



आरेख (GRAPH)

एक दिन सुरेश ने अध्यापक से शिकायत की कि उसके स्थान पर लिली बैठ गई है।

अध्यापक ने सुरेश से पूछा तुम्हारा स्थान कहाँ था?

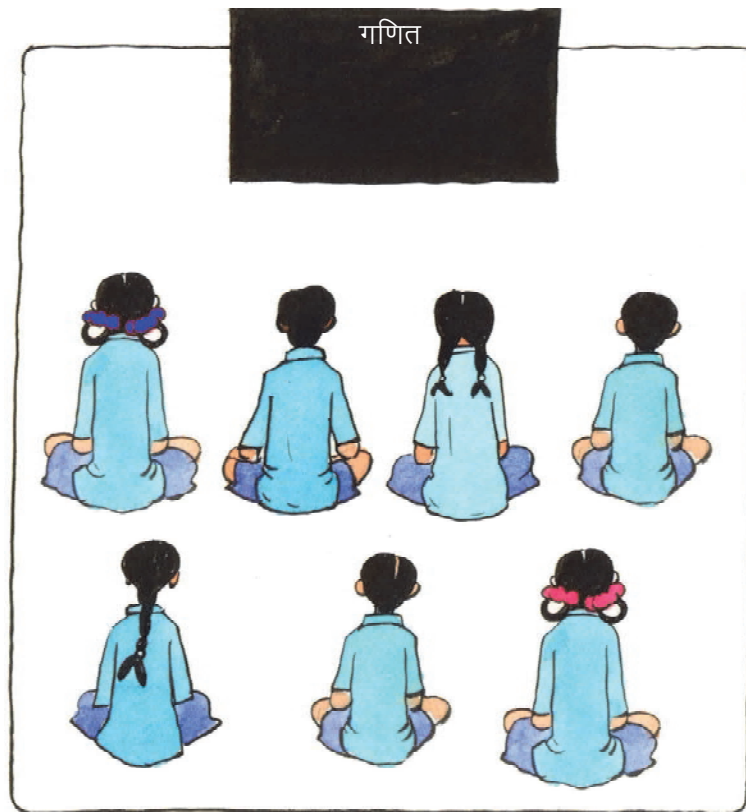
सुरेश – इस पंक्ति की पहले स्थान पर।

अध्यापक – लिली तुम्हारी जगह कौन-सी है?

लिली – चौथी पंक्ति में प्रारंभ से दूसरी स्थान पर।

लिली और सुरेश को अपने निर्धारित स्थान पर बैठने को कहते हुए अध्यापक ने मोहन से पूछा—
मोहन तुम अपनी जगह कैसे पहचानते हो।

मोहन – मेरी जगह पांचवी लाइन में प्रारंभ से चौथे स्थान पर है।



चित्र 10.1

अध्यापक ने हमीद, संध्या और अकबर से भी कक्षा में उनके बैठने की स्थिति पूछा—

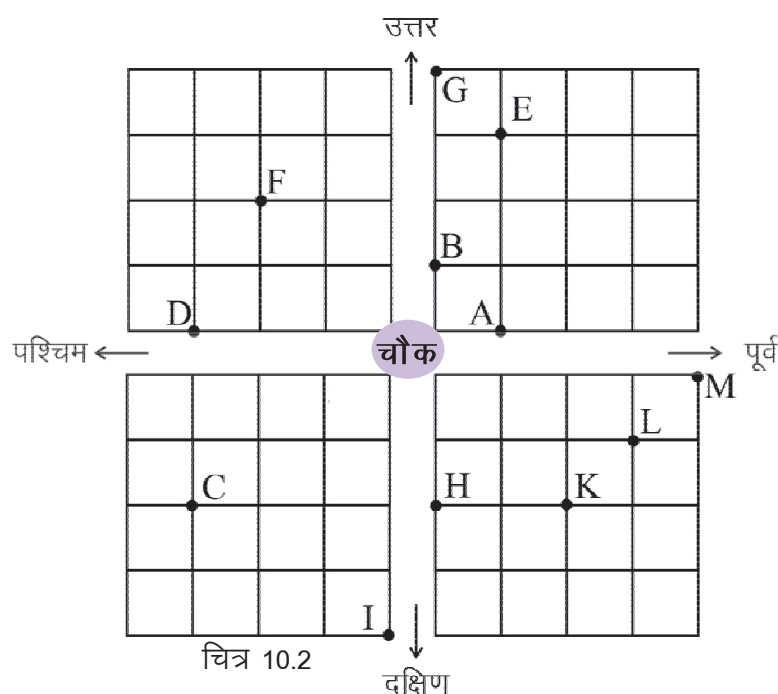
अध्यापक ने कहा— आप सब जहाँ बैठते हैं उसकी स्थिति निश्चित है, आइये ऐसी ही स्थिति का पता लगाने संबंधी खेल खेलें—



क्रियाकलाप-1 (Activity-1)

नीचे शहर की कालोनी का चित्र है आपको चौक से मकानों तक पहुँचना है शर्त है—

1. आपको रेखा पर चलना है।
2. सबसे कम दूरी का रास्ता चुनना है।
3. बिना मुड़े या केवल एक बार मुड़ना है।



चित्र 10.2

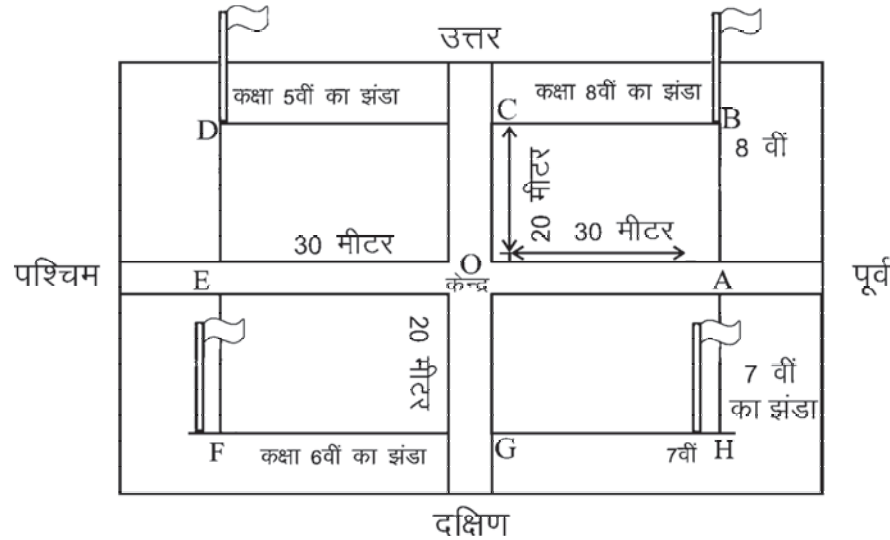
चित्र में दर्शाये गये स्थानों पर पहुँचने के लिए नीचे गए उदाहरण अनुसार रास्ते का चयन कीजिए—

सारणी (Table)1

क्र.	मकान का संकेत	चौक से मकान तक पहुँचने की विधि	पार किए गए कुल खाने
1.	A	O से पूर्व की ओर एक खाना	1
2.	B	O से उत्तर की ओर एक खाना	1
3.	C	O से पश्चिम की ओर 3 खाने फिर दक्षिण की ओर 2 खाने अथवा O से दक्षिण की ओर 2 खाने फिर पश्चिम की ओर 3 खाने	5
4.	D		
5.	E		
6.	F		
7.	G		

युग्म द्वारा स्थिति दर्शाना – (Showing position by pair)

विद्यालय में वार्षिक खेलकूद प्रतियोगिता के अवसर पर विद्यालय को चार भागों में बांटा गया, चारों कोनों पर झंडे लगाये गए। विद्यालय की कक्षा 5 वीं, 6 वीं, 7 वीं, 8 वीं के छात्रों के द्वारा लगाए गए झंडे तक सीधे न जाकर पूर्व, पश्चिमी, उत्तर, दक्षिण के रास्ते पर चलकर पहुँचना है।



चित्र 10.3

कक्षा आठवीं के मोहन और लिली दो अलग रास्तों से झंडे तक पहुँचे मोहन पूर्व में 30 मीटर तक गया वहाँ से उत्तर की ओर 20 मीटर जाकर B झंडे तक पहुँचा।

लिली पहले उत्तर दिशा में 20 मीटर जाकर C तक पहुँची वहाँ से 30 मीटर पूर्व चलकर झंडे B तक पहुँची।

केन्द्र से झंडे की स्थिति कुछ इस प्रकार है—

दिशा	दूरी
पूर्व	30 मीटर
उत्तर	20 मीटर

B की स्थिति (30 मीटर, 20 मीटर) → (पूर्व की ओर दूरी, उत्तर की ओर दूरी)

संक्षेप में (30, 20) → (पूर्व, उत्तर) से

इसी प्रकार अन्य बिन्दु की स्थिति को आप स्वयं लिखिए।

स्थिति निरूपण और संख्या रेखाएँ—

कक्षा 6 वीं एवं 7 वीं में आपने संख्या रेखा प्रयोग करना जाना है। आइए मैदान या कालोनी के चित्र में पूर्व-पश्चिम में (आड़ी) एक संख्या रेखा तथा उत्तर दक्षिण में खड़ी एक संख्या रेखा बनाये दोनों संख्या रेखा का कटान बिन्दु मूल बिन्दु O ले तो,

क्षैतिज संख्या रेखा पर O के दांयी ओर पूर्व को धनात्मक (+) दिशा तथा O के बांयी ओर पश्चिम को ऋणात्मक (-) लेते हैं।

उर्ध्वाधर (उत्तर-दक्षिण) संख्या रेखा पर O के ऊपर उत्तर को धनात्मक (+) तथा O के नीचे दक्षिण को ऋणात्मक दिशा (-) लेते हैं।

इस तरह संख्या युग्म द्वारा स्थिति निरूपण है—

8 वीं झंडा (30, 20)

5 वीं का झंडा (-30, 20)

6 वीं का झंडा (-30, -20)

7 वीं का झंडा (30, -20)

क्या केन्द्र की स्थिति को (O, O) होगी?

इस तरह किसी भी बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म द्वारा दर्शाया जाता है।

निर्देशांक और तल (Co-ordinate axis and surface)

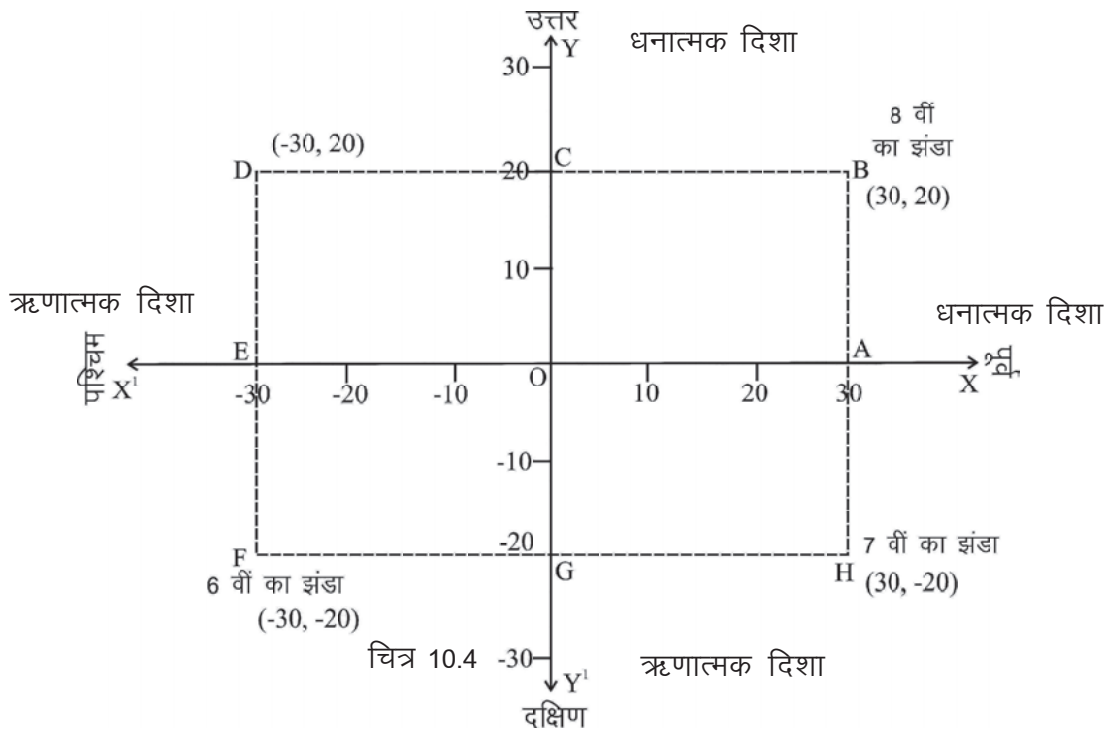
ऊपर बताये गये दोनों संख्या रेखाओं को निर्देश अक्ष कहते हैं।

क्षैतिज निर्देश अक्ष (Co-ordinate axis surface) — (जिसे आड़ी सरल रेखा से दर्शाया गया है) को XX' तथा उर्ध्वाधर (खड़ी) निर्देश अक्ष को YY' से दर्शाते हैं।

कागज के तल को **निर्देश तल** कहते हैं। इस पद्धति का प्रयोग सर्वप्रथम गणितज्ञ रेने डी कार्त ने किया।

उनके याद में निर्देश तल **कार्तीय तल** कहलाता है।

निर्देश अंक (Co-ordinate number) — 8 वीं के झंडे की स्थिति (30, 20) में प्रथम निर्देश अंक 30 को X निर्देशांक कहते हैं। क्योंकि यह XX' अक्ष की दिशा में बताया गया अंक है। द्वितीय निर्देश अंक 20 को Y निर्देशांक कहते हैं क्योंकि यह YY' अक्ष की दिशा में बताया गया अंक है।

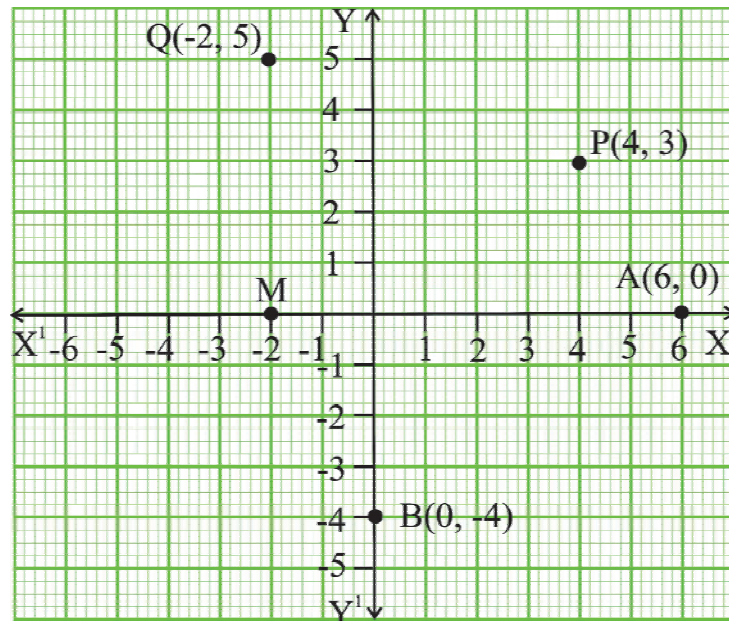


निर्देशाक्षों पर बिन्दु की स्थिति (Position of points on Co-ordinate axis)

1. XX' अक्ष पर स्थित बिन्दु की स्थिति – बिन्दु A, XX' अक्ष पर मूलबिन्दु से 30 इकाई की दूरी पर है A तक पहुँचने के लिए हमें उर्ध्वाधर दिशा में कितना चलना पड़ेगा। स्पष्ट रूप से यह दूरी शून्य होगी, अतः A बिन्दु की स्थिति (30, 0) होगी।
इसी प्रकार E बिन्दु की स्थिति बताइए?
“ XX' अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के लिए Y निर्देशांक शून्य होगी।”
2. क्या YY' अक्ष पर C (0, 20), G (0, -20) से दर्शाया जाएगा।
हम YY' अक्ष पर बिन्दुओं को (0, 3), (0, 12), (0, -4)..... (0, Y) से दर्शा सकते हैं।
मूल बिन्दु का निर्देशांक (0,0) है यह कार्तीय तल का केन्द्र है।

तल में बिन्दु की स्थिति दर्शाना (Position of points on plane)

1. बिन्दु P (4,3) के लिए 0 से XX' अक्ष की धनात्मक दिशा में 4 इकाई चलकर (ON=4) बिन्दु N पर पहुंचे तथा N से YY' अक्ष की धनात्मक दिशा में 3 इकाई (NP=3) जाने पर वह बिन्दु P(4,3) की स्थिति है। [N का निर्देशांक = (4,0)]
2. बिन्दु Q (-2,5) के लिए XX' अक्ष की ऋणात्मक दिशा में 2 इकाई दूरी पर M से YY' अक्ष की धनात्मक दिशा में 5 इकाई चलकर बिन्दु Q (-2,5) तक पहुंचे।
[M का निर्देशांक (-2,0)]
3. बिन्दु A (6,0) के लिए XX' अक्ष की धनात्मक दिशा में 6 इकाई और वहाँ से YY' अक्ष की दिशा में शून्य इकाई चलना है तो बिन्दु A, XX' अक्ष पर है।
4. बिन्दु B (0,-4) के लिए मूल बिन्दु O से XX' अक्ष की दिशा में 0 इकाई चलना अर्थात् O पर रहते हुए YY' अक्ष की ऋणात्मक दिशा में 4 इकाई चलकर YY' अक्ष पर ही बिन्दु B(0, -4) प्राप्त हुआ।



चित्र 10.5



क्रियाकलाप-2 (Activity-2)

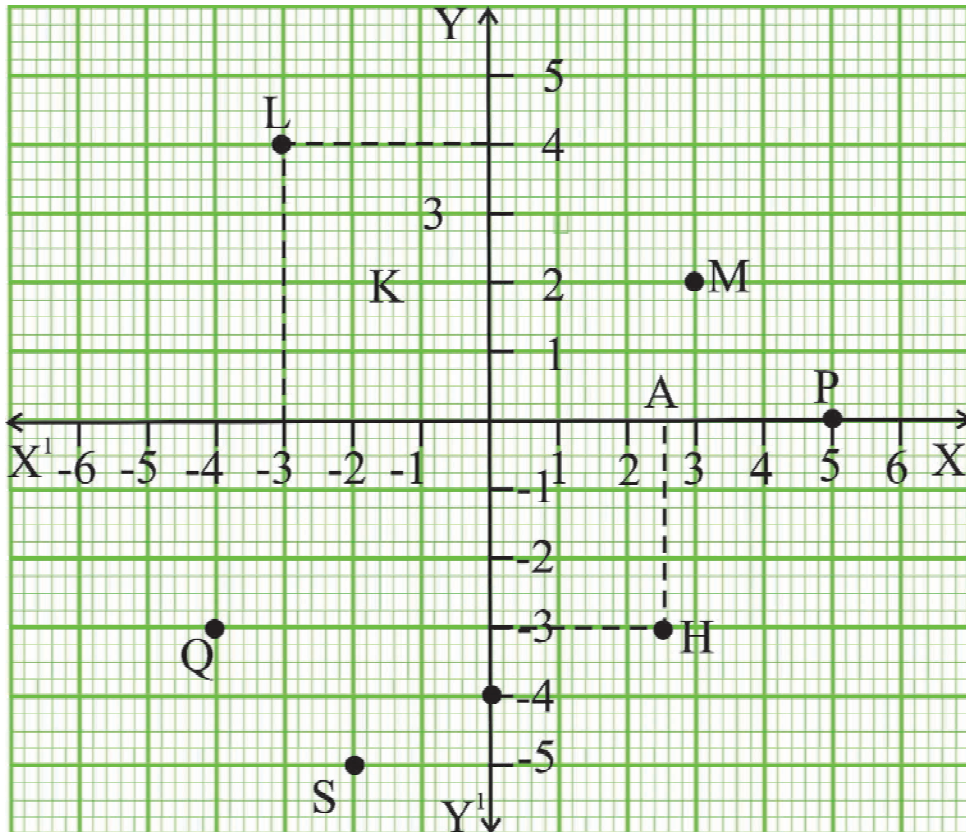
कार्तीय तल पर निम्न बिन्दु अंकित करें—

- (i) (3, 2) (ii) (3, -4) (iii) (-1, 5) (iv) (4, 4) (v) (0, 0)
 (vi) (0, -2) (vii) (4, 0) (viii) (-3, -5)

कार्तीय तल में निरूपित बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना

- ग्राफ में बिन्दु H निर्देशांक प्राप्त करने के लिए H तक पहुँचने के लिए XX' अक्ष की दिशा में चली गई दूरी तथा YY' अक्ष की दिशा में चली दूरी प्राप्त करनी होगी। इस तरह—
 H का X निर्देशांक = 2.5
 H का Y निर्देशांक = -3
 अतः H के निर्देशांक (2.5, -3) हुए।
- बिन्दु K, YY' अक्ष पर है अतः XX' अक्ष की दिशा में दूरी = 0 तथा YY' अक्ष की दिशा में दूरी = 2 अतः K (0, 2) है।
- बिन्दु L तक पहुँचने के लिए XX' अक्ष पर दूरी -3 तथा YY' अक्ष पर दूरी 4 है, अतः बिन्दु L के निर्देशांक अंक (-3, 4) है।

इसी तरह से बिन्दुओं M, P, Q, R, S के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



चित्र 10.6

संख्या एवं उसके गुणज के मध्य आरेख (Graph between numbers and their multiples)

पिछली कक्षाओं में आपने गुणज के विषय में पढ़ा है। मान लीजिए कोई संख्या 3 है तो उसके गुणज 6, 9, 12, 15, 18, आदि होंगे। इसी प्रकार यदि संख्या X है तो उसके गुणज $2x, 3x, 4x, \dots$ होंगे। इन संख्याओं को आरेख में प्रदर्शित करने के लिए दी गई संख्या को प्रायः XX' अक्ष में एवं उसके गुणज को YY' अक्ष में दर्शाते हैं।

उदाहरण : $Y = 2x$

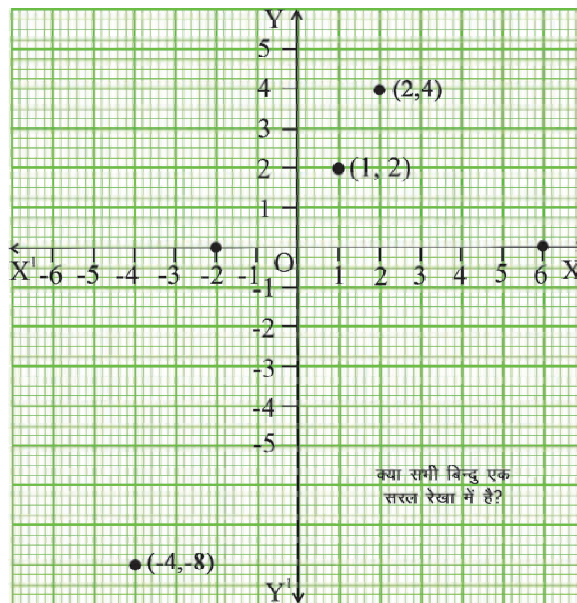
चूंकि X यहाँ Y के दो गुणा के बराबर है। X के सभी मानों को XX' अक्ष पर एवं उसके गुणज $2x$ को YY' अक्ष पर दर्शाते हैं। अतः बिन्दु (X, Y) के लिए उनके निर्देशांक निम्न होंगे।

क्रियाकलाप-3

रिक्त स्थानों की पूर्ति कर आरेख में बिन्दुओं को मिलाये—

सारणी (Table) 2

क्रं. सं.	पहली संख्या (X)	दूसरी संख्या (Y=2X)	बिन्दु (X, Y)
1	1	2	(1, 2)
2	2	4	(2, 4)
3	3	-----	
4.	0	-----	
5.	-1	-----	
6.	-4	-8	
7.	----	-----	



चित्र 10.7

पैमाना (मापनी) (Measurement Scale)

यदि निर्देशांक में प्राप्त अंक ज्यादा बड़ा हो, जिन्हें ग्राफ पेपर में दर्शाया जाना संभव न हो तो ग्राफ खींचते समय उचित पैमाना मानकर निर्देशांकों को दर्शाया जा सकता है।

इसी प्रकार निर्देशांक बहुत छोटे होने पर उचित पैमाना मानकर निर्देशांकों को दर्शाया जा सकता है।

उदाहरण – किसी गांव की विभिन्न वर्षों की जनसंख्या निम्नानुसार दी गई है।

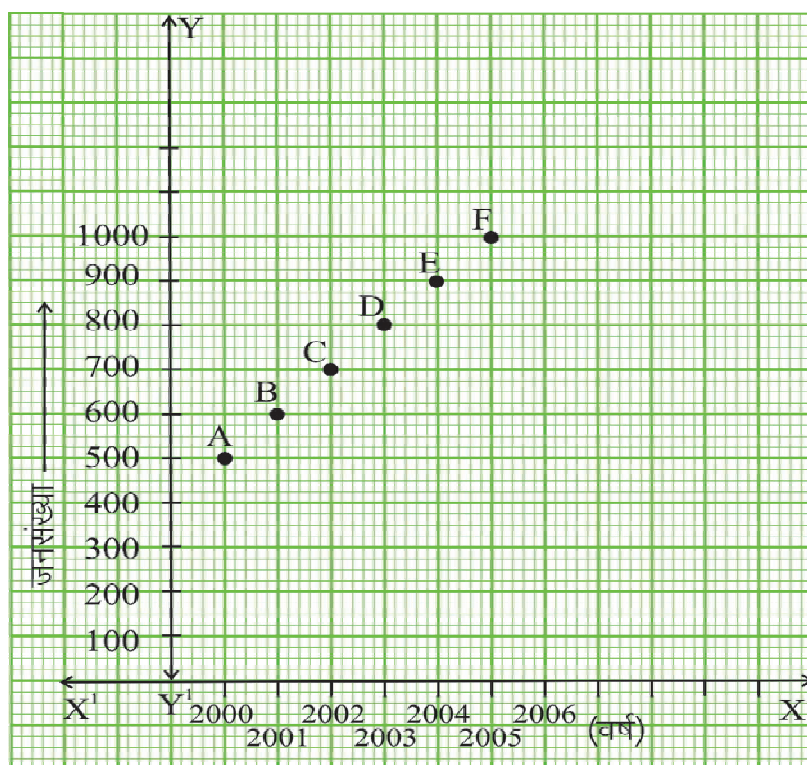
वर्ष x	2000	2001	2002	2003	2004	2005
जनसंख्या y	500	670	720	860	940	1000

उपरोक्त आकड़े में से वर्ष को x अक्ष पर एवं जनसंख्या को y अक्ष पर लेकर आलेख बनाया गया है। जनसंख्या में प्राप्त आंकड़े 500 एवं 1000 है अतः उचित पैमाना मानकर ग्राफ पेपर में आलेखित किया गया है क्योंकि इतने बड़े आंकड़ों को ग्राफ पेपर पर दर्शाया जाना संभव नहीं है।

पैमाना XX' अक्ष पर 10 छोटे खाने = 1 वर्ष

YY' अक्ष पर 10 छोटे खाने = 100 (जनसंख्या)

अतः 500 की जनसंख्या के लिए 50 छोटे खाने या 5 बड़े खाने लेने होंगे।



गाँव का वर्षवार जनसंख्या का आरेख

चित्र 10.8

वर्ग की भुजा एवं परिमाप के मध्य आरेख (The graph between side and perimeter of square)

पिछली कक्षाओं में आपने वर्ग की भुजा ज्ञात होने पर परिमाप ($4 \times$ भुजा) निकालना सीख लिया है। जैसे—

यदि वर्ग की भुजा 5 सेमी हो तो परिमाप $4 \times 5 = 20$ सेमी होगा।

इसी प्रकार यदि वर्ग की भुजा x इकाई हो तो उसका परिमाप $4x$ इकाई होगा।

आइये इससे संबंधित क्रियाकलाप करें।

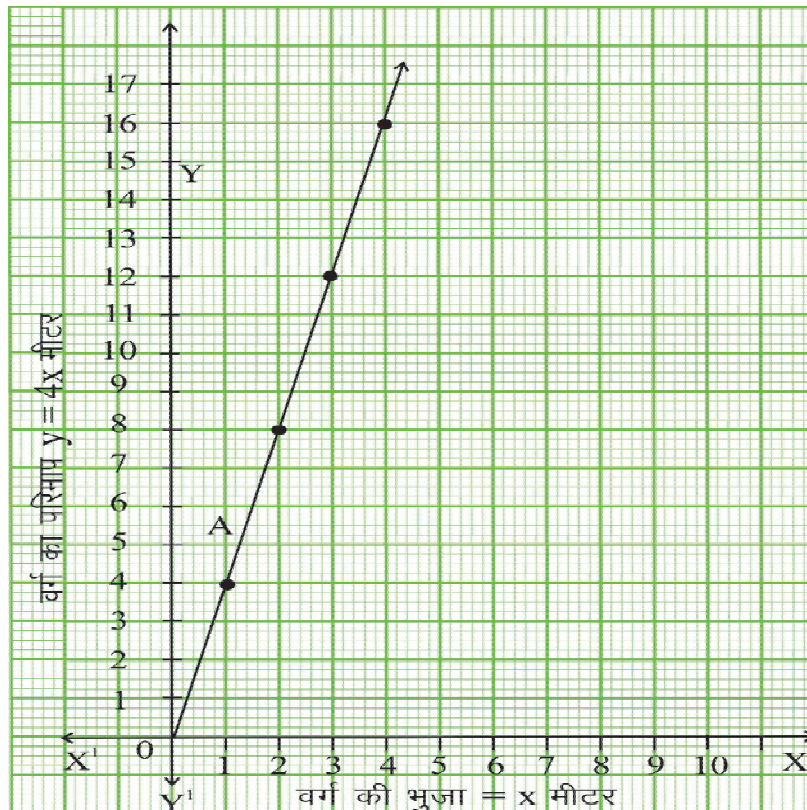


क्रियाकलाप 4

निम्न सारणी को पूर्ण करते हुए आरेख खींचिए।

सारणी 3

क्र.सं.	वर्ग की भुजा की लम्बाई x	वर्ग का परिमाप $y = 4x$	बिन्दु
1.	1	4	(1, 4)
2.	2	---	
3.	3	---	
4.	---	---	(4, 16)
5.	---	---	
6.	---	---	



चित्र 10.9

समय तथा साधारण ब्याज के मध्य आरेख (Graph between Time and Simple interest)

साधारण ब्याज = मूलधन × दर × समय

जब मूलधन और दर नियत हो तो साधारण ब्याज = नियतांक × समय

साधारण ब्याज = $K \times$ समय

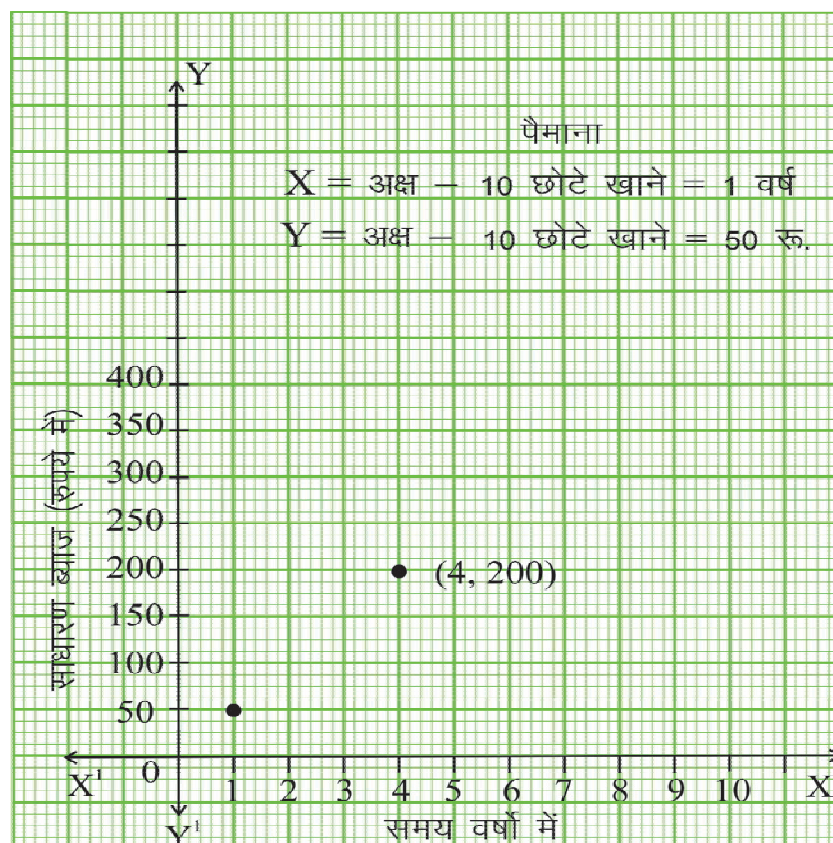
अर्थात् यदि मूलधन तथा दर को नियत रखते हैं तो साधारण ब्याज समय के अनुक्रमानुपाती होती है।

क्रियाकलाप 5

सारणी को पूर्ण करके आलेख खींचिए जबकि मूलधन 1000 रु. तथा दर 5% वार्षिक हो।

सारणी 4

क्र.सं.	समय (वर्षों में)	सा.ब्याज = $\frac{1000 \times 5 \times \text{समय}}{100}$ रु.	बिन्दु (x,y)
1.	1	-----	(1, 50)
2.	2	100	-----
3.	3	-----	-----
4.	-----	-----	(4,200)
5.	-----	-----	-----



चित्र 10.10

आरेख को पढ़ना (Reading of Graph)

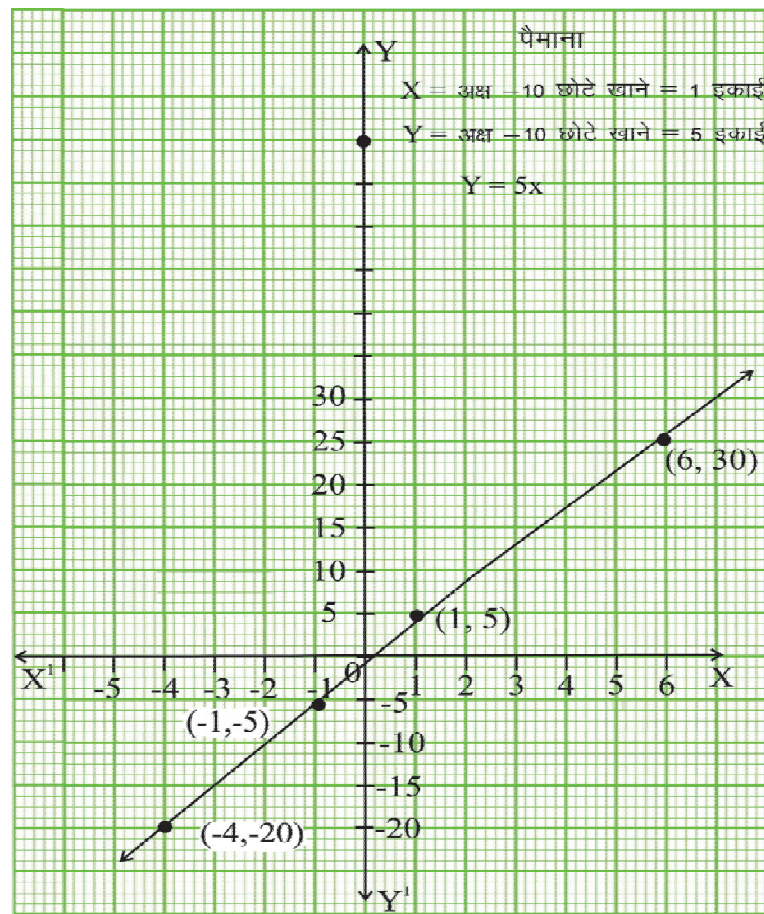
रैखिक आरेख (Linear graph)

अब तक हमने संख्याओं के गुणन, वर्ग की भुजा एवं परिमाप तथा क्षेत्रफल और समय तथा साधारण ब्याज के मध्य आरेख खींचा है। अब हम दिये गये आरेख को पढ़ना सीखेंगे।



क्रियाकलाप 6

दिये गये आरेख (ग्राफ) पर ध्यान दीजिए।



चित्र 10.11

उपरोक्त आलेख में सरल रेखा में आये हुए बिन्दुओं को लिखिए।

सारणी 5

क्र.सं.	बिन्दु	x का मान	y का मान
1.	$(-4, -20)$	-4	-20
2.	$(-1, -5)$	_____	_____
3.	$(1, 5)$	_____	_____
4.	_____	_____	_____

उपरोक्त सारणी में (1) y का प्रत्येक मान x अक्ष के संगत मान से कितना गुना है? y तथा x के मध्य संबंध बताइये?

सारणी से ज्ञात होता है कि y का प्रत्येक मान x के संगत मान से पांच गुना है इस प्रकार y तथा x के मध्य संबंध $y = 5x$ है। आलेख में हम देखते हैं कि x का मान बढ़ाने पर y का मान बढ़ जाता है एवं इसके विपरित x के मान को घटाने पर y का मान घटता जाता है। अर्थात् x , y के अनुक्रमानुपाती है। अतः कोई भी दो-चर आपस में अनुक्रमानुपाती हों तो उनके मध्य प्राप्त आरेख सरल रेखा में होता है।

समय एवं दूरी के मध्य आरेख :-

पिछली कक्षाओं में आप पढ़ चुके हैं कि चाल = दूरी/समय

चाल $\times$ समय = दूरी

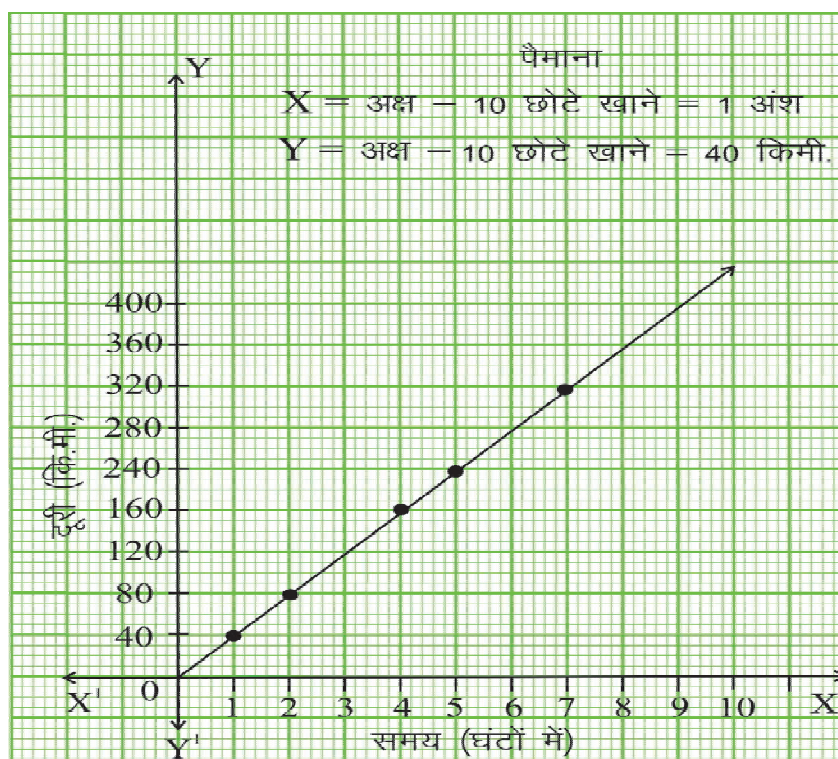
यदि चाल को नियत रखा जाये तो दूरी समय के अनुक्रमानुपाती होती है अर्थात्

दूरी = नियतांक $\times$ समय

अब यदि समय को x अक्ष पर तथा दूरी को y अक्ष पर लेते हैं तो उनके मध्य भी सरल रेखा प्राप्त होती है।

क्रियाकलाप 7

एक मोटरसाइकिल चालक नियत चाल से चल रहा है। आरेख में उसके द्वारा विभिन्न समयों के संगत तय की गयी दूरी प्रदर्शित की गई है। निम्न आरेख से दिये गये सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर चाल ज्ञात कीजिए।



समय एवं दूरी के मध्य आरेख (ग्राफ)

सारणी 6

क्र.सं.	बिन्दु	x अक्ष का निर्देशांक	y अक्ष का मान निर्देशांक	चाल = $\frac{d \text{ किमी}}{t \text{ घंटा}}$
1.	(2, 80)	2	80	$\frac{80}{2} = \text{-----}$
2.	(4, 160)	-----	-----	-----
3.	-----	-----	-----	-----
4.	-----	-----	-----	-----
5.	-----	-----	-----	-----
6.	-----	-----	-----	-----

सारणी से ज्ञात होता है कि मोटरसाइकिल चालक की चाल ----- है।

प्रश्नावली 10 (Exercise 10)

प्रश्न 1 निम्न बिन्दुओं को ग्राफ में प्रदर्शित कीजिए।

(2,5), (-3,4), (1,-1), (-3,-2), (0, 6) (-3, 0), (0,-4)

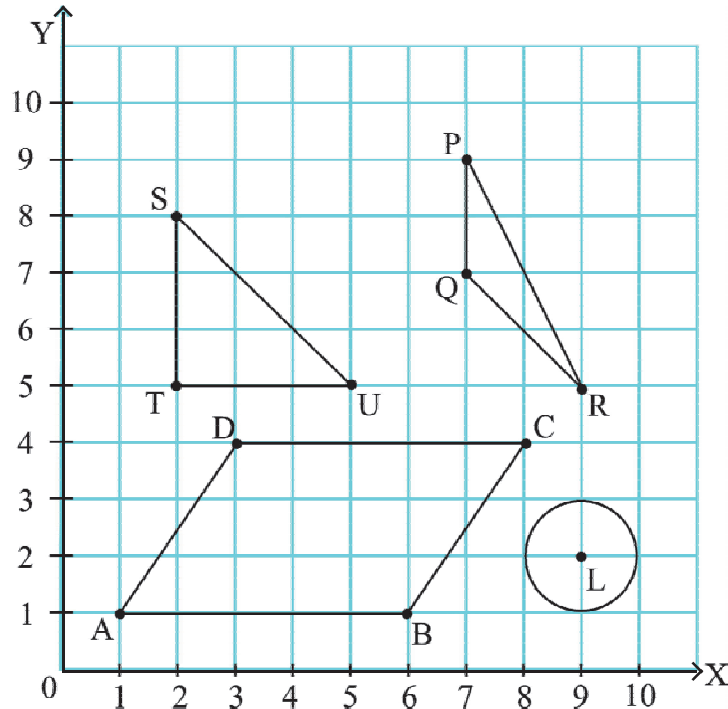
प्रश्न 2 बताइये निम्न बिन्दुएं किस चतुर्थांश हैं।

(2,-2), (-4, 4), (-5, -4), (2, 0), (5,4), (0,-4), (0, 6)

प्रश्न 3 निम्न बिन्दुओं को ग्राफ में दर्शाकर उन्हें मिलाइये, क्या प्राप्त आकृति सरल रेखा है?

(3, -1), (1,1), (5, -3), (6,-4), (-2, 4), (-4, 6), (8,-6)

प्रश्न 4 अपने ग्राफ कॉपी में निम्नांकित चित्रों को बनाकर दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए-



- (i) त्रिभुज PQR के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
 - (ii) समकोण त्रिभुज STV के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कर भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।
 - (iii) समांतर चतुर्भुज ABCD के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कर भुजा AB एवं DC की लंबाई ज्ञात कीजिए।
 - (iv) वृत्त के केन्द्र L के निर्देशांक ज्ञात कर वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।
- प्रश्न 5 संख्या तथा उसके तिगुने का आरेखीय निरूपण कीजिए।
- प्रश्न 6 मूलधन 800 रु. का 10% प्रतिवर्ष की दर से विभिन्न वर्षों के संगत साधारण ब्याज प्राप्त कर आरेख खींचिए।
- प्रश्न 7 एक रेलगाड़ी 60 किमी प्रति घंटे की नियत चाल से चल रही है। विभिन्न समयों में तय की गई संगत दूरी के मध्य आरेख खींचिए।



हमने सीखा (We have learnt)

1. किसी भी बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म (निर्देशांक) द्वारा दर्शाया जाता है।
2. प्रायः कागज तल को निर्देश तल या कार्तीय तल कहते हैं।
3. x अक्ष पर y के निर्देशांक शून्य तथा y अक्ष पर x के निर्देशांक शून्य होते हैं।
4. मूल बिन्दु को निर्देशांक (0,0) होता है इसे कार्तीय तल का केन्द्र कहते हैं।
5. निर्देशांकों को संख्या रेखा पर चार भागों में बांटा जाता है, प्रत्येक भाग चतुर्थांश कहलाता है।
6. यदि दो चरों के मध्य अनुक्रमानुपाती का संबंध हो, तो उनके मध्य आलेख एक सरल रेखा होती है।

