9

நிகழ்தகவு

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு என்பது நல்லறிவைக் கணக்கீடாகச் சுருக்குவதேயன்றி வேறொன்றுமில்லை - பியரி சைமன் லாப்லாஸ்

ரிச்சர்ட் வான் மைசஸ்
(கி.பி. (பொ.ஆ.) 1883-1953)

நிகழ்தகவிற்கான பண்பை, பட்டறி அல்லது புள்ளியியல் அணுகுமுறையை ஆர்.எப். பிசர் (R.F.Fisher) மற்றும் ஆர். வான் மைசஸ் (R.Von.Mises) ஆகியோர் விரிவாக்கம் செய்தனர். ஆர். வான் மைசஸ் என்பவரால் கூறுவெளி என்ற கருத்து அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. இக்கருத்து, அளவீட்டுக் கொள்கையை அடிப்படையாகக்கொண்டு நிகழ்தகவியல் என்ற கணிதக் கருத்தியலை உண்டாக்க ஏதுவாக அமைந்தது. சென்ற நூற்றாண்டில் பற்பலப் படைப்பாளிகளின் முயற்சியால் இந்த அணுகுமுறை படிப்படியாக வளர்ந்தது.

கற்றல் விளைவுகள்

- நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கருத்துகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- தொன்மை நிகழ்தகவு மற்றும் சோதனை நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- நிகழ்தகவில் நிகழ்ச்சிகளின் பல்வேறு வகைகளைப் பற்றி அறிந்துகொள்ளுதல்.

F9KPT6

9.1 அறிமுகம்

நம்முடைய வாழ்க்கைச் சூழல்களில் சில உறுதியற்ற பண்புகளைக் கொண்ட நிகழ்வுகளைக் காண்பதன் மூலம் நிகழ்தகவு என்ற கருத்தினைப் புரிந்துகொள்ளலாம்.

மருத்துவமனையில் அனுமதிக்கப்பட்ட ஒரு நோயாளிக்கு உயிர் காக்கும் மருந்து ஒன்றைக் கொடுக்க இருப்பதாகக் கொள்வோம்.நோயாளியின் உறவினர்கள் அந்த மருந்து எவ்வாறு வேலை செய்யும் என்பதைப் பற்றிய நிகழ்தகவை அறிய விரும்பலாம். 100 நோயாளிகளுக்குக் கொடுக்கப்பட்டதில் 80–க்கும் மேற்பட்ட நோயாளிகளுக்கு மருந்து சிறப்பாக வேலை செய்துள்ளது என மருத்துவர் கூறினால் அவர்கள் மகிழ்ச்சி அடைவார்கள். இந்த வெற்றிச் சதவீதமே நிகழ்தகவு என்ற கருத்தின் விளக்கமாகும். இது

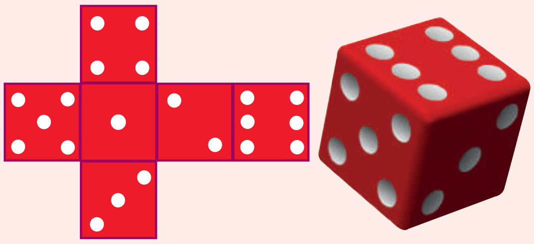
நிகழ்வுகளின் செறிவை (நிகழ்வெண்) அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது உறுதியற்ற சூழலில் ஒருவர் முடிவை எடுப்பதற்கு (அடைவதற்கு) உதவி செய்கிறது. ஆகவே நிச்சயமற்றவற்றைக் கணக்கிடும் அல்லது அளவிடும் வழி முறையே நிகழ்தகவு ஆகும்.

சீட்டாட்டக் கட்டின் 52 சீட்டுகளைப் பற்றி நாம் நன்கு அறிந்திருக்கிறோம். அது ஹார்ட், கிளாவர், டைமண்ட், ஸ்பேடு (Hearts ♥, Clover ♣, Diamonds ♦, Spades ♠) என நான்கு வகையாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வகையும் 13 சீட்டுகளைக் கொண்டது. இதில் ஏதேனும் ஒரு வகையைத் தேர்ந்தெடுப்போம் (ஸ்பேடு எனக் கொள்க). அவற்றை நன்கு கலைத்து அதில் இருந்து ஏதேனும் ஒரு சீட்டை எடுக்க. அது இராசா சீட்டாக இருக்க வாய்ப்பு என்ன? நீங்கள் இராசா சீட்டிற்குப் பதிலாக ஓர் ஏஸ் சீட்டை விரும்புகிறீர்கள் எனில் உங்கள் வாய்ப்பு மாறுமா? இரண்டு வகைகளிலுமே உங்களுக்கான வாய்ப்பு 13 இல் 1 என்பதை உடனடியாகக் காண முடிகிறது (ஏன்?). வேறு ஏதேனும் ஒரு சீட்டை நீங்கள் தேர்ந்தெடுப்பதாக இருந்தாலும் இந்த வாய்ப்பு மாறாது. நிகழ்தகவு என்பது துல்லியமாக மாறாத மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும் வாய்ப்பு எனப் பொருள்படும். ஆனால் 13இல் 1 என்பதற்குப் பதிலாக நாம் $\frac{1}{13}$ எனப் பின்னமாக எழுதுகிறோம். (நிகழ்தகவுகளை இணைத்துக் கையாளும்போது பின்னமாக எழுதுதல் மிக எளிமையாக இருக்கும்). இது சாதகமான விளைவுகளுக்கும் சாத்தியமான (மொத்த) விளைவுகளுக்கும் உள்ள ஒரு விகிதமாகும்.

நீங்கள் பகடையைப் பார்த்திருக்கிறீர்களா? ஒரு தரமான பகடை என்பது கனச்சதுர வடிவில் ஒவ்வொரு பக்கமும் 1 முதல் 6 வரை உள்ள வேறுபட்ட எண்களைக் கொண்டிருக்கும். இது சூதாட்டங்களிலும் வாய்ப்புகளோடு தொடர்புடைய வேறு ஆட்டங்களிலும் உருட்டப்படுகிறது.

குறிப்பு

ஒரு சீரான பகடை என்பது அதன் எதிரெதிர் பக்கங்களில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் 7 ஆக இருக்கவேண்டும்.



ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 5 பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? இதேபோல் 2 மற்றும் 7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

மேற்கண்ட அனைத்து வினாக்களுக்கான விடைகளிலும் நிகழ்தகவு என்ற கருத்துக்கான சிறப்புத்தன்மை எதையும் நீங்கள் கவனித்தீர்களா? அதிகபட்ச மதிப்பு மற்றும் குறைந்தபட்ச மதிப்பு என எதையும் நீங்கள் குறிப்பிட முடியுமா? உறுதியாக நடக்கும் ஒரு நிகழ்விற்கான நிகழ்தகவு என்னவாக இருக்க முடியும்? இதைத் தெளிவாக உணரப் பின்வரும் பத்திகளில் முறைப்படுத்துவோம்.

9 Probability TM.indd 308 26-12-2019 13:15:24

9.2 அடிப்படைக் கருத்துகள்

அறிவியலில் ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் நாம் திரும்பத் திரும்பச் சோதனைகளை நடத்தும்போது ஏறத்தாழ ஒரே முடிவையே பெறுகிறோம். இந்தச் சோதனைகள் உறுதியான சோதனைகள் என அறியப்படுகின்றன. ஆர்க்கிமிடிஸ் கொள்கையைச் சரிபார்க்கும் சோதனை மற்றும் ஓம் விதியைச் சரிபார்க்கும் சோதனை போன்றவை உறுதியான சோதனைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டாகும். ஆர்க்கிமிடிஸ் கொள்கையை அல்லது ஓம் விதியைச் சரிபார்த்தல் சோதனைகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்தச் சோதனைகளின் முடிவுகள் முன்னரே அறியப்பட்டவை. ஆனால் ஒரே சூழ்நிலையில் நடத்தப்பட்டாலும் வெவ்வேறு முடிவுகளைத் தரக்கூடிய சோதனைகளும் இருக்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சீரான பகடையை உருட்டுதல், ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல் அல்லது ஒரு பானையில் இருந்து ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுத்தல் போன்ற நிகழ்வுகளைக் கருதுவோம். இவற்றின் மிகச் சரியான முடிவுகளை நாம் முன்கூட்டியே கணிக்க இயலாது. இவை சமவாய்ப்புச் சோதனைகள் (random experiment) ஆகும். ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒவ்வொரு நிகழ்வும் முயற்சி (trail) எனப்படும். முயற்சியின் ஒவ்வொரு விளைவும் முடிவு என அழைக்கப்படும். (குறிப்பு: பெரும்பாலான புள்ளியியலாளர்கள் சோதனை என்பதையும் முயற்சி என்பதையும் ஒரே பொருளிலேயே பயன்படுத்துகின்றனர்).

நாம் இப்பொழுது நிகழ்தகவு தொடர்பான சில முக்கிய கருத்துகளைப் பார்ப்போம்.

முயற்சி (Trial) : ஒரு பகடையை உருட்டுதல், நாணயத்தைச் சுண்டுதல் ஆகியன முயற்சி ஆகும். முயற்சி என்பது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளைத் தரக்கூடிய செயல் ஆகும்.

விளைவு (Outcome) : நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ கிடைக்கிறது. தலை மற்றும் பூ என்பன விளைவுகள். ஒரு முயற்சியின் முடிவு விளைவு என அழைக்கப்படுகிறது.

கூறுபுள்ளி (Sample point) : நாணயத்தைச் சுண்டும்போது கிடைக்கும் தலை மற்றும் பூ என்ற ஒவ்வொரு விளைவும் கூறு புள்ளி எனப்படும். ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒவ்வொரு விளைவும் கூறுபுள்ளி என அழைக்கப்படுகிறது.

கூறுவெளி (Sample space) : ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டும்போது கிடைக்கும் கூறு புள்ளிகளின் கணம் கூறுவெளி எனப்படும். இங்கு $S = \{H,T\}$.

இரு நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படும்போது கிடைக்கும் கூறு புள்ளிகளின் தொகுப்பு $S=\{HH,HT,TH,TT\}$.

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் வாய்ப்புள்ள எல்லா விளைவுகளின் (அல்லது கூறு புள்ளிகளின்) கணம் கூறுவெளி என அழைக்கப்படுகிறது. இது S என்ற ஆங்கில எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. இதிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n(S)$ ஆகும்.

நிகழ்ச்சி (Event) : ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 4 கிடைக்கிறது எனக் கொள்வோம், இது விளைவு என அழைக்கப்படுகிறது. இதே சோதனையில் ஓர் இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $\{2, 4, 6\}$ என்ற கணமாகும். கூறுவெளியின் எந்தவொரு உட்கணமும் நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே ஒரு நிகழ்ச்சி என்பது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

9 Probability TM.indd 309 26-12-2019 13:15:24

எடுத்துக்காட்டுகள்,

(i) சமவாய்ப்புச் சோதனை : நாணயத்தைச் சுண்டுதல்

வாய்ப்புள்ள விளைவுகள் : தலை (H) அல்லது பூ (T)

கூறுவெளி : $S = \{H, T\}$

S ன் உட்கணம் : $A=\{H\}$ or $A=\{T\}$

ஆகவே இந்த எடுத்துக்காட்டில், A என்பது ஒரு விளைவு.

(ii) ஒரு பகடையை உருட்டும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளி $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(iii) ஒரு வாரத்தில் ஒரு நாளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்வில் கூறுவெளி S = { ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}.

செயல்பாடு - 1

இரு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டுக. சோதனையில் பின்வருவனவற்றை வரிசைப்படுத்துக.	இரு பகடைகளை ஒரே நேரத்தில் உருட்டுக. சோதனையில் பின்வருவனவற்றை வரிசைப்படுத்துக.
சமவாய்ப்புச் சோதனை : வாய்ப்புள்ள விளைவுகள் : கூறுவெளி : S இன் எவையேனும் மூன்று உட்கணங்கள் : (அல்லது எவையேனும் 3 நிகழ்ச்சிகள்)	சமவாய்ப்புச் சோதனை : வாய்ப்புள்ள விளைவுகள் : கூறுவெளி : S இன் எவையேனும் மூன்று உட்கணங்கள் : (அல்லது எவையேனும் 3 நிகழ்ச்சிகள்)

செயல்பாடு - 2

ஒவ்வொரு மாணவரையும் ஒரு நாணயத்தை 10 முறை சுண்டுமாறு கூறிக் கிடைத்த விளைவுகளைப் பின்வருமாறு அட்டவணையில் பட்டியலிடக் கூறவும்.

மொத்தச் சுண்டுதல்கள்	தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை
⋮	⋮	⋮

(i) பின்னம் 1 : $\dfrac{\text{தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்தச் சுண்டுதல்கள்}}$

(ii) பின்னம் 2 : $\dfrac{\text{பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்தச் சுண்டுதல்கள்}}$

அதே நாணயத்தை 20, 30, 40, 50 முறை மீண்டும் சுண்டுமாறு கூறி மேற்குறிப்பிட்டவாறு பின்னங்களைக் கண்டறிக.

9 Probability TM.indd 310 26-12-2019 13:15:25

செயல்பாடு- 3

வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களை இரண்டு பேர் கொண்ட குழுக்களாகப் பிரிக்கவும். ஒவ்வொரு குழுவிலும் முதல் மாணவர் நாணயத்தை 50 முறை சுண்டட்டும், இரண்டாவது மாணவர் விளைவுகளைப் பதிவு செய்து, பின்வருமாறு அட்டவணையைத் தயார் செய்யட்டும்.

குழு	தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை / மொத்தச் சுண்டுதல்கள்	பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை / மொத்தச் சுண்டுதல்கள்
1				
2				
3				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

9.3 தொன்மை அணுகுமுறை (Classical Approach)

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்பை, எண் மதிப்பால் குறிப்பிடுவதே நிகழ்தகவு எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பானையில் 4 சிவப்புப் பந்துகள் மற்றும் 6 நீலப் பந்துகள் உள்ளன. சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அது சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

சமவாய்ப்பு என்ற சொல்லானது பானையில் உள்ள 10 பந்துகளும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான சம வாய்ப்புகளைப் (அதாவது நிகழ்தகவு) பெற்றிருக்கிறது என உறுதியளிக்கிறது.

உங்கள் கண்களானது கட்டப்பட்டு இருப்பதாகவும் பந்துகள் கலைக்கப்பட்டு இருப்பதாகவும் கருதுவோம். இது விளைவுகளைச் சமவாய்ப்பு உடையதாக ஆக்குகிறது

சிவப்புப் பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{10}$ ஆகும். (இதை $\frac{2}{5}$ அல்லது 0.4 என எழுதலாம்.)

நீல நிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? இது $\frac{6}{10}$ ஆகும். ($\frac{3}{5}$ அல்லது 0.6).

இரு நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 என்பதைக் காண்க. இதன் பொருள் வேறு ஒரு விளைவு கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு இல்லை என்பதாகும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் பயன்படுத்திய அணுகுமுறை தொன்மையானது. இது ஒரு முன்னறி நிகழ்தகவு (Priori probability) கணக்கீடாகும். [இலத்தீன் மொழியில் Priori என்றால் 'ஆராய்வு இல்லாமல்' அல்லது உணர்ச்சி அனுபவம் என்று பொருள்] விளைவுகள் சம வாய்ப்புள்ளவையாக இருந்தால் மட்டுமே மேற்கண்ட செயல் நடக்க இயலும் என்பதைக் கவனிக்க.

சிந்தனைக் களம்

ஒரு சோதனை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 எனில் அது தோல்வி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தொன்மை நிகழ்தகவு என்பது 17 மற்றும் 18ஆம் நூற்றாண்டுகளில் கணிதவியலாளர்களால் முதன் முதலில் படிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு ஆகும். எனவேதான் அது அவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது.

S என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் சமவாய்ப்பு விளைவுகளின் கணம் என்க. (S என்பது அச்சோதனையின் கூறுவெளி என அழைக்கப்படுகிறது).

E என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவு அல்லது விளைவுகளின் தொகுப்பு என்க. (E என்பது நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது).

F9UKUT

E என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(E)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$P(E) = \frac{\text{சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

ஒரு சோதனையானது திரும்பத்திரும்பப் பலமுறை செய்யப்படும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவானது, ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீதத்தில் நிகழும் எனில் அந்தக் குறிப்பிட்ட சதவீதம் அந்த விளைவிற்கான நிகழ்தகவிற்கு மிக அருகில் இருக்கும் என நிகழ்தகவுக்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கோட்பாடு கூறுகிறது.

9.4 பட்டறி அணுகுமுறை (Empirical Approach)

எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் உற்பத்தியாளர் ஒவ்வொரு மாதமும் 10000 மின் சொடுக்கிகள் (electric switches) தயாரிக்கிறார். அவற்றில் 1000 சொடுக்கிகள் குறைபாடுடையதாகக் கண்டறியப்பட்டன. அந்த உற்பத்தியாளர் ஒரு குறைபாடுடைய மின் சொடுக்கியை ஒவ்வொரு மாதமும் தயாரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

குறிப்பு

இந்த நிகழ்தகவைத் தீர்மானிப்பதற்கு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்க வேண்டும். முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்போது , நிகழ்தகவின் சிறந்த மதிப்பீடு கிடைக்கும்.

ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கருத்துப்படி, தேவையான நிகழ்தகவு 10000இல் 1000 அதாவது 0.1 இக்கு அருகில் இருக்கும்.

நாம் இந்த வரையறையை முறைப்படுத்துவோம்.

மொத்த முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையில் (n என்க) E என்ற நிகழ்ச்சியின் r விளைவுகளைப்

9 Probability TM.indd 312 26-12-2019 13:15:26

பெறுகிறோம் எனக் கொண்டால் நிகழ்ச்சி E இன் நிகழ்தகவு ($P(E)$ ஆனது) பின்வருமாறு:

$$P(E)=\frac{r}{n}.$$

முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்க அதிகரிக்க இந்த மதிப்பானது ஒரு மாறிலியில் நிலைகொள்ளும் என நம்மால் உறுதியாகக் கூற இயலுமா ? இயலாது ; இது ஒரு சோதனை, சோதனையை ஒவ்வொரு முறை செய்யும்போதும் மாறுபட்ட ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண்ணைப் பெற வாய்ப்பு உள்ளது.

இருந்தபோதிலும், அங்கே ஒரு பாதுகாப்பு எல்லை உள்ளது. நிகழ்தகவின் மதிப்பானது குறைந்தபட்சம் '0' ஆகவும் அதிகபட்சம் '1' ஆகவும் இருக்க முடியும். கணிதத்தில் இதைப் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

$$0\leq P(E)\leq 1.$$

சிந்தனைக் களம்

ஒரு நிகழ்தகவு தொடர்பான வினாவிற்கு மாணவனின் பதில் $\frac{3}{2}$ என இருந்ததைத் தவறு என ஆசிரியர் கூறினார். ஏன்?

மேலும் நாம் இதைச் சற்று ஆழமாகப் பார்ப்போம்.

முதலில், r ஆனது n ஐ விட அதிகமாக இருக்க முடியாது என்பது நாம் அறிந்ததே.

எனவே $\frac{r}{n}<1$. அதாவது $P(E)<1$. … (1)

அடுத்ததாக, $r=0$ என்க. இதன் பொருள் இந்த நிகழ்ச்சி நடைபெற இயலாது அல்லது அதிகமான முயற்சிகளில் அது நடைபெறவில்லை என்பதாகும். (ஒரு பகடையை உருட்டும் போது 7 என்ற எண்ணைப் பெற இயலுமா?)

ஆகவே, இங்கு $\frac{r}{n}=\frac{0}{n}=0$. … (2)

இறுதியாக, $r=n$ என்க

நிகழ்ச்சி கண்டிப்பாக நடைபெறும். (ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் அல்லது அதிகமான முயற்சிகளிலும்)

(ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 1 முதல் 6 வரையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு எண்ணைப் பெறுதல்)

இந்தச் சூழலில், $\frac{r}{n}=\frac{n}{n}=1$. … (3)

(1), (2) மற்றும் (3) இலிருந்து $0\leq P(E)\leq 1$ எனக் கண்டறிகிறோம்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனை நடத்தப்படுகிறது. பின்வருவனவற்றுள் எவை ஒரு விளைவின் நிகழ்தகவாக இருக்க முடியாது?

(i) 1/5 (ii) – 1/7 (iii) 0.40 (iv) – 0.52 (v) 0

(vi) 1.3 (vii) 1 (viii) 72% (ix) 107%

9 Probability TM.indd 313 26-12-2019 13:15:28

எடுத்துக்காட்டு 9.1

ஒரு பகடை உருட்டப்படும்போது, 4ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

விளைவுகளானது, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

E என்பது 4 ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$E = \{5,6\}$$

$$P(E) = \frac{\text{சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = 0.333...$$

FA4GHG

எடுத்துக்காட்டு 9.2

42 நபர்கள் பணி செய்யும் ஓர் அலுவலகத்தில் 7 பணியாளர்கள் மகிழுந்து பயன்படுத்துகிறார்கள், 20 பணியாளர்கள் இரு சக்கர வண்டி பயன்படுத்துகிறார்கள். மீதி 15 பணியாளர்கள் மிதிவண்டி பயன்படுத்துகிறார்கள். ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவைக் கண்டறிக.

தீர்வு

மொத்த வேலையாட்கள் = 42

ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண்:

மகிழுந்து பயன்படுத்துவோருக்கான நிகழ்தகவு $= \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$

இரு சக்கர வண்டி பயன்படுத்துவோருக்கான நிகழ்தகவு $= \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

மிதிவண்டி பயன்படுத்துவோருக்கான நிகழ்தகவு $= \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தக் கூடுதல் 1ஐ விட அதிகமாகவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். $\frac{1}{6} + \frac{10}{21} + \frac{5}{14} = \frac{7}{42} + \frac{20}{42} + \frac{15}{42} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 9.3

அணி I மற்றும் அணி II ஆகிய இரு அணிகளும் 10 முறை 20 ஓவர் மட்டைப் பந்து (cricket) ஆடுகின்றனர். ஒவ்வோர் ஆட்டத்திலும் அவர்கள் எடுத்த ஓட்டங்கள் பின்வருமாறு பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன:.

ஆட்டம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
அணி I	200	122	111	88	156	184	99	199	121	156
அணி II	143	123	156	92	164	72	100	201	98	157

அணி I வெற்றி பெறுவதற்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு என்ன?

9 Probability TM.indd 314 26-12-2019 13:15:29

தீர்வு

இந்தச் சோதனையில் ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் அணி I ஆனது அணி II ஐ எதிர்கொள்கிறது. அணி I வெற்றி பெறுவதற்கான நிலையைக் கருதுவோம்.

இங்கே மொத்தம் 10 முயற்சிகள் உள்ளன. அவற்றில் அணி I முதலாவது, ஆறாவது மற்றும் ஒன்பதாவது ஆட்டங்களில் வெற்றி பெற்றுள்ளது. அணி I வெற்றி பெறுவதற்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு $=\dfrac{3}{10}$ அல்லது 0.3.

(குறிப்பு : ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவானது, சோதனையின்போது நாம் உற்றுநோக்கும் தொடர்ச்சியான விளைவுகளைச் சார்ந்தது.).

பயிற்சி 9.1

1. நீங்கள் ஒரு தெருவில் நடந்து செல்கிறீர்கள். நீவிர் சந்தித்தவர்களில் ஒரு புதிய மனிதரைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அந்த மனிதரின் பிறந்த நாள் ஞாயிற்றுக்கிழமையாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

2. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு படச்சீட்டு (அதாவது இராசா, இராணி அல்லது மந்திரி (Jack)?) தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

3. ஒரு சீரான பகடையை உருட்டும்போது ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

4. ஒரு பானையில் 24 பந்துகள் உள்ளன, அவற்றில் 3 சிவப்பு, 5 நீலம் மற்றும் மீதி இருப்பவை பச்சை நிறமுடையதாகும். அவற்றில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது (i) ஒரு நீல நிறப் பந்து (ii) ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து (iii) ஒரு பச்சை நிறப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

5. இரண்டு சீரான நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டும்போது, இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

6. இரு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் எண்களின் கூடுதல்

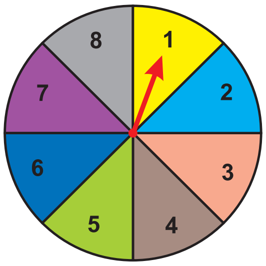
   (i) 1–க்குச் சமமாக (ii) 4–க்குச் சமமாக (iii) 13-ஐ விடச் சிறியதாக

7. ஓர் உற்பத்தியாளர் 7000 ஒளி உமிழ் இருமுனைய விளக்குகளை (LED lights) சோதனை செய்ததில் அவற்றில் 25 விளக்குகள் குறைபாடுடையதாகக் கண்டறியப்பட்டன. சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு விளக்கைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது குறைபாடுடையதாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

8. ஒரு கால்பந்தாட்டத்தில், ஓர் இலக்குக் காப்பாளரால் (Goal – keeper) 40 இல் 32 முயற்சிகளைத் தடுக்க இயலும் எனில், எதிரணியானது ஒரு முயற்சியை இலக்காக மாற்றுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

9 Probability TM.indd 315 26-12-2019 13:15:29

9. கொடுக்கப்பட்ட சுழலட்டையின் (spinner) முள் 3இன் மடங்குகளில் நிலை கொள்ளாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?



10. கொடுக்கப்பட்ட சுழலட்டையை அடிப்படையாகக் கொண்டு நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுமாறு எவையேனும் இரு வினாக்களை உருவாக்குக.

9.5 நிகழ்ச்சிகளின் வகைகள் (Types of Events)

நிகழ்ச்சிகளின் சில முக்கியக் கூறுகளை நாம் ஏற்கெனவே பார்த்தோம்,

இரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்வதற்குச் சம வாய்ப்புகள் இருந்தால் அவை சம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன.

- ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ கிடைப்பது சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.
- ஒரு பகடையை உருட்டும்போது ஒற்றை எண் அல்லது இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். ஆனால் இரட்டை எண் அல்லது 1 என்ற எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 1 எனில் அந்த நிகழ்ச்சி நிச்சயமாக நடைபெறும். இவ்வாறான நிகழ்ச்சி உறுதியான நிகழ்ச்சி எனப்படும். ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0 எனில் அந்நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$P(E) = 1$ எனில் E என்பது உறுதியான நிகழ்ச்சி ஆகும்..

$P(E) = 0$ எனில் E என்பது இயலா நிகழ்ச்சி ஆகும்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் நிகழ்ச்சியை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது அதன் இரு பக்கங்களும் (பூ மற்றும் தலை) ஒரே நேரத்தில் கிடைக்காது. (சீரான நாணயமாக இருந்தால் அதன் இரு பக்கங்களிலும் தலையாகவோ அல்லது பூவாகவோ இருக்காது). இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நடக்க இயலாது எனில் அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். மழை பெய்யும் நிகழ்வு மற்றும் கதிரவன் ஒளிரும் நிகழ்வு இரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளா? ஒரு சீட்டுக்கட்டில் உள்ள 52 சீட்டுகளில் இருந்து இராசா சீட்டு அல்லது ஹார்ட் சீட்டு எடுக்கும் நிகழ்ச்சி எந்த வகையானது?

E என்பது ஒரு பகடையை உருட்டும்போது இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. அதாவது $2, 4$ மற்றும் 6 கிடைப்பது ஆகும். ஒற்றை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்பது E என்ற நிகழ்ச்சியின் நிரப்பு நிகழ்ச்சியாகும். அதனை E' எனக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு E மற்றும் E' என்பவை நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். E' என்பதை E^c எனவும் குறிப்பிடலாம்.

9 Probability TM.indd 316 26-12-2019 13:15:29

குறிப்பு

- E மற்றும் E' ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.(எப்படி)?
- E இன் நிகழ்தகவு + E' இன் நிகழ்தகவு $=1$. மேலும் E மற்றும் E' ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள்.
- $P(E)+P(E')=1$, எனவே ஒன்றின் மதிப்பு தெரிந்திருந்தால் மற்றொன்றின் மதிப்பை எளிதாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்..

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

கீழ்க்கண்டவற்றுள் எவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

வ. எண்	சோதனை	நிகழ்ச்சி 1	நிகழ்ச்சி 2
1	ஒரு பகடை உருட்டுதல்	5-கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	ஒற்றை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
2	ஒரு பகடை உருட்டுதல்	5-கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
3	சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல்	ஸ்பேடு சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	கருப்புச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
4	சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல்	படச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	5–கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
5	சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல்	ஹார்ட் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	7-கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி

எடுத்துக்காட்டு 9.4 நாளைய மழை பொழிவிற்கான நிகழ்தகவு $\frac{91}{100}$ எனில், மழை பொழியாமல் இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

E என்பது நாளை மழை பொழிவிற்கான நிகழ்ச்சி எனில், E' என்பது நாளை மழை பொழியாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$$P(E) = \frac{91}{100}$$

$$P(E) = 0.91$$

$$P(E') = 1-0.91$$

$$= 0.09$$

எனவே, மழை பொழியாமல் இருக்க நிகழ்தகவு 0.09 ஆகும்.

9 Probability TM.indd 317 26-12-2019 13:15:30

எடுத்துக்காட்டு 9.5 பத்தாம் வகுப்பு இறுதித் தேர்வில் பல்வேறு பாடங்களில் நூற்றுக்கு நூறு மதிப்பெண்கள் பெற்ற 1184 மாணவர்களில், 233 பேர் கணிதத்திலும், 125 பேர் சமூக அறிவியலிலும், 106 பேர் அறிவியலிலும் நூற்றுக்கு நூறு பெற்றுள்ளனர். சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அந்த மாணவர்

(i) கணிதத்தில் நூற்றுக்கு நூறு மதிப்பெண் பெற்றவராக இருக்க,

(ii) அறிவியலில் நூற்றுக்கு நூறு பெறாதவராக இருக்க

நிகழ்தகவு காண்க

தீர்வு நூற்றுக்கு நூறு பெற்ற மொத்த மாணவர்கள் $=1184$ ஆகவே $n = 1184$

(i) E_1 என்பது கணிதத்தில் நூற்றுக்கு நூறு பெற்ற மாணவர்கள் உள்ள நிகழ்ச்சி என்க.

ஆகையால் $n(E_1)=233$, அதாவது, $r_1=233$

$$P(E_1)=\frac{r_1}{n}=\frac{233}{1184}$$

(ii) E_2 என்பது அறிவியலில் நூற்றுக்கு நூறு பெற்ற மாணவர்கள் உள்ள நிகழ்ச்சி என்க.

ஆகையால் $n(E_2)=106$, அதாவது, $r_2=106$

$$P(E_2)=\frac{r_2}{n}=\frac{106}{1184}$$

ஆகவே, அறிவியலில் நூற்றுக்கு நூறு பெறாதவராக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(E_2')=1-P(E_2)=1-\frac{106}{1184}=\frac{1078}{1184}$$

பயிற்சி 9.2

1. ஒரு நிறுவனம் ஆறு மாதத்தில் 10000 மடிக்கணினிகளை உற்பத்தி செய்தது. அவற்றில் 25 மடிக்கணினிகள் குறைபாடு உடையனவாகக் கண்டறியப்பட்டன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மடிக்கணினியைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது குறைபாடில்லாததாக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?
2. 16-20 வயதுக்குட்பட்ட 400 இளைஞர்களிடம் நடத்தப்பட்ட ஓர் ஆய்வில், 191 பேர் வாக்காளர் அடையாள அட்டை வைத்திருப்பதாகக் கண்டறியப்பட்டது. சமவாய்ப்பு முறையில் அவர்களில் ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அவர் வாக்காளர் அடையாள அட்டை வைத்திருக்கும் நபராக இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?
3. ஒரு வினாவிற்கான சரியான விடையை ஊகிப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{x}{3}$ என்க. சரியான விடையை ஊகிக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{x}{5}$ எனில், x இன் மதிப்பு காண்க.
4. ஒரு வரிப்பந்து (tennis) விளையாட்டு வீரர் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.72 எனில் அவர் அந்த விளையாட்டில் தோல்வியடைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?
5. 1500 குடும்பங்களில் அவர்கள் வீட்டிலுள்ள பணிப்பெண்கள் (maids) பற்றிய தரவுகள் திரட்டப்பட்டுப் பின்வருமாறு பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளது:

பணிப்பெண்கள் வகை	பகுதிநேரம் மட்டும்	முழுநேரம் மட்டும்	இரண்டு வகை பணிப்பெண்கள்
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	860	370	250

9 Probability TM.indd 318 26-12-2019 13:15:33

சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு குடும்பம் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போது, அக்குடும்பம்

(i) இரு வகைப் பணிப்பெண்களும் வைத்திருக்க (ii) பகுதி நேரப் பணிப்பெண் வைத்திருக்க (iii) பணிப்பெண் வைத்திருக்காமல் இருக்க நிகழ்தகவு காண்க

பயிற்சி 9.3

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. 0–க்கும் மற்றும் 1–க்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண்ணைக் கொண்டு உறுதியற்றவற்றை அளவிடுவது எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது?
   (1) சமவாய்ப்பு மாறி (2) முயற்சி (3) எளிய நிகழ்ச்சி (4) நிகழ்தகவு

2. நிகழ்தகவு மதிப்பின் இடைவெளி
   (1) -1 மற்றும் $+1$ (2) 0 மற்றும் 1 (3) 0 மற்றும் n (4) 0 மற்றும் ∞

3. ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கருத்தை அடிப்படையாகக்கொண்ட நிகழ்தகவு எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது?
   (1) பட்டறி நிகழ்தகவு (2) தொன்மை நிகழ்தகவு
   (3) (1) மற்றும் (2) இரண்டும் (4) (1)வும் அல்ல (2) வும் அல்ல

4. ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எவ்வாறு இருக்க முடியாது?
   (1) பூச்சியத்திற்குச் சமம் (2) பூச்சியத்தை விடப் பெரியது
   (3) 1இக்குச் சமம் (4) பூச்சியத்தை விடச் சிறியது

5. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் வாய்ப்புள்ள அனைத்து விளைவுகளின் நிகழ்தகவு எப்பொழுதும்………….. இக்குச் சமம்
   (1) ஒன்று (2) பூச்சியம் (3) முடிவிலி (4) ஒன்றை விடக் குறைவு

6. A என்பது S–ன் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி மற்றும் A' என்பது A–ன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி எனில் $P(A')$ இன் மதிப்பு
   (1) 1 (2) 0 (3) $1-A$ (4) $1-P(A)$

7. பின்வருவனவற்றுள் எது ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவாக இருக்க முடியாது?
   (1) 0 (2) 0.5 (3) 1 (4) -1

8. ஒரு சோதனையின் குறிப்பிட்ட முடிவு எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது?
   (1) முயற்சி (2) எளிய நிகழ்ச்சி (3) கூட்டு நிகழ்ச்சி (4) விளைவு

9. ஒரு சோதனையின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளின் தொகுப்பு ………… என அழைக்கப்படுகிறது.
   (1) நிகழ்ச்சி (2) விளைவு (3) கூறுபுள்ளி (4) மேற்கண்ட எதுவுமில்லை

10. ஒரு பகடையானது …….. இருக்கும்போது, அதன் ஆறு முகங்களும் சமவாய்ப்புடையவை என அழைக்கப்படுகிறது.
    (1) சிறியதாக (2) சீரானதாக (3) ஆறு முகம் கொண்டதாக (4)வட்டமாக

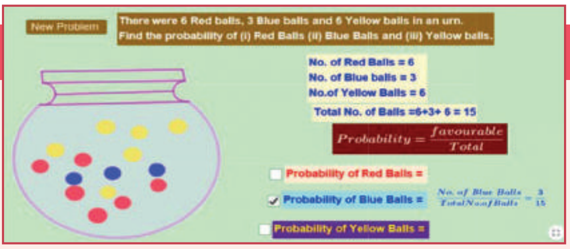
9 Probability TM.indd 319 26-12-2019 13:15:33

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- ஒரு சோதனையின் மிகச் சரியான முடிவுகளை நாம் கணிக்க முடிந்தால் அது உறுதியான சோதனை என அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு சோதனையின் மிகச் சரியான முடிவுகளை நாம் கணிக்க இயலவில்லை எனில் அது சம வாய்ப்புச் சோதனை என அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் மொத்த விளைவுகளின் கணம், அச்சோதனையின் கூறுவெளி (S) எனப்படும்.
- ஒரு சோதனையின் ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவோ அல்லது விளைவுகளின் தொகுப்போ நிகழ்ச்சி எனப்படும்.
- நிகழ்தகவின் ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கோட்பாடு, ஒரு விளைவின் நிகழ்தகவானது அந்த விளைவு நடப்பதற்கான விழுக்காட்டிற்கு அருகில் இருக்கும் எனக் கூறுகிறது.
- நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்புகள் ஒரே மாதிரியாக இருந்தால் அவை சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன.
- இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நடக்க இயலாது எனில் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.
- $P(E)+P(E')=1$ எனில், நிகழ்வுகள் E மற்றும் E' ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.
- ஒரு நிகழ்ச்சி கண்டிப்பாக நடைபெறும் எனில் அது உறுதியான நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது. உறுதியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவின் மதிப்பு சரியாக '1' ஆகும்.
- ஒரு நிகழ்ச்சி ஒரு போதும் நடைபெறாது எனில் அது இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது. இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவின் மதிப்பு சரியாக '0' ஆகும்.

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி 1 கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்தில் "Probability" என்னும் பணித்தாளிற்குச் செல்க. 'Venn diagram and Basic probability' என்ற தலைப்பில் இரண்டு பணித்தாள்கள் உள்ளன.

படி - 2 "New Problem" என்ற பகுதியில் சொடுக்கவும். தொடர்புடைய கட்டங்களைச் சொடுக்கி விடைகளை சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

நிகழ்தகவு : https://ggbm.at/mj887yua or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

9 Probability TM.indd 320 26-12-2019 13:15:34