પ્રકરણ 2

સંબંધ અને વિધેયો

❖*Mathematics is the indispensable instrument of all physical research. – BERTHELOT* ❖

2.1 પ્રાસ્તાવિક

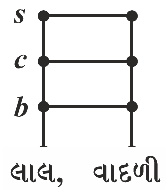
ગણિતશાસ્ત્રમાં મોટેભાગે બદલાતી રાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ એટલે કે ભાત શોધવામાં આવે છે. આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણે પિતા-પુત્ર, ભાઈ-બહેન, શિક્ષક-વિદ્યાર્થી જેવા સંબંધોનું અવલોકન કરીએ છીએ. ગણિતશાસ્ત્રમાં પણ આપણે સંખ્યાબંધ સંબંધો જેવા કે, 'સંખ્યા m, સંખ્યા n કરતા નાની છે', 'રેખા l એ રેખા m ને સમાંતર છે', 'ગણ A એ ગણ B નો ઉપગણ છે' જોવા મળે છે. આ બધામાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે સંબંધ ચોક્કસ ક્રમમાં વસ્તુઓની ક્રમયુક્ત જોડનો સમાવેશ કરે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે બે ગણના ઘટકોને કેવી રીતે સાંકળવા એ જોઈશું અને ક્રમયુક્ત જોડના બે ઘટકો વચ્ચે સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરીશું. અંતમાં આપણે વિધેય તરીકે ઓળખાતા અમુક સંબંધોનો અભ્યાસ કરીશું. વિધેયનો ખ્યાલ એ ગણિતમાં બહુ મહત્ત્વનો ખ્યાલ છે, કારણ કે તે એક ચલ રાશિની બીજી ચલ રાશિ સાથે ગાણિતિક દૃષ્ટિએ ચોક્કસ સંગતતા આપે છે.

G. W. Leibnitz
(1646–1716)

2.2 ગણોનો કાર્તેઝિય ગુણાકાર *(Cartesian Product of Sets)*

ધારો કે A બે રંગોનો ગણ છે અને B ત્રણ વસ્તુઓનો ગણ છે. ધારો કે A = {લાલ, વાદળી} અને

B = {b, c, s} અહીં b, c અને s અનુક્રમે બેગ, કોટ અને શર્ટ દર્શાવે છે. આ બંને ગણોમાંથી રંગ અને વસ્તુની કેટલી ક્રમયુક્ત જોડ બનાવી શકાય ? એક ચોક્કસ ભાતમાં આગળ વધીએ તો જોઈ શકાય છે કે 6 અલગ અલગ ક્રમયુક્ત જોડ નીચે પ્રમાણે બનશે :



આકૃતિ 2.1

(લાલ, b), (લાલ, c), (લાલ, s), (વાદળી, b), (વાદળી, c), (વાદળી, s).

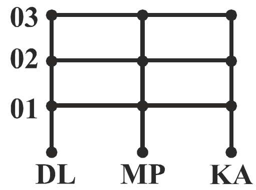
આમ, આપણને 6 ભિન્ન ક્રમયુક્ત જોડ મળશે. (આકૃતિ 2.1).

આગળના ધોરણમાં આપણે ક્રમયુક્ત જોડ વિશેનો અભ્યાસ કર્યો તે યાદ કરીએ. કોઈ ગણ P અને ગણ Q ના ઘટકોની કોઈપણ ક્રમયુક્ત જોડને નાના કૌંસમાં દર્શાવાય છે અને તે ક્રમયુક્ત જોડમાં ચોક્કસ ક્રમ અગત્યનો છે. ઉદાહરણ તરીકે (p,q) માટે $p \in$ P અને $q \in$ Q . આ અવલોકન આપણને નીચેની વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

વ્યાખ્યા 1 *આપેલ અરિક્ત ગણો P અને Q નો કાર્તેઝિય ગુણાકાર $P \times Q$ એ P અને Q ની તમામ ક્રમયુક્ત જોડનો ગણ છે. આમ,*

$$P \times Q = \{ (p, q) : p \in P, q \in Q \}$$

જો P અને Q પૈકી કોઈપણ ગણ ખાલીગણ હોય, તો P × Q પણ ખાલીગણ થાય, $P \times Q = \phi$



આકૃતિ 2.2

ઉપર દર્શાવેલ ઉદાહરણ માટે,

A × B = {(લાલ, b), (લાલ, c), (લાલ, s), (વાદળી, b), (વાદળી, c), (વાદળી, s)}.

હવે નીચે દર્શાવેલ ગણો વિશે વિચારતાં,

A = {DL, MP, KA}, જ્યાં DL, MP, KA અનુક્રમે દિલ્લી, મધ્યપ્રદેશ અને કર્ણાટક દર્શાવે છે અને B = {01, 02, 03} અનુક્રમે દિલ્લી, મધ્યપ્રદેશ અને કર્ણાટક દ્વારા ગાડીઓ માટે આપેલ લાઈસન્સ નંબર પ્લેટના સાંકેતિક અંકો દર્શાવે છે. હવે, ત્રણે રાજ્યો દિલ્લી, મધ્યપ્રદેશ અને કર્ણાટક લાઈસન્સ નંબર-પ્લેટના સંકેતો માટે એવું નક્કી થાય કે પ્રથમ ઘટક ગણ A માંથી આવે અને દ્વિતીય ઘટક B માંથી લેવાય તો આપેલ ગણમાંથી આવી કેટલી ક્રમયુક્ત જોડ બનશે? (આકૃતિ 2.2)

પ્રાપ્ત ક્રમયુક્ત જોડો : (DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03) છે.

હવે ગણ A અને ગણ B નો કાર્તેઝિય ગુણાકાર આ પ્રમાણે થશે.

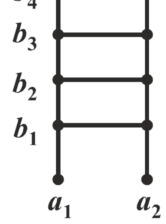
A × B = {(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)}.

અહીં, સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે, આ કાર્તેઝિય ગુણાકારમાં 9 ક્રમયુક્ત જોડ છે, કેમ કે ગણ A અને ગણ B બંનેમાં ત્રણ-ત્રણ ઘટકો છે. તેથી આપણને 9 શક્ય જોડ મળે છે. અહીં આપણે નોંધીશું કે જે ક્રમમાં ક્રમયુક્ત જોડ બને છે તે અગત્યનો છે.

ઉદાહરણ તરીકે ક્રમયુક્ત જોડ (DL, 01) અને ક્રમયુક્ત જોડ (01, DL) સમાન નથી.

અંતમાં સમજૂતી માટે ગણ A= {a_1, a_2} અને ગણ B = {b_1, b_2, b_3, b_4} લઈએ.(આકૃતિ 2.3)

A × B = {(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)}.



આકૃતિ 2.3

જો ગણ A અને ગણ B એ વાસ્તવિક સંખ્યાગણના ઉપગણો હોય, તો આ 8 ક્રમયુક્ત જોડો સમતલમાં બિંદુઓનાં ભિન્ન સ્થાન દર્શાવશે અને તે પરથી સ્પષ્ટ થશે કે (a_1, b_2) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ એ (b_2, a_1) દ્વારા દર્શાવાતા બિંદુથી ભિન્ન છે.

નોંધ : (i) કોઈ બે ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક સમાન હોય અને બીજા ઘટક પણ સમાન હોય, તો અને તો જ તે બે ક્રમયુક્ત જોડ સમાન થાય.

(ii) જો ગણ A ના ઘટકોની સંખ્યા p અને ગણ B ના ઘટકોની સંખ્યા q હોય, તો $A \times B$ ના ઘટકોની સંખ્યા pq થાય. જો $n(A) = p$ અને $n(B) = q$ હોય તો $n(A \times B) = pq$.

(iii) જો A અને B અરિક્ત ગણો હોય અને A અને B પૈકી કોઈ ગણ અનંત ગણ હોય, તો $A \times B$ પણ અનંત ગણ થાય.

(iv) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$. અહીં, (a, b, c) ને *ક્રમયુક્ત ત્રય* અથવા *ત્રિપુટી (triplet)* અથવા ત્રેલું કહે છે.

ઉદાહરણ 1: જો $(x + 1, y - 2) = (3,1)$, તો x અને y ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં ક્રમયુક્ત જોડ સમાન છે, તેથી ક્રમવાર ઘટકો સમાન થાય.

$\therefore$ $x + 1 = 3$ અને $y - 2 = 1$.

ઉકેલતાં, $x = 2$ અને $y = 3$.

ઉદાહરણ 2 : જો $P = \{a, b, c\}$ અને $Q = \{r\}$, તો $P \times Q$ અને $Q \times P$ શોધો.

શું આ બે કાર્તેઝિય ગુણાકાર સમાન છે ?

ઉકેલ : કાર્તેઝિય ગુણાકારની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$P \times Q = \{(a, r), (b, r), (c, r)\}$ અને $Q \times P = \{(r, a), (r, b), (r, c)\}$

હવે, ક્રમિક જોડની સમાનતાની વ્યાખ્યા પ્રમાણે ક્રમયુક્ત જોડ (a, r) અને ક્રમયુક્ત જોડ (r, a) સમાન નથી. આથી આ પરથી કહી શકાય કે, $P \times Q \neq Q \times P$.

તેમ છતાં બંને ગણમાં ઘટકોની સંખ્યા સમાન થશે.

ઉદાહરણ 3 : જો $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ અને $C = \{4, 5, 6\}$, તો નીચેના ગણ શોધો.

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$

ઉકેલ : (i) બે ગણોના છેદગણની વ્યાખ્યા પ્રમાણે $(B \cap C) = \{4\}$.

તેથી, $A \times (B \cap C) = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$.

(ii) હવે $(A \times B) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$

અને $(A \times C) = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

આથી, $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.

(iii) અહીં, $(B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}$. આથી,

$\therefore$ $A \times (B \cup C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

(iv) ગણો A × B અને A × C માટે ઉપરના ભાગ (ii) માંથી પરિણામોનો ઉપયોગ કરતાં,

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}.$$

ઉદાહરણ 4 : જો $P = \{1, 2\}$, તો $P \times P \times P$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $P \times P \times P = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$.

ઉદાહરણ 5 : જો $\mathbf{R}$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ હોય, તો $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ અને $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ શું દર્શાવશે ?

ઉકેલ : કાર્તેઝિય ગુણાકાર $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ એ ગણ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ દર્શાવે છે. તે દ્વિપરિમાણીય યામ-સમતલના પ્રત્યેક બિંદુનું નિરૂપણ દર્શાવે છે અને કાર્તેઝિય ગુણાકાર $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$ દર્શાવે છે. તે ત્રિપરિમાણીય અવકાશના પ્રત્યેક બિંદુનું નિરૂપણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 6 : જો $A \times B = \{(p, q), (p, r), (m, q), (m, r)\}$, તો A અને B શોધો.

ઉકેલ : A = પ્રથમ ઘટકોનો ગણ = $\{p, m\}$

B = બીજા ઘટકોનો ગણ = $\{q, r\}$.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. જો $\left(\frac{x}{3} + 1, y - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, તો x અને y શોધો.

2. જો ગણ A માં 3 ઘટકો હોય અને ગણ $B = \{3, 4, 5\}$, તો $(A \times B)$ ના ઘટકોની સંખ્યા શોધો.

3. જો $G = \{7, 8\}$ અને $H = \{5, 4, 2\}$, તો $G \times H$ અને $H \times G$ શોધો.

4. નીચે આપેલાં વિધાનોમાંથી કયું વિધાન સત્ય છે અને કયું વિધાન અસત્ય છે તે જણાવો તથા અસત્ય વિધાન સત્ય બને તે રીતે ફરી લખો :

   (i) જો $P = \{m, n\}$ અને $Q = \{n, m\}$, તો $P \times Q = \{(m, n), (n, m)\}$.

   (ii) જો A અને B અરિક્ત ગણો હોય, તો જ્યાં $x \in A$ તથા $y \in B$ હોય તેવી તમામ ક્રમયુક્ત જોડો (x, y) થી બનતો અરિક્ત ગણ $A \times B$ છે.

   (iii) જો $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, તો $A \times (B \cap \phi) = \phi$.

5. જો $A = \{-1, 1\}$, તો $A \times A \times A$ મેળવો.

6. જો $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$, તો A અને B શોધો.

7. ધારો કે A = {1, 2}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {5, 6} અને D = {5, 6, 7, 8}, તો નીચેનાં પરિણામો ચકાસો :

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (ii) $A \times C$ એ $B \times D$ નો ઉપગણ છે.

8. જો A = {1, 2} અને B = {3, 4} તો $A \times B$ લખો. $A \times B$ ને કેટલા ઉપગણો હશે ? તે તમામ ઉપગણોની યાદી બનાવો.

9. જો $n(A) = 3$ અને $n(B) = 2$ હોય તેવા બે ગણો A અને B હોય અને ભિન્ન ઘટકો x, y અને z માટે $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$ એ $A \times B$ ના ઘટકો હોય તો A અને B શોધો.

10. જો કાર્તેઝિય ગુણાકાર $A \times A$ ના ઘટકોની સંખ્યા 9 હોય અને તેમાંના બે ઘટકો (–1, 0) અને (0,1) હોય, તો A શોધો તથા $A \times A$ ના બાકીના ઘટકો લખો.

2.3 સંબંધ *(Relation)*

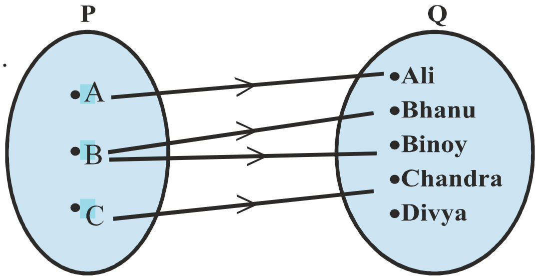
બે ગણો P = {A, B, C} અને Q = {Ali, Bhanu, Binoy, Chandra, Divya}નો વિચાર કરીએ. $P \times Q$ ના કાર્તેઝિય ગુણાકારમાં 15 ક્રમયુક્ત જોડ હશે. તેની યાદી આ પ્રમાણે થશે. P × Q = {(A, Ali), (A,Bhanu), (A, Binoy), ..., (C, Divya)}.

હવે આપણે $P \times Q$ ના એક ઉપગણ R ને P થી Q ના એક સંબંધ તરીકે દર્શાવીએ. કોઈપણ ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) નો પ્રથમ ઘટક x એ R દ્વારા બીજા ઘટક y સાથે સંબંધ ધરાવે છે.

ધારો કે R = {(x, y) : x એ નામ y નો પ્રથમ અક્ષર છે, $x \in P$, $y \in Q$}.

આમ, R = {(A, Ali), (B, Bhanu), (B, Binoy), (C, Chandra)}

આ સંબંધને વેન-આકૃતિ દ્વારા દર્શાવીએ.



(કિરણ આકૃતિ - *arrow diagram*) **આકૃતિ 2.4.**

વ્યાખ્યા 2 *અરિક્ત ગણો A અને B માટે $A \times B$ ના કોઈપણ ઉપગણને A થી B નો **સંબંધ** કહે છે. $A \times B$ નો ઉપગણ ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક x અને બીજા ઘટક y વચ્ચે કોઈ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરવાથી મળે છે. બીજા ઘટકને પ્રથમ ઘટકનું **પ્રતિબિંબ** કહે છે.*

વ્યાખ્યા 3 *જો R એ A થી B નો સંબંધ હોય, તો R ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટકથી બનતા ગણને R નો **પ્રદેશ** (Domain) કહે છે.*

વ્યાખ્યા 4 *જો R એ A થી B નો સંબંધ હોય તો, R ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના બીજા ઘટકથી બનતા ગણને R નો **વિસ્તાર** (Range) કહે છે. ગણ B ને R નો **સહપ્રદેશ** (Codomain) કહે છે. અહીં, જોઈ શકાય છે કે વિસ્તાર $\subseteq$ સહપ્રદેશ.*

નોંધ : (i) સંબંધને યાદીના સ્વરૂપમાં કે ગુણધર્મના સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

(ii) કિરણ આકૃતિ એ સંબંધનું દૃશ્ય નિરૂપણ છે.

ઉદાહરણ 7 : જો A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, R = {(x, y) : $y = x + 1$ } થાય તે રીતે સંબંધ R, A થી A પર વ્યાખ્યાયિત છે, તો

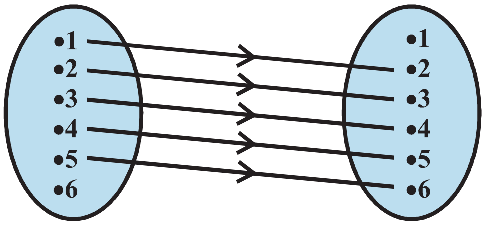
(i) આ સંબંધને કિરણ આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

(ii) R નો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.

ઉકેલ : (i) સંબંધની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$.

આ સંબંધને કિરણ આકૃતિ દ્વારા આકૃતિ 2.5 માં દર્શાવેલ છે.



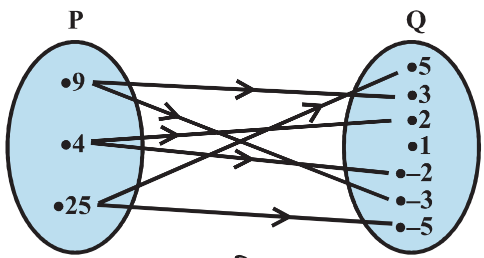
આકૃતિ 2.5

(ii) આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

પ્રદેશ = {1, 2, 3, 4, 5,}

વિસ્તાર = {2, 3, 4, 5, 6}, સહપ્રદેશ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 2.6 માં P થી Q નો સંબંધ દશાવેલ છે. આ સંબંધને (i) ગુણધર્મની રીતે (ii) યાદીની રીતે લખો. તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ?



આકૃતિ 2.6

ઉકેલ: અહીં સ્પષ્ટપણે જોઈ શકાય છે કે, સંબંધ R "x એ y નો વર્ગ છે".

(i) ગુણધર્મની રીતે, $R = \{(x, y) : x$ એ y નો વર્ગ છે, $x \in P,\ y \in \mathbf{Q}\}$

(ii) યાદીની રીતે, $R = \{(9, 3), (9, -3), (4, 2), (4, -2), (25, 5), (25, -5)\}$

આ સંબંધનો પ્રદેશ {4, 9, 25} છે.

આ સંબંધનો વિસ્તાર {– 2, 2, –3, 3, –5, 5} છે.

અહી, જોઈ શકાય છે Q નો ઘટક 1 ગણ P ના કોઈપણ ઘટક સાથે સંકળાયો નથી.

ગણ Q એ સંબંધનો સહપ્રદેશ છે.

નોંધ ગણ A થી ગણ B પરના કુલ સંબંધોની સંખ્યા એ A × B ના ઉપગણોની સંખ્યા બરાબર થાય. જો $n(A) = p$ અને $n(B) = q$ હોય, તો $n(A \times B) = pq$ અને તેના સંબધોની સંખ્યા 2^{pq} થાય.

ઉદાહરણ 9 : જો A = {1, 2} અને B = {3, 4} તો A થી B ના સંબંધની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

$n(A\times B) = 4$, A×B ના ઉપગણોની સંખ્યા 2^4 થાય.

આમ, A થી B ના સંબંધોની સંખ્યા 2^4 થાય.

નોંધ : જો R એ A થી A નો સંબંધ હોય, તો સંબંધ R ને A પરનો સંબંધ પણ કહેવાય છે.

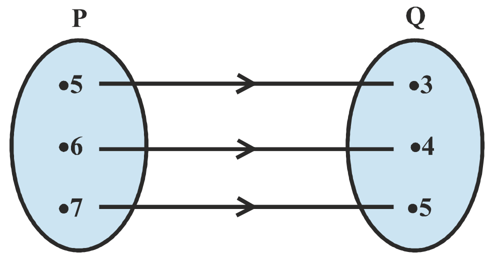
સ્વાધ્યાય 2.2

1. $A = \{1, 2, 3,...,14\}$. $R = \{(x, y) : 3x - y = 0$, જ્યાં $x, y \in A\}$. જો R એ A થી A નો સંબંધ હોય, તો R નો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

2. $R = \{(x, y) : y = x + 5, x$ એ 4 થી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, $x, y \in \mathbf{N}\}$ થાય તે રીતે એક સંબંધ $\mathbf{N}$ પર વ્યાખ્યાયિત છે. R ને યાદીની રીતે લખો. R નો પ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.

3. $A = \{1, 2, 3, 5\}$ અને $B = \{4, 6, 9\}$. $R = \{(x, y)$: x અને y નો તફાવત અયુગ્મ સંખ્યા છે; $x \in A, y \in B\}$ થાય તે રીતે સંબંધ A થી B પર વ્યાખ્યાયિત છે. R ને યાદીની રીતે લખો.

4. આકૃતિ 2.7 માં P થી Q નો સંબંધ દર્શાવેલ છે. આ સંબંધને (i) ગુણધર્મની રીતે (ii) યાદીની રીતે લખો. તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ?



આકૃતિ 2.7

5. જો $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
$R = \{(a, b)$: $a, b \in A$, b એ a વડે વિભાજ્ય છે.$\}$ થાય તે રીતે સંબંધ R એ A પર વ્યાખ્યાયિત છે,
(i) R ને યાદીની રીતે લખો.
(ii) R નો પ્રદેશ મેળવો.
(iii) R નો વિસ્તાર મેળવો.

6. $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ થાય તે રીતે વ્યાખ્યાયિત સંબંધનો પ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.

7. સંબંધ $R = \{(x, x^3) : x$ એ 10 કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યા છે$\}$ ને યાદીના સ્વરૂપમાં લખો.

8. જો $A = \{x, y, z\}$ અને $B = \{1, 2\}$ તો A થી B ના સંબંધોની સંખ્યા શોધો.

9. R એ $\mathbf{Z}$ પર $R = \{(a,b)$: $a, b \in \mathbf{Z}$, $a - b$ એ પૂર્ણાંક છે.$\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. R નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

2.4 વિધેયો (*Functions*)

હવે આ પરિચ્છેદમાં આપણે *વિધેય (function)* તરીકે પ્રચલિત એક વિશિષ્ટ સંબંધનો અભ્યાસ કરીશું. વિધેયની સંકલ્પના ગણિતશાસ્ત્રના પાયાની વિષયવસ્તુમાંની એક સંકલ્પના છે. આપણે વિધેયને નિયમ તરીકે વિચારી શકીએ. આ નિયમની મદદથી આપણે આપેલા ઘટકોમાંથી નવા ઘટકો શોધી શકીએ. વિધેયને દર્શાવવા માટે સંગતતા જેવો શબ્દ પણ વપરાય છે.

વ્યાખ્યા 5 *અરિક્ત ગણ A અને ગણ B માટે, સંબંધ f દ્વારા ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટકને સંગત ગણ B માં અનન્ય પ્રતિબિંબ મળે તો આ સંબંધ f ને A થી B નું વિધેય કહે છે.*

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો જેનો પ્રદેશ અરિક્ત ગણ A હોય અને જે સંબંધની કોઈ પણ બે ભિન્ન ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક સમાન ન હોય તેવા અરિક્ત ગણ A થી અરિક્ત ગણ B ના સંબંધને વિધેય કહે છે.

જો f એ A થી B નું વિધેય હોય અને, $(a, b) \in f$, તો $f(a) = b$. અહીં b એ f દ્વારા મળતું a નું પ્રતિબિંબ કહેવાય છે અને a ને f દ્વારા b નું પૂર્વ પ્રતિબિંબ કહેવાય છે.

A થી B પરના વિધેયને $f: A \rightarrow B$ લખાય છે. અગાઉ જોયેલાં ઉદાહરણો પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ તો, સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે ઉદાહરણ 7 માં આપેલ સંબંધ એ વિધેય નથી. કારણ કે, ઘટક 6 ને કોઈ પ્રતિબિંબ નથી.

ફરી, ઉદાહરણ 8 માં દર્શાવેલ સંબંધ પણ વિધેય નથી. કારણ કે, પ્રદેશના અમુક ઘટકોને એક કરતાં વધુ પ્રતિબિંબ છે. તે જ પ્રમાણે ઉદાહરણ 9 નો સંબંધ પણ વિધેય નથી (કેમ ?). નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આપણે બીજા ઘણા સંબંધ જોઈશું. તે પૈકી કેટલાક વિધેય છે અને કેટલાક વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 10 : **N** એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે અને તેની પર વ્યાખ્યાયિત કોઈ સંબંધ R એવો છે કે $R = \{(x, y) : y = 2x,\ x, y \in \mathbf{N}\}$ તો R નો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો. શું આ સંબંધ વિધેય છે ?

ઉકેલ : અહીં, સંબંધ R નો પ્રદેશ ગણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણ **N** છે, સહપ્રદેશ પણ **N** છે અને વિસ્તાર એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

અહીં, પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n ને એક અને માત્ર એક પ્રતિબિંબ છે. આમ, આ સંબંધ વિધેય છે.

ઉદાહરણ 11 : નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આપેલ સંબંધ ચકાસો અને પ્રત્યેક સંબંધ વિધેય છે કે નહિ તે કારણ આપી જણાવો.

(i) $R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$,

(ii) $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

(iii) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$

ઉકેલ : (i) અહીં 2, 3 અને 4 એ R ના પ્રદેશના ઘટકો છે અને તે દરેક ઘટકને અનુરૂપ અનન્ય પ્રતિબિંબ મળે છે. તેથી આ સંબંધ R એ વિધેય છે.

(ii) અહીં, R ના પ્રદેશના એક ઘટક 2 ને બે પ્રતિબિંબ 2 અને 4 મળે છે. તેથી આ સંબંધ વિધેય નથી.

(iii) અહીં, પ્રદેશના પ્રત્યેક ઘટકને અનુરૂપ એક અને માત્ર એક પ્રતિબિંબ છે તેથી આ સંબંધ વિધેય છે.

વ્યાખ્યા 6 : *જો કોઈ વિધેયનો વિસ્તાર R કે R નો કોઈ ઉપગણ હોય તો તે વિધેયને* ***વાસ્તવિક કિંમતોનું વિધેય*** *કહે છે અને જો તેનો પ્રદેશ પણ R અથવા R નો કોઈ ઉપગણ હોય, તો તેને* ***વાસ્તવિક વિધેય*** *કહે છે.*

ઉદાહરણ 12 : **N** એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. $f(x) = 2x + 1$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય છે. આ વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

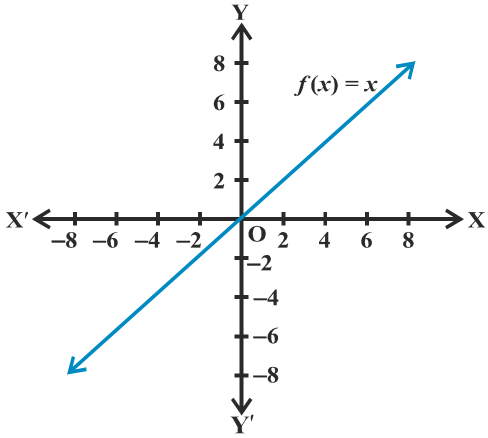
x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = ...$	$f(2) = ...$	$f(3) = ...$	$f(4) = ...$	$f(5) = ...$	$f(6) = ...$	$f(7) = ...$

ઉકેલ : પૂર્ણ કરેલ કોષ્ટક નીચે મુજબ છે :

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = 3$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$	$f(4) = 9$	$f(5) = 11$	$f(6) = 13$	$f(7) = 15$

2.4.1 કેટલાંક વિધેયો અને તેમના આલેખો :

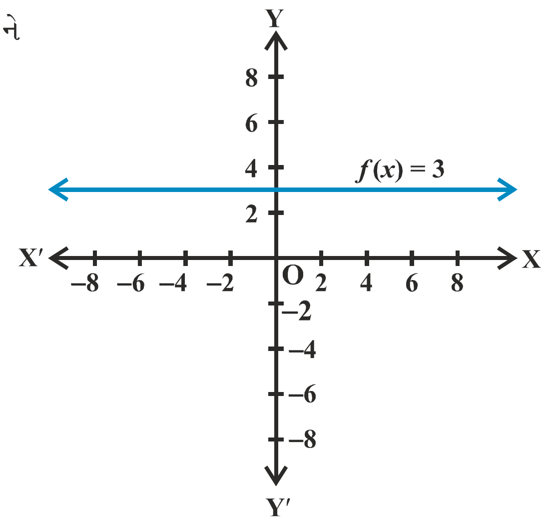
(i) **તદેવ વિધેય** (***Identity Function***) : જો **R** એ વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ હોય, તો પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x) = x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેયને તદેવ વિધેય કહેવાય. આ વિધેય f નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર **R** છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.8 માં દર્શાવેલ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા થશે.



આકૃતિ 2.8

(ii) **અચળ વિધેય** (***Constant Function***) : c કોઈ અચળ હોય તથા પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે $y = f(x) = c$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ને અચળ વિધેય કહે છે. અહીં, f નો પ્રદેશ **R** અને વિસ્તાર $\{c\}$ છે.

અચળ વિધેયનો આલેખ X-અક્ષને સમાંતર રેખા થાય. ઉદાહરણ તરીકે જો પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે $f(x)=3$ તો આ આલેખ આકૃતિ 2.9 માં દર્શાવેલ રેખા થશે.



આકૃતિ 2.9

(iii) **બહુપદી વિધેય** (***Polynomial Function***): જો પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, ને n ઘાતનું બહુપદી વિધેય કહે છે. અહીં, n એ અનૃણ પૂર્ણાંક છે અને $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ તથા $a_n \neq 0$. $f(x) = x^3 - x^2 + 2$, અને $g(x) = x^4 + \sqrt{2}x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો બહુપદી વિધેયનાં ઉદાહરણો છે, જ્યારે $h(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય બહુપદી વિધેય નથી. (કેમ ?)

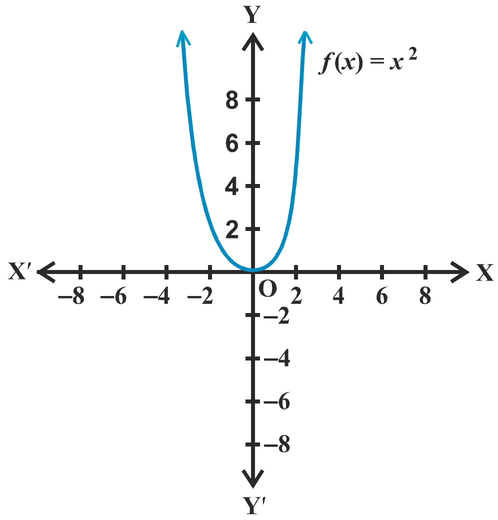
ઉદાહરણ 13 : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ થી વ્યાખ્યાયિત એક વિધેય છે. આ વ્યાખ્યાના આધારે નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો. આ વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ? f નો આલેખ દોરો.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

ઉકેલ : પૂર્ણ કરેલ કોષ્ટક નીચે આપેલ છે :

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

f નો પ્રદેશ = $\{x : x \in \mathbf{R}\}$. f નો વિસ્તાર = $\{x^2 : x \in \mathbf{R}\}$. આ વિધેય f નો આલેખ આકૃતિ 2.10 પ્રમાણેનો મળે.



આકૃતિ 2.10

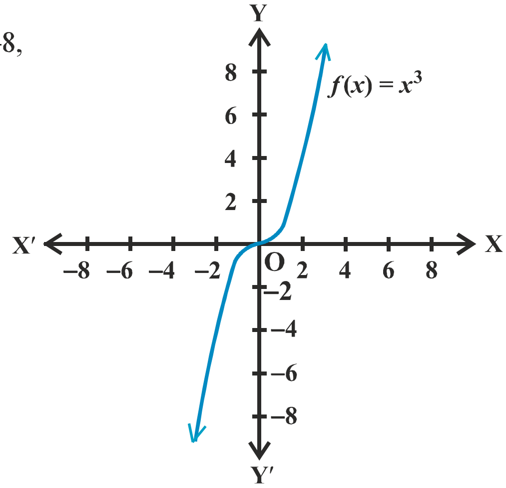
ઉદાહરણ 14 : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : અહીં, $f(0) = 0, f(1) = 1, f(-1) = -1, f(2) = 8, f(-2) = -8,$

$f(3) = 27; f(-3) = -27$, વગેરે.

અહીં, $f = \{(x, x^3): x \in \mathbf{R}\}$.

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.11 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 2.11

(iv) સંમેય વિધેય (*Rational Function*) : $g(x) \neq 0$ હોય તેવા પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત બહુપદી વિધેય $f(x)$ અને $g(x)$ માટે $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ને સંમેય વિધેય કહેવાય છે.

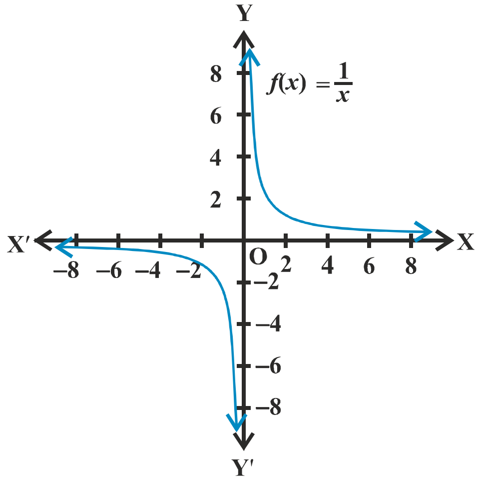
ઉદાહરણ 15 : $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ થી વ્યાખ્યાયિત એક વિધેય આપેલ છે. આ વ્યાખ્યાના આધારે નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો. આ વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ?

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \dfrac{1}{x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

ઉકેલ : પૂર્ણ કરેલ કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે છે :

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \dfrac{1}{x}$	– 0.5	– 0.67	–1	– 2	4	2	1	0.67	0.5

વિધેયનો પ્રદેશ પ્રત્યેક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ થશે અને તેનો વિસ્તાર પણ પ્રત્યેક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ થશે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.12 માં દર્શાવેલ છે.

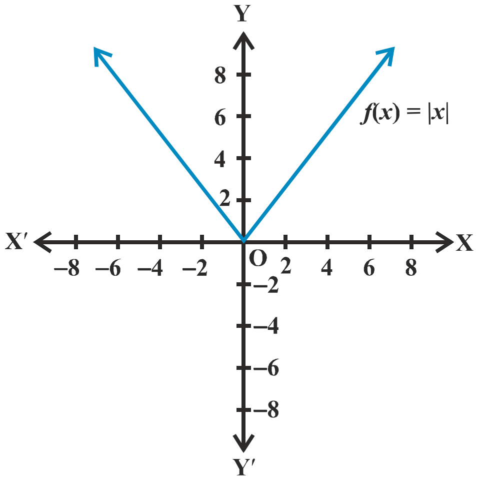


આકૃતિ 2.12

(v) માનાંક વિધેય(*Modulus Function*) : પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે વિધેય f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ થી વ્યાખ્યાયિત થતું વિધેય માનાંક વિધેય કહેવાય છે. પ્રત્યેક અનૃણ x માટે $f(x)$ નું મૂલ્ય x બરાબર હોય અને પ્રત્યેક ઋણ x માટે $f(x)$ નું મૂલ્ય $-x$ બરોબર હોય છે.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

માનાંક વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.13 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે થાય.

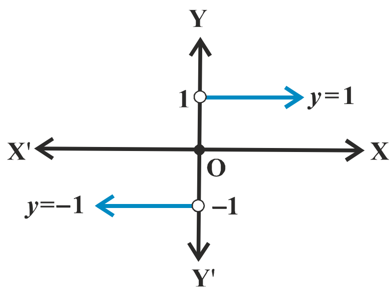


આકૃતિ 2.13

(vi) ચિહ્ન વિધેય (*Signum Function*) : વિધેય f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

થી વ્યાખ્યાયિત થતા વિધેયને ચિહ્ન વિધેય કહેવાય છે. આ વિધેયનો પ્રદેશ **R** છે અને વિસ્તાર $\{-1, 0, 1\}$ છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.14 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો થાય.



આકૃતિ 2.14

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(vii) મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય (*Greatest integer Function*) : વિધેય f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$ એ x થી નાના હોય અથવા x ને સમાન હોય તેવા તમામ પૂર્ણાંકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણાંક દર્શાવે, તો આ વિધેયને મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય કહે છે.

$[x]$ ની વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે,

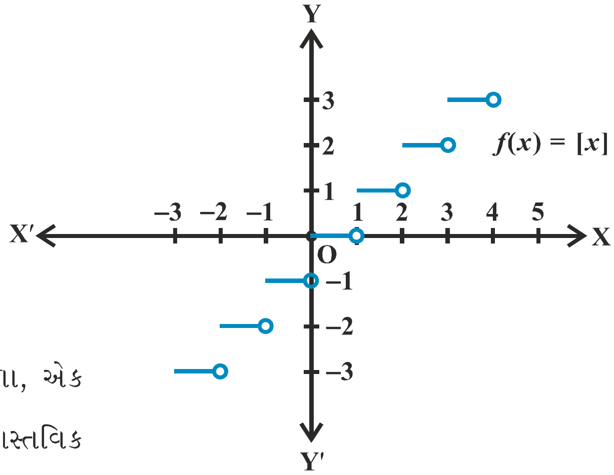
$[x] = -1, \quad -1 \le x < 0$

$[x] = 0, \quad 0 \le x < 1$

$[x] = 1, \quad 1 \le x < 2$

$[x] = 2, \quad 2 \le x < 3$ વગેરે .

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.15 માં દર્શાવ્યા મુજબ થશે.



આકૃતિ 2.15

2.4.2 વાસ્તવિક વિધેયો પરની બૈજિક ક્રિયાઓ :

આ વિભાગમાં આપણે બે વાસ્તવિક વિધેયના સરવાળા, એક વાસ્તવિક વિધેયની બીજા વાસ્તવિક વિધેયમાંથી બાદબાકી, વાસ્તવિક વિધેયનો અદિશ સાથે ગુણાકાર(અહીં અદિશ એટલે વાસ્તવિક સંખ્યા એમ સમજીશું), બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ગુણાકાર અને એક વાસ્તવિક વિધેયનો બીજા વાસ્તવિક વિધેય સાથે ભાગાકાર વિશે અભ્યાસ કરીશું :

(i) બે વિધેયોનો સરવાળો : $X \subset \mathbf{R}$ માટે $f : X \to \mathbf{R}$ અને $g : X \to \mathbf{R}$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો તેમનો સરવાળો $f + g : X \to \mathbf{R}$, પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(ii) બે વિધેયોની બાદબાકી : $X \subset \mathbf{R}$ માટે $f : X \to \mathbf{R}$ અને $g : X \to \mathbf{R}$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો તેમની બાદબાકી પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(f - g) : X \to \mathbf{R}$ $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(iii) અદિશ વડે વિધેયનો ગુણાકાર : ધારો કે, $f : X \to \mathbf{R}$ એ વાસ્તવિક વિધેય છે અને α એ કોઈ અદિશ છે. અહીં, અદિશ એટલે કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા. તેમનો ગુણાકાર αf એ X થી $\mathbf{R}$ નું વિધેય છે અને તે પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(iv) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ગુણાકાર : $X \subset \mathbf{R}$ માટે બે વાસ્તવિક વિધેયો $f : X \to \mathbf{R}$ અને $g : X \to \mathbf{R}$ નો ગુણાકાર $fg : X \to \mathbf{R}$, પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(fg)(x) = f(x)g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(v) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ભાગાકાર : ધારો કે $X \subset \mathbf{R}$ માટે બે વાસ્તવિક વિધેયો f અને g, X થી R પર વ્યાખ્યાયિત છે, બે વિધેયો f અને g નો ભાગાકાર $\dfrac{f}{g}$ દ્વારા દર્શાવાય છે અને $g(x) \neq 0$ હોય તેવા પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 16 : $f(x) = x^2$ અને $g(x) = 2x + 1$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો

$$(f + g)(x), (f - g)(x), (fg)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ શોધો.}$$

ઉકેલ : અહીં,

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1, \quad (f - g)(x) = x^2 - 2x - 1,$$

$$(fg)(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 17 : $f(x) = \sqrt{x}$ અને $g(x) = x$ એ બે અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યાના ગણ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય, તો $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ અને $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $(f+g)(x) = \sqrt{x} + x$, $(f-g)(x) = \sqrt{x} - x$,

$$(fg)\,x = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ અને } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0$$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. નીચેના પૈકી કયો સંબંધ વિધેય છે ? કારણ આપો. જો તે વિધેય હોય, તો તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

(i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$

(ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$

(iii) $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$

2. નીચેના વાસ્તવિક વિધેયના પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો :

(i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

3. $f(x) = 2x - 5$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય માટે નીચેની કિંમતો શોધો :

(i) $f(0)$ (ii) $f(7)$ (iii) $f(-3)$

4. વિધેય 't' એ સેલ્સિયસમાં ઉષ્ણતામાન અને ફેરનહીટમાં ઉષ્ણતામાન વચ્ચે રૂપાંતર કરતું સૂત્ર $t(\text{C}) = \frac{9\text{C}}{5} + 32$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો નીચેનાં મૂલ્યો શોધો :

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) જો $t(\text{C}) = 212$ હોય, તો C શોધો.

5. નીચેનાં વિધેયોના વિસ્તાર શોધો :

(i) $f(x) = 2 - 3x$, $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$

(ii) $f(x) = x^2 + 2$, x વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

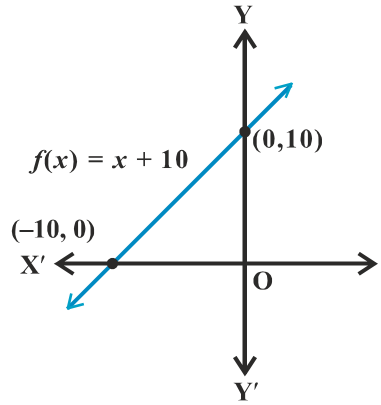
(iii) $f(x) = x$, x વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 18 : વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ **R** પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 10$ હોય, તો વિધેય f નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : અહીં, $f(0) = 10$, $f(1) = 11$, $f(2) = 12$, ..., $f(10) = 20$ વગેરે અને $f(-1) = 9$, $f(-2) = 8$, ..., $f(-10) = 0$ વગેરે.

માટે આ વિધેયનો આલેખનો આકૃતિ 2.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળશે.



આકૃતિ 2.16

નોંધ : $f(x) = mx + c$, $x \in$ **R** દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયને સુરેખ વિધેય કહે છે. અહીં, m અને c અચળ છે. ઉપરનું વિધેય એ સુરેખ વિધેયનું ઉદાહરણ છે.

ઉદાહરણ 19 : જો R એ **Q** થી **Q** પરનો

R = $\{(a,b): a,b \in \mathbf{Q}$ અને $a - b \in \mathbf{Z}\}$ થાય તે રીતે વ્યાખ્યાયિત સંબંધ છે.

તો બતાવો કે,

(i) પ્રત્યેક $a \in \mathbf{Q}$ માટે, $(a, a) \in$ R

(ii) જો $(a, b) \in$ R તો $(b, a) \in$ R

(iii) જો $(a, b) \in$ R અને $(b, c) \in$ R તો $(a, c) \in$R

ઉકેલ : (i) અહીં, $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$. તેથી $(a, a) \in$ R.

(ii) જો $(a,b) \in$ R તો $a - b \in \mathbf{Z}$. તેથી, $b - a \in \mathbf{Z}$. તેથી, $(b, a) \in$ R

(iii) જો $(a, b) \in$ R અને $(b, c) \in$ R તો $a - b \in \mathbf{Z}$. $b - c \in \mathbf{Z}$. તેથી,

$a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$. તેથી, $(a, c) \in$ R

ઉદાહરણ 20 : $f = \{(1,1), (2,3), (0, -1), (-1, -3)\}$ થાય તે રીતે **Z** પર વ્યાખ્યાયિત સુરેખ વિધેય હોય, તો $f(x)$ શોધો.

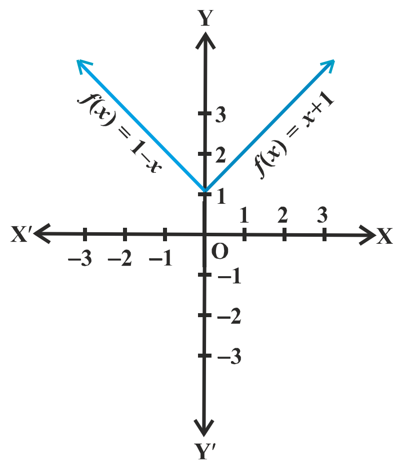
ઉકેલ : અહીં, f સુરેખ વિધેય હોવાથી $f(x) = mx + c$ લો. વળી, $(1, 1), (0, -1) \in f$,

$f(1) = m + c = 1$ અને $f(0) = c = -1$. આ પરથી $m = 2$ અને $f(x) = 2x - 1$.

ઉદાહરણ 21 : $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ હોય, તો વિધેયનો પ્રદેશ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, અહીં વિધેય f એ $x = 4$ અને $x = 1$ સિવાયની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યા પર વ્યાખ્યાયિત છે. આથી વિધેય f નો પ્રદેશ $\mathbf{R} - \{1, 4\}$.

ઉદાહરણ 22 : $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો આલેખ દોરો.



આકૃતિ 2.17

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = 1 - x$, $x < 0$,

આથી, $f(-4) = 1 - (-4) = 5$;

$f(-3) = 1 - (-3) = 4$,

$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

$f(-1) = 1 - (-1) = 2$; વગેરે

વળી, $f(x) = x + 1, x > 0.$

આથી, $f(1) = 2,\quad f(2) = 3, f(3) = 4$

$f(4) = 5$; વગેરે.

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.17 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 2

1. સંબંધ f એ $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 3 \\ 3x, & 3 \le x \le 10 \end{cases}$ થી વ્યાખ્યાયિત છે અને

સંબંધ g એ $g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 3x, & 2 \le x \le 10 \end{cases}$ થી વ્યાખ્યાયિત છે, તો સાબિત કરો કે f એ વિધેય છે અને g વિધેય નથી.

2. જો $f(x) = x^2$, તો $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ શોધો.

3. વિધેય $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ નો પ્રદેશ શોધો.

4. $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ થી વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય f નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

5. $f(x) = |x - 1|$ થી વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય f નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

6. જો $f = \left\{\left(x, \dfrac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ એ **R** થી **R** નું વિધેય હોય, તો તે વિધેય f નો વિસ્તાર શોધો.

7. $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1, g(x) = 2x - 3$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે, તો $f + g, f - g$ અને $\dfrac{f}{g}$ શોધો.

8. જો $f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$ એ **Z** થી **Z**, $f(x) = ax + b$, થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય, તો a અને b શોધો.

9. R એ **N** થી **N** નો સંબંધ છે. R $= \{(a, b) : a, b \in \mathbf{N}$ અને $a = b^2\}$ થાય તે રીતે વ્યાખ્યાયિત છે, તો શું નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે ?

(i) પ્રત્યેક $a \in \mathbf{N}$ માટે $(a, a) \in$ R

(ii) જો $(a, b) \in$ R, તો $(b, a) \in$ R

(iii) જો $(a, b) \in$ R, $(b, c) \in$ R તો $(a, c) \in$ R

પ્રત્યેક વિધાનમાં તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

10. A $=\{1,2,3,4\}$, B $=\{1,5,9,11,15,16\}$ અને $f=\{(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)\}$, તો શું નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે ?

(i) f એ A થી B નો સંબંધ છે.

(ii) f એ A થી B પરનું વિધેય છે. પ્રત્યેક વિકલ્પમાં તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

11. f એ $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ નો ઉપગણ છે. જો $f=\{(ab, a+b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ થી વ્યાખ્યાયિત છે, તો શું f એ $\mathbf{Z}$ થી $\mathbf{Z}$ નું વિધેય છે ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

12. A $=\{9,10,11,12,13\}$ અને f : A$\rightarrow$**N**, $f(n) = n$ નો મહત્તમ અવિભાજ્ય અવયવ છે. f નો વિસ્તાર મેળવો.

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે સંબંધ અને વિધેયનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણની મુખ્ય વિશેષતાઓ નીચે મુજબ છે :

- **ક્રમયુક્ત જોડ:** કોઈ ચોક્કસ ક્રમમાં બનાવેલ જોડને ક્રમયુક્ત જોડ કહે છે.
- **કાર્તેઝિય ગુણાકાર:** બે ગણ A અને B નો કાર્તેઝિય ગુણાકાર, A $\times$ B $=$ $\{(a, b): a \in$ A, $b \in$ B$\}$

  વિશિષ્ટ કિસ્સામાં $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$

  અને $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = (x, y, z): x, y, z \in \mathbf{R}\}$
- જો $(a, b) = (x, y)$, તો $a = x$ અને $b = y$.
- જો $n(\text{A}) = p$ અને $n(\text{B}) = q$, તો $n(\text{A} \times \text{B}) = pq$.
- $\text{A} \times \phi = \phi$
- સામાન્ય રીતે, A $\times$ B $\neq$ B $\times$ A.
- **સંબંધ:** ગણ A અને B માટે A $\times$ B ના કોઈ ઉપગણને A થી B નો સંબંધ R કહે છે. આ A $\times$ B નો ઉપગણ ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક x અને બીજા ઘટક y વચ્ચે કોઈ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરવાથી મળે છે.
- જો $(x, y) \in$ R, તો ઘટક x નું સંબંધ R ને અંતર્ગતનું પ્રતિબિંબ બિંદુ y હોય છે.
- સંબંધ R ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટકથી બનતા ગણને સંબંધ R નો પ્રદેશ કહે છે.
- સંબંધ R ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના બીજા ઘટકથી બનતા ગણને સંબંધ R નો વિસ્તાર કહે છે.
- વિધેયએ ગણ A થી ગણ B પરનો એક વિશિષ્ટ પ્રકારનો સંબંધ છે. તેમાં ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટક x ને સંગત ગણ B માં અનન્ય પ્રતિબિંબ y મળે છે. આને આપણે $y = f(x)$ માટે f : A$\rightarrow$B દ્વારા દર્શાવીશું.
- ગણ A ને વિધેય f નો પ્રદેશ અને ગણ B ને વિધેય f નો સહપ્રદેશ કહેવાય.
- વિધેય f ના પ્રતિબિંબના ગણને વિધેયનો વિસ્તાર કહે છે.
- કોઈ પણ વાસ્તવિક વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર બંને વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ કે તેનો ઉપગણ હોય છે.

◆ વિધેય પરની બૈજિક ક્રિયાઓ :

$f : X \to \mathbf{R}$ અને $g : X \to \mathbf{R}$, વિધેય હોય, તો

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in X$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),\ x \in X$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in X$$

$(kf)(x) = k(f(x)),\ x \in X$, જ્યાં k કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in X,\ g(x) \neq 0$$

Historical Note

The word FUNCTION first appears in a Latin manuscript “Methodus tangentium inversa, *seu de fuctionibus*” written by Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) in 1673; Leibnitz used the word in the non-analytical sense. He considered a function in terms of “mathematical job” – the “employee” being just a curve.

On July 5, 1698, Johan Bernoulli, in a letter to Leibnitz, for the first time deliberately assigned a specialised use of the term *function* in the analytical sense. At the end of that month, Leibnitz replied showing his approval.

Function is found in English in 1779 in Chambers’ Cyclopaedia: “The term function is used in algebra, for an analytical expression any way compounded of a variable quantity, and of numbers, or constant quantities”.