समय और कार्य
(Time and Work)

कार्य पर आधारित समस्याओं को हल करने में निम्नलिखित तथ्य बड़े मददगार सिद्ध होते हैं:

(a) यदि कोई व्यक्ति 10 दिनों में कार्य पूरा कर सकता है तो 1 दिन में वह $\frac{1}{10}$ कार्य करेगा।

विलोमतः, यदि कोई व्यक्ति $\frac{1}{10}$ कार्य 1 दिन में पूरा कर सकता है तो पूरा कार्य 10 दिनों में संपन्न कर लेगा।

(b) यदि किसी कार्य को संपन्न करने में लगे व्यक्तियों की संख्या 5 : 4 के अनुपात में बदल दी जाएँ तो कार्य को पूरा करने में लगा समय 4 : 5 के अनुपात में बदल जाएगा।

(c) यदि A, B की तुलना में x गुना कर्मठ है तो A को वही कार्य करने में B की तुलना में $\frac{1}{x}$ समय लगेगा।

उपर्युक्त सभी बिन्दुओं का सारांश निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

'यदि M_1 व्यक्ति W_1 कार्य को D_1 दिनों में सम्पन्न कर सकते हों तथा M_2 व्यक्ति W_2 कार्य को D_2 दिनों में सम्पन्न कर सकते हों तो इन दोनों के बीच संबंध को एक सामान्य सूत्र के माध्यम से व्यक्त किया जा सकता है: $\mathbf{M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1}$

इस संबंध को एक आधारभूत एवं 'ऑल-इन-वन' सूत्र के रूप में स्वीकार किया जा सकता है। इसी प्रकार निम्नलिखित उक्तियाँ भी सही हैं:

(1) अधिक आदमी, कम दिन एवं विलोमतः कम आदमी, अधिक दिन।
(2) अधिक आदमी, अधिक काम एवं विलोमतः अधिक काम, अधिक आदमी।
(3) अधिक दिन, अधिक काम एवं विलोमतः अधिक काम, अधिक दिन।

यदि हम कार्य करने के घंटों को (यानि T_1 एवं T_2) को भी उपर्युक्त दोनों समूहों में शामिल कर लेते हैं तो संबंध निम्नलिखित होगा:

$$\mathbf{M_1D_1T_1W_2=M_2D_2T_2W_1}$$

पुनः, यदि दोनों समूहों में व्यक्तियों की कार्यक्षमता (यानि E_1 एवं E_2) भिन्न-भिन्न हो तो संबंध निम्नलिखित होगा:

$$\mathbf{M_1D_1T_1E_1W_2=M_2D_2T_2E_2W_1}$$

अब, हमलोग सरल से शुरू करके, जटिल एवं जटिलतर प्रश्नों को हल करने का प्रयास करेंगे।

उदा. 1: A कोई कार्य 5 दिनों में पूरा कर सकता है। उसी तरह के तीन कार्यों को पूरा करने में उसे कितना वक्त लगेगा ?

हल: आप स्मरण करें, इस उक्ति का: 'अधिक काम, अधिक दिन'।

इसका सीधा अर्थ है कि गुणा करने से उत्तर प्राप्त हो जाएगा।

∴ अभीष्ट समय = 5 × 3 = 15 दिन

इस तरह से सवालों को हल करना बड़ा सरल है। पर यह जान लेना बेहतर रहेगा कि ऐसे सवालों के संदर्भ में मूल सूत्र $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ का इस्तेमाल किस प्रकार किया जाता है।

चूँकि दोनों स्थितियों में 'A' ही कार्य करता है।

$M_1 = M_2 = 1$ (इसे नजरंदाज किया जा सकता है।)

$D_1 = 5$ दिन, $W_1 = 1, D_2 = ?$ एवं $W_2 = 3$

इन मानों को सूत्र में रखने पर,

$5 \times 3 = D_2 \times 1$

$D_2 = 15$ दिन

उदा. 2: 16 व्यक्ति किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा कर सकते हैं। उसी कार्य को 40 दिनों में संपन्न करने के लिए कितने व्यक्ति चाहिए होंगे ?

हल: 10 दिनों में कार्य पूरा करने के लिए 16 व्यक्ति चाहिए

∴ 40 दिनों में कार्य पूरा करने के लिए $\frac{16 \times 10}{40} = 4$ व्यक्ति चाहिए

पर यह तरीका वस्तुनिष्ठ प्रश्नों वाले परीक्षाओं में इस्तेमाल नहीं किया जा सकता। यहाँ हम यह देखते हैं कि मौलिक सूत्र : $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ किस तरह काम करता है?

$M_1 = 16, D_1 = 10, W_1 = 1$ एवं $M_2 = ?, D_2 = 40, W_2 = 1$

∴ सूत्र: $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ से,

$16 \times 10 = M_2 \times 40$

या, $M_2 = \frac{16 \times 10}{40} = 4$ व्यक्ति

भिन्न के नियम से: कार्य को 40 दिनों में पूरा करने के लिए 10 से कम व्यक्ति चाहिए होंगे। इसलिए, 10 में किसी ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से कम हो।

और यह भिन्न है $\frac{10}{40}$। इसलिए व्यक्तियों की अभीष्ट संख्या $= \frac{16 \times 10}{40} = 4$

उदा. 3: 40 व्यक्ति 60 वृक्षों को 8 घंटे में काट सकते हैं। यदि 8 व्यक्ति कार्य छोड़ दें तो 12 घंटे में कितने वृक्ष काट लिए जाएँगे ?

हल: 40 व्यक्ति 8 घंटे कार्य करके 60 वृक्ष काटते हैं।

या, 1 व्यक्ति 1 घंटा कार्य करके $\frac{60}{40 \times 8}$ वृक्ष काटता है।

∴ 32 व्यक्ति 12 घंटे कार्य करके $\frac{60 \times 32 \times 12}{40 \times 8} = 72$ वृक्ष काट सकते हैं।

मौलिक सूत्र $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ से,

$M_1 = 40, D_1 = 8$ (क्योंकि दिन और घंटे दोनों समय को सूचित करते हैं)
$W_1 = 60$ (वृक्षों की संख्या को कार्य माना जा सकता है।)
$M_2 = 40 - 8 = 32$
$D_2 = 12$
$W_2 = ?$
इन मानों को सूत्र में रखने पर, $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$
या, $40 \times 8 \times W_2 = 32 \times 12 \times 60$

या, $W_2 = \frac{32 \times 12 \times 60}{40 \times 8} = 72$ वृक्ष

भिन्न के नियम से:
पहले वहाँ 40 व्यक्ति थे, पर जब 8 व्यक्ति काम छोड़कर चले गए तो मात्र 32 व्यक्ति बचे। जैसे-जैसे व्यक्तियों की संख्या घटती जाती है, काटे गए वृक्षों की संख्या भी कम पड़ती जाएगी। इसलिए 60 में ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से कम हो और यह भिन्न है $\frac{32}{40}$। साथ ही, जैसे-जैसे घंटे की संख्या बढ़ती जाती है, काटे गए वृक्षों की संख्या भी बढ़नी चाहिए। इसलिए उपर्युक्त गुणनफल में ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से अधिक हो, और वह भिन्न है $\frac{12}{8}$।

इसलिए वृक्षों की अभीष्ट संख्या $= 60 \left[\frac{32}{40}\right]\left[\frac{12}{8}\right] = 72$ वृक्ष

नोट: आरंभिक चरणों को लिखे बिना इस सवाल को हल करने की कोशिश करें।

उदा. 4: 5 व्यक्ति 6 दिनों तक 6 घंटे प्रति दिन कार्य कर के 10 खिलौने तैयार कर सकते हैं तो कितने दिनों में 12 व्यक्ति 8 घंटे प्रति दिन कार्य करके 16 खिलौने तैयार कर सकेंगे ?

हल: इस उदाहरण में एक अतिरिक्त चर राशि 'समय (घंटा प्रति दिन)' है। इसलिए मौलिक सूत्र $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ यहाँ लागू नहीं हो सकता। इसलिए यहाँ एक विस्तृत सूत्र दिया जा रहा है:
$M_1D_1T_1W_2 = M_2D_2T_2W_1$
यहाँ, $5 \times 6 \times 6 \times 16 = 12 \times D_2 \times 8 \times 10$

$\therefore D_2 = \frac{5 \times 6 \times 6 \times 16}{12 \times 8 \times 10} = 4$ दिन

नोट: उपर्युक्त उदाहरण में खिलौने की संख्या को कार्य के रूप में समझा जाता है।

भिन्न के नियम से: निम्नलिखित चरणों को देखें:

1. हमलोगों को दिनों की संख्या ज्ञात करनी है, इसलिए दिनों की प्रदत्त संख्या सबसे पहले लिखें।

2. मनुष्यों की संख्या बढ़ रही है $\Rightarrow$ कार्य करने में अपेक्षाकृत कम दिन लगेंगे $\Rightarrow$ गुणक भिन्न 1 से कम होना चाहिए, और यह भिन्न है $\frac{5}{12}$.
3. खिलौने की संख्या बढ़ रही है $\Rightarrow$ बनाने में अधिक दिन लगेंगे $\Rightarrow$ गुणक भिन्न 1 से अधिक होना चाहिए और यह भिन्न है $\frac{16}{10}$.
4. कार्य करने के घंटे बढ़ रहे हैं $\Rightarrow$ दिनों की संख्या कम हो जाएगी $\Rightarrow$ गुणक भिन्न 1 से कम होना चाहिए और यह भिन्न है $\frac{6}{8}$.

$\therefore$ दिनों की अभीष्ट संख्या = $6\left[\frac{5}{12}\right]\left[\frac{16}{10}\right]\left[\frac{6}{8}\right]=3$ दिन

नोट: यदि आप भिन्न वाली इस विधि को अच्छी तरह समझ लें, तो आपका लेखन कार्य कम हो जाएगा और आप केवल $6\left[\frac{5}{12}\right]\left[\frac{16}{10}\right]\left[\frac{6}{8}\right]=3$ दिन लिखकर काम चला सकेंगे।

प्रमेय: यदि A किसी कार्य को x दिनों में संपन्न कर सकता है और B उसी कार्य को y दिनों में पूरा कर सकता है तो A और B दोनों मिलकर उसी कार्य को $\frac{xy}{x+y}$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

प्रमाण: A, 1 दिन में $\frac{1}{x}$ कार्य कर सकता है।

B, 1 दिन में $\frac{1}{y}$ कार्य कर सकता है।

$\therefore$ A + B मिलकर 1 दिन में $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ कार्य कर सकते हैं।

$\therefore$ (A + B) पूरे कार्य को $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

$$= \frac{1}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{xy}{x+y}$$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

उदा. 5: A कोई कार्य 5 दिनों में पूरा कर सकता है तथा B उसी कार्य को 6 दिनों में पूरा कर सकता है। यदि दोनों मिलकर कार्य करें तो उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा कर सकेंगे ?

हल: A, 1 दिन में $\frac{1}{5}$ कार्य कर सकता है।

B, 1 दिन में $\frac{1}{6}$ कार्य कर सकता है।

इसलिए A एवं B दोनों मिलकर 1 दिन में $\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right]$ कार्य कर सकते हैं।

$\therefore$ A एवं B दोनों मिलकर पूरा कार्य $\frac{1}{\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right]}$ दिनों में पूरा कर सकेंगे।

$$\frac{1}{\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right]} = \frac{30}{11} = 2\frac{8}{11} \text{ दिन}$$

प्रमेय से, A और B इस कार्य को $\frac{5\times 6}{5+6}$ दिनों $=\frac{30}{11}$ दिनों $=2\frac{8}{11}$ दिनों में पूरा कर सकेंगे।

प्रमेय: यदि A, B एवं C किसी कार्य को क्रमशः x, y एवं z दिनों में संपन्न करते हैं तो सब एक साथ मिलकर उसी कार्य को $\frac{xyz}{zy+yz+zx}$ दिनों में पूरा कर सकेंगे।

प्रमाण: स्वयं कोशिश करें।

उदा. 6: उपर्युक्त प्रश्न में C, जो 12 दिनों में कार्य संपन्न कर सकता है, भी शामिल हो जाए, तो कार्य को पूरा करने में कितना समय लगेगा?

हल: ***प्रमेय से:***

A, B एवं C उस कार्य को

$$\frac{5\times 6\times 12}{5\times 6+6\times 12+5\times 12} = \frac{360}{162} = 2\frac{2}{9} \text{ दिनों में संपन्न कर सकते हैं।}$$

नोट: उदा.-5 एवं उदा.-6 में आपने सूत्र की उपयोगिता को परख लिया होगा ? इस विधि से अन्य उदाहरणों को भी हल करने की कोशिश करें।

उदा. 7: मोहन जिस काम को 10 दिनों में पूरा कर सकता है, रमेश उसी काम को 15 दिनों में पूरा कर सकता है। यदि दोनों मिलकर कार्य करें तो कितना वक्त लगेगा ?

हल: अभीष्ट समय $= \frac{10\times 15}{10+15} = \frac{150}{25} = 6$ दिन

उदा. 8: उपर्युक्त प्रश्न में, सुरेश, जो उसी कार्य को 30 दिनों में पूरा कर सकता है, शामिल हो जाता है, तो कार्य कितने दिनों में पूरा होगा ?

हल: अभीष्ट समय $= \frac{10\times15\times30}{10\times15+10\times30+15\times30} = \frac{10\times15\times30}{900} = 5$ दिन

प्रमेय: यदि A और B मिलकर किसी काम को x दिनों में पूरा कर सकते हों तथा अकेले A उसी काम को y दिनों में पूरा कर सकता हो तो B अकेले उस काम को $\frac{xy}{y-x}$ दिनों में पूरा करेगा।

प्रमाण: स्वयं प्रयत्न करें।

उदा. 9: A और B मिलकर किसी काम को 6 दिनों में पूरा कर सकते हैं तथा A अकेले उसे 9 दिनों में पूरा कर सकता है तो B अकेले उसे कितने दिनों में संपन्न करेगा ?

हल: A और B 1 दिन में $\frac{1}{6}$ कार्य पूरा कर सकते हैं।

A अकेला 1 दिन में $\frac{1}{9}$ कार्य कर सकता है।

$\therefore$ B अकेला 1 दिन में $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{18}$ कार्य कर सकता है।

$\therefore$ अकेला B पूरे कार्य को $\frac{6\times9}{9-6}=\frac{54}{3}=18$ दिनों में संपन्न कर सकता है।

सूत्र से:

B अकेला उस काम को $\frac{6\times9}{9-6}=\frac{54}{3}=18$ दिन

उपर्युक्त सूत्र के विविध उपयोग

उदा. 10: A और B किसी कार्य को 12 दिनों में संपन्न कर सकते हैं, B और C उसी को 15 दिनों में तथा C और A मिलकर 20 दिनों में। यदि इनमें से प्रत्येक उस कार्य को अलग–अलग संपन्न करना चाहें तो उन्हें कितना समय लगेगा ?

हल: A + B, 12 दिनों में कार्य पूरा कर सकते हैं।
B + C, 15 दिनों में कार्य पूरा कर सकते हैं।
A + C, 20 दिनों में कार्य पूरा कर सकते हैं।

प्रमेय से: 2(A + B + C) इस कार्य को $\frac{12\times15\times20}{12\times15+12\times20+15\times20} = 5$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

$\therefore$ A + B + C इसे $5\times2=10$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

($\because$ कम आदमी, अधिक दिन)

अब, A इसी कार्य को $\frac{10 \times 15}{15-10} = 30$ दिनों में पूरा कर सकता है।

(उदा.-7 की तरह)

[क्योंकि $A = (A + B + C) - (B + C)$]

B इसी कार्य को $\frac{10 \times 20}{20-10} = 20$ दिनों में पूरा कर सकता है।

[$\because B = (A + B + C) - (A + C)$]

C इसी कार्य को $\frac{10 \times 12}{12-10} = 60$ दिनों में पूरा कर सकता है।

[$\because C = (A + B + C) - (A + B)$]

बारी-बारी से कार्य करना (Working alternately)

उदा. 11: दो महिलाएँ गंगा और सरस्वती अलग-अलग कार्य करके फसल क्रमशः 8 एवं 12 घंटों में काट सकती हैं। यदि वे बारी-बारी से एक-एक घंटा कार्य करें तथा गंगा 9 बजे फसल काटना शुरू करे तो कटनी कब तक समाप्त हो जाएगी ?

हल: पहले घंटे में गंगा ने $\frac{1}{8}$ फसल की कटनी की।

दूसरे घंटे में सरस्वती ने $\frac{1}{12}$ फसल की कटनी की।

इस प्रकार पहले दो घंटे में $\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right] = \frac{5}{24}$ फसल काटी जा चुकी होगी।

$\therefore$ 8 घंटे में $\frac{5}{24} \times 4 = \frac{5}{6}$ फसल कट चुकी होगी। .... (*)

अब, $\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}$ फसल काटना शेष है।

9वें घंटे में गंगा $\frac{1}{8}$ फसल काट लेती है।

$\therefore$ सरस्वती $\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right] = \frac{1}{24}$ फसल $\frac{1}{24} \div \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ घंटे में काट लेगी।

$\therefore$ फसल काटने में लगा कुल समय $= \left[8 + 1 + \frac{1}{2}\right] = 9\frac{1}{2}$ घंटे

$\therefore$ काम $= 9 + 9\frac{1}{2} = 18\frac{1}{2}$ या $6\frac{1}{2}$ बजे अपराह्न में समाप्त हो जाएगा।

नोट: (*): हमलोगों ने केवल 4 जोड़े घंटे के लिए ही कार्य की गणना की क्योंकि यदि 5 जोड़े घंटे के लिए कार्य की गणना की जाए तो किया गया कार्य 1 से अधिक होगा। इस प्रकार से प्राप्त नतीजा निरर्थक होगा।

उदा. 12: A आर B किसी कार्य को 12 दिनों में संपन्न कर सकते हैं तथा B और C मिलकर 16 दिनों में। A के 5 दिनों तक कार्य करने तथा B को 7 दिनों तक कार्य करने के बाद इसमें C शामिल होता है तथा शेष कार्य को अकेले 13 दिनों में संपन्न कर लेता है। कितने दिनों में ये तीनों इस कार्य को अकेले-अकेले संपन्न कर लेंगे?

हल: A और B 1 दिन में $\frac{1}{12}$ कार्य करते हैं।

B और C 1 दिन में $\frac{1}{16}$ कार्य करते हैं।

प्रश्नानुसार,

A के 5 दिनों का कार्य + B के 7 दिनों का कार्य + C के 13 दिनों का कार्य = 1

या, A के 5 दिनों का कार्य + B के 5 दिनों का कार्य + B के 2 दिनों का कार्य + C के 2 दिनों का कार्य + C के 11 दिनों का कार्य = 1

$\therefore$ (A + B) के 5 दिनों का कार्य + (B + C) के 2 दिनों के कार्य + C के 11 दिनों का कार्य = 1

$\therefore \frac{5}{12}+\frac{2}{16}+$ C के 11 दिनों का कार्य = 1

$\therefore$ C के 11 दिन का कार्य $= 1-\left[\frac{5}{12}+\frac{2}{16}\right]=\frac{11}{24}$

$\therefore$ C के 1 दिन का कार्य $=\frac{11}{24\times 11}=\frac{1}{24}$

B के 1 दिन का कार्य $=\frac{1}{16}-\frac{1}{24}=\frac{1}{48}$

A के 1 दिन का कार्य $=\frac{1}{12}-\frac{1}{48}=\frac{1}{16}$

$\therefore$ A, B और C अलग-अलग इस काम को क्रमशः 16, 48 एवं 24 दिनों में संपन्न कर सकते हैं।

उदा. 13: किसी कार्य को करने में B को A और C साथ मिलकर जितने दिनों में उस काम को करते हैं उसका तीन गुना समय लगता है तथा C को A और B के द्वारा लिए गए समय का दुगुना। तीनों व्यक्ति साथ मिलकर इस कार्य को 10 दिनों में पूरा कर लेते हैं। प्रत्येक व्यक्ति अलग-अलग इस कार्य को कितनी अवधि में पूरा कर लेंगे?

हल: प्रश्नानुसार,

B के दैनिक कार्य का 3 गुना = (A + C) का दैनिक कार्य

B का दैनिक कार्य दोनों तरफ जोड़ दें।

B के दैनिक कार्य का 4 गुना = (A + B + C) का दैनिक कार्य = $\frac{1}{10}$

$\therefore$ B का दैनिक कार्य = $\frac{1}{40}$

इसी तरह,

C के दैनिक कार्य का 2 गुना = (A + B) का दैनिक कार्य

दोनों ओर C का दैनिक कार्य जोड़ने पर,

C के दैनिक कार्य का 3 गुना = (A + B + C) का दैनिक कार्य = $\frac{1}{10}$

$\therefore$ C का दैनिक कार्य = $\frac{1}{30}$

अब, A का दैनिक कार्य $= \frac{1}{10} - \left[\frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right] = \frac{1}{24}$

$\therefore$ A, B एवं C इस कार्य को क्रमशः 24, 40 एवं 30 दिनों में पूरा कर सकते हैं।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

कार्य करने में B द्वारा लिया गया समय = (A + B + C द्वारा लिया गया समय) × (3 + 1)

= 10 (3 + 1) = 40 दिन

इसी तरह, C द्वारा लिया गया समय = 10 (2 + 1) = 30 दिन

तथा A द्वारा लिया गया समय $= \frac{1}{\frac{1}{10} - \left[\frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right]} = 24$ दिन

उदा. 14: यदि 3 पुरुष या 4 महिलाएँ किसी खेत को 43 दिनों में काटती हैं तो 7 पुरुष एवं 5 महिलाएँ उसी खेत को कितने दिनों में काटेंगे?

हल: ***पहली विधि***

3 मनुष्य खेत का $\frac{1}{43}$ भाग 1 दिन में काटते हैं।

$\therefore$ 1 मनुष्य खेत का $\frac{1}{43 \times 3}$ भाग 1 दिन में काटेगा।

4 महिलाएँ खेत का $\frac{1}{43}$ भाग 1 दिन में काटती हैं।

$\therefore$ 1 महिला खेत का $\frac{1}{43 \times 4}$ भाग 1 दिन में काटेगी।

$\therefore$ 7 पुरुष एवं 5 महिलाएँ 1 दिन में $\left(\frac{7}{43 \times 3}+\frac{5}{43 \times 4}\right)=\frac{1}{12}$ खेत काटते हैं।

$\therefore$ 7 पुरुष एवं 5 महिलाएँ पूरा खेत 12 दिनों में काटेंगे

दूसरी विधि

3 पुरुष = 4 महिलाएँ

$\therefore$ 1 पुरुष = $\frac{4}{3}$ महिलाएँ

$\therefore$ 7 पुरुष = $\frac{28}{3}$ महिलाएँ

$\therefore$ 7 पुरुष + 5 महिलाएँ $=\frac{28}{3}+5=\frac{43}{3}$ महिलाएँ

अब प्रश्न कुछ इस प्रकार हो जाता है

यदि 4 महिलाएँ खेत को 43 दिनों में काटती हैं तो $\frac{43}{3}$ महिलाएँ इसे कितने दिनों में काटेंगी?

मौलिक सूत्र से,

$$4 \times 43=\frac{43}{3} \times D2$$

$$\therefore D_2=\frac{4 \times 43 \times 3}{13}=12 \text{ दिन}$$

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

$$\text{दिन की अभीष्ट संख्या} =\frac{1}{\left[\frac{7}{43 \times 3}+\frac{5}{43 \times 4}\right]}=\frac{43 \times 3 \times 4}{7 \times 4+5 \times 3}=12 \text{ दिन}$$

नोट: उपर्युक्त सूत्र का स्मरण रखना बड़ा आसान है।

यदि प्रश्न को दो हिस्सों में विभाजित कर दें और पहले हिस्से को 'अथवा (OR) – हिस्सा' तथा दूसरे को 'और (AND) – हिस्सा' कहें तो,

$$\frac{7}{43 \times 3}=\frac{\text{'और (AND)} - \text{हिस्सा' में पुरुषों की संख्या}}{\text{दिनों की संख्या} \times \text{'अथवा (OR)} - \text{हिस्सा' में पुरुषों की संख्या}}$$

इसी तरह आप हर के दूसरे हिस्से का भी पता लगा सकते हैं।

उदा. 15: यदि 12 पुरुष एवं 16 बच्चे किसी कार्य को 5 दिनों में कर सकते हों तथा 13 पुरुष एवं 24 बच्चे उसे 4 दिनों में कर सकते हों तो 7 पुरुष एवं 10 बच्चों को वही कार्य करने में कितना वक्त लगेगा ?

हल: 12 पुरुष एवं 16 बच्चे कार्य को 5 दिनों में कर सकते हैं। .... (1)

13 पुरुष एवं 24 बच्चे उसी कार्य को 4 दिनों में संपन्न कर सकते हैं। .... (2)

अब, यह समझना आसान है कि कार्य करनेवालों की संख्या को किसी संख्या से गुणा किया जाता है तो समय में उसी संख्या से भाग अवश्य दिया जाना चाहिए। ('अधिक कार्यकर्ता, कम समय' वाले नियम से)। इसलिए समीकरण (1) एवं (2) में क्रमशः 5 एवं 4 से गुणा करने पर,

5 (12 पुरुष + 16 बच्चे) उस काम को $\frac{5}{5}=1$ दिन में कर सकते हैं।

4 (13 पुरुष + 12 बच्चे) उस कार्य को $\frac{4}{4}=1$ दिन में कर सकते हैं।

यदि पुरुष = पु. एवं बच्चा = ब., तो

या, 5(12 पु. + 16 ब.) = 4(13 पु. + 24 ब.)

या, 60 पु. + 80 ब. = 52 पु. + 96 ब. ......(*)

या, 60 पु. – 52 पु. = 96 ब. – 80 ब.

या, 8 पु. = 16 ब.

∴ 1 पुरुष = 2 बच्चे

इस प्रकार,

12 पुरुष + 16 बच्चे = 24 बच्चे + 16 बच्चे = 40 बच्चे

तथा, 7 पुरुष + 10 बच्चे = 14 बच्चे + 10 बच्चे = 24 बच्चे

अब, दिए गए प्रश्न का स्वरूप कुछ इस प्रकार हो जाता है:

यदि 40 बच्चे किसी कार्य को 5 दिनों में कर सकते हों तो 24 बच्चे उसी कार्य को कितने दिनों में संपन्न करेंगे ?

'मौलिक सूत्र' से

$$40 \times 5 = 24 \times D_2 \text{ .... } (*)\ (*)$$

या, $$D_2 = \frac{40 \times 5}{24} = 8\frac{1}{3} \text{ दिन}$$

नोट: अभ्यास के दौरान (*) को पहले चरण के रूप में लिखा जाना चाहिए। शेष गणना मन में ही संपन्न करें। एक बार आपको यह पता भर चल जाए कि 1 पुरुष = 2 बच्चे, तो आपका अगला कदम (*) (*) होना चाहिए। इस प्रकार आप पल भर में नतीजे तक पहुँच सकते हैं।

उदा. 16: कुछ खास व्यक्ति मिलकर किसी कार्य को 60 दिनों में संपन्न कर सकते हैं। यदि इसमें 8 और व्यक्ति शामिल होते तो कार्य पूरा होने में 10 दिन कम लगता। काम के लिए कितने आदमी रखे गए थे?

हल: मान लिया कि मूलतः x लोगों ने काम शुरू किया था।
$(x+8)$ व्यक्ति इसे $(60-10) = 50$ दिनों में पूरा करते हैं।
अब 8 आदमी जितना काम 50 दिनों में करते हैं उतना ही काम x आदमी 10 दिन में करते हैं।
∴ 'मौलिक सूत्र' से,
$8 \times 50 = x \times 10$

$\therefore\ x = \frac{8 \times 50}{10} = 40$ व्यक्ति

***दूसरी विधि* (Another Approach):** x आदमी कार्य को 60 दिनों में तथा $(x+8)$ आदमी कार्य को $(60-10=)$ 50 दिनों में करते हैं तो मौलिक सूत्र से,
$60x = 50(x+8)$

$\therefore\ x = \frac{50 \times 8}{10} = 40$ आदमी

***द्रुत विधि* (Quicker Method):** यहाँ प्रदत्त एवं अभीष्ट आँकड़ों के बीच एक विशेष संबंध पाया जाता है:
श्रमिकों की (वास्तविक) संख्या

$$= \frac{\text{श्रमिकों की अतिरिक्त संख्या} \times \text{दूसरे दल को कार्य करने में लगा समय}}{\text{जितने कम दिन लगे}}$$

$$= \frac{8 \times (60-10)}{10} = \frac{8 \times 50}{10} = 40 \text{ पुरुष}$$

उदा. 17: A की कार्यक्षमता B की तीन गुनी है। इसलिए A को कार्य पूरा करने में B से 60 दिन कम लगते हैं। यदि दोनों साथ मिलकर काम करें तो कार्य कितने दिनों में संपन्न कर लेंगे?

हल: 'A की कार्यक्षमता, B की तिगुनी है' से तात्पर्य यह है कि A यदि किसी कार्य को 1 दिन में पूरा करता है तो B उसी को 3 दिनों में पूरा करेगा।
इसलिए, यदि कार्य करने के दिनों में 2 दिनों का अंतर हो तो A उस कार्य को 1 दिन में करता है एवं B 3 दिनों में।
लेकिन यहाँ अंतर 60 दिनों का है।
इसलिए A उस कार्य को 30 दिनों में पूरा करेगा एवं B 90 दिनों में।

तथा A एवं B दोनों मिलकर उस कार्य को $\frac{30 \times 90}{30+90} = \frac{45}{2} = 22.5$ दिनों में पूरा करेंगे।

उदा. 18: यदि मैं 8 घंटे प्रतिदिन कार्य करके किसी कार्य को 15 दिनों में पूरा कर सकता हूँ तथा यदि आप 9 घंटे प्रतिदिन कार्य करें तो इसे $6\frac{2}{3}$ दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि हम दोनों साथ-साथ 10 घंटे कार्य करें, तो काम कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा ?

हल: सर्वप्रथम मान लें, हम में से प्रत्येक व्यक्ति प्रतिदिन मात्र 1 घंटा कार्य करता है। तब मैं इस कार्य को $(15 \times 8 =)$ 120 दिनों में संपन्न कर सकता हूँ और आप इसे $\left(\frac{20}{3} \times 9 = \right) 60$ दिनों में पूरा कर पाएँगे।

हम दोनों मिलकर इस कार्य को $\left(\frac{120 \times 60}{120 + 60} = \right) 40$ दिनों में पूरा कर लेंगे।

पर, यदि हम दोनों प्रतिदिन 10 घंटे कार्य करें तो काम मात्र 4 दिनों में समाप्त हो जाएगा।

उदा. *19:* A किसी काम को 6 दिनों में पूरा करता है एवं B 8 दिनों में। C को यही कार्य पूरा करने में ठीक उतने ही दिन लगते हैं, जितने दिनों में A एवं B मिलकर इसे पूरा करते हैं। यदि B एवं C मिलकर कार्य करें तो यही कार्य कितने दिनों में पूरा हो जाएगा?

हल: (A + B) इस कार्य को $\left(\frac{6 \times 8}{6 + 8} = \right) \frac{24}{7}$ दिनों में पूरा करेंगे।

C को यही कार्य करने में $\frac{24}{7}$ दिन लगते हैं।

$\therefore$ (B + C) यह काम $\frac{\frac{24}{7} \times 8}{\frac{24}{7} + 8} = \frac{24 \times 8}{24 + 56} = 2\frac{2}{5}$ दिनों में पूरा करेंगे।

उदा. *20:* A की कार्यक्षमता B की दुगुनी है। दोनों मिलकर वे 14 दिनों में काम पूरा कर लेते हैं। दोनों अलग-अलग इस काम को कितने दिनों में पूरा कर लेंगे ?

हल: मान लिया कि B इस कार्य को $2x$ दिनों में पूरा करता है। चूँकि A की कार्यक्षमता B की तुलना में दुगुनी है, इसलिए A उसी काम को x दिनों में पूरा कर लेगा।

(A + B) इसी काम को $\frac{2x^2}{3x} = 14$ दिनों में पूरा करते हैं।

या, $x = 21$

इस प्रकार A इस कार्य को 21 दिनों में कर सकता है और B इसे 42 दिनों में पूरा करेगा।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

यदि (2 + 1) गुना कार्यक्षमता वाला व्यक्ति किसी कार्य को 14 दिनों में पूरा करता है तो 1 गुना कार्यक्षमता वाला व्यक्ति उसे $14 \times 3 = 42$ दिनों में पूरा करेगा तथा दुगुना कार्यक्षमता वाला व्यक्ति उसे $\frac{42}{2} = 21$ दिनों में संपन्न कर सकेगा।

नोट: जो व्यक्ति जितना अधिक कार्यक्षमता वाला होता है, उसे उतना ही कम समय लगता है। दूसरे शब्दों में, यह कहा जा सकता है कि कार्यक्षमता (E), कार्य को पूरा करने में लगे समय (D) के व्युत्क्रमानुपाती होता है। गणितीय तौर पर,

$E \propto \frac{1}{D}$ या, $E = \frac{K}{D}$, जहाँ K एक अचर (constant) है।

या, ED = अचर (constant)

या, $E_1D_1 = E_2D_2 = E_3D_3 = \ldots\ldots = E_nD_n$

उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में:

$E_1D_1 = E_2D_2 = E_3D_3$

या, $3 \times 14 = 2 \times 21 = 1 \times 42$

इस प्रकार उपर्युक्त कथन की सार्थकता सिद्ध हो जाती है।

उदा. 21: 5 पुरुष एवं 2 बच्चे मिलकर प्रति घंटा, 1 पुरुष एवं 1 बच्चा साथ मिलकर प्रति घंटा जितना कार्य करता है उसका 4 गुना कार्य संपन्न कर सकते हैं। एक पुरुष एवं एक बच्चा के कार्य की तुलना करें।

हल: पहला दल, दूसरे दल की तुलना में 4 गुना ज्यादा कार्यक्षमता वाला (efficient) है। इसका मतलब क्या हुआ? इसका सीधा अर्थ यह है कि दूसरे दल को कार्य करने में पहले दल की अपेक्षा 4 गुना समय लगेगा।

(उदा.–20 के अंत में दिया गया नोट देखें)।

यदि पु. = पुरुष एवं ब. = बच्चा हो तो,

(5पु. + 2ब.) का 1 दिन का कार्य = (1पु. + 1ब.) का 4 दिनों का कार्य

या, (5पु. + 2ब.) का 1 दिन का कार्य = (4पु. + 4ब.) का 1 दिन का कार्य

या, 5पु. + 2ब. = 4पु. + 4ब.

या, पु. = 2ब.

$\therefore \frac{\text{पु.}}{\text{ब.}} = \frac{2}{1}$

इसका अर्थ है कि पुरुष बच्चे की तुलना में दुगुना ज्यादा कार्यक्षमता वाला है।

उदा. 22: 12 पुरुष या 15 महिलाएँ किसी फसल को 14 दिनों में काट सकते हैं। यदि 7 पुरुष एवं 5 महिलाएँ मिलकर खेत की कटाई करें, तो इसे कितने दिनों में काट पाएँगे ?

हल: यह उदा.–14 की तरह ही है। उदा.–14 में इस तरह के प्रश्न को हल करने की 3 विधियों की चर्चा की गई है। यदि आपको सूत्र याद हो तो दिनों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{1}{\frac{7}{14 \times 12} + \frac{5}{14 \times 15}} = \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{42}}$$

$$= \frac{24 \times 42}{24 + 42} = \frac{168}{11} = 15\frac{3}{11} \text{ दिन}$$

उदा. 23: 10 पुरुष किसी कार्य को 10 दिनों में संपन्न कर सकते हैं जबकि कार्य को इतने ही दिनों में पूरा करने के लिए 12 महिलाओं की आवश्यकता होती है। यदि 15 पुरुषों एवं 6 महिलाओं के कार्य में लगा दिया जाए तो इसे पूरा करने में कितने दिन लगेंगे ?

हल: 10 पुरुषों को कार्य पूरा करने में 10 दिन लगते हैं।

$\therefore$ 15 पुरुषों को कार्य पूरा करने में $10\left(\frac{10}{15}\right)=\frac{20}{3}$ दिन लगेंगे। (भिन्न के नियम से)

इसी प्रकार 6 महिलाएँ कार्य को $10\left(\frac{12}{6}\right)$ = 20 दिनों में पूरा करेंगी।

(भिन्न के नियम से)

$\therefore$ 15 पुरुष एवं 6 महिलाएँ इसी कार्य को $\dfrac{\frac{20}{3}\times 20}{\frac{20}{3}+20} = \frac{20\times 20}{80}=5$ दिनों में पूरा करेंगे।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**
उपर्युक्त प्रश्न को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है: "यदि 10 पुरुष या 12 महिलाएँ किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करती हैं तो 15 पुरुष एवं 6 महिलाएँ उसे कितने दिनों में पूरा करेंगे"?
इस प्रकार यह प्रश्न, उदा.-14 एवं उदा.-22 के जैसा ही है।

$\therefore$ दिनों की अभीष्ट संख्या $=\dfrac{1}{\frac{15}{10\times 10}+\frac{6}{12\times 10}}$

$$=\frac{1}{\frac{3}{20}+\frac{1}{20}}=\frac{20}{4} = 5 \text{ दिन}$$

उदा. 24: A एवं B किसी कार्य को क्रमश: 45 एवं 40 दिनों में पूरा कर सकते हैं। उन्होंने साथ-साथ कार्य शुरू किया परंतु A ने कुछ समय बाद कार्य छोड़ दिया तथा B ने शेष कार्य 23 दिनों में संपन्न कर लिया। कितने दिनों तक कार्य करने के बाद A ने छोड़ दिया था?

हल: B अकेला 23 दिनों तक कार्य करता है।

$\therefore$ B द्वारा 23 दिनों में किया गया कार्य = $\frac{23}{40}$

$\therefore$ (A + B) एक साथ मिलकर $\left(1-\frac{23}{40}=\right)$ $\frac{17}{40}$ कार्य करते हैं।

$\therefore$ (A + B) पूरा कार्य करते हैं $\frac{40\times 45}{40+45}=\frac{40\times 45}{85}$ दिनों में।

$\therefore$ (A + B) $\frac{17}{40}$ कार्य संपन्न करेंगे $\frac{40\times45}{85}\times\frac{17}{40}=9$ दिनों में।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

यदि बीच के चरणों को नजरंदाज कर दिया जाए तो निम्नलिखित रूप में सूत्र लिखा जा सकता है:

$$\frac{40\times45}{40+45}\times\left[\frac{40-23}{40}\right]=9 \text{ दिन}$$

उदा. 25: कुछ खास व्यक्ति मिलकर किसी कार्य को 160 दिनों में पूरा करते हैं। यदि 18 व्यक्ति और होते तो कार्य पूरा करने में 20 दिन कम लगता। आरंभ में वहाँ कितने व्यक्ति थे ?

हल: यह प्रश्न उदा.-16 के जैसा ही है। ***द्रुत विधि*** का उपयोग कीजिए।

आरंभ में मनुष्यों की संख्या = $\frac{18\times(160-20)}{20}=126$

उदा. 26: 4 पुरुष एवं 6 महिलाएँ किसी कार्य को 8 दिनों में पूरा करते हैं, जबकि 3 पुरुषों एवं 7 महिलाओं को वही कार्य पूरा करने में 10 दिन लगते हैं। 10 महिलाएँ इसी कार्य को कितने दिनों में पूरा कर लेंगी ?

हल: ***पहली विधि:*** यदि 1 दिन के कार्य पर विचार करें, तो

4 पु. + 6 म. = $\frac{1}{8}$ ..... (1)

3 पु. + 7 म. = $\frac{1}{10}$ ..... (2)

(1) × 3 – (2) × 4 से,

18 म. – 28 म. = $\frac{3}{8}-\frac{4}{10}$

या, 10 म. = $\frac{1}{40}$

$\therefore$ 10 महिलाएँ कार्य को 40 दिनों में पूरा कर सकती हैं।

दूसरी विधि: उदा.-15 में इस्तेमाल किया गया सिद्धांत देखें। यहाँ

8(4 पु. + 6 म.) = 10(3 पु. + 7 म.)

या, 2 पु. = 22 म.

$\therefore$ 4 पु. = 44 म.

4 पुरुष + 6 महिलाएँ = 50 महिलाएँ कार्य को 8 दिनों में पूरा करती हैं।

$\therefore$ 10 महिलाएँ उसी कार्य को $\frac{8\times50}{10}=40$ दिनों में पूरा करती हैं।

उदा. 27: 1 पुरुष या 2 महिलाएँ या 3 बच्चे किसी कार्य को 44 दिनों में पूरा कर सकते हैं तो 1 पुरुष 1 महिला एवं 1 बच्चा एक साथ मिलकर उस कार्य को कितने दिनों में पूरा कर पाएँगे ?

हल: यह उदा.-14 का बढ़ाया हुआ (extended) रूप है।
इसलिए, सूत्रानुसार,

$$\text{दिनों की अभीष्ट संख्या} = \frac{1}{\frac{1}{44\times 1}+\frac{1}{44\times 2}+\frac{1}{44\times 3}} = \frac{44\times 1\times 2\times 3}{6+3+2} = 24 \text{ दिन}$$

नोट:
$$\frac{1}{44\times 1} = \frac{\text{'और (AND)- हिस्सा' में पुरुषों की संख्या}}{\text{दिनों की संख्या}\times\text{'अथवा (OR)- हिस्सा' में पुरुषों की संख्या}}$$

$$\therefore \frac{1}{44\times 2} = \frac{\text{'और (AND)- हिस्सा' में महिलाओं की संख्या}}{\text{दिनों की संख्या}\times\text{'अथवा (OR)- हिस्सा' में महिलाओं की संख्या}}$$

इसी तरह आप $\frac{1}{44\times 3}$ को भी परिभाषित कर सकते हैं।

उदा. 28: 3 पुरुष एवं 4 बच्चे किसी कार्य को 8 दिनों में पूरा करते हैं तथा 4 पुरुष एवं 4 बच्चे उसी कार्य को 6 दिनों में पूरा करते हैं। 2 पुरुष एवं 4 बच्चे मिलकर उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा कर लेंगे?

हल: यह प्रश्न उदा.-15 के जैसा ही है। खुद प्रयास कीजिए।

उदा. 29: A की कार्यक्षमता B की 3 गुनी है। साथ-मिलकर वे किसी कार्य को 15 दिनों में पूरा कर सकते हैं। B इस कार्य को कितने दिनों में समाप्त कर लेगा ?

हल: यह प्रश्न उदाहरण-20 के जैसा ही है।
तिगुना + 1 गुना = 4 गुना कार्यक्षमता वाला व्यक्ति कार्य को 15 दिनों में पूरा कर लेता है।
∴ 1 गुना कार्यक्षमता वाला B इसे 15 × 4 = 60 दिनों में समाप्त कर लेगा।

उदा. 30: व्यक्तियों का एक दल किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करने का निश्चय करता है, लेकिन इनमें से 5 अनुपस्थित हो जाते हैं। यदि शेष व्यक्ति इसी कार्य को 12 दिनों में पूरा कर पाते हैं तो व्यक्तियों की संख्या आरंभ में कितनी थी ?

हल: मान लिया कि आरंभ में x व्यक्ति थे, तो 'मौलिक सूत्र' (basic formula) से,
$M_1D_1 = M_2D_2$
या, $10x = 12(x-5)$

$$\therefore x = \frac{12\times 5}{2-10} = 30 \text{ आदमी}$$

उदा. 31: कोई भवन-निर्माता 40 दिनों में भवन निर्माण करने का निश्चय करता है। उसने आरंभ में इसके लिए 100 लोगों को नियुक्त किया तथा 35 दिनों बाद उसने 100 और लोगों को

नियुक्त किया तथा निर्धारित समय में निर्माण कार्य पूरा कर लिया। यदि उसने अतिरिक्त व्यक्ति नियुक्त नहीं किए होते तो कार्य निर्धारित समय के कितने दिनों बाद पूरा होता?

हल: मान लिया कि केवल 100 आदमी काम को x दिनों में पूरा कर लेते।

100 व्यक्तियों द्वारा 35 दिनों में किया गया कार्य + 200 व्यक्तियों द्वारा (40 – 35 =) 5 दिनों में किया गया कार्य = 1

या, $\frac{35}{x}+\frac{200\times 5}{100x}=1$

या, $\frac{45}{x}=1$

$\therefore x=45$ दिन

इसलिए यदि 100 व्यक्ति और नियुक्त नहीं किए गए होते तो काम निर्धारित समय के (45 – 40)=5 दिन बाद तक चलता।

***द्रुत विधि:* (Quicker Method):**

200 व्यक्ति शेष कार्य को (40 – 35 =) 5 दिनों में पूरा करते हैं

$\therefore$ 100 व्यक्ति शेष कार्य को $\left(\frac{5\times 200}{100}=\right)10$ दिनों में पूरा करेंगे।

$\therefore$ दिनों की अभीष्ट संख्या = (10 – 5 =) 5 दिन

उदा. 32: 30 व्यक्तियों का एक दल 38 दिनों में एक कार्य समाप्त करता है। 25 दिनों बाद 5 और व्यक्ति नियुक्त किए गए और कार्य समय से एक दिन पूर्व पूरा कर लिया गया। यदि 5 अतिरिक्त व्यक्तियों को नियुक्त नहीं किया गया होता तो कार्य पूरा होने में कितने दिनों की देरी होती?

हल: यह प्रश्न उदा.-31 के अनुरूप है। इसे हल करने के लिए हमारी द्रुत-विधि एक ही जैसी होगी।

35 व्यक्ति शेष कार्य को 12 दिनों में पूरा करते हैं।

$[12=38-25-1]$

$\therefore$ 30 व्यक्ति उसी कार्य को $\frac{12\times 35}{30}=14$ दिनों में पूरा करेंगे।

$\therefore$ कार्य 25 + 14 = 39 दिनों समाप्त हो गया होता।

अर्थात् निर्धारित समय के 1 दिन बाद तक कार्य पूरा होगा।

उदा. 33: A किसी कार्य को 25 दिनों में कर सकता है और B उसी कार्य को 20 दिनों में कर सकता है। वे 5 दिनों तक साथ-साथ काम करते हैं। इसके बाद A कार्य छोड़कर चला जाता है। कितने दिनों में B कार्य समाप्त कर लेगा?

हल: (A + B) द्वारा 5 दिनों में किया गया कार्य $=5\left[\frac{1}{25}+\frac{1}{20}\right]=\frac{5\times 45}{25\times 20}=\frac{9}{20}$

शेष कार्य $=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$

$\therefore$ B शेष कार्य को $\left(20\times\frac{11}{20}=\right)11$ दिनों में पूरा करेगा।

उदा. 34: A और B किसी कार्य को अलग-अलग क्रमशः 9 एवं 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं। A कार्य शुरू करता है और वे दोनों बारी-बारी से कार्य करते हैं। कितने दिनों में कार्य पूरा हो जाएगा?

हल: यह प्रश्न उदा.-11 जैसा ही है।

(A + B) का दो दिनों का कार्य = $\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{7}{36}$

हमें पता है कि $5\times\frac{7}{36}=\frac{35}{36}$ (1 से थोड़ा ही कम है) अर्थात् (A + B) 5 जोड़े दिनों तक कार्य करते हैं अर्थात् 10 दिनों तक कार्य करते हैं।

शेष कार्य $\left[1-\frac{35}{36}\right]=\frac{1}{36}$ A द्वारा पूरा किया जाता है।

A $\frac{1}{36}$ कार्य $\left(9\times\frac{1}{36}=\right)\frac{1}{4}$ दिनों में पूरा कर सकता है।

$\therefore$ दिनों की कुल संख्या = $10+\frac{1}{4}=10\frac{1}{4}$ दिन

उदा. 35: 8 बच्चे एवं 12 पुरुष किसी कार्य को 9 दिनों में पूरा कर सकते हैं। प्रत्येक बच्चा पुरुष की अपेक्षा दुगुना समय लेता है। कितने दिनों में 12 व्यक्ति उसी कार्य को पूरा कर लेंगे?

हल: 2 बच्चा = 1 पुरुष

$\therefore$ 8 बच्चे + 12 पुरुष = (4 + 12 =) 16 पुरुष

$\therefore$ 12 व्यक्ति उस कार्य को $9\left[\frac{16}{12}\right]$ = 12 दिनों में पूरा कर लेंगे। .... (*)

नोट: (*) परिणाम तक पहुँचने के लिए या तो $M_1D_1 = M_2D_2$ (मौलिक सूत्र) का इस्तेमाल कीजिए या 'भिन्न का नियम' (rule of fraction) का! हमारा सुझाव है कि आप भिन्न के नियम का ही इस्तेमाल करें। चूँकि अपेक्षाकृत कम व्यक्ति उसी कार्य को अधिक दिनों में पूरा करेंगे, इसलिए 9 में $\frac{16}{12}$ से गुणा किया जाना चाहिए। जाहिर है कि $\frac{16}{12}$ का मान 1 से बड़ा है।

उदा. 36: 30 व्यक्ति प्रति दिन 7 घंटे कार्य करके उस काम को 18 दिनों में पूरा कर सकते हैं। 21 व्यक्ति प्रति दिन 8 घंटे कार्य करके उसी काम को कितने दिनों में पूरा कर पाएँगे?

हल: सूत्र से, $\mathbf{M_1D_1T_1W_2 = M_2D_2T_2W_1}$

चूँकि दोनों ही स्थितियों में काम बराबर है।

$\therefore M_1D_1T_1 = M_2D_2T_2$ .... (*)

$$\therefore D_2 = \frac{M_1 D_1 T_1}{M_2 T_2} = \frac{30 \times 18 \times 17}{21 \times 8} = 22\frac{1}{2} \text{ दिन}$$

नोट: (*) व्यक्ति-दिन-घंटा किसी भी कार्य के लिए अचर (constant) होता है।

उदा. 37: A, B एवं C किसी कार्य को क्रमशः 8, 16 एवं 24 दिनों में पूरा करते हैं। वे तीनों एक साथ कार्य शुरू करते हैं। A कार्य पूरा होने तक लगा रहता है, C कार्य समाप्त होने के 2 दिन पहले छोड़ देता है और B कार्य पूरा होने के 1 दिन पहले। कितने समय में कार्य पूरा हो जाता है ?

हल: मान लिया कि कार्य x दिनों में पूरा हो जाता है।

$\therefore$ A का x दिनों का कार्य + B का $(x-1)$ दिनों का कार्य + C का $(x-2)$ दिनों का कार्य = 1

या, $\frac{x}{8} + \frac{x-1}{16} + \frac{x-2}{24} = 1$

या, $\frac{6x + 3x - 3 + 2x - 4}{48} = 1$

या, $11x = 55$ $\therefore x = 5$ दिन

उदा. 38: 400 व्यक्तियों के लिए 31 दिनों के भोजन की व्यवस्था है। 28 दिनों के बाद 280 व्यक्ति स्थान छोड़कर चले जाते हैं। कितने दिनों तक बचा हुआ भोजन शेष लोगों के काम आ सकेगा?

हल: बचा हुआ भोजन (31 – 28 =) 3 दिनों तक चलता, यदि कोई भी व्यक्ति स्थान छोड़कर नहीं जाता।

$\therefore$ बचा हुआ भोजन शेष 120 व्यक्तियों के लिए $3 \times \frac{400}{120}$ दिनों तक चलेगा।

$\therefore$ उत्तर $= 3 \times \left[\frac{400}{120}\right] = 10$ दिन

नोट: कम व्यक्तियों के लिए भोजन अधिक दिनों तक चलेगा। इसलिए 3 में $\frac{140}{120}$ (जिसका मान 1 से अधिक है) से गुणा किया जाता है।

उदा. 39: A किसी काम को पूरा करने में उतना ही समय लेता है जितना समय B और C एक साथ मिलकर उस काम को पूरा करने में लेता है। A और B साथ काम करके उसे 10 दिनों में समाप्त कर देता है। C अकेला इस काम को 15 दिनों में पूरा कर सकता है। B अकेला उस काम को कितने दिनों में पूरा कर सकता है?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method)**

(A + B) + (C) काम को $\left(\frac{15 \times 10}{15 + 10}\right) = 6$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

चूँकि A का दिन = (B + C) का दिन

$\therefore$ B + C पूरा काम कर सकता है (6 × 2 =) 12 दिनों में

$\therefore$ $B[B=\{B+C\}-C]$ कर सकता है $\left(\frac{15\times12}{15-12}\right)=60$ दिनों में।

उदा. 40: A, B एवं C किसी काम को क्रमशः 16, $12\frac{4}{5}$ एवं 32 दिनों में पूरा करते हैं। वे एक साथ काम प्रारंभ करते हैं परंतु 4 दिनों के बाद A काम छोड़ देता है। B काम पूरा होने के 3 दिन पहले काम छोड़ देता है। कितने दिनों में काम पूरा होता है?

हल : मान लिया कि काम x दिनों में पूरा होता है।

A का 4 दिनों का काम + B का $(x-3)$ दिनो का काम + C का x दिनों काम = 1

या, $\frac{4}{16}+\frac{(x-3)\times5}{64}+\frac{x}{32}=1$

या, $\frac{16+5x-15+2x}{64}=1$

या, $7x+1=64$ $\therefore$ $x=9$ दिन

उदा. 41: राजू एक काम को 16 दिनों में पूरा कर सकता है। रामू उसी काम को $12\frac{4}{5}$ दिनों में जबकि गीता 32 दिनों में पूरा कर सकती है। सभी एक साथ काम करना प्रारंभ करते हैं परन्तु राजू 4 दिनों बाद काम छोड़ देता है। रामू काम समाप्त होने के 3 दिन पहले काम छोड़ देता है। काम कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा?

हल : माना कि काम x दिनों में समाप्त होता है

तो राजू का 4 दिनों का काम + रामू का $(x-3)$ दिनों का काम + गीता का x दिनों का काम = 1

या, $\frac{4}{16}+\frac{x-3}{4}+\frac{x}{32}=1$

या, $\frac{1}{4}+\frac{5(x-3)}{64}+\frac{x}{32}=1$

या, $\frac{5(x-3)+2x}{64}+\frac{3}{4}$

या, $7x-15=48$

$\therefore$ $x=\frac{48+15}{7}=\frac{63}{7}=9$ दिन

उदा. 42: A और B किसी काम को 56 रु. में करने का वादा करता है। A उसी काम को अकेला 7 दिनों में कर सकता है तथा B 8 दिनों में। यदि एक बच्चे की मदद से वे काम को 3 दिनों में समाप्त कर देते हैं तो बच्चे को क्या मिलेगा?

हल: A का 3 दिनों का काम + B का 3 दिनों का काम + बच्चे का 3 दिनों का काम = 1

या, $\frac{3}{7}+\frac{3}{8}+$ बच्चे का 3 दिनों का काम = 1

या, बच्चे का 3 दिनों का काम = $1-\left(\frac{.3}{7}+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{56}$

हिस्सों का अनुपात $= \frac{3}{7} : \frac{3}{8} : \frac{11}{56}$

$= \frac{3\times 56}{7} : \frac{3\times 56}{8} : \frac{11\times 56}{56}$

$= 24 : 21 : 11$

$\therefore$ बच्चे का हिस्सा $= \frac{56}{24+21+11}\times 11 = 11$ रु.

उदा. 43: A किसी काम को शुरू करता है एवं 2 दिन करने के बाद छोड़ देता है। उसके बाद B को बुलाया जाता है। और वह उस काम को 9 दिनों में समाप्त कर देता है। यदि A ने 3 दिन काम करके छोड़ा होता तो B शेष काम को 6 दिनों में ही समाप्त कर दिया होता। प्रत्येक अकेला कितने दिनों में काम समाप्त कर सकता है?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

माना कि A एवं B क्रमशः x एवं y दिनों में काम को समाप्त कर सकते हैं। अब,

A का 2 दिन का काम + B का 9 दिन का काम = 1

या, $\frac{2}{x}+\frac{9}{y} = 1$

उसी तरह, $\frac{3}{x}+\frac{6}{y} = 1$

उपर्युक्त समीकरण को हल करने के लिए $\frac{1}{x}=a$ एवं $\frac{1}{3}=b$ रखते हैं।

इस प्रकार,

$2a + 9b = 1$ ....(1) एवं

$3a + 6b = 1$ ....(2)

$(2)\times 3 - (1)\times 3$ से,

$5a = 1 \therefore a = \frac{1}{5}$ *or,* $x = \frac{1}{a} = 5$ दिन

एवं $y = \frac{1}{b} = 15$ दिन

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

इस स्थिति में ; A काम समाप्त करेगा $\frac{3\times9-2\times6}{9-6} = \frac{15}{3} = 5$ दिनों में

B के लिए, हमें उपर्युक्त परिणाम का प्रयोग करना चाहिए।

चूँकि B करता है $\left(1-\frac{2}{5}=\right)\frac{3}{5}$ काम 9 दिनों में।

$\therefore$ B करता है 1 काम $\left(\frac{9\times5}{3}=\right)15$ दिनों में

उदा. 44: यदि 5 आदमी एवं 3 लड़के 23 एकड़ 4 दिनों में काट सकते हैं, तथा 3 आदमी एवं 2 लड़के 7 एकड़ दो दिनों में काट सकते हैं, तो 7 आदमियों को कितने लड़कों की मदद की आवश्यकता होगी ताकि वे 6 दिनों में 45 एकड़ काट सकें?

हल: सर्वप्रथम हमें आदमी एवं लड़का में संबंध ज्ञात करना चाहिए। दो प्रदत्त वक्तव्यों से दो समीकरण प्राप्त किया जा सकता है। पहले वक्तव्य से यह निष्कर्ष निकलता है कि

5 आदमी एवं 3 लड़के 1 दिन में $\frac{23}{4}$ एकड़ काट सकते हैं।

हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

5 आ. + 3 ल. = $\frac{23}{4}$ ....(1)

उसी प्रकार दूसरे वक्तव्य से,

3 आ. + 2 ल. = $\frac{7}{2}$ .....(2)

अब, संबंध ज्ञात करने के लिए,

$$\frac{5\text{ आ.}+3\text{ ल.}}{3\text{ आ.}+2\text{ ल.}} = \frac{23}{4}\div\frac{7}{2} = \frac{23}{14}$$

या, 70 आ. + 42 आ. = 69 आ. + 46 ल.

$\therefore$ आ. = 4 ल. (या, एक आदमी 4 लड़का के बराबर है)

$\therefore$ 5 आ. + 3 ल. = $5\times4+3 = 23$ लड़का (पहले वक्तव्य के लिए)

अब, सूत्र का प्रयोग करें : $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$

$\therefore$ $M_2 = \frac{M_1D_1W_2}{D_2W_1} = \frac{23\times4\times45}{6\times23} = 30$ लड़के

$\therefore$ $30-7\times4 = 2$ लड़के की मदद की आवश्यकता होगी।

उदा. 45: एक ठेकेदार 12 कि. मी. लंबा कैनाल 350 दिनों में खोदने के लिए 45 आदमियों को काम पर लगाता है। 200 दिनों बाद वह पाता है कि कैनाल का केवल 4.5 कि. मी. ही पूरा हो पाया है। काम को समय पर पूरा करने के लिए उसे और कितना आदमी लगाना होगा?

हल : भिन्न के नियम (Rule of Fraction) को लागू करने के लिए हम उपर्युक्त प्रश्न को निम्नलिखित तरीके से लिख सकते हैं:

200 दिनों मे 4.5 कि. मी. कैनाल 45 आदमी खोद सकते हैं तो कितने और आदमियों की आवश्यकता होगी (12 – 4.5=) 7.5 कि. मी. कैनाल (350 – 200=) 150 दिनों में खोदने के लिए?

***भिन्न के नियम से* (By Rule of Fraction) :**

$$45\left(\frac{200}{150}\right)\left(\frac{7.5}{4.5}\right) = 100 \text{ आदमी}$$

$\therefore$ अभीष्ट अतिरिक्त आदमियों की संख्या = 100 – 45 = 55 आदमी

***सूत्र विधि से* (By Direct Formula) :**

$$M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$$

या, $45 \times 100 \times 7.5 = M_2 \times 150 \times 4.5$

$$\therefore M_2 = \frac{45 \times 200 \times 7.5}{100 \times 4.5} = 100$$

$\therefore$ अभीष्ट अतिरिक्त आदमियों की संख्या

= 100 – 45 = 55 आदमी

उदा.: 46: 8 आदमी एवं 16 महिलाएँ एक काम को 8 दिनों में करते हैं। 40 आदमी एवं 48 महिलाएँ उसी काम को 2 दिनों में करते हैं। 6 आदमी एवं 12 महिलाएँ मिलकर उस काम को कितने दिनों में करेंगे?

हल : ***विधि* I:** काम करने वाले व्यक्तियों की संख्या, दिनों की संख्या के व्युत्क्रमानुपाती होता है। (अर्थात् अधिक आदमी, कम दिन या कम आदमी, अधिक दिन) इसलिए हम निम्नलिखित प्रकार से समीकरण को नहीं लिख सकते :

8 आ. + 16 म. = 8 या 40 आ. + 48 म. = 2

अब, हमें वह दो चीजों को ज्ञात करना है जो एक दूसरे का समानुपाती हो। स्पष्टतः, इस संदर्भ में दो चीजें, ***व्यक्तियों की संख्या*** एवं ***काम*** है। इसलिए, हम संबंधों को परिवर्तित करते हैं एवं प्रत्येक समूह के द्वारा 1 दिन में किया गया काम ज्ञात करते हैं। तो समीकरण निम्नलिखित है :

$$8 \text{ आ.} + 16 \text{ आ.} = \frac{1}{8} \qquad ......(1)$$

एवं $$40 \text{ आ.} + 48 \text{ म.} = \frac{1}{2} \qquad ......(2)$$

एवं हमें ज्ञात करना है : 6 आ. + 12 म. = ?

अब, (2) – 3 × (1) से,

$$16\text{ आ.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8} \quad \therefore\ 6\text{ आ.} = \frac{6}{16\times 8}$$

फिर, 5 × (1) – (2) से,

$$32\text{ म.} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \therefore\ 12\text{ म.} = \frac{12}{32\times 8}$$

अब, $$6\text{ आ.} + 12\text{ म.} = \frac{6}{16\times 8} + \frac{12}{32\times 8} = \frac{3}{64} + \frac{3}{64}$$

$$= \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

इसलिए, 6 आदमी एवं 12 महिलाएँ काम को $\left(\frac{32}{3}\right) = 10\frac{2}{3}$ दिनों में करेंगे।

***विधि* II :** हम एक आदमी एवं एक महिला के काम की तुलना करेंगे।

प्रश्नानुसार,

8(8 आ. + 16 म.) = 2 (40 आ. + 48 म.)

या, 64 आ. + 128 म. = 80 आ. + 96 म.

या, 16 आ. = 32 म. ∴ 1 आ. = 2 म.

अब, 8 आ. + 16 म. = 16 म. + 16 म. = 32 म.

(पहली सूचना से)

6 आ. + 12 म. = 12 म. + 12 म. = 24 म.

(अभीष्ट सूचना से)

अब, सूत्र से,

$$M_1D_1 = M_2D_2$$

तो, $32 \times 8 = 24 \times D_2$

$$\therefore\ D_2 = \frac{32\times 8}{24} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}\text{ दिन}$$

नोट : इस विधि से आप काफी तेजी से प्रश्नों को हल कर सकते हैं। इसलिए हमारा यह सुझाव है कि आप इस विधि का अनुसरण करें। एक और विधि विशेष स्थितियों के लिए (जो यहाँ लागू होता है) नीचे वर्णित किया गया है।

***विधि* III:**

(काफी द्रुत लेकिन केवल विशेष स्थितियों के लिए): सर्वप्रथम आपको यह जानना आवश्यक है कि यह विधि किस तरह के प्रश्नों पर लागू होता है। पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या प्रश्न भाग में देखें। दोनों संख्याओं का अनुपात निकालें जैसा कि नीचे दिया गया है।

आदमी : महिला = 6 : 12 = 1 : 2

अब उसी अनुपात के लिए प्रश्न-भाग को देखें।
यहाँ पर, पहले प्रश्न-भाग का समान अनुपात है अर्थात् 8 : 16 = 1 : 2 । अब हम इस विधि का प्रयोग कर सकते हैं। यदि इस प्रकार का अनुपात प्रश्न-भाग में नहीं हो तो हम इस विधि का प्रयोग नहीं कर सकते हैं।

8 आ. + 16 म. 8 दिनों में कार्य करते हैं।

या, 8(आ. + 2 म.) 8 दिनों में कार्य करते हैं।

या, (आ. + 2 म.) 8 × 8 दिनों में कार्य करते हैं।

$\therefore$ 6(आ. + 2 म.) $\frac{64}{6} = \frac{32}{3}$ दिनों में कार्य करते हैं।

$\therefore$ 6 आ. + 12 म. $10\frac{2}{3}$ दिनों में कार्य करते हैं।

उदा. 47: 38 आदमी 6 घंटे प्रति दिन काम करके 12 दिनों मे काम समाप्त करते हैं। 57 आदमी 8 घंटे प्रति दिन काम करके उस काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे? यदि पहले समूह के 2 आदमी 1 घंटा में उतना ही काम करते हैं, जितना दूसरे समूह के 3 आदमी $1\frac{1}{2}$ घंटे में करते हैं।

हल : ***विस्तार विधि*** **(Detailed Solution):**

2 × पहला समूह का 1 आदमी = 3 × दूसरा समूह का 1.5 आदमी

या, पहला समूह का 2 आदमी = दूसरा समूह का 4.5 आदमी

$\therefore$ पहला समूह का 38 आदमी = $\frac{4.5}{2} \times 38 = 19 \times 4.5$

चूँकि (19 × 4.5) आदमी एक काम 6 घंटे प्रति दिन करके 12 दिनों में करते हैं।

$\therefore$ 1 आदमी एक काम 1 घंटा/दिन करके (12 × 19 × 4.5 × 6) दिनों में करता है।

$\therefore$ 57 आदमी 2 काम 8 घंटे प्रति दिन करके $\frac{12 \times 19 \times 4.5 \times 6}{57 \times 8} \times 2 = 27$ दिन

द्रुत विधि **(Quicker Method) :**

पहले समूह एवं दूसरे समूह के व्यक्तियों की कार्यक्षमता का अनुपात

$= E_1 : E_2 = (3 \times 1.5) : 2 \times 1 = 4.5 : 2$ .... (*)

अब आप सूत्र का प्रयोग करें;

$M_1D_1T_1E_1W_2 = M_2D_2T_2E_2W_1$ .... (**)

$\therefore D_2 = \frac{38 \times 12 \times 6 \times 4.5 \times 2}{57 \times 8 \times 2 \times 1} = 27$ दिन

नोट : (*) पहले समूह से कम आदमी उतना ही काम कम दिनों में करते हैं, इसलिए वे ज्यादा कार्य -कुशल (efficient) हैं।

(*)(*) M व्यक्तियों की संख्या को निरूपित करता है।

D दिनों की संख्या को निरूपित करता है।
T कार्य करने के घंटों को निरूपित करता है।
E कार्यक्षमता को निरूपित करता है।
W कार्य को निरूपित करता है।
एवं प्रत्यय (Suffix) 1 एवं 2 उनके समूहों को निरूपित करता है।

अभ्यास प्रश्न

1. मोहन किसी कार्य को 20 दिनों में पूरा करता है और सोहन उसी कार्य को 30 दिनों में पूरा करता है। यदि दोनों मिलकर काम करें तो कार्य कितने दिनों में पूरा हो जाएगा ?
2. रजा, रिंकू एवं राम किसी कार्य को क्रमशः 6, 12 एवं 24 दिनों में पूरा करते हैं ये तीनों मिलकर इसे कितने दिनों में पूरा करेंगे ?
3. A और B मिलकर किसी कार्य को 6 दिनों में पूरा कर सकते हैं। B अकेला उसे 8 दिनों में पूरा कर सकता है तो A अकेला उसे कितने दिनों में पूरा कर सकता है ?
4. A एवं B मिलकर किसी कार्य को 30 दिनों में कर सकते हैं, B और C 40 दिनों में तथा C और A, 60 दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि तीनों मिलकर कार्य करें तो कितने दिनों में पूरा कर लेंगे?
5. A 25 घंटे में 75 पृष्ठ नकल कर सकता है, A और B मिलकर 27 घंटे में 135 पृष्ठ नकल कर सकते हैं। B को 42 पृष्ठ नकल करने में कितना वक्त लगेगा ?
6. A, B और C क्रमशः 10, 12 एवं 15 दिनों में कार्य पूरा कर सकते हैं। यदि B दो दिनों बाद काम करना बंद कर दे तो A और C को शेष कार्य पूरा करने में कितना वक्त लगेगा ?
7. B किसी काम को 6 घंटे में पूरा कर सकता है, B और C उसी कार्य को 4 घंटे में पूरा कर सकते हैं तथा A,B एवं C को वही कार्य करने में $2\frac{2}{3}$ घंटे लगते हैं। A और B मिलकर इसे कितने घंटे में पूरा कर लेंगे?
8. 8 घंटे प्रति दिन काम करके मैं 15 दिनों में किसी काम को पूरा कर सकता हूँ। यदि आप प्रति दिन 9 घंटे काम करें, तो यह $6\frac{2}{3}$ दिनों में समाप्त हो सकता है। यदि हम दोनों साथ मिलकर प्रति दिन 10 घंटे कार्य करें तो यह कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा?
9. A किसी कार्य को 7 दिनों में समाप्त कर लेता है। यदि दिए हुए समय में A की कार्यक्षमता B की दुगुनी हो और दोनों मिलकर कार्य करें तो कार्य कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा ?
10. किसी कार्य को संपन्न करने में A को 6 दिन लगता है और B को 12 दिन। C को उतना ही समय लगता है, जितने में A और B साथ मिलकर कार्य पूरा करते हैं। यदि B और C साथ मिलकर कार्य करें तो वह कितने दिनों में पूरा हो जाएगा ?
11. A की कार्यक्षमता B की अपेक्षा दुगुनी है तथा दोनों मिलकर किसी कार्य को 16 दिनों में पूरा कर लेते हैं। यदि वे दोनों अलग-अलग काम करें तो काम कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा?
12. यदि 3 पुरुष या 5 महिलाएँ किसी खेत को 43 दिनों में काट सकते हैं तो 5 पुरुष एवं 6 महिलाएँ इसे कितने दिनों में काटेंगे?

13. 5 पुरुष एवं 2 बच्चे यदि साथ कार्य करें तो 1 पुरुष एवं 1 बच्चा के द्वारा किया गया प्रति घंटा कार्य की तुलना में चार गुना कार्य कर सकते हैं। पुरुष एवं बच्चे के कार्य की परस्पर तुलना करें।
14. 1 पुरुष, 3 महिलाएँ एवं 4 बच्चे किसी कार्य को 96 घंटे में पूरा कर सकते हैं, 2 पुरुष एवं 8 बच्चे इसे 80 घंटे में पूरा कर सकते हैं तथा 2 पुरुष एवं 3 महिलाएँ इसे 120 घंटे में पूरा कर सकते हैं। यदि 5 पुरुष एवं 12 बच्चे मिलकर कार्य करें तो यह कितनी देर में समाप्त हो जाएगा ?
15. A और B किसी कार्य को अलग-अलग क्रमश: 9 एवं 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि वे बारी-बारी से कार्य करें तथा कार्य की शुरुआत A करे, तो कार्य कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा?
16. कोई रकम A के 21 दिनों की मजदूरी एवं B की 28 दिनों की मजदूरी के लिए पर्याप्त है। यदि इस रकम में से दोनों की मजदूरी का भुगतान किया जाए तो कितने दिनों की मजदूरी अदा की जा सकेगी ?
17. तीन-चौथाई समय में A, B की तुलना में आधा ही कार्य पूरा कर पाता है। यदि दोनों मिलकर कार्य 18 दिनों में पूरा कर लेते हैं, तो B को इसे पूरा करने में कितना वक्त लगेगा?
18. 10 पुरुष किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करते हैं, जबकि इसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करने के लिए 12 महिलाओं की आवश्यकता होती हैं। यदि 15 पुरुष एवं 6 महिलाएँ मिलकर कार्य करें तो इसे पूरा करने में कितना वक्त लगेगा?
19. A और B अलग-अलग किसी कार्य को क्रमश: 30 एवं 40 दिनों में पूरा कर सकते हैं। उन्होंने एक साथ कार्य शुरू किया पर A ने कुछ दिनों बाद काम छोड़ दिया तथा B ने शेष कार्य को 12 दिनों में पूरा किया। कितने दिनों तक कार्य करने के बाद A ने कार्य करना छोड़ दिया था?
20. कुछ व्यक्ति मिलकर किसी कार्य को 60 दिनों में पूरा करते हैं। यदि 8 व्यक्ति और शामिल हो जाएँ तो कार्य पूरा करने में 10 दिन कम लगेंगे। आरंभ में कितने व्यक्तियों ने मिलकर कार्य करना शुरू किया था ?
21. 8 बच्चे एवं 12 पुरुष मिलकर किसी कार्य को 9 दिनों में पूरा कर लेते हैं। यदि प्रत्येक बच्चा एक पुरुष की तुलना में कार्य पूरा करने में दुगुना समय लेता है तो उसी कार्य को 12 पुरुष मिलकर कितने दिनों में पूरा करेंगें?
22. 2 पुरुष एवं 3 महिलाएँ मिलकर किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करते हैं, जबकि 4 पुरुष इसे 10 दिनों में पूरा कर लेते हैं। कितने दिनों में 3 पुरुष एवं 3 महिलाएँ इसे पूरा कर लेंगे?
23. 3 पुरुष एवं 4 बच्चे किसी कार्य को 8 दिनों में पूरा करते हैं, जबकि 4 पुरुष एवं 4 बच्चे मिलकर इसे 6 दिनों में पूरा कर सकते हैं। कितने दिनों में 2 पुरुष एवं 4 बच्चे इसे पूरा कर लेंगे?
24. यदि 1 पुरुष या 2 महिलाएँ या 3 बच्चे किसी काम को 44 दिनों में पूरा कर लेते हैं तो उसी काम को 1 पुरुष, 1 महिला एवं 1 बच्चा मिलकर कितने दिनों में पूरा करेंगे ?

उत्तर

1. $\frac{20\times30}{20+30}=12$ दिन

2. $$\frac{6\times12\times24}{6\times12+12\times24+6\times24}=\frac{6\times12\times24}{72+288+144}$$

$$=\frac{6\times12\times24}{504}=3\frac{3}{7}$$ दिन

3. $\frac{6\times8}{8-6}=24$ दिन

4. $2(A+B+C)$ कार्य समाप्त करेंगे $\frac{30\times40\times60}{30\times40+30\times60+40\times60}=\frac{40}{3}$ दिनों में

$\therefore (A+B+C)$ कार्य समाप्त करेंगे $\frac{80}{3}=26\frac{2}{3}$ दिनों में।

5. A 1 घंटा में $\frac{75}{25}=3$ पृष्ठ नकल कर सकता है।

$(A+B)$ 1 घंटा में $\frac{135}{27}=5$ पृष्ठ नकल कर सकते हैं।

$\therefore$ B 1 घंटा में $(5-3)=2$ पृष्ठ नकल कर सकते हैं।

$\therefore$ B को 42 पृष्ठ नकल करने में $\frac{42}{2}=21$ घंटे लगेंगे।

6. $A+B+C$, 2 दिनों में $2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)=2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ कार्य करते हैं।

इसके बाद B कार्य करना छोड़ देता है।

$\therefore (A+B)$ पूरा कार्य समाप्त करेंगे $\frac{10\times12}{12+10}=\frac{60}{11}$ दिनों में

$\therefore (A+B)$ $\frac{1}{2}$ कार्य समाप्त करेंगे $\frac{30}{11}=2\frac{8}{11}$ दिनों में

7. $A+B+C$ कार्य कर सकते हैं $\frac{8}{3}$ घंटे में ...... (1)

B + C कार्य कर सकते हैं 4 घंटे में ...... (2)

B कार्य कर सकता है 6 घंटे में ...... (3)

(2) एवं (3) से,

C कार्य कर सकता है $\frac{4\times6}{6-4}=12$ घंटे में ...... (4)

(1) एवं (4) से,

(A + B) इसी कार्य को पूरा कर सकते हैं

$$\frac{\frac{8}{3}\times 12}{12-\frac{8}{3}}=\frac{32\times 3}{28}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$$ घंटे में

8. दिए गए समय को घंटा में बदल लें।
मैं इस कार्य को 15 × 8 = 120 घंटे में पूरा करता हूँ।

आप इसे $\frac{20}{3}\times 9 = 60$ घंटे में पूरा करते हैं।

हम दोनों यदि साथ मिलकर कार्य पूरा करें तो $\frac{120\times 60}{120+60}=40$ घंटे लगते हैं।

$\therefore$ दिनों की संख्या $=\frac{40}{10}=4$ दिन

बीच के चरणों को नजरंदाज कर देने पर, सूत्र से,

$$\frac{1}{10}\left[\frac{(15\times 8)\times\left[\frac{20}{3}\times 9\right]}{(15\times 8)+\left[\frac{20}{3}\times 9\right]}\right] = \frac{1}{10}\left[\frac{120\times 60}{180}\right]=4 \text{ दिन}$$

नोट: उदा.–16 का हल देखिए। वहाँ विधि कुछ भिन्न है। हमारा सुझाव यह है कि आप पहले बताई गई विधि का ही उपयोग करें।

9. A, B की तुलना में दुगुना कार्यक्षमता वाला है। इसलिए B 14 दिनों में कार्य समाप्त करेगा।

$\therefore$ (A + B) कार्य समाप्त करेंगे $\frac{7\times 14}{7+14}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$ दिनों में

10. (A + B) को $\frac{6\times 12}{6+12}=4$ दिन लगते हैं।

$\therefore$ C को 4 दिन लगता है।

तथा, (B + C) को $\frac{12\times 4}{12+4}=3$ दिन लगते हैं।

11. मान लिया कि B, $2x$ दिनों में कार्य समाप्त करता है।

$\therefore$ A, x दिनों में कार्य समाप्त करता है।

यदि, साथ-साथ कार्य करें तो दोनों मिलकर इसे $\frac{2x^2}{3x}=16$ दिनों में कर सकते हैं

$\therefore x = 24$ दिन

$\therefore$ A 24 दिनों में कर सकता है एवं B, 48 दिनों में।

नोट: द्रुत विधि के लिए हल किया गया उदा.-20 देखें।

12. 3 पुरुष = 5 महिलाएँ

$\therefore$ 5 पुरुष = $\frac{5}{3} \times 5 = \frac{25}{3}$ महिलाएँ

$\therefore$ 5 पुरुष + 6 महिलाएँ $= \frac{25}{3} + 6 = \frac{43}{3}$ महिलाएँ

दिया गया है कि 5 महिलाओं को काम पूरा करने में 43 दिन लगते हैं।

$\therefore$ $\frac{43}{3}$ महिलाएँ इसे $43 \times \left(\frac{3}{43}\right) \times 5 = 15$ दिनों में पूरा करेंगी।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):** (उदा.-14 देखें)

दिनों की अभीष्ट संख्या $= \frac{1}{\left[\frac{5}{3 \times 43} + \frac{6}{5 \times 43}\right]} = 15$ दिन

13. 5पु. + 2ब. = 4(1पु. + 1ब.)

या, पु. = 2ब.

$\therefore$ $\frac{\text{पु.}}{\text{ब.}} = \frac{2}{1}$

$\therefore$ बच्चे की तुलना में पुरुष दुगुना कार्य करता है।

14. 1पु. + 3म. + 4ब. कार्य पूरा करते हैं 96 घंटे में ...... (1)

2पु. + 8ब. कार्य पूरा करते हैं 80 घंटे में ...... (2)

या, 1पु. + 4ब. कार्य पूरा करते हैं 160 घंटे में ...... (3)

या, 2पु. + 3म. कार्य पूरा करते हैं 120 घंटे में ...... (4)

(1) एवं (3) से,

3म. कार्य पूरा करते हैं $\frac{160 \times 96}{160 - 96} = 240$ घंटे में ...... (5)

(4) एवं (5) से,

2पु. कार्य पूरा करते हैं $\frac{240 \times 120}{240 - 120} = 240$ घंटे में ...... (6)

$\therefore$ 5पु. कार्य पूरा करते हैं $240 \times \frac{2}{5} = 96$ घंटे में ...... (7)

(2) एवं (6) से,

8ब. कार्य पूरा करते हैं $\frac{80 \times 240}{240 - 80} = 120$ घंटे में

$\therefore$ 12ब. कार्य पूरा करते हैं $\frac{120\times8}{12}=80$ घंटे में ...... (8)

(7) एवं (8) से,

5पु. + 12ब. कार्य पूरा करते हैं,

$\frac{90\times80}{96+80}=\frac{480}{11}=43\frac{7}{11}$ घंटे में

15. 2 दिनों में (A + B) द्वारा किया गया कार्य = $\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{4+3}{36}=\frac{7}{36}$

5 × 2 दिनों में वे $\frac{7\times5}{36}=\frac{35}{36}$ कार्य पूरा कर लेंगे।

अर्थात् 5 × 2 = 10 दिनों बाद, $1-\frac{35}{36}=\frac{1}{36}$ कार्य शेष रह जाता है, जिसे अकेला A को पूरा करना है।

$\because$ A 1 कार्य करता है 9 दिनों में

$\therefore$ A $\frac{1}{36}$ कार्य करता है 9 × $\frac{1}{36}$ = $\frac{1}{4}$ दिनों में

$\therefore$ दिनों की कुल संख्या $=10+\frac{1}{4}=10\frac{1}{4}$ दिन

16. मान लिया कि रकम 21 एवं 28 के ल. स. (LCM) अर्थात् 84 रु. के बराबर है।

तब, A को $\frac{84}{21}=4$ रु./दिन मिलता है

एवं B को $\frac{84}{28}=3$ रु./दिन मिलता है

A + B को 4 + 3 = 7 रु./दिन मिलता है

$\therefore$ 84 रु. प्रर्याप्त है, उन दोनों को $\frac{84}{7}=12$ दिन की मजदूरी का भुगतान करने के लिए।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

अभीष्ट दिनों की संख्या = $\frac{\text{दिनों की संख्या का गुणनफल}}{\text{दिनों की संख्या का योगफल}}=\frac{21\times28}{21+28}=12$ दिन

17. मान लिया कि B कार्य पूरा करता है x दिनों में।

$\Rightarrow$ A $\frac{1}{2}$ कार्य पूरा करता है $\frac{3x}{4}$ दिनों में

$\therefore$ A पूरा कार्य करता है $\frac{3x}{2}$ दिनों में।

$\therefore$ (A + B) कार्य सपाप्त करते हैं $\dfrac{x \times \frac{3x}{2}}{x + \frac{3x}{2}} = 18$ दिनों में (दिया गया है)

या, $\dfrac{\frac{3}{2}x^2}{\frac{5}{2}x} = 18$

$\therefore x = \frac{18 \times 5}{3} = 30$ दिन

18. 15 पुरुष कार्य पूरा करते हैं $\frac{10 \times 10}{15} = \frac{20}{3}$ दिनों में

6 महिलाएँ कार्य पूरा करती हैं $\frac{12 \times 10}{6} = 20$ दिनों में

15 पुरुष + 6 महिलाएँ कार्य पूरा करती हैं $\dfrac{\frac{20}{3} \times 20}{\frac{20}{3} + 20} = \frac{20 \times 20}{80} = 5$ दिनों में

19. उदा.-24 देखें।

***सूत्र से* (Direct Formula):** अभीष्ट दिनों की संख्या $= \frac{30 \times 40}{30 + 40}\left[\frac{40 - 12}{40}\right] = 12$ दिन

20. मान लिया कि आरंभ में मात्र x आदमी थे।
तब 1 व्यक्ति कार्य पूरा करेगा $60x$ दिनों में।
दूसरी स्थिति में, 1 व्यक्ति कार्य पूरा करता है $(x + 8)50$ दिनों में
अब, $60x = 50(x + 8)$

$\therefore x = \frac{400}{10} = 40$ आदमी

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

आदमियों की संख्या $= \dfrac{\text{अतिरिक्त व्यक्तियों की संख्या} \times (60 - 10)}{10} = \dfrac{8 \times 50}{10} = 40$ व्यक्ति

21. यदि प्रत्येक बच्चा को एक पुरुष की तुलना में दुगुना समय लगता है तो 8 बच्चे = 4 पुरुष
$\therefore$ 8 बच्चे + 12 पुरुष = 16 पुरुष

16 पुरुष कार्य पूरा करते हैं 9 दिनों में।

$\therefore$ 12 पुरुष कार्य पूरा करते हैं $\frac{9\times16}{12}=12$ दिनों में।

22. 4 पुरुष कार्य पूरा करते हैं 10 दिनों में

$\therefore$ 2 पुरुष कार्य पूरा करते हैं 20 दिनों में

$\therefore$ 3 महिलाएँ कार्य पूरा करती हैं $\frac{10\times20}{20-10}=20$ दिनों में

तथा 3 पुरुष कार्य पूरा करते हैं $\frac{40}{3}$ दिनों में

$\therefore$ 3 पुरुष एवं 3 महिलाएँ कार्य पूरा करते हैं $\frac{20\times\frac{40}{3}}{20+\frac{40}{3}}=\frac{20\times40}{100}=8$ दिनों में

23. 3 पुरुष एवं 4 बच्चे कार्य पूरा करते हैं 8 दिनों में ...... (1)

$\therefore$ 4 पुरुष एवं 4 बच्चे कार्य पूरा करते हैं 6 दिनों में ...... (2)

(1) को (2) में से घटाने पर,

1 पुरुष कार्य पूरा करते हैं $\frac{8\times6}{8-6}=24$ दिनों में ...... (3)

$\therefore$ 3 पुरुष कार्य पूरा करता है $\frac{24}{3}=8$ दिनों में ...... (4)

(1) एवं (4) से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि बच्चे कोई कार्य नहीं करते हैं

$\therefore$ 2 पुरुष + 4 बच्चे = 2 पुरुष कार्य को पूरा करते हैं $\frac{24}{2}=12$ दिनों में

24. 1 पुरुष = 2 महिलाएँ =3 बच्चे

$\therefore$ 1 पुरुष + 1 महिला + 1 बच्चा = 3 बच्चे + $\frac{3}{2}$ बच्चे +1 बच्चा = $\frac{11}{2}$ बच्चे।

अब 3 बच्चे कार्य पूरा करते हैं 44 दिनों में

$\therefore \frac{11}{2}$ बच्चे कार्य पूरा करते हैं $\frac{44\times3\times2}{11}=24$ दिनों में।