अध्याय 01

बहुपद

[POLYNOMIALS]

E49QPH

परिचय (Introduction)

व्यंजकों $2x+3$, $3x^2+7x-2$, $x^2-\frac{1}{2}x+3$, $y^3-\sqrt{2}y^2+3y-7$ में प्रत्येक में अक्षर संख्या (चर) की घात पूर्ण संख्या है। इस प्रकार के व्यंजक बहुपद होते हैं। बहुपदों पर संक्रियाएँ जोड़ना, घटाना और गुणा करना आपने कक्षा 9 में सीखा है। बहुपदों के जोड़ने, घटाने और गुणा करने के उन तरीकों को एक बार फिर देखते हैं।

1. $x+3$ व $x+4$ को जोड़िए।

हलः– $(x+3)$ व $(x+4)$ का जोड़ अर्थात $(x+3)+(x+4)$

$$= x+3+x+4$$
$$= (x+x)+(3+4)$$
$$= 2x+7$$

2. बहुपद $2x^2+3x+5$ में x^2+x-2 को घटाइए।

हलः– $2x^2+3x+5$ में x^2+x-2 को घटाना अर्थात $(2x^2+3x+5)-(x^2+x-2)$

$$= 2x^2+3x+5-x^2-x+2$$
$$= (2x^2-x^2)+(3x-x)+(5+2)$$
$$= x^2+2x+7$$

3. $(x+5)$ में $(x-7)$ का गुणा कीजिए।

हलः– $(x+5)$ को $(x-7)$ से गुणा अर्थात $(x+5)(x-7)$

$$= x(x-7)+5(x-7)$$
$$= x^2-2x-35$$

करके देखें

1. बहुपदों $2x - 7$ व $5x + 9$ को जोड़िए।
2. बहुपद $3x^2 + 2x - 3$ में से $x^2 + 3x - 4$ को घटाइए।
3. बहुपदों $x^2 + 2x - 3$ व $x^2 + x - 2$ को गुणा कीजिए।

क्या बहुपदों का भाग भी कर सकते हैं?

ध्यान दें कि जोड़ने व घटाने में एक समान घात वाले पद साथ रखे जाते हैं। गुणा में पदों की घातें जुड़ जाती हैं। अतः बहुपदों में जोड़ना, घटाना व गुणा सब हमने किया है और देखा है कि यह कैसे होता है। क्या जिस तरह बहुपदों का जोड़ना, घटाना और गुणा होता है, हम बहुपदों का भाग भी कर सकते हैं?

भाग करते समय पदों व उनकी घात का हिसाब कैसे रखेंगे? यह सब सोचने से पहले यह देखें कि आखिर बहुपदों के भाग की आवश्यकता कब होती है?

नीचे की परिस्थितियों को देखें।

1. एक कार 4 घंटे में x किमी. दूरी तय करती है। कार की चाल ज्ञात कीजिए।

हलः– कार द्वारा तय की गई कुल दूरी $= x$ किमी.

तथा इस दूरी को तय करने में लगा समय $= 4$ घंटे

$$\because \quad \text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\therefore \quad \text{चाल} = \frac{x}{4} \text{ किमी./घंटे}$$

यह भाग सरल है क्योंकि एक पद वाले बहुपद का एक पद वाले स्थिरांक बहुपद से भाग है।

2. यदि किसी आयत का क्षेत्रफल $40x^2$ वर्गमीटर है तथा उसकी एक भुजा की लंबाई $10x$ मीटर है तब आयत की चौड़ाई क्या होगी?

हलः– आयत का क्षेत्रफल $= 40x^2$ वर्गमीटर

आयत की लंबाई $= 10x$ मीटर

$\because$ आयत का क्षेत्रफल $=$ लंबाई $\times$ चौड़ाई

$40x^2 = 10x \times$ चौड़ाई

$$\therefore \quad \text{चौड़ाई} = \frac{40x^2}{10x}$$

$$= \frac{4 \times 10 \times x \times x}{10x}$$

$= 4x$ मीटर

यहाँ भाजक व भाज्य दोनों एक पदीय हैं और इससे भागफल भी एक पदीय ही है।

अब हम एक द्विपदीय बहुपद को एकपदीय बहुपद से भाग करते हैं।

3.बहुपद $18x^2 + 9x$ को $3x$ से भाग दीजिए।

हलः— $18x^2 + 9x$ को $3x$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं—

$$\frac{18x^2}{3x} + \frac{9x}{3x}$$

$$= 6x + 3$$

करके देखें

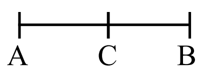
1. $2x^3 + 12x + 6$ को $2x$ से भाग दीजिए।
2. एक बस 5 घंटे में y किमी. दूरी तय करती है। बस की चाल ज्ञात कीजिए।
3. एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल $65x^2$ वर्गमीटर है तथा उस बगीचे की चौड़ाई $5x$ मीटर है। तब बगीचे की लंबाई ज्ञात कीजिए।
4. $4x^2 + 4$ वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले समकोण त्रिभुज की आधार भुजा की लंबाई $2x$ इकाई है। तब त्रिभुज के शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

ऊपर के उदाहरण में भाग की जो प्रक्रिया हमने की है इसका उपयोग हम व्यावहारिक संदर्भों के प्रश्नों को हल करने में भी करते हैं। इसके कुछ उदाहरण देखते हैं —

उदाहरणः—1. $8x$ इकाई लंबाई का एक रेखाखण्ड AB है जिसे दो बराबर भागों में बाँटना है तब आप यह कैसे बताएँगे कि इसके प्रत्येक भाग की लंबाई कितनी है?

हलः— माना दिए गए रेखाखण्ड AB पर C कोई बिन्दु है जो AB को दो बराबर भागों में बाँटता है।

इसे हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं—



$AB = AC + BC$

अब चूँकि C, रेखाखण्ड AB को दो बराबर भागों में बाँटता है।

अतः $AC = BC$

$\therefore\ AB = AC + AC$

$$8x = 2AC$$

या $$AC = \frac{8x}{2}$$

$$AC = \frac{2 \times 4x}{2}$$

$$AC = 4x$$

अर्थात् रेखाखण्ड के दोनों बराबर भागों की लंबाई $4x$ इकाई है।

अधिक पद वाले बहुपदों में भाग

कई पद वाले बहुपद को एकपदीय बहुपद से भाग करने में हम हर पद को अलग–अलग कर सकते हैं।

बहुपद $18x^2 + 9x$ को गुणनखण्डन करते हुए $3x$ से भाग दीजिए।

$18x^2 + 9x$ को $3x$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं–

$$\frac{18x^2 + 9x}{3x}$$

$$= \frac{9 \times 2 \times x \times x + 9 \times x}{3x}$$

$$= \frac{9x(2x+1)}{3x}$$

$$= 3(2x+1)$$

$$= 6x + 3$$

एक और देखें ;

बहुपद $4x^4 + 12x^3 + 8x^2$ का गुणनखण्डन करके $4x^2$ से भाग दीजिए।

$4x^4 + 12x^3 + 8x^2$ को $4x^2$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं–

$$\frac{4x^4 + 12x^3 + 8x^2}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2 \times x^2 + 3x \times 4x^2 + 2 \times 4x^2}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2(x^2 + 3x + 2)}{4x^2}$$

$$= x^2 + 3x + 2$$

गुणनखण्डन करके बहुपदों का भाग करना

अब हम गुणनखण्डन करते हुए बहुपदों का भाग करना सीखेंगे।

यदि बहुपद $2x^2+5x-3$ को बहुपद $(x-2)$ से भाग करना हो तब क्या हम ऊपर के उदाहरणों के तरीकों को अपना सकते हैं?

$2x^2+5x-3$ को $(x-2)$ से भाग देने का अर्थ है कि इसे हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं – $\dfrac{2x^2+5x-3}{x-2}$

लेकिन यहाँ अंश एवं हर के बहुपदों में कोई समान गुणनखण्ड हम नहीं पहचान पा रहे हैं और हम इसका भागफल नहीं पता कर पा रहे हैं। ऐसी परिस्थितियों में हम भाग की दीर्घ भाजन विधि का उपयोग कर सकते हैं।

अंकगणित में आप जानते हैं कि 25 को 4 से भाग करने का अर्थ है–

$\dfrac{25}{4}$ अर्थात

$$\begin{array}{r|c|l} & \text{भाज्य} & \\ \text{भाजक } 4 & 25 & 6 \text{ भागफल} \\ & \underline{-24} & \\ & 1 & \\ & \text{शेषफल} & \end{array}$$

यहाँ $25=4\times 6+1$

अर्थात भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

इसी तरह भाजक से भाज्य को भाग करने हमें भागफल व शेषफल मिलेगा। अगर भाग पूरा–पूरा हो जाए तो शेषफल शून्य भी हो सकता है।

उदाहरण:–2. बहुपद $2x^2+5x-3$ को बहुपद $x-2$ से भाग कीजिए।

हल:– यहाँ बहुपद $2x^2+5x-3$ भाज्य और $(x-2)$ भाजक है।

$$\begin{array}{c|r|c} & \text{भाज्य} & \\ \text{भाजक} & 2x^2+5x-3 & \text{भागफल} \\ (x-2) & -(2x^2-4x) & (2x+9) \\ \hline & 9x-3 & \\ & -(9x-18) & \\ \hline & 15 & \\ & \text{शेषफल} & \end{array}$$

यहाँ हमें भागफल $2x+9$ और शेषफल 15 मिला।

यानि यहाँ बहुपद को भाग देने के लिए निम्नलिखित चरणों में काम करते हैं–

चरण :–1. भाज्य एवं भाजक को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखेंगे।

चरण :–2. भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग देंगे।

यहाँ $\dfrac{2x^2}{x} = 2x$

यह भागफल का पहला पद होगा।

चरण :–3. इस भागफल से भाजक का गुणा करेंगे और गुणनफल को भाज्य में घटाएँगे –

$(x-2)2x = 2x^2 - 4x$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x - 3 \\ -2x^2 + 4x \phantom{{}-3} \\ \hline 9x - 3 \end{array}$$

चरण :–4. घटाने पर प्राप्त परिणाम के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग करेंगे।

अर्थात $\dfrac{9x}{x} = 9$ यह भागफल का दूसरा पद होगा।

चरण :–5. पुनः इस भागफल से भाजक का गुणा करेंगे।

अर्थात $9 \times (x-2) = 9x - 18$

अब $9x-3$ में से $9x-18$ को घटाएँगे

$$\begin{array}{r} 9x-3 \\ -(9x-18) \end{array} \quad \text{या} \quad \begin{array}{r} 9x-3 \\ -9x+18 \\ \hline 15 \end{array}$$

यह प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए या शेषफल के चर की घात भाजक के चर की घात से कम न हो जाए। इस उदाहरण में शेषफल 15 है जिसमें चर की घात, भाजक $(x-2)$ के चर की घात से कम है।

इस भाग का संक्षिप्त प्रतिरूपण है।

$(2x^2+5x-3) = (x-2)(2x+9)+15$

अर्थात भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

उदाहरणः–3. बहुपद $5x-11-12x^2+2x^3$ को बहुपद $x-5$ से भाग दीजिए।

हलः– यहाँ भाज्य $5x-11-12x^2+2x^3$ व भाजक $x-5$ है।

भाजक में x की घात अवरोही क्रम में है तथा भाज्य को हमें x की घातों के अवरोही क्रम में लिखना होगा।

घातों के अवरोही क्रम में लिखने पर भाज्य $2x^3-12x^2+5x-11$ होगा।

अब

$$
\begin{array}{c|r|l}
(x-5) & 2x^3-12x^2+5x-11 & 2x^2-2x-5 \\
 & -\left(2x^3-10x^2\right) & \\
\hline
 & -2x^2+5x-11 & \\
 & -\left(-2x^2+10x\right) & \\
\hline
 & -5x-11 & \\
 & -\left(-5x+25\right) & \\
\hline
 & -36 &
\end{array}
$$

i gy s $2x^3$ के लिए भागफल में $2x^2$ लेंगे

अब $-2x^2$ के लिए $-2x$ लेंगे

और $-5x$ के लिए -5 लेंगे

अब भाग नहीं कर सकते। यह शेषफल है।

यहाँ भागफल $=2x^2-2x-5$

शेषफल $=-36$

उदाहरणः—4. बहुपद $2x^3-3x^2-x+3$ को बहुपद $2x^2-4x+3$ से भाग दीजिए।

हलः— यहाँ $2x^3-3x^2-x+3$ भाज्य और $2x^2-4x+3$ भाजक है।

अब

$$
\begin{array}{c|r|l}
2x^2-4x+3 & 2x^3-3x^2-x+3 & x+\frac{1}{2} \\
 & -\left(2x^3-4x^2+3x\right) & \\
\hline
 & x^2-4x+3 & \\
 & -\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right) & \\
\hline
 & -2x+\left(3-\frac{3}{2}\right) & \\
\end{array}
$$

$$-2x+\frac{3}{2}$$

शेषफल की घात भाज्य एवं भाजक की घात से कम होती है।

यहाँ भागफल $=x+\frac{1}{2}$ तथा शेषफल $=-2x+\frac{3}{2}$

उदाहरणः—5. बहुपद $2x^3+4x-3$ को बहुपद $x-2$ से भाग कीजिए।

हलः— यहाँ भाज्य $2x^3+4x-3$ है जिसे हम $2x^3+0.x^2+4x-3$ लिख सकते हैं व भाजक $x-2$ है।

अब

$$
\begin{array}{r|l|l}
(x-2) & 2x^3+0.x^2+4x-3 & 2x^2+4x+12 \\
 & 2x^3-4x^2 & \\
 & (-)\quad(+) & \\
\hline
 & 4x^2+4x-3 & \\
 & 4x^2-8x & \\
 & (-)\quad(+) & \\
\hline
 & 12x-3 & \\
 & 12x-24 & \\
 & (-)\quad(+) & \\
\hline
 & 21 &
\end{array}
$$

भागफल एवं शेषफल भी बहुपद होते हैं।

भागफल $= 2x^2+4x+12$

शेषफल $= 21$

उदाहरणः–6. यदि भाजक $=3x+1$, भागफल $=2x-1$, शेषफल 4 हो तब भाज्य ज्ञात कीजिए।

हलः– $\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$$=(3x+1)\times(2x-1)+4$$

$$=3x(2x-1)+1(2x-1)+4$$

$$=6x^2-3x+2x-1+4$$

भाज्य $=6x^2-x+3$

उदाहरणः–7. सिद्ध कीजिए कि बहुपद $2x^3+x^2-5x+2$ को $x+2$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है।

हलः–

$$
\begin{array}{r|l|l}
(x+2) & 2x^3+x^2-5x+2 & 2x^2-3x+1 \\
 & 2x^3+4x^2 & \\
 & (-)\quad(-) & \\
\hline
 & -3x^2-5x+2 & \\
 & -3x^2-6x & \\
 & (+)\quad(+) & \\
\hline
 & x+2 & \\
 & x+2 & \\
 & (-)\quad(-) & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

स्पष्टत: शेषफल शून्य है ।

करके देखें :

बहुपद $x^2+2xy+y^2$ को गुणनखण्ड के रूप में लिखिए तथा $x+y$ से भाग दीजिए।

उदाहरणः—8. बहुपद $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ को बहुपद $a-b$ से भाग दीजिए।

हलः— यहाँ भाज्य $=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ तथा भाजक $=a-b$

$$
\begin{array}{r|r|l}
a-b & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 & a^2-2ab+b^2 \\
 & a^3-a^2b \quad\quad\quad\quad & \\
 & (-)\ (+) \quad\quad\quad\quad & \\
\hline
 & -2a^2b+3ab^2-b^3 & \\
 & -2a^2b+2ab^2 \quad\quad & \\
 & (+)\quad (-) \quad\quad & \\
\hline
 & ab^2-b^3 & \\
 & ab^2-b^3 & \\
 & (-)\ (+) & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

प्रश्नावली 1

1. बहुपद x^2-x+1 को $x+1$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
2. बहुपद $6x^2-5x+1$ को $2x-1$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
3. बहुपद $2y^3+4y^2+3y+1$ को $y+1$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
4. बहुपद $x^5+5x+3x^2+5x^3+3$ को $4x+x^2+2$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
5. बहुपद $x^2-2xy+y^2$ को $x-y$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
6. cgqn a को बहुपद $a-b$ से भाग दीजिए।
7. यदि भाजक $=3x^2-2x+2$, भागफल $=x+1$, शेषफल $=3$ है तब भाज्य बताइए।
8. यदि भाजक $=4x-7$, भागफल $=x+1$, शेषफल $=0$ है तब भाज्य बताइए।
9. सिद्ध कीजिए कि बहुपद $4x^3+3x^2+2x-9$ को $x-1$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है।
10. जाँच कीजिए कि बहुपद x^2-5x+3 को $x-3$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है अथवा नहीं ?
11. यदि किसी आयत का क्षेत्रफल $45x^2+30x$ वर्गमीटर तथा उसकी चौड़ाई $15x$ मीटर है तब लंबाई क्या होगी ?
12. $28x$ इकाई लंबाई का एक रेखाखण्ड AB है जिसे दो बराबर भागों में बाँटना है तब प्रत्येक भाग की लंबाई क्या होगी ?

शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem)

अब भाग के विभिन्न उदाहरणों का एक बार फिर अवलोकन करें। क्या आपको इनमें कोई खास बात दिखाई पड़ती है?

हम कह सकते हैं कि "यदि किसी बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f(a)$ होता है।" यही शेषफल प्रमेय है। $f(a)$ का अर्थ है $f(x)$ का मान जब $x=a$ हो।

उपपत्तिः $\because$ भाज्य = भाजक $\times$ भागफल + शेषफल

अब $f(x)=(x-a)q(x)+r$

$x=a$ के लिए $f(x)$ का मान निम्नलिखित होगा–

$$f(a)=(a-a).q(a)+r$$

$$f(a)=0.q(a)+r$$

$$f(a)=0+r$$

या $f(a)=r$

चूँकि हमने r को शेषफल कहा है इसलिए यहाँ शेषफल $=f(a)$ हुआ।

हमने $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग किया और पाया कि शेषफल $f(a)$ है।

इसलिए हम कह सकते हैं कि यदि किसी बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f(a)$ होता है।

करके देखें

यदि $f(x)$ का भाजक $x+a$ हो तब शेषफल ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x)=2x-a$ (ii) $f(x)=x^2-a^2$ (iii) $f(x)=x^2-2x+1$

अब हम शेषफल प्रमेय का उपयोग करते हुए भाज्य और भाजक के मालूम होने पर बिना भाग किए ही शेषफल ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण:–9. भाज्य $p(x)=3x^4-x^3+30x-1$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए–

(a) $x+1$ (b) $2x-1$

हल:– (a) भाज्य $p(x)=3x^4-x^3+30x-1$

तथा भाजक $g(x)=x+1$ है

तब शेषफल = ?

शेषफल प्रमेय से हमने जाना कि शेषफल $r = p(a)$ होता है जब भाग $x-a$ से करें।

$\because$ यहाँ भाजक $x+1$ है इसलिए $r = p(-1)$ होगा।

$p(x)$ में $x=-1$ रखने पर

शेषफल $= p(-1)$

$= 3(-1)^4 - (-1)^3 + 30(-1) - 1$

$= 3+1-30-1$

शेषफल $= -27$

जब भाजक $x-a$ हो तब शेषफल $r = f(a)$ लेकिन जब भाजक $x+a$ हो तब शेषफल $r = f(-a)$ होता है।

(b) भाज्य $p(x) = 3x^4 - x^3 + 30x - 1$

तथा भाजक $g(x) = 2x-1$

तब शेषफल $= p(a)$

यहाँ $2x-1$ को $2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ लिखेंगे अब a के स्थान पर $\frac{1}{2}$ दिख रहा है।

अतः शेषफल $= p\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 30\times\frac{1}{2} - 1$$

$$= 3\times\frac{1}{16} - \frac{1}{8} + 15 - 1$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{1}{8} + 14$$

$$= \frac{3-2}{16} + 14$$

$$= \frac{1}{16} + 14$$

शेषफल $= 14\frac{1}{16}$

उदाहरणः—10. यदि $p(x) = 2x^2 - 3x + 6$ को $g(x) = x-2$ से भाग करना हो तो शेषफल प्रमेय की सहायता से शेषफल ज्ञात कीजिए।

हलः— यहाँ भाज्य $p(x) = 2x^2 - 3x + 6$

तथा भाजक $g(x) = x - 2$

तब शेषफल प्रमेय से,

शेषफल $r = p(2)$

$$= 2(2)^2 - 3(2) + 6$$

$$r = 8$$

उदाहरणः–11. जब किसी बहुपद $f(x)$ को $x^2 - 4$ से भाग दिया जाता है तब शेषफल $5x + 6$ होता है। यदि इसी बहुपद को $x - 2$ से भाग दिया जाए तब शेषफल क्या होगा?

हलः– यहाँ भाज्य $= f(x)$ है और भाजक $x^2 - 4$ व $x - 2$ है। जब $f(x)$ को $x^2 - 4$ से भाग दिया जाता है तब शेषफल $5x + 6$ प्राप्त होता है। इसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं–

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$$f(x) = (x^2 - 4) \times q(x) + (5x + 6)$$

अब हमें मालूम है कि भाज्य और भाजक पता हो तब हम शेषफल प्रमेय की सहायता से शेषफल ज्ञात कर सकते हैं। चूँकि $f(x)$ का एक और भाजक $x - 2$ है।

अतः शेषफल प्रमेय से,

शेषफल $= f(2)$

$$= (2^2 - 4) \times q(2) + (5 \times 2 + 6)$$

$$= (4 - 4) \times q(2) + 10 + 6$$

$$= 0 \times q(2) + 16$$

शेषफल $= 16$

अतः जब $f(x)$ को $x - 2$ से भाग दिया जाएगा तो शेषफल 16 प्राप्त होगा।

सोचें और चर्चा करें

1. उपरोक्त उदाहरण में दूसरे भाजक $x - 2$ के स्थान पर $(x + 2)$ होने पर भी क्या शेषफल ज्ञात किया जा सकता है? यदि हाँ तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

2. उपरोक्त उदाहरण के दोनों भाजकों में क्या कोई खास संबंध दिखाई पड़ता है? साथियों की मदद से उस संबंध को पता करें। यदि दोनों भाजकों में कोई संबंध न हो तब भी क्या शेषफल ज्ञात किया जा सकता है? एक उदाहरण लेकर परिणाम जानने की कोशिश करें।

गुणनखण्ड प्रमेय (The Factor Theorem)

जब किसी भाज्य बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग कर रहे हों और शेषफल शून्य हो जाता हो तब इसके क्या मायने होते हैं? शेषफल के शून्य हो जाने से क्या भाज्य और भाजक में कोई नया संबंध दिखाई पड़ता है?

शेषफल के शून्य हो जाने पर भाज्य और भाजक के संबंध को हम पहले अंकगणित के एक उदाहरण से समझने का प्रयास करते हैं, फिर बहुपदों में इस संबंध को पता करेंगे।

25 को भाज्य और 5 को भाजक के रूप में लेकर देखते हैं कि भागफल और शेषफल क्या होंगे ?

भाज्य

$$\text{भाजक } 5 \left| \begin{array}{r} 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array} \right| 5 \text{ भागफल}$$

शेषफल

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$$25 = 5 \times 5 + 0$$

$$25 = 5 \times 5$$

इस संबंध को देखकर यह कह सकते हैं कि भाजक 5, भाज्य 25 का एक गुणनखण्ड है।

करके देखें

15 को 3 से भाग करके उपरोक्त रूप में लिखकर देखिए कि क्या इसमें भी इसी प्रकार का संबंध मिलता है?

क्या बहुपदों के भाग में भी इसी प्रकार के संबंध दिखाई पड़ते है आइए इन संबंधों को निम्नलिखित उदाहरण में देखते हैं।

उदाहरण:—12. यदि बहुपद x^2-16 को बहुपद $x-4$ से भाग दिया जाए तो भागफल और शेषफल क्या होंगे?

हल:—

भाज्य

$$\text{भाजक } (x-4) \left| \begin{array}{r} x^2-0.x-16 \\ -(x^2-4x) \\ \hline 4x-16 \\ -(4x-16) \\ \hline 0 \end{array} \right| x+4 \text{ भागफल}$$

शेषफल

स्पष्टतः भागफल $x+4$ और शेषफल 0 है।

अब इसे निम्नलिखित रूप में लिख लेते हैं–

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$$x^2-16=(x-4)(x+4)+0$$

उपरोक्त उदाहरण में हम देख सकते हैं कि $(x-4)$ व $(x+4)$ का गुणनफल x^2-16 आ रहा है। इसका अर्थ है कि यहाँ भाजक $(x-4)$, x^2-16 का एक गुणनखण्ड है। लेकिन ऐसा हम तभी कह सकते हैं जब शेषफल शून्य हो।

पता करें कि क्या $(x+4)$ को x^2-16 का एक गुणनखण्ड कह सकते हैं?

अब हम यह कह सकते हैं कि जब किसी भाजक से किसी भाज्य को भाग देने पर शेषफल शून्य प्राप्त हो तब वह भाजक, उस भाज्य का एक गुणनखण्ड होता है। इस कथन को गुणनखण्ड प्रमेय का सरल रूप कह सकते हैं। देखा जाए तो गुणनखण्ड प्रमेय, शेषफल प्रमेय का ही विस्तारित रूप है।

गुणनखण्ड प्रमेय की उपपत्ति :

यही कथन प्रमेय के रूप में निम्नलिखित ढंग से लिखा जाता है। अब इसे हम प्रमेय के रूप में लिखकर सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि $x=a$, बहुपद $f(x)$ का एक ऐसा शून्यक है जिसके लिए शेषफल $f(a)=0$ तब $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है। अथवा

यदि बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग देने पर शेषफल $f(a)=0$ हो, तब $(x-a)$ $f(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है।

उपपत्ति : भाज्य, भाजक, भागफल एवं शेषफल के संबंध को निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है–

अर्थात $f(x)=g(x).q(x)+r(x)$

शेषफल प्रमेय से हमें मालूम है कि यदि $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f(a)$ होता है।

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

अर्थात $f(x)=(x-a).q(x)+f(a)$

अब यदि शेषफल $f(a)=0$

तब $f(x)=(x-a).q(x)$

स्पष्टतः $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड हुआ।

> बहुपद $f(x)$ का मान x के जिस मान के लिए शून्य होता है वह मान ही शून्यक होता है।

इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है यानी यदि कोई भाजक, किसी भाज्य का एक गुणनखण्ड है, तब शेषफल शून्य होता है।

विलोम : यदि $(x-a)$ बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है तब शेषफल शून्य होता है।

उपपत्ति : चूँकि $(x-a)$ बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है

अर्थात $x=a$, $f(x)$ का एक शून्यक है।

$f(x)=(x-a).q(x)$ में

$x=a$ रखने पर

$f(a)=(a-a).q(a)$

$f(a)=0$

स्पष्टतः $(x-a)$, बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड हो तब शेषफल $f(a)$ शून्य होता है।

1. यदि किसी बहुपद के दो गुणनखण्ड $(x-a),(x-b)$ हों तब $f(x)=(x-a)(x-b).q(x)$

2. यदि किसी बहुपद के तीन गुणनखण्ड $(x-a),(x-b),(x-c)$ हों तब $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c).q(x)$

कोई भाजक, भाज्य बहुपद का गुणनखण्ड है अथवा नहीं यह हम भाग किए बिना ही गुणनखण्ड प्रमेय की मदद से बता सकते हैं। आगे दिए गए उदाहरणों में आप गुणनखण्ड प्रमेय की उपयोगिता को समझ सकेंगे।

उदाहरणः—13. क्या $(x-2)$, बहुपद $p(x)=x^3-3x^2+4x-4$ का एक गुणनखण्ड है?

हलः— यदि $(x-2)$, बहुपद $p(x)=x^3-3x^2+4x-4$ का एक गुणनखण्ड है तब $x=2$ रखने पर शेषफल शून्य होना चाहिए।

$p(x)$ में $x=2$ रखने पर

$$p(2)=(2)^3-3(2)^2+4(2)-4$$
$$=8-3\times4+8-4$$
$$=8-12+4$$
$$=12-12$$
$$p(2)=0$$

स्पष्टतः $p(2)=0$ अतः $(x-2)$; $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरणः–14 क्या $(x-a)$ बहुपद $p(x)=x^3-ax^2+5x-5a$ का एक गुणनखण्ड है?

हलः– बहुपद $p(x)=x^3-ax^2+5x-5a$ में $x=a$ रखने पर $p(a)=0$ हो जाए तब हम $(x-a)$ को $p(x)$ का गुणनखण्ड कह सकते हैं।

$x=a$ रखने पर

$$p(a)=a^3-a.a^2+5a-5a$$
$$=a^3-a^3+0$$
$$p(a)=0$$

स्पष्टतः $p(a)=0$ अतः $(x-a)$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरणः–15. यदि $(x-1), p(x)=x^2+x+k$ का एक गुणनखण्ड है तब k का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– चूँकि $(x-1)$, x^2+x+k का एक गुणनखण्ड है। तब गुणनखण्ड प्रमेय के विलोम से कह सकते हैं कि $x=1$ पर शेषफल $p(1)$ शून्य होगा।

अतः $p(1)=0$

$$1^2+1+k=0$$
$$1+1+k=0$$
$$2+k=0$$
$$k=-2$$

प्रश्नावली 2

1. यदि $p(x)=x^3+3x^2-5x+8$ को निम्नलिखित से भाग करें तो शेषफल प्रमेय की मदद से शेषफल ज्ञात कीजिए –

(i) $x+1$ (ii) $2x-1$ (iii) $x+2$ (iv) $x-4$ (v) $x+\frac{1}{3}$

2. निम्नलिखित में जाँचिए कि क्या $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है?

(i) $g(x)=x-3$; $p(x)=x^3-4x^2+x+6$

(ii) $g(x)=x+1$; $p(x)=2x^3+x^2-2x+1$

(iii) $g(x)=x-2$; $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$

(iv) $g(x)=x-1$; $p(x)=x^3+5x^2-5x+1$

(v) $g(x)=x+4$; $p(x)=x^2+2x-1$

3. निम्नलिखित में a का मान ज्ञात कीजिए जबकि $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो–

(i) $g(x)=x+1$; $p(x)=x^2+ax+2$

(ii) $g(x)=x-1$; $p(x)=ax^2-5x+3$

(iii) $g(x)=x+2$; $p(x)=2x^2+6x+a$

(iv) यदि $g(t), p(t)$ का एक गुणनखण्ड हो तो t का मान ज्ञात कीजिए–

$g(t)=t-3$; $p(t)=t^2+2at-2a+3$

(v) यदि $g(y), p(y)$ का एक गुणनखण्ड हो तो y का मान ज्ञात कीजिए–

$g(y)=y+5$; $p(y)=y^2-2y+a$

4. जब किसी बहुपद $f(x)$ को x^2-9 से भाग दिया जाता है तब $3x+2$ शेषफल है। जब इसी बहुपद को $(x-3)$ से भाग दिया जाए तब शेषफल क्या होगा?

5. जब किसी बहुपद $f(x)$ को x^2-16 से भाग दिया जाता है तब शेषफल $5x+3$ है। जब इसी बहुपद को $(x+4)$ से भाग दिया जाए तब शेषफल क्या होगा?

बहुपदों का गुणनखण्डन (Factoring Polynomials)

अभी तक हमने देखा कि किसी बहुपद को किसी अन्य बहुपद से भाग दिया जाता है तब शेषफल शून्य होने पर हम यह कह पाते हैं कि वह भाजक बहुपद, भाज्य बहुपद का गुणनखण्ड है। इससे हम बहुपद के गुणनखण्ड नहीं ढूँढ सकते तो हम उन बहुपदों तक कैसे पहुँचे जो किसी बहुपद के गुणनखण्ड हैं? हम बहुपदों के प्रकार के आधार पर उनके गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं। हम यहाँ एकघातीय व द्विघातीय बहुपदों के गुणनखण्डन की चर्चा करेंगे।

किसी संख्या का गुणनखण्डन करने का अर्थ उसे ऐसे अभाज्य गुणनखण्डों में तोड़ना होता है, जिनका गुणा करने पर पुनः वही संख्या प्राप्त हो।

6 के गुणनखण्ड 2×3 के बारे में विचार करते हैं।

6 को यहाँ 2 व 3 के अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखा गया है जिनका गुणनफल 6 है।

इसी प्रकार 12 को भी लिख सकते हैं –

$12=2\times2\times3$

इसी प्रकार जब हम किसी बहुपद के गुणनखण्डन की बात करते हैं तो उसका आशय होता है कि बहुपद को ऐसे सरल बहुपदों के रूप में तोड़कर लिखना जिन्हें गुणा करने पर फिर वही बहुपद मिल जाए।

बहुपदों के गुणनखण्डन करने के कुछ तरीके हैं जैसे हम कभी उभयनिष्ठ बहुपद पहचान कर गुणनखण्डन करते हैं तो कभी निम्नलिखित सर्वसमिकाओं के उपयोग से –

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,आदि, ।

उभयनिष्ठ निकालकर गुणनखण्ड प्राप्त करना

उभयनिष्ठ बहुपद निकालकर गुणनखण्ड ज्ञात करना तभी संभव हो पाता है जबकि बहुपद के सभी पदों में वह बहुपद मौजूद हो। आगे के कुछ उदाहरणों में इसे समझा जा सकता है।

उदाहरणः–16. $12x + 4x^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– $12x + 4x^2 = 4\times 3\times x + 4\times x\times x$ (यहाँ बहुपद $4x$ दोनों पदों में है)

$$= 4x(3+x)$$

उदाहरणः–17. $ab + ac + a^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– $ab + ac + a^2 = a(b+c+a)$ (a तीनों पदों में है)

$$= a(a+b+c)$$

उदाहरणः–18. $2x^3 + 4x$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– $2x^3 + 4x = 2\times x\times x^2 + 2\times 2\times x$

$$= 2x(x^2+2)$$

सर्वसमिकाओं के उपयोग से गुणनखण्डन करना

क्या आप $x^2 - 4$, $x^2 + 6x + 9$, $x^2 + 5x + 6$ के गुणनखण्डन में उभयनिष्ठ बहुपद पहचान कर गुणनखण्ड पता कर सकते हैं?

आइए कुछ बहुपद $x^2 - 4$, $x^2 + 6x + 9$, तथा $x^2 + 5x + 6$ को देखें। इनमें से प्रत्येक बहुपद के पदों को देखने से हमें पता चल रहा है कि इनके सभी पदों में कोई भी पद एक जैसे नहीं है। इस प्रकार के बहुपदों का उभयनिष्ठ बहुपद निकालकर गुणनखण्डन नहीं हो सकता। तो क्या करें? आइए देखें

$x^2 - 4$ का गुणनखण्ड निम्नलिखित होगा–

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$ $\because$ सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$= (x+2)(x-2)$$

क्या $x^2 + 6x + 9$ को किसी सर्वसमिका के रूप में लिख सकते हैं?

हाँ $x^2 + 6x + 9$ को $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सर्वसमिका के रूप में लिख सकते हैं।

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\times 3x + 3^2$$

$$= (x+3)^2$$
$$= (x+3)(x+3)$$

करके देखें

1. $x^2 - 16$ का गुणनखण्डन कीजिए।
2. $4x^2 - 20x + 25$ का गुणनखण्डन कीजिए।

$ax^2 + bx + c$ के रूप में बहुपद के मध्यपद को तोड़कर गुणनखण्ड ज्ञात करना

पुनः हम $x^2 + 5x + 6$ के गुणनखण्डन पर विचार करते हैं। क्या किसी सर्वसमिका के रूप में इसे लिखकर इसका गुणनखण्डन कर सकते हैं?

आप देखेंगे कि इस बहुपद को हम किसी भी ज्ञात सर्वसमिका के रूप में नहीं दर्शा पा रहे हैं।

इस प्रकार के बहुपदों के गुणनखण्डन करने के लिए हमें उनके मध्यपद को दो ऐसे भागों में तोड़ने की जरूरत होती है जिनका योग तो मध्य पद के बराबर हो लेकिन उनका गुणनफल बहुपद के प्रथम व अंतिम पद के गुणनफल के बराबर हो।

अब हम $x^2 + 5x + 6$ का गुणनखण्डन करके देखते हैं।

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + 2\times 3$$
$$= x^2 + 2x + 3x + 2\times 3$$
$$= (x^2 + 2x) + (3x + 2\times 3)$$
$$= x(x+2) + 3(x+2)$$
$$= (x+2)(x+3)$$

इस तरीके को सीखने के लिए हम निम्नलिखित व्यंजक का उपयोग करते हैं :

$$(x+\alpha)(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$
$$= 1.x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

$(x+\alpha)$ व $(x+\beta)$ के गुणनफल के रूप में प्राप्त व्यंजक को $ax^2 + bx + c$ के रूप में लिख सकते हैं। तब हम देखते हैं कि यहाँ $a = 1$, $b = \alpha + \beta$ व $c = \alpha\beta$ है।

$ax^2 + bx + c$ के रूप के किसी बहुपद का गुणनखण्ड प्राप्त करने के के लिए प्रथम पद x^2 के गुणांक a व अंतिम पद c का गुणा करते हैं तथा प्राप्त गुणनफल के दो ऐसे गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं जिनका योग मध्यपद x के गुणांक b के बराबर हो।

आइए इसे निम्नलिखित उदाहरण से समझते हैं –

उदाहरणः–19. बहुपद x^2+3x+2 का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– बहुपद x^2+3x+2 की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=1$, $b=3$, $c=2$

अब चूँकि $a\times c=1\times 2=2$

2 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैः

$1\times 2 \mid (-1)\times(-2)$

अब इन गुणनखण्डों का योग देखते हैं $1+2=3$ लेकिन $(-1)+(-2)=-3$ यानी 1×2 ही 2 का ऐसा गुणनखण्ड है जिसका योग 3 है जो कि b के बराबर है।

अतः $x^2+3x+2=x^2+(1+2)x+1\times 2$

$$=x^2+1.x+2.x+1\times 2$$
$$=(x^2+1.x)+(2.x+1\times 2)$$
$$=x(x+1)+2(x+1)$$
$$=(x+1)(x+2)$$ अभीष्ट गुणनखण्ड है।

उदाहरणः–20. बहुपद $6x^2-5x-6$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– बहुपद $6x^2-5x-6$ की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=6$, $b=-5$, $c=-6$

अब चूँकि $a\times c=6\times(-6)=-36$

–36 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

-1×36	$1\times(-36)$
-2×18	$2\times(-18)$
-3×12	$3\times(-12)$
-4×9	$\boxed{4\times(-9)}$
-6×6	$6\times(-6)$

स्पष्टतः $ac = -36$ के उपरोक्त गुणनखण्डों में $4\times(-9)$ में 4 व -9 का योग -5 है जो मध्यपद b के बराबर है।

अतः $6x^2 - 5x - 6 = 6x^2 + (4-9)x - 6$

$$= 6x^2 + 4x - 9x - 6$$

$$= (6x^2 + 4x) - 1(9x + 6)$$

$$= 2x(3x+2) - 3(3x+2)$$

$$= (3x+2)(2x-3)$$ अभीष्ट गुणनखण्ड है।

उदाहरणः—21. बहुपद $14x^2 + 19x - 3$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः— बहुपद $14x^2 + 19x - 3$ की तुलना $ax^2 + bx + c$ से करने पर

$a = 14,\ b = 19,\ c = -3$

अब चूँकि $a\times c = 14\times(-3) = -42$

-42 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

-1×42	$1\times(-42)$
$\boxed{-2\times 21}$	$2\times(-21)$
-3×14	$3\times(-14)$
-6×7	$6\times(-7)$

स्पष्टतः $a\times c = -42$ के उपरोक्त गुणनखण्डों में -2×21 में -2 व 21 का योग $-2+21=19$ है जो मध्यपद b के बराबर है।

अतः $14x^2 + 19x - 3 = 14x^2 + (-2+21)x - 3$

$$= 14x^2 - 2x + 21x - 3$$

$$= (14x^2 - 2x) + (21x - 3)$$

$$= 2x(7x-1) + 3(7x-1)$$

$$= (7x-1)(2x+3)$$ अभीष्ट गुणनखण्ड

उदाहरणः–22. बहुपद $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– बहुपद $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}$ की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=4\sqrt{3}$, $b=5$, $c=-2\sqrt{3}$

अतः $a\times c=4\sqrt{3}\times\left(-2\sqrt{3}\right)=-8\times 3=-24$,

–24 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

-1×24	$1\times(-24)$
-2×12	$2\times(-12)$
$\boxed{-3\times 8}$	$3\times(-8)$
-6×4	$6\times(-4)$

स्पष्टतः $a\times c=-24$ के उपरोक्त गुणनखण्डों में -3×8 में -3 व 8 का योग $-3+8=5$ है जो मध्यपद b के बराबर है।

अतः
$$\begin{aligned}4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}&=4\sqrt{3}x^2+(-3+8)x-2\sqrt{3}\\&=4\sqrt{3}x^2-3x+8x-2\sqrt{3}\\&=\left(4\sqrt{3}x^2-3x\right)+\left(8x-2\sqrt{3}\right)\\&=\left(4\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}\sqrt{3}x\right)+2\left(4x-\sqrt{3}\right)\\&=\sqrt{3}x\left(4x-\sqrt{3}\right)+2\left(4x-\sqrt{3}\right)\\&=\left(4x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}x+2\right)\quad\text{अभीष्ट गुणनखण्ड}\end{aligned}$$

सोचे एवं चर्चा करें

क्या यह संभव है कि किसी द्विघातीय बहुपद के दो से अधिक गुणनखण्ड हों? इस अध्याय के उदाहरणों का अवलोकन करें एवं साथियों के साथ मिलकर द्विघाती बहुपद बनाकर उसके गुणनखण्ड कर जाँचिए कि क्या इनके दो से अधिक गुणनखण्ड प्राप्त हो रहे हैं?

प्रश्नावली 3

निम्नलिखित बहुपदों के मध्य पद तोड़कर गुणनखण्डन कीजिए –

(1)	x^2-3x-4	(2)	x^2+2x+1	(3)	x^2+x-12
(4)	$x^2-8x+15$	(5)	$t^2-4t-21$	(6)	$-y^2+35y+156$
(7)	$7x^2-2x-5$	(8)	$12x^2-24x+12$	(9)	$6x^2-7x-3$
(10)	$14y^2+19y-3$	(11)	$\sqrt{3}y^2+9y+6\sqrt{3}$	(12)	$144x^2+24x+1$

द्विघातीय बहुपद के मान व शून्यक (Values and Zeroes of Quadratic Polynomials)

E4SHT7

माना कोई बहुपद $p(x)=x^2-6x+9$ है। इसमें $x=1$ रखते हैं।

तब $$p(1)=(1)^2-6(1)+9$$
$$=1-6+9$$
$$=4$$

$x=1$ रखने पर $p(1)$ का मान 4 प्राप्त होता है। यह $x=1$ के लिए बहुपद का मान है। ऐसे ही हम $p(-1)$, $p(2)$ आदि के मान ज्ञात कर सकते हैं।

हम देखते हैं कि जब $x=3$ रखते हैं

तब $$p(3)=3^2-6(3)+9$$
$$=9-18+9$$
$$=0$$

यहाँ $x=3$ के लिए बहुपद का मान 0 है। अतः 3 को हम इस बहुपद का शून्यक कहेंगे। निम्नलिखित उदाहरण में बहुपद का शून्यक ज्ञात करेंगे।

उदाहरणः–23. बहुपद x^2-3x-4 का शून्यक ज्ञात कीजिए।

हलः– माना $p(x)=x^2-3x-4$

यहाँ हमें x का ऐसा मान ज्ञात करना है जिसके लिए बहुपद का मान शून्य हो।

यदि $x=1$

तब $$p(1)=(1)^2-3(1)-4$$
$$=1-3-4$$
$$=-6$$

यदि $x=-1$

तब $$p(-1)=(-1)^2-3(-1)-4$$
$$=1+3-4$$
$$=0$$

$x = -1$ रखने पर बहुपद का मान शून्य हो जाता है अर्थात –1 इस बहुपद का शून्यक है। क्या और भी कुछ मान संभव है जिसके लिए बहुपद शून्य हो? यह जानने के लिए हमें x के और भी मान रखने होंगे। लेकिन यदि बहुपद के गुणनखण्डों का उपयोग करें तो हम बहुपद के सभी शून्यक सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

बहुपद x^2-3x-4 के गुणनखण्ड ज्ञात करेंगे।

$$\begin{aligned} x^2-3x-4 &= x^2-4x+x-4 \\ &= \left(x^2-4x\right)+1(x-4) \\ &= x(x-4)+1(x-4) \\ &= (x-4)(x+1) \end{aligned}$$

इस बहुपद का शून्यक x का वह मान होगा जिसके लिए बहुपद शून्य हो जाए

अर्थात $x^2-3x-4=0$

$\Rightarrow \quad (x-4)(x+1)=0$

$\Rightarrow \quad (x-4)=0$ या $(x+1)=0$

$\Rightarrow \quad x-4=0$ या $x+1=0$

$\Rightarrow \quad x=4$ या $x=-1$

यहाँ हम देख सकते हैं कि x के दो मानों –1 व 4 के लिए बहुपद का मान शून्य है। अतः –1 व 4 इस बहुपद के शून्यक हैं।

उपरोक्त उदाहरण में –1 व 4 दिए गए बहुपद के शून्यक हैं जबकि $(x-4)$ व $(x+1)$ बहुपद के गुणनखण्ड हैं। आपने देखा कि बहुपद के गुणनखण्डों को शून्य के बराबर रखने पर बहुपद के शून्यक प्राप्त हो गए। यानी गुणनखण्ड मालूम हो तो शून्यक प्राप्त कर सकते हैं। क्या शून्यक मालूम होने पर गुणनखण्ड जान सकेंगे?

करके देखें

1. x^2-9 के गुणनखण्ड व शून्यक ज्ञात कीजिए।
2. किसी बहुपद के शून्यक 4 व –1 है गुणनखण्ड क्या होंगे?

किसी द्विघातीय बहुपद के गुणांक व उसके शून्यक में संबंध

बहुपद x^2-5x+6 के शून्यक 3 व 2 हैं, तब इसके गुणनखण्ड $(x-3)$ व $(x-2)$ हैं।

अर्थात $x^2-5x+6=1.(x-3)(x-2)$

अब बहुपद $4x^2-4x+1$ के गुणनखण्ड व शून्यक पर विचार करते हैं –

$$
\begin{aligned}
4x^2-4x+1 &= 4x^2-2x-2x+1 \\
&= \left(4x^2-2x\right)-1\left(2x-1\right) \\
&= 2x\left(2x-1\right)-1\left(2x-1\right) \\
&= \left(2x-1\right)\left(2x-1\right) \\
&= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\times 2\left(x-\frac{1}{2}\right) \\
&= 4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

अर्थात $4x^2-4x+1$ का गुणनखण्ड $4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ है। स्पष्टतः इस बहुपद के $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ शून्यक हैं।

क्या x^2-5x+6 व $4x^2-4x+1$ के गुणनखण्ड में कोई खास बात (पैटर्न) दिखाई पड़ रही है? x^2-5x+6 में x^2 का गुणांक 1 उसके एक गुणनखण्ड के रूप में लिखा है। इसी प्रकार $4x^2-4x+1$ में x^2 का गुणांक 4 उसके एक गुणनखण्ड के रूप में लिखा है। यानी हम बहुपद ax^2+bx+c को जिसके शून्यक α व β हैं तथा a, b, c वास्तविक संख्याएँ जहाँ $a \neq 0$ निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं –

$ax^2+bx+c = k\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)$; $k=a$

जहाँ k एक वास्तविक संख्या है और $k \neq 0$

पुनः $ax^2+bx+c = kx^2-k\left(\alpha+\beta\right)x+k\alpha\beta$ (गुणा करने पर)

इस समीकरण के दोनों पक्षों के x^2, x के गुणांकों एवं अचर पदों की तुलना करने पर

$a=k$; $b=-k\left(\alpha+\beta\right)$; $c=k\alpha\beta$

$\frac{b}{-k}=\alpha+\beta$; $\frac{c}{k}=\alpha\beta$

$\frac{b}{-a}=\alpha+\beta$

अर्थात $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ एवं $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ (अंश और हर में –1 का गुणा करने पर)

हम कह सकते हैं कि द्विघातीय बहुपद ax^2+bx+c में

शून्यकों का योगफल $\alpha+\beta$ = $\dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

बहुपद के शून्यकों एवं गुणांकों के संबंध को कुछ उदाहरणों से समझते हैं

उदाहरण:–24. बहुपद $6x^2+13x+7$ के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल:– बहुपद $6x^2+13x+7$ की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=6$, $b=13$, $c=7$

$\because$ शून्यकों का योगफल $= \dfrac{-b}{a}$

$\therefore$ शून्यकों का योगफल $= \dfrac{-13}{6}$

$\because$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{c}{a}$

$\therefore$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{7}{6}$

उदाहरण:–25. बहुपद $4x^2+4\sqrt{3}x+3$ के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल:– बहुपद $4x^2+4\sqrt{3}x+3$ की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=4$, $b=4\sqrt{3}$, $c=3$

$\because$ शून्यकों का योगफल $= \dfrac{-b}{a}$

$\therefore$ शून्यकों का योगफल $= \dfrac{-\left(4\sqrt{3}\right)}{4}$

$= -\sqrt{3}$

$\because$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{c}{a}$

$\therefore$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{3}{4}$

सोचें एवं चर्चा करें :

1. क्या शून्यक ज्ञात होने पर बहुपद ज्ञात कर सकते हैं? कोई दो मान लेकर बहुपद बनाइए।

प्रश्नावली 4

1. नीचे ax^2+bx+c रूप के कुछ द्विघातीय बहुपदों के शून्यक दिए गए हैं, तब बहुपदों के गुणनखण्ड लिखिए –

(i) $(3,4)$ (ii) $(-2,-3)$ (iii) $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$

(iv) $(15,17)$ (v) $(-18,12)$

E52DUU

2. निम्नलिखित बहुपदों के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए –

(i) $x^2+10x+24$ (ii) $2x^2-7x-9$ (iii) $x^2+11x+30$

(iv) $-5x^2+3x+4$ (v) x^2+x-12

हमने सीखा

1. बहुपदों की भाग की प्रक्रिया अंकगणित के भाग की प्रक्रिया से थोड़ी अलग होती है। इसमें चर की घात का ध्यान रखना होता है।
2. बहुपदों का भाग करने के लिए भाज्य एवं भाजक को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखते हैं।
3. बहुपदों का भाग करने के लिए दीर्घ भाजन विधि का भी उपयोग करते हैं।
4. दीर्घ भाजन विधि में भाग की प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए या शेषफल के चर की घात भाजक के चर की घात से कम न हो जाए।
5. बहुपदों के भाग की प्रक्रिया में भागफल एवं शेषफल भी बहुपद होते हैं।
6. यदि किसी बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f(a)$ होता है। यह शेषफल प्रमेय है।
7. गुणनखण्ड प्रमेयः– यदि $x=a$, बहुपद $f(x)$ का एक ऐसा शून्यक है जिसके लिए शेषफल $f(a)=0$ तब $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है।
8. द्विघातीय बहुपदों के दो शून्यक होते हैं।

mÙkj eky k&1

1-	Hkkx Qy $=x-2$,		शेषफल $=3$
2.	भागफल $=3x-1$,		शेषफल $=0$
3.	भागफल $=2y^2+2y+1$,		शेषफल $=0$
4.	भागफल $=x^3-4x^2+19x-65$,		शेषफल $=227x+133$
5.	भागफल $=x-y$,		शेषफल $=0$
6.	भागफल $=1$,		शेषफल $=b$
7.	$3x^3+x^2+5$	8.	$4x^2-3x-7$
10.	शेषफल शून्य नहीं है।	11.	$(3x+2)$ मीटर
12.	$14x$ मीटर		

उत्तरमाला–2

1. (i) 15 (ii) $\frac{51}{8}$ (iii) 22 (iv) 100 (v) $\frac{269}{27}$

2. (i) $(x-3)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड है ।
   (ii) $(x+1)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड नहीं है ।
   (iii) $(x-2)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड है ।
   (iv) $(x-1)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड नहीं है ।
   (v) $(x+4)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड नहीं है ।

3. (i) $a=3$ (ii) $a=2$ (iii) $a=4$
   (iv) $a=-3$ (v) $a=-35$

4. शेषफल $=11$ 5. शेषफल $=-17$

उत्तरमाला–3

(1) $(x-4)(x+1)$ (2) $(x+1)(x+1)$

(3) $(x+4)(x-3)$ (4) $(x-5)(x-3)$

(5) $(t-7)(t+3)$ (6) $-(y-39)(y+4)$

(7) $(7x+5)(x-1)$ (8) $12(x-1)(x-1)$

(9) $(2x-3)(3x+1)$ (10) $(2y+3)(7y-1)$

(11) $\left(y+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}y+3\right)$ (12) $(12x+1)^2$

उत्तरमाला–4

1 (i) $(x-3)(x-4)$ (ii) $(x+2)(x+3)$
  (iii) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ (iv) $(x-15)(x-17)$
  (v) $(x+18)(x-12)$

2. (i) $-10, 24$ (ii) $\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}$ (iii) $-11, 30$
   (iv) $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}$ (v) $-1, -12$