अध्याय **11**

बीजगणितीय व्यंजक (ALGEBRAIC EXPRESSIONS)

11.0 परिचय:

माल लीजिए, व्यंजक :

(i) $3+8-9$ (ii) $\frac{1}{3}xy$ (iii) 0 (iv) $3x+5$ (v) $4xy+7$ (vi) $15+0-19$ (vi) $\frac{3x}{y}(y \neq 0)$

(i), (iii) और (vi) संख्यात्मक व्यंजक हैं तथा (ii), (iv) और (v) बीजगणितीय व्यंजक हो।

क्या तुम इनमें अंतर पहचानते हो?

आप और अधिक व्यंजक बना सकते हैं। जैसा कि आप जानते हैं कि व्यंजक चर और अचर के साथ बनते हैं। व्यंजक $3x+5$ में, x चर है और 3, 5 अचर है। $3x$ यह बीजगणितीय पद और 5 संख्यात्मक पद हैं। व्यंजक $4xy+7$ यह x और y चर तथा अचर 4 और 7 से बना है।

अब $\frac{1}{3}xy$ में केवल एक पद है और $2xy+pq-3$ में 3 पद हैं।

अतः तुम जानते हो कि पद, चर और अचरों से बनते हैं।

व्यंजक बनाने के लिए पदों को जोड़ा या घटाया जाता है।

हमा जानते हैं कि व्यंजक $3x+5$ का मान कोई भी संख्या हो सकती है। यदि $x=2$, व्यंजक का मान $3(2)+5=6+5=11$ होगा। x के भिन्न मानो के लिए, व्यंजक $3x+5$ के भिन्न मान रहते हैं।

यह कीजिए :

1. निम्न बीजगणितीय व्यंजकों में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
   $5xy^2$, $5xy^3-9x$, $3xy+4y-8$, $9x^2+2x+pq+q$.
2. x के लिए भिन्न-भिन्न मान लीजिए और $3x+5$ के मान ज्ञात कीजिए।

कुछ अधिक व्यंजक लीजिए, $5xy^2$, $5xy^3-9x$, $3xy+4y-8$ आदि। यह स्पष्ट है कि $5xy^2$ एक पदीय, $5xy^3-9x$ द्विपदी और $3xy+4y-8$ त्रिपदी हैं।

> एकपदों में चरों के सभी घातों का योग, एकपदी का धातांक रहता है ।

हम जानते कि एक पदीय $5x^2y$ का घातांक '3' है।

इसके अतिरिक्त, द्विपदी $5xy^3-9x$ का घातांक '4'है।

इसी प्रकार त्रिपदी $3xy+4y-8$ का घातांक '2' है।

> व्यंजक में, इसके उच्चतम घातांकवाले पद का धातांक ही व्यंजक का धातांक रहता है ।

SCERT TELANGANA

व्यंजक जिसमें वास्तव रूप में एक, दो और तीन पद रहते हैं, क्रमशः एक पदी, द्विपदी और त्रिपदी कहलाते है। सामान्यतः कोई भी व्यंजक जिसमें अशून्य गुणों के साथ एक या अधिक पद हों, बहुपदी कहलाता है।

11.1 सजातीय पदों को ध्यान से देखिए :

निम्नलिखित पदों को ध्यान से देखिए :

$2x,\ 3x^2,\ 4x,\ -5x,\ 7x^3$

इन पदों में $2x, 4x, -5x$ का एक ही चर है और घातांक भी समान हैं। इन्हें सजातीय पद कहते हैं। इन पदों में समान संख्यात्मक गुणांक होना जरूरी नहीं है। क्योंकि $8p$ और $8q$ सजातीय पद नहीं है? $8p$ और $8pq$ सजातीय नहीं है? क्योंकि $8p$ और $8p^2$ सजातीय नहीं है?

यह कीजिए

1. निम्न में सजातीय पदों को ज्ञात कीजिए :

   $ax^2y,\ 2x,\ 5y^2,\ -9x^2,\ -6x,\ 7xy,\ 18y^2.$

2. $5pq^2$ के लिए 3 सजातीय पद लिखिए।

11.2 बीजगणितीय व्यंजकों का योग और व्यवकलन

उदाहरण:1 $5x^2 + 3xy + 2y^2$ और $2y^2 - xy + 4x^2$

हल : (एक सीध में स्तंभ के अनुसार हो **व्यंजक के चिह्न न बदलते हुये सजातीय पद को एक दुसरे के नीचे लिखकर योग फल ज्ञात करें ।**

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^2 & +3xy & +2y^2 \\ + & 4x^2 & -xy & +2y^2 \\ \hline & 9x^2 & +2xy & +4y^2 \\ \hline \end{array}$$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. शीला कहती है $2pq$ और $4pq$ का योग $8p^2q^2$ है। क्या वह सही है?
2. रहमान ने $4x$ और $7y$ का योग किया और $11xy$ परिणाम मिला। क्या तुम रहमान से सहमत हो?

उदाहरण :2 $12xy + 4x^2 - 3y^2$ में से $2xy + 9x^2$ घटाइए।

हल : जिस व्यंजक को घटाना है, उसे जिस व्यंजक में से घटाना है उसके नीचे सजातीय पदों को सीध में रखते हुए स्तंभ में लिखिए।

$$\begin{array}{rrr} 12xy & +4x^2 & -3y^2 \\ 2xy & +9x^2 & \\ (-) & (-) & \\ \hline 10xy & -5x^2 & -3y^2 \\ \hline \end{array}$$

घटानेवाले व्यंजक में प्रत्येक पद के चिन्ह बदलकर योग कीजिए ।

SCERT TELANGANA

[ध्यान दीजिए कि संख्या का घटाना, उसके भोज्य विलोम के योग के समान है। इस तरह, -3 घटाना यह $+3$. जोड़ने के समान है। इसी प्रकार से, $9x^2$ घटना यह $-9x^2$, जोड़ने के समान है। $-3xy$ घटाना यह $+3xy$ जोड़ने के समान है।]

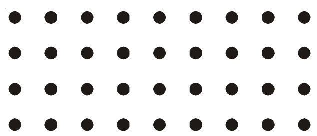
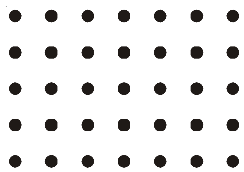
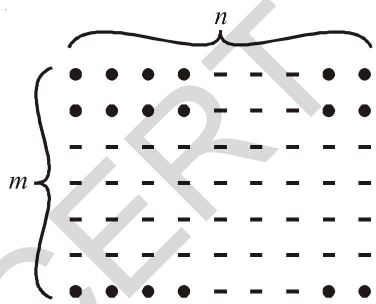
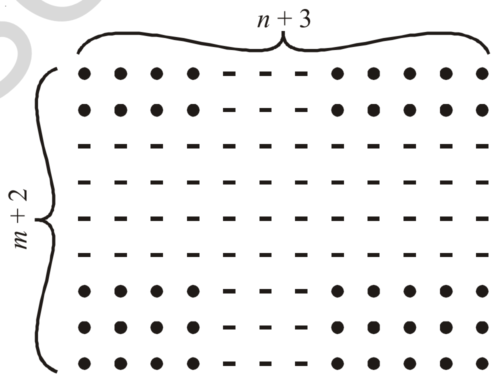
यह कीजिए :

1. यदि $A = 2y^2 + 3x - x^2$, $B = 3x^2 - y^2$ और $C = 5x^2 - 3xy$ तब

   (i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $B + C$ (iv) $B - C$ (v) $A + B + C$ (vi) $A + B - C$

11.3 बीजगणितीय व्यंजकों का गुणन :

परिचय : (i) निम्न बिन्दुओं की आकृति देखिए।

बिन्दुओं की आकृति	बिन्दुओं की कुल संख्या
	पंक्ति × स्तंभ
	4×9
	5×7
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

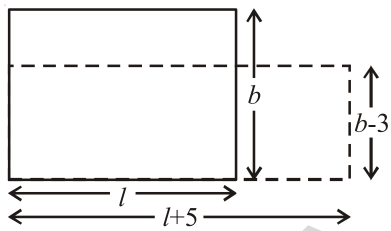
बिंदुओं की कुल संख्या ज्ञात करने के लिए, हम पंक्तियों की संख्या के व्यंजक को स्तंभो की संख्या के व्यंजक से गुणा करना चाहिए ।

यहाँ पंक्तियों की संख्या 2, से बढ़ाई गई अर्थात $m+2$ और स्तंभों की संख्या 3 से बढ़ाई गई अर्थात $n+3$

SCERT TELANGANA

(ii) क्या तुम अब दूसरी स्थितियाँ सोच सकते हो जिनमें दो बीज गणितीय व्यंजकों का गुणन करना पड़ता है?

अमीना उठी। उसने कहा, हम आयत के क्षेत्रफल के बारे में सोच सकते हैं। आयत का क्षेत्रफल $l \times b$, है, जहाँ लंबाई l और चौड़ाई b है। यदि आयत की लम्बाई की 5 इकाईयाँ बढ़ाई गई अर्थात $(l + 5)$ इकाईयाँ और चौड़ाई में 3 इकाईयाँ कम कर दी गई, अर्थात् $(b - 3)$ तो नये आयत का क्षेत्रफल $(l + 5) \times (b - 3)$ वर्ग इकाइयाँ होगा।



आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें बीजगणितीय व्यंजक $l{\times}b$ जैसे गुणन करना चाहिए और $(l{+}5){\times}(b{-}3)$ जैसे विस्तृत करते है ।

(iii) क्या आप घनाभ के आयतन का अनुमान लगा सकते हैं?

(एक आयताकार डिब्बे का आयतन उसकी लम्बाई, चौड़ाई और उंचाई के गुणन से ज्ञात किया जाता है।)

(iv) सरिता ने ध्यान दिलाया कि जब हम वस्तुएँ खरीदते हैं, तो हमें गुणा करना पड़ता है। उदाहरण के लिए, यदि केलों का प्रति दर्जन दर रु.p है और विद्यालय के वनभोज के लिए z दर्जन केलों की आवश्यकता है, तब हमें = रु. $p \times z$ देना चाहिए।

माना कि प्रति दर्जन दर रु.2 कम हो जाये और आवश्यक केलों की संख्या 4 दर्जन कम हो जाये तब, केलों का प्रतिदर्जन दर = रु.$(p - 2)$ और आवश्यक केले $= (z - 4)$ दर्जन

इसलिए, हमें देना पड़ेगा = और $(p - 2) \times (z - 4)$

इन्हें प्रयत्न कीजिए :

क्या आप ऐसी और दो स्थितियाँ सोच सकते हैं, जहाँ हमें बीजगणितीतय व्यंजकों का गुणन करना आवश्यक है?

(संकेत : वेग और समय के बारे में सोचिए।

मूलधन, समय और दर %, ब्याज आदि के बारे में सोचिए।)

ऊपर के सभी उदाहरणों में, हमें दो या दो से अधिक राशियों का गुणन करना पड़ेगा। यदि राशियाँ, बीज गणितीय व्यंजकों द्वारा दी गयी हों, हमें उनका गुणनफल ज्ञात करना आवश्यक है। इसका अर्थ है कि हमें जानना चाहिए कि कैसे यह गुणनफल प्राप्त होता है? अब हम इसे योजनाबद्ध तरीके से करेंगे। शुरुआत करने के लिए हम दो एक पदों के गुणन की ओर देखेंगे।

SCERT TELANGANA

11.4 एकपदी को एकपदी से गुणन करना

11.4.1 दो एकपदीयों का गुणन करना :

हम जानते हैं कि

$$4 \times x = x + x + x + x = 4x$$

और $\quad 4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

अब, निम्न गुणा को ध्यान से देखिए।

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

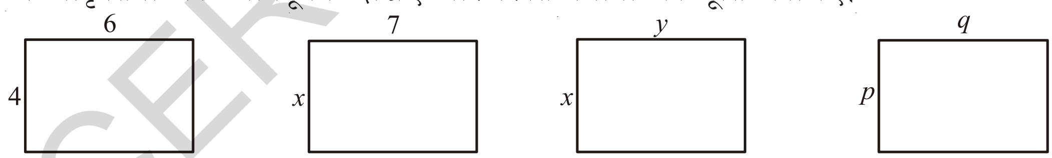
$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

बीजगणितीय पदों का गुणा ज्ञात करने के लिए समान आधारी चरों के घातांकों का योग करते हैं, हम घातांकों के नियमों का उपयोग करते हैं।

निम्न आकृतियों को ध्यानपूर्वक देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



क्षेत्रफल = 4×6 = 24 इकाइयाँ, क्षेत्रफल $= x \times 7 =$ ....क्षेत्रफल= $x \times y$ =.....क्षेत्रफल= .... ×...... = ...

निम्न गुणा को ध्यानपूर्वक देखिए :

1. $7x \times 5y = (7 \times 5) \times (x \times y) = 35xy$
2. $3x \times (-2y) = \{3 \times (-2)\} \times (x \times y) = -6xy$
3. $(-4x) \times (-6y) = (-4) \times (-6) \times (x \times y) = 24xy$
4. $3x \times 5x^2 = (3 \times 5) \times (x \times x^2) = 15x^3$
5. $(-2x^2) \times (-4x^2) = (-2) \times (-4) \times x^2 \times x^2 = 8x^4$

SCERT TELANGANA

सूचना: (i) दो धन पूर्णांको का गुणा धन पूर्णांक रहता है।
(ii) दो ऋण पूर्णांकों का गुणा धन पूर्णांक रहता है।
(iii) धन और ऋण पूर्णांकों का गुणा ऋण पूर्णांक रहता है।

यह कीजिए।

1. सारणी पूर्ण कीजिए :

प्रथम एकपदी	द्वतीय एकपदी	दो एकपदियों का गुणन फल
$2x$	$-3y$	$2x \times (-3y) = -6xy$
$-4y^2$	$-2y$	....
$3abc$	$5bcd$	....
mn	$-4m$	....
$-3mq$	$-3nq$	....

2. जाँच कीजिए कि जब दो एकपदीयों का गुणा किया जाता है, क्या तुम्हें हमेशा एकपदी प्राप्त होती है।

11.4.2 तीन या अधिक एकपदीयों का गुणन करना :

निम्न उदाहरणों को ध्यानपूर्वक देखिए :

उदाहरण 3: $5x$, $6y$ और $7z$ का गुणनफल ज्ञात कीजीए।

पद्धति I

$5x \times 6y \times 7z = (5x \times 6y) \times 7z$

$= 30xy \times 7z$

$= 210xyz$

पद्धति II

$5x \times 6y \times 7z = 5 \times x \times 6 \times y \times 7 \times z$

$= 5 \times 6 \times 7 \times x \times y \times z$

$= 210\, xyz$ (गुणांकों का पश्चात चरों का गुणा कीजिए ।)

उदाहरण 4: $3x^2y \times 4xy^2 \times 7x^3y^3$ ज्ञात कीजिए।

हल : $= 3 \times 4 \times 7 \times (x^2y) \times (xy^2) \times (x^3y^3)$

$= 84 \times x^2 \times y \times x \times y^2 \times x^3 \times y^3$

$= 84 \times (x^2 \times x \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$

$= 84 \times x^6 \times y^6 = 84x^6y^6$.

उदाहरण 5: $3x$, $-4xy$, $2x^2$, $3y^2$, $5x^3y^2$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $3x \times (-4xy) \times 2x^2 \times 3y^2 \times 5x^3y^2$

$= [3 \times (-4) \times 2 \times 3 \times 5] \times (x \times x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^2)$

$= -360x^7y^5$.

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 11.1

1. निम्न युग्मों का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

   (i) $6, 7k$ (ii) $-3l, -2m$ (iii) $-5t^2 -3t^2$ (iv) $6n, 3m$ (v) $-5p^2, -2p$

2. गुणा की सारणी पूर्ण कीजिए।

X	$5x$	$-2y^2$	$3x^2$	$6xy$	$3y^2$	$-3xy^2$	$4xy^2$	x^2y^2
$3x$	$15x^2$	....	....	....	....	....	....	....
$4y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$-2x^2$	$-10x^3$	$4x^2y^2$	....	....	....	....	....	....
$6xy$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$3x^2y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2xy^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$5x^2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....

3. निम्न सारणी में लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई दी गयी है तो आयताकार डिब्बों के आयतन ज्ञात कीजिए।

क्र.सं.	**लंबाई**	**चौड़ाई**	**ऊँचाई**	**आयतन (v) = $l \times b \times h$**
(i)	$3x$	$4x^2$	5	$v = 3x \times 4x^2 \times 5 = 60x^3$
(ii)	$3a^2$	4	$5c$	$v =$ ....
(iii)	$3m$	$4n$	$2m^2$	$v =$ ....
(iv)	$6kl$	$3l^2$	$2k^2$	$v =$ ....
(v)	$3pr$	$2qr$	$4pq$	$v =$ ....

4. निम्न एकपदीयों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

   (i) xy, x^2y, xy, x (ii) a, b, ab, a^3b, ab^3 (iii) kl, lm, km, klm

   (iv) pq, pqr, r (v) $-3a, 4ab, -6c, d$

5. यदि $A = xy$, $B = yz$ और $C = zx$, तो ABC ज्ञात कीजिए।

6. यदि $P = 4x^2$, $T = 5x$ और $R = 5y$, तो $\frac{PTR}{100} =$ ....

7. तुम स्वयं कुछ एकपदीयाँ लिखिए और उनका गुणनफल ज्ञात कीजिए।

SCERT TELANGANA

11.5 द्विपदी या त्रिपदी को एकपदी से गुणन करना :

11.5.1 द्विपदी को एकपदी से गुणन करना :

एकपदी $5x$ और द्विपदी $6y+3$ का गुणन करना

गुणा के अंतर्गत प्रक्रिया है :

सोपान	निर्देश	कार्यविधि
1.	गुणा के चिन्ह का उपयोग करते हुए एक पदी और द्वीपदी का गुणा लिखिए।	$5x \times (6y+3)$
2.	वितरण-नियम का उपयोग कीजिए : एकपदी को द्विपदी के प्रथम पद से गुणा कीजिए। एक पदी के द्विपदी के द्वितीय पद से गुणा कीजिए और उनके गुणा का योग कीजिए।	$(5x \times 6y) + (5x \times 3)$
3.	पदों को सरल कीजिए	$30xy + 15x$

अत: $5x$ और $6y+3$ का गुणा

हल : $5x(6y + 3) = 5x \times (6y + 3)$

$= (5x \times 6y) + (5x \times 3)$

$= 30xy + 15x$

उदाहरण 6: $(-4xy)(2x - y)$ का गुणन फल ज्ञात कीजिए।

हल : $(-4xy)(2x - y) = (-4xy) \times (2x - y)$

$= (-4xy)\times 2x + (-4xy) \times (-y)$

$= -8x^2y + 4xy^2$

उदाहरण 7: $(3m - 2n^2)(-7mn)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $(3m - 2n^2)(-7mn) = (3m - 2n^2) \times (-7mn)$ ∵ क्रमविनिमेय नियम

$= (-7mn) \times (3m - 2n^2)$

$= ((-7mn) \times 3m) - ((-7mn) \times 2n^2)$

$= -21m^2 n + 14mn^3$

यह कीजिए :

1. गुणनफल ज्ञात कीजीए : (i) $3x(4ax + 8by)$ (ii) $4a^2b(a-3b)$ (iii) $(p + 3q^2)pq$ (iv) $(m^3 + n^3)5mn^2$
2. एकपदी और द्वीपदी के गुणनफल के अधिकतम पदों की संख्या बताईए ?

11.5.2 त्रिपदी को एकपदी द्वारा गुणन करना :

> एकपदी और त्रिपदीयों का गुणा में कितने अधिकतम पद रहते है ?

माना कि एकपदी $2x$ और त्रीपदी $(3x + 4y - 6)$

उनका गुणनफल $= 2x \times (3x + 4y - 6)$

$= (2x \times 3x) + (2x \times 4y) + (2x \times (-6))$ (वितरण नियम का उपयोग करते हुए)

$= 6x^2 + 8xy - 12x$

अभ्यास - 11.2

1. सारणी पूर्ण कीजिए :

क्र.सं.	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	गुणनफल
1	$5q$	$p+q-2r$	$5q(p+q-2r)=5pq+5q^2-10qr$
2	$kl+lm+mn$	$3k$	....
3	ab^2	$a+b^2+c^3$	....
4	$x-2y+3z$	xyz	....
5	$a^2bc+b^2cd-abd^2$	$a^2b^2c^2$	....

2. सरल कीजिए : $4y(3y+4)$

3. सरल कीजिए : $x(2x^2 - 7x+3)$ और (i) $x = 1$ (ii) $x = 0$ के लिए इसके मान ज्ञात कीजिए।

4. गुणनफल का योग कीजिए : $a(a- b), b(b- c), c(c- a)$

5. गुणनफल का योग कीजिए : $x(x+y- r), y(x- y+r), z(x- y- z)$

6. $3x(x+2y)$ के गुणनफल में से $2x(5x- y)$ का गुणनफल घटाइए।

7. $6k(2k+3l- 2m)$ में से $3k(5k- l+3m)$ घटाइए।

8. सरल कीजिए : $a^2(a- b+c)+b^2(a+b- c)- c^2(a- b- c)$

11.6 द्विपदी को द्विपदी अथवा त्रिपदी द्वारा गुणन करना :

11.6.1 द्विपदी को द्विपदी द्वारा गुणा करना :

मान लीजिए, $5x+6y$ और $3x - 2y$ दो द्विपदी है।

अब $5x+6y$ और $3x -2y$ दो द्विपदी का गुणा

SCERT TELANGANA

गुणा की कार्यविधि होगी:

सोपान	निर्देश	
1.	दो द्विपदीयों का गुणा लिखिए।	$(\underline{5x}+\underline{6y})(3x\text{-}2y)$
2.	वितरण नियम का उपयोग किजिए। प्रथम द्विपदी के प्रथम पद से द्वितीय द्विपदी के द्वितीय पद से द्वितीय द्विपदी के गुणा कीजिए और गुणनफल को जोड़ दीजिए।	$\underline{5x}(3x-2y)+\underline{6y}(3x-2y)$ $= (5x\times3x)\text{-}(5x\times2y) + (6y\times3x)-(6y\times2y)$
3.	सरल कीजिए	$(5x\times3x)-(5x\times2y) + (6y\times3x)-(6y\times2y)$ $=15x^2 - 10xy +18xy - 12y^2$
4.	सजातीय पदों का योग कीजिए।	$= 15\ x^2+8xy\text{-}12y^2$

अतः $5x + 6y$ और $3x - 2y$ का गुणा

$= (5x + 6y)(3x - 2y)$

$= 5x(3x - 2y) + 6y(3x - 2y)$ (वितरण के उपयोग द्वारा)

$= (5x \times 3x) - (5x \times 2y) + (6y\times3x)-(6y\times2y)$

$=15x^2- 10xy + 18xy - 12y^2$

$= 15\ x^2+8xy - 12y^2$

यह कीजिए :

1. गुणन फल ज्ञात कीजिए :

   (i) $(a - b)\ (2a + 4b)$ (ii) $(3x + 2y)\ (3y - 4x)$

   (iii) $(2m - l)(2l - m)$ (iv) $(k + 3m)(3m - k)$

2. दो द्विपदीयों के गुणनफल के पदों की संख्या कितनी होंगी?

11.6.2 द्विपदी को त्रिपदी द्वारा गुणा करना :

माना कि द्विपदी $2x + 3y$ और त्रिपदी $3x + 4y - 5z$.

अब, हम $2x + 3y$ को त्रिपदी $3x + 4y - 5z$ द्वारा गुणा करेंगे।

SCERT TELANGANA

गुणन की प्रिक्रया है :

सोपान	निर्देश	प्रिक्रया
1.	गुणन के चिन्ह का उपयोग करते हुए द्विपदी और त्रिपदी का गुणा लिखिए।	$(2x+3y)\,(3x+4y-5z)$
2.	**वितरण नियम का उपयोग कीजिए :** द्विपदी के प्रथम पद को त्रिपदी द्वारा गुणा कीजिए और द्विपदी के द्वितीय पद को त्रिपदी द्वारा गुणा कीजिए। तदन्तर गुणनफल का योग कीजिए।	$2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$
3.	सरल कीजिए	$(2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+$ $(3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$ $6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$
4.	सजातीय पदों का योग कीजिए	$6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

अत: $(2x+3y)$ और $(3x+4y-5z)$ का गुणा

$= (2x+3y)(3x+4y-5z)$

$= 2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$ (वितरण नियम के उपयोग द्वारा)

$= (2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+ (3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$

$=6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$

$= 6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

द्विपदी और त्रिपदी के गुणनफल में कितने अधिकतम पद प्राप्त होगे ?

अभ्यास - 11.3

1. द्विपदीयों का गुणा कीजिए :

   (i) $2a-9$ and $3a+4$ (ii) $x-2y$ and $2x-y$

   (iii) $kl+lm$ and $k-l$ (iv) m^2-n^2 and $m+n$

2. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

   (i) $(x+y)(2x-5y+3xy)$ (ii) $(a-2b+3c)(ab^2-a^2b)$

   (iii) $(mn-kl+km)(kl-lm)$ (iv) $(p^3+q^3)(p-5q+6r)$

SCERT TELANGANA

3. सरल कीजिए :

(i) $(x-2y)(y-3x)+(x+y)(x-3y)-(y-3x)(4x-5y)$

(ii) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$

(iii) $(a-2b+5c)(a-b)-(a-b-c)(2a+3c)+(6a+b)(2c-3a-5b)$

(iv) $(pq-qr+pr)(pq+qr)-(pr+pq)(p+q-r)$

11.7 सर्वसमिका क्या है?

माना कि समीकरण $a(a-2)=a^2-2a$

a के किसी भी मान के लिए समीकरण के दोनों पक्षों का मूल्यांकन कीजिए।

$a=5$ के लिए, LHS $= 5(5-2) = 5\times3 = 15$

RHS $= 5^2-2(5) = 25-10 = 15$

अत:, समीकरण में $a=5$ के लिए LHS = RHS

इसी प्रकार $a=-2$ के लिए

LHS $= (-2)(-2-2) = (-2)\times(-4) = 8$

RHS $= (-2)^2-2(-2) = 4+4 = 8$

इस तरह $a=-2$ के लिए भी LHS = RHS

हम कह सकते है कि a के किसी भी मान के लिए समीकरण सही है। इसलिए समीकरण, सर्वसिमका कहलाती है।

माना कि समीकरण $a(a+1) = 6$

यह समीकरण केवल $a = 2$ और -3 के लिए सही है परन्तु यह किसी दूसरे मानों के लिए सही नहीं है। यह समीकरण $a(a+1) = 6$ सर्वसमिका नहीं है।

एक समीकरण, सर्वसमिका कहलाती है यदि इसके चरों के स्थान पर कोई भी मान प्रतिस्थापित करने पर समीकरण संतुष्ट होता है।

समीकरण, उसने विद्यमान चर के लिए, कुछ विशिष्ट मानों के लिए सही रहता है जबकि सर्वसमिका, उसमें विद्यमान सभी के लिए, सभी मानों के लिए सही रहती है। इस तरह, यह सर्वव्यापक रूप से सही समीकरण जाना जाता है।

सर्वसमिका निर्देशित करने के लिए हम '$\equiv$' (सर्वसमरूप से बराबर इस प्रकार पढ़ते है) चिन्ह का उपयोग करते है।

11.8 कुछ महत्वपूर्ण सर्व समिकाएँ :

हम हमेशा कुछ सर्वसमिकाओं का उपयोग करते है जो समस्या हल करने में सहायक रहती है। गुणन में सहायक सर्वसमिकाएँ विशेष गुणनफल के नाम से जानी जाती है। इनमें से हम तीन महत्वपूर्ण सर्वसमिकाओं का अभ्यास करेंगे, द्विपदी के गुणनफल है।

मान लीजिए, $(a + b)^2$

अब, $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$= a(a+b) + b(a+b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$ (क्यौंकि $ab = ba$)

$= a^2 + 2ab + b^2$

इस तरह $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

अब, a=2, b=3, लीजिए, हमें प्राप्त होता है,

$(LHS) = (a + b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$

$(RHS) = a^2 + 2ab + b^2 = 2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

LHS और RHS की ओर ध्यान दीजिए। व्यंजक के मान LHS और RHS में समान है।

कुछ धन पूर्णांक, ऋण पूर्णांक और भिन्न के लिए सर्वसमिका की जाँच कीजिए।

यह कीजिए :

क्या निम्न समीकरण सर्वसमीकाएँ है? जाँच कीजिए।

(i) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(ii) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

(iii) $(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

ध्यान दीजिए, एक और सर्वसमिका, $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$,

$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

अब $x = 2$, $a = 1$ और $b = 3$, लीजिए, सर्वसमिका की जाँच कीजीए।

- तुम क्या देखते हो ? क्या LHS = RHS?
- ऊपर की सर्वसमिका की जाँच के लिए x, a ,b के भिन्न-भिन्न मान लीजिए।
- क्या a और b के सभी मान के लिए हमेशा LHS = RHS ?

SCERT TELANGANA

- मान लीजिए $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$
  (i) 'p' के अलावा q रखनेपर तुम क्या देखोगे?
  (ii) 'q' के अलावा p रखनेपर तुम क्या देखोगे?

11.9 सर्वसमिकाओं के अनुप्रयोग :

उदाहरण 8: $(3x + 4y)^2$

हल : $(3x + 4y)^2$ यह दो द्विपदी व्यंजकों का गुणा है जिसमें एक ही पद $(3x + 4y)$ और $(3x + 4y)$ है। द्विपदी का द्विपदी से गुणा करने की विधि से इसका विस्तार कर सकते है। इस गुणनफल के साथ सर्वसमिका की तुलना कीजिए। इस गुणनफल में $a = 3x$ और $b = 4y$ है। प्रथम सर्वसमिकाओं a और b के स्थान पर क्रमशः $3x$ और $4y$ प्रतिस्थापित करने पर इस गुणनफल का परिमाण हमें प्राप्त होता है। $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

अतः $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

जहाँ $a = 3x$ और $b = 4y$
सर्वसमिका $(a + b)^2 \equiv a^2+2ab + b^2$

उदाहरण 9: 204^2 ज्ञात कीजिए।

$204^2 = (200 + 4)^2$

$= (200)^2 + 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 + 1600 + 16$

$= 41616$

जहाँ $a = 200$ और $b = 4$
सर्वसमिका $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

यह कीजिए :

ज्ञात कीजिए : (i) $(5m + 7n)^2$ (ii) $(6kl + 7mn)^2$ (iii) $(5a^2 + 6b^2)^2$ (iv) 302^2
(v) 807^2 (vi) 704^2

(vii) सर्वसमिका : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, की जाँच कीजिए, जहाँ $a = 3m$ और $b = 5n$

उदाहरण 10: $(3m - 5n)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : $(3m - 5n)^2 = (3m)^2 - 2(3m)(5n) + (5n)^2$

$= 9m^2 - 30mn + 25n^2$

जहाँ $a = 3m$ और $b = 5n$
सर्वसमिका: $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 11: 196^2 ज्ञात कीजिए।

> जहाँ $a = 200$ और $b = 4$
> सर्वसमिका : $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

$196^2 = (200 - 4)^2$

$= 200^2 - 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 - 1600 + 16$

$= 38416$

यह कीजिए :

ज्ञात कीजिए : (i) $(9m - 2n)^2$ (ii) $(6pq - 7rs)^2$ (iii) $(5x^2 - 6y^2)^2$

(iv) 292^2 (v) 897^2 (vi) 794^2

उदाहरण 12: ज्ञात कीजिए $(4x + 5y)(4x - 5y)$

> जहाँ $a = 4x$ और $b = 5y$
> सर्वसमिका : $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$

हल : $(4x + 5y)(4x - 5y) = (4x)^2 - (5y)^2$

$= 16x^2 - 25y^2$

उदाहरण 13: ज्ञात कीजिए 407×393

> जहाँ $a = 400$ और $b = 7$
> सर्वसमिका: $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$

हल : $407 \times 393 = (400 + 7)(400 - 7)$

$= 400^2 - 7^2$

$= 160000 - 49$

$= 159951$

उदाहरण 14: ज्ञात कीजिए $987^2 - 13^2$

> जहाँ $a = 987$ और $b = 13$
> सर्वसमिका: $a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$

हल : $987^2 - 13^2 = (987 + 13)(987 - 13)$

$= 1000 \times 974 = 974000$

इन्हें कीजिए :

ज्ञात कीजिए : (i) $(6m + 7n)(6m - 7n)$ (ii) $(5a + 10b)(5a - 10b)$

(iii) $(3x^2 + 4y^2)(3x^2 - 4y^2)$ (iv) 106×94 (v) 592×608 (vi) $92^2 - 8^2$

(vii) $984^2 - 16^2$

उदाहरण 15: ज्ञात कीजिए 302×308

> जहाँ $x = 300$, $a = 2$ और $b = 8$ सर्वसमिका : $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

हल : $302 \times 308 = (300 + 2)(300 + 8)$

$= 300^2 + (2 + 8)(300) + (2)(8)$

$= 90000 + (10 \times 300) + 16$

$= 90000 + 3000 + 16 = 93016$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 16: ज्ञात कीजिए 93 × 104

जहाँ $x = 100$ $a = -7$ और $b = 4$
सर्वसमिका: $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

हल :

$$93 \times 104 = (100 + (-7))(100 + 4)$$
$$93 \times 104 = (100 - 7)(100 + 4)$$
$$= 100^2 + (-7 + 4)(100) + (-7)(4)$$
$$= 10000 + (-3)(100) + (-28)$$
$$= 10000 - 300 - 28$$
$$= 10000 - 328 = 9672$$

क्या तुमने ध्यान दिया? सर्वसमिकाओं के उपयोग द्वारा गुणनफल ज्ञात करना, प्रत्यक्ष गुणन से गुणनफल ज्ञात करने की अपेक्षा अधिक आसान है।

अभ्यास - 11.4

1. उचित सर्वसमिका का चयन कीजिए और निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) $(3k + 4l)(3k + 4l)$ (ii) $(ax^2 + by^2)(ax^2 + by^2)$
   (iii) $(7d - 9e)(7d - 9e)$ (iv) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$
   (v) $(3t + 9s)(3t - 9s)$ (vi) $(kl - mn)(kl + mn)$
   (vii) $(6x + 5)(6x + 6)$ (viii) $(2b - a)(2b + c)$
2. उपर्युक्त सर्वसमिका के उपयोग द्वारा निम्न का मूल्यांकन कीजिए :
   (i) 304^2 (ii) 509^2 (iii) 992^2 (iv) 799^2
   (v) 304×296 (vi) 83×77 (vii) 109×108 (viii) 204×206

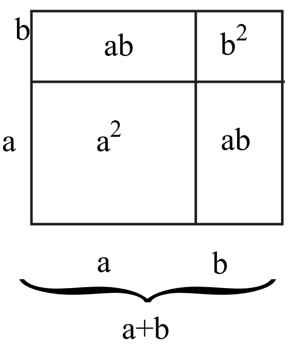
11.10 सर्वसमिकाओं का ज्यामितीय सत्यापन :

11.10.1 सर्वसमिका $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ की ज्यामितीय जाँच :

निम्न वर्ग को ध्यान से देखिए :

माना कि वर्ग की भुजा $(a + b)$

इसका क्षेत्रफल = भुजा का वर्ग = $(\mathbf{a + b})^2$



आकृति में बताया गया जैसे वर्ग को चार भागों में विभाजित किया।

इसमें क्रमशः 'a' और 'b' भुजाओं के दो वर्ग और दो आयत जिनकी a+b लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 'a' और 'b' है।

स्पष्टतः, दिये गये वर्ग का क्षेत्रफल, इन चारों भागों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होगा।

SCERT TELANGANA

वर्ग का क्षेत्रफल

= a भुजाके वर्ग का क्षेत्रफल + 'b' भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल +a और b भुजाओं के आयत का क्षेत्रफल +b और a भुजाओं के आयत का क्षेत्रफल

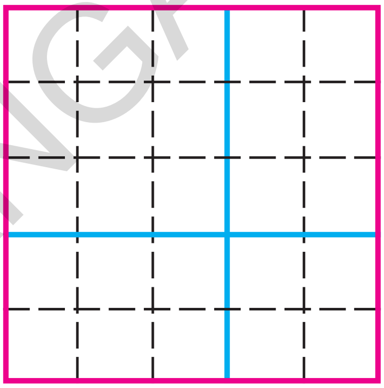
= $a^2 + ab + ba + b^2$

= $a^2 + 2ab + b^2$

क्षेत्रफल, $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

उदाहरण 17: सर्वसमिका $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ की $a = 3$ और $b = 2$ लेते हुए ज्यामितीय रूप से जाँच कीजिए।

हल : $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$



$a + b = 3 + 2$ भुजा का एक वर्ग बनाईए।

L.H.S. = पूर्म वर्ग का क्षेत्रफल

= $(3+2)^2 = 5^2 = 25$

R.H.S. = 3 इकाई भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल

2 इकाई भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल

+ 3 इकाइ, 2 इकाईयों के आयत का क्षेत्रफल

+ 2 इकाइ, 3 इकाईयों के आयत का क्षेत्रफल

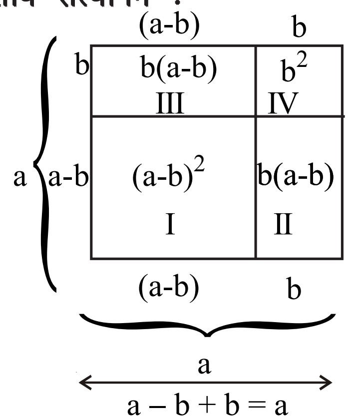
= $3^2 + 2^2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$

= $9 + 4 + 6 + 6 = 25$

L.H.S. = R.H.S.

∴ अतः सर्वसमिका का सत्यापन सिद्ध हुआ।

11.10.2 सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का ज्यामितीय सत्यापन :



माना कि वर्ग की भुजा a.

- वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = a^2
- वर्ग को चार भागें में विभाजित किया।
- इसमें क्रमशः a – b भुजा और b भुजा के दो वर्ग और दो आयत जिनकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 'a – b' और 'b' हैं।

SCERT TELANGANA

अब, आकृति I का क्षेत्रफल = 'a' भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल

- आकृति II का क्षेत्रफल - आकृति III का क्षेत्रफल – आकृति IV का क्षेत्रफल

$(a-b)^2 \quad = a^2 - b\,(a-b) - b\,(a-b) - b^2$

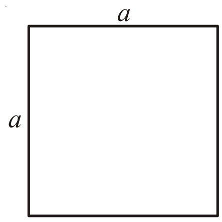
$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

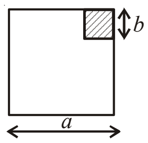
11.10.3 सर्वसमिका $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$ का ज्यामितीय सत्यापन

$a^2 - b^2$ = ('a' भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल) – ('b'भुजा वर्ग का क्षेत्रफल)

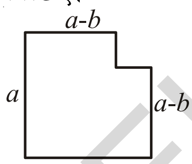
निम्न आकृति ध्यानपूर्वक देखिए :



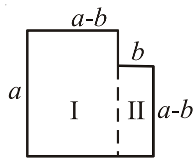
इसमें से b ($b < a$) भुजा का वर्ग काटिए।



हमें प्राप्त होता है



इसमें दो भाग है



अतः $a^2 - b^2$ = आकृति I का क्षेत्रफल + आकृति II का क्षेत्रफल

$= a\,(a - b) + b\,(a - b)$

$= (a - b)\,(a + b)$

इस तरह, $a^2 - b^2 \equiv (a - b)\,(a + b)$

अभ्यास - 11.5

1. सर्वसमिका $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ का ज्यामितीय रूप से निम्न नाप लेते हुए सत्यापन सिद्ध कीजिए।

   (i) $a = 2$ इकाइयाँ $b = 4$ इकाइयाँ (ii) $a = 3$ इकाइयाँ, $b = 1$ इकाइ

   (iii) $a = 5$ इकाइयाँ, $b = 2$ इकाइयाँ

2. ज्यामितीय रूप से निम्न नापों को लेकर सर्वसमिका $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ के सत्यापनता की जाँच कीजिए।

   (i) $a = 3$ इकाइयाँ $b = 1$ इकाइ (ii) $a = 5$ इकाइयाँ, $b = 2$ इकाइयाँ

3. सर्वसमिका $(a + b)\,(a - b) \equiv a^2 - b^2$ का ज्यामितीय रूप से निम्न नापों को लेकर सत्यापन सिद्ध कीजिए।

   (i) $a = 3$ इकाइयाँ, $b = 2$ इकाइयाँ

   (ii) $a = 2$ इकाइयाँ, $b = 1$ इकाइ

SCERT TELANGANA

हमने क्या चर्चा की :

1. कई स्थितियाँ ऐसी हैं जिनमें हमें बीजगणितीय व्यंजकों का गुणन करना आवश्यक है। उदाहरण के लिए, उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करना जिसकी भुजाएँ व्यंजकों के रूप में दी हैं।
2. एकपदी को एकपदी से गुणा करने पर हमेशा एकपदी प्राप्त होता है।
3. बहुपदी को द्विपदी (अथवी त्रिपदी) से गुणा पूर्ण करते समय हम पद का पद से गुणा करते हैं, अर्थात बहुपदी के प्रत्येक पद का द्विपदी (अथवा त्रिपदी) में प्रत्येक पद से गुणा करते हैं। ध्यान दीजिए कि ऐसे गुणन में, हमें गुणा में ऐसे पद प्राप्त होना संभव है जो सजातीय रहते हैं और इनका योग करना चाहिए।
4. सर्वसमिका, एक ऐसा समीकरण है जो समीकरण में इसके चरों के सभी मानों के लिए सही रहता है।

   दूसरी ओर समीकरण इसके चरों के कुछ विशिष्ट मानों के लिए सही रहता है।
5. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ हैं :

   I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

   III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

   IV. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
6. ऊपर की चार सर्वसमिकाएँ बीजगणितीय व्यंजकों का वर्ग और गुणा के लिए उपयोगी हैं। यह संख्याओं के गुणन की गणना आदि के लिए आसान वैकल्पिक पद्धति है।

SCERT TELANGANA