JEE ADVANCED
27 September 2020
Physics Paper - 1

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks	: +3	If ONLY the correct option is chosen;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: −1	In all other cases.

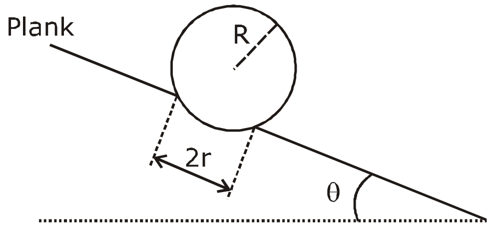
भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से केवल एक ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +3	केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक	: −1	अन्य सभी स्थितियों में।

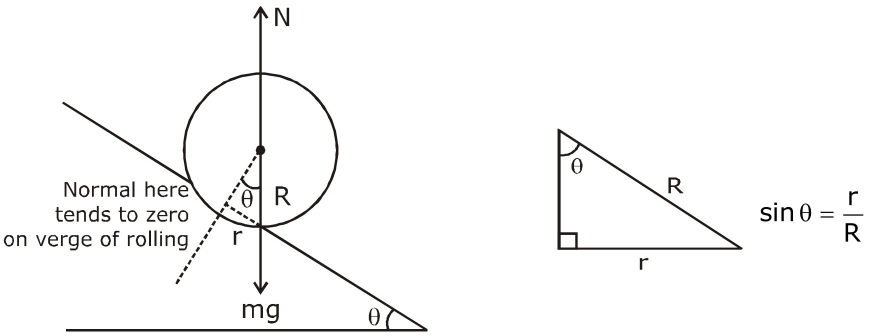
1. A football of radius *R* is kept on a hole of radius *r* $(r < R)$ made on a plank kept horizontally. One end of the plank is now lifted so that it gets tilted making an angle θ from the horizontal as shown in the figure below. The maximum value of θ so that the football does not start rolling down the plank satisfies (figure is schematic and not drawn to scale)

R त्रिज्या की एक फुटबॉल क्षैतिज रूप से रखे एक तख्ते पर बने *r* $(r < R)$ त्रिज्या के एक छिद्र पर रखी जाती हैं। तख्ते का एक सिरा अब उठाया (lifted) जाता है ताकि यह चित्रानुसार क्षैतिज से θ कोण बनाते हुए झुकता है। θ का अधिकतम मान ताकि फुटबॉल तख्ते के नीचे लुढ़कना प्रारंभ नहीं करती है, संतुष्ट करता है (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)



(A) $\sin\theta = \frac{r}{R}$ (B) $\tan\theta = \frac{r}{R}$ (C) $\sin\theta = \frac{r}{2R}$ (D) $\cos\theta = \frac{r}{2R}$

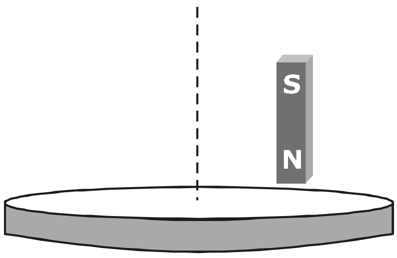
Sol. **A**



on the verge of rolling 'mg' passes through point of contact.

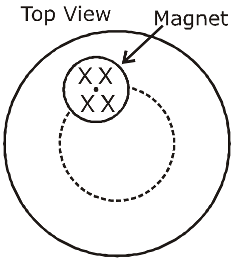
2. A light disc made of aluminium (a nonmagnetic material) is kept horizontally and is free to rotate about its axis as shown in the figure. A strong magnet is held vertically at a point above the disc away from its axis. On revolving the magnet about the axis of the disc, the disc will (figure is schematic and not drawn to scale)

एल्युमिनियम (एक अचुम्बकीय पदार्थ) की बनी एक हल्की चकती क्षैतिज रूप से रखी जाती है तथा चित्रानुसार इसके अक्ष के परितः घूमने के लिए स्वतन्त्र है। एक प्रबल (strong) चुम्बक चकती के ऊपर एक बिन्दु पर इसके अक्ष से दूर ऊर्ध्वाधर रखी जाती है। चकती के अक्ष के परितः चुम्बक को घुमाने पर चकती (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)



(A) rotate in the direction opposite to the direction of magnet's motion
(B) rotate in the same direction as the direction of magnet's motion
(C) not rotate and its temperature will remain unchanged
(D) not rotate but its temperature will slowly rise
(A) चुम्बक की गति की दिशा के विपरित दिशा में घूमेगी
(B) चुम्बक की गति की दिशा के समान दिशा में घूमेगी
(C) नहीं घूमेगी तथा इसका तापमान अपरिवर्तित रहेगा
(D) घूमेगी लेकिन इसका तापमान धीरे–धीरे बढ़ेगा

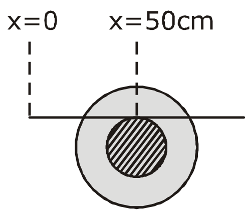
Sol. **B**

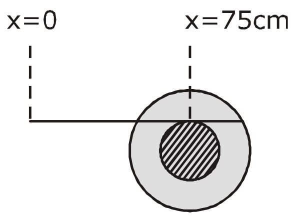


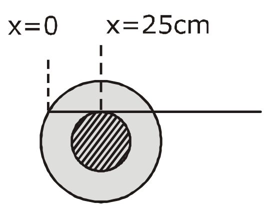
by lenz's law, the disc also tries to move in same direction because in the backward part of disc the flux reduces as magnet moves and as there is change in magnetic flux, so there is eddy current production which leads to production of heat.

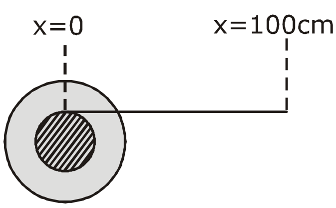
3. A small roller of diameter 20 cm has an axle of diameter 10 cm (see figure below on the left). It is on a horizontal floor and a meter scale is positioned horizontally on its axle with one edge of the scale on top of the axle (see figure on the right). The scale is now pushed slowly on the axle so that it moves without slipping on the axle, and the roller starts rolling without slipping. After the roller has moved 50 cm, the position of the scale will look like (figures are schematic and not drawn to scale)

20 cm व्यास के एक छोटे रोलर में 10 cm (नीचे बायीं ओर चित्र देखिये) व्यास की एक धुरी (axle) है। यह एक क्षैतिज फर्श पर है तथा एक मीटर पैमाना इसकी धुरी पर क्षैतिज रूप से स्थित है, जिसमें धुरी के शिखर पर (दायीं ओर देखिये) पैमाने का एक किनारा (edge) है। अब पैमाने को धुरी पर धीरे–धीरे धकेला जाता है ताकि यह धुरी पर बिना फिसले चले, तथा रोलर बिना फिसले लुढ़कना प्रारंभ करता है। रोलर के 50 cm चलने के पश्चात् पैमाने की स्थिति निम्न तरह दिखाई देगी (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)

(A)


(B)


(C)


(D)


Sol. **B**

$v - \omega R = 0$

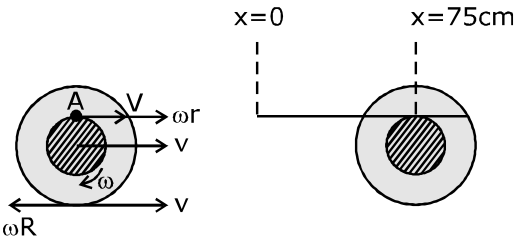
$v = \omega R$

$v = 20\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{20}$

Velocity of point (A) $= v + \omega r$

$= v + \frac{v}{20} \times 10$

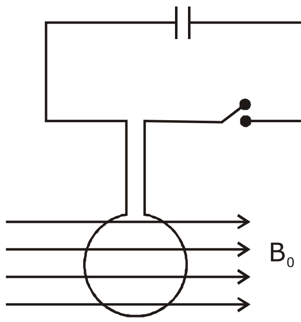
$= \frac{3v}{2} = 1.5v$



so distance moved by point of contact
$= 1.5 \times 50$ cm = 75 cm

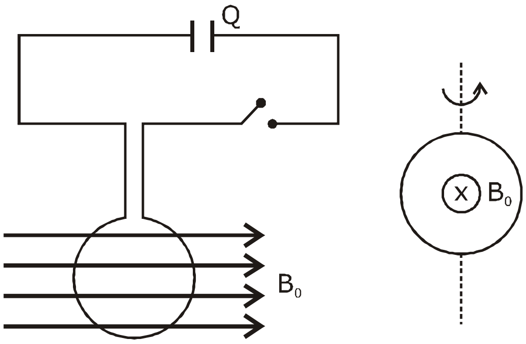
4. A circular coil of radius R and N turns has negligible resistance. As shown in the schematic figure, its two ends are connected to two wires and it is hanging by those wires with its plane being vertical. The wires are connected to a capacitor with charge Q through a switch. The coil is in a horizontal uniform magnetic field B_0 parallel to the plane of the coil. When the switch is closed, the capacitor gets discharged through the coil in a very short time. By the time the capacitor is discharged fully, magnitude of the angular momentum gained by the coil will be (assume that the discharge time is so short that the coil has hardly rotated during this time)

R त्रिज्या तथा N फेरों की एक वत्ताकार कुण्डली का नगण्य प्रतिरोध है। सांकेतिक चित्र में दिखायेनुसार, इसके दो सिरे दो तारों से जोड़े जाते है तथा यह उन तारों द्वारा लटकाया जाता है, जिसका तल ऊर्ध्वाधर हो। तार एक स्विच के माध्यम से आवेश Q के साथ एक संधारित्र से जोड़े जाते है। कुण्डली इसके (स्वयं के) तल के समानान्तर क्षैतिज समरूप चुम्बकीय क्षेत्र B_0 में है। जब स्विच बन्द किया जाता है, तब संधारित्र बहुत अल्प समय में कुण्डली से निरावेशित होता है। जब तक संधारित्र पूर्ण रूप से निरावेशित होता है, तब तक कुण्डली द्वारा प्राप्त कोणीय संवेग का परिमाण होगा (माना कि निरावेशन समय इतना अल्प है कि कुण्डली इस समय के दौरान मुश्किल से घूमती है।) –



(A) $\frac{\pi}{2} NQB_0R^2$ (B) πNQB_0R^2 (C) $2\pi NQB_0R^2$ (D) $4\pi NQB_0R^2$

Sol. **B**



after closing switch, within fraction of seconds entire charge flows through coil and produces impulsive torque.

$\int \tau dt = \Delta L$

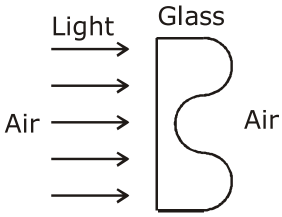
$\int NBIAdt = \Delta L$

$NB\pi R^2 Q = \Delta L$

$\pi NQB_0R^2 = \Delta L$

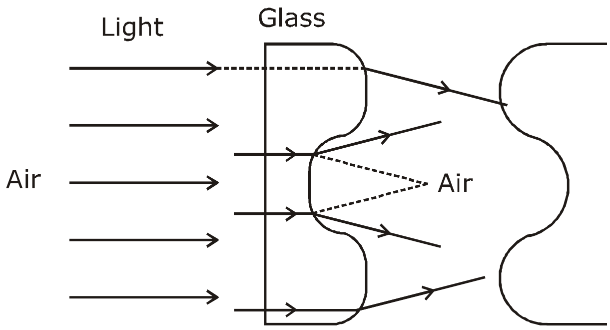
5. A parallel beam of light strikes a piece of transparent glass having cross section as shown in the figure below. Correct shape of the emergent wavefront will be (figures are schematic and not drawn to scale)

प्रकाश का एक समानान्तर पुंज चित्रानुसार अनुप्रस्थ काट रखने वाले पारदर्शी कांच के एक टुकड़े पर टकराता है। निर्गत तरंगाग्र का सही आकार होगा (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)



(A) (B) (C) (D)

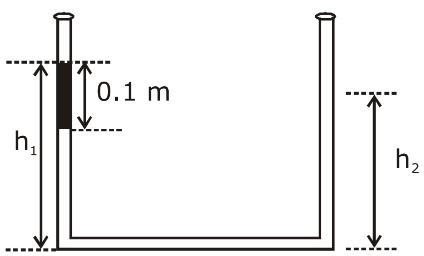
Sol. **A**



Concept : based on Huyghen's principle.
Theory of wavefront $\rightarrow$ wave moves such that direction of propagation is perpendicular to wavefront.

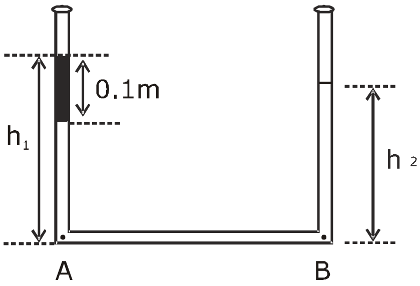
6. An open-ended U-tube of uniform cross-sectional area contains water (density 10^3kg m^{-3}). Initially the water level stands at 0.29 m from the bottom in each arm. Kerosene oil (a water-immiscible liquid) of density 800 kg m^{-3} is added to the left arm until its length is 0.1 m, as shown in the schematic figure below. The ratio $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$ of the heights of the liquid in the two arms is

समरूप अनुप्रस्थ–काट क्षेत्रफल की एक खुले सिरे की U-नली पानी (घनत्व 10^3kg m^{-3}) धारण करती है। प्रारंभ में पानी का स्तर प्रत्येक भुजा में तली से 0.29 m पर स्थित है। 800 kg m^{-3} घनत्व का केरासीन तेल (एक पानी–अमिश्रणीय द्रव) बायीं भुजा में मिलाया जाता है जब तक इसकी लम्बाई 0.1 m ना हो, जैसा नीचे सांकेतिक चित्र में दिखायेनुसार है। दोनों भुजाओं में द्रव की ऊँचाईयों का अनुपात $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$ है–



(A) $\frac{15}{14}$ (B) $\frac{35}{33}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{5}{4}$

Sol. **B**



$P_A = P_B$ (Same horizontal level)

$P_{atm} + \rho_{kero} g \times 0.1 + \rho_w g(h_1 - 0.1) = P_{atm} + \rho_w g h_2$

$800 \times 0.1 + 1000(h_1 - 0.1) = 1000 h_2$

$0.8 + 10h_1 - 1 = 10h_2$

$10(h_1 - h_2) = 0.2$

$h_1 - h_2 = 0.02$ ...(1)

also, initial level of water in both arms = 2×0.29

$\therefore\ h_1 - 0.1 + h_2 = 0.58$

$h_1 + h_2 = 0.68$ ....(2)

from (1) & (2)

$h_1 = 0.35$ & $h_2 = 0.33$

so $\frac{h_1}{h_2} = \frac{35}{33} \rightarrow$ option (B)

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four options(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks	: +4	If only (all) the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4	यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3	यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2	यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1	यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2	अन्य सभी स्थितियों में।

---

7. A particle of mass m moves in circular orbits with potential energy V(r)= Fr, where F is a positive constant and r is its distance from the origin. Its energies are calculated using the Bohr model. If the radius of the particle's orbit is denoted by R and its speed and energy are denoted by v and E, respectively, then for the n^{th} orbit (here h is the Planck's constant)

(A) $R \propto n^{1/3}$ and $v \propto n^{2/3}$ (B) $R \propto n^{2/3}$ and $v \propto n^{1/3}$

(C) $E = \frac{3}{2}\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2 m}\right)^{1/3}$ (D) $E = 2\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2 m}\right)^{1/3}$

m द्रव्यमान का एक कण V(r)= Fr स्थितिज ऊर्जा के साथ वत्तीय कक्षाओं में गति करता है, जहाँ F एक धनात्मक नियतांक है तथा r मूल बिन्दु से इसकी दूरी है। इसकी ऊर्जायें बोहर प्रतिरूप का प्रयोग करते हुए ज्ञात की जाती हैं। यदि कण की कक्षा की त्रिज्या R से निरूपित की जाती है तथा इसकी चाल तथा ऊर्जा क्रमशः v व E से निरूपित की जाती है, तब nवीं कक्षा के लिए (यहाँ h प्लांक नियतांक है)

(A) $R \propto n^{1/3}$ तथा $v \propto n^{2/3}$ (B) $R \propto n^{2/3}$ तथा $v \propto n^{1/3}$

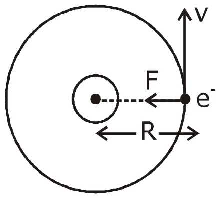
(C) $E = \frac{3}{2}\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2 m}\right)^{1/3}$ (D) $E = 2\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2 m}\right)^{1/3}$

Sol. **B,C**

P.E., V(r) = Fr

$\therefore$ Force $= \frac{-dV}{dr}$

= - F



$F = \frac{mv^2}{R}$ ...(1)

$mvR = \frac{nh}{2\pi}$ ...(2)

$\Rightarrow R = \frac{nh}{2\pi mv}$ $\Rightarrow F = \frac{mv^2}{\frac{nh}{2\pi mv}}$ $\Rightarrow F = \frac{m^2v^3.2\pi}{nh}$ $\Rightarrow v^3 = \frac{nFh}{2\pi m^2}$ $\Rightarrow V \alpha n^{\frac{1}{3}}$

from (2) $R = \frac{nh}{2\pi mv}$

$R = \frac{kn}{n^{\frac{1}{3}}}$

$R \propto n^{\frac{2}{3}}$

E = KE + PE

$= \frac{1}{2}mv^2 + V(r) \quad = \frac{1}{2}FR + FR$

$= \frac{3}{2}FR \; = \frac{3}{2}.F \times \frac{nh}{2\pi m\left(\frac{nFh}{2\pi m^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$

$E = \frac{3}{2}\left(\frac{n^2h^2F^2}{4\pi^2 m}\right)^{\frac{1}{3}}$

Option B and C.

8. The filament of a light bulb has surface area 64 mm^2. The filament can be considered as a black body at temperature 2500 K emitting radiation like a point source when viewed from far. At night the light bulb is observed from a distance of 100 m. Assume the pupil of the eyes of the observer to be circular with radius 3 mm. Then

(Take Stefan-Boltzmann constant = 5.67×10^{-8} $Wm^{-2}K^{-4}$, Wien's displacement constant = 2.90×10^{-3} m-K, Planck's constant = 6.63×10^{-34} Js, speed of light in vacuum = 3.00×10^{8} ms^{-1})

(A) power radiated by the filament is in the range 642 W to 645 W

(B) radiated power entering into one eye of the observer is in the range 3.15×10^{-8} W to 3.25×10^{-8} W

(C) the wavelength corresponding to the maximum intensity of light is 1160 nm

(D) taking the average wavelength of emitted radiation to be 1740 nm, the total number of photons entering per second into one eye of the observer is in the range 2.75×10^{11} to 2.85×10^{11}

एक प्रकाश बल्ब के तन्तु (filament) का पृष्ठ क्षेत्रफल 64 mm^2 है। तन्तु 2500 K ताप पर एक कृष्णिका के रूप में माना जा सकता है, जो एक बिन्दु स्त्रोत की तरह विकिरण उत्सर्जित करता है जब दूर से देखा जाता है। रात में प्रकाश बल्ब 100 m की दूरी से प्रेक्षित किया जाता है। माना प्रेक्षक की आँखों की पुतली वृत्ताकार है, जिसकी त्रिज्या 3 mm हैं। तब

(लीजिये : स्टीफन–बोल्टजमान नियतांक = 5.67×10^{-8} $Wm^{-2}K^{-4}$, वीन का विस्थापन नियतांक = 2.90×10^{-3} m-K, प्लांक नियतांक = 6.63×10^{-34} Js, निर्वात में प्रकाश की चाल = 3.00×10^{8} ms^{-1})

(A) तन्तु द्वारा विकिरित शक्ति 642 W से 645 W परास में है।

(B) प्रेक्षक की एक आँख में प्रवेश करने वाली विकिरत शक्ति 3.15×10^{-8} W से 3.25×10^{-8} W परास में है।

(C) प्रकाश की अधिकतम तीव्रता के संगत तरंगदैर्ध्य 1160 nm है।

(D) उत्सर्जित विकिरण की औसत तरंगदैर्ध्य 1740 nm लेने पर, प्रेक्षक की एक आँख में प्रति सैकण्ड प्रवेश करने वाले फोटोनों की कुल संख्या 2.75×10^{11} से 2.85×10^{11} की परास में है।

Sol. **B,C,D**

$P = e\sigma AT^4$

$= 1\times 5.67\times10^{-8}\times 64\times(2500)^4 = 141.75$ W

radiated power entering one's eye $= \frac{P}{4\pi R^2}\times \pi r^2$

$= \frac{141.75\times(3\times10^{-2})^2}{4\times(100)^2}$ = 318.9×10^{-10} = 3.19×10^{-8} W $\rightarrow$ option (B)

for wavelength corresponding to maximum intensity,

$\lambda_m T = b$

$\lambda_m = \frac{2.93\times10^{-6}}{2500} = 1160nm$ $\rightarrow$ option (C)

for no of photons, per sec,

$N\frac{hc}{\lambda} = P$

$N = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{3.19\times10^{-8}\times1740\times10^{-9}}{6.67\times10^{-34}\times3\times10^{8}}$ = 2.77×10^{11} Option (D).

Ans. BCD

9. Sometimes it is convenient to construct a system of units so that all quantities can be expressed in terms of only one physical quantity. In one such system, dimensions of different quantities are given in terms of a quantity X as follows: [position] = [X^{α}]; [speed] = [X^{β}]; [acceleration] =[X^{p}]; [linear momentum] = [X^{q}]; [force] = [X^{r}]. Then

कभी–कभी इकाईयों की एक पद्धति का निर्माण करना सुविधाजनक होता है ताकि सभी राशियां केवल एक भौतिक राशि के पदो में व्यक्त की जा सकती है। एक ऐसी पद्धति में, भिन्न–भिन्न राशियों की विमायें X राशी के पदों में निम्न रूप में जाती है : [स्थिति] = [X^{α}]; [चाल] = [X^{β}]; [त्वरण] =[X^{p}]; [रेखीय संवेग] = [X^{q}]; [बल] = [X^{r}], तब –

(A) $\alpha + p = 2\beta$ (B) $p + q - r = \beta$ (C) $p - q + r = \alpha$ (D) $p + q + r = \beta$

Sol. **A,B**

Position = [x^{α}]

$\Rightarrow [L] = [X^{\alpha}]$ ...(1)

speed = X^{β}

$LT^{-1} = X^{\beta}$

$X^{\alpha} T^{-1} = X^{\beta}$ (from (1))

$T^{-1} = X^{\beta-\alpha}$ ...(2)

acceleration = X^{P}

$LT^{-1} \times T^{-1} = X^{p}$

$X^{\beta}.X^{\beta-\alpha} = x^{P}$

$X^{2\beta-\alpha} = x^{P}$

$\Rightarrow 2\beta - \alpha = p$

$\alpha + p = 2\beta$

Option (A)

[Linear momentum] = x^{q}

$M LT^{-1} = x^{q}$

$M.X^{\beta} = x^{q}$

$M = x^{q-\beta}$ ...(3)

[force] = x^{r}

$M LT^{-2} = x^{r}$

$M.X^{p} = x^{r}$

$M = x^{r-p}$ ..(4)

from (3) & (4) , $q-\beta = r - p$

$p + q - r = \beta$ option (B)

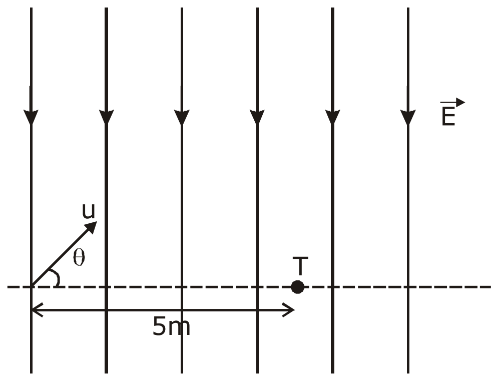
from (A) $p + q - r = \frac{\alpha}{2} + \frac{p}{2}$

$\frac{p}{2} + q - r = \frac{\alpha}{2}$

Ans :- A,B

10. A uniform electric field, $\vec{E} = -400\sqrt{3}\hat{y}\, NC^{-1}$ is applied in a region. A charged particle of mass m carrying positive charge q is projected in this region with an initial speed of $2\sqrt{10} \times 10^6\, ms^{-1}$. This particle is aimed to hit a target T, which is 5 m away from its entry point into the field as shown schematically in the figure. Take $\frac{q}{m} = 10^{10}\, Ckg^{-1}$. Then

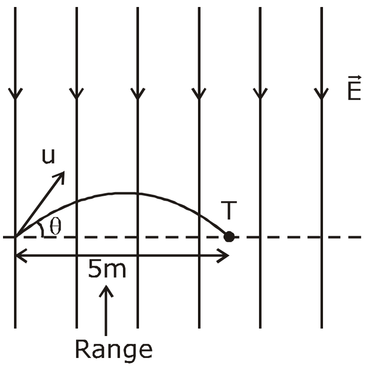
एक समरूप विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = -400\sqrt{3}\hat{y}\, NC^{-1}$ एक क्षेत्र में आरोपित किया जाता है। q धनात्मक आवेश को वहन करने वाले m द्रव्यमान का एक आवेशित कण $2\sqrt{10} \times 10^6\, ms^{-1}$ की प्रारंभिक चाल से इस क्षेत्र में प्रक्षेपित किया जाता है। इस कण का एक लक्ष्य T से टकराने (hit) के लिए निशाना बांधा जाता है, जो चित्रानुसार क्षेत्र में (into) इसके प्रवेश बिन्दु से 5 m दूर है। $\frac{q}{m} = 10^{10}\, Ckg^{-1}$ लें। तब–



(A) the particle will hit T if projected at an angle 45º from the horizontal
(B) the particle will hit T if projected either at an angle 30º or 60º from the horizontal
(C) time taken by the particle to hit T could be $\sqrt{\frac{5}{6}}\,\mu s$ as well as $\sqrt{\frac{5}{2}}\,\mu s$
(D) time taken by the particle to hit T is $\sqrt{\frac{5}{3}}\,\mu s$

(A) कण T से टकरायेगा, यदि क्षैतिज से 45º कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है।
(B) कण T से टकरायेगा, यदि क्षैतिज से 30º या 60º कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है।
(C) T से टकराने के लिए कण द्वारा लिया गया समय $\sqrt{\frac{5}{6}}\,\mu s$ तथा $\sqrt{\frac{5}{2}}\,\mu s$ हो सकता है।
(D) T से टकराने के लिए कण द्वारा लिया गया समय $\sqrt{\frac{5}{3}}\,\mu s$ है।

Sol. **B,C**



Consider like projectile motion,

so here $g_{eff} = \frac{qE}{m} = 400\sqrt{3} \times 10^{10}$

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g_{eff}}$$

$$5 = \frac{4 \times 10 \times 10^{12} \times \sin 2\theta}{400\sqrt{3} \times 10^{10}} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\theta = 60°, 120°$$

$$\therefore \theta = 30°, 60°$$

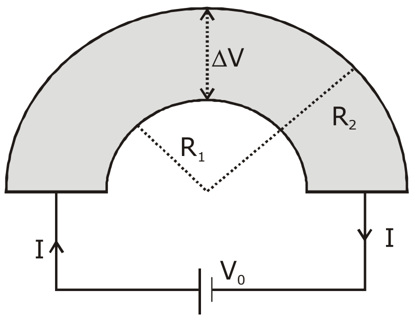
$$T = \frac{2u \sin\theta}{g_{eff}}$$

at $\theta = 30°, T = \frac{2 \times 2\sqrt{10} \times 10^6 \times \frac{1}{2} \times 10^6}{400\sqrt{3} \times 10^{10}} \mu s = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3 \times 4}} = \sqrt{\frac{10}{12}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \mu s$

at $\theta = 60°$, $T = \sqrt{\frac{5}{2}} \mu s$ Ans. B and C

11. Shown in the figure is a semicircular metallic strip that has thickness t and resistivity ρ . Its inner radius is R_1 and outer radius is R_2. If a voltage V_0 is applied between its two ends, a current I flows in it. In addition, it is observed that a transverse voltage ΔV develops between its inner and outer surfaces due to purely kinetic effects of moving electrons (ignore any role of the magnetic field due to the current). Then (figure is schematic and not drawn to scale)

चित्रानुसार एक अर्धवत्तीय धात्विक पट्टिका है, जिसकी मोटाई t तथा प्रतिरोधकता ρ है। इसकी आंतरिक त्रिज्या R_1 है तथा बाह्य त्रिज्या R_2 है। यदि एक वोल्टता V_0 इसके दोनों सिरों के बीच आरोपित की जाती है, तब एक धारा I इसमें बहती हैं। इसके सिवा, यह प्रेक्षित किया जाता है कि गतिमान इलेक्ट्रॉनों (धारा के कारण चुम्बकीय क्षेत्र की कोई भी भूमिका उपेक्षित है) के शुद्ध गतिक प्रभावों के कारण इसकी आन्तरिक और बाह्य सतहों के बीच एक अनुप्रस्थ वोल्टता ΔV उत्पन्न होती है। तब (चित्र सांकेतिक है तथा पैमाने से रेखांकित नहीं है)



(A) $I = \frac{V_0 t}{\pi\rho}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

(B) the outer surface is at a higher voltage than the inner surface

(C) the outer surface is at a lower voltage than the inner surface

(D) $\Delta V \propto I^2$

(A) $I = \frac{V_0 t}{\pi\rho}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

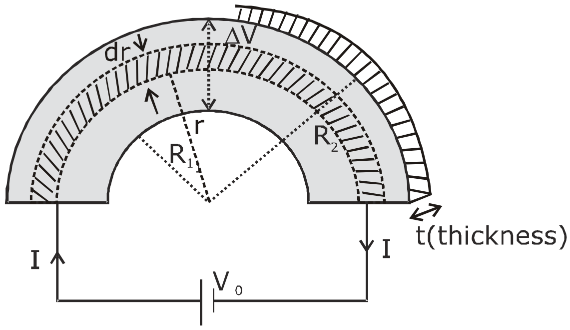
(B) बाह्य सतह, आंतरिक सतह से उच्च वोल्टता पर है।

(C) बाह्य सतह, आंतरिक सतह से न्यून वोल्टता पर है।

(D) $\Delta V \propto I^2$

Sol. **A,C,D**

to calculate resistance, $\ell = \pi r$, $A = tdr$



$$dR = \frac{\rho \pi r}{tdr}$$

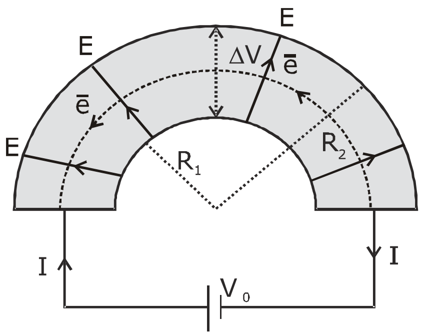
but all elemental strips are in parallel so

$$\frac{1}{R_{eq}} = \int \frac{1}{dR}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{tdr}{\rho \pi r}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{t}{\rho \pi} \ell n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\therefore I = \frac{V_0}{R_{eq.}} = \frac{V_0 t \ell n}{\pi \rho}(R_2 / R_1)$$ Option (A)

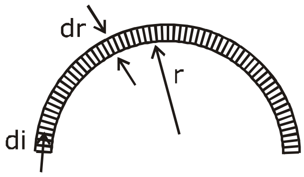


electrons move in a circular path so they exp. centripetal force due to electric field set up because of p.d., so 'E' field should be from inner to outer, therefore outer surface is at lower voltage than inner.

To check p.d. across surface, let us consider elemental resistance

$$dR = \frac{\rho \pi r}{tdr}$$

$\therefore di = \frac{v_0 tdr}{\rho \pi r}$

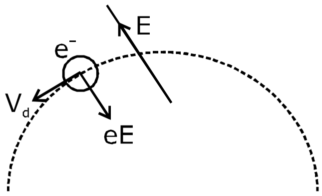


$neAv_d = \frac{V_0 tdr}{\rho \pi r}$

(as A=tdr)

$\Rightarrow V_d = \frac{V_0}{\rho \pi rne} = \frac{KV_0}{r}$

Now as electrons move in circular path so,



$eE = \frac{mv_d^2}{r}$

$E = \frac{m}{er} \times \frac{K^2 V_0^2}{r^2}$

$E = \frac{K'.V_0^2}{r^3}$

$\therefore$ p.d., $\Delta V = -\int \vec{E}.\overrightarrow{dr}$

$\Delta V = -K' V_0^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^3}$

$\Delta V = K' V_0^2 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$

$\Delta V = K'' V_0^2$

$\Rightarrow \Delta V \alpha V_0^2$

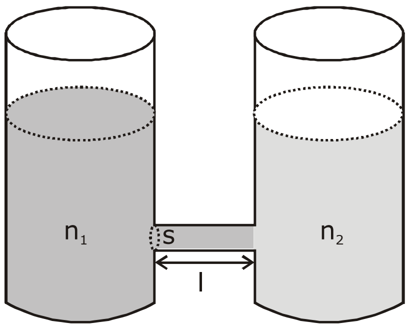
$\Delta V \alpha I^2$

(as $V_0 \alpha I$)

Ans. Option ACD

12. As shown schematically in the figure, two vessels contain water solutions (at temperature T) of potassium permanganate ($KMnO_4$) of different concentrations n_1 and n_2 ($n_1 > n_2$) molecules per unit volume with $\Delta n = (n_1 - n_2) \ll n_1$. When they are connected by a tube of small length l and cross-sectional area S, $KMnO_4$ starts to diffuse from the left to the right vessel through the tube. Consider the collection of molecules to behave as dilute ideal gases and the difference in their partial pressure in the two vessels causing the diffusion. The speed v of the molecules is limited by the viscous force $-\beta v$ on each molecule, where β is a constant. Neglecting all terms of the order $(\Delta n)^2$, which of the following is/are correct? (k_B is the Boltzmann constant)

चित्र में व्यवस्थिक रूप से दिखायेनुसार, दो पात्र प्रति इकाई आयतन अणुओं n_1 तथा n_2 ($n_1 > n_2$) की भिन्न–भिन्न सान्द्रताओं के पोटेशियम परमेंग्नेट ($KMnO_4$) के पानी के विलयन (T ताप पर) धारण करते है, जहाँ $\Delta n = (n_1 - n_2) \ll n_1$ हैं। जब वे S अनुप्रस्थ–काट क्षेत्रफल तथा l लघु लम्बाई की एक नली द्वारा जोड़े जाते है, तब $KMnO_4$ नली के माध्यम से बांयी से दांयी ओर विसरित (diffuse) होना प्रारम्भ होता हैं। माना अणुओं का समूह तनु (dilute) आदर्श गैसों के रूप में व्यवहार करता है तथा दोनों पात्रों में उनके आंशिक दाब में अन्तर के कारण विसरण होता है। अणुओं की चाल v प्रत्येक अणु पर $-\beta v$ श्यान बल द्वारा सीमित की जाती है, जहाँ β एक नियतांक है। क्रम $(\Delta n)^2$ के सभी पद नगण्य है, निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे सही है? (k_B बोल्टजमान नियतांक है)



(A) the force causing the molecules to move across the tube is $\Delta n k_B T S$

(B) force balance implies $n_1 \beta v l = \Delta n k_B T$

(C) total number of molecules going across the tube per sec is $\left(\frac{\Delta n}{l}\right)\left(\frac{k_B T}{\beta}\right)S$

(D) rate of molecules getting transferred through the tube does not change with time

(A) नली से पार (across) जाने के लिए अणुओं के कारण बल $\Delta n k_B T S$ है।

(B) बल संतुलन बताता है कि $n_1 \beta v l = \Delta n k_B T$

(C) प्रति सैकण्ड नली के पार (across) जाने वाले अणुओं की कुल संख्या $\left(\frac{\Delta n}{l}\right)\left(\frac{k_B T}{\beta}\right)S$ है।

(D) नली से स्थानान्तरित होने वाले अणुओं की दर समय के साथ नही बदलती है।

Sol. **A,B,C**

$F = \Delta PS$

$= (P_1 - P_2)S$

$= n_1K_BTS - n_2K_BTS$

$= (n_1 - n_2)K_B\ TS \Rightarrow \Delta n K_B\ TS \Rightarrow \Delta nK_B\ TS$ (Option - A)

$(PV = NK_BT$

$P = \frac{N}{V}K_BT$

$P = nK_BT)$

where
N = total no. of particles
n = no. of molecules per unit volume.

$\beta v \times (n_1 \times S \times \ell) = \Delta n k_B .T.S$

$\Rightarrow n_1\beta v\ell = \Delta nk_BT$

Option (B).

N = total no of molecules,

$\frac{dN}{dt} = S \times v \times n_1$

$= S \times \frac{\Delta nK_BT}{\beta\ell}$ (from (B) putting vn_1)

correct option (C)

as Δn decreses with time so no of molecules decreases with time, option (D) not current.

Ans. ABC.

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, truncate/round -off the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;

Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।

शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

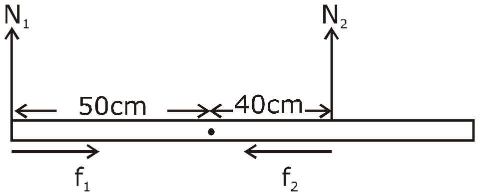
13. Put a uniform meter scale horizontally on your extended index fingers with the left one at 0.00 cm and the right one at 90.00 cm. When you attempt to move both the fingers slowly towards the center, initially only the left finger slips with respect to the scale and the right finger does not. After some distance, the left finger stops and the right one starts slipping. Then the right finger stops at a distance x_R from the center (50.00 cm) of the scale and the left one starts slipping again. This happens because of the difference in the frictional forces on the two fingers. If the coefficients of static and dynamic friction between the fingers and the scale are 0.40 and 0.32, respectively, the value of x_R (in cm) is ______.

अपनी विस्तत तर्जनीयों पर क्षैतिज रूप से एक समरूप मीटर पैमाने को बांयी ओर 0.00 cm पर तथा दांयी ओर 90.00 cm पर रखें। जब आप दोनों उंगुलीयों को धीरे–धीरे केन्द्र की ओर ले जाने का प्रयास करते है, तब प्रारम्भ में केवल बांयी उंगली पैमाने के सापेक्ष फिसलती है तथा दांयी उंगली नही फिसलती है। कुछ दूरी पश्चात, बांयी उंगली रूक जाती है तथा दांयी उंगली फिसलना प्रारम्भ करती है। तब दांयी उंगली पैमाने के केन्द्र (50.00 cm) से x_R दूरी पर रूकती है तथा बांयी उंगली पुनः फिसलना प्रारम्भ करती हैं। यह, दोनों उंगलियों पर घर्षण बलो में अन्तर के कारण होता हैं। यदि उंगलियों तथा पैमाने के बीच स्थैतिक व गतिक घर्षण गुणांक क्रमशः 0.40 व 0.32 है, तब x_R का मान (cm में) है ______.

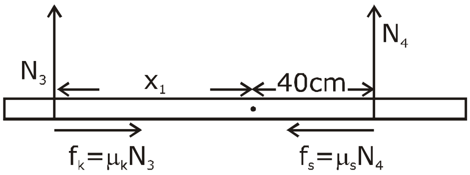
Sol. **25.60**

FBD of Rod

(Initial)



by balancing torque, we conclude $N_2 > N_1$, so $f_2 > f_1$



as rod does not move, only left finger slips,

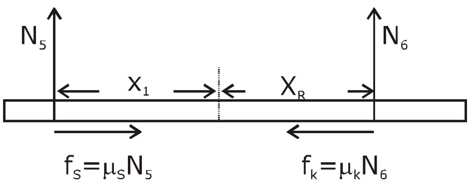
so $F_{net} = 0$ $\quad \mu_K N_3 = \mu_S N_4$

$0.32N_3 = 0.40\ N_4$ ....(1)

$\tau_{net_{about\ center}} = 0$, $x_1 N_3 = 40N_4$ ....(2)

dividing eq. (1)by(2)

$$\frac{0.32}{x_1} = \frac{0.40}{40} \Rightarrow x_1 = 32\text{cm}$$



$= F_{net} = 0,$ $\quad \mu_s N_5 = \mu_k N_6$

$0.40N_5 = 0.32N_6$ ...(3)

$\tau_{net} = 0,$ $\quad N_5 x_1 = N_6\, x_R$ ...(4)

about centre

div eq.(3) by eq.(4), $\dfrac{0.40}{x_1} = \dfrac{0.32}{x_R}$

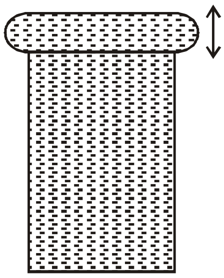
$$\frac{0.40}{32\text{cm}} = \frac{0.32}{x_R}$$

$$\Rightarrow X_R = \frac{32 \times 32}{40} = \frac{128}{5} = 25.60\text{cm}$$

Ans. 25.60

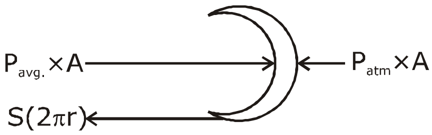
14. When water is filled carefully in a glass, one can fill it to a height h above the rim of the glass due to the surface tension of water. To calculate h just before water starts flowing, model the shape of the water above the rim as a disc of thickness h having semicircular edges, as shown schematically in the figure. When the pressure of water at the bottom of this disc exceeds what can be withstood due to the surface tension, the water surface breaks near the rim and water starts flowing from there. If the density of water, its surface tension and the acceleration due to gravity are 10^3kg m^{-3}, 0.07 Nm^{-1} and 10 ms^{-2}, respectively, the value of h (in mm) is _________.

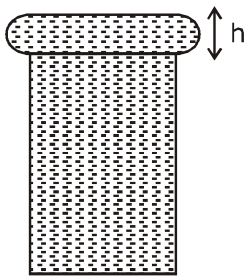
जब पानी एक कांच के गिलास (glass), में सावधानी पूर्वक भरा जाता है, कोई एक पानी के पष्ठ तनाव के कारण गिलास (glass) की रिम के ऊपर h ऊँचाई तक इसे भर सकता हैं। पानी के बहने प्रारम्भ होने के ठीक पहले h की गणना के लिये, चित्रानुसार अर्धवतीय किनारों वाली h मोटाई की एक चकती के जैसे रिम के उपर पानी के आकार को ढालते (model) है। जब इस चकती की तली पर पानी का दाब पष्ठ तनाव के कारण दाब से बढ़ता (exceeds) है, तब पानी की सतह रिम के नजदीक टूटती है तथा पानी वहां से बहना प्रारम्भ करता है। यदि पानी का घनत्व इसका पष्ठ तनाव तथा गुरूत्वीय त्वरण क्रमशः 10^3kg m^{-3}, 0.07 Nm^{-1} तथा 10 ms^{-2} है।। तब h का मान (mm में) है _________.



Sol. **3.74**

Let radius of disc = 'r'





[A = projected area = $h(2\pi r)$]

(after balancing effect of P_{atm} on both sides)

$S \times 2\pi r = P_{avg.} \times h(2\pi r)$

$$S = \left(\frac{\rho g h}{2}\right) \times h$$

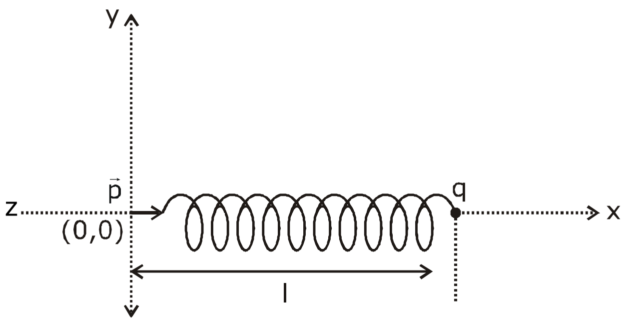
$$\frac{2S}{\rho g} = h^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{2S}{\rho g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.07}{10^3 \times 10}} = \sqrt{14} \times 10^{-3} m = 3.74mm$$

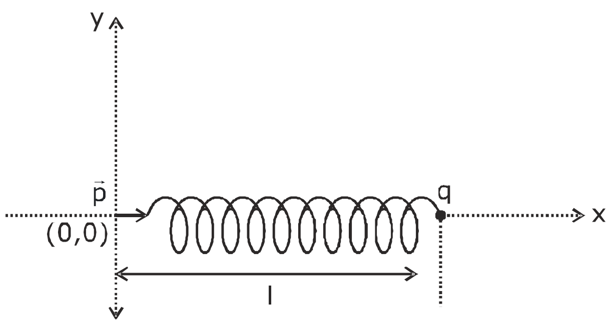
Ans. = 3.74

15. One end of a spring of negligible unstretched length and spring constant k is fixed at the origin (0,0). A point particle of mass m carrying a positive charge q is attached at its other end. The entire system is kept on a smooth horizontal surface. When a point dipole $\vec{p}$ pointing towards the charge q is fixed at the origin, the spring gets stretched to a length l and attains a new equilibrium position (see figure below). If the point mass is now displaced slightly by $\Delta l \ll l$ from its equilibrium position and released, it is found to oscillate at frequency $\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{k}{m}}$. The value of δ is ______.

k स्प्रिंग नियतांक तथा नगण्य अविस्तारित लम्बाई की एक स्प्रिंग का एक सिरा मूल बिन्दु (0,0) पर स्थिर है। q धनात्मक आवेश वहन करने वाला m द्रव्यमान का एक बिन्दु कण इसके दूसरें पर जोड़ा जाता है। सम्पूर्ण निकाय एक चिकनी क्षैतिज सतह पर रखा जाता है। जब एक बिन्दु द्विध्रुव $\vec{p}$ आवेश q की ओर निर्देशित है, जो मूल बिन्दु पर स्थिर है। स्प्रिंग l लम्बाई तक प्रसारित होती है तथा चित्रानुसार एक नई साम्यावस्था प्राप्त करती है। यदि अब बिन्दु द्रव्यमान इसकी साम्यावस्था से $\Delta l \ll l$ द्वारा हल्के से विस्थापित होता है तथा छोड़ा जाता है, तब यह $\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{k}{m}}$ आवति पर दोलन के लिए पाया जाता है। δ का मान है _______.



Sol. **3.14**



as we know, for spring block system,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}},$$

so we can also observe 'k' as $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|$ from eq.

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dU}{dx} = Kx$$

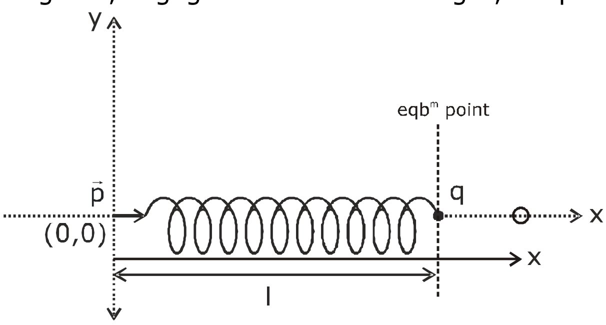
$$\frac{d^2U}{dx^2} = K$$

so we can say,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{d^2U/dx^2}{m}}$$

so by above concept let us find P.E., (U) of system from eqb^m.

As given, negligible unstretched length, so spring length is elongated length only.



$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{p \times q}{4\pi \in_0 x^2} \quad ....(1)$$

$$\frac{dU}{dx} = kx - \frac{2pq}{4\pi \in_0 x^3}$$

(for eqb^m, $\frac{dU}{dx} = 0$) given eqb^m at $x = \ell$

$\therefore K\ell = \dfrac{2pq}{4\pi \in_0 \ell^3}$ ...(2)

diff. eq(1) again, $\dfrac{d^2U}{dx^2} = K + \dfrac{6pq}{4\pi \in_0 x^4}$

as eqb^m at $x = \ell$, $\therefore \left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{at\ n=\ell} = K + \dfrac{6pq}{4\pi \in_0 \ell^4}$

(from (2) put value of $\dfrac{2pq}{4\pi \in_0 \ell^3}$)

$\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{at\ x=\ell}$ = k + 3K = 4K

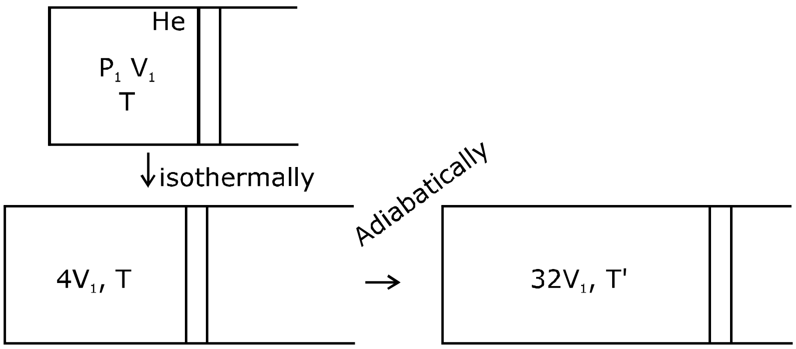
$\therefore f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{d^2U/dx^2}{m}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4K}{m}} = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\therefore \delta = \pi$ = 3.14 Ans.

16. Consider one mole of helium gas enclosed in a container at initial pressure P_1 and volume V_1. It expands isothermally to volume $4V_1$. After this, the gas expands adiabatically and its volume becomes $32V_1$. The work done by the gas during isothermal and adiabatic expansion processes are W_{iso} and W_{adia}, respectively. If the ratio $\dfrac{W_{iso}}{W_{adia}} = f \ln 2$, then f is ________.

माना हीलीयम गैस का एक मोल प्रारम्भिक दाब P_1 तथा आयतन V_1 पर एक पात्र में संलग्न (enclosed) हैं। यह समतापीय रूप से $4V_1$ आयतन तक प्रसारित होता है। इसके पश्चात गैस रूद्धोष्म रूप से प्रसारित होती है तथा इसका आयतन $32V_1$ हो जाता हैं। समतापीय तथा रूद्धोष्म प्रसार प्रक्रम के दौरान गैस द्वारा किया गया कार्य क्रमशः $W_{\text{समतापीय}}$ तथा $W_{\text{रूद्धोष्म}}$ है। यदि अनुपात $\dfrac{W_{\text{समतापीय}}}{W_{\text{रूद्धोष्म}}} = f \ln 2$ है, तब f है-

Sol. 1.77



$$TV^{\gamma-1} = \text{Constant}, \gamma = \frac{5}{3}$$

$$T' = T\left(\frac{4V_1}{32V_1}\right)^{\frac{5}{3}-1}$$

$$= T\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{T}{4}$$

$$W_{adb.} = \frac{nR(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

$$= \frac{nR\left(T - \frac{T}{4}\right)}{\frac{5}{3} - 1}$$

$$= \frac{3}{2}nR \times \frac{3T}{4} = \frac{9}{8}nRT$$

Now work done in isoth.;

$$W_{iso} = nRT\ \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$= nRT\ \ln\left(\frac{4V_1}{V_1}\right)$$

$$= 2nRT\ \ln 2$$

$$\frac{W_{iso}}{W_{adb}} = \frac{2nRT\ \ln 2}{\frac{9}{8}nRT}$$

$$= \frac{16}{9}\ln 2$$

$$\therefore \quad f = \frac{16}{9} = 1.77$$

17. A stationary tuning fork is in resonance with an air column in a pipe. If the tuning fork is moved with a speed of 2 ms^{-1} in front of the open end of the pipe and parallel to it, the length of the pipe should be changed for the resonance to occur with the moving tuning fork. If the speed of sound in air is 320 ms^{-1}, the smallest value of the percentage change required in the length of the pipe is ____________.

एक स्थिर स्वरित्र द्विभुज एक पाईप में एक वायु स्तम्भ के साथ अनुनाद में है। यदि स्वरित्र द्विभुज पाईप के खुलें सिरें के सामने तथा इसके समानान्तर 2 ms^{-1} की चाल से गतिमान है, तब गतिमान स्वरित्र द्विभुज के साथ अनुनाद घटित होने के लिए पाईप की लम्बाई परिवर्तित होना चाहिए। यदि हवा में ध्वनि की चाल 320 ms^{-1} है, तब पाईप की लम्बाई में आवश्यक प्रतिशत परिवर्तन का लघुतम मान है ____________.

Sol. **0.62**

For open pipe resonance, $f = \frac{nv}{4L}$

Let us consider for n = 1,
initial length of pipe = L_1 for f_1

$$\left(f_1 = \frac{V}{4L_1}\right) \quad .....(1)$$

Now due to Doppler's effect,

$$f_2 = \left(\frac{320}{320-2}\right)f_1$$

$$f_2 = \left(\frac{320}{318}\right) f_1 \qquad .....(2)$$

$$\therefore \qquad f_2 = \frac{V}{4L_2} \qquad .....(3)$$

$$\frac{320}{318} \times \frac{V}{4L_1} = \frac{V}{4L_2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{L_2}{L_1} = \frac{318}{320}$$

% charge in length,

$$\frac{\Delta L}{L} \times 100\% = \left(\frac{L_1 - L_2}{L_1}\right) \times 100\%$$

$$= \left(1 - \frac{L_2}{L_1}\right) \times 100\%$$

$$= \left(1 - \frac{318}{320}\right) \times 100\%$$

$$= \frac{200}{320}\% = \frac{5}{8}\% = 0.625\%$$

= 0.62%

Ans. 0.62

18. A circular disc of radius R carries surface charge density $\sigma(r) = \sigma_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$, where σ_0 is a constant and r is the distance from the center of the disc. Electric flux through a large spherical surface that encloses the charged disc completely is ϕ_0. Electric flux through another spherical surface of radius $\frac{R}{4}$ and concentric with the disc is ϕ. Then the ratio $\frac{\phi_0}{\phi}$ is__________.

R त्रिज्या की एक वतीय चकती पष्ठ आवेश घनत्व $\sigma(r) = \sigma_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ का वहन करती है, जहाँ σ_0 एक नियतांक है तथा r चकती के केन्द्र से दूरी हैं। एक बड़े गोलीय पष्ठ से गुजरने वाला फलस्क जो आवेशित चकती को पूर्णतः संलग्न करता है, ϕ_0 है। चकती के साथ संकेन्द्रीय तथा $\frac{R}{4}$ त्रिज्या के अन्य गोलीय पष्ठ से गुजरने वला फलस्क ϕ है। तब अनुपात $\frac{\phi_0}{\phi}$ है__________.

Sol. 6.4

Charge in the elemental ring = $\int_{r=0}^{r} \sigma 2\pi r dr$

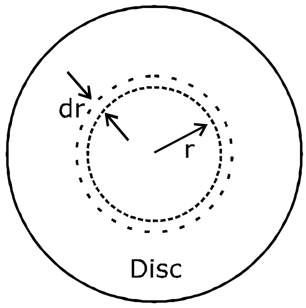
$\phi_0 = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$ (charge enclosed completely, so $r = R$)

& $\phi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$ (.. .. upto $r = \frac{R}{4}$)

$q = \int_0^r \sigma_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2\pi r dr$

$= 2\pi\sigma_0 \int_0^r r dr - \frac{2\pi\sigma_0}{R}\int_0^r r^2 dr$

$= 2\pi\sigma_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right]$



For ϕ_0, $r = R$, $q_{enc} = 2\pi\sigma_0 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right] = 2\pi\sigma_0 R^2 \times \frac{1}{6}$

For ϕ, $r = \frac{R}{4}$, $q'_{enc} = 2\pi\sigma_0 \left[\frac{\left(\frac{R}{4}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{R}{4}\right)^3}{3R}\right]$

$= 2\pi\sigma_0 \left[\frac{R^2}{2 \times 16} - \frac{R^2}{64 \times 3}\right]$

$= 2\pi\sigma_0 R^2 \left[\frac{6-1}{192}\right]$

$= 2\pi\sigma_0 R^2 \times \frac{5}{192}$

$\therefore \frac{\phi_0}{\phi} = \frac{192}{6 \times 5} = 6.4$

Ans. 6.4

JEE ADVANCED
27 September 2020
Chemistry Paper - 1

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full marks : +3 If ONLY the correct option is chosen;
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks : –1 In all other cases.

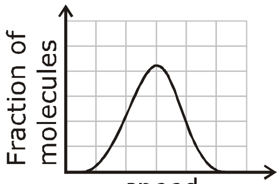
भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से केवल एक ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

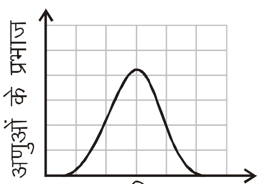
पूर्ण अंक : +3 केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक : –1 अन्य सभी स्थितियों में।

---

1. If the distribution of molecular speeds of a gas is as per the figure shown below, then the ratio of the most probable, the average, and the root mean square speeds, respectively, is



यदि एक गैस का आण्विक गति का वितरण निम्नांकित चित्रानुसार है, तो अधिकतम प्रायिक वेग, औसत वेग तथा वर्ग माध्य मूल मान का अनुपात, क्रमशः हैः



(A) 1 : 1 : 1
(B) 1 : 1 : 1.224
(C) 1 : 1.128 : 1.224
(D) 1 : 1.128 : 1

Ans. **B**

By observing the graph we get

$u_{mps} : u_{avg} : u_{rms} = 1 : 1 : 1.224$

2. Which of the following liberates O_2 upon hydrolysis?

निम्न में से कौन जलअपघटन होने पर O_2 मुक्त करता है?

(A) Pb_3O_4 (B) KO_2 (C) Na_2O_2 (D) Li_2O_2

Ans. **B**

Superoxides liberate oxygen with water

$$2KO_2 + H_2O \longrightarrow 2KOH + H_2O_2 + O_2$$

3. A colorless aqueous solution contains nitrates of two metals, X and Y. When it was added to an aqueous solution of NaCl, a white precipitate was formed. This precipitate was found to be partly soluble in hot water to give a residue P and a solution Q. The residue P was soluble in aq. NH_3 and also in excess sodium thiosulfate. The hot solution Q gave a yellow precipitate with KI. The metals X and Y, respectively, are

(A) Ag and Pb (B) Ag and Cd (C) Cd and Pb (D) Cd and Zn

एक रंगहीन जलीय विलयन में दो धातुओं, X तथा Y के नाईट्रेट होते है। जब इसे NaCl के एक जलीय वियलन में मिलाया जाता है, तो एक श्वेत अवक्षेप बनता है। यह अवक्षेप एक अवशेष P तथा एक विलयन Q देने के लिए गर्म जल में आंशिक रूप से विलेय पाया गया है। अवशेष P जलीय NH_3 तथा सोडियम थायोसल्फेट के आधिक्य में भी घुलनशील है। KI के साथ गर्म विलयन Q एक पीला अवक्षेप देता है। X तथा Y धातुऐं, क्रमशः है–

(A) Ag तथा Pb (B) Ag तथा Cd (C) Cd तथा Pb (D) Cd तथा Zn

Ans. **A**

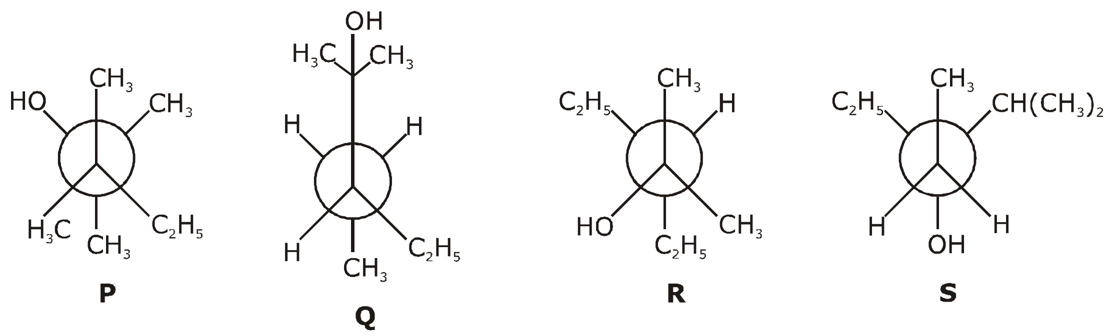
(1) $\underset{\text{solution}}{AgNO_3 + Pb(NO_3)_2} \xrightarrow{NaCl} \underset{\text{white ppt}}{AgCl} + \underset{\text{white ppt, partially soluble in hot water}}{PbCl_2}$

(2) $\underset{\text{(residue-p)}}{AgCl} + NH_3 \longrightarrow \underset{\text{(soluble complex)}}{[Ag(NH_3)_2]\ Cl}$

(3) $\underset{\text{(residue-p)}}{AgCl} + \underset{\text{(excess)}}{2Na_2S_2O_3} \longrightarrow \underset{\text{(soluble complex)}}{Na_3[Ag(S_2O_3)]}$

(4) $\underset{\text{(hot solution-Q)}}{PbCl_2} + 2KI \longrightarrow \underset{\text{(yellow ppt)}}{PbI_2}$

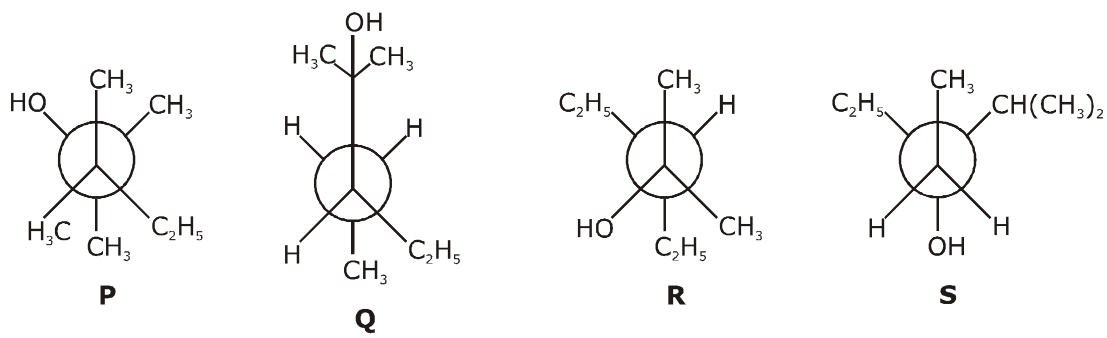
4. Newman projections P, Q, R and S are shown below :



Which one of the following options represents identical molecules ?

(A) P and Q (B) Q and S (C) Q and R (D) R and S

न्यूमैन प्रक्षेपण P, Q, R तथा S को निम्नानुसार दर्शाया गया है–

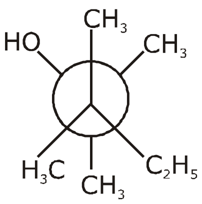


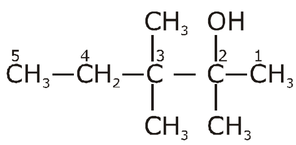
निम्न में से कौनसा एक विकल्प समान अणु प्रदर्शित करता है?

(A) P तथा Q (B) Q तथा S (C) Q तथा R (D) R तथा S

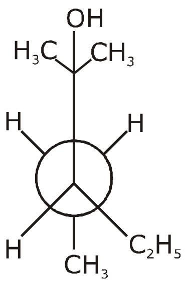
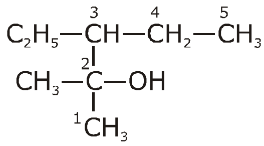
Ans. **C**

(P)

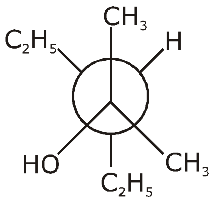
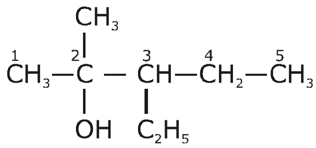




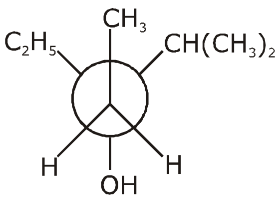
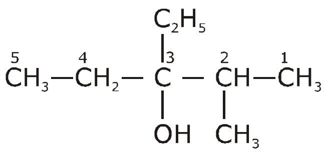
2,3,3-trimethyl Pentan-2-ol

(Q)  

3-Ethyl-2-methyl Pentan-2-ol

(R)  

3-Ethyl-2-methyl Pentan-2-ol

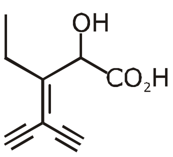
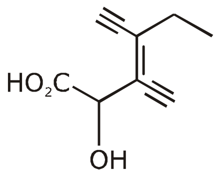
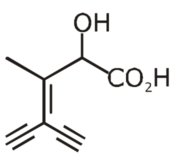
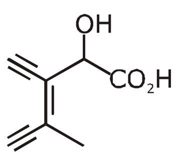
(S)  

3-Ethyl-2-methyl Pentan-3-ol

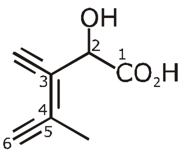
5. Which one of the following structures has the IPUAC name 3-ethynyl-2-hydroxy-4-methylhex-3-en-5-ynoic acid ?

निम्न में से IPUAC नाम

3- एथिनील -2-हाइड्रॉक्सी -4- मेथिलहैक्स-3-ईन-5-आइनॉइक अम्ल वाली संरचना कौनसी है?

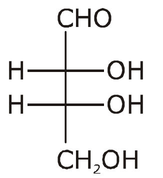
(A)  (B)  (C)  (D) 

Ans. **D**



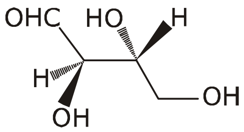
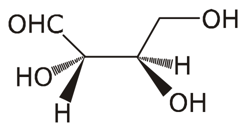
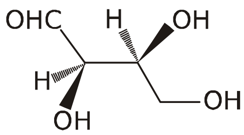
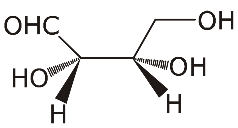
3-ethynyl-2-hydroxy-4-methylhex-3-en-5-ynoic acid

6. The Fischer projection of D-erythrose is shown below :

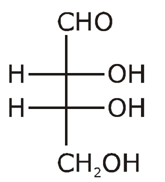


D-Erythrose

D-Erythrose and its isomers are listed as P, Q, R, and S in Column-I. Choose the correct relationship of P, Q, R, and S with D-erythrose from Column II.

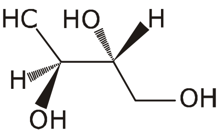
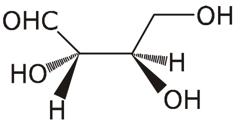
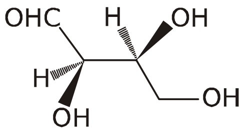
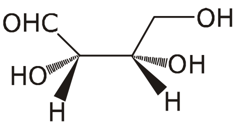
Column – I	**Column – II**
P. 	1. Diastereomer
Q. 	2. Identical
R. 	3. Enantiomer
S. 	

D-इरीथ्रो का फिशर प्रक्षेपण नीचे दर्शाया गया है।



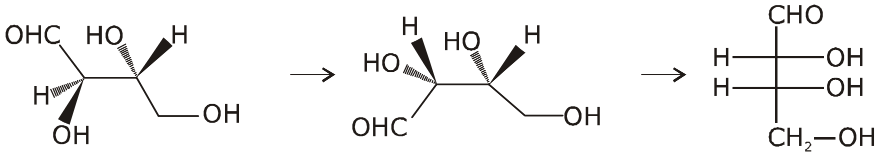
D-इरीथ्रो

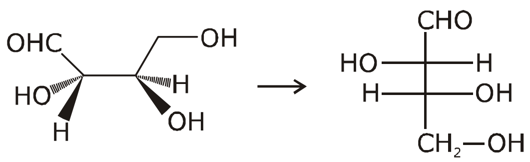
स्तम्भ -I में D- इरीथ्रो तथा इसके समावयवी P, Q, R तथा S के रूप में अंकित है। स्तम्भ II से D- इरीथ्रो वाले P, Q, R तथा S के सही सम्बन्ध का चयन कीजिये।

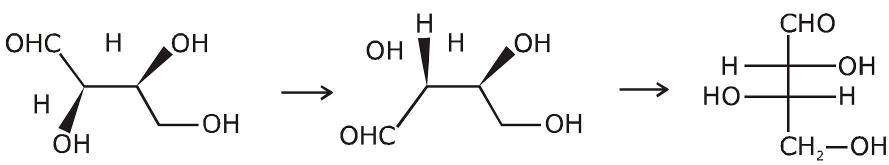
स्तम्भ – I	स्तम्भ – II
P. 	1. डाईस्टीरियोमर
Q. 	2. समरूप
R. 	3. प्रतिबिम्बरूपी (इनेन्शियोमर)
S. 	

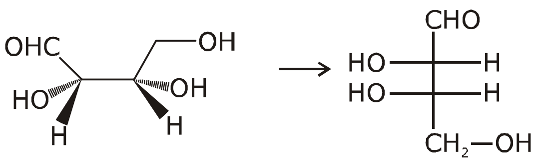
(A) P → 2, Q→ 3, R→ 2, S→ 2
(B) P → 3, Q→ 1, R→ 1, S→ 2
(C) P → 2, Q→ 1, R→ 1, S→ 3
(D) P → 2, Q→ 3, R→ 3, S→ 1

Ans. **C**

P. 

Q. 

R. 

S. 

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four options(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks	: +4	If only (all) the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4	यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3	यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2	यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1	यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2	अन्य सभी स्थितियों में।

---

7. In thermodynamics, the P–V work done is given by $w = -\int dV\, P_{ext}$.

For a system undergoing a particular process, the work done is, $w = -\int dV\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)$

This equation is applicable to a

(A) system that satisfies the van der Waals equation of state.

(B) process that is reversible and isothermal.

(C) process that is reversible and adiabatic.

(D) process that is irreversible and at constant pressure.

ऊष्मागतिकी में, किया गया कार्य P–V निम्न द्वारा दिया गया है $w = -\int dV\, P_{ext}$

एक विशेष प्रक्रिया से गुजरने वाले तंत्र के लिए, किया गया कार्य है, $w = -\int dV\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)$

यह समीकरण निम्न में से किसके लिए उपयुक्त है–

(A) एक तंत्र जो अवस्था की वाण्डर वाल्स समीकरण को संतुष्ट करता है।

(B) एक प्रक्रिया जो उत्क्रमणीय तथ समतापीय है।

(C) एक प्रक्रिया जो उत्क्रमणीय तथा रूद्धोष्म है।

(D) एक प्रक्रिया जो अनुत्क्रमणीय तथा स्थिर दाब पर है।

Ans. **A,B,C**

$w = -\int P_{ext.} dV$

$P_{ext.} = \left[\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right] = P_{gas}$

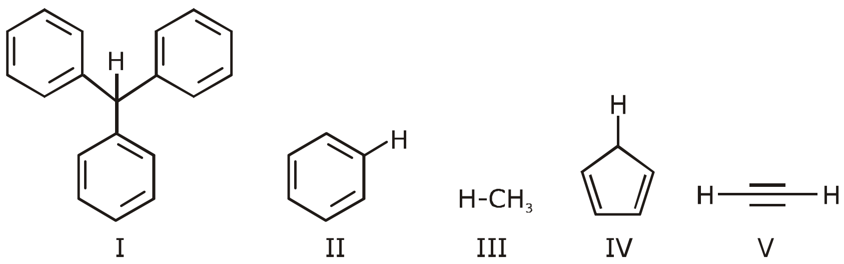
$\Downarrow$

process is reversible

$P_{gas} = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ is Van der waals equation of state.

Hence Ans. A,B,C

8. With respect to the compounds I–V, choose the correct statement(s).



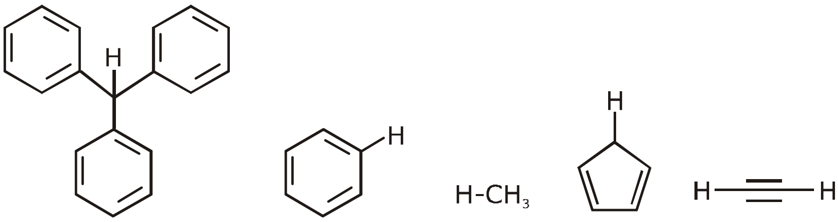
(A) The acidity of compound I is due to delocalization in the conjugate base.

(B) The conjugate base of compound IV is aromatic.

(C) Compound II becomes more acidic, when it has a $-NO_2$ substituent.

(D) The acidity of compounds follows the order I > IV > V > II > III.

यौगिक I–V के साक्षेप, सही कथन का चयन कीजिये–



I II III IV V

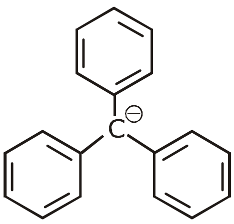
(A) यौगिक I की अम्लीयता संयुग्मी क्षार में विस्थापन के कारण होती है।

(B) यौगिक IV का संयुग्मी क्षार एरौमेटिक है।

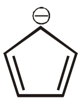
(C) यौगिक II अधिक अम्लीय हो जाता है, जब यह एक $-NO_2$ प्रतिस्थापी रखता है।

(D) यौगिकों की अम्लीयता इस क्रमानुसार है I > IV > V > II > III.

Ans. A,B,C

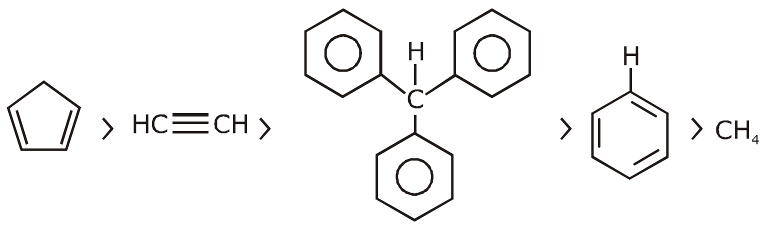
(A) 

is a conjugate base of compound I. Which is stable by delocalisation or resonance.

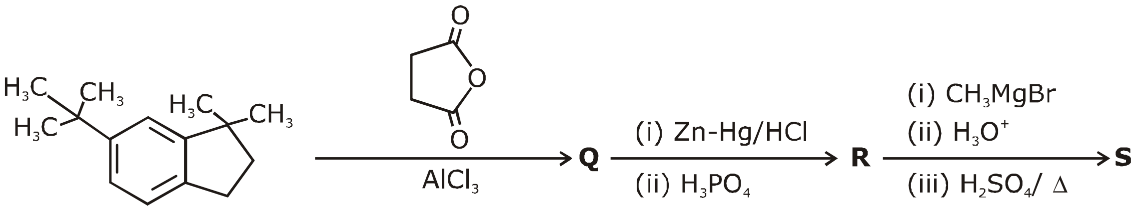
(B)  is a conjugate base of , which is aromatic compound.

(C) $-NO_2$ group is strong electron withdrawing group which increases acidic strength of compound $H-CH_3$.

(D) The order of acidic strength

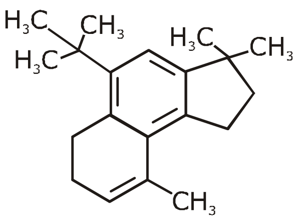


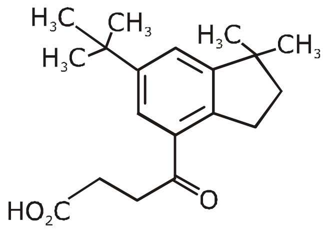
9. In the reaction scheme shown below, Q, R and S are the major products.

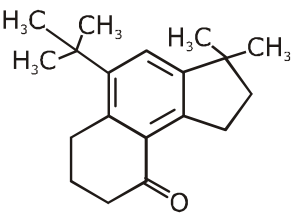


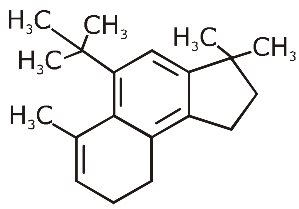
P

The correct structure of

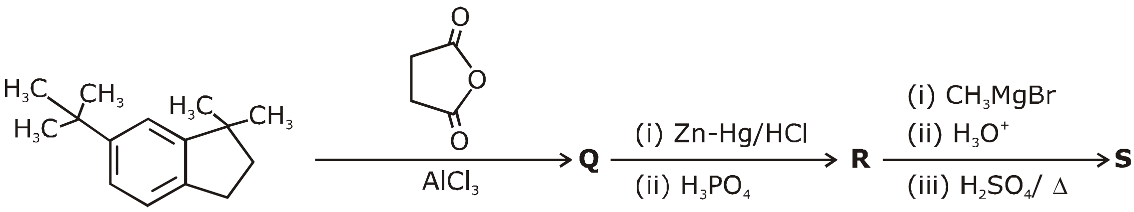
(A) S is 

(B) Q is 

(C) R is 

(D) S is 

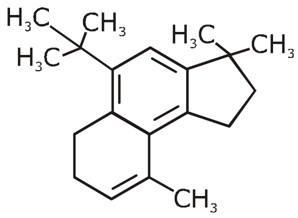
निम्नलिखित अभिक्रिया प्रक्रम में, Q, R तथा S मुख्य उत्पाद हैं।



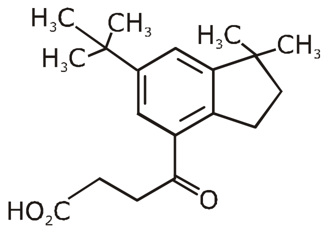
P

सही संरचना है–

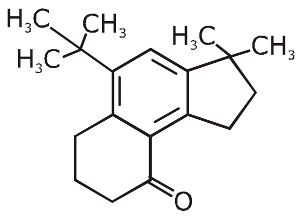
(A) S की है



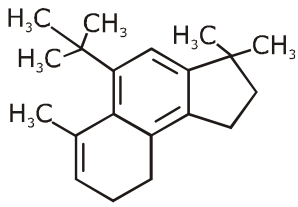
(B) Q की है



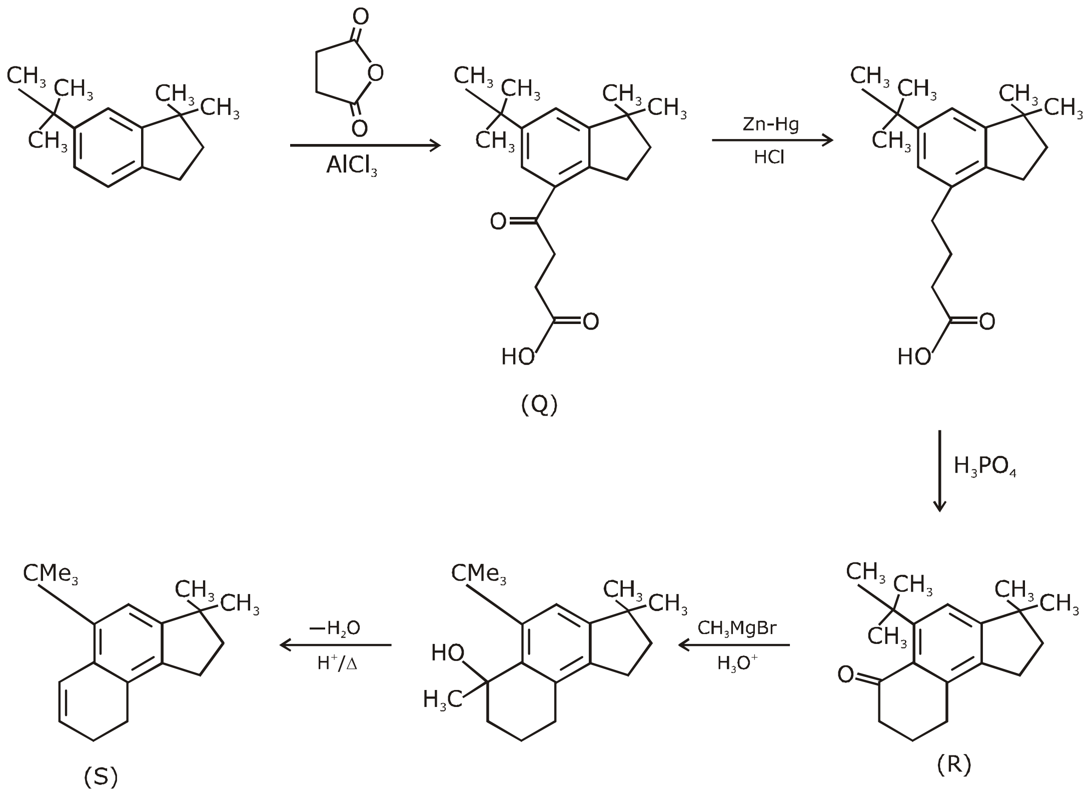
(C) R की है



(D) S की है



Ans. **B,D**



10. Choose the correct statement(s) among the following:

(A) $[FeCl_4]^-$ has tetrahedral geometry.

(B) $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ has 2 geometrical isomers.

(C) $[FeCl_4]^-$ has higher spin-only magnetic moment than $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$.

(D) The cobalt ion in $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ has sp^3d^2 hybridization.

निम्न में से सही कथन का चयन कीजिये–

(A) $[FeCl_4]^-$ चतुष्फलकीय ज्यामिति रखता है

(B) $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ 2 ज्यामितीय समावयवी रखता है

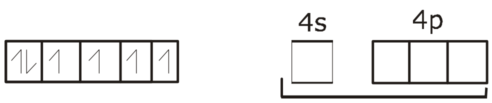
(C) $[FeCl_4]^-$, $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ की अपेक्षा उच्चतम चक्रण–केवल चुम्बकीय आघूर्ण रखता है

(D) $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ में कोबाल्ट आयन sp^3d^2 संकरण रखता है।

Ans. A,C

(A) $[FeCl_4]^-$ Cl^- is weak field ligand

Fe^{+3} =



sp^3 - hybridization

n = 4 , $\mu_{(s)} = \sqrt{24}$

(C) $[CO(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$

$CO^{3+} \Rightarrow (3d^6)$, $(\Delta_0 > P)$

$t_{2g}^6\, e_g$, n = 0, $\mu = 0$

hybridization $\rightarrow$ d^2sp^3

11. With respect to hypochlorite, chlorate and perchlorate ions, choose the correct statement(s).

(A) The hypochlorite ion is the strongest conjugate base.

(B) The molecular shape of only chlorate ion is influenced by the lone pair of electrons of Cl.

(C) The hypochlorite and chlorate ions disproportionate to give rise to identical set of ions.

(D) The hypochlorite ion oxidizes the sulfite ion.

हाइपोक्लोराइट, क्लोरेट तथा परक्लोरेट के सापेक्ष, सही कथन का चयन कीजिये–

(A) हाइपोक्लोराइट आयन प्रबलतम संयुग्मी क्षार है।

(B) केवल क्लोरेट आयन की आण्विक आकति Cl के एकाकी इलेक्ट्रॉन युग्म द्वारा प्रभावित है।

(C) हाइपोक्लोराइट तथा क्लोरेट आयन, आयनों के समान समूहों के निर्माण के लिए विषमानुपातन करते है।

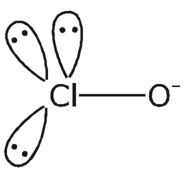
(D) हाइपोक्लोराइट आयन सल्फाइट आयन का ऑक्सीकरण करता है।

Ans. A,B,D

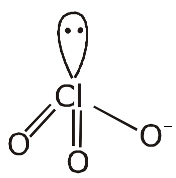
Acidic nature $\rightarrow HClO < HClO_3 < HClO_4$

Basic nature $\rightarrow ClO^- > ClO_3^- > ClO_4^-$

(B)



sp^3 (Linear)



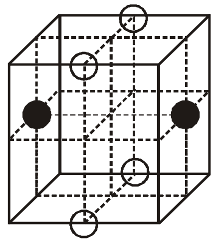
Sp^3 (pyramidal)

(C) $\overset{(+1)}{3OCl^-} \xrightarrow{\text{hot}} \overset{(-1)}{2Cl^-} + \overset{(+5)}{ClO_3^-}$

$\overset{(+5)}{4ClO_3^-} \xrightarrow[\text{Lower temp.}]{\text{absence of catalyst}} \overset{+7}{3ClO_4^-} + \overset{(-1)}{Cl^-}$

(D) $ClO^- + SO_3^- \longrightarrow Cl^- + SO_4^{2-}$

12. The cubic unit cell structure of a compound containing cation M and anion X is shown below. When compared to the anion, the cation has smaller ionic radius. Choose the correct statement(s).
निम्नानुसार एक यौगिक की घनीय इकाई कोष्ठिका धनायन M तथा ऋणायन X युक्त है। ऋणायन की तुलना में धनायन छोटी आयनिक त्रिज्या रखता है।
सही कथन का चयन कीजिये।



(A) The empirical formula of the compound is MX.
(B) The cation M and anion X have different coordination geometries.
(C) The ratio of M-X bond length to the cubic unit cell edge length is 0.866.
(D) The ratio of the ionic radii of cation M to anion X is 0.414.
(A) यौगिक का मूलानुपाती सूत्र MX है।
(B) धनायन M तथा ऋणायन X भिन्न उपसहसंयोजक ज्यामितियां रखते है।
(C) M-X बन्ध लम्बाई तथा घनीय इकाई कोष्ठिका कोर लम्बाई का अनुपात 0.866 है।
(D) धनायन M तथा ऋणायन X की आयनिक त्रिज्या का अनुपात 0.414 है।

Ans. A,C

According to given diagram, structure seems to be B.C.C.
(1) empirical formula $\rightarrow$ MX
(2) C. No. of 'M' ion = 8 [same co-ordination Geometry]
C. No. of 'X' ion = 8 [same co-ordination Geometry]

(3) $$\text{M–X Bond Length} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\text{M–X Bond Length} = a\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\text{M} - \text{X bond length}}{\text{a(edge length)}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

(4) As it is B.C.C.

$$r_{X^-} + r_{M^+} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

$$0.732 \le \frac{r_{M^+}}{r_{X^-}} < 1$$

Ans. A,C

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, truncate/round -off the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

  Full marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;

  Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

  पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।

  शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

13. 5.00 mL of 0.10 M oxalic acid solution taken in a conical flask is titrated against NaOH from a burette using phenolphthalein indicator. The volume of NaOH required for the appearance of permanent faint pink color is tabulated below for five experiments. What is the concentration, in molarity, of the NaOH solution?

Exp. No.	Vol. of NaOH (mL)
1	12.5
2	10.5
3	9.0
4	9.0
5	9.0

0.10 M ऑक्सेलिक अम्ल विलयन का 5.00 mL एक शंक्वाकार (conical) फ्लास्क में लेकर फिनॉलफ्थैलीन सूचक का उपयोग करते हुए एक ब्यूरेट द्वारा NaOH के विरूद्ध अनुमापित किया जाता है। स्थायी गुलाबी रगं की उपस्थिति के लिए आवश्यक NaOH का आयतन पॉच प्रयोगों के लिए नीचे सारणीबद्ध है। NaOH विलयन की सान्द्रता, मोलरता में क्या है ?

प्रयोग संख्या	NaOH का आयतन (mL)
1	12.5
2	10.5
3	9.0
4	9.0
5	9.0

Ans. 0.11

$H_2C_2O_4 + 2NaOH \longrightarrow Na_2C_2O_4 + 2H_2O$

5ml M

0.1 M

$$M = [NaOH] = \frac{[H_2C_2O_4] \times vol. \times 2}{vol.\ of\ NaOH}$$

$$[NaOH]_1 = \frac{5 \times 0.1 \times 2}{12.5} = \frac{1}{12.5}$$

$$[NaOH]_2 = \frac{5 \times 0.1 \times 2}{10.5} = \frac{1}{10.5}$$

$$[NaOH]_3 = \frac{5 \times 0.1 \times 2}{9} = \frac{1}{9} = [NaOH]_4 = [NaOH]_5$$

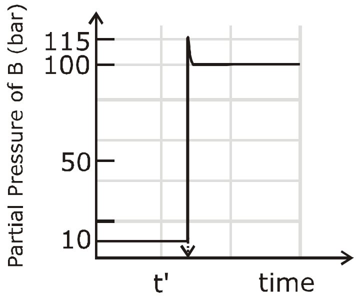
$$[NaOH]\ \text{Final Result} = \frac{\frac{1}{12.5} + \frac{1}{10.5} + \frac{1}{9} \times 3}{5}$$

$$= \frac{\left[\frac{2}{25} + \frac{2}{21} + \frac{1}{3}\right]}{5}$$

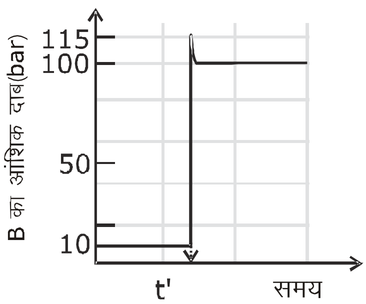
$$= \frac{0.08 + 0.095 + 0.333}{5}$$

$= 0.102 \simeq 0.11$ Ans.

14. Consider the reaction A $\rightleftharpoons$ B at 1000 K. At time 't'. the temperature of the system was increased to 2000 K and the system was allowed to reach equilibrium. Throughout this experiment the partial pressure of A was maintained at 1 bar. Given below is the plot of the partial pressure of B with time. What is the ratio of the standard Gibbs energy of the reaction at 1000 K to that at 2000 K?



1000 K पर अभिक्रिया A $\rightleftharpoons$ B पर विचार कीजिये। समय 't' पर, तंत्र का तापमान 2000 K तक बढ़ जाता है तथा तंत्र को साम्य तक पहुँचने दिया जाता है इस प्रयोग के दौरान A का आंशिक दाब 1 बार बनाए रखा गया था। नीचे समय के साथ B के आंशिक दाब का वक्र दिया गया है। 1000 K तथा 2000 K पर अभिक्रिया की मानक गिब्स ऊर्जा का अनुपात क्या है ?



Ans. 0.25

$K_{eq.\ 2000\ K} = 100$

$K_{eq.\ 1000\ K} = 10$

$\Delta G_{2000} = -\ 2000\ R\ ln\ (100) = -\ 4000\ R\ (ln\ 10)$

$\Delta G_{1000} = -\ 1000\ R\ ln\ (10) = -\ 1000\ R\ (ln\ 10)$

$$\frac{\Delta G_{2000}}{\Delta G_{1000}} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{\Delta G_{1000}}{\Delta G_{2000}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Ans. = 0.25

15. Consider a 70% efficient hydrogen-oxygen fuel cell working under standard conditions at 1 bar and 295 K. Its cell reaction is

$$H_2(g) + O_2(g) \rightarrow H_2O(l).$$

The work derived from the cell on the consumption of 1.0×10^{-3} mol of $H_2(g)$ is used to compress 1.00 mol of a monoatomic ideal gas in a thermally insulated container. What is the change in the temperature (in K) of the ideal gas?
The standard reduction potentials for the two half-cells are given below.

$$O_2(g) + 4H^+ (aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l),\ E^0 = 1.23\ V,$$
$$2H^+ (aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g),\ E^0 = 0.00V.$$

Use F = 96500 C mol^{-1}, R = 8.314 J mol^{-1} K^{-1}.

1 bar तथा 298 K पर मानक अवस्था में कार्यरत एक 70% दक्ष हाइड्रोजन–ऑकसीजन ईंधन सेल पर विचार कीजिये। इस सेल की अभिक्रिया है–

$$H_2(g) + O_2(g) \rightarrow H_2O(l).$$

1.0×10^{-3} mol $H_2(g)$ के खपत पर सेल द्वारा व्युत्पन्न कार्य को एक ताप रोधित पात्र में 1.00 mol एकलपरमाण्विक आदर्श गैस के संपीडन में उपयोग किया जाता है।
आदर्श गैस के तापमान में परिवर्तन (K में) क्या है ?

$$O_2(g) + 4H^+ (aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l),\ E^0 = 1.23\ V,$$
$$2H^+ (aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g),\ E^0 = 0.00V.$$

Use F = 96500 C mol^{-1}, R = 8.314 J mol^{-1} K^{-1}.

Ans. **13.32**

E^0_{cell} = 1.23 volt

$\Delta G^0 = \{-2 \times 96500 \times 1.23\}$

Energy used $= \left[2 \times 96500 \times 1.23 \times 70\% \times 10^{-3}\right]$

$= 1 \times \frac{3}{2} \times 8.314 \times (\Delta T)$

$$\Delta T = \frac{4 \times 96500 \times 1.23 \times 70 \times 10^{-3}}{100 \times 3 \times 8.314}$$

$= 13.32$

16. Aluminium reacts with sulfuric acid to form aluminium sulfate and hydrogen. What is the volume of hydrogen gas in liters (L) produced at 300 K and 1.0 atm pressure, when 5.4 g of aluminium and 50.0 mL of 5.0 M sulfuric acid are combined for the reaction?
(Use molar mass of aluminium as 27.0 g mol^{-1}, R = 0.082 atm L mol^{-1} K^{-1})
एल्यूमिनियम, सल्फयूरिक अम्ल के साथ क्रिया करके एल्यूमिनियम सल्फेट तथा हाइड्रोजन का निर्माण करता है 300 K तथा 1.0 atm दाब पर उत्पन्न हाइड्रोजन गैस का आयतन लीटर में (L) क्या है, जब 5.4 g एल्यूमिनियम तथा 5.0 M सल्फ्यूरिक अम्ल का 50.0 mL अभिक्रिया के लिए संयोजित होते है ?
(एल्यूमिनियम का मोलर द्रव्यमान 27.0 g mol^{-1} उपयोग कीजिये R = 0.082 atm L mol^{-1} K^{-1})

Ans. **6.15 Liter**

$$2Al + 3H_2SO_4 \longrightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3H_2$$

0.2 mol $\quad \frac{50 \times 5}{1000} = 0.25 mol$
(L.R.)

Volume = $\frac{1}{4} \times 0.082 \times 300$

= $\frac{24.6}{4}$

= 6.15 Litre.

17. $^{238}_{92}U$ is known to undergo radioactive decay to form $^{206}_{82}Pb$ by emitting alpha and beta particles. A rock initially contained 68 x 10^{-6} g of $^{238}_{92}U$. If the number of alpha particles that it would emit during its radioactive decay of $^{238}_{92}U$ to $^{206}_{82}Pb$ in three half-lives is Z × 10^{18}. then what is the value of Z?

अल्फा तथा बीटा कणों के उत्सर्जन द्वारा $^{206}_{82}Pb$ के निर्माण के लिए $^{238}_{92}U$ रेडियोधर्मी क्षय से गुजरता है। एक चट्टान (rock) प्रारम्भिक रूप से 68 x 10^{-6} g $^{238}_{92}U$ युक्त होती है। तीन अर्द्ध–आयुफालों में $^{238}_{92}U$ से $^{206}_{82}Pb$ के रेडियोधर्मी क्षय दौरान उत्सर्जित अल्फा कणों की संख्या Z × 10^{18} है, जब Z का मान क्या है ?

Ans. **1.21**

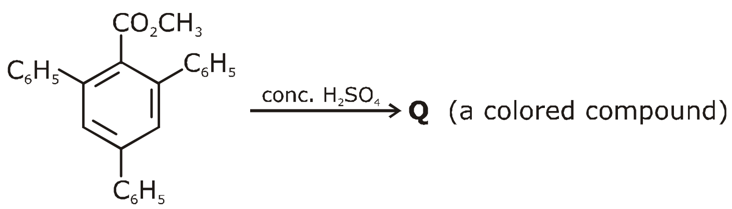
$_{92}U^{238} \longrightarrow {}_{82}Pb^{206} + 8\,{}_2He^4 + 6\,{}_{-1}\beta^0$ (antineutrino)

$\left[\frac{68 \times 10^{-6}}{238}\right] \times \frac{7}{8} \times 8 \times 6.023 \times 10^{23}$

= $\frac{68 \times 7 \times 6.023 \times 10^{+17}}{238}$

= 1.2046 × 10^{18} = 1.21

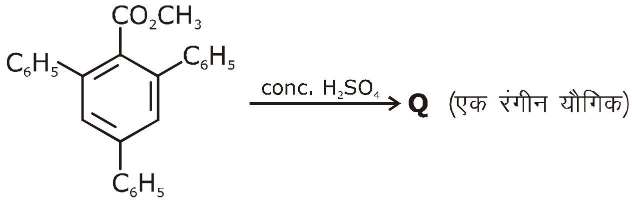
18. In the following reaction, compound Q is obtained from compound P via an ionic intermediate.



P

What is the degree of unsaturation of Q ?

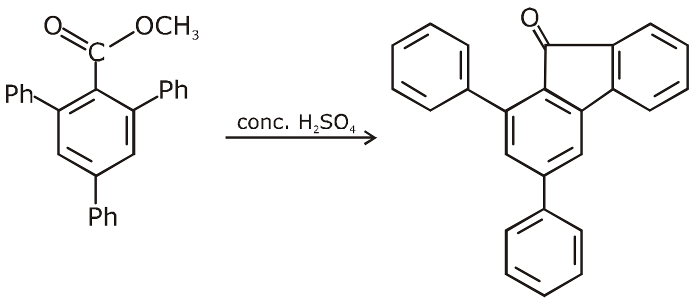
निम्न अभिक्रिया में, एक आयनिक माध्यम से यौगिक P द्वारा यौगिक Q प्राप्त किया गया है।



P

Q की असंतप्तता की मात्रा क्या है ?

Ans. 18



(Q)

Total degree of unsaturation = 18

JEE ADVANCED
27 September 2020
Mathematics Paper - 1

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

  Full marks : +3 If ONLY the correct option is chosen;
  Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
  Negative Marks : –1 In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से केवल एक ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

  पूर्ण अंक : +3 केवल सही विकल्प चुना जाता है।
  शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
  ऋणात्मक अंक : –1 अन्य सभी स्थितियों में।

---

1. Suppose a,b denote the distinct real roots of the quadratic polynomial $x^2 + 20x - 2020$ and suppose c,d denote the distinct complex roots of the quadratic polynomial $x^2 - 20x + 2020$. Then the value of $ac(a-c) + ad(a-d) + bc(b-c) + bd(b-d)$ is

(A) 0 (B) 8000 (C) 8080 (D) 16000

1. माना a,b द्विघात बहुपद $x^2 + 20x - 2020$ के भिन्न–भिन्न वास्तविक मूल को दर्शाते है तथा माना c,d द्विघात बहुपद $x^2 - 20x + 2020$ के भिन्न–भिन्न सम्मिश्र मूल को दर्शाते है। तब $ac(a-c) + ad(a-d) + bc(b-c) + bd(b-d)$ का मान है –

(A) 0 (B) 8000 (C) 8080 (D) 16000

Ans. **D**

$x^2 + 20x - 2020 = 0$ → a, b

$a + b = -20$ & $a.b = -2020$

& $x^2 - 20x + 2020 = 0$ → c, d

$c + d = 20$ & $c.d = 2020$

Now

$= ac(a - c) + ad(a - d) + bc(b - c) + bd(b - d)$

$= a^2(c + d) + b^2(c + d) - c^2(a + b) - d^2(a + b)$

$= (a^2 + b^2)(c + d) - (a + b)(c^2 + d^2)$

$= ((a+b)^2 - 2ab)((c + d) - (a + b)((c + d)^2 - 2cd)$

$= ((400 + 4040)(20) - (-20)((20)^2 - 4040)$
$= 20[4440 - 3640]$
$20[800] = 16000$

2. If the function $f:R \rightarrow R$ is defined by $f(x) = |x|\,(x-\sin x)$, then which of the following statements is TRUE ?

(A) f is one-one, but NOT onto
(B) f is onto, but NOT one-one
(C) f is BOTH one-one and onto
(D) f is NEITHER one-one NOR onto

2. यदि फलन $f:R \rightarrow R$, $f(x) = |x|\,(x-\sin x)$, के द्वारा परिभाषित है। तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) f एकेकी है लेकिन आच्छादक नही है।
(B) f आच्छादक है लेकिन एकेकी नही है।
(C) f एकेकी तथा आच्छादक दोनो है।
(D) f ना तो एकेकी ना आच्छादक है।

Ans. C

$f(x) = |x|(x - \sin x)$
$f(-x) = -(|x|(x - \sin x))$
$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ is odd
$\Rightarrow R_f = R = c.d_f =$ onto
Now

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - \sin x - x\cos x & x \geq 0 \\ -2x + \sin x + x\cos x & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall \ x \in R$
$\Rightarrow$ f is one - one

3. Let the functions $f:R \rightarrow R$ and $g:R \rightarrow R$ be defined by

$f(x) = e^{x-1} - e^{-|x-1|}$ and $g(x) = \frac{1}{2}\,(e^{x-1} + e^{1-x})$.

Then the area of the region in the first quadrant bounded by the curves $y = f(x)$, $y = g(x)$ and $x = 0$ is.

(A) $(2 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e - e^{-1})$
(B) $(2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e - e^{-1})$
(C) $(2 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e + e^{-1})$
(D) $(2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e + e^{-1})$

3. माना फलन $f:R \to R$ तथा $g:R \to R, f(x) = e^{x-1} - e^{-|x-1|}$ तथा $g(x) = \frac{1}{2}(e^{x-1}+e^{1-x})$ के द्वारा परिभाषित है। तब वक्रो $y = f(x)$, $y = g(x)$ तथा $x = 0$ द्वारा परिबद्ध प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा –

(A) $(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(e-e^{-1})$

(B) $(2+\sqrt{3})+\frac{1}{2}(e-e^{-1})$

(C) $(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(e+e^{-1})$

(D) $(2+\sqrt{3})+\frac{1}{2}(e+e^{-1})$

Ans. **A**

$f(x) = e^{x-1} - e^{-|x-1|}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - e^{-(x-1)} & x \geq 1 \\ e^{x-1} - e^{(x-1)} = 0 & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

$\&\ g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right)$

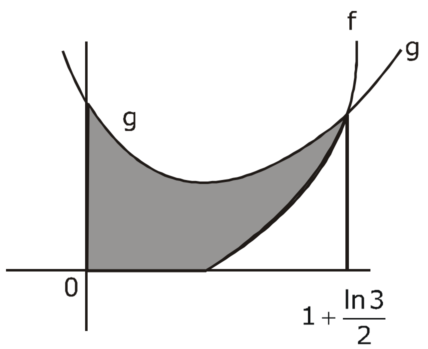
Now $f(x) = g(x)$

$e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right)$

$2e^{x-1} - \frac{2}{e^{x-1}} = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}$

$e^{x-1} - \frac{3}{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow e^{x-1} = \sqrt{3}$

$x = 1 + \frac{\ln 3}{2}$



$$\text{Area} = \int_0^1 \left(g(x) - 0\right) + \int_1^{1+\frac{\ln 3}{2}} \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right) + \int_1^{1+\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right) - \left(e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}}\right) dx$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{2} + 2 - \sqrt{3}$$

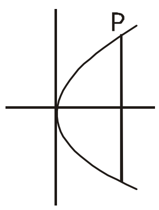
4. Let a, b and λ be positive real numbers. Suppose P is an end point of the latus rectum of the parabola $y^2 = 4\lambda x$, and suppose the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passes through the point P. If the tangents to the parabola and the ellipse at the point P are perpendicular to each other, then the eccentricity of the ellipse is.

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$

4. माना a, b तथा λ धनात्मक वास्तविक संख्याए है। माना P परवलय $y^2 = 4\lambda x$ के आभिलम्ब का एक अंत बिंदू है तथा माना दीर्घवत $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ बिन्दू P से गुजरता है। यदि बिन्दू P पर परवलय तथा दीर्घवत्त की स्पर्श रेखाएं एक दूसरे के लम्बवत है, तब दीर्घवत्त की उत्केन्द्रता होगी –

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$

Ans. **A**



$P(\lambda, 2\lambda)$

Now E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Passes through P

$$\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{4\lambda^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}=\frac{1}{\lambda^2} \qquad \ldots(1)$$

Now $m_T\Big|_p^{p_{ar}} - m_T\Big|_p^{E} = 1$

$$\left.\frac{2\lambda}{y}\right|_p \times - \left.\frac{x}{a^2}\cdot\frac{b^2}{y}\right|_p = -1$$

$$\frac{2\lambda}{2\lambda}x - \frac{\lambda}{a^2}\cdot\frac{b^2}{2\lambda} = -1$$

$b^2 = 2a^2$

for ecc. of ellipse

$$e = \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5. Let C_1 and C_2 be two biased coins such that the probabilities of getting head in a single toss are $\frac{2}{3}$ and $\frac{1}{3}$, respectively. Suppose α is the number of heads that appear when C_1 is tossed twice, independently, and suppose β is the number of heads that appear when C_2 is tossed twice, independently. Then the probability that the roots of the quadratic polynomial $x^2 - \alpha x + \beta$ are real and equal, is

(A) $\frac{40}{81}$ (B) $\frac{20}{81}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

5. माना C_1 तथा C_2 दो अनिष्पक्ष (Bised) सिक्के इस प्रकार है कि एक अकेली उछाल में चित प्राप्त करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{1}{3}$ है। माना α चिटो की संख्या है जो उपस्थित होती है जब C_1 स्वतंत्र रूप से दो बार उछाला जाता है तथा माना β चिटो की संख्या है जो उपस्थित होती है। जब C_2 स्वतंत्र रूप से दो बार उछाला जाता है। तब द्विघात बहुपद $x^2 - \alpha x + \beta$ के मूल वास्तविक तथा समान है की प्रायिकता है।

(A) $\frac{40}{81}$ (B) $\frac{20}{81}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

Ans. **B**

C_1: P(H) = 2/3, P(T) = 1/3 ; C_2: P(H) = 1/3, P(T) = 2/3

Now roots of $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ are real & equal

$\therefore$ D = 0

$\alpha^2 - 4\beta = 0$

$\alpha^2 = 4\beta$

$\Rightarrow (\alpha,\beta) = (0,0),(2,1)$

$$P(E) = {}^2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2 . {}^2C_0\left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}^2C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2 . {}^2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{81}$$

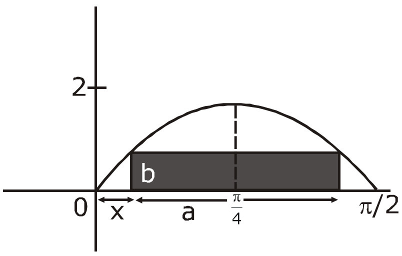
6. Consider all rectangles lying in the region $\left\{(x, y) \in R \times R : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ and } 0 \le y \le 2\sin(2x)\right\}$ and having one side on the x-axis. The area of the rectangle which has the maximum perimeter among all such rectangles, is

(A) $\frac{3\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

6. माना सभी आयत क्षेत्र $\left\{(x, y) \in R \times R : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ and } 0 \le y \le 2\sin(2x)\right\}$ में स्थित है तथा x-अक्ष पर एक भुजा रखते है। आयत का क्षेत्रफल जो ऐसे सभी आयतो के बीच में अधिकतम परिमाप रखता है, होगा।

(A) $\frac{3\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

Ans. **C**



Let sides of rectangle are a & b

then perimeter = 2a + 2b

p = 2(a + b)

Now $b = 2\sin 2x$ & $b = 2\sin(2x + 2a) \Rightarrow 2x + 2x + 2a = \pi$

$\left\{x = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right\}$

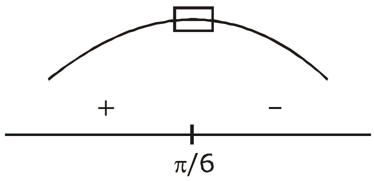
for perimeter max.

P = 2a + 2b

$P = \pi - 4x + 4\sin 2x$

$$\frac{dp}{dx} = -4 + 8\cos 2x = 8\left\{\cos 2x - \frac{1}{2}\right\}$$

$\frac{dp}{dx}$



P_{max} at $x = \pi/6$

Now Area = $\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).(2\sin 2x) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four options(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks : +4 If only (all) the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks : +3 If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks : +2 If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks : +1 If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks : −2 In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक : +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक : +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक : +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक : −2 अन्य सभी स्थितियों में।

---

7. Let the function $f:R \to R$ be defined by $f(x) = x^3 - x^2 + (x-1)\sin x$ and let $g:R \to R$ be an arbitrary function. Let $fg: R \to R$ be the product function defined by $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) If g is continuous at x = 1, then fg is differentiable x = 1

(B) If fg is differentiable at x = 1, then g is continuous at x = 1

(C) If g is differentiable at x = 1, then fg is differentiable at x = 1

(D) If fg is differentiable at x =1, then g is differentiable at x = 1

7. माना फलन $f:R \to R$, $f(x) = x^3 - x^2 + (x-1)\sin x$ के द्वारा परिभाषित है तथा माना $g:R \to R$ एक स्वेच्छ फलन है। माना $fg: R \to R$ गुणन फलन है जो $(fg)(x) = f(x)g(x)$ के द्वारा परिभाषित है। तब निम्न में से कौनसा फलन सत्य है।

(A) यदि g, x = 1 पर संतत है, तब fg, x = 1 पर अवकलनीय है।

(B) यदि fg, x = 1 पर अवकलनीय है, तब g, x = 1 पर संतत है।

(C) यदि g, x = 1 पर अवकलनीय है, तब fg, x = 1 पर अवकलनीय है।

(D) यदि fg, x =1 पर अवकलनीय है, तब g, x = 1 पर अवकलनीय है।

Ans. **A,C**

$f : R \to R$

(A) $f(x) = x^3 - x^2 + (x-1)\sin x$; $g : R \to R$

$h(x) = f(x).\ g(x) = (x^3 - x^2 + (x-1)\sin x).\ g(x)$

$$h'(1^+) = \lim_{h\to 0} \frac{\left\{(1+h)^3 - (1+h)^2 + h.\sin(1+h)\right\} g(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+h^3+3h+3h^2-1-h^2-2h+h\sin(1+h)\right) g(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(h^3+2h^2+h+h\sin(1+h)\right) g(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1+\sin(1+h)\right) g(1+h)$$

$$h'(1^-) = \lim_{h\to 0} \frac{\left((1-h)^3 - (1-h)^2 + (-h)\sin(1-h)\right) g(1-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(-h^3-3h+3h^2-h^2+2h-h\sin(1-h)\right) g(1-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1+\sin(1-h)\right) g(1-h)$$

as g(x) is constant at x =1

$\therefore g(1+h) = g(1-h) = g(1)$

$h'(1^+) = h'(1^-) = (1 + \sin 1)\, g(1)$

'A' is Correct.

8. Let M be a 3 × 3 invertible matrix with real entries and let I denote the 3 × 3 identity matrix. If M^{-1} = adj (adj M), then which of the following statements is/are ALWAYS TRUE ?

(A) M = I (B) det M =1 (C) $M^2 = I$ (D) (adj M^2) = I

8. माना M एक 3 × 3 का वास्तविक प्रविष्ठियों के साथ त्युत्क्रमणीय आव्युह है। तथा माना I, 3 × 3 के तत्समक आव्युह को निरूपित करता है। यदि M^{-1} = adj (adj M) है, तब निम्न में से कौनसा कथन हमेशा सत्य होगा –

(A) M = I (B) det M =1 (C) $M^2 = I$ (D) (adj M^2) = I

Ans. **B,C,D**

$M^{-1} = adj(adj(M))$

$(adj\ M)M^{-1} = (adjM)(adj(adj(M)))$

$(adj\ M)M^{-1} = N.\ adj(N)$ { Let adj(M) = N }

$(adj\ M)M^{-1} = |N|I$

$(adjM)M^{-1} = |adj(M)|I_3$

$(adjM) = |M|^2 .M$ ....(1)

$|adj\ M| = ||M|^2.M|$

$|M|^2 = |M^6|.|M|$

$|M|=1$

from equation (1)

adj.M =M (2)

Multiply by matrix M

$M.adj\ M = M^2$

$|M|I_3 = M^2$

$M^2 = I$

From (2) adj M =M

$(adj\ M)^2 = M^2 = I$

9. Let S be the set of all complex numbers z satisfying $|z^2+z+1| = 1$. Then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) $\left|z+\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ for all $z \in S$

(B) $|z| \le 2$ for all $z \in S$

(C) $\left|z+\frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$ for all $z \in S$

(D) The set S has exactly four elements

9. माना S सभी सम्मिश्र संख्याओं z का समुच्च्य है जो $|z^2+z+1| = 1$ को सन्तुष्ट करता है। तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) सभी $z \in S$ के लिए $\left|z+\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ है।

(B) सभी $z \in S$ के लिए $|z| \le 2$ है।

(C) सभी $z \in S$ के लिए $\left|z+\frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$ है।

(D) समुच्च्य S ठीक चार अव्यव रखता है।

Ans. B,C

$|z^2+ z + 1|= 1$

Let $z^2 + z + 1 = e^{i\theta}$

as $|z^2+ z+ 1| = 1$

$\therefore z^2 + z + 1 - e^{i\theta} = 0$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4+4e^{i\theta}}}{2}$$

$$Z + \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{i\theta}-3}$$

$$Z + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(4\cos\theta-3)+i4\sin\theta}$$

$$\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(4\cos\theta-3)^2+(4\sin\theta)^2}\right\}^{1/2}$$

Let $a = (4\cos\theta - 3) + i4\sin\theta$

$|a|=\sqrt{(4\cos\theta-3)^2+16\sin^2\theta}$

$\Rightarrow \sqrt{16\cos\theta^2+9-24\text{Cos}\theta+16\sin^2\theta}$

$|a|= \sqrt{25-24\cos\theta}$

$|a| \in [1,7] \therefore \left|z+\frac{1}{2}\right| \in \left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

$$Z = \frac{-1\pm\sqrt{(4\cos\theta-3)+i\sqrt{4\sin\theta}}}{2}$$

$2Z = -1 \pm \sqrt{(4\cos\theta-3)+i(4\sin\theta)}$

$|2z| \le 1+\sqrt{(25-24\cos\theta)^{1/2}} \Rightarrow |2z| \le 1 + \sqrt{7}$

$|2z| \le 3.4 \Rightarrow |z| \le 1.7$

10. Let x, y and z be positive real numbers. Suppose x, y and z are the lengths of the sides of a triangle opposite to its angles X, Y and Z, respectively. If $\tan\frac{X}{2} + \tan\frac{Z}{2} = \frac{2y}{x+y+z}$,

then which of the following statements is/are TRUE ?

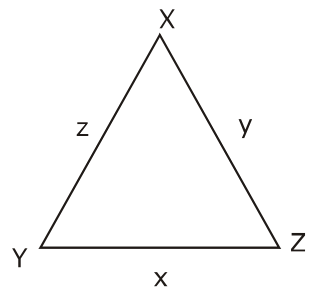
(A) 2Y = X + Z (B) Y = X + Z (C) $\tan\frac{x}{2} = \frac{x}{y+z}$ (D) $x^2 + z^2 - y^2 = xz$

10. माना x, y तथा z धनात्मक वास्तविक संख्याए है। माना X, Y तथा Z क्रमशः एक त्रिभुज की भुजाओं लम्बाईयां है जो इसके कोण x,y तथा z के विपरित है। यदि $\tan\frac{X}{2} + \tan\frac{Z}{2} = \frac{2y}{x+y+z}$ है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) 2Y = X + Z (B) Y = X + Z (C) $\tan\frac{x}{2} = \frac{x}{y+z}$ (D) $x^2 + z^2 - y^2 = xz$

Ans. B,C

$\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{z}{2} = \frac{2y}{x+y+z}$



$\frac{\Delta}{s(s-x)} + \frac{\Delta}{s(s-z)} = \frac{2y}{x+y-z}$

$\Delta\left\{\frac{2s-x-z}{(s-x)(s-y)}\right\} = y$

$\Delta = (s-x)(s-z)$

$1 = \frac{\Delta}{s(s-y)} \Rightarrow \tan\frac{y}{2} = 1$

y =90°

(B) $\therefore\ \angle y = \angle x + \angle z$

(D) False by Cosine formula

(C) $\tan\frac{x}{2} = \frac{\Delta}{s(s-x)} = \frac{\frac{1}{2}xz}{\frac{1}{2}(x+y+z)\frac{1}{2}(y+z-x)}$

$\Rightarrow \frac{x}{y+z}$

11 Let L_1 and L_2 be the following straight lines.

$L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$ and $L_2 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$

Suppose the straight line $L : \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\gamma}{-2}$

lies in the plane containing L_1 and L_2, and passes through the point of intersection of L_1 and L_2. If the line L bisects the acute angle between the lines L_1 and L_2, then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $\alpha - \gamma = 3$ (B) $l + m = 2$ (C) $\alpha - \gamma = 1$ (D) $l + m = 0$

11 माना L_1 तथा L_2 निम्न सरल रेखाएं है –

$L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$ तथा $L_2 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$

माना सरल रेखा $L : \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\gamma}{-2}$,

L_1 तथा L_2, वाले समतल में स्थित है तथा L_1 तथा L_2. के प्रतिच्छेदी बिन्दू से गुजरती है। यदि रेखा L रेखाओ L_1 तथा L_2, के बीच न्यूनकोण को समद्धिभाजित करती है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) $\alpha - \gamma = 3$ (B) $l + m = 2$ (C) $\alpha - \gamma = 1$ (D) $l + m = 0$

Ans. A,B

$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3} = \lambda$

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1} = \mu$

$P(\lambda+1, -\lambda, 3\lambda+1)$ $Q(-3\mu+1, -\mu, \mu+1)$

for point of Intersection

$\lambda + 1 = -3\mu + 1$ $\lambda = \mu$

$\lambda = \mu = 0$

Point of Intesection (1,0,1)

$\therefore \frac{x-\alpha}{\ell} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\gamma}{-2}$ passes through (1,0,1)

$\frac{1-\alpha}{\ell} = \frac{-1}{m} = \frac{1-\gamma}{-2}$ ...(1)

dr's of $L_1(1, -1, 3)$ dr's of $L_2(-3, -1, 1)$

$\vec{v}_1$ = di's of $L_1\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$; V_2= di's of $L_2\left(\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$

$\vec{V}_1.\vec{V}_2 > 0$

$\therefore$ dr's of $\angle$ bisector of L_1 and L_2

$= \left(\frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{11}}\right)$

or ℓ : m : (–2) = – 2 : – 2 : 4

= 2 : 2 : – 4

ℓ = m = 1

$\therefore 1 - \alpha = -1 = \frac{1-\gamma}{-2}$

$\alpha = 2$ $\qquad 1 - \gamma = 2$; $\gamma = -1$

12 Which of the following inequalities is/are TRUE?

(A) $\int_0^1 x\cos x\, dx \geq \frac{3}{8}$ (B) $\int_0^1 x\sin x\, dx \geq \frac{3}{10}$

(C) $\int_0^1 x^2\cos x\, dx \geq \frac{1}{2}$ (D) $\int_0^1 x^2\sin x\, dx \geq \frac{2}{9}$

12 निम्न में से कौनसी असमिकाएं सत्य है।

(A) $\int_0^1 x\cos x\, dx \geq \frac{3}{8}$ (B) $\int_0^1 x\sin x\, dx \geq \frac{3}{10}$

(C) $\int_0^1 x^2\cos x\, dx \geq \frac{1}{2}$ (D) $\int_0^1 x^2\sin x\, dx \geq \frac{2}{9}$

Ans. A,B,D

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$\therefore \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$

$x\cos x \geq x - \frac{x^3}{2!}$

$$\int_0^1 x\cos x\, dx \geq \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right)_0^1$$

$$\int_0^1 x\cos x\, dx \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{6}$$ (A) Correct

similarly

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$$

$$x\sin x \geq x^2 - \frac{x^4}{6}$$

$$\int_0^1 x\sin x\, dx \geq \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6\cdot 5}\right)_0^1$$

$$\int_0^1 x\sin x\, dx \geq \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}\right)_0^1$$

$$\int_0^1 x\sin x\, dx \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{30}$$

$$\int_0^1 x\sin x\, dx \geq \frac{3}{10}$$ Similarly Check (C) and (D)

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, truncate/round -off the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
  Full marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;
  Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।

- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।
  पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।
  शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

13 Let m be the minimum possible value of $\log_3\left(3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3}\right)$, where y_1, y_2, y_3 are real numbers for which $y_1+y_2+y_3=9$. Let M be the maximum possible value of $\left(\log_3 x_1+\log_3 x_2+\log_3 x_3\right)$, where x_1, x_2, x_3 are positive real numbers for which $x_1+x_2+x_3=9$. Then the value of $\log_2\left(m^3\right)+\log_3\left(M^2\right)$ is____

13 माना m, $\log_3\left(3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3}\right)$, का न्यूनतम संभावित मान है , जहाँ y_1, y_2, y_3 वास्तविक संख्याएँ है, जिसके लिए $y_1+y_2+y_3=9.$ है। माना M, $\left(\log_3 x_1+\log_3 x_2+\log_3 x_3\right)$ का अधिकतम संभावित मान है, जहाँ x_1, x_2, x_3 धनात्मक वास्तविक संख्याएँ है जिसके लिए $x_1+x_2+x_3=9$ है। तब $\log_2\left(m^3\right)+\log_3\left(M^2\right)$ का मान है।

Ans. **8.00**

$$\frac{3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3}}{3} \geq \left(3^{y_1}.3^{y_2}.3^{y_3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3} \geq 3.\left(3^{y_1+y_2+y_3}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \therefore y_1+y_2+y_3=9$$

$$3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3} \geq 3.\left(3^9\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3} \geq 81$$

$m = \log_3 81 = 4$

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq (x_1.x_2.x_3)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{9}{3} \geq (x_1.x_2.x_3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 27 \geq x_1x_2x_3$$

$M = \log_3(x_1x_2x_3) = \log_3(27) = 3$

$\log_2(m)^3 + \log_3(M)^2 \Rightarrow \log_2(2^6) + \log_3(3^2) = 6 + 2 = 8$

14 Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be a sequence of positive integers in arithmetic progression with common difference 2. Also, let $b_1, b_2, b_3, \ldots$ be a sequence of positive integers in geometric progression with common ratio 2. If $a_1 = b_1 = c,$ then the number of all possible values of c, for which the equality $2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ holds for some positive integer n, is____

14 माना $a_1, a_2, a_3, \ldots$ सार्वअन्तर 2 के साथ समान्तर श्रेणी में धनात्मक पूर्णाको का एक अनुक्रम है। माना $b_1, b_2, b_3, \ldots$ सार्व अनुपात 2 के साथ गुणोंतर श्रेणी में धनात्मक पूर्णाको का एक अनुक्रम है। यदि $a_1 = b_1 = c,$ है, तब c के सभी संभावित मानों की संख्या जिसके लिए असमिका $2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ कुछ धनात्मक पूर्णाक n के लिए है, होगी ।

Ans. **1.00**

$2(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n) = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

$2\left[\frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)2\right)\right] = b_1\frac{\left(2^n - 1\right)}{2-1}$

$2n[a_1 + (n-1)] = b_1(2^n - 1)$

$2na_1 + 2n^2 - 2n = a_1(2^n - 1)$

$a_1 = \frac{2\left(n^2 - n\right)}{\left(2^n - 1 - 2n\right)} = C_1$ $\qquad \because a_1 = c_1$

$\because C_1 \geq 1$

$\Rightarrow \frac{2\left(n^2 - n\right)}{2^n - 1 - 2n} \geq 1$

$2(n^2 - n) \geq 2^n - 1 - 2n$ $\qquad \because n^2 - n \geq 0$ for $n \geq 1$

$= 2n^2 + 1 \geq 2^n$

There for n =1, 2,3,4,5,6

$n = 1 \Rightarrow c_1 = 0$ (×)

$n = 2 \Rightarrow C_1 < 0$ (×)

$n = 3 \Rightarrow C_1 = 12$ (correct)

$n = 4 \Rightarrow C_1$ = not Integer

$n = 5 \Rightarrow C_1$ = not Integer

$n = 6 \Rightarrow C_1$ = not Integer

$\therefore C_1 = 12$ for $n = 3$

15 Let $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ be the function defined by

$$f(x) = (3 - \sin(2\pi x))\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

If $\alpha, \beta \in [0,2]$ are such that $\{x \in [0,2] : f(x) \geq 0\} = [\alpha, \beta],$ then the value of $\beta - \alpha$ is____

15 माना $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ फलन है जो

$$f(x)=(3-\sin(2\pi x))\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(3\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$$ के द्वारा परिभाषित है।

यदि $\alpha,\beta\in[0,2]$ इस प्रकार है कि $\{x\in[0,2]:f(x)\geq 0\}=[\alpha,\beta]$, है, तब $\beta-\alpha$ का मान होगा –

Ans. 1.00

Let $\pi x - \pi/4 = \theta$

$f(x) \geq 0$

$(3 - \sin 2(\theta + \pi/4))\sin\theta - \sin\left[\frac{3\pi}{4} + 3\theta + \frac{\pi}{4}\right] \geq 0$

$\Rightarrow 3\sin\theta - \sin\theta\cos 2\theta + \sin 3\theta \geq 0$

$\Rightarrow \sin\theta\,[3 - (1 - 2\sin^2\theta) + 3 - 4\sin^2\theta] \geq 0$

$\Rightarrow \sin\theta \underbrace{\left[5 - 2\sin^2\theta\right]}_{+ve} \geq 0$

$\therefore \sin\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0,\pi]$

$\therefore \pi x - \pi/4 \in [0,\pi]$

$\pi x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$

$x \in \left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$

$\alpha = 1/4$; $\beta = 5/4$

$\beta - \alpha = 1$

$\because x \in [0,2]$

$\pi x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

16. In a triangle PQR, let $\vec{a}=\overrightarrow{QR}, \vec{b}=\overrightarrow{RP}$ and $\vec{c}=\overrightarrow{PQ}$. If

$|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=4 \quad \text{and} \quad \dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})}{\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$,

then the value of $|\vec{a}\times\vec{b}|^2$ is____

16 एक त्रिभुज PQR में माना $\vec{a}=\overrightarrow{QR}, \vec{b}=\overrightarrow{RP}$ तथा $\vec{c}=\overrightarrow{PQ}$ है। यदि

$|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=4$ तथा $\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})}{\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$

है, तब $|\vec{a}\times\vec{b}|^2$ का मान होगा –

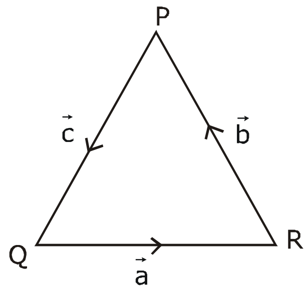
Ans. 108.00

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$$\frac{\vec{a}.(\vec{c}-\vec{b})}{\vec{c}.(\vec{a}-\vec{b})} = \left[\frac{(\vec{b}+\vec{c}).(\vec{c}-\vec{b})}{(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})}\right]$$

$$= \frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow \frac{c^2 - 16}{9-16} = \frac{3}{7} \Rightarrow C^2=13$$



$\vec{a}+\vec{b} = -\vec{c}$

$a^2 + b^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = c^2 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = -6$

$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}.\vec{b})^2 + a^2b^2$

$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (3^2)(4^2) - (\vec{a}.\vec{b})^2$

$= 144 - (36) = 108$

17 For a polynomial $g(x)$ with real coefficients, let m_g denote the number of distinct real roots of $g(x)$. Suppose S is the set of polynomials with real coefficients defined by

$$S=\left\{\left(x^2-1\right)^2\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right): a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\}$$

For a polynomial f, let f' and f'' denote its first and second order derivatives, respectively. Then the minimum possible value of $\left(m_{f'}+m_{f''}\right)$, where $f\in S$, is_____

17 एक बहुपद $g(x)$ जिसके वास्तविक गुणांक के लिए माना m_g , $g(x)$ के भिन्न–2 वास्तविक मूलो की संख्या को निरूपित करता है। माना S वास्तविक गुणांक के साथ बहुपदो का समुच्य है जो

$$S=\left\{\left(x^2-1\right)^2\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right): a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\}$$

के द्वारा परिभाषित है। एक बहुपद f के लिए, माना f' तथा f'' क्रमशः इसके प्रथम तथा द्वितिय क्रम के अवकलज है, तब $\left(m_{f'}+m_{f''}\right)$, का न्यूनतम संभावित मान होगा। जहाँ $f\in S$, है–

Ans. 5.00

$f(x) = (x^2 - 1)^2h(x)$; $h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

Now, $f(1) = f(-1) = 0$

$\Rightarrow f'(\alpha) = 0, \alpha \in (-1,1)$ [Rolle's Theorem]

Also, $f(1) = f'(-1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ has atleast 3 root $-1, \alpha, 1$ with $-1 < \alpha < 1$

$\Rightarrow f''(x) = 0$ will have at least 2 root, say β,γ such that

$-1 < \beta < \alpha < \gamma < 1$ [Rolle's Theorem]

So, $\min\left(m_{f''}\right) = 2$

and we find $(m_{f'} + m_{f''}) = 5$ for $f(x) = (x^2 - 1)^2$

Thus, Ans = 5

18. Let e denote the base of the natural logarithm. The value of the real number a for which the right hand limit $\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-x)^{\frac{1}{x}} - e^{-1}}{x^a}$ is equal to a non-zero real number, is____

18 माना e प्राकत लघुगुणक के आधार को निरूपित करता है। वास्तविक संख्या a का मान जिसके लिए दायी सीमा का मान $\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-x)^{\frac{1}{x}} - e^{-1}}{x^a}$ एक अशून्य वास्तविक संख्या के बराबर है, होगा –

Ans. **1.00**

$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\ln(1-x)^{1/x}} - e^{-1}}{x^a}$; $L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)} - e^{-1}}{x^a}$

$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\ldots\right)} - e^{-1}}{x^a}$; $L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}.e^{-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\ldots\right)} - e^{-1}}{x^a}$

$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}\left[e^{-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\ldots.\right)} - 1\right]}{x^a}$; $L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}\left[\left(1 + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2}{2!}\ldots.\right) - 1\right]}{x^a}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\ldots\right) + \frac{x\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)^2}{2!}\ldots.\right)}{x^{a-1}}$$

for Non - Zero limit $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$