिए, $$x = \frac{72}{8} = 9$$

उसने कहाँ त्रुटि की है? सही उत्तर ज्ञात कीजिए।

किसी पद के गुणांक 1 को प्राय: दर्शाया नहीं जाता है। परंतु समान पदों को जोड़ते समय, हम इसे योग में सम्मिलित करते हैं।

कार्य (Task) 2 अप्पू ने यह किया :

$$x = -3,\ 5x = 5 - 3 = 2$$

क्या उसकी प्रक्रिया सही है? यदि नहीं, तो इसे सही कीजिए।

एक ऋणात्मक मान रखते समय, कोष्ठकों का प्रयोग करना याद रखें।

कार्य (Task) 3 नम्रता और सलमा ने बीजीय व्यंजकों का गुणा निम्नलिखित प्रकारों से किया :

	नम्रता	सलमा
(a)	$3(x-4) = 3x - 4$	$3(x-4) = 3x - 12$
(b)	$(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(c)	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 - 6$	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 + a - 6$
(d)	$(x+8)^2 = x^2 + 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$
(e)	$(x-5)^2 = x^2 - 25$	$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

याद रखिए, जब आप कोष्ठकों में बंद किसी व्यंजक को उसके बाहर लिखे अचर (या चर) से गुणा करते हैं, तो व्यंजक के प्रत्येक पद से उस अचर (या चर) को गुणा किया जाता है।

याद रखिए, जब आप किसी एकपदी का वर्ग करते हैं, तो संख्यात्मक गुणांक और प्रत्येक गुणनखंड का वर्ग किया जाता है।

कोई भी सूत्र प्रयोग करने से पहले, यह सुनिश्चित कर लें कि क्या वह सूत्र वास्तव में प्रयोग किया जा सकता है।

क्या नम्रता और सलमा द्वारा किए गए गुणन सही हैं? कारण सहित अपने उत्तर दीजिए।

कार्य (Task) 4 जोसफ ने एक विभाजन इस प्रकार किया : $\dfrac{a+5}{5} = a + 1$

उसके मित्र शिरीश ने यह विभाजन इस प्रकार किया : $\dfrac{a+5}{5} = a$

उसके अन्य मित्र सुमन ने इसे इस प्रकार किया : $\dfrac{a+5}{5} = \dfrac{a}{5} + 1$

किसने विभाजन सही किया? किसने विभाजन गलत विधि से किया? और क्यों?

एक बहुपद को एकपदी से भाग देते समय, हम अंश के बहुपद के प्रत्येक पद को हर में दिए एकपदी से भाग देते हैं।

कुछ मनोरंजन!

अतुल सदैव अलग तरीके से सोचता है। वह सुमथि अध्यापिका से पूछता है, "यदि आप जो कुछ कहती हैं वह सत्य है, तो मैं $\dfrac{64}{16} = \dfrac{4}{1} = 4$ के लिए सही उत्तर क्यों प्राप्त कर रहा हूँ?"

अध्यापिका स्पष्ट करती है, "ऐसा इसलिए है कि $64 = 16 \times 4$; है तथा $\dfrac{64}{16} = \dfrac{16 \times 4}{16 \times 1} = \dfrac{4}{1}$ है।

वस्तुत: हम सार्व गुणनखंड 16 को काटते हैं; 6 को नहीं, जैसा कि आप देख सकते हैं। वास्तव में, 6 न तो 64 का और न ही 16 का गुणनखंड है।" अध्यापिका आगे कहती है, "साथ ही, $\dfrac{664}{166} = \dfrac{4}{1}, \dfrac{6664}{1666} = \dfrac{4}{1}$, इत्यादि भी हैं।" क्या यह रोचक नहीं है? क्या आप $\dfrac{64}{16}$ के प्रकार के कुछ अन्य उदाहरण ज्ञात करने में अतुल की सहायता कर सकते हैं?

प्रश्नावली 14.4

निम्नलिखित गणितीय कथनों में त्रुटि ज्ञात करके उसे सही कीजिए :

1. $4(x-5)=4x-5$ **2.** $x(3x+2)=3x^2+2$ **3.** $2x+3y=5xy$

4. $x+2x+3x=5x$ **5.** $5y+2y+y-7y=0$ **6.** $3x+2x=5x^2$

7. $(2x)^2+4(2x)+7=2x^2+8x+7$ **8.** $(2x)^2+5x=4x+5x=9x$

9. $(3x+2)^2=3x^2+6x+4$

10. $x=-3$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है।

(*a*) x^2+5x+4 से $(-3)^2+5(-3)+4=9+2+4=15$ प्राप्त होता है।

(*b*) x^2-5x+4 से $(-3)^2-5(-3)+4=9-15+4=-2$ प्राप्त होता है।

(*c*) x^2+5x से $(-3)^2+5(-3)=-9-15=-24$ प्राप्त होता है।

11. $(y-3)^2=y^2-9$ **12.** $(z+5)^2=z^2+25$

13. $(2a+3b)(a-b)=2a^2-3b^2$ **14.** $(a+4)(a+2)=a^2+8$

15. $(a-4)(a-2)=a^2-8$ **16.** $\frac{3x^2}{3x^2}=0$

17. $\frac{3x^2+1}{3x^2}=1+1=2$ **18.** $\frac{3x}{3x+2}=\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{3}{4x+3}=\frac{1}{4x}$

20. $\frac{4x+5}{4x}=5$ **21.** $\frac{7x+5}{5}=7x$

हमने क्या चर्चा की?

1. जब हम किसी व्यंजक का गुणनखंड करते हैं, तो हम उसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। ये गुणनखंड, संख्याएँ, बीजीय चर या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं।

2. एक अखंडनीय गुणनखंड वह गुणनखंड है जिसे और आगे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

3. किसी व्यंजक का गुणनखंड करने की एक क्रमबद्ध विधि सार्व गुणनखंड विधि है। इस विधि के तीन चरण होते हैं : (i) व्यंजक के प्रत्येक पद को अखंडनीय गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए। (ii) सार्व गुणनखंडों का पता लगाइए और उन्हें अलग कर लीजिए। (iii) प्रत्येक पद में शेष गुणनखंडों को बंटन नियम के अनुसार संयोजित कीजिए।

4. कभी-कभी एक दिए हुए व्यंजक के सभी पदों में एक सार्व गुणनखंड नहीं होता है, परंतु इन पदों के कुछ समूह इस प्रकार बनाए जा सकते हैं कि प्रत्येक समूह के सभी पदों में एक सार्व गुणनखंड होता है। जब हम ऐसा करते हैं, तो सभी समूहों में एक सार्व गुणनखंड प्रकट हो जाता है, जिससे हम व्यंजक के गुणनखंड प्राप्त कर लेते हैं। यह विधि पुन:समूहन विधि कहलाती है।

5. पुन:समूहन द्वारा गुणनखंडन में, यह याद रखना चाहिए कि व्यंजक के पदों के प्रत्येक पुन:समूहन पुन:व्यवस्था से गुणनखंड प्राप्त नहीं होते हैं। हमें व्यंजक को देखना चाहिए तथा प्रयास और भूल-विधि से वांछित पुन:समूहन प्राप्त करना चाहिए।

6. गुणनखंडन किए जा सकने वाले व्यंजकों में से अनेक $a^2 + 2\,ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ और $x^2 + (a + b) + ab$ के रूप के होते हैं या उन्हें इस रूप में बदला जा सकता है। इन व्यंजकों के गुणनखंड अध्याय 9 में दी हुई निम्नलिखित सर्वसमिकाओं I, II, III और IV से ज्ञात किए जा सकते हैं :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

$$x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)\,(x + b).$$

7. उन व्यंजकों में, जिनके गुणनखंड $(x + a)\,(x + b)$ के प्रकार के हैं, याद रखना चाहिए कि संख्यात्मक (अचर) पद से ab प्राप्त होता है। इसके गुणनखंडों a और b को इस प्रकार चुनना चाहिए कि चिह्न को ध्यान में रखते हुए, इनका योग x के गुणांक के बराबर हो।
8. हम जानते हैं कि संख्याओं की स्थिति में विभाजन, गुणा की प्रतिलोम संक्रिया होती है। यही बात बीजीय व्यंजकों के विभाजन के लिए भी लागू रहती है।
9. एक बहुपद को एक एकपदी से विभाजन की स्थिति में, हम या तो विभाजन, बहुपद के प्रत्येक पद को उस एकपदी से भाग देकर कर सकते हैं या सार्व गुणनखंड विधि से कर सकते हैं।
10. एक बहुपद को एक बहुपद से विभाजन की स्थिति में, हम भाज्य बहुपद के प्रत्येक पद को भाजक बहुपद से भाग देकर विभाजन नहीं कर सकते। इसके स्थान पर, हम प्रत्येक बहुपद के गुणनखंड करते हैं और इनमें सार्वगुणनखंडों को काट देते हैं।
11. इस अध्याय में पढ़े गए बीजीय व्यंजकों के विभाजनों की स्थिति से हमें

    भाज्य = भाजक × भागफल प्राप्त होगा।

    परंतु व्यापक रूप में यह संबंध निम्नलिखित है :

    भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

    इस प्रकार, इस अध्याय में हमने केवल उन विभाजनों की चर्चा की है, जिनमें शेषफल शून्य है।
12. बीजीय प्रश्नों को हल करते समय विद्यार्थी अनेक प्रकार की त्रुटियाँ करते हैं। आपको ऐसी त्रुटियाँ करने से बचना चाहिए।

नोट

अध्याय

15

आलेखों से परिचय

0853CH15

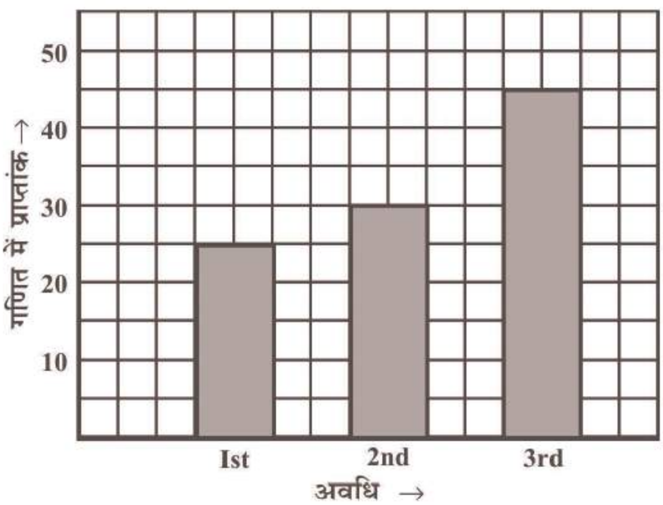
15.1 भूमिका

क्या आपने समाचार पत्रों, दूरदर्शन, मैगज़ीन, पुस्तकों आदि में आलेख देखें हैं? आलेखों का उद्देश्य संख्यात्मक तथ्यों को चित्रों द्वारा दिखाना है, जिससे वे शीघ्र, आसानी व स्पष्टता से समझे जा सकें। इस प्रकार आलेख, एकत्रित आँकड़ों का चित्रों द्वारा प्रदर्शन है। आँकड़ों को तालिका द्वारा भी प्रस्तुत किया जा सकता है,अपितु आलेखों द्वारा प्रदर्शन समझने में बहुत आसान होता है। आँकड़ों का **रुझान** या उनकी **तुलना** दिखाने के लिए तो ये बहुत ही उपयुक्त होते हैं। हम अब तक अनेक प्रकार के आलेख देख चुके हैं। आइए, उनको याद कर लें।

15.1.1 एक दंड-आलेख

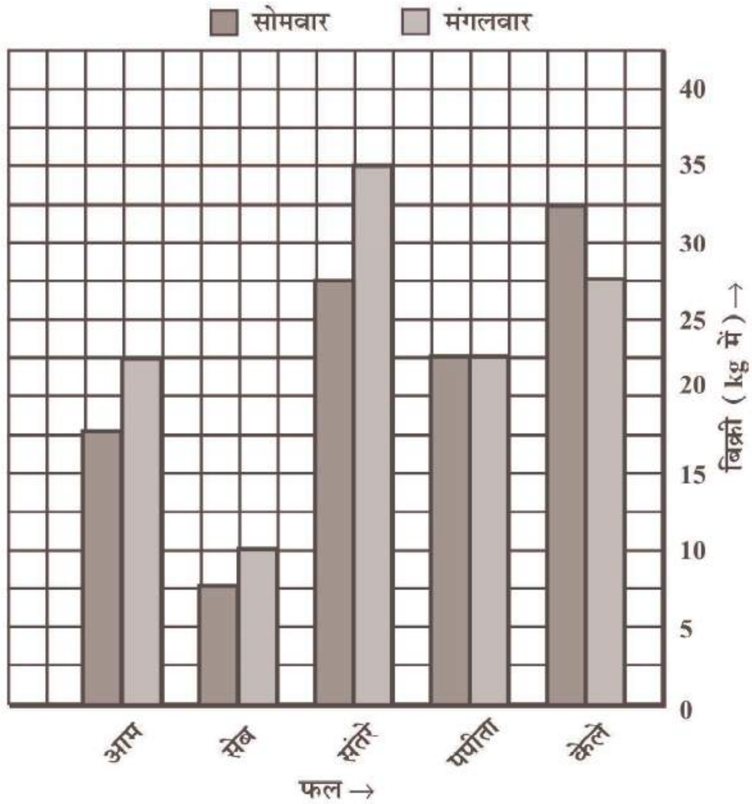
एक दंड-आलेख विभिन्न श्रेणियों के बीच तुलना करने के काम आता है। इसमें दो या अधिक समांतर व ऊर्ध्वाधर (या क्षैतिज), दंड या आयत होते हैं।

आकृति 15.1 में दंड आलेख, अनु द्वारा तीन सत्रीय परीक्षाओं के गणित में प्राप्तांकों को दर्शाता है। यह आपको उसके प्रदर्शन की तुलना, आसानी से करने में सहायता करता है। हम कह सकते हैं कि उसकी प्रगति अच्छी है।



आकृति 15.1

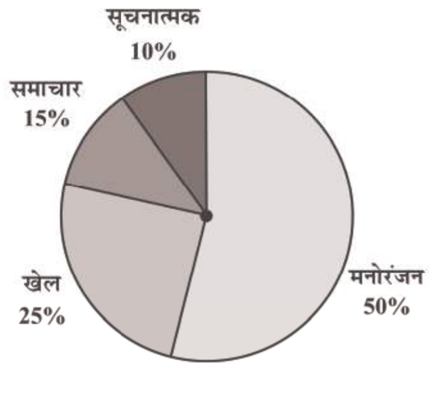
दंड-आलेखों में दोहरे दंड भी हो सकते हैं; जैसे आकृति 15.2 में। यह आलेख किन्हीं दो दिनों में, विभिन्न प्रकार के फलों की बिक्री (रु में) का तुलनात्मक विवरण है। आकृति 15.2 तथा आकृति 15.1 में क्या अंतर है? अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए।



आकृति 15.2

15.1.2 वृत्त-चित्र (वृत्त-आलेख या पाई ग्राफ)

एक वृत्त आलेख किसी एक संपूर्ण के विभिन्न भागों की तुलना करने के लिए प्रयोग किया जाता है। वृत्त, एक संपूर्ण को दर्शाता है। आकृति 15.3, एक वृत्त-आलेख है। यह दूरदर्शन के विभिन्न चैनलों के दर्शकों की प्रतिशतता दर्शाता है।



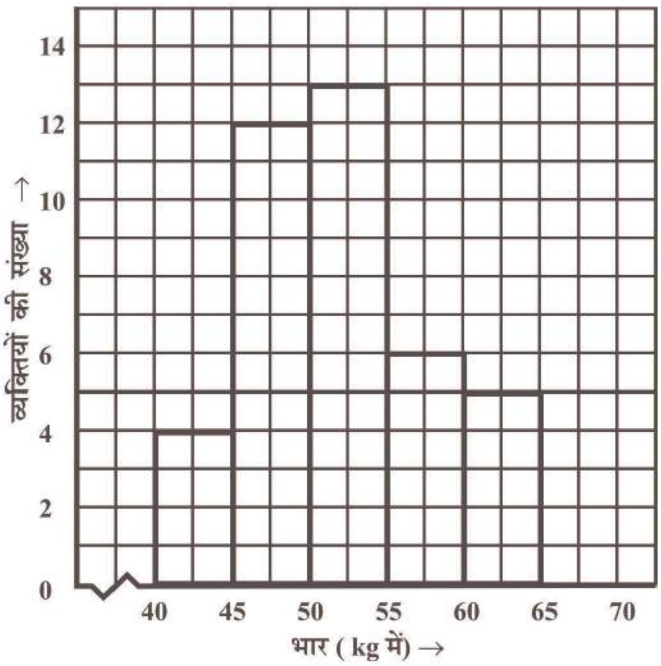
आकृति 15.3

15.1.3 आयत-चित्र

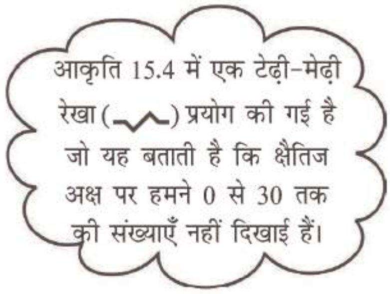
एक आयत चित्र, एक दंड-आलेख जैसा ही होता है जो आँकड़ों को अंतराल में दर्शाता है। इसमें अंतरालों को संलग्न दंडों द्वारा दिखाया जाता है।

आकृति 15.4 में आयत चित्र एक क्षेत्र के 40 व्यक्तियों के भारों (kg में) का बंटन दर्शाता है।

भार (kg में)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
व्यक्तियों की संख्या	4	12	13	6	5



आकृति 15.4



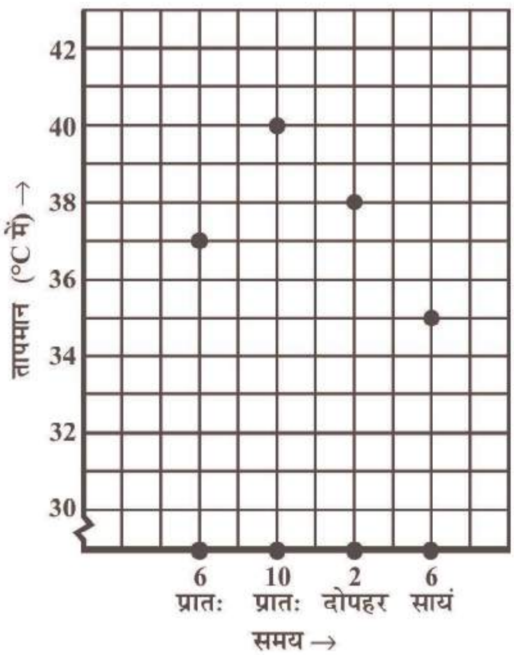
ध्यान दीजिए, दंडों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है क्योंकि अंतरालों के बीच भी कोई अंतर नहीं है। आप इस आयत चित्र से क्या सूचनाएँ प्राप्त करते हैं? उनकी एक सूची बनाइए।

15.1.4 रेखा-आलेख(Line Graph)

एक रेखा-आलेख (Line Graph), ऐसे आँकड़े प्रस्तुत करता है जो समय के साथ-साथ लगातार बदलते रहते हैं। जब रेणु बीमार पड़ी तब उसके डॉक्टर ने चार-चार घंटे बाद उसके शारीरिक तापमान का रिकॉर्ड बनाया। यह एक आलेख के रूप में था (आकृति 15.5 व 15.6 में देखें)। हम इसे 'समय-तापमान' का आलेख कह सकते हैं।

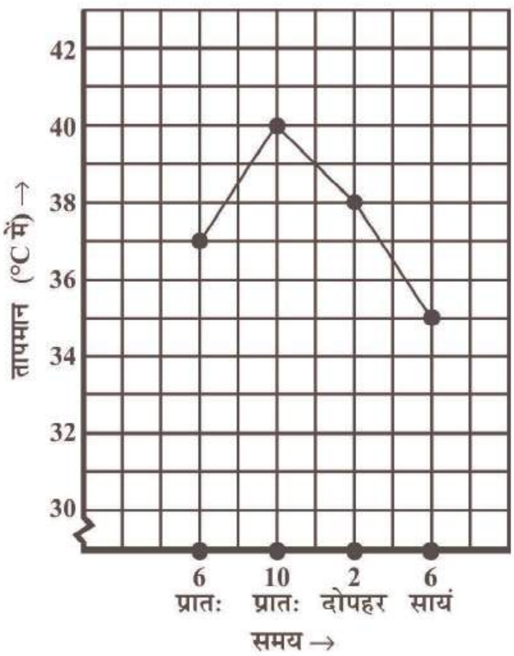
यह निम्न तालिका में दिए गए आँकड़ों का चित्र रूप में प्रदर्शन है।

समय	6 बजे प्रातः	10 बजे प्रातः	2 बजे दोपहर	6 बजे सायं
तापमान (°C में)	37	40	38	35



आकृति 15.5

हर आँकड़े को वर्गांकित कागज़ पर एक बिंदु द्वारा अंकित किया गया है।



आकृति 15.6

बाद में बिंदुओं को रेखाखंडों से मिला दिया गया है। परिणाम, यह **रेखा आलेख** है।

क्षैतिज रेखा (जिसे x-अक्ष भी कहते हैं) वे समय दिखाती है, जब-जब तापमान लिया गया। ऊर्ध्वाधर रेखा (जिसे y-अक्ष भी कहते हैं) पर क्या दिखाया गया है?

यह आलेख आपको क्या-क्या बताता है? उदाहरण के लिए, आप इसमें तापमान के प्रारूप देख सकते हैं : 10 बजे प्रातः अधिक था फिर 6 बजे सायं तक घटता गया। ध्यान दीजिए 6 बजे प्रातः और 10 बजे प्रातः के बीच तापमान 3°C (40°C – 37°C) बढ़ा।

8 बजे प्रातः तापमान नहीं पढ़ा गया फिर भी आलेख देखकर लगता है कि यह 37°C से अधिक था। (कैसे?)

उदाहरण 1 : दिया गया आलेख (आकृति 15.7) वर्ष 2007 में, दो बल्लेबाजों A तथा B द्वारा खेले गए 10 मैचों में बनाए गए रनों को प्रदर्शित करता है। आलेख का अध्ययन कीजिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दोनों अक्ष-रेखाओं पर क्या-क्या सूचना दी गई है?

(ii) कौन सी रेखा बल्लेबाज़ A द्वारा बनाए गए रन प्रदर्शित करती है।

(iii) वर्ष 2007 में, क्या किसी मैच में दोनों बल्लेबाज़ों द्वारा बनाए गए रन समान थे? यदि हाँ, तो किस मैच में?

(iv) दोनों बल्लेबाज़ों में कौन अधिक स्थिर है? आपने यह निर्णय कैसे लिया?

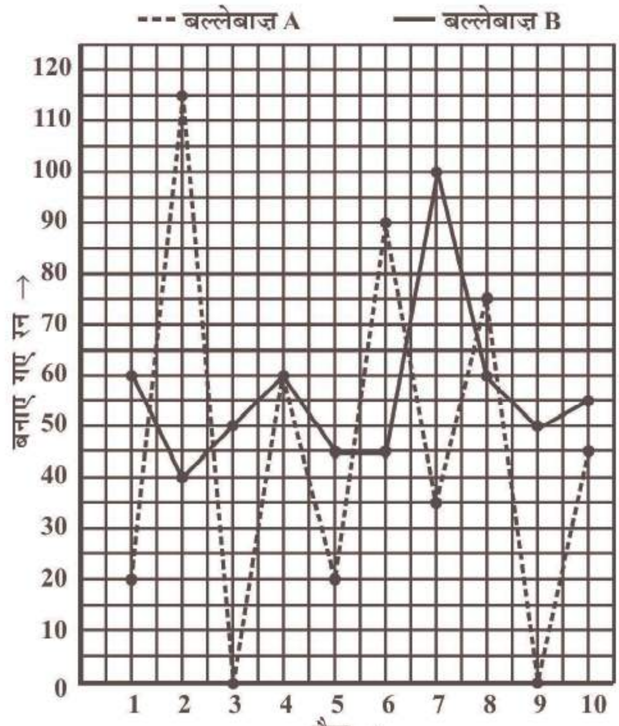
हल :

(i) क्षैतिज अक्ष (या x-अक्ष), वर्ष 2007 में खेले गए मैचों की संख्या प्रकट करती है। ऊर्ध्वाधर अक्ष (या y-अक्ष) प्रत्येक मैच में बनाए गए रनों की संख्या प्रकट करती है।

(ii) बिंदुयुक्त रेखा A बल्लेबाज़ द्वारा बनाए गए रनों को दर्शाती है जैसा आलेख के ऊपर संकेत भी है।

(iii) चौथे मैच के दौरान दोनों ने एक समान 60 रन बनाए। (यह उस बिंदु से पता चलता है, जहाँ पर दोनों रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं।

(iv) बल्लेबाज़ A के आलेख में एक ऊँचा शिखर है तथा अनेक नीची घाटियाँ। वह रन बनाने में स्थिर नहीं है। जबकि दूसरी ओर, बल्लेबाज़ B ने कभी 40 से कम रन नहीं बनाए; यद्यपि उसने A के 115 के मुकाबले अधिकतम 100 ही रन बनाए। A ने दो मैचों में शून्य रन ही बनाए तथा कुल पाँच मैचों में 40 से कम। क्योंकि A द्वारा बनाए गए रनों में अधिक उतार-चढ़ाव है, अतः B ही एक विश्वसनीय व स्थिर बल्लेबाज़ है।



आकृति 15.7

उदाहरण 2 : एक कार एक शहर P से दूसरे शहर Q की ओर जा रही है जो एक दूसरे से 350 km दूरी पर हैं। दिया गया आलेख (आकृति 15.8) विभिन्न समयों पर कार की P शहर से दूरियाँ दर्शाता है। आलेख अध्ययन कर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दोनों अक्षों पर क्या-क्या दर्शाया गया है?

(ii) कार ने किस समय और कहाँ से यात्रा आरंभ की?

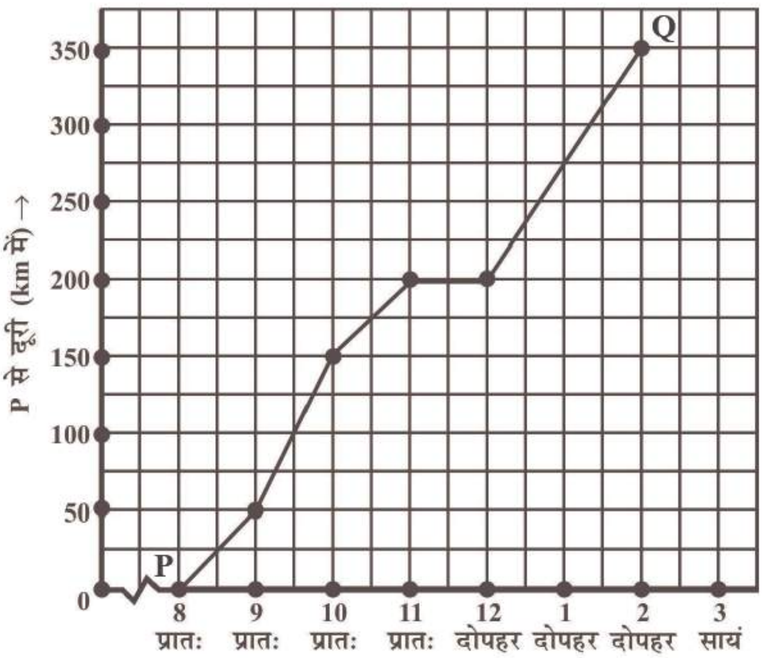
(iii) पहले घंटे में कार कितनी दूर चली?

(iv) दूसरे घंटे तथा तीसरे घंटे में कार ने कितनी-कितनी दूरियाँ तय की?

(v) क्या पहले तीन घंटों में कार की चाल समान थी? आपने कैसे जाना?

(vi) क्या कार कभी किसी स्थान पर रुकी? अपने उत्तर के लिए तर्क भी दीजिए।

(vii) कार, शहर Q पर किस समय पहुँची?



आकृति 15.8

हल :

(i) क्षैतिज (x) अक्ष समय दर्शाता है। ऊर्ध्वाधर (y) अक्ष, P शहर से कार की दूरियाँ दर्शाता है।

(ii) कार 8 बजे प्रातः शहर P से चली।

(iii) कार ने पहले घंटे में 50 km की दूरी तय की। (आप यह देख सकते हैं कि कार प्रातः 8 बजे शहर P से चली और प्रातः 9 बजे, आलेख के अनुसार, 50 km की दूरी पर थी। अतः प्रातः 8 और 9 बजे के बीच, एक घंटे में कार ने 50 km दूरी तय की।

(iv) (a) कार ने दूसरे घंटे (प्रातः 9 बजे से 10 बजे) में 100 km दूरी (150–50) तय की।
(b) कार ने तीसरे घंटे (प्रातः 10 बजे से 11 बजे) में 50 km की दूरी (200–150) तय की।

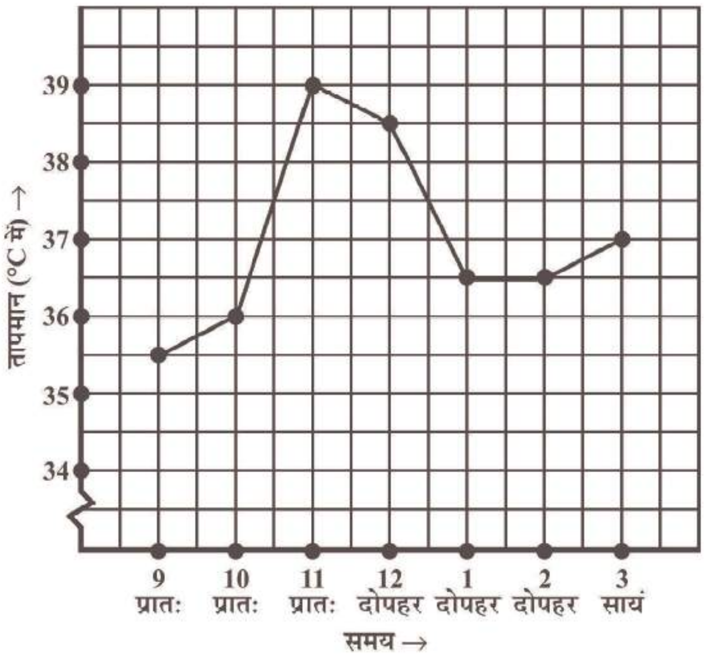
(v) प्रश्न (iii) व (iv) के उत्तरों से पता चलता है कि कार की चाल सदैव समान नहीं थी। (आलेख यह भी दर्शाता है कि चाल किस प्रकार बदली।)

(vi) आलेख में हम देखते हैं कि कार प्रातः 11 बजे और 12 बजे भी शहर P से 200 km दूर थी। इस अंतराल में तय की गई दूरी, एक क्षैतिज रेखाखंड है जो इस तथ्य की पुष्टि करता है।

(vii) 2 बजे दोपहर कार Q शहर पहुँची।

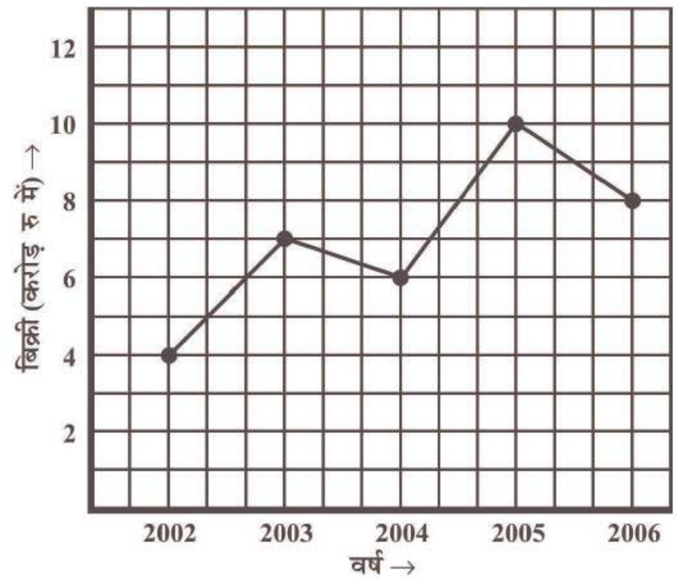
प्रश्नावली 15.1

1. निम्न आलेख, किसी अस्पताल में एक रोगी का प्रति घंटे लिया गया तापमान दर्शाता है:
   (a) रोगी का तापमान 1 बजे दोपहर क्या था?
   (b) रोगी का तापमान 38.5° C कब था?



   (c) इस पूरे अंतराल में रोगी का तापमान दो बार एक समान ही था। ये दो समय, क्या-क्या थे?
   (d) 1.30 बजे दोपहर रोगी का तापमान क्या था? इस निष्कर्ष पर आप कैसे पहुँचे?
   (e) किन अंतरालों में रोगी का तापमान 'बढ़ने का रुझान' दर्शाता है।

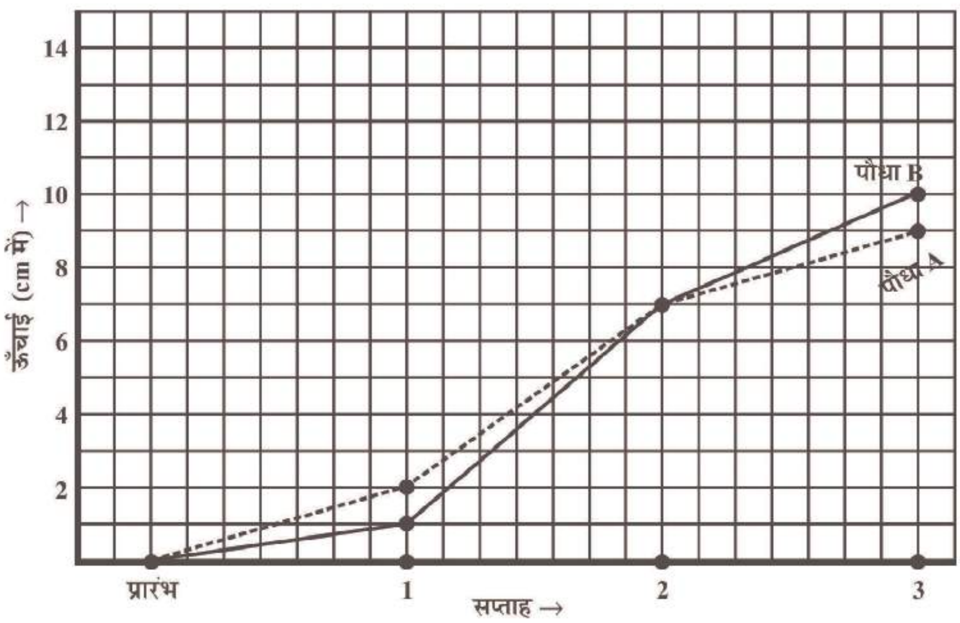
2. एक निर्माता कंपनी की विभिन्न वर्षों में की गई बिक्री निम्न आलेख द्वारा दर्शाई गई है:
   (a) (i) वर्ष 2002 में (ii) वर्ष 2006 में कितनी बिक्री थी?
   (b) (i) वर्ष 2003 में (ii) वर्ष 2005 में कितनी बिक्री थी?



(c) वर्ष 2002 तथा वर्ष 2006 की बिक्रियों में कितना अंतर था?

(d) किस अंतराल में बिक्रियों का यह अंतर सबसे अधिक था?

3. वनस्पति-विज्ञान के एक प्रयोग में, समान प्रयोगशाला परिस्थितियों में दो पौधे A तथा B उगाए गए। तीन सप्ताहों तक उनकी ऊँचाइयों को हर सप्ताह के अंत में मापा गया। परिणामों को निम्न आलेख में दर्शाया गया है :



(a) (i) 2 सप्ताह बाद (ii) 3 सप्ताह बाद पौधे A की ऊँचाई कितनी थी?

(b) (i) 2 सप्ताह बाद (ii) 3 सप्ताह बाद पौधे B की ऊँचाई कितनी थी?

(c) तीसरे सप्ताह में पौधे A की ऊँचाई कितनी बढ़ी?

(d) दूसरे सप्ताह के अंत से तीसरे सप्ताह के अंत तक पौधे B की ऊँचाई कितनी बढ़ी?

(e) किस सप्ताह में पौधे A की ऊँचाई सबसे अधिक बढ़ी?

(f) किस सप्ताह में पौधे B की ऊँचाई सबसे कम बढ़ी?

(g) क्या किसी सप्ताह में दोनों पौधों की ऊँचाई समान थी? पहचानिए।

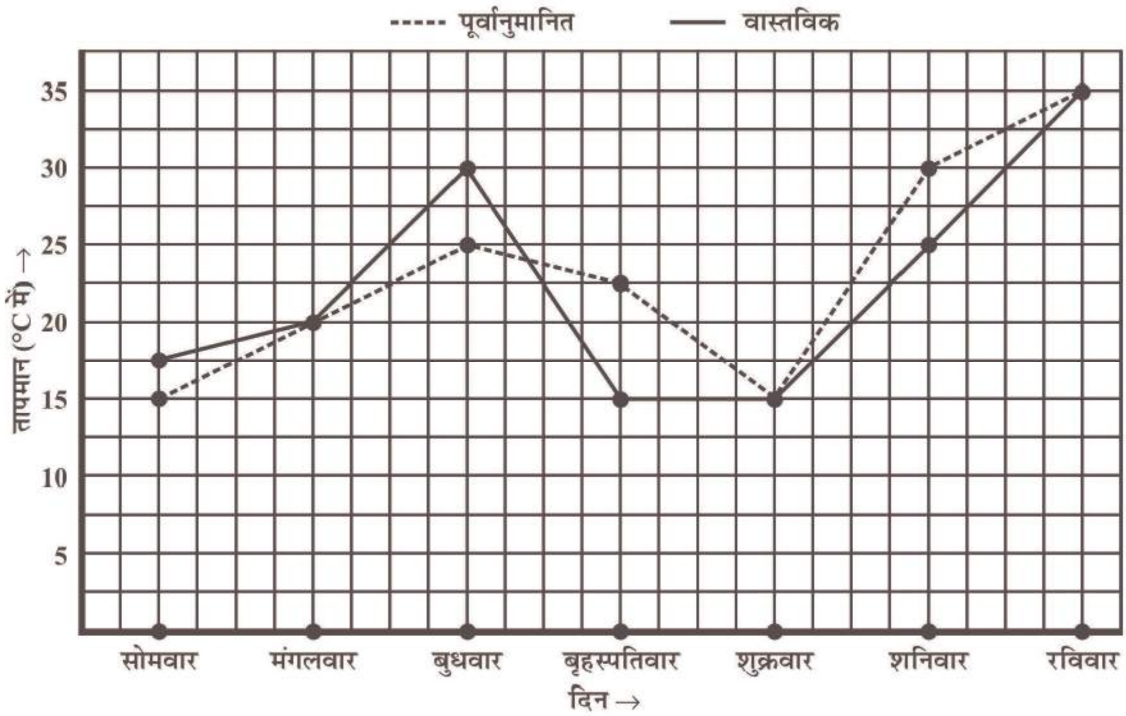
4. निम्न आलेख, किसी सप्ताह के प्रत्येक दिन के लिए पूर्वानुमानित तापमान तथा वास्तविक तापमान दर्शाता है :

(a) किस दिन पूर्वानुमानित तापमान व वास्तविक तापमान समान था?

(b) सप्ताह में पूर्वानुमानित अधिकतम तापमान क्या था?

(c) सप्ताह में वास्तविक न्यूनतम तापमान क्या था?

(d) किस दिन वास्तविक तापमान व पूर्वानुमानित तापमान में अंतर सर्वाधिक था?



5. निम्न तालिका प्रयोग कर एक रैखिक आलेख बनाइए :

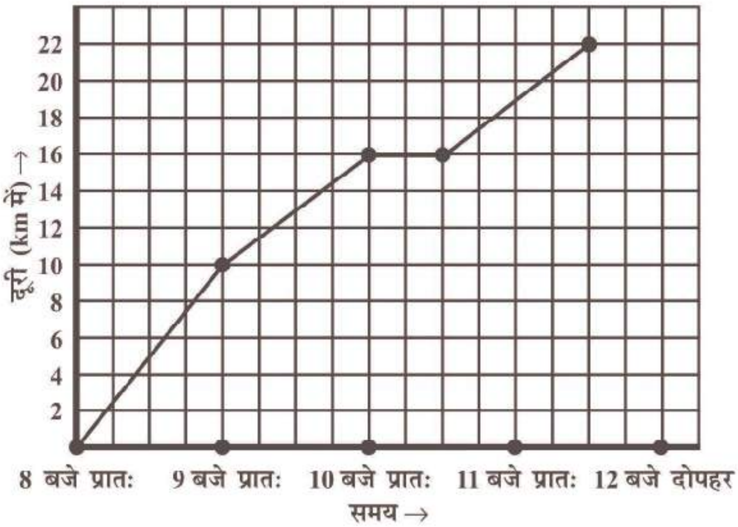
(a) विभिन्न वर्षों में किसी पर्वतीय नगर में हिमपात के दिनों की संख्या :

वर्ष	2003	2004	2005	2006
दिन	8	10	5	12

(b) विभिन्न वर्षों में एक गाँव में, पुरुषों व स्त्रियों की संख्या (हज़ारों में)

वर्ष	2003	2004	2005	2006	2007
पुरुषों की संख्या	12	12.5	13	13.2	13.5
स्त्रियों की संख्या	11.3	11.9	13	13.6	12.8

6. एक डाकिया किसी नगर के पास ही स्थित एक उपनगर में एक व्यापारी को पार्सल पहुँचाने के लिए साइकिल पर जाता है। विभिन्न समयों पर नगर से उसकी दूरियाँ निम्न आलेख द्वारा दर्शाई गई हैं।



(a) x-अक्ष पर समय दर्शाने के लिए क्या पैमाना प्रयोग किया गया है?

(b) उसने पूरी यात्रा के लिए कितना समय लिया?

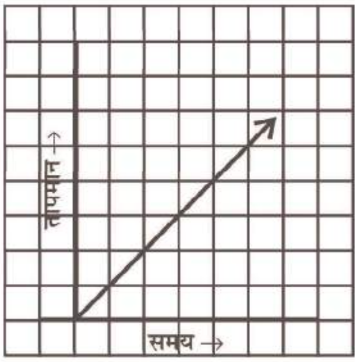
(c) व्यापारी के स्थान की नगर से दूरी कितनी है?

(d) क्या, डाकिया रास्ते में कहीं रुका? विवरण दीजिए।

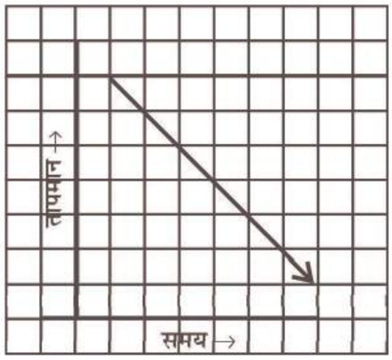
(e) किस अंतराल में उसकी चाल सबसे अधिक थी?

7. निम्न आलेखों में कौन-कौन से आलेख समय व तापमान के बीच संभव हैं? तर्क के साथ अपने उत्तर दीजिए।

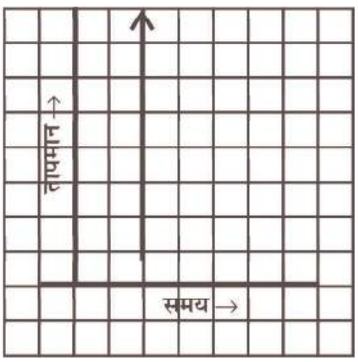
(i)



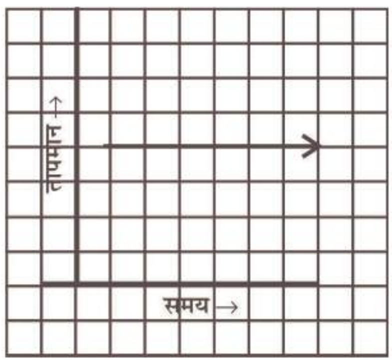
(ii)



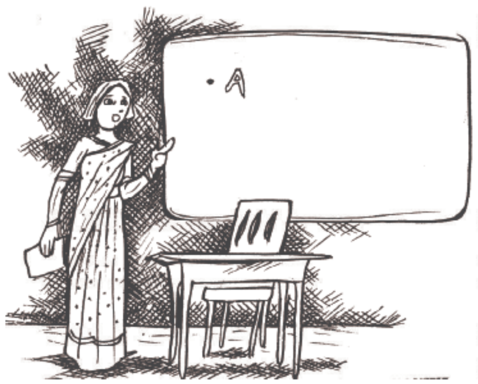
(iii)



(iv)



15.2 रैखिक आलेख



रेखा-आलेख, अनेक रेखाखंडों को परस्पर मिलाकर बनाया जाता है। कभी-कभी यह आलेख एक पूरी अखंडित रेखा भी हो सकती है। ऐसे आलेख को **रैखिक आलेख (Linear Graph)** कहते हैं। ऐसे आलेख बनाने के लिए हमें वर्गांकित कागज़ पर कुछ बिंदु अंकित करने पड़ते हैं। अब हम सीखेंगे कि वर्गांकित कागज़ पर बिंदु आसानी से कैसे अंकित किए जाते हैं।

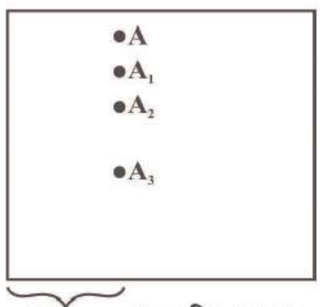
15.2.1 बिंदु की स्थिति

अध्यापिका ने श्यामपट पर एक बिंदु अंकित किया। फिर उसने विद्यार्थियों से पूछा कि वे उसकी श्यामपट पर स्थिति कैसे वर्णित करेंगे? इस पर अनेक उत्तर मिले, (आकृति 15.9)।

आकृति 15.9

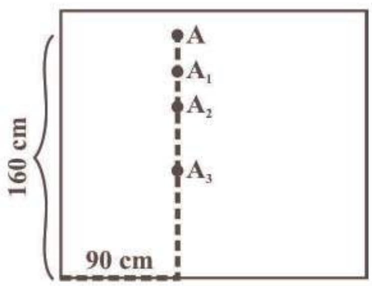
क्या इनमें से कोई भी कथन बिंदु की स्थिति को सही-सही निश्चित करता है? नहीं, कोई भी नहीं। क्यों? इसके बारे में सोचिए।

तब जॉन ने एक सुझाव दिया। उसने बिंदु की दूरी श्यामपट के बाएँ किनारे से मापी और कहा, "यह बिंदु श्यामपट के बाएँ किनारे से 90 cm दूर है।" क्या आप समझते हैं कि उसका सुझाव बिल्कुल सही है? (आकृति 15.10)



आकृति 15.10

A, A_1, A_2, A_3 सभी बिंदु बाएँ किनारे से 90 cm दूर है।



आकृति 15.11

बिंदु A बाएँ किनारे से 90 cm तथा निचले किनारे से 160 cm दूर है।

तब रेखा ने कथन को सुधारते हुए कहा, "यह बिंदु श्यामपट के बाएँ किनारे से 90 cm तथा निचले किनारे से 160 cm दूरी पर स्थित है।" इस प्रकार समस्या का ठीक हल प्राप्त करते हैं; (आकृति 15.11)। तब अध्यापक ने बताया, "हम बिंदु की स्थिति इस प्रकार (90, 160) लिखकर प्रकट करते हैं।" क्या बिंदु (160, 90) बिंदु (90, 160) से विभिन्न होगा?" इसके बारे में चिंतन कीजिए।

कहा जाता है कि सत्रहवीं शताब्दी में गणितज्ञ रेने दकार्त (Rene Descartes) ने एक चींटी को छत के कोने के पास चलते हुए देखा और तल में किसी बिंदु की स्थिति को निर्धारित करने के बारे में सोचना आरंभ किया। क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर, दो रेखाओं से दिए गए बिंदु की दो दूरियाँ माप कर, स्थिति प्रकट करने की विधि, उनके सम्मान में आज 'कार्तीय विधि' (Cartesian system) कहलाती है।

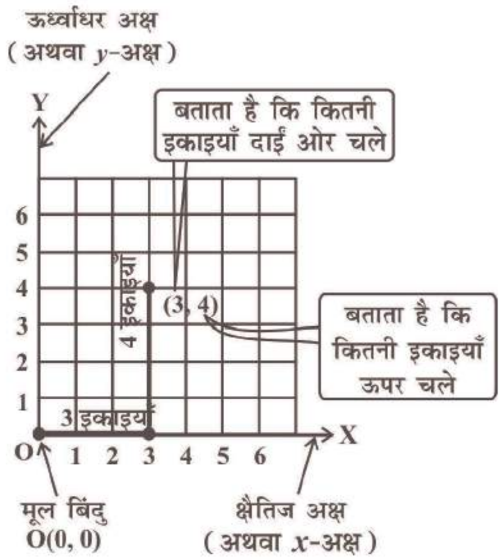
रेने दकार्त
(1596-1650)

15.2.2 निर्देशांक

कल्पना कीजिए कि आप किसी थियेटर में जाते हैं और अपनी आरक्षित सीट ढूँढ़ते हैं। इसके लिए आपको दो संख्याएँ चाहिए; पंक्ति संख्या तथा सीट संख्या। किसी तल में बिंदु की स्थिति निर्धारित करने का यही आधार है।

आकृति 15.12 पर ध्यान दीजिए कि बिंदु (3, 4) जिसकी दूरी बाएँ किनारे से 3 इकाई और निचले किनारे से 4 इकाई है, वर्गांकित कागज़ पर किस प्रकार अंकित किया गया है।

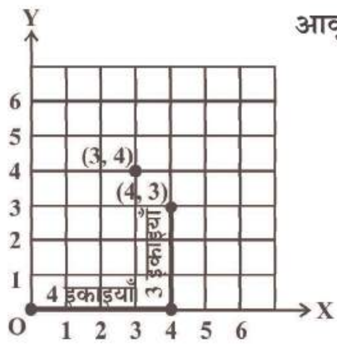
आलेख वाला कागज़ भी एक वर्गांकित कागज़ ही है। इस पर हम x-अक्ष तथा y-अक्ष सुविधा के अनुसार दर्शाते हैं और फिर उस पर बिंदु की स्थिति निर्धारित करते हैं। संख्या 3, बिंदु का **x-निर्देशांक** तथा 4, **y-निर्देशांक** कहलाता है। इस प्रकार हम कहते हैं कि (3, 4) बिंदु के **निर्देशांक** हैं।



आकृति 15.12

उदाहरण 3 : एक आलेख में बिंदु (4, 3) अंकित कीजिए। क्या यह वही बिंदु है जो (3, 4) दर्शाता है?

हल : वर्गांकित कागज़ पर x-अक्ष तथा y-अक्ष निर्धारित कीजिए। (ये वास्तव में संख्या रेखाएँ ही हैं।) मूल बिंदु (0, 0) से प्रारंभ कीजिए। 4 इकाइयाँ दाईं ओर चलकर फिर 3 इकाइयाँ ऊपर की ओर चलें तो आपको बिंदु (4, 3) प्राप्त होता है। आकृति 15.13 देखकर आप समझ सकते हैं कि बिंदु (4, 3) व बिंदु (3, 4) अलग-अलग बिंदु हैं।



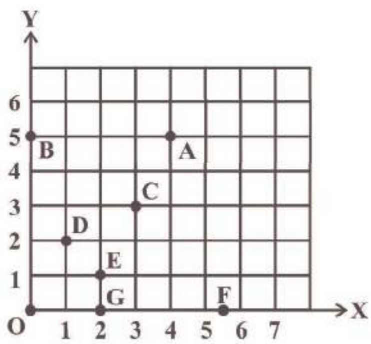
आकृति 15.13

उदाहरण 4 : आकृति 15.14 देखकर निम्न बिंदुओं की स्थिति के लिए उपयुक्त अक्षर चुनिए :

(i) (2, 1) (ii) (0, 5) (iii) (2, 0)

तथा लिखिए

(iv) बिंदु A के निर्देशांक (v) बिंदु F के निर्देशांक



आकृति 15.14

हल :

(i) (2, 1) है बिंदु E (D नहीं, सोचिए)।

(ii) (0, 5) है बिंदु B (क्यों? मित्रों के साथ चर्चा कीजिए)।

(iii) (2, 0) है बिंदु G।

(iv) बिंदु A के निर्देशांक हैं (4, 5)।

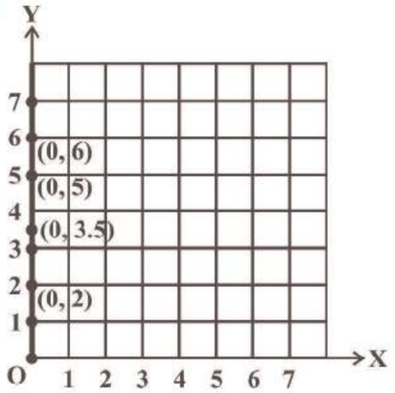
(v) बिंदु F के निर्देशांक हैं (5.5, 0)।

उदाहरण 5 : निम्न बिंदुओं को वर्गांकित कागज़ पर अंकित कीजिए और देखिए कि क्या वे सभी एक ही सरल रेखा में हैं। अगर हैं तो उस रेखा को नाम दीजिए।

(i) (0, 2), (0, 5), (0, 6), (0, 3.5) (ii) A(1, 1), B(1, 2), C(1, 3), D(1, 4)

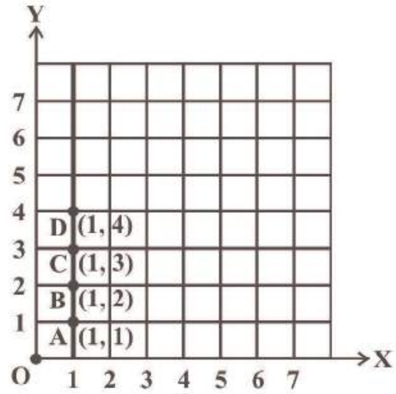
(iii) K(1, 3), L(2, 3), M(3, 3), N(4, 3) (iv) W(2, 6), X(3, 5), Y(5, 3), Z(6, 2)

हल :



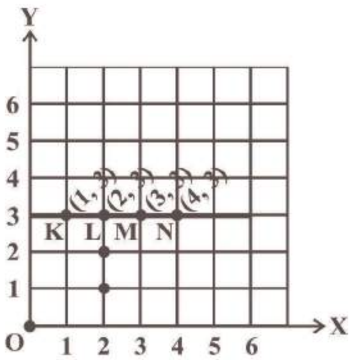
(i)

यहाँ सभी बिंदु एक ही रेखा पर हैं। वह है y-अक्ष



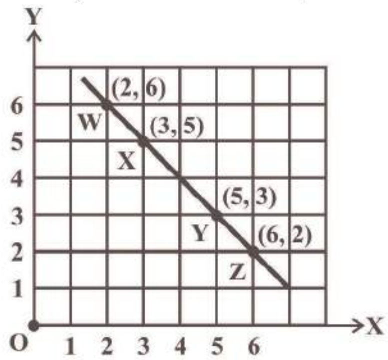
(ii)

यहाँ सभी बिंदु एक ही रेखा पर हैं। यह है रेखा AD (आप इसे कोई अन्य नाम भी दे सकते हैं।) यह y-अक्ष के समांतर है।)



(iii)

ये सभी बिंदु एक ही रेखा पर हैं। इसे हम KL या KM या MN आदि नाम दे सकते हैं। यह x-अक्ष के समांतर है।



(iv)

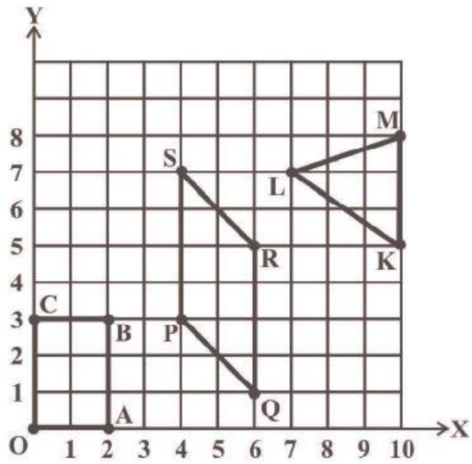
आकृति 15.15

ये सभी बिंदु एक ही रेखा पर हैं। हम इसे XY या WY या YZ आदि नाम दे सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए प्रत्येक उदाहरण में अंकित बिंदुओं को मिलाने पर प्राप्त आलेख एक सरल रेखा है। ऐसे आलेखों को **रैखिक आलेख** कहते हैं।

प्रश्नावली 15.2

1. निम्न बिंदुओं को एक वर्गांकित कागज़ (Graph Sheet) पर अंकित कीजिए और जाँचिए कि क्या वे सभी एक सरल रेखा पर स्थित हैं?
   (a) A(4, 0), B(4, 2), C(4, 6), D(4, 2.5)
   (b) P(1, 1), Q(2, 2), R(3, 3), S(4, 4)
   (c) K(2, 3), L(5, 3), M(5, 5), N(2, 5)
2. बिंदुओं (2, 3) तथा (3, 2) में से गुज़रती हुई एक सरल रेखा खींचिए। उन बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए जिन पर यह रेखा x-अक्ष तथा y-अक्ष को प्रतिच्छेद करती है।
3. आलेख में बनाई गई आकृतियों में प्रत्येक के शीर्षों के निर्देशांक लिखिए।



4. निम्न कथनों में कौन सा सत्य है तथा कौन सा असत्य? असत्य को ठीक कीजिए।
   (i) कोई बिंदु जिसका x-निर्देशांक शून्य है तथा y-निर्देशांक शून्येतर है, y-अक्ष पर स्थित होता है।
   (ii) कोई बिंदु जिसका y-निर्देशांक शून्य है तथा x-निर्देशांक 5 है, y-अक्ष पर स्थित होगा।
   (iii) मूल बिंदु के निर्देशांक (0, 0) हैं।

15.3 कुछ अनुप्रयोग

दैनिक जीवन में आपने देखा होगा कि किसी भी सुविधा का जितना अधिक उपयोग आप करते हैं उतना ही अधिक उसके लिए मूल्य देना होता है। अगर आप बिजली अधिक खर्च करते हैं तब आपको बिल भी अधिक देना होगा। अगर आप बिजली कम खर्च करते हैं तो बिल भी कम आएगा। यह एक उदाहरण है जहाँ एक राशि दूसरी को प्रभावित करती है। बिजली का बिल, उपयोग की गई बिजली की मात्रा पर निर्भर करता है। हम कहते हैं कि बिजली की मात्रा एक मुक्त या स्वतंत्र चर है जब कि बिजली का बिल एक **आश्रित चर** है। ऐसी राशियों के संबंध को हम आलेख द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

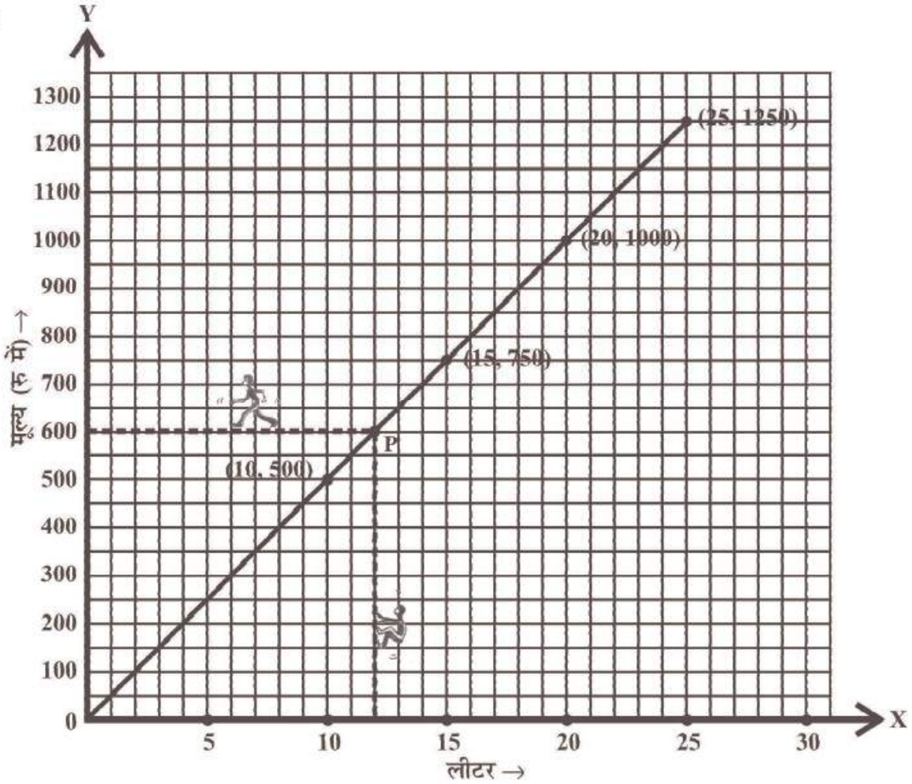
एक कार की पेट्रोल टंकी को भरने के लिए दी गई राशि खरीदे गए पेट्रोल की मात्रा (लीटर में) द्वारा निश्चित होती है। यहाँ पर कौन सा चर स्वतंत्र है? चर्चा कीजिए।

उदाहरण 6 : (मात्रा तथा मूल्य) निम्न तालिका पेट्रोल की मात्राएँ व उसके मूल्य बताती है:

पेट्रोल की मात्रा (लीटर में)	10	15	20	25
पेट्रोल का मूल्य (रुपयों में)	500	750	1000	1250

इन आँकड़ों को दर्शाने के लिए आलेख बनाइए।

हल :



आकृति 15.16

(i) आइए, दोनों अक्षों के लिए (आकृति 15.16) उपयुक्त पैमाना चुनें।
(ii) क्षैतिज अक्ष पर पेट्रोल की मात्रा दर्शाते हैं।
(iii) ऊर्ध्वाधर अक्ष पर मूल्य दर्शाते हैं।
(iv) (10, 500) , (15, 750), (20, 1000) तथा (25, 1250) बिंदुओं को अंकित करें।
(v) बिंदुओं को मिलाइए।

हम देखते हैं कि आलेख एक सरल रेखा है। (यह एक रैखिक आलेख है) यह आलेख मूल बिंदु से क्यों गुज़रता है? इसके बारे में सोचिए।

यह आलेख हमें कुछ तथ्यों के अनुमान लगाने में सहायक हो सकता है। मान लीजिए, हम जानना चाहते हैं कि 12 लीटर पेट्रोल के लिए कितना मूल्य देना होगा?

क्षैतिज अक्ष पर 12 की स्थिति देखिए। 12 के चिह्न पर ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुकूल चलकर आलेख को बिंदु P पर मिलते हैं।

बिंदु P से क्षैतिज रेखा के अनुकूल चलकर ऊर्ध्वाधर अक्ष पर पहुँचते हैं जहाँ हमें वह बिंदु मिलता है, जो ₹ 600 उत्तर दर्शाता है।

यह आलेख एक ऐसी स्थिति का है, जिसमें दो राशियाँ समानुपात में हैं। कैसे? ऐसी स्थितियों में, आलेख सदैव रैखिक ही होते हैं।

प्रयास कीजिए

ऊपर के उदाहरण में, आलेख से ज्ञात कीजिए कि ₹ 800 में कितना पेट्रोल खरीदा जा सकता है?

उदाहरण 7 : (मूलधन तथा साधारण ब्याज)

एक बैंक वरिष्ठ नागरिकों को उनके जमा धन पर 10% साधारण ब्याज देता है। जमा धन तथा उस पर अर्जित वार्षिक साधारण ब्याज के संबध को दर्शाने के लिए एक आलेख खींचिए। इस आलेख से निम्न ज्ञात कीजिए :

(a) ₹ 250 जमा करने पर प्राप्त ब्याज।

(b) ₹ 70 ब्याज प्राप्त करने के लिए कितना धन जमा करना होगा?

जमा धन	1 वर्ष के लिए साधारण ब्याज
₹ 100	$\frac{100\times1\times10}{100}$ = ₹ 10
₹ 200	$\frac{200\times1\times10}{100}$ = ₹ 20
₹ 300	$\frac{300\times1\times10}{100}$ = ₹ 30
₹ 500	$\frac{500\times1\times10}{100}$ = ₹ 50
₹ 1000	₹ 100

उपयुक्त चरण :

1. अंकित की जाने वाली राशियाँ जमा धन तथा उससे अर्जित ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. x-अक्ष तथा y-अक्ष पर दर्शाई जाने वाली राशियाँ निर्धारित कीजिए।
3. उपयुक्त पैमाने चुनिए।
4. बिंदु अंकित कीजिए।
5. बिंदुओं को मिलाइए।

इन राशियों से निम्न तालिका प्राप्त होती है :

जमा धन (₹ में)	100	200	300	500	1000
वार्षिक सा॰ ब्याज (₹ में)	10	20	30	50	100

(i) पैमाना : क्षैतिज अक्ष पर 1 इकाई = ₹ 100

ऊर्ध्वाधर अक्ष पर 1 इकाई = ₹ 10

(ii) जमा धन को क्षैतिज अक्ष पर दर्शाते हैं।

(iii) साधारण ब्याज ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दर्शाते हैं।

(iv) (100, 10), (200, 20), (300, 30), (500, 50) तथा (1000, 100) बिंदुओं को अंकित कीजिए।

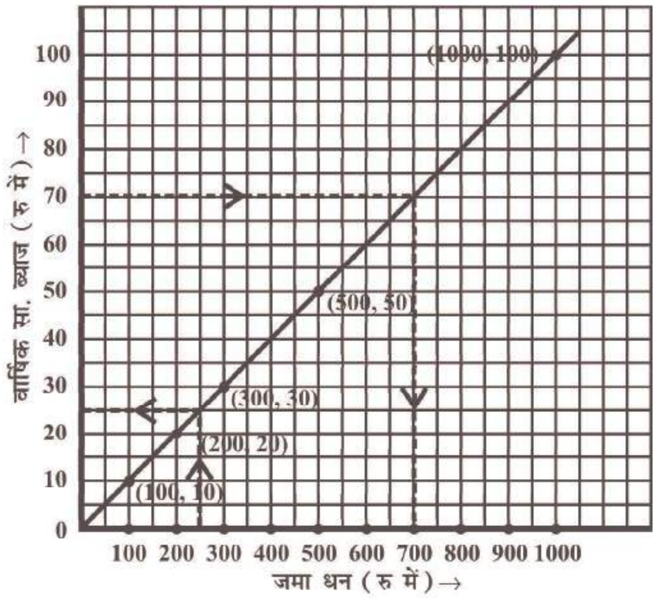
(v) बिंदुओं को मिलाइए। हमें आलेख में एक सरल रेखा प्राप्त होती है; (आकृति 15.17)।

(a) क्षैतिज अक्ष पर ₹ 250 मूलधन के लिए ऊर्ध्वाधर अक्ष पर ₹ 25 साधारण ब्याज है।

(b) ऊर्ध्वाधर अक्ष पर ₹ 70 ब्याज के लिए क्षैतिज अक्ष पर ₹ 700 मूलधन है।

प्रयास कीजिए

क्या उदाहरण 7 एक समानुपात का उदाहरण है?



आकृति 15.17

उदाहरण 8 : (समय और दूरी) अजीत लगातार 30 km/hour की गति से स्कूटर चलाता है। इस स्थिति के लिए समय-दूरी के बीच एक आलेख खींचिए। इस आलेख से ज्ञात कीजिए :

(i) अजीत को 75 किमी दूरी तय करने में लगने वाला समय।

(ii) अजीत द्वारा $3\frac{1}{2}$ घंटे में तय की गई दूरी।

हल :

यात्रा के घंटे	तय की गई दूरी
1 घंटा	30 km
2 घंटे	$2 \times 30 = 60$ km
3 घंटे	$3 \times 30 = 90$ km
4 घंटे	$4 \times 30 = 120$ km

इन राशियों से निम्न तालिका प्राप्त होती है :

समय (घंटों में)	1	2	3	4
तय की गई दूरी (km में)	30	60	90	120

(i) पैमाना : (आकृति 15.18) क्षैतिज अक्ष, 2 इकाई = 1 घंटा

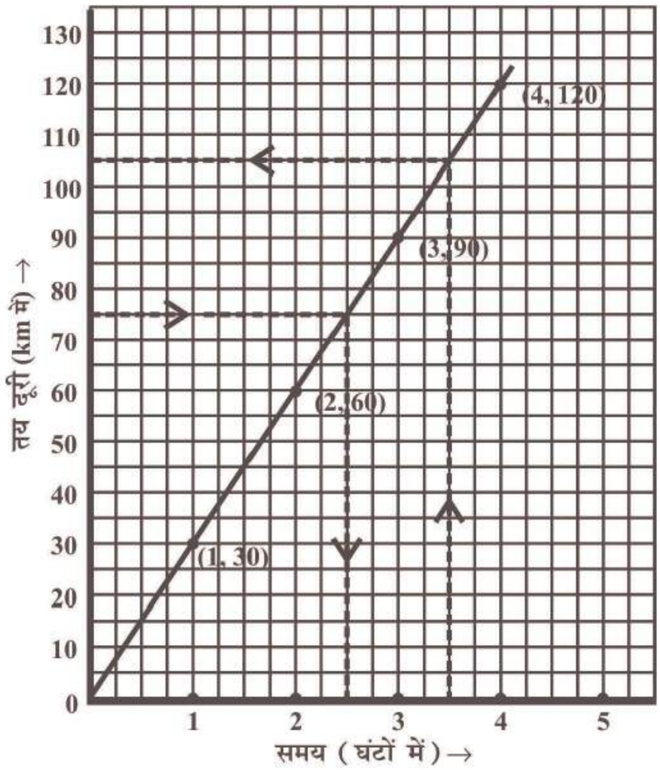
ऊर्ध्वाधर अक्ष, 1 इकाई = 10 km

(ii) क्षैतिज अक्ष पर समय दर्शाते हैं।

(iii) ऊर्ध्वाधर अक्ष दूरी दर्शाते हैं।

(iv) (1, 30), (2, 60), (3, 90) तथा (4, 120) बिंदुओं को अंकित कीजिए।

(v) बिंदुओं को मिलाइए। हमें एक रैखिक आलेख प्राप्त होता है; (आकृति 15.18)।



आकृति 15.18

(a) ऊर्ध्वाधर अक्ष पर 75 km दूरी लेने पर, उसके अनुरूप क्षैतिज अक्ष पर 2.5 घंटे लगेंगे।

(b) क्षैतिज अक्ष पर $3\frac{1}{2}$ घंटे के अनुरूप ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दूरी 105 km मिलती है।

प्रश्नावली 15.3

1. उपयुक्त पैमाने प्रयोग करते हुए, निम्न तालिकाओं में दी गई राशियों के लिए आलेख बनाइए :

(a) सेबों का मूल्य

सेबों की संख्या	1	2	3	4	5
मूल्य (₹ में)	5	10	15	20	25

(b) कार द्वारा तय की गई दूरी

समय (घंटों में)	6 बजे प्रातः	7 बजे प्रातः	8 बजे प्रातः	9 बजे प्रातः
दूरी (km में)	40	80	120	160

(i) 7.30 बजे प्रातः व 8 बजे प्रातः के अंतराल में कार द्वारा कितनी दूरी तय की गई?

(ii) कार के 100 km दूरी तय कर लेने पर समय क्या था?

(c) जमा धन पर वार्षिक ब्याज

जमा धन (₹ में)	1000	2000	3000	4000	5000
सा० ब्याज (₹ में)	80	160	240	320	400

(i) क्या आलेख मूल बिंदु से गुज़रता है?

(ii) आलेख से ₹ 2500 का वार्षिक ब्याज ज्ञात कीजिए।

(iii) ₹ 280 ब्याज प्राप्त करने के लिए कितना धन जमा करना होगा?

2. निम्न तालिकाओं के लिए आलेख खींचिए।

(i)

वर्ग की भुजा (cm में)	2	3	3.5	5	6
परिमाप (cm में)	8	12	14	20	24

क्या यह रैखिक आलेख है?

(ii)

वर्ग की भुजा (cm में)	2	3	4	5	6
क्षेत्रफल (cm^2 में)	4	9	16	25	36

क्या यह रैखिक आलेख है?

हमने क्या चर्चा की?

1. आलेखीय चित्रण समझना सरल होता है।

2. (i) **दंड-आलेख** विभिन्न श्रेणियों की तुलना करने के लिए उपयुक्त होता है।

(ii) **वृत्त-चित्र या वृत्त-आलेख** एक संपूर्ण के विभिन्न भागों की तुलना करने के लिए उपयुक्त होता है।

(iii) **आयत-चित्र** लगातार अंतराल वाले आँकड़ों के लिए दंड-आलेख है।

3. **रेखा-आलेख**, समय के अंतरालों के साथ आँकड़ों में परिवर्तन दर्शाता है।

4. रेखा-आलेख जो एक पूर्ण अखंडित रेखा हो, एक **रैखिक आलेख** कहलाता है।

5. वर्गांकित कागज़ पर किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने के लिए हमें ***x*-निर्देशांक** तथा ***y*-निर्देशांक** चाहिए।

6. एक **स्वतंत्र चर** तथा **आश्रित चर** में संबंध एक आलेख द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

अध्याय

16

संख्याओं के साथ खेलना

0853CH16

16.1 भूमिका

आप विभिन्न प्रकार की संख्याओं, जैसे – प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं, पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आप इनके अनेक रोचक गुणों का भी अध्ययन कर चुके हैं। कक्षा VI में, हमने गुणनखंडों और गुणजों को ज्ञात करने की खोज की तथा यह भी देखा कि इनके बीच में क्या संबंध ज्ञात किए जा सकते हैं। इस अध्याय में, हम संख्याओं के बारे में और अधिक विस्तृत जानकारी प्राप्त करेंगे। ये अवधारणाएँ विभाज्यता के नियमों की जाँच (tests of divisibility) के औचित्य को समझने में सहायता करेंगी।

16.2 व्यापक रूप में संख्याएँ

आइए एक संख्या 52 लें और उसे इस रूप में लिखें :

$$52 = 50 + 2 = \quad 10 \times 5 + 2$$

इसी प्रकार, संख्या 37 को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

व्यापक रूप में, अंकों a और b से बनी किसी दो अंकों की संख्या ab को इस रूप में लिखा जा सकता है : $\quad ab = 10 \times a + b = 10a + b$

ba के बारे में क्या कहा जा सकता है? $\quad ba = 10 \times b + a = 10b + a$

यहाँ ab का अर्थ $a \times b$ नहीं है।

आइए, अब संख्या 351 को लें। यह एक तीन अंकों की संख्या है। इस संख्या को भी इस रूप में लिखा जा सकता है:

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

इसी प्रकार, $\quad 497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$

व्यापक रूप में, अंकों a, b और c से बनी किसी तीन अंकों की संख्या abc को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + c$$

इसी प्रकार, $\quad cab = 100c + 10a + b$

$$bca = 100b + 10c + a$$

इत्यादि।

प्रयास कीजिए

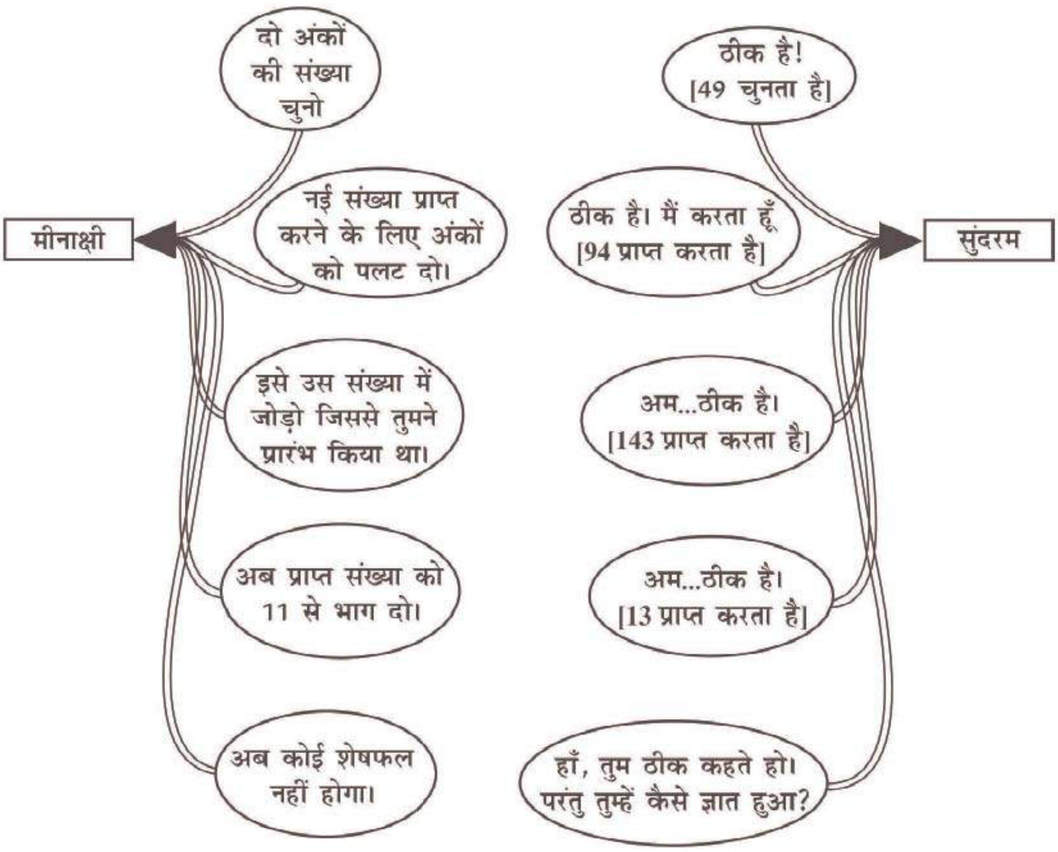
1. निम्नलिखित संख्याओं को व्यापक रूप में लिखिए :
   (i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302
2. निम्नलिखित को सामान्य रूप में लिखिए :
   (i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100a + 10c + b$

16.3 संख्याओं के साथ खेल

(i) **अंकों का पलटना–दो अंकों की संख्या**

मीनाक्षी ने सुंदरम से कोई दो अंकों वाली संख्या सोचने को कहा तथा यह भी कहा कि वह अब जैसा कहती जाए वह उसी प्रकार करता जाए। उनके वार्तालाप को निम्नलिखित आकृति में दर्शाया गया है। **आगे पढ़ने से पहले, कृपया आकृति का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें।**

मीनाक्षी और सुंदरम में वार्तालाप : पहला दौर



यहाँ ऐसा होता है कि सुंदरम 49 चुनता है। अंक पलटने पर तब उसे संख्या 94 प्राप्त होती है। फिर वह इन संख्याओं को जोड़कर $49 + 94 = 143$ प्राप्त करता है। अंत में, उसने इस संख्या

को 11 से भाग देकर, $143 \div 11 = 13$ प्राप्त किया और कोई शेषफल नहीं रहा। यही वह बात है जो मीनाक्षी ने पहले से ही बताई (अर्थात् प्रागुक्ति की है।)।

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि यदि सुंदरम ने निम्नलिखित संख्याएँ चुनी होती, तो परिणाम क्या प्राप्त होते :

1. 27 2. 39 3. 64 4. 17

आइए, अब देखें कि क्या हम मीनाक्षी की 'चतुराई' "(trick)" को स्पष्ट कर सकते हैं।

मान लीजिए कि सुंदरम संख्या ab चुनता है, जो दो अंकों की संख्या $10a + b$ का संक्षिप्त रूप है। अंकों को पलटने पर, वह संख्या $ba = 10b + a$ प्राप्त करता है। इन दोनों संख्याओं को जोड़ने पर, वह प्राप्त करता है :

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$
$$= 11\,(a + b)$$

अतः, प्राप्त योग सदैव 11 का एक गुणज (multiple) है, जैसा कि मीनाक्षी ने दावा किया है।

ध्यान दीजिए कि यदि हम योग को 11 से भाग दें, तो भागफल $(a + b)$ प्राप्त होता है। यह भागफल चुनी गई संख्या ab के अंकों के योग के बराबर है।

आप उपरोक्त की जाँच कितनी भी दो अंकों की संख्याओं को लेकर कर सकते हैं।

मीनाक्षी और सुंदरम का खेल जारी रहता है!

मीनाक्षी : एक अन्य दो अंकों की संख्या के बारे में सोचो। परंतु मुझे वह संख्या नहीं बताना।

सुंदरम : ठीक है!

मीनाक्षी : अब अंकों को पलटो और बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाओ।

सुंदरम : मैंने घटा लिया है। अब आगे क्या करना है?

मीनाक्षी : अब अपने उत्तर को 9 से भाग दो। मेरा दावा है कि शेषफल शून्य होगा।

सुंदरम : हाँ, तुम सही कह रही हो। वास्तव में, यहाँ शेषफल शून्य ही है। परंतु इस बारे में मैं जानता हूँ कि तुम इस बारे में इतनी निश्चित क्यों हो!

वास्तव में, सुंदरम ने संख्या 29 सोची थी। इसके अंकों को पलटकर उसने संख्या 92 प्राप्त की। फिर उसने $92 - 29 = 63$ प्राप्त किया तथा अंत में उसने $63 \div 9$ ज्ञात किया, जो भागफल 7 देता है और शेषफल शून्य है।

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि यदि सुंदरम ने उपरोक्त के लिए निम्नलिखित संख्या चुनी होती, तो क्या परिणाम प्राप्त होते :

1. 17 2. 21 3. 96 4. 37

आइए देखें कि किस प्रकार सुंदरम मीनाक्षी की दूसरी चतुराई को स्पष्ट करता है। (अब वह ऐसा करने में आत्मविश्वास का अनुभव करने लगा है!)

मान लीजिए कि वह दो अंकों की संख्या $ab = 10a + b$ चुनता है। अंकों को पलटने पर, वह संख्या $ba = 10b + a$ प्राप्त करता है। अतः मीनाक्षी उसे बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाने को कहती है।

- यदि दहाई का अंक इकाई के अंक से बड़ा है (अर्थात् $a > b$ है), तो वह इस प्रकार घटाता है :

$$(10a + b) – (10a + b) = 10a + b – 10b – a$$
$$= 9a – 9b = 9(a – b)$$

- यदि इकाई का अंक दहाई के अंक से बड़ा है (अर्थात् $b > a$ है), तो वह इस प्रकार घटाता है :

$$(10b + a) – (10a + b) = 9(b – a)$$

- निस्संदेह, जब $a = b$ है, तो वह 0 प्राप्त करता है।

प्रत्येक स्थिति में, परिणामी संख्या 9 से विभाज्य है। अतः शेषफल 0 है। ध्यान दीजिए कि यदि हम घटाने पर प्राप्त परिणामी संख्या को 9 से भाग दें, तो हमें $a > b$ या $a < b$ के अनुसार $(a – b)$ या $(b – a)$ प्राप्त होता है। आप कोई भी अन्य दो अंकों की संख्याएँ लेकर उपरोक्त तथ्य की जाँच कर सकते हैं।

(ii) अंकों का पलटना–तीन अंकों की संख्या

अब सुंदरम की बारी है कि वह कुछ चतुराइयों को दिखाए।

सुंदरम : एक तीन अंकों की कोई संख्या सोचो, परंतु इसके बारे में मुझे नहीं बताना।

मीनाक्षी : ठीक है!

सुंदरम : अब इन अंकों को उलटे क्रम में (पलटते हुए) लेकर, एक नयी संख्या बनाओ और बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाओ।

मीनाक्षी : ठीक है, मैंने घटा लिया है। आगे क्या करना है?

सुंदरम : अपने उत्तर को 99 से भाग दीजिए। मैं निश्चित रूप से कह सकता हूँ कि शेषफल शून्य होगा।

वास्तव में, मीनाक्षी ने तीन अंकों की संख्या 349 चुनी थी। इसलिए उसने प्राप्त किया :

- अंक पलटने पर संख्या : 943;
- अंतर : $943 – 349 = 594$;
- विभाजन : $594 \div 99 = 6$, शेषफल शून्य के साथ।

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि यदि मीनाक्षी ने निम्नलिखित संख्याएँ चुनी होतीं, तो परिणाम क्या प्राप्त होता? प्रत्येक स्थिति में, अंत में प्राप्त हुए भागफल का एक रिकॉर्ड (record) रखिए।

1. 132   2. 469   3. 737   4. 901

आइए देखें कि यह चतुराई कैसे कार्य करती है। मान लीजिए कि मीनाक्षी द्वारा चुनी गई तीन अंकों की संख्या $abc = 100a + 10b + c$ है।

अंकों को पलटने पर, वह संख्या $cba = 100c + 10b + a$ प्राप्त करती है। घटाने पर प्राप्त होगा :

- यदि $a > c$ है, तो संख्याओं का अंतर है,
  $$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$
  $$= 99a - 99c = 99(a - c).$$
- यदि $c > a$ है, तो संख्याओं का अंतर है,
  $$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a).$$
- नि:संदेह यदि, $a = c$ है तो अंतर 0 है।

प्रत्येक स्थिति में, परिणामी संख्या 99 से विभाज्य है। इसलिए, शेषफल 0 प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि भागफल $(c - a)$ होगा। आप तीन अंकों की अन्य संख्याएँ लेकर इसी तथ्य की जाँच कर सकते हैं।

(iii) दिए हुए तीन अंकों से तीन अंकों की संख्याएँ बनाना

अब एक बार फिर मीनाक्षी की बारी है।

मीनाक्षी : तीन अंकों की कोई संख्या सोचो।

सुंदरम : ठीक है, मैंने ऐसा कर लिया है।

मीनाक्षी : अब इस संख्या का प्रयोग दो अन्य तीन अंकों की संख्याएँ बनाने में इस प्रकार करो : यदि तुमने संख्या abc चुनी है, तो

- पहली संख्या cab (अर्थात् इकाई का अंक उस संख्या के सबसे बाएँ सिरे पर पहुँच गया) है।
- अन्य संख्या bca (अर्थात् सैकड़े का अंक उस संख्या के सबसे दाएँ सिरे पर पहुँच गया) है।

अब इन संख्याओं को जोड़ो। परिणामी संख्या को 37 से भाग दो। मेरा दावा है कि शेषफल शून्य होगा।

सुंदरम : हाँ, तुम सही हो।

वास्तव में, सुंदरम ने तीन अंकों की संख्या 237 सोची थी। जैसा मीनाक्षी ने करने को कहा था वैसा करने के पश्चात् उसने संख्याएँ 723 तथा 372 पाई। अत: उसने यह किया।

$$\begin{array}{r} 2\,3\,7 \\ +\ \ 7\,2\,3 \\ +\ \ 3\,7\,2 \\ \hline 1\,3\,3\,2 \\ \hline \end{array}$$

तीनों अंकों 2, 3 और 7 का प्रयोग करके, तीन अंकों वाली सभी संभव संख्याएँ बनाइए तथा इनका योग ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या यह योग 37 से विभाज्य है। क्या यह संख्या abc के तीनों अंकों a, b और c से बनी सभी संख्याओं के योग के लिए सत्य है।

फिर उसने परिणामी संख्या 1332 को 37 से भाग दिया :

$$1332 \div 37 = 36, \quad \text{शेषफल शून्य के साथ।}$$

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि यदि सुंदरम ने निम्नलिखित संख्याएँ सोची होती, तो परिणाम क्या प्राप्त होता :

1. 417 2. 632 3. 117 4. 937

क्या यह चतुराई सदैव कार्य करती है?

आइए देखें :

$$abc = 100a + 10b + c$$
$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$
$$abc + cab + bca = 111(a + b + c)$$
$$= 37 \times 3(a + b + c),$$ जो 37 से विभाज्य है।

16.4 अंकों के लिए अक्षर

यहाँ हमारे सम्मुख कुछ पहेलियाँ हैं जहाँ एक अंकगणितीय प्रश्न में अंकों के स्थानों पर अक्षर होते हैं तथा समस्या यह ज्ञात करने की है कि कौन-सा अक्षर किस अंक को निरूपित करता है। अतः, यह एक प्रकार से कोड (code) को हल करने जैसी बात है। प्रायः हम योग और गुणन की समस्याओं तक सीमित रहेंगे। ऐसी पहेलियों को हल करते समय अपनाए जाने वाले दो नियम ये हैं :

1. *पहेली में, प्रत्येक अक्षर केवल एक ही अंक को प्रदर्शित करना चाहिए। एक अंक केवल एक ही अक्षर से प्रदर्शित किया जाना चाहिए।*
2. *एक संख्या का पहला अंक शून्य नहीं हो सकता। इस प्रकार, हम संख्या तिरसठ को '063' या '0063' न लिखकर '63' लिखते हैं।*

एक नियम जिसका हमें पालन करना है वह यह है कि एक पहेली का केवल एक ही उत्तर होना चाहिए।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित योग में Q ज्ञात कीजिए :

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ Q \\ +\ 1\ Q\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

हल : यहाँ केवल एक अक्षर Q है, जिसका हमें मान ज्ञात करना है।

इकाई के स्तंभ में, उपरोक्त योग का अध्ययन कीजिए। Q + 3 से हमें 1 प्राप्त होता है। अर्थात् एक संख्या जिसकी इकाई का अंक 1 है।

ऐसा होने के लिए, Q अंक 8 होना चाहिए। अतः इस पहेली को नीचे दर्शाए अनुसार हल किया जा सकता है :

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 8 \\ +\ 1\ 8\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$ अर्थात् Q = 8 है।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित योग में, A और B ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} A \\ +\ \ A \\ +\ \ A \\ \hline B\ \ A \\ \hline \end{array}$$

हल : इसमें दो अक्षर A और B हैं, जिनके मान ज्ञात किए जाने हैं।

इकाई के स्तंभ में योग का अध्ययन कीजिए : तीन A का योग एक ऐसी संख्या है जिसकी इकाई का अंक A है। अतः दो A का योग एक ऐसी संख्या होनी चाहिए जिसकी इकाई का अंक 0 हो। यह तभी होगा जब $A = 0$ हो या $A = 5$ हो।

यदि $A = 0$ है, तो योग $0 + 0 + 0 = 0$ होगा, जिससे $B = 0$ हो जाएगा। हम इसे नहीं चाहेंगे (क्योंकि इससे $A = B$ हो जाएगा और BA के दहाई का अंक भी 0 हो जाएगा)। इसलिए हम इसे छोड़ देते हैं। अतः $A = 5$ है।

इसलिए, यह पहेली नीचे दर्शाए अनुसार हल होगी :

$$\begin{array}{rr} & 5 \\ + & 5 \\ + & 5 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

अर्थात्, $A = 5$ और $B = 1$ हो।

उदाहरण 3 : A और B को ज्ञात कीजिए :

$$\begin{array}{rrr} & B & A \\ \times & B & 3 \\ \hline 5 & 7 & A \\ \hline \end{array}$$

हल : यहाँ भी दो अक्षर A और B हैं, जिनके मान ज्ञात किए जाने हैं। क्योंकि $3 \times A$ के इकाई का अंक A है, इसलिए या तो $A = 0$ है या $A = 5$ है।

अब B को देखिए। यदि $B = 1$ हो, तो $BA \times B3$ का मान *अधिक से अधिक* 19×19, अर्थात् 361 होगा। परंतु यहाँ गुणनफल 57A है, जो 500 से अधिक है। अतः $B = 1$ नहीं हो सकता।

यदि $B = 3$ हो, तो $BA \times B3$ का गुणनफल 30×30 से अधिक होगा, अर्थात् यह 900 से अधिक होगा। परंतु 57A का मान 600 से कम है। अतः $B = 3$ नहीं हो सकता।

उपरोक्त दोनों तथ्यों को दृष्टिगत रखते हुए, B का मान केवल 2 ही हो सकता है। अतः दिया हुआ गुणन या तो 20×23 होगा या 25×23 होगा।

पहली संभावना नहीं हो सकती, क्योंकि $20 \times 23 = 460$ है। परंतु दूसरी संभावना सही है, क्योंकि $25 \times 23 = 575$ है।

अतः $A = 5$ और $B = 2$ है।

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 5 \\ \times & 2 & 3 \\ \hline 5 & 7 & 5 \\ \hline \end{array}$$

इन्हें कीजिए

दो अंकों की एक संख्या ab लिखिए तथा इसके अंकों को पलटने पर प्राप्त संख्या ba लिखिए। इनका योग ज्ञात कीजिए। मान लीजिए यह योग एक तीन अंकों की संख्या dad है।

अर्थात्
$$ab + ba = dad$$
$$(10a + b) + (10b + a) = dad$$
$$11(a + b) = dad$$

योग $(a + b)$ संख्या 18 से अधिक नहीं हो सकता (क्यों?)। क्या dad, 11 का एक गुणज है? क्या dad, 198 से कम है? 198 तक तीन अंकों की ऐसी सभी संख्याएँ लिखिए, जो 11 की गुणज हैं। a और d के मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 16.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में अक्षरों के मान ज्ञात कीजिए तथा संबद्ध चरणों के लिए कारण भी दीजिए :

1.
$$\begin{array}{r} 3\ A \\ +\ 2\ 5 \\ \hline B\ 2 \\ \hline \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 4\ A \\ +\ 9\ 8 \\ \hline C\ B\ 3 \\ \hline \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 1\ A \\ \times\ A \\ \hline 9\ A \\ \hline \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ +\ 3\ 7 \\ \hline 6\ A \\ \hline \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ 3 \\ \hline C\ A\ B \\ \hline \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ 5 \\ \hline C\ A\ B \\ \hline \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ 6 \\ \hline B\ B\ B \\ \hline \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} A\ 1 \\ +\ 1\ B \\ \hline B\ 0 \\ \hline \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{r} 2\ A\ B \\ +\ A\ B\ 1 \\ \hline B\ 1\ 8 \\ \hline \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 1\ 2\ A \\ +\ 6\ A\ B \\ \hline A\ 0\ 9 \\ \hline \end{array}$$

16.5 विभाज्यता की जाँच

कक्षा VI में आप यह पढ़ चुके हैं कि निम्नलिखित भाजकों से किस प्रकार विभाज्यता (divisibility) की जाँच की जाती है :

$$10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9, 11$$

आपको इनकी जाँच करने के नियम सरल लगे होंगे, परंतु साथ ही आपने यह भी आश्चर्य किया होगा कि ये किस प्रकार कार्य करते हैं। अब हम इस अध्याय में, इनके 'क्यों' वाले पहलू पर चर्चा करेंगे।

16.5.1 10 द्वारा विभाज्यता

यह निश्चय ही सभी में से सबसे सरल जाँच है। हम पहले 10 के कुछ गुणजों को देखते हैं :

$$10, 20, 30, 40, 50, 60, \ldots,$$

इसके साथ 10 के कुछ अगुणजों (non-multiples) को देखिए 13, 27, 32, 48, 55, 69, ... इन संख्याओं से हमें यह पता चलता है कि ऐसी संख्याएँ जिनकी इकाई का अंक 0 है, 10 के गुणज हैं तथा वे संख्याएँ जिनकी इकाई का अंक 0 नहीं है, 10 के गुणज नहीं हैं। इससे हमें 10 द्वारा विभाज्यता की जाँच का एक नियम प्राप्त होता है।

निस्संदेह, हमें केवल जाँच का नियम देकर ही नहीं रुक जाना चाहिए। हमें यह भी स्पष्ट करना चाहिए कि यह जाँच का नियम किस तरह कार्य करता है। ऐसा करना कठिन नहीं है। हमें केवल स्थानीय मान (place value) के नियमों को याद रखना है।

कोई संख्या $\ldots cba$ लीजिए। यह निम्नलिखित संख्या का संक्षिप्त रूप है :

$$\ldots + 100c + 10b + a$$

यहाँ a इकाई का अंक है, b दहाई का अंक है, c सैकड़े का अंक है इत्यादि। यहाँ तीन बिंदु (...) ये दर्शाते हैं कि c के बाईं ओर और अंक हो सकते हैं।

क्योंकि 10, 100, ... 10 से विभाज्य हैं, इसलिए $10b, 100c, \ldots$ भी 10 से विभाज्य होंगे। जहाँ तक संख्या a का प्रश्न है, यदि दी हुई संख्या 10 से विभाज्य है, तो a को भी 10 से विभाज्य होना चाहिए। यह तभी संभव है, जब $a = 0$ है।

अतः कोई संख्या 10 से विभाज्य होती है, यदि उसका इकाई के स्थान पर 0 है।

16.5.2 5 से विभाज्यता

5 के गुणजों को देखिए : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...

हम देखते हैं कि इकाई के अंक 5 और 0 एक संख्या छोड़कर आ रहे हैं तथा इनके अतिरिक्त इकाई के स्थान पर कोई अन्य अंक नहीं आ रहा है।

अतः हमें 5 द्वारा विभाज्यता का यह नियम प्राप्त होता है : *यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 5 या 0 है, तो वह संख्या 5 से विभाज्य होती है।*

आइए, इस नियम को स्पष्ट करें। किसी संख्या $\ldots cba$ को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\ldots + 100c + 10b + a$$

चूँकि 10, 100, ... 10 से विभाज्य हैं, इसलिए $10b, 100b, \ldots$ भी 10 से विभाज्य होंगे तथा यही बाद में 5 से भी विभाज्य होंगे, क्योंकि $10 = 5 \times 2$ है। जहाँ तक संख्या a का प्रश्न है, यदि संख्या 5 से विभाज्य है, तो इसे भी 5 से विभाज्य होना चाहिए। अतः a को या तो 0 या 5 होना चाहिए।

प्रयास कीजिए

(पहला प्रश्न आपकी सहायता के लिए किया हुआ है।)

1. यदि विभाजन N ÷ 5 से शेषफल 3 प्राप्त होता है, तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?
   (इकाई के अंक को 5 से भाग देने पर शेषफल 3 आना चाहिए। अत: इकाई का अंक 3 या 8 होगा।)
2. यदि विभाजन N ÷ 5 से शेषफल 1 प्राप्त होता है, तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?
3. यदि विभाजन N ÷ 5 से शेषफल 4 प्राप्त होता है, तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?

16.5.3 2 से विभाज्यता

ये सभी सम संख्याएँ हैं : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ... ,
तथा ये विषम संख्याएँ हैं : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ... ,
हम देखते हैं कि एक प्राकृत संख्या सम होती है, यदि इसकी इकाई का अंक हो,

2, 4, 6, 8 या 0

एक संख्या विषम होती है, यदि इसकी इकाई का अंक हो, 1, 3, 5, 7 या 9

कक्षा VI में सीखे गए 2 की विभाज्यता की जाँच के नियम को याद कीजिए। यह नियम इस प्रकार है :

यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 या 8 हो तो वह संख्या 2 से विभाज्य होती है।

इसके लिए स्पष्टीकरण इस प्रकार है :

किसी भी संख्या ... cba को ... + $100c + 10b + a$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसके पहले दो पद $100c$ और $10b$ संख्या 2 से विभाज्य हैं, क्योंकि 100 और 10 संख्या 2 से विभाज्य हैं। जहाँ तक a का प्रश्न है, यदि दी हुई संख्या 2 से विभाज्य है, तो इसे भी 2 से विभाज्य होना चाहिए। यह तभी संभव है, जब $a = 0, 2, 4, 6$ या 8 हो।

प्रयास कीजिए

(पहला-प्रश्न आपकी सहायता के लिए किया हुआ है।)

1. यदि विभाजन N ÷ 2 से शेषफल 1 प्राप्त होता है, तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?
   (N विषम है। इसलिए इसकी इकाई का अंक विषम होगा। अत: N की इकाई का अंक 1, 3, 5, 7 या 9 होगा।)
2. यदि विभाजन N ÷ 2 से कोई शेष प्राप्त नहीं होता (अर्थात् शेषफल 0 है), तो N की इकाई का अंक क्या हो सकता है?
3. मान लीजिए कि विभाजन N ÷ 5 से शेषफल 4 और विभाजन N ÷ 2 से शेषफल 1 प्राप्त होता है। N की इकाई का अंक क्या होना चाहिए?

16.5.4 9 और 3 से विभाज्यता

अब तक ज्ञात किए गए विभाज्यता की जाँच के तीन नियमों को ध्यानपूर्वक देखिए, जो 10, 5 और 2 के विभाजन की जाँच के लिए थे। हम इनमें एक समान बात देख रहे हैं : इनमें दी हुई संख्या की केवल इकाई के अंक का ही प्रयोग होता है तथा अन्य अंकों से इन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इस प्रकार, विभाज्यता का निर्णय केवल इकाई के अंक से ही हो जाता है। 10, 5 और 2 संख्या 10 के भाजक (division) हैं, जो हमारी स्थानीय मान पद्धति में एक महत्वपूर्ण संख्या है।

परंतु 9 से विभाज्यता की जाँच में ये नियम नहीं चलेंगे। आइए, कोई संख्या, मान लीजिए 3573 लें। इसका प्रसारित रूप $3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$ है।

इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$$
$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3) \qquad \ldots (1)$$

हम देखते हैं कि संख्या 3576 यह 9 या 3 से तभी विभाज्य होगी, यदि $(3 + 5 + 7 + 3)$ संख्या 9 या 3 से विभाज्य हो।

हम देखते हैं कि $(3 + 5 + 7 + 3) = 18$ संख्या 9 से विभाज्य है और 3 से भी विभाज्य है। अत: संख्या 3573 संख्याओं 9 और 3 दोनों से विभाज्य है।

आइए, अब संख्या 3576 पर विचार करें। ऊपर की ही तरह, हम प्राप्त करते हैं :

$$3576 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 6$$
$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6)$$

क्योंकि $(3 + 5 + 7 + 6) = 21$, 9 से विभाज्य नहीं है, परंतु 3 से विभाज्य है, इसलिए 3576, संख्या 9 से विभाज्य नहीं है। परंतु यह 3 से विभाज्य है। अत:,

(i) एक संख्या N संख्या 9 से विभाज्य होती है, यदि इसके अंकों का योग 9 से विभाज्य हो। अन्यथा वह 9 से विभाज्य नहीं होती है।

(ii) एक संख्या N संख्या 3 से विभाज्य होती है, यदि इसके अंकों का योग 3 से विभाज्य हो। अन्यथा यह 3 से विभाज्य नहीं होगी।

यदि संख्या cba है, तो $100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$$= \underbrace{9(11c + b)}_{\text{3 और 9 से विभाज्य}} + (a + b + c)$$

अत: 9 (या 3) की विभाज्यता तभी संभव है, जब $(a \times b \times c)$ 9 (या 3) से विभाज्य हो।

उदाहरण 4 : 21436587 की 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

हल : 21436587 के अंकों का योग $= 2 + 1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 8 + 7 = 36$

यह योग 9 से विभाज्य है। $(36 \div 9 = 4)$

अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि 21436587 संख्या 9 से विभाज्य है। हम दोबारा जाँच भी कर सकते हैं। $\frac{21436587}{9} = 2381843$ (विभाज्य पूर्ण है)

उदाहरण 5 : 152875 की 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

हल : 152875 के अंकों का योग $1 + 5 + 2 + 8 + 7 + 5 = 28$ है। यह संख्या 9 से विभाज्य नहीं है। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि 152875 संख्या 9 से विभाज्य नहीं है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं की 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए :

1. 108 2. 616 3. 294 4. 432 5. 927

उदाहरण 6 : यदि तीन अंकों की संख्या $24x$, 9 से विभाज्य है, तो x का मान क्या है?

हल : क्योंकि $24x$, संख्या 9 से विभाज्य है, इसलिए इसके अंकों का योग $2 + 4 + x$, 9 से विभाज्य होना चाहिए। अर्थात् $6 + x$, a से विभाज्य होना चाहिए।

यह तभी संभव है, जब $6 + x$ या तो 9 हो या 18 हो। क्योंकि x एक अंक है, इसलिए $6 + x = 9$ होगा। अतः, $x = 3$ है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. आप देख चुके हैं कि 450, 10 से विभाज्य है। यह 2 और 5 से भी विभाज्य है, जो 10 के गुणनखंड हैं। इसी प्रकार, संख्या 135, 9 से विभाज्य है। यह 3 से भी विभाज्य है, जो 9 का एक गुणनखंड है।

   क्या आप कह सकते हैं कि यदि कोई संख्या किसी संख्या m से विभाज्य हो, तो वह m के प्रत्येक गुणनखंड से भी विभाज्य होगी?

2. (i) एक तीन अंकों की संख्या abc को $100a + 10b + c$ के रूप में लिखिए। अब

$$100a + 10b + c = 99a + 11b + (a - b + c)$$
$$= 11(9a + b) + (a - b + c)$$

   यदि संख्या abc, 11 से विभाज्य है, तो आप $(a - b + c)$ के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या यह आवश्यक है कि $(a + c - b)$, 11 से विभाज्य हो?

   (ii) एक चार अंकों की संख्या $abcd$ को इस प्रकार लिखिए :

$$1000a + 100b + 10c + d$$
$$= (1001a + 99b + 11c) - (a - b + c - d)$$
$$= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)]$$

यदि संख्या $abcd$, 11 से विभाज्य है, तो $(b + d) - (a + c)$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

(iii) उपरोक्त (i) और (ii) से, क्या आप कह सकते हैं कि कोई संख्या 11 से विभाज्य होगी, यदि इसके विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य होगा?

उदाहरण 7 : 2146587 की 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

हल : 2146587 के अंकों का योग $2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 8 + 7 = 33$ है। जो स्पष्टत:

3 से विभाज्य है $(33 \div 3 = 11)$। अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि 2146587, संख्या 3 से विभाज्य है।

उदाहरण 8 : 15287 की 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

हल : 15287 के अंकों का योग $= 1 + 5 + 2 + 8 + 7 = 23$ यह 3 से विभाज्य नहीं है। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि 15287 संख्या 3 से विभाज्य नहीं है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं की 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

1. 108   2. 616   3. 294   4. 432   5. 927

प्रश्नावली 16.2

1. यदि $21y5$, 9 का एक गुणज है, जहाँ y एक अंक है, तो y का मान क्या है?
2. यदि $31z5$, यह 9 का एक गुणज है, जहाँ z एक अंक है, तो z का मान क्या है? आप देखेंगे कि इसके दो उत्तर हैं। ऐसा क्यों है?
3. यदि $24x$, 3 का एक गुणज है, जहाँ x एक अंक है, तो x का मान क्या है?

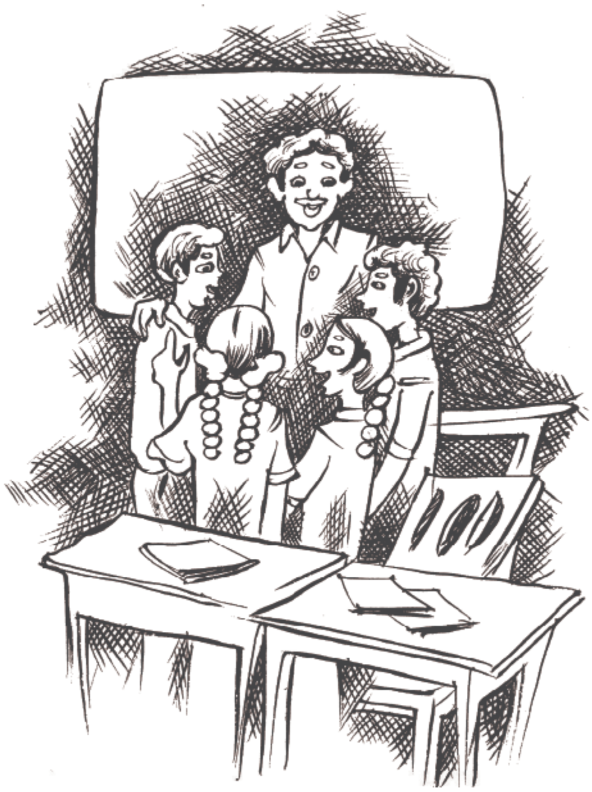
   (क्योंकि $24x$, 3 का एक गुणज है, इसलिए इसके अंकों का योग $6 + x$ भी 3 का एक गुणज हैं। अर्थात् $6 + x$ निम्नलिखित में कोई एक संख्या होगी,

   $$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$$

   परंतु x एक अंक है, इसलिए $6 + x = 6$ या $6 + x = 9$ या $6 + x = 12$ या $6 + x = 15$ हो सकता है। अत:, $x = 0$ या 3 या 6 या 9 हो सकता है। इसलिए x का मान इन चारों विभिन्न मानों में से कोई एक हो सकता है।
4. यदि $31z5$, 3 का एक गुणज है, जहाँ z एक अंक है, तो z का मान क्या हो सकता है?

हमने क्या चर्चा की?

1. संख्याओं को व्यापक रूप में लिखा जा सकता है। इस प्रकार, दो अंकों की संख्या ab को $10a + b$ लिखा जा सकता है।
2. संख्याओं के व्यापक रूप पहेलियों या संख्या खेलों को हल करने में सहायक होते हैं।
3. संख्याओं की 10, 5, 2, 9 या 3 द्वारा विभाज्यता की तर्कसंगतता प्रदान की जा सकती है, यदि उन्हें व्यापक रूप में लिखा जाए।



उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) 2 (ii) $\frac{-11}{28}$

2. (i) $\frac{-2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{5}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{19}{6}$

4. (i) $\frac{-1}{13}$ (ii) $\frac{-19}{13}$ (iii) 5 (iv) $\frac{56}{15}$ (v) $\frac{5}{2}$ (vi) -1

5. (i) 1 गुणनात्मक तत्समक है। (ii) क्रमविनिमेयता
(iii) गुणनात्मक प्रतिलोम

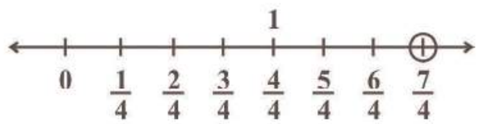
6. $\frac{-96}{91}$ **7.** सहचारिता **8.** नहीं, क्योंकि गुणनफल 1 नहीं है।

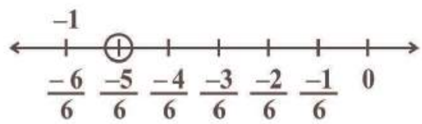
9. हाँ, क्योंकि $0.3 \times 3\frac{1}{3} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{3} = 1$

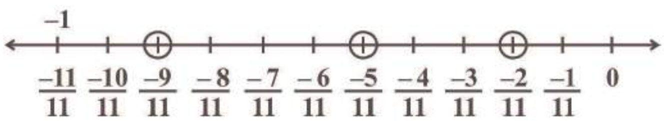
10. (i) 0 (ii) 1 और (-1) (iii) 0

11. (i) नहीं (ii) $1, -1$ (iii) $\frac{-1}{5}$ (iv) x (v) परिमेय संख्या
(vi) धनात्मक

प्रश्नावली 1.2

1. (i)


(ii)


2.


3. इनमें से कुछ हैं : $1, \frac{1}{2}, 0, -1, \frac{-1}{2}$

4. $\frac{-7}{20}, \frac{-6}{20}, \frac{-5}{20}, \frac{-4}{20}, \frac{-3}{20}, \frac{-2}{20}, \frac{-1}{20}, 0, \dots, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}$ (ऐसी ही और अनेक परिमेय संख्याएँ हो सकती हैं।)

5. (i) $\frac{41}{60}, \frac{42}{60}, \frac{43}{60}, \frac{44}{60}, \frac{45}{60}$ (ii) $\frac{-8}{6}, \frac{-7}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}$

(iii) $\frac{9}{32}, \frac{10}{32}, \frac{11}{32}, \frac{12}{32}, \frac{13}{32}$ (ऐसी ही और अनेक परिमेय संख्याएँ हो सकती हैं।)

6. $-\frac{3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (ऐसी ही और अनेक परिमेय संख्याएँ हो सकती हैं।)

7. $\frac{97}{160}, \frac{98}{160}, \frac{99}{160}, \frac{100}{160}, \frac{101}{160}, \frac{102}{160}, \frac{103}{160}, \frac{104}{160}, \frac{105}{160}, \frac{106}{160}$
(ऐसी ही और अनेक परिमेय संख्याएँ हो सकती हैं।)

प्रश्नावली 2.1

1. $x = 9$ 2. $y = 7$ 3. $z = 4$ 4. $x = 2$ 5. $x = 2$ 6. $t = 50$
7. $x = 27$ 8. $y = 2.4$ 9. $x = \frac{25}{7}$ 10. $y = \frac{3}{2}$ 11. $p = -\frac{4}{3}$ 12. $x = -\frac{8}{5}$

प्रश्नावली 2.2

1. $\frac{3}{4}$ 2. लंबाई = 52 m, चौड़ाई = 25 m 3. $1\frac{2}{5}$ cm 4. 40 और 55
5. 45, 27 6. 16, 17, 18 7. 288, 296 और 304 8. 7, 8, 9
9. राहुल की आयु = 20 वर्ष; हारून की आयु = 28 वर्ष 10. 48 विद्यार्थी
11. भरत की आयु = 17 वर्ष; भरत के पिता की आयु = 46 वर्ष;
भरत के दादा की आयु = 72 वर्ष 12. 5 वर्ष 13 $-\frac{1}{2}$
14. 100 रु $\rightarrow$ 2000 नोट; 50 रु $\rightarrow$ 3000 नोट; 10 रु $\rightarrow$ 5000 नोट
15. 1 रु के सिक्कों की संख्या = 80; 2 रु के सिक्कों की संख्या = 60; 5 रु के सिक्कों की संख्या = 20
16. 19

प्रश्नावली 2.3

1. $x = 18$ 2. $t = -1$ 3. $x = -2$ 4. $z = \frac{3}{2}$ 5. $x = 5$ 6. $x = 0$
7. $x = 40$ 8. $x = 10$ 9. $y = \frac{7}{3}$ 10. $m = \frac{4}{5}$

प्रश्नावली 2.4

1. 4 2. 7, 35 3. 36 4. 26 (या 62)
5. सरोज की आयु = 5 वर्ष; सरोज की माँ की आयु = 30 वर्ष
6. लंबाई = 275 m; चौड़ाई = 100 m 7. 200 m 8. 72
9. पौत्री की आयु = 6 वर्ष; दादा की आयु = 60 वर्ष
10. अमन की आयु = 60 वर्ष; अमन के पुत्र की आयु = 20 वर्ष

प्रश्नावली 2.5

1. $x = \frac{27}{10}$ **2.** $n = 36$ **3.** $x = -5$ **4.** $x = 8$ **5.** $t = 2$

6. $m = \frac{7}{5}$ **7.** $t = -2$ **8.** $y = \frac{2}{3}$ **9.** $z = 2$ **10.** $f = 0.6$

प्रश्नावली 2.6

1. $x = \frac{3}{2}$ **2.** $x = \frac{35}{33}$ **3.** $z = 12$ **4.** $y = -8$ **5.** $y = -\frac{4}{5}$

6. हरी की आयु = 20 वर्ष; हैरी की आयु = 28 वर्ष **7.** $\frac{13}{21}$

प्रश्नावली 3.1

1. (a) 1, 2, 5, 6, 7 (b) 1, 2, 5, 6, 7 (c) 1, 2
(d) 2 (e) 1, 4

2. (a) 2 (b) 9 (c) 0 **3.** 360°; हाँ

4. (a) 900° (b) 1080° (c) 1440° (d) $(n-2)180°$

5. बराबर भुजाओं और बराबर कोणों वाला एक बहुभुज
(i) समबाहु त्रिभुज (ii) वर्ग (iii) सम षड्भुज

6. (a) 60° (b) 140° (c) 140° (d) 108°

7. (a) $x + y + z = 360°$ (b) $x + y + z + w = 360°$

प्रश्नावली 3.2

1. (a) $360° - 250° = 110°$ (b) $360° - 310° = 50°$

2. (i) $\frac{360°}{9} = 40°$ (ii) $\frac{360°}{15} = 24°$

3. $\frac{360}{24} = 15$ (भुजाएँ) **4.** भुजाओं की संख्या = 24

5. (i) नहीं (क्योंकि 360 को 22 विभाजित नहीं करता है।)
(ii) नहीं (क्योंकि प्रत्येक बहिष्कोण $180° - 22° = 158°$ है, जो 360° को विभाजित नहीं करता है।)

6. (a) क्योंकि समबाहु त्रिभुज तीन भुजाओं का एक समबहुभुज है, इसलिए इसके प्रत्येक अंत:कोण की न्यूनतम माप = 60° है।
(b) (a) से हम देख सकते हैं कि सबसे बड़ा बहिष्कोण 120° होगा।

प्रश्नावली 3.3

1. (i) BC (सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।) (ii) $\angle DAB$ (सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

(iii) OA (विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।)

(iv) 180° (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण, क्योंकि $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$)

2. (i) $x = 80°; y = 100°; z = 80°$ (ii) $x = 130°; y = 130°; z = 130°$

(iii) $x = 90°;\ y = 60°;\ z = 60°$ (iv) $x = 100°;\ y = 80°;\ z = 80°$

(v) $y = 112°; x = 28°; z = 28°$

3. (i) हो सकता है, परंतु आवश्यक नहीं है।

(ii) नहीं;(एक समांतर चतुर्भुज में, सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं, परंतु यहाँ $AD \neq BC$ है।)

(iii) नहीं;(एक समांतर चतुर्भुज में, सम्मुख कोण बराबर होते हैं, परंतु यहाँ $\angle A \neq \angle C$ है।)

4. उदाहरणार्थ, एक पतंग **5.** 108°; 72°; **6.** प्रत्येक कोण एक समकोण है।

7. $x = 110°;\ y = 40°;\ z = 30°$

8. (i) $x = 6;\ y = 9$ (ii) $x = 3;\ y = 13$; **9.** $x = 50°$

10. $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण का योग 180° है।) इसलिए, KLMN एक समलंब है।

11. 60° **12.** $\angle P = 50°; \angle S = 90°$

प्रश्नावली 3.4

1. (b), (c), (f), (g) और (h) सत्य हैं, अन्य असत्य हैं।

2. (a) समचतुर्भुज; वर्ग (b) वर्ग; आयत

3. (i) एक वर्ग में चार भुजाएँ होती हैं इसलिए यह एक चतुर्भुज है।

(ii) एक वर्ग की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं; इसलिए यह एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) वर्ग एक ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं; इसलिए यह एक समचतुर्भुज है।

(iv) वर्ग एक ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है, जिसके सभी कोण समकोण होते हैं; इसलिए यह एक आयत है।

4. (i) समांतर चतुर्भुज; समचतुर्भुज; वर्ग; आयत

(ii) समचतुर्भुज; वर्ग (iii) वर्ग; आयत

5. इसके दोनों विकर्ण इसके अभ्यंतर में स्थित होते हैं।

6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ है। इसलिए, समांतर चतुर्भुज ABCD में, विकर्ण $\overline{AC}$ का मध्य-बिंदु O है।

प्रश्नावली 5.1

1. (b), (d) इन सभी स्थितियों में, आँकड़ों को वर्ग अंतरालों में विभाजित किया जा सकता है।

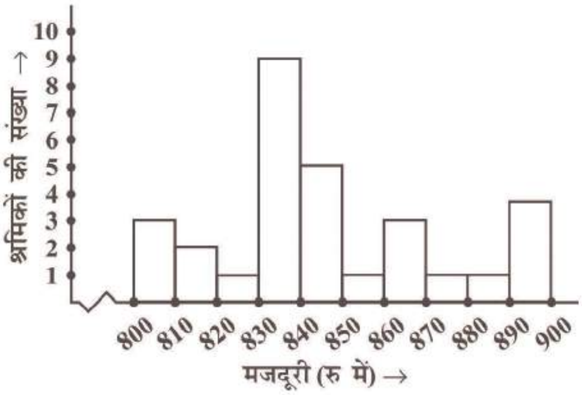
2.

खरीदने वाला	मिलान चिह्न	संख्या
W	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||	28
M	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15
B	~~||||~~	5
G	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12

3.

अंतराल	मिलान चिह्न	बारंबारता
800 - 810	|||	3
810 - 820	||	2
820 - 830	|	1
830 - 840	~~||||~~ ||||	9
840 - 850	~~||||~~	5
850 - 860	|	1
860 - 870	|||	3
870 - 880	|	1
880 - 890	|	1
890 - 900	||||	4
	योग	30

4. (i) 830 - 840 (ii) 10
(iii) 20

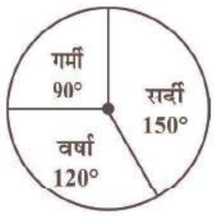


5. (i) 4 - 5 घंटे (ii) 34
(iii) 14

प्रश्नावली 5.2

1. (i) 200 (ii) मनोरंजक (iii) शास्त्रीय - 100, उप-शास्त्रीय - 200, मनोरंजक - 400, लोक - 300

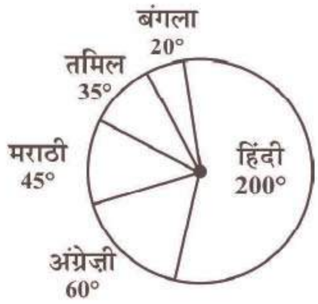
2. (i) सर्दी (ii) सर्दी - 150°, वर्षा - 120°, गर्मी - 90° (iii)



3.

4. (i) हिंदी (ii) 30 अंक (iii) हाँ

5.



प्रश्नावली 5.3

1. (a) परिणाम $\to$ A, B, C, D
   (b) HT, HH, TH, TT [यहाँ HT का अर्थ है कि पहले सिक्के पर चित (Head) और दूसरे सिक्के पर पट (Tail) इत्यादि।]
2. निम्नलिखित प्राप्त करने की घटना के परिणाम :
   (i) (a) 2, 3, 5 (b) 1, 4, 6
   (ii) (a) 6 (b) 1, 2, 3, 4, 5
3. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{4}{7}$
4. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{10}$
5. हरा त्रिज्यखंड प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{3}{5}$; एक ऐसा त्रिज्यखंड प्राप्त करने की प्रायिकता जो नीला नहीं है $= \frac{4}{5}$।
6. एक अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$; एक ऐसी संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता जो अभाज्य नहीं है $= \frac{1}{2}$;
   5 से बड़ी संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$, 5 से बड़ी संख्या प्राप्त नहीं करने की प्रायिकता $= \frac{5}{6}$

प्रश्नावली 6.1

1. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 9
   (vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5
2. ये संख्याएँ निम्नलिखित पर समाप्त होती हैं :
   (i) 7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 2 (v) 0 (vi) 2
   (vii) 0 (viii) 0
3. (i), (iii)
4. 10000200001, 100000020000001
5. 1020304030201, 101010101^2
6. 20, 6, 42, 43
7. (i) 25 (ii) 100 (iii) 144
8. (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$
   (ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$
9. (i) 24 (ii) 50 (iii) 198

प्रश्नावली 6.2

1.	(i) 1024	(ii) 1225	(iii) 7396	(iv) 8649	(v) 5041	(vi) 2116
2.	(i) 6,8,10	(ii) 14,48,50	(iii) 16,63,65	(iv) 18,80,82		

प्रश्नावली 6.3

1. (i) 1, 9 (ii) 4, 6 (iii) 1, 9 (iv) 5

2. (i), (ii), (iii) **3.** 10, 13

4.	(i) 27	(ii) 20	(iii) 42	(iv) 64	(v) 88	(vi) 98
	(vii) 77	(viii) 96	(ix) 23	(x) 90		
5.	(i) 7; 42	(ii) 5; 30	(iii) 7, 84	(iv) 3; 78	(v) 2; 54	(vi) 3; 48
6.	(i) 7; 6	(ii) 13; 15	(iii) 11; 6	(vi) 5; 23	(v) 7; 20	(vi) 5; 18

7. 49 **8.** 45 पंक्तियाँ; प्रत्येक पंक्ति में 45 पौधे **9.** 900 **10.** 3600

प्रश्नावली 6.4

1.	(i) 48	(ii) 67	(iii) 59	(iv) 23	(v) 57	(vi) 37
	(vii) 76	(viii) 89	(ix) 24	(x) 32	(xi) 56	(xii) 30
2.	(i) 1	(ii) 2	(iii) 2	(iv) 3	(v) 3	
3.	(i) 1.6	(ii) 2.7	(iii) 7.2	(iv) 6.5	(v) 5.6	
4.	(i) 2; 20	(ii) 53; 44	(iii) 1; 57	(iv) 41; 28	(v) 31; 63	
5.	(i) 4; 23	(ii) 14; 42	(iii) 4; 16	(iv) 24; 43	(v) 149; 81	

6. 21 m **7.** (a) 10 cm (b) 12 cm

8. 24 पौधे **9.** 16 बच्चे

प्रश्नावली 7.1

1. (ii) और (iv)

2.	(i) 3	(ii) 2	(iii) 3	(iv) 5	(v) 10
3.	(i) 3	(ii) 2	(iii) 5	(iv) 3	(v) 11

4. 20 घनाभ

प्रश्नावली 7.2

1.	(i) 4	(ii) 8	(iii) 22	(iv) 30	(v) 25	(vi) 24
	(vii) 48	(viii) 36	(ix) 56			
2.	(i) असत्य	(ii) सत्य	(iii) असत्य	(iv) असत्य	(v) असत्य	(vi) असत्य
	(vii) सत्य					

3. 11, 17, 23, 32

प्रश्नावली 8.1

1. (a) 1 : 2 (b) 1 : 2000 (c) 1 : 10

2. (a) 75% (b) $66\frac{2}{3}$% **3.** 28% विद्यार्थी **4.** 25 मैच **5.** ₹ 2400

6. 10%, क्रिकेट → 30 लाख; फुटबॉल → 15 लाख; अन्य खेल → 5 लाख

प्रश्नावली 8.2

1. ₹ 1,40,000 **2.** 80% **3.** ₹ 34.80 **4.** ₹ 18342.50

5. 2% लाभ **6.** ₹ 2835 **7.** ₹ 1269.84 की हानि

8. ₹ 14560 **9.** ₹ 2000 **10.** ₹ 5000 **11.** ₹ 1050

प्रश्नावली 8.3

1. (a) मिश्रधन = ₹ 15377.34; चक्रवृद्धि ब्याज = ₹ 4577.34

(b) मिश्रधन = ₹ 22869; ब्याज = ₹ 4869 (c) मिश्रधन = ₹ 70,304, ब्याज = ₹ 7804

(d) मिश्रधन = ₹ 8736.20, ब्याज = ₹ 736.20

(e) मिश्रधन = ₹ 10,816, ब्याज = ₹ 816

2. ₹ 36659.70 **3.** फैबिना ₹ 362.50 अधिक देती है। **4.** ₹ 43.20

5. (ii) ₹ 63600 (ii) ₹ 67416 **6.** (i) ₹ 92400 (ii) ₹ 92610

7. (i) ₹ 8820 (ii) ₹ 441

8. मिश्रधन = ₹ 11576.25, ब्याज = ₹ 1576.25; हाँ

9. ₹ 4913 **10.** (i) लगभग 48980 (ii) 59535 **11.** 531616 (लगभग)

12. ₹ 38640

प्रश्नावली 9.1

1.

	पद	गुणांक
(i)	$5xyz^2$ $-3zy$	5 -3
(ii)	1 x x^2	1 1 1
(iii)	$4x^2y^2$ $-4x^2y^2z^2$ z^2	4 -4 1
(iv)	3 $-pq$ qr $-rp$	3 -1 1 -1
(v)	$\frac{x}{2}$ $\frac{y}{2}$ $-xy$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1
(vi)	$0.3a$ $-0.6ab$ $0.5b$	0.3 -0.6 0.5

2. एकपदी : 1000, pqr

द्विपदी : $x + y$, $2y - 3y^2$, $4z - 15z^2$, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$

त्रिपदी : $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$

वे बहुपद जो उपरोक्त श्रेणियों में नहीं आते हैं: $x + x^2 + x^3 + x^4$, $ab + bc + cd + da$

3. (i) 0 (ii) $ab + bc + ac$ (iii) $-p^2q^2 + 4pq + 9$
(iv) $2(l^2 + m^2 + n^2 + lm + mn + nl)$

4. (a) $8a - 2ab + 2b - 15$ (b) $2xy - 7yz + 5zx + 10xyz$
(c) $p^2q - 7pq^2 + 8pq - 18q + 5p + 28$

प्रश्नावली 9.2

1. (i) $28p$ (ii) $-28p^2$ (iii) $-28p^2q$ (iv) $-12p^4$ (v) 0

2. pq; $50\ mn$; $100\ x^2y^2$; $12x^3$; $12mn^2p$

3.

पहला एकपदी : → / दूसरा एकपदी : ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-10xy$	$6x^3$	$-8x^2y$	$14x^3y$	$-18x^3y^2$
$-5y$	$-10xy$	$25y^2$	$-15x^2y$	$20xy^2$	$-35x^2y^2$	$45x^2y^3$
$3x^2$	$6x^3$	$-15x^2y$	$9x^4$	$-12x^3y$	$21x^4y$	$-27x^4y^2$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-12x^3y$	$16x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-35x^2y^2$	$21x^4y$	$-28x^3y^2$	$49x^4y^2$	$-63x^4y^3$
$-9x^2y^2$	$-18x^3y^2$	$45x^2y^3$	$-27x^4y^2$	$36x^3y^3$	$-63x^4y^3$	$81x^4y^4$

4. (i) $105a^7$ (ii) $64pqr$ (iii) $4x^4y^4$ (iv) $6abc$

5. (i) $x^2y^2z^2$ (ii) $-a^6$ (iii) $1024y^6$ (iv) $36a^2b^2c^2$ (v) $-m^3n^2p$

प्रश्नावली 9.3

1. (i) $4pq + 4pr$ (ii) $a^2b - ab^2$ (iii) $7a^3b^2 + 7a^2b^3$
(iv) $4a^3 - 36a$ (v) 0

2. (i) $ab + ac + ad$ (ii) $5x^2y + 5xy^2 - 25xy$
(iii) $6p^3 - 7p^2 + 5p$
(iv) $4p^4q^2 - 4p^2q^4$ (v) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

3. (i) $8a^{50}$ (ii) $-\frac{3}{5}x^3y^3$ (iii) $-4p^4q^4$ (iv) x^{10}

4. (a) $12x^2 - 15x + 3$; (i) 66 (ii) $\frac{-3}{2}$
(b) $a^3 + a^2 + a + 5$; (i) 5 (ii) 8 (iii) 4

5. (a) $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - pr$ (b) $-2x^2 - 2y^2 - 4xy + 2yz + 2zx$
(c) $5l^2 + 25ln$ (d) $-3a^2 - 2b^2 + 4c^2 - ab + 6bc - 7ac$

प्रश्नावली 9.4

1. (i) $8x^2 + 14x - 15$ (ii) $3y^2 - 28y + 32$ (iii) $6.25l^2 - 0.25m^2$
   (iv) $ax + 5a + 3bx + 15b$ (v) $6p^2q^2 + 5pq^3 - 6q^4$ (vi) $3a^4 + 10a^2b^2 - 8b^4$
2. (i) $15 - x - 2x^2$ (ii) $7x^2 + 48xy - 7y^2$ (iii) $a^3 + a^2b^2 + ab + b^3$
   (iv) $2p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3$
3. (i) $x^3 + 5x^2 - 5x$ (ii) $a^2b^3 + 3a^2 + 5b^3 + 20$ (iii) $t^3 - st + s^2t^2 - s^3$
   (iv) $4ac$ (v) $3x^2 + 4xy - y^2$ (vi) $x^3 + y^3$
   (vii) $2.25x^2 - 16y^2$ (viii) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

प्रश्नावली 9.5

1. (i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $4y^2 + 20y + 25$ (iii) $4a^2 - 28a + 49$
   (iv) $9a^2 - 3a + \frac{1}{4}$ (v) $1.21m^2 - 0.16$ (vi) $b^4 - a^4$
   (vii) $36x^2 - 49$ (viii) $a^2 - 2ac + c^2$ (ix) $\frac{x^2}{4} + \frac{3xy}{4} + \frac{9y^2}{16}$
   (x) $49a^2 - 126ab + 81b^2$
2. (i) $x^2 + 10x + 21$ (ii) $16x^2 + 24x + 5$ (iii) $16x^2 - 24x + 5$
   (iv) $16x^2 + 16x - 5$ (v) $4x^2 + 16xy + 15y^2$ (vi) $4a^4 + 28a^2 + 45$
   (vii) $x^2y^2z^2 - 6xyz + 8$
3. (i) $b^2 - 14b + 49$ (ii) $x^2y^2 + 6xyz + 9z^2$ (iii) $36x^4 - 60x^2y + 25y^2$
   (iv) $\frac{4}{9}m^2 + 2mn + \frac{9}{4}n^2$ (v) $0.16p^2 - 0.04pq + 0.25q^2$ (vi) $4x^2y^2 + 20xy^2 + 25y^2$
4. (i) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (ii) $40x$ (iii) $98m^2 + 128n^2$
   (iv) $41m^2 + 80mn + 41n^2$ (v) $4p^2 - 4q^2$ (vi) $a^2b^2 + b^2c^2$ (vii) $m^4 + n^4m^2$
6. (i) 5041 (ii) 9801 (iii) 10404 (iv) 996004
   (v) 27.04 (vi) 89991 (vii) 6396 (viii) 79.21
   (ix) 99.75
7. (i) 200 (ii) 0.08 (iii) 1800 (iv) 84
8. (i) 10712 (ii) 26.52 (iii) 10094 (iv) 95.06

प्रश्नावली 10.1

1. (a) $\rightarrow$ (iii) $\rightarrow$ (iv) (b) $\rightarrow$ (i) $\rightarrow$ (v) (c) $\rightarrow$ (iv) $\rightarrow$ (ii)
   (d) $\rightarrow$ (v) $\rightarrow$ (iii) (e) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (i)
2. (a) (i) $\rightarrow$ सामने, (ii) $\rightarrow$ पार्श्व, (iii) $\rightarrow$ ऊपरी (b) (i) $\rightarrow$ पार्श्व, (ii) $\rightarrow$ सामने, (iii) $\rightarrow$ ऊपरी
   (c) (i) $\rightarrow$ सामने, (ii) $\rightarrow$ पार्श्व, (iii) $\rightarrow$ ऊपरी (d) (i) $\rightarrow$ सामने, (ii) $\rightarrow$ पार्श्व, (iii) $\rightarrow$ ऊपरी
3. (a) (i) $\rightarrow$ ऊपरी, (ii) $\rightarrow$ सामने, (iii) $\rightarrow$ पार्श्व (b) (i) $\rightarrow$ पार्श्व, (ii) $\rightarrow$ सामने, (iii) $\rightarrow$ ऊपरी
   (c) (i) $\rightarrow$ ऊपरी, (ii) $\rightarrow$ पार्श्व, (iii) $\rightarrow$ सामने (d) (i) $\rightarrow$ पार्श्व, (ii) $\rightarrow$ सामने, (iii) $\rightarrow$ ऊपरी
   (e) (i) $\rightarrow$ सामने, (ii) $\rightarrow$ ऊपरी, (iii) $\rightarrow$ पार्श्व

प्रश्नावली 10.3

1. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ **2.** तभी संभव है जब फलकों की संख्या 4 या उससे अधिक हो।

3. केवल (ii) और (iv)

4. (i) एक प्रिज़्म बेलन का रूप ले लेता है, जब आधार की भुजाओं की संख्या बड़ी तथा और बड़ी होती जाती है।
(ii) एक पिरामिड शंकु का रूप ले लेता है, जब आधार की भुजाओं की संख्या बड़ी तथा और बड़ी होती जाती है।

5. नहीं। यह घनाभ भी हो सकता है। **7.** फलक $\to$ 8, शीर्ष $\to$ 6, किनारे $\to$ 30

8. नहीं

प्रश्नावली 11.1

1. (a) **2.** ₹ 17,875 **3.** क्षेत्रफल = 129.5 m^2; परिमाप = 48 m

4. 45000 टाइलें **5.** (b)

प्रश्नावली 11.2

1. 0.88 m^2 **2.** 7 cm **3.** 660 m^2 **4.** 252 m^2

5. 45 cm^2 **6.** 24 cm^2, 6 cm **7.** ₹ 810 **8.** 140 m

9. 119 m^2 **10.** ज्योति की विधि से क्षेत्रफल $= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times (30 + 15)\ m^2 = 337.5\ m^2$,

कविता की विधि से क्षेत्रफल $= (\frac{1}{2} \times 15 \times 15 + 15 \times 15)\ m^2 = 337.5\ m^2$

11. 80 cm^2, 96 cm^2, 80 cm^2, 96 cm^2

प्रश्नावली 11.3

1. (a) **2.** 144 m **3.** 10 cm **4.** 11 m^2

5. 5 कैन

6. समानता $\to$ दोनों की बराबर ऊँचाइयाँ हैं; अंतर $\to$ एक बेलन है और दूसरा घन है। घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है।

7. 440 m^2 **8.** 322 cm **9.** 1980 m^2 **10.** 704 cm^2

प्रश्नावली 11.4

1. (a) आयतन (b) पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) आयतन

2. बेलन B का आयतन अधिक है। बेलन B का पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है।

3. 5 cm **4.** 450 **5.** 1 m **6.** 49500 L

7. (i) चार गुना (ii) आठ गुना **8.** 30 घंटे

प्रश्नावली 12.1

1. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 32

2. (i) $\frac{1}{(-4)^3}$ (ii) $\frac{1}{2^6}$ (iii) $(5)^4$ (iv) $\frac{1}{(3)^2}$ (v) $\frac{1}{(-14)^3}$

3. (i) 5 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 29 (iv) 1 (v) $\frac{81}{16}$

4. (i) 250 (ii) $\frac{1}{60}$ **5.** $m = 2$ **6.** (i) -1 (ii) $\frac{512}{125}$

7. (i) $\frac{625t^4}{2}$ (ii) 5^5

प्रश्नावली 12.2

1. (i) 8.5×10^{-12} (ii) 9.42×10^{-12} (iii) 6.02×10^{15}
(iv) 8.37×10^{-9} (v) 3.186×10^{10}

2. (i) 0.00000302 (ii) 45000 (iii) 0.00000003
(iv) 1000100000 (v) 5800000000000 (vi) 3614920

3. (i) 1×10^{-6} (ii) 1.6×10^{-19} (iii) 5×10^{-7}
(iv) 1.275×10^{-5} (v) 7×10^{-2}

4. 1.0008×10^2

प्रश्नावली 13.1

1. नहीं

2.

लाल रंग के भाग	1	4	7	12	20
मूल मिश्रण के भाग	8	32	56	96	160

3. 24 भाग **4.** 700 बोतल **5.** 10^{-4} cm; 2 cm **6.** 21 cm

7. (i) 2.25×10^7 क्रिस्टल (ii) 5.4×10^6 क्रिस्टल **8.** 4 cm

9. (i) 6 m (ii) 8 m 75 cm **10.** 168 km

प्रश्नावली 13.2

1. (i), (iv), (v) **2.** $4 \to 25{,}000$; $5 \to 20{,}000$; $8 \to 12{,}500$; $10 \to 10{,}000$; $20 \to 5{,}000$
एक विजेता को दी गई धनराशि विजेताओं की संख्या के व्युत्क्रमानुपाती है।

3. $8 \to 45°$, $10 \to 36°$, $12 \to 30°$ (i) हाँ (ii) $24°$ (iii) 9

4. 6 **5.** 4 **6.** 3 दिन **7.** 15 बॉक्स

8. 49 मशीन **9.** $1\frac{1}{2}$ घंटे **10.** (i) 6 दिन (ii) 6 व्यक्ति **11.** 40 मिनट

प्रश्नावली 14.1

1. (i) 12 (ii) $2y$ (iii) $14pq$ (iv) 1 (v) $6ab$ (vi) $4x$
(vii) 10 (viii) x^2y^2

2. (i) $7(x-6)$ (ii) $6(p-2q)$ (iii) $7a(a+2)$ (iv) $4z(-4+5z^2)$
(v) $10\,lm(2l+3a)$ (vi) $5xy(x-3y)$ (vii) $5(2a^2-3b^2+4c^2)$
(viii) $4a(-a+b-c)$ (ix) $xyz(x+y+z)$ (x) $xy(ax+by+cz)$

3. (i) $(x+8)(x+y)$ (ii) $(3x+1)(5y-2)$ (iii) $(a+b)(x-y)$
(iv) $(5p+3)(3q+5)$ (v) $(z-7)(1-xy)$

प्रश्नावली 14.2

1. (i) $(a+4)^2$ (ii) $(p-5)^2$ (iii) $(5m+3)^2$ (iv) $(7y+6z)^2$
(v) $4(x-1)^2$ (vi) $(11b-4c)^2$ (vii) $(l-m)^2$ (viii) $(a^2+b^2)^2$

2. (i) $(2p-3q)(2p+3q)$ (ii) $7(3a-4b)(3a+4b)$ (iii) $(7x-6)(7x+6)$
(iv) $16x^3(x-3)(x+3)$ (v) $4lm$ (vi) $(3xy-4)(3xy+4)$
(vii) $(x-y-z)(x-y+z)$ (viii) $(5a-2b+7c)(5a+2b-7c)$

3. (i) $x(ax+b)$ (ii) $7(p^2+3q^2)$ (iii) $2x(x^2+y^2+z^2)$
(iv) $(m^2+n^2)(a+b)$ (v) $(l+1)(m+1)$ (vi) $(y+9)(y+z)$
(vii) $(5y+2z)(y-4)$ (viii) $(2a+1)(5b+2)$ (ix) $(3x-2)(2y-3)$

4. (i) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ (ii) $(p-3)(p+3)(p^2+9)$
(iii) $(x-y-z)(x+y+z)[x^2+(y+z)^2]$ (iv) $z(2x-z)(2x^2-2xz+z^2)$
(v) $(a-b)^2(a+b)^2$

5. (i) $(p+2)(p+4)$ (ii) $(q-3)(q-7)$ (iii) $(p+8)(p-2)$

प्रश्नावली 14.3

1. (i) $\frac{x^3}{2}$ (ii) $-4y$ (iii) $6pqr$ (iv) $\frac{2}{3}x^2y$ (v) $-2a^2b^4$

2. (i) $\frac{1}{3}(5x-6)$ (ii) $3y^4-4y^2+5$ (iii) $2(x+y+z)$
(iv) $\frac{1}{2}(x^2+2x+3)$ (v) q^3-p^3

3. (i) $2x-5$ (ii) 5 (iii) $6y$ (iv) xy (v) $10abc$

4. (i) $5(3x+5)$ (ii) $2y(x+5)$ (iii) $\frac{1}{2}r(p+q)$ (iv) $4(y^2+5y+3)$
(v) $(x+2)(x+3)$

5. (i) $y+2$ (ii) $m-16$ (iii) $5(p-4)$ (iv) $2z(z-2)$ (v) $\frac{5}{2}q(p-q)$
(vi) $3(3x-4y)$ (vii) $3y(5y-7)$

प्रश्नावली 14.4

1. $4(x-5)=4x-20$ **2.** $x(3x+2)=3x^2+2x$ **3.** $2x+3y=2x+3y$
4. $x+2x+3x=6x$ **5.** $5y+2y+y-7y=y$ **6.** $3x+2x=5x$

7. $(2x)^2 + 4(2x) + 7 = 4x^2 + 8x + 7$

8. $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$

9. $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

10. (a) $(-3)^2 + 5(-3) + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$ (b) $(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 9 + 15 + 4 = 28$

(c) $(-3)^2 + 5(-3) = 9 - 15 = -6$

11. $(y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9$

12. $(z + 5)^2 = z^2 + 10z + 25$

13. $(2a + 3b)(a - b) = 2a^2 + ab - 3b^2$

14. $(a + 4)(a + 2) = a^2 + 6a + 8$

15. $(a - 4)(a - 2) = a^2 - 6a + 8$

16. $\dfrac{3x^2}{3x^2} = 1$

17. $\dfrac{3x^2+1}{3x^2} = \dfrac{3x^2}{3x^2} + \dfrac{1}{3x^2} = 1 + \dfrac{1}{3x^2}$

18. $\dfrac{3x}{3x+2} = \dfrac{3x}{3x+2}$

19. $\dfrac{3}{4x+3} = \dfrac{3}{4x+3}$

20. $\dfrac{4x+5}{4x} = \dfrac{4x}{4x} + \dfrac{5}{4x} = 1 + \dfrac{5}{4x}$

21. $\dfrac{7x+5}{5} = \dfrac{7x}{5} + \dfrac{5}{5} = \dfrac{7x}{5} + 1$

प्रश्नावली 15.1

1. (a) 36.5° C (b) दोपहर 12 बजे (c) दोपहर 1 बजे, दोपहर 2 बजे

(d) 36.5° C; दोपहर 1 बजे से दोपहर 2 बजे के बीच में x-अक्ष पर स्थित बिंदु दोपहर 1 बजे और दोपहर 2 बजे को दर्शाने वाले बिंदुओं से समदूरस्थ है, इसलिए यह दोपहर 1 बजकर 30 मिनट का समय प्रदर्शित करेगा। इसी प्रकार, y-अक्ष पर 36° C और 37° C के बीच का बिंदु 36.5° C को प्रदर्शित करेगा।

(e) प्रात: 9 बजे से प्रात: 10 बजे तक, प्रात: 10 बजे से प्रात: 11 बजे तक, दोपहर 2 बजे से दोपहर 3 बजे तक

2. (a) (i) ₹ 4 करोड़ (ii) ₹ 8 करोड़

(b) (i) ₹ 7 करोड़ (ii) 8.5 करोड़ (लगभग)

(c) ₹ 4 करोड़ (d) 2005

3. (a) (i) 7 cm (ii) 9 cm

(b) (i) 7 cm (ii) 10 cm

(c) 2 cm (d) 3 cm (e) दूसरा सप्ताह (f) पहला सप्ताह

(g) दूसरे सप्ताह के अंत में

4. (a) मंगल, शुक्र, रवि (b) 35° C (c) 15° C (d) बृहस्पतिवार

6. (a) 4 इकाई = 1 घंटा (b) $3\frac{1}{2}$ घंटे (c) 22 km

(d) हाँ, यह आलेख के क्षैतिज भाग से दर्शित होता है। (प्रात: 10 बजे से प्रात: 10:30 तक)

(e) प्रात: 8 बजे और प्रात: 9 बजे के बीच में

7. (iii) संभव नहीं है।

प्रश्नावली 15.2

1. (a) और (b) में बिंदु एक रेखा पर स्थित हैं। (c) में बिंदु एक रेखा पर स्थित नहीं हैं।
2. यह रेखा x-अक्ष को (5, 0) और y-अक्ष को (0, 5) पर काटेगी।
3. O(0, 0), A(2, 0), B(2, 3), C(0, 3), P(4, 3), Q(6, 1), R(6, 5), S(4, 7), K(10, 5), L(7, 7), M(10, 8)
4. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य

प्रश्नावली 15.3

1. (b) (i) 20 km (ii) प्रातः 7.30 बजे (c) (i) हाँ (ii) ₹ 200 (iii) ₹ 3500
2. (a) हाँ (b) नहीं

प्रश्नावली 16.1

1. A = 7, B = 6
2. A = 5, B = 4, C = 1
3. A = 6
4. A = 2, B = 5
5. A = 5, B = 0, C = 1
6. A = 5, B = 0, C = 2
7. A = 7, B = 4
8. A = 7, B = 9
9. A = 4, B = 7
10. A = 8, B = 1

प्रश्नावली 16.2

1. $y = 1$
2. $z = 0$ या 9
3. $z = 0, 3, 6$ या 9
4. 0, 3, 6 या 9

केवल खेल के लिए

1. **पाइथागोरियन त्रिकों के बारे में कुछ और**

   हम पाइथागोरियन त्रिकों (Pythagorean triplets) को एक प्रकार $2m, m^2 - 1, m^2 + 1$ से लिखना देख चुके हैं। एक पाइथागोरियन त्रिक a, b, c का अर्थ $a^2 + b^2 = c^2$ है। यदि हम दो प्राकृत संख्याओं m और n का प्रयोग करें $(m > n)$ तथा $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ और $c = m^2 + n^2$ लें, तो हम देख सकते हैं कि $c^2 = a^2 + b^2$ है। इस प्रकार, $m > n$ के साथ, हम m और n के विभिन्न मानों के लिए प्राकृत संख्याएँ a, b, c ऐसी बना सकते हैं कि वे पाइथागोरियन त्रिक बनाएँ।

   उदाहरणार्थ, $m = 2, n = 1$ लीजिए।

   तब, $a = m^2 - n^2 = 3$, $b = 2mn = 4$, $c = m^2 + n^2 = 5$, एक पाइथागोरियन त्रिक है। (इसकी जाँच कीजिए!)

   $m = 3, n = 2$, के लिए हम प्राप्त करते हैं।

   $a = 5, b = 12, c = 13$ जो पुनः एक पाइथागोरियन त्रिक है।

   m और n के कुछ और मान लीजिए तथा इस प्रकार के और अधिक त्रिक जनित कीजिए।

2. जब पानी जमता है, तो उसके आयतन में 4% की वृद्धि हो जाती है। 221 cm^3 बर्फ बनाने के लिए कितने पानी की आवश्यकता होगी?
3. यदि चाय का मूल्य 20% बढ़ जाए, तो उसकी खपत में कितने प्रतिशत की कमी की जाए कि उस पर होने वाले व्यय में कोई वृद्धि न हो?

4. समारोही पुरस्कार (Ceremony Awards) 1958 में प्रारंभ हुए। तब पुरस्कार जीतने के लिए 28 श्रेणियाँ थीं। 1993 में 81 श्रेणियाँ थीं।

(i) 1958 में दिए पुरस्कारों की संख्या 1993 के पुरस्कारों की संख्या का कितने प्रतिशत है?

(ii) 1993 में दिए पुरस्कारों की संख्या 1958 के पुरस्कारों की संख्या का कितने प्रतिशत है?

5. भँवरों के झुंड में से $\frac{1}{15}$ वाँ भाग **कदंब** के फूल पर जा बैठा, $\frac{1}{3}$ सिलिंघिरी के फूल पर तथा इन दो संख्याओं के अंतर का तिगुना उड़कर **कुटज** के पुष्प पर जा बैठा। तब झुंड में केवल दस भँवरे ही रह गए। झुंड में प्रारंभ में कितने भँवरे थे? [ध्यान दीजिए कि कदंब, सिलिघिंरी और कुटज फूलों के पेड़ हैं। यह समस्या बीजगणित के एक प्राचीन भारतीय ग्रंथ में से ली गई है।]

6. किसी वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, शेखर ने वर्ग के क्षेत्रफल का सूत्र प्रयोग किया, जबकि उसके मित्र मरूफ ने वर्ग के परिमाप का सूत्र प्रयोग किया। आश्चर्य की बात है कि दोनों के उत्तर संख्यात्मक रूप से एक ही थे। मुझे बताइए कि जिस वर्ग पर वे कार्य कर रहे थे उसकी भुजा की इकाइयों की संख्या क्या है।

7. एक वर्ग का क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से अपनी भुजा के 6 गुने से कम है। ऐसे कुछ वर्गों की सूची बनाइए जिनमें ऐसा होता है।

8. क्या यह सभंव है कि एक लंब वृत्तीय बेलन का आयतन संख्यात्मक रूप से उसके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर होगा? यदि हाँ, तो बताइए कब।

9. लीला ने अपने जन्म दिन पर कुछ मित्रों को चाय पर आमंत्रित किया। उसकी माँ ने परोसने के लिए एक मेज पर कुछ प्लेट और कुछ पूरियाँ रख दीं। यदि लीला प्रत्येक प्लेट में 4 पूरियाँ रखती है, तो एक प्लेट खाली रह जाती है। यदि वह प्रत्येक प्लेट में 3 पूरियाँ रखती है, तो 1 पूरी बच जाती है। मेज पर रखी हुई प्लेटों और पूरियों की संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

10. क्या ऐसी कोई संख्या है, जो अपने घन के बराबर है, परंतु अपने वर्ग के बराबर नहीं है? यदि हाँ, तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

11. संख्याओं 1 से 20 तक को एक पंक्ति में इस प्रकार व्यवस्थित कीजिए कि किन्हीं दो आसन्न संख्याओं का योग एक पूर्ण वर्ग हो।

उत्तरमाला

2. $212\frac{1}{2}$ cm^3 **3.** $16\frac{2}{3}\%$ **4.** (i) 34.5%   (ii) 289%

5. 150

6. 4 इकाइयाँ

7. भुजा = 1, 2, 3, 4, 5 इकाइयाँ

8. हाँ जब त्रिज्या = 2 इकाइयाँ

9. पूरियों की संख्या = 16, प्लेटों की संख्या = 5

10. – 1

11. एक तरीका यह है, 1, 3, 6, 19, 17, 8 (1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9 इत्यादि) कुछ और तरीकों से प्रयास कीजिए।