Trigonometry

Ex. 4.1

1. आकृती काढा आणि उत्तरे लिहा. [प्रत्येकी 2 गुण]

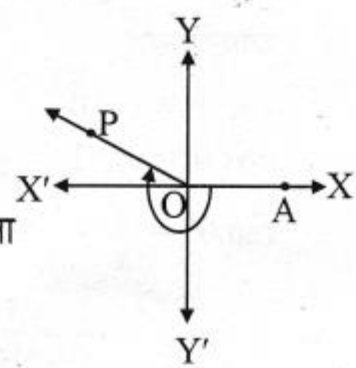
i. प्रमाणित कोनाची आद्यभुजा घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने 220° अंशातून भ्रमण करत असेल, तर अंतिमभुजा कोणत्या चरणात असेल? [जुलै 15]

ii. प्रमाणित स्थितीतील कोनाची आद्यभुजा घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने 25° अंशातून फिरत असेल, तर त्याची अंतिमभुजा कोणत्या चरणात असेल? [ऑक्टोबर 12]

iii. प्रमाणित स्थितीतील कोनाची आद्यभुजा घड्याळ काट्याच्या विरुद्ध दिशेने 305°अंशातून भ्रमण करत असेल, तर अंतिम भुजा कोणत्या चरणात असेल ? [जुलै 16]

उकल :

i. आद्यभुजा घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने 220° भ्रमण करते.

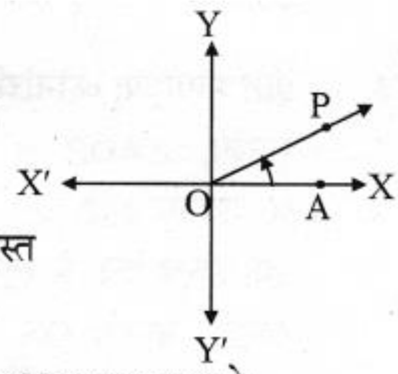


∴ कोनाचे माप हे $-180°$ पेक्षा जास्त आणि $-270°$ पेक्षा कमी आहे.

∴ $\angle AOP$ हा $-180°$ आणि $-270°$ च्या दरम्यान आहे.

∴ अंतिमभुजा दुसऱ्या चरणात आहे.

ii. आद्यभुजा घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने 25° ने भ्रमण करते.

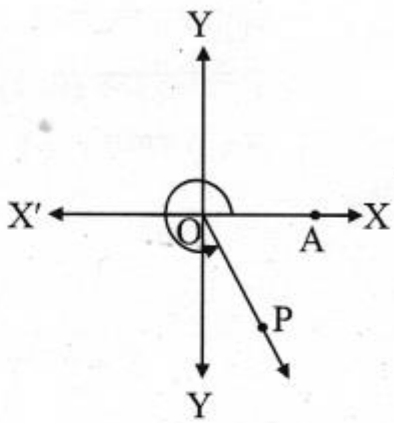


∴ कोनाचे माप हे 0° पेक्षा जास्त व 90° पेक्षा कमी आहे.

∴ ∠AOP हा 0° आणि 90° च्या दरम्यान आहे.

∴ **अंतिमभुजा पहिल्या चरणात आहे.**

iii. आद्यभुजा घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने 305° तून भ्रमण करते. कोनाचे माप 270° पेक्षा जास्त व 360° पेक्षा कमी आहे.



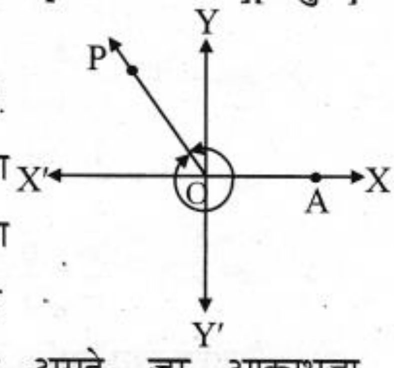
∴ ∠AOP हा 270° आणि 360° च्या दरम्यान आहे.

∴ **अंतिमभुजा चौथ्या चरणात आहे.**

2. अंतिमभुजा दुसऱ्या चरणात असताना तयार होणाऱ्या कोनांचे संभाव्य माप किती असेल ?

[ऑक्टोबर 14][1 गुण]

उकल:

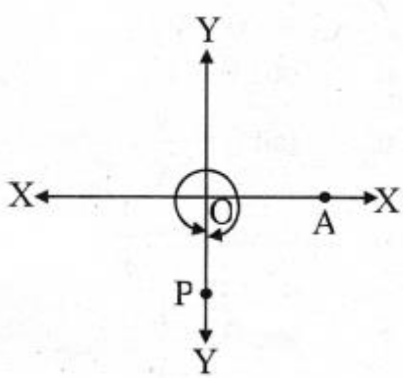


अंतिमभुजा दुसऱ्या चरणात आहे. जर आद्यभुजा घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने भ्रमण करत असेल, तर कोनाचे माप हे 90° आणि 180° च्या दरम्यान असते. जर आद्यभुजा घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने भ्रमण करत असेल, तर कोनाचे माप हे –180° आणि –270° च्या दरम्यान असते.

∴ **संभाव्य कोनांची मापे ही 90° आणि 180° किंवा –180° आणि –270° च्या दरम्यान असेल.**

3. अंतिमभुजा ऋण Y-अक्षावर असताना कोनांचे माप किती असते? या कोनाबद्दल तुम्ही काय सांगू शकाल? **[2 गुण]**

उकल:



अंतिमभुजा ही ऋण Y-अक्षावर आहे. जर आद्यभुजा घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने भ्रमण करत असेल, तर कोनाचे माप 270° असते. जर आद्यभुजा घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने भ्रमण करत असेल, तर कोनाचे माप – 90° असते.

∴ **संभाव्य कोनांची मापे – 90° किंवा 270° आहेत.**

∴ **या कोनांना चरणीय कोन म्हणतात.**

Ex. 4.2

1. खाली दिलेल्या बिंदूतून अंतिमभुजा जात असेल, तर प्रमाणित स्थितीतील कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे काढा. **[प्रत्येकी 2 गुण]**

i. (4, 3) **ii. (5, –12)**

iii. (–24, –7) **iv. $(-1, \sqrt{3})$**

v. (1, –1) **vi. (–2, –3)**

उकल :

i. अंतिमभुजा बिंदू (4, 3) मधून जाते.

$\therefore$ $x = 4$ आणि $y = 3$

$r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $r^2 = (4)^2 + (3)^2$

$\therefore$ $r^2 = 16 + 9$

$\therefore$ $r^2 = 25$

$\therefore$ $r = 5$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

समजा, कोनाचे माप θ आहे.

$\therefore$ प्रमाणित कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार,

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{4}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

ii. अंतिमभुजा बिंदू $(5, -12)$ मधून जाते.

$\therefore$ $x = 5$ आणि $y = -12$

$\because$ $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $r^2 = (5)^2 + (-12)^2$

$\therefore$ $r^2 = 25 + 144$

$\therefore$ $r^2 = 169$

$\therefore$ $r = 13$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

समजा, कोनाचे माप θ आहे.

$\therefore$ प्रमाणित कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार,

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-12}{13} = -\mathbf{\frac{12}{13}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{13}{-12} = -\mathbf{\frac{13}{12}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \mathbf{\frac{5}{13}}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \mathbf{\frac{13}{5}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-12}{5} = -\mathbf{\frac{12}{5}}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{5}{-12} = -\mathbf{\frac{5}{12}}$$

iii. अंतिमभुजा बिंदू (−24, −7) मधून जाते.

$\therefore$ $x = -24$ आणि $y = -7$

$\because$ $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $r^2 = (-24)^2 + (-7)^2$

$\therefore$ $r^2 = 576 + 49$

$\therefore$ $r^2 = 625$

$\therefore$ $r = 25$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

समजा, कोनाचे माप θ आहे.

$\therefore$ प्रमाणित कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार,

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-7}{25} = -\mathbf{\frac{7}{25}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{25}{-7} = -\mathbf{\frac{25}{7}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-24}{25} = -\mathbf{\frac{24}{25}}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{25}{-24} = -\mathbf{\frac{25}{24}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-7}{-24} = \mathbf{\frac{7}{24}}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-24}{-7} = \mathbf{\frac{24}{7}}$$

iv. अंतिमभुजा बिंदू $(-1, \sqrt{3})$ मधून जाते.

$\therefore$ $x = -1$ आणि $y = \sqrt{3}$

$\because$ $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $r^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2$

$\therefore$ $r^2 = 1 + 3$

$\therefore$ $r^2 = 4$

$\therefore$ $r = 2$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

समजा, कोनाचे माप θ आहे.

∴ प्रमाणित कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार,

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{2}{-1} = -2$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

v. अंतिमभुजा बिंदू (1, −1) मधून जाते.

∴ $x = 1$ आणि $y = -1$

$r^2 = x^2 + y^2$

∴ $r^2 = 1^2 + (-1)^2$

∴ $r^2 = 1 + 1$

∴ $r^2 = 2$

∴ $r = \sqrt{2}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

समजा, कोनाचे माप θ आहे.

∴ प्रमाणित कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार,

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$

$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-1} = -1$

vi. अंतिमभुजा बिंदू $(-2, -3)$ मधून जाते.

$\therefore$ $x = -2$ आणि $y = -3$

$\because$ $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $r^2 = (-2)^2 + (-3)^2$

$\therefore$ $r^2 = 4 + 9$

$\therefore$ $r^2 = 13$

$\therefore$ $r = \sqrt{13}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

समजा, कोनाचे माप θ आहे.

$\therefore$ प्रमाणित कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार,

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{13}}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{13}}{-3} = -\frac{\sqrt{\mathbf{13}}}{\mathbf{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{13}}}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{13}}{-2} = -\frac{\sqrt{\mathbf{13}}}{\mathbf{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-2}{-3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

2. जर $\theta = -60^\circ$ तर $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$ आणि $\tan\theta$ च्या किमती काढा.

[मार्च 12, 14; ऑक्टोबर 12] [2 गुण]

उकल:

$\theta = -60^\circ$ ---- [दिलेले]

$\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ$ ---- [$\because \sin(-\theta) = -\sin\theta$]

$\therefore$ $\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ$ ---- [$\because \cos(-\theta) = \cos\theta$]

$\therefore$ $\cos(-60°) = \frac{1}{2}$

$\tan(-60°) = -\tan 60°$ ---- $[\because \tan(-\theta) = -\tan\theta]$

$\therefore$ $\tan(-60°) = -\sqrt{3}$

$\sec(-60°) = \sec 60°$ ---- $[\because \sec(-\theta) = \sec\theta]$

$\therefore$ $\sec(-60°) = 2$

$\therefore$ $\mathbf{\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta = \frac{1}{2}, \tan\theta = -\sqrt{3},}$

$\mathbf{\sec\theta = 2}$

3. अंतिमभुजा खालील बिंदूतून जात असेल, तर तयार होणारा कोन कोणत्या चरणात असेल किंवा कोठे असेल ? **[प्रत्येकी 1 गुण]**

i. (5, –7) **ii. (–8, 1)**
iii. (–3, –3) **iv. (0, 2)**

उकल:

i. समजा, अंतिमभुजा बिंदू $P(5, -7) \equiv (x, y)$ मधून जाते.

$\therefore$ $x = 5$ आणि $y = -7$

$\because$ x हा धन आणि y हा ऋण आहे.

$\therefore$ **कोन चौथ्या चरणात आहे.**

ii. समजा, अंतिमभुजा बिंदू $P(-8, 1) \equiv (x, y)$ मधून जाते.

$\therefore$ $x = -8$ आणि $y = 1$

$\because$ x हा ऋण आणि y हा धन आहे.

$\therefore$ **कोन दुसऱ्या चरणात आहे.**

iii. समजा, अंतिमभुजा बिंदू $P(-3, -3) \equiv (x, y)$ मधून जाते.

$\therefore$ $x = -3$ आणि $y = -3$

$\because$ x हा ऋण व y हा ऋण आहे.

$\therefore$ **कोन तिसऱ्या चरणात आहे.**

iv. समजा, अंतिमभुजा बिंदू $P(0, 2) \equiv (x, y)$ मधून जाते.

$\therefore$ $x = 0$ आणि $y = 2$

$\because$ x हा 0 आणि y हा धन आहे.

$\therefore$ **अंतिमभुजा Y-अक्षावर धन दिशेकडे असून हा चरणीय कोन आहे.**

4. जर $\cos \theta = \frac{7}{25}$ आणि θ चौथ्या चरणात असेल, तर इतर पाच त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे काढा.

[3 गुण]

उकल:

$\cos \theta = \frac{7}{25}$ ---- [दिलेले]

प्रमाणित कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार,

$\cos \theta = \frac{x}{r}$

$\therefore$ $\frac{x}{r} = \frac{7}{25}$

$\therefore$ समजा $x = 7k$ आणि $r = 25k$ (जेथे $k \neq 0$)

$\because$ $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $(25k)^2 = (7k)^2 + y^2$

$\therefore$ $625k^2 = 49k^2 + y^2$

$\therefore$ $625k^2 - 49k^2 = y^2$

$\therefore$ $576k^2 = y^2$

$\therefore$ $y = \pm 24k$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

परंतु θ हा चौथ्या चरणात आहे.

$\therefore$ y हा ऋण आहे.

$\therefore$ $y = -24k$

आता प्रमाणित कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार,

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-24k}{25k} = -\frac{24k}{25k}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sin\theta = -\frac{24}{25}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-24k}{7k}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\tan\theta = -\frac{24}{7}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{25k}{-24k}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\operatorname{cosec}\theta = -\frac{25}{24}}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{25k}{7k}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sec\theta = \frac{25}{7}}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{7k}{-24k}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\cot\theta = -\frac{7}{24}}$$

Ex. 4.3

1. **θ लघुकोन असताना, $\sin\theta = \frac{5}{13}$ असेल, तर नित्यसमानतेचा उपयोग करून उरलेल्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती काढा.**

[मार्च 12; ऑक्टोबर 12] [3 गुण]

उकल:

θ हा लघुकोन आहे,

$\therefore$ θ पहिल्या चरणात येतो.

$\therefore$ सर्व त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे धन आहेत.

$\sin\theta = \frac{5}{13}$ ---- [दिलेले]

आपल्याला माहीत आहे, की $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore$ $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\therefore$ $\frac{25}{169} + \cos^2\theta = 1$

$\therefore$ $\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$

$\therefore$ $\cos^2\theta = \frac{169-25}{169}$

$\therefore$ $\cos^2\theta = \frac{144}{169}$

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{12}{13}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

आता $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\left(\frac{5}{13}\right)}{\left(\frac{12}{13}\right)} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12}$

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{5}{12}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

$\therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\left(\frac{5}{12}\right)}$

$\therefore \quad \cot\theta = \frac{12}{5}$

तसेच, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore \quad 1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \sec^2\theta$

$\therefore \quad 1 + \frac{25}{144} = \sec^2\theta$

$\therefore \quad \frac{144+25}{144} = \sec^2\theta$

$\therefore \quad \sec^2\theta = \frac{169}{144}$

$\therefore \quad \sec\theta = \frac{13}{12}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

तसेच, $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore \quad 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore \quad 1 + \frac{144}{25} = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore \quad \frac{25+144}{25} = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{169}{25}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$\therefore \quad \mathbf{\cos\theta = \frac{12}{13}; \tan\theta = \frac{5}{12}; \cot\theta = \frac{12}{5};}$

$\mathbf{\sec\theta = \frac{13}{12}; \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}.}$

2. θ **चौथ्या चरणात असताना, जर $\cot \theta = -\frac{7}{24}$, असेल, तर $\sin \theta$ आणि $\sec \theta$ च्या किमती काढा.**

[3 गुण]

उकल:

$\cot \theta = -\frac{7}{24}$ ---- [दिलेले]

आता $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$

$\therefore \quad 1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2 = \operatorname{cosec}^2 \theta$

$\therefore \quad 1 + \frac{49}{576} = \operatorname{cosec}^2 \theta$

$\therefore \quad \frac{576+49}{576} = \operatorname{cosec}^2 \theta$

$\therefore \quad \frac{625}{576} = \operatorname{cosec}^2 \theta$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} \theta = \pm \frac{25}{24}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

θ हा चौथ्या चरणात आहे म्हणून $\operatorname{cosec} \theta$ ऋण आहे.

$\therefore \quad \operatorname{cosec} \theta = -\frac{25}{24}$

$\therefore \quad \sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{\left(-\frac{25}{24}\right)} = -\frac{24}{25}$

$\therefore \quad \sin \theta = -\frac{24}{25}$

तसेच, $\cot \theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\therefore \quad \cos \theta = \cot \theta \times \sin \theta$

$\therefore \quad \cos \theta = -\frac{7}{24} \times -\frac{24}{25}$

$\therefore \quad \cos \theta = \frac{7}{25}$

तसेच, $\sec \theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\left(\frac{7}{25}\right)} = \frac{25}{7}$

$\therefore \quad \sec \theta = \frac{25}{7}$

$\therefore$ **$\sin \theta = -\frac{24}{25}$ आणि $\sec \theta = \frac{25}{7}$.**

3. **α लघुकोन असताना, जर $3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha = 0$ असेल, तर $\tan \alpha$, $\sec \alpha$ आणि $\operatorname{cosec} \alpha$ च्या किमती काढा.** **[3 गुण]**

उकल:

α हा लघुकोन असल्यामुळे α हा पहिल्या चरणात येतो.

∴ सर्व त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे धन आहेत.

∴ $3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha = 0$ ---- [दिलेले]

∴ $3 \sin \alpha = 4 \cos \alpha$

∴ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$

∴ $\tan \alpha = \dfrac{4}{3}$

आता $\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

∴ $\cot \alpha = \dfrac{1}{\frac{4}{3}}$

∴ $\cot \alpha = \dfrac{3}{4}$

तसेच, $1 + \tan^2\alpha = \sec^2 \alpha$

∴ $1 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \sec^2 \alpha$

∴ $1 + \dfrac{16}{9} = \sec^2 \alpha$

∴ $\dfrac{9+16}{9} = \sec^2 \alpha$

∴ $\dfrac{25}{9} = \sec^2 \alpha$

$\therefore \quad \sec\alpha = \frac{5}{3}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

तसेच, $1 + \cot^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$

$\therefore \quad 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \text{cosec}^2\alpha$

$\therefore \quad 1 + \frac{9}{16} = \text{cosec}^2\alpha$

$\therefore \quad \frac{16+9}{16} = \text{cosec}^2\alpha$

$\therefore \quad \frac{25}{16} = \text{cosec}^2\alpha$

$\therefore \quad \text{cosec}\,\alpha = \frac{5}{4}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$\therefore \quad \mathbf{\tan\alpha = \frac{4}{3}; \sec\alpha = \frac{5}{3}; \text{cosec}\,\alpha = \frac{5}{4}}$

4. θ लघुकोन असताना, जर $\tan\theta = 1$, तर $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \text{cosec}\theta}$ ची किंमत काढा. [4 गुण]

उकल:

θ हा लघुकोन असल्यामुळे θ हा पहिल्या चरणात येतो.

$\therefore$ सर्व त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे धन आहेत.

$\therefore \quad \tan\theta = 1$ ---- [दिलेले]

$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore \quad 1 + 1 = \sec^2\theta$

$\therefore \quad 2 = \sec^2\theta$

$\therefore \quad \sec\theta = \sqrt{2}$ ---- (i) [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

आता, $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ---- (ii)

तसेच, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{1}$

$\therefore \quad \cot\theta = 1$

$\because \quad 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore \quad 1 + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore \quad 2 = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$ ---- (iii) [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ---- (iv)

समजा,

$$\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

---- [विधान (i), (ii), (iii) आणि (iv) वरून]

$$= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{2}}$$

5. α चौथ्या चरणात असताना, जर $\sec\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$, तर $\frac{1 - \operatorname{cosec}\alpha}{1 + \operatorname{cosec}\alpha}$ ची किंमत काढा.

[मार्च 16] [3 गुण]

उकल:

$\therefore \quad \sec\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ---- [दिलेले]

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore \quad \sin^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \qquad \therefore \quad \sin^2 \alpha + \frac{3}{4} = 1$

$\therefore \quad \sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \qquad \therefore \quad \sin^2 \alpha = \frac{4-3}{4}$

$\therefore \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$

$\therefore \quad \sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

परंतु, α चौथ्या चरणात येतो.

$\therefore$ $\sin \alpha$ हे ऋण आहे.

$\therefore \quad \sin \alpha = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} \alpha = -2$

समजा,

$$\frac{1 - \operatorname{cosec} \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} = \frac{1-(-2)}{1+(-2)} = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

$\therefore \quad \mathbf{\frac{1 - \operatorname{cosec} \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} = -3}$

6. जर 8 sin x – cos x = 4, तर sin x च्या संभाव्य किमती काढा. **[4 गुण]**

उकल:

$\therefore \quad 8\sin x - \cos x = 4$ ---- [दिलेले]

$\therefore \quad 8\sin x - 4 = \cos x$

$\therefore \quad 4(2\sin x - 1) = \cos x$

$\therefore \quad 16(2\sin x - 1)^2 = \cos^2 x$

---- [दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून]

$\therefore \quad 16(4\sin^2 x - 4\sin x + 1) = \cos^2 x$

---- [$\because (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$]

$\therefore \quad 64\sin^2 x - 64\sin x + 16 = 1 - \sin^2 x$

---- [$\because 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$]

$\therefore \quad 64\sin^2 x + \sin^2 x - 64\sin x + 16 - 1 = 0$

$\therefore \quad 65\sin^2 x - 64\sin x + 15 = 0$

$\therefore \quad 65\sin^2 x - 39\sin x - 25\sin x + 15 = 0$

$\therefore \quad 13\sin x(5\sin x - 3) - 5(5\sin x - 3) = 0$

$\therefore \quad (13\sin x - 5)(5\sin x - 3) = 0$

$\therefore \quad 13\sin x - 5 = 0$ किंवा $5\sin x - 3 = 0$

$\therefore \quad 13\sin x = 5$ किंवा $5\sin x = 3$

$\therefore \quad \sin x = \frac{5}{13}$ किंवा $\sin x = \frac{3}{5}$

$\therefore$ **sin x च्या संभ्राव्य किमती $\frac{5}{13}$ किंवा $\frac{3}{5}$ अशा आहेत.**

7. सिद्ध करा.

i. $\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \operatorname{cosec}A - \cot A$

[जुलै 16; ऑक्टोबर 12] [3 गुण]

सिद्धता :

डावी बाजू $= \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

$= \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A} \times \frac{1-\cos A}{1-\cos A}}$

---- [छेदाचे परिमेयकरण करून]

$= \sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A}}$ ---- $[\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta]$

$= \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A}$

$= \operatorname{cosec} A - \cot A$ = उजवी बाजू

$\therefore \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \operatorname{cosec} A - \cot A$

ii. $\sqrt{\frac{\operatorname{cosec} x-1}{\operatorname{cosec} x+1}} = \frac{1}{\sec x + \tan x}$ [4 गुण]

सिद्धता :

डावी बाजू $= \sqrt{\frac{\operatorname{cosec} x-1}{\operatorname{cosec} x+1}}$

$= \sqrt{\frac{\operatorname{cosec} x-1}{\operatorname{cosec} x+1} \times \frac{\operatorname{cosec} x-1}{\operatorname{cosec} x-1}}$

---- [छेदाचे परिमेयकरण करून]

$= \sqrt{\frac{(\operatorname{cosec} x-1)^2}{\operatorname{cosec}^2 x-1}} = \sqrt{\frac{(\operatorname{cosec} x-1)^2}{\cot^2 x}}$

---- $[\because 1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\,\theta]$

$$= \frac{\mathrm{cosec}\,x - 1}{\cot x} = \frac{\mathrm{cosec}\,x}{\cot x} - \frac{1}{\cot x}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)}{\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)} - \frac{1}{\cot x}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cot x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cot x} = \sec x - \tan x$$

$$= \sec x - \tan x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

---- [अंशाचे परिमेयकरण करून]

$$= \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sec x + \tan x}$$ ---- $[\because (a-b)(a+b) = a^2 - b^2]$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x}$$

---- $[\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \;\; \therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$

= उजवी बाजू

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sqrt{\frac{\mathrm{cosec}\,x - 1}{\mathrm{cosec}\,x + 1}} = \frac{1}{\sec x + \tan x}}$$

iii. $\mathbf{sec^2\theta + cosec^2\theta = sec^2\theta \cdot cosec^2\theta}$

[मार्च 14; जुलै 15] [3 गुण]

सिद्धता:

डावी बाजू

$= sec^2\theta + cosec^2\theta$

$= \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$

$= \frac{1}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$ ---- $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \frac{1}{\cos^2\theta} \times \frac{1}{\sin^2\theta} = sec^2\theta \cdot cosec^2\theta$

= उजवी बाजू

$\therefore \quad \mathbf{sec^2\theta + cosec^2\theta = sec^2\theta \cdot cosec^2\theta}$

iv. $\mathbf{sec^6 x - tan^6 x = 1 + 3sec^2 x . tan^2 x.}$ **[4 गुण]**

सिद्धता :

डावी बाजू

$= sec^6 x - tan^6 x$

$= (sec^2 x)^3 - (tan^2 x)^3$

$= (sec^2 x - tan^2 x)\ [(sec^2 x)^2 + sec^2 x \cdot tan^2 x + (tan^2 x)^2]$

---- $[\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)]$

$= 1[(sec^2 x)^2 + sec^2 x \cdot tan^2 x + (tan^2 x)^2]$

---- $[\because sec^2\theta - tan^2\theta = 1]$

$= 1[sec^4 x - 2sec^2 x . tan^2 x + tan^4 x + 3sec^2 x . tan^2 x]$

$= [(sec^2 x - tan^2 x)^2 + 3sec^2 x . tan^2 x]$

----$[\because (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$

$= (1)^2 + 3sec^2 x \cdot tan^2 x$

$= 1 + 3sec^2 x \cdot tan^2 x$ ---- $[\because sec^2\theta - tan^2\theta = 1]$

= उजवी बाजू

$\therefore \quad \mathbf{sec^6 x - tan^6 x = 1 + 3\ sec^2 x \cdot tan^2 x}$

v. $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta+1}+\dfrac{\sec\theta+1}{\tan\theta}=2\ \text{cosec}\ \theta$ **[4 गुण]**

सिद्धता :

डावी बाजू

$$=\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1}+\frac{\sec\theta+1}{\tan\theta}=\frac{\tan^2\theta+(\sec\theta+1)^2}{(\sec\theta+1)\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta+\sec^2\theta+2\sec\theta+1}{\tan\theta(\sec\theta+1)}$$

---- $[\because (a+b)^2=a^2+2ab+b^2]$

$$=\frac{(1+\tan^2\theta)+\sec^2\theta+2\sec\theta}{\tan\theta(\sec\theta+1)}$$

$$=\frac{\sec^2\theta+\sec^2\theta+2\sec\theta}{\tan\theta(\sec\theta+1)}$$ ---- $[\because 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta]$

$$=\frac{2\sec^2\theta+2\sec\theta}{\tan\theta(\sec\theta+1)}=\frac{2\sec\theta(\sec\theta+1)}{\tan\theta(\sec\theta+1)}$$

$$=\frac{2\sec\theta}{\tan\theta}=\frac{\left(2\times\frac{1}{\cos\theta}\right)}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}=\frac{2}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2}{\sin\theta}=2\times\frac{1}{\sin\theta}=2\ \text{cosec}\ \theta$$

= उजवी बाजू

$\therefore$ $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta+1}+\dfrac{\sec\theta+1}{\tan\theta}=2\ \text{cosec}\ \theta$

vi. $\dfrac{\mathbf{1+\sin A}}{\mathbf{\cos A}} = \dfrac{\mathbf{1+\sin A+\cos A}}{\mathbf{1+\cos A-\sin A}}$ **[4 गुण]**

सिद्धता:

डावी बाजू $= \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = \dfrac{1+\sin A}{\cos A} \times \dfrac{1-\sin A}{1-\sin A}$

---- [अंशाचे परिमेयकरण करून]

$$= \frac{1-\sin^2 A}{\cos A(1-\sin A)} = \frac{\cos^2 A}{\cos A(1-\sin A)}$$

---- [$\because 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$]

$$= \frac{\cos A}{1-\sin A}$$

आता $\dfrac{1+\sin A}{\cos A} = \dfrac{\cos A}{1-\sin A} = k$

समान गुणोत्तराच्या सिद्धान्तानुसार,

$$k = \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{\cos A}{1-\sin A} = \frac{1+\sin A+(\cos A)}{\cos A+(1-\sin A)}$$

$$= \frac{1+\sin A+\cos A}{1+\cos A-\sin A}$$

= उजवी बाजू

$\therefore$ $\dfrac{\mathbf{1+\sin A}}{\mathbf{\cos A}} = \dfrac{\mathbf{1+\sin A+\cos A}}{\mathbf{1+\cos A-\sin A}}$

vii. $\dfrac{\mathbf{\tan A}}{\mathbf{\sec A-1}} = \dfrac{\mathbf{\tan A+\sec A+1}}{\mathbf{\tan A+\sec A-1}}$ **[4 गुण]**

सिद्धता :

डावी बाजू $= \dfrac{\tan A}{\sec A-1} = \dfrac{\tan A}{\sec A-1} \times \dfrac{\sec A+1}{\sec A+1}$

---- [छेदाचे परिमेयकरण करून]

$$= \frac{\tan A(\sec A + 1)}{\sec^2 A - 1}$$

---- [$\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$]

$$= \frac{\tan A(\sec A + 1)}{\tan^2 A}$$

---- [$\because \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$]

$$= \frac{\sec A + 1}{\tan A}$$

आता $\frac{\tan A}{\sec A - 1} = \frac{\sec A + 1}{\tan A}$

समान गुणोत्तराच्या सिद्धान्तानुसार,

$$\frac{\tan A}{\sec A - 1} = \frac{\sec A + 1}{\tan A} = \frac{\tan A + (\sec A + 1)}{\sec A - 1 + (\tan A)}$$

$$= \frac{\tan A + \sec A + 1}{\tan A + \sec A - 1}$$

= उजवी बाजू

$\therefore \quad \mathbf{\frac{\tan A}{\sec A - 1} = \frac{\tan A + \sec A + 1}{\tan A + \sec A - 1}}$

viii. $\mathbf{\sqrt{\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta}$ **[4 गुण]**

सिद्धता:

डावी बाजू $= \sqrt{\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta}$

$$= \sqrt{1 + \tan^2\theta + 1 + \cot^2\theta}$$

---- [$\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ आणि $\mathrm{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$]

$$= \sqrt{\tan^2\theta + \cot^2\theta + 2}$$

$$= \sqrt{\tan^2\theta + \cot^2\theta + 2\tan\theta\cot\theta}$$

----[$\because \tan\theta.\cot\theta = 1$]

$$= \sqrt{\tan^2\theta + 2\tan\theta\cot\theta + \cot^2\theta}$$

$$= \sqrt{(\tan\theta + \cot\theta)^2}$$

---- [$\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]

$= \tan\theta + \cot\theta =$ उजवी बाजू

$\therefore \quad \mathbf{\sqrt{\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta}$

ix. $\dfrac{1}{\text{cosecA} - \cot A} - \dfrac{1}{\sin A}$

$$= \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\text{cosec} A + \cot A}$$

[4 गुण]

सिद्धता :

आपल्याला हे सिद्ध करायचे आहे, की

$$\frac{1}{\text{cosecA} - \cot A} - \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\text{cosecA} + \cot A}$$

म्हणजेच, सिद्ध करण्यासाठी

$$\frac{1}{\text{cosecA} - \cot A} + \frac{1}{\text{cosecA} + \cot A} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin A}$$

म्हणजेच, सिद्ध करण्यासाठी

$$\frac{1}{\text{cosecA} - \cot A} + \frac{1}{\text{cosecA} + \cot A} = \frac{2}{\sin A}$$

डावी बाजू $= \dfrac{1}{\text{cosecA} - \cot A} + \dfrac{1}{\text{cosecA} + \cot A}$

$$= \frac{\text{cosecA} + \cot A + \text{cosecA} - \cot A}{\text{cosec}^2 A - \cot^2 A}$$

---- $[\because (a-b)(a+b) = a^2 - b^2]$

$$= \frac{2\,\text{cosecA}}{1} \quad \text{---- } [\because \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1]$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sin A} \quad \text{---} \left[\because \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}\right]$$

$= \dfrac{2}{\sin A} =$ उजवी बाजू

$\therefore$ $\dfrac{1}{\cos\text{ecA} - \cot A} - \dfrac{1}{\sin A}$

$$= \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\cos\text{ecA} + \cot A}$$

x. **जर $\tan A + \frac{1}{\tan A} = 2$, तर दाखवा, की**

$\tan^2 A + \frac{1}{\tan^2 A} = 2$. **[4 गुण]**

सिद्धता :

$\tan A + \frac{1}{\tan A} = 2$ ---- [दिलेले]

$\therefore \left(\tan A + \frac{1}{\tan A}\right)^2 = 4$ ---- [दोन्ही बाजूंचा वर्ग घेऊन]

$\therefore \tan^2 A + 2 \times \tan A \times \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan^2 A} = 4$

---- [$\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]

$\therefore \tan^2 A + 2 + \frac{1}{\tan^2 A} = 4$

$\therefore \tan^2 A + \frac{1}{\tan^2 A} = 4 - 2$

$\therefore \mathbf{\tan^2 A + \frac{1}{\tan^2 A} = 2}$

8. **θ चे निरसन करा, जर**

i. **$x = a \sec \theta, y = b \tan \theta$** **[मार्च 12] [2 गुण]**

उकल :

$x = a \sec \theta$ ---- [दिलेले]

$\therefore \frac{x}{a} = \sec \theta$

$y = b \tan\theta$ ---- [दिलेले]

$\therefore \quad \frac{y}{b} = \tan\theta$

आपल्याला माहीत आहे, की

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\therefore \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$\therefore \quad \mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

ii. $\mathbf{x = 2\cos\theta - 3\sin\theta, y = \cos\theta + 2\sin\theta}$ **[4 गुण]**

उकल:

$x = 2\cos\theta - 3\sin\theta$ ---- (i)

$y = \cos\theta + 2\sin\theta$ ---- (ii)

समीकरण (ii) ला 2 ने गुणून,

$2y = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ ---- (iii)

समीकरण (i) मधून (iii) वजा करून,

$$\begin{array}{r} x = 2\cos\theta - 3\sin\theta \\ 2y = 2\cos\theta + 4\sin\theta \\ - \quad - \quad - \\ \hline x - 2y = -3\sin\theta - 4\sin\theta \end{array}$$

$\therefore \quad x - 2y = -7\sin\theta$

$\therefore \quad \frac{x-2y}{7} = -\sin\theta$

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{-(x-2y)}{7}$ ---- (iv)

समीकरण(i) ला 2 ने व समीकरण (ii) ला 3 ने गुणून,

$2x = 4\cos\theta - 6\sin\theta$ ---- (v)

$3y = 3\cos\theta + 6\sin\theta$ ---- (vi)

समीकरण (v) आणि (vi) ची बेरीज करून,

$2x + 3y = 4\cos\theta + 3\cos\theta$

$\therefore \quad 2x + 3y = 7\cos\theta$

$\therefore \quad \frac{2x+3y}{7} = \cos\theta$

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{2x+3y}{7}$ ---- (vii)

आपल्याला माहीत आहे, की $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \quad \left[\frac{-(x-2y)}{7}\right]^2 + \left(\frac{2x+3y}{7}\right)^2 = 1$

---- [विधान (iv) व (vii) वरून]

$\therefore \quad \frac{(x-2y)^2}{49} + \frac{(2x+3y)^2}{49} = 1$

$\therefore \quad \frac{(x-2y)^2 + (2x+3y)^2}{49} = 1$

$\therefore \quad \mathbf{(x-2y)^2 + (2x+3y)^2 = 49}$

iii. $x = 3\operatorname{cosec}\theta + 4\cot\theta,$

$y = 4\operatorname{cosec}\theta - 3\cot\theta$ **[4 गुण]**

उकल:

$x = 3\operatorname{cosec}\theta + 4\cot\theta$ ---- (i)

$y = 4\operatorname{cosec}\theta - 3\cot\theta$ ---- (ii)

समीकरण (i) ला 3 ने व समीकरण (ii) ला 4 ने गुणून,

$3x = 9\operatorname{cosec}\theta + 12\cot\theta$ ---- (iii)

$4y = 16\operatorname{cosec}\theta - 12\cot\theta$ ---- (iv)

समीकरण (iii) व (iv) ची बेरीज करून,

$3x + 4y = 9\operatorname{cosec}\theta + 16\operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \quad 3x + 4y = 25\operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \quad \frac{3x+4y}{25} = \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{3x+4y}{25}$ ---- (v)

समीकरण (i) ला 4 ने व समीकरण (ii) ला 3 ने गुणून,

$4x = 12\operatorname{cosec}\theta + 16\cot\theta$ ---- (vi)

$3y = 12\operatorname{cosec}\theta - 9\cot\theta$ ---- (vii)

समीकरण (vi) मधून (vii) वजा करून,

$$4x = 12\text{cosec}\,\theta + 16\cot\theta$$

$$3y = 12\text{cosec}\,\theta - 9\cot\theta$$

$$- \quad - \qquad +$$

$$4x - 3y = 16\cot\theta + 9\cot\theta$$

$\therefore \quad 4x - 3y = 25\cot\theta \qquad \therefore \quad \dfrac{4x-3y}{25} = \cot\theta$

$\therefore \quad \cot\theta = \dfrac{4x-3y}{25}$ ---- (viii)

आपल्याला माहीत आहे, की

$$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$$

$\therefore \quad \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\therefore \quad \left(\dfrac{3x+4y}{25}\right)^2 - \left(\dfrac{4x-3y}{25}\right)^2 = 1$

---- [विधान (v) व (viii) वरून]

$\therefore \quad \dfrac{(3x+4y)^2}{625} - \dfrac{(4x-3y)^2}{625} = 1$

$\therefore \quad \dfrac{(3x+4y)^2 - (4x-3y)^2}{625} = 1$

$\therefore \quad \mathbf{(3x+4y)^2 - (4x-3y)^2 = 625}$

Ex. 4.4

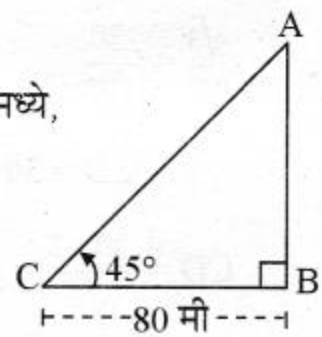
1. एक व्यक्ती एका चर्चपासून 80 मीटर अंतरावर उभी आहे. त्या व्यक्तीने चर्चच्या छताकडे पाहिले असता 45° मापाचा उन्नत कोन होतो. तर चर्चची उंची किती ? [3 गुण]

उकल:

समजा, AB ही चर्चची उंची आहे, व्यक्ती C बिंदूवर उभी आहे.

∴ CB = 80 मीटर आणि

उन्नत कोन = $\angle ACB = 45^\circ$



ΔABC या काटकोन त्रिकोणामध्ये,

$\tan \angle ACB = \tan 45^\circ$

∴ $\tan 45^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

∴ $1 = \dfrac{AB}{80}$

∴ AB = 80 मीटर

∴ **चर्चची उंची 80 मीटर आहे.**

2. **दीपगृहावरून एका जहाजाकडे पाहताना 60° मापाचा अवनत कोन होतो. जर दीपगृहाची उंची 90 मीटर असेल, तर ते जहाज दीपगृहापासून किती अंतरावर आहे ? ($\sqrt{3} = 1.73$) [मार्च 14] [4 गुण]**

उकल:

समजा, AB ही दीपगृहाची उंची आहे आणि

$\therefore$ AB = 90 मीटर

बिंदू C हा जहाजाची जागा दर्शवितो.

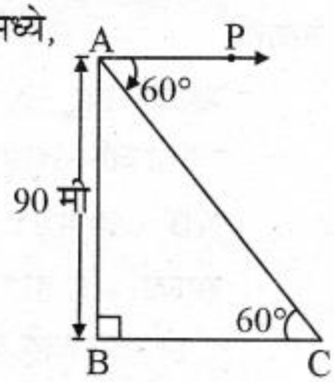
किरण AP || रेख BC काढा.

$\angle PAC$ हा अवनत कोन आहे, $\angle PAC = 60°$

तसेच, $\angle ACB \cong \angle PAC$ ---- [व्युत्क्रम कोन]

$\therefore \angle ACB = 60°$

ΔABC या काटकोन त्रिकोणामध्ये,



$\tan \angle ACB = \tan 60°$

$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \sqrt{3} = \frac{90}{BC}$

$\therefore BC = \frac{90}{\sqrt{3}} = \frac{90}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

---- [छेदाचे परिमेयकरण करून]

$= \frac{90\sqrt{3}}{3} = 30\sqrt{3} = 30 \times 1.73$

$= 51.9$ मीटर

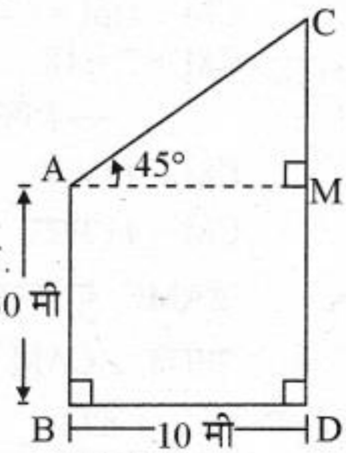
$\therefore$ **दीपगृहापासून जहाजाचे अंतर 51.9 मीटर आहे.**

3. 10 मीटर रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा समोरासमोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 30 मीटर असून तिच्या छतावरून दुसऱ्या इमारतीच्या छताकडे पाहिले असता 45° मापाचा उन्नत कोन होतो, तर दुसऱ्या इमारतीची उंची किती ? [मार्च 15] [3 गुण]

उकल:

समजा, AB व CD दोन इमारतीची उंची दर्शवितात.

AB = 30 मीटर



BD ही रस्त्याची रुंदी आहे.

BD = 10 मीटर

रेख AM ⊥ रेख CD काढा.

$\angle$CAM हा उन्नत कोन आहे. ---- [रचना]

∴ $\angle$CAM = 45°

□ABDM मध्ये,

$\angle$B = $\angle$D = 90°

$\angle$M = 90°

∴ $\angle$A = 90° ---- [□ABDM चा उर्वरित कोन]

∴ □ABDM हा आयत आहे. ---- [प्रत्येक कोनाचे माप 90°]

∴ AM = BD = 10 मीटर ---- (i)

DM = AB = 30 मीटर ---- (ii) [आयताच्या विरुद्ध बाजू]

ΔAMC या काटकोन त्रिकोणामध्ये,

tan $\angle$CAM = tan 45°

$$\tan 45° = \frac{CM}{AM}$$

$\therefore \quad 1 = \frac{CM}{10}$ ---- [विधान (i) वरून]

$\therefore \quad CM = 10$ मीटर ---- (iii)

$CD = CM + DM$ ---- [C–M–D]

$\therefore \quad CD = 10 + 30 = 40$ मीटर

---- [विधान (ii) व (iii) वरून]

$\therefore$ **दुसऱ्या इमारतीची उंची 40 मीटर आहे.**

4. 18 मीटर व 7 मीटर उंचीचे दोन खांब जमिनीवर उभे आहेत. त्यांच्या वरच्या टोकांना जोडणाऱ्या तारेची लांबी 22 मीटर आहे. तर त्या तारेने क्षितिजसमांतर पातळीशी केलेला कोन किती मापाचा असेल? [4 गुण]

उकल:

समजा, AB आणि CD या दोन खांबांची उंची आहेत.

$AB = 7$ मीटर आणि $CD = 18$ मीटर

समजा, AC ही तारेची लांबी आहे.

$\therefore \quad AC = 22$ मीटर

रेख AM ⊥ रेख CD काढा.

□ABDM मध्ये,

$\angle B = \angle D = 90^\circ$

$\angle M = 90^\circ$ ---- [रचना]

$\therefore \quad \angle A = 90^\circ$ ---- [□ABDM चा उर्वरित कोन]

$\therefore$ □ABDM हा आयत आहे.

---- [प्रत्येक कोनाचे माप 90°]

$\therefore \quad AB = DM = 7$ मीटर ----(i)[आयताच्या विरुद्ध बाजू]

$CM + DM = CD$ ---- [C–M–D]

$\therefore \quad CM + 7 = 18$

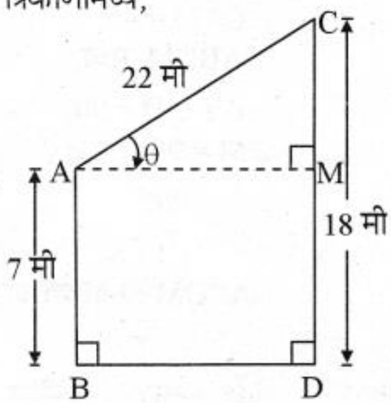
----[विधान (i) वरून व दिलेली किंमत ठेवून]

$\therefore \quad CM = 18 - 7$

$\therefore$ $CM = 11$ मीटर ---- (ii)

ΔAMC या काटकोन त्रिकोणामध्ये,

समजा, $\angle CAM = \theta$



$\sin\theta = \frac{CM}{AC} = \frac{11}{22}$

----[विधान (ii) वरून व दिलेली किंमत ठेवून]

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

परंतु, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\theta = 30^\circ$

$\therefore$ $\angle CAM = 30^\circ$

$\therefore$ **तारेने क्षितिजसमांतर पातळीशी केलेला कोन 30° आहे.**

5. वादळामुळे एक झाड मोडले आणि मोडल्यामुळे झाडाचा शेंडा जमिनीवर टेकला तेव्हा मोडलेला भाग जमिनीशी 30° मापाचा कोन करतो. झाडाचा शेंडा व बुंधा यांमधील अंतर 30 मीटर आहे, तर संपूर्ण झाडाची उंची किती ?($\sqrt{3} = 1.73$) [ऑक्टोबर 14][4 गुण]

उकल:

समजा, AB ही झाडाची उंची आहे आणि बिंदू C मध्ये झाड मोडले.

AC हा झाडाचा मोडलेला भाग आहे, जो CD स्थान असे घेतो, की $\angle CDB = 30^\circ$

$\therefore$ $AC = CD$ ---- (i)

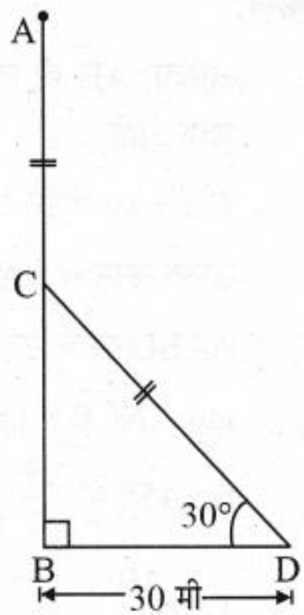
ΔCBD या काटकोन त्रिकोणामध्ये,

$\tan\angle CDB = \tan 30^\circ$

$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$

$\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{30}$ ----[दिलेली किंमत ठेवून]

$\therefore \quad BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$ मीटर ---- (ii)



तसेच, $\cos 30° = \frac{BD}{CD}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30}{CD}$

$\therefore \quad \sqrt{3} \times CD = 30 \times 2$

$\therefore \quad CD = \frac{30 \times 2}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad CD = \frac{60}{\sqrt{3}}$ ---- (iii)

$AB = AC + BC$ ---- [A–C–B]

$\therefore \quad AB = CD + BC$ ---- [विधान (i) वरून]

$\therefore \quad AB = \frac{60}{\sqrt{3}} + \frac{30}{\sqrt{3}}$ ---- [विधान (ii) आणि (iii) वरून]

$\therefore \quad AB = \frac{90}{\sqrt{3}} = \frac{90}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

---- [छेदाचे परिमेयकरण करून]

$\therefore \quad AB = \frac{90\sqrt{3}}{3} = 30\sqrt{3} = 30 \times 1.73 = 51.9$ मीटर

$\therefore$ **झाडाची उंची 51.9 मीटर आहे.**

6. एक पतंग उडताना जमिनीपासून 60 मीटर लंबउंचीपर्यंत पोहोचतो. पतंगाच्या दोऱ्याचे एक टोक जमिनीवर बांधले तेव्हा जमीन व दोरा यांच्यामध्ये 60° मापाचा कोन तयार होतो. दोरा कोठेही वाकलेला नाही असे गृहीत धरून दोऱ्याची लांबी काढा. ($\sqrt{3} = 1.73$) [3 गुण]

उकल:

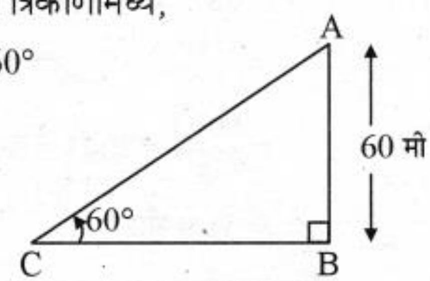
समजा, बिंदू A ही पतंगाची जागा आहे आणि AB ही त्याची जमिनीपासूनची उंची आहे.

AB = 60 मीटर

समजा, AC ही पतंगाच्या दोऱ्याची लांबी आहे आणि बिंदू C ही पतंग जिथे बांधला ती जागा आहे.

$\angle ACB = 60^\circ$

ΔABC या काटकोन त्रिकोणामध्ये,



$\sin \angle ACB = \sin 60^\circ$

$\sin 60^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{60}{AC}$

$\therefore \quad \sqrt{3} \times AC = 60 \times 2$

$\therefore \quad \sqrt{3}\, AC = 120$

$\therefore \quad AC = \dfrac{120}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad AC = \dfrac{120}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

---- [छेदाचे परिमेयकरण करून]

$= \dfrac{120\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \quad AC = 40\sqrt{3} = 40 \times 1.73 = 69.2$ मीटर

$\therefore$ **दोऱ्याची लांबी 69.2 मीटर आहे.**