07

# अवकलन
# (Differentiation)

## 7.01 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्व कक्षा में हमने दिए फलन का अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करने की विधि का अध्ययन किया हैं तथा कुछ मानक परिणाम निम्नानुसार प्राप्त किए हैं

**मानक परिणाम**

(i) $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

(ii) $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

(iii) $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log_e a$

(iv) $\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$

(v) $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

(vi) $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

(vii) $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$

(viii) $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\cos ec^2 x$

(ix) $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$

(x) $\frac{d}{dx}(\cos ecx)=-\cos ecx\cot x$

इन परिणामों के अध्ययन एवं उपयोग द्वारा अन्य विभिन्न प्रकार के फलनों के अवकलन प्राप्त करने का प्रयास करेगें।

## 7.02 संयुक्त फलनों के अवकलज (Derivative of composite functions)

**प्रमेय:** यदि अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित फलन $f$ तथा $g$, अन्तराल $[a, b]$ के किसी बिन्दु $c$ पर अवकलनीय है, तो $f\pm g$, $fg$ तथा $f/g$ बिन्दु $c$ पर अवकलनीय होंगे तथा

(i) $D(f\pm g)(c)=f'(c)\pm g'(c)$

(ii) $D(fg)(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$

(iii) $D\{f/g\}(c)=\frac{g(c)f'(c)-g'(c)f(c)}{[g(c)]^2}$, शर्त $g(c)\neq 0$

**प्रमाण:** चूँकि फलन $f$ तथा $g$ बिन्दु $c\in[a, b]$ पर अवकलनीय है, तथा $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$

तथा $\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=g'(c)$

(i) $$D(f\pm g)(c)=\lim_{x\to c}\frac{(f\pm g)(x)-(f\pm g)(c)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\pm\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=f'(c)\pm g'(c).$$

(ii) $$D(fg)(c)=\lim_{x\to c}\frac{(fg)(x)-(fg)(c)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{g(x)\{f(x)-f(c)\}+f(c)\{g(x)-g(c)\}}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}g(x).\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+f(c)\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

$$=g(c)f'(c)+f(c)g'(c).$$

(iii) $$D(f/g)=\lim_{x\to c}\frac{(f/g)(x)-(f/g)(c)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{f(x)/g(x)-f(c)/g(c)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(c)-g(x)f(c)}{g(x)g(c)(x-c)}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(c)-f(c)g(c)+f(c)g(c)-g(x)f(c)}{g(x)g(c)(x-c)}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{g(c)\{f(x)-f(c)\}-f(c)\{g(x)-g(c)\}}{g(x)g(c)(x-c)}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)g(c)}.\left[g(c)\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f(c)\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right]$$

$$=\frac{g(c)f'(c)-f(c)g'(c)}{[g(c)]^2},\quad g(c)\neq 0.$$

## 7.03 फलनों के फलन का अवकलज (Derivative of a function of funcitons) या अवकलज का शृंखला नियम (Chain rule of derivative)

माना कि $y=f(u)$ अर्थात् $y$, $u$ का फलन है तथा $u=\phi(x)$ अर्थात् $u$ स्वयं, $x$ का फलन है। माना कि स्वतंत्र चर $x$ में वृद्धि $\delta x$ के संगत $u$ में वृद्धि $\delta u$ तथा $u$ में वृद्धि के संगत $y$ में वृद्धि $\delta y$ है, तब $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta y}{\delta u}.\frac{\delta u}{\delta x}$

अब यदि $\delta x\to 0$ तब $\delta u\to 0$ अतः

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta u\to 0}\frac{\delta y}{\delta u}.\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{\delta x}$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-1.** निम्न फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $\log_e \log_e x^2$  (ii) $e^{\sin x^2}$  (iii) $\tan\left(\log_e \sqrt{1+x^2}\right)$

**हलः** (i) माना कि $y = \log_e \log_e x^2$

माना $\log_e x^2 = u, \; x^2 = v$

तब $y = \log_e u, \; u = \log_e v, \; v = x^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dv} = \frac{1}{v}, \quad \frac{dv}{dx} = 2x$$

अब $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{1}{v}.2x = \frac{1}{\log_e x^2}.\frac{1}{x^2}.2x = \frac{2}{x \log_e x^2}$$

**वैकल्पिक विधिः** माना $y = \log_e \log_e x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log_e \log_e x^2 = \frac{1}{\log x^2}\cdot\frac{d}{dx}\log_e x^2$$

$$= \frac{1}{\log x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{2x}{x^2 \cdot \log x^2}\cdot\frac{2}{x \log x^2}$$

(ii) माना कि $y = e^{\sin x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\sin x^2}\right)$$

$$= e^{\sin x^2}\frac{d}{dx}\left(\sin x^2\right) = e^{\sin x^2}\left(\cos x^2\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= e^{\sin x^2}(\cos x^2)(2x) = 2x \cos x^2 . e^{\sin x^2}$$

(iii) माना कि $y = \tan\left(\log_e \sqrt{1+x^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\tan(\log_e \sqrt{1+x^2})\right\}$$

$$= \sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2})\frac{d}{dx}(\log_e \sqrt{1+x^2})$$

$$= \sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2})\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2}).\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.\frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2}).\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(0+2x)$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)}.\sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2}).$$

**उदाहरण-2.** निम्न फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए

(i) $\dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$ (ii) $\cos x^3.\sin^2(x^5)$ (iii) $\sec(\tan\sqrt{x})$

**हल:** (i) माना $y=\dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}\right\}$$

$$=\frac{\cos(cx+d)\frac{d}{dx}\sin(ax+b)-\sin(ax+b)\frac{d}{dx}\cos(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$=\frac{\cos(cx+d).\cos(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b)-\sin(ax+b)(-\sin cx+d)\frac{d}{dx}(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$=\frac{\cos(cx+d)\cos(ax+b)(a)+\sin(ax+b)\sin(cx+d)(c)}{\cos^2(cx+d)}.$$

(iii) माना $y=\cos x^3\cdot\sin^2(x^5)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{\cos x^3\cdot\sin^2(x^5)\}$$

$$=\cos x^3\frac{d}{dx}\sin^2(x^5)+\sin^2(x^5)\frac{d}{dx}\cos x^3$$

$$=\cos x^3.2\sin(x^5)\frac{d}{dx}\sin(x^5)+\sin^2(x^5)(-\sin x^3)\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$=\cos x^3.2\sin(x^5)\cos(x^5).\frac{d}{dx}(x^5)-\sin^2(x^5)\sin x^3(3x^2)$$

$$=\cos x^3.2\sin(x^5)\cos(x^5).5x^4-\sin^2(x^5)\sin x^3(3x^2)$$

$$=10x^4\cos x^3.\sin(x^5)\cos(x^5)-3x^2\sin(x^5)\sin x^3.$$

(iii) माना $y=\sec(\tan\sqrt{x})$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sec(\tan\sqrt{x})$$

$$=\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\frac{d}{dx}(\tan\sqrt{x})$$

$$=\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$=\sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}.\frac{1}{2}x^{1/2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

**उदाहरण-3.** निम्न फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $2\sqrt{\cot\left(x^2\right)}$ (ii) $\cos\left(\sqrt{x}\right)$

**हल:** (i) माना कि $y = 2\sqrt{\cot(x^2)}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\sqrt{\cot x^2})$$

$$= 2.\frac{1}{2\sqrt{\cot x^2}}.\frac{d}{dx}(\cot x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cot x^2}}.\{-\operatorname{cosec}^2(x^2)\}\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -\frac{\operatorname{cosec}^2(x^2)}{\sqrt{\cot x^2}}.(2x) = -\frac{2x\sqrt{\tan x^2}}{\sin^2(x^2)}$$

$$= \frac{-2x\sqrt{\sin x^2}}{\sin^2(x^2)\sqrt{\cos x^2}} = \frac{-2x}{\sin(x^2)\sqrt{\sin x^2 \cos x^2}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}x}{\sin(x^2)\sqrt{2\sin x^2 \cos x^2}} = \frac{-2\sqrt{2}x}{\sin(x^2)\sqrt{\sin(2x^2)}}.$$

(ii) माना कि $y = \cos\left(\sqrt{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x}) = -\sin\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

## प्रश्नमाला 7.1

निम्न फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए

1. $\sin x^2$
2. $\tan(2x+3)$
3. $\sin\left\{\cos\left(x^2\right)\right\}$
4. $\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$
5. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$
6. $\sin x^{\circ}$
7. $\log_e\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
8. $\sec x^{\circ}$
9. $\log\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$
10. $\log_e\left\{\dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right\}$
11. $\log_e\left\{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right\}$
12. $\tan\left\{\log_e\sqrt{1+x^2}\right\}$
13. $a^{\tan 3x}$
14. $\log_e(\sec x + \tan x)$
15. $\sin^3 x.\sin 3x$

## 7.04 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज (Derivatives of inverse trigonometrical functions)

हम जानते हैं कि प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन संतत होते हैं। हम इन फलनों के अवकलजों को ज्ञात करने के लिए अवकलन का श्रृंखला नियम का प्रयोग करेंगे।

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-4.** फलन $\sin^{-1} x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए, जहाँ $x \in (-1, 1)$

**हल:** माना कि $y = \sin^{-1} x$

$\Rightarrow \quad x = \sin y$

दोनों पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर $1 = \cos y \dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} \qquad \text{. . . (1)}$$

यहाँ $\dfrac{dy}{dx}$, तभी विद्यमान होगा जबकि $\cos y \neq 0$

$\Rightarrow \quad \cos(\sin^{-1} x) \neq 0$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1} x \neq \dfrac{-\pi}{2}$ या $\dfrac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow x \neq -1, 1 \qquad \Rightarrow x \in (-1, 1)$

समीकरण (1) से $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \because \sin y = x$

**टिप्पणी:** शेष त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज निम्न होंगे, जिन्हें आप सामान्य अभ्यास से आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(iii) $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ (iv) $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

(v) $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

**उदाहरण-5.** निम्नलिखित फलनों के लिए $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

(i) $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\sqrt{\cos x}$

(iii) $y = \sqrt{\cos^{-1}\sqrt{x}}$ (iv) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$, $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

**हल:** (i) दिया है $\quad y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

यहाँ $\quad x = \tan\theta$ रखने पर

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1} x \qquad [\because\ x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} x]$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

(ii) दिया है $$y = \sin^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$$

माना $\sqrt{\cos x} = u,$ तब

$$y = \sin^{-1} u$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$\because$ $$u = \sqrt{\cos x}$$

$\therefore$ $$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

अब $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left\{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right\}$$ [(1) व (2) के प्रयोग से]

$u$ का मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\left\{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right\} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}\sqrt{\cos x}}$$

(iii) $$y = \sqrt{\cot^{-1}\sqrt{x}}$$

माना $\sqrt{x} = u$ तथा $\cot^{-1}\sqrt{x} = \cot^{-1} u = t,$ तब

$y = \sqrt{t}, t = \cot^{-1} u$ तथा $u = \sqrt{x}$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{dt}{du} = \frac{-1}{1+u^2}, \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

अब $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\frac{-1}{1+u^2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{4\sqrt{t}\sqrt{x}\left(1+u^2\right)}$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{\left(\cot^{-1} u\right)}\left(\sqrt{x}\right)\left(1+u^2\right)} \qquad [\because t = \cot^{-1} u]$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{4\sqrt{x}(1+x)\sqrt{\cot^{-1}\sqrt{x}}} \qquad [\because u = \sqrt{x}]$$

(iv) दिया है $$y = \tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$$

माना $$x = \tan\theta$$

$\therefore$ $$y = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 3\theta)$$

$\because$ $$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\Rightarrow$ $$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ $$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow \qquad 3.\frac{\pi}{6} < 3\theta < 3.\frac{\pi}{6}$$

$\Rightarrow$ $$-\frac{\pi}{2} < 3\theta < \frac{\pi}{2}$$

अतः $$y = \tan^{-1}(\tan 3\theta) \qquad \left(\because -\frac{\pi}{2} < 3\theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ $$y = 3\theta \Rightarrow y = 3\tan^{-1} x$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{1 + x^2}$$

**उदाहरण-6.** निम्न फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $\tan^{-1}(\sin e^x)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sqrt{\sin x^2}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\dfrac{a + b\cos x}{b + a\cos x}\right)$

**हल:** (i) माना कि $$y = \tan^{-1}(\sin e^x)$$

यहाँ $\sin e^x = u,\ e^x = v$ रखने पर

$$y = \tan^{-1}(u), \quad u = \sin v, \quad v = e^x$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1 + u^2}, \quad \frac{du}{dv} = \cos v, \quad \frac{dv}{dx} = e^x$$

अब, $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1 + u^2}.\cos v.e^x$$

$u$ तथा $v$ के मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sin^2 e^x}.\cos(e^x).e^x = \frac{e^x \cos e^x}{1 + \sin^2 e^x}$$

(ii) माना कि $$y = \sin^{-1}(\sqrt{\sin x^2})$$

यहाँ $\sqrt{\sin x^2} = u, \quad \sin x^2 = v, \quad x^2 = \omega$ रखने पर

$$y = \sin^{-1} u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = \sin\omega, \quad \omega = x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{du}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}, \quad \frac{dv}{d\omega} = \cos\omega, \quad \frac{d\omega}{dx} = 2x$$

अब,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}.\cos\omega.2x$$

$u$, $v$ तथा $\omega$ के मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}}.(\cos x^2)(2x) = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\left(\sin x^2\right)\left(1-\sin x^2\right)}}$$

(iii) माना कि
$$y = \sin^{-1}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$$

यहाँ $\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x} = u$ रखने पर,

$$y = \sin^{-1}u, \qquad u = \frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{(b+a\cos x)\frac{d}{dx}(a+b\cos x)-(a+b\cos x)\frac{d}{dx}(b+a\cos x)}{(b+a\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{du} = \frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(b+a\cos x)(-b\sin x)-(a+b\cos x)(-a\sin x)}{(b+a\cos x)^2} = \frac{(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}\cdot\frac{\left(a^2-b^2\right)\sin x}{\left(b+a\cos x\right)^2}$$

$$= \frac{-(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2 x}} = \frac{-\sqrt{(b^2-a^2)}}{(b+a\cos x)}$$

**उदाहरण-7.** निम्नलिखित फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ (iv) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

**हल:** (i) माना $y=\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)=\tan^{-1}\left\{\frac{(\cos x/2+\sin x/2)^2}{\cos^2 x/2-\sin^2 x/2}\right\}$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\cos x/2+\sin x/2}{\cos x/2-\sin x/2}\right)=\tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right\}$$

$\therefore$ $y=\pi/4+x/2.$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(ii) माना $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

यहाँ $x=\tan\theta$ रखने पर

$$y=\sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$=\sin^{-1}(\cos 2\theta)=\sin^{-1}\{\sin(\pi/2\pm 2\theta)\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\pm 2\theta=\frac{\pi}{2}\pm 2\tan^{-1}x$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=0\pm\frac{2}{1+x^2}=\pm\frac{2}{1+x^2}.$$

(iii) माना कि $y=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$

यहाँ $x=a\cos 2\theta$ रखने पर,

$\therefore$ $$y=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-a\cos 2\theta}{a+a\cos 2\theta}}\right)=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\right)=\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cos^{-1}(x/a)$$ $[\because x=a\cos 2\theta\Rightarrow\theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}(x/a)]$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2/a^2}}.\frac{1}{a}=-\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(iv) माना कि $$y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

यहाँ $x=\tan\theta$ रखने पर

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\tan(\theta/2)\right)=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x \qquad [\because x=\tan\theta]$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

**उदाहरण-8.** निम्न फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a\left(a^2-3x^2\right)}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$ (iv) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)$

**हल:** (i) माना कि $$y=\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a\left(a^2-3x^2\right)}\right)$$

यहाँ $x=a\tan\theta$ रखने पर,

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\tan 3\theta\right)=3\theta=3\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

अतः $$\frac{dy}{dx}=3\frac{1}{1+x^2/a^2}\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{3a}{x^2+a^2}.$$

(ii) माना $$y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$$

यहाँ $x=\cos\theta$ रखने पर

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos(\theta/2)+\sqrt{2}\sin(\theta/2)}{\sqrt{2}\cos(\theta/2)-\sqrt{2}\sin(\theta/2)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1+\tan(\theta/2)}{1-\tan(\theta/2)}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\cos^{-1}x. \qquad [\because \cos\theta=x]$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

(iii ) माना कि $$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$$

यहाँ $x^2 = \cos\theta$ रखने पर

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos(\theta/2)+\sqrt{2}\sin(\theta/2)}{\sqrt{2}\cos(\theta/2)-\sqrt{2}\sin(\theta/2)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta/2}{1-\tan\theta/2}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}x^2$$

$[\because x^2 = \cos\theta]$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}.2x\right\} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$$

(iv ) माना कि $$y = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{(\cos x/2+\sin x/2)^2}+\sqrt{(\cos x/2-\sin x/2)^2}}{\sqrt{(\cos x/2+\sin x/2)^2}-\sqrt{(\cos x/2-\sin x/2)^2}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{(\cos x/2+\sin x/2)+(\cos x/2-\sin x/2)}{(\cos x/2+\sin x/2)-(\cos x/2-\sin x/2)}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\cos x/2}{2\sin x/2}\right) = \tan^{-1}(\cot x/2) = \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

## प्रश्नमाला 7.2

निम्न फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए

1. (a) $\sin^{-1}\{2x\sqrt{1-x^2}\},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sin^{-1}(3x-4x^3) x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2. (a) $\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), x \in (-1, 1)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \ x \in (0, 1)$

3. (a) $\cos^{-1}(4x^3 - 3x), \ x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)$ (संकेत $x = \cos\theta$)

4. (a) $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right); x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \ x \in (0, \ \infty)$

5. (a) $\sin^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ (b) $\cos^{-1}(2x) + 2\cos^{-1}\left(\sqrt{1-4x^2}\right)$

(संकेत $\sin^{-1}\theta + \cos^{-1}\theta = \pi/2$) (संकेत $2x = \cos\theta$)

6. (a) $\tan^{-1}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$ (संकेत $x = \tan\theta, \ a = \tan\alpha$) (b) $\tan^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1-4^x}\right)$ (संकेत $2^x = \tan\theta$)

7. (a) $\sin\left\{2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right\}$ (संकेत $x = \cos\theta$) (b) $\cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$ (संकेत $x = \tan\theta$)

## 7.05 अस्पष्ट फलनों का अवकलन (Derivative of implicit functions)

जब किसी समीकरण में $x$ तथा $y$ दोनों चर हों तथा इसमें $y$ को $x$ के (या $x$ को $y$ के) फलन के रूप में स्पष्ट पदों में व्यक्त किया जा सके तब $y$ को $x$ के (या $x$ को $y$ के) स्पष्ट फलन (Explicit Funcition) कहते हैं। उपर्युक्त में यदि $y$ को $x$ के (या $x$ को $y$ के) फलन के रूप में स्पष्ट पदों में व्यक्त नहीं किया जा सके तो ऐसे फलनों को अस्पष्ट फलन (Implicit Function) कहते हैं।

**उदाहरणार्थ** (i) समीकण $x - 2y - 4 = 0$ में $y$ को $x$ के स्पष्ट पदों के रूप में $\left(y = \frac{1}{2}(x-4)\right)$ लिख सकते हैं। इसी प्रकार $x$ को $y$ के स्पष्ट पदों के रूप में लिख सकते हैं तब इस तरह के फलन को स्पष्ट फलन कहते हैं।

(ii) समीकरण $x^3 + y^3 + 3axy = c$ में न तो $y$ को $x$ के स्पष्ट पदों के रूप में और न ही $x$ को $y$ के स्पष्ट पदों के रूप में लिखा जा सकता है तब इस तरह के फलन को अस्पष्ट फलन कहते हैं।

अस्पष्ट फलनों का अवकलन ज्ञात करने के लिए $y$ को $x$ का फलन मानकर समीकरण $f(x, y) = 0$ के प्रत्येक पद का $x$ के सापेक्ष अवकलन करके $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करते हैं।

### दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-9.** निम्नलिखित से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

(i) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$ (ii) $\sin^2 y + \cos xy = \pi$

(iii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (iv) $2x + 3y = \sin x$

**हलः** (i) दिया है कि $$x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3 = 81$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y(2x) + x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x^2 + 2xy + 3y^2\right)\frac{dy}{dx} = -\left(3x^2 + 2xy + y^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(3x^2 + 2xy + y^2)}{x^2 + 2xy + 3y^2}.$$

(ii) $\because$ $$\sin^2 y + \cos xy = \pi$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2\sin y\frac{d}{dx}(\sin y) + (-\sin xy)\frac{d}{dx}(xy) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin y\cos y\frac{dy}{dx} - \sin(xy)\left\{x\frac{dy}{dx} + y\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2\sin y\cos y - x\sin xy)\frac{dy}{dx} = y\sin xy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y\sin xy}{2\sin y\cos y - x\sin xy} = \frac{y\sin xy}{\sin 2y - x\sin xy}.$$

(iii) $\because$ $$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2\sin x\frac{d}{dx}(\sin x) + 2\cos y\frac{d}{dx}(\cos y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin x\cos x + 2\cos y(-\sin y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2x - \sin 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$$

(iv) $\because$ $$2x + 3y = \sin x$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{3}.$$

**उदाहरण-10.** निम्न से $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए

(i) $xy + y^2 = \tan x + y$ (ii) $ax + by^2 = \cos y$

**हलः** (i) $\because$ $xy + y^2 = \tan x + y$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad (x + 2y - 1)\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$$

## 7.06 लघुगणकीय अवकलन (Logarithimic differentiation)

जब फलन $[f(x)]^{\phi(x)}$ रूप का हो तब ऐसे फलन का अवकलन ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम फलन का लघुगणक लेते हैं तथा इससे प्राप्त परिणाम का अवकलन करते हैं। इस को लघुगणकीय अवकलन विधि कहते हैं। यदि फलन, गुणनखण्डों का गुणन हो तब भी यह विधि उपयोगी सिद्ध होती है।

**क्रिया विधिः** माना कि $y = u^v$, जहाँ $u$ तथा $v$, $x$ के फलन हैं।

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर $\log_e y = \log_e u^v$

$$\Rightarrow \quad \log_e y = v\log_e u$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v.\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \log_e u.\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log_e u\frac{dv}{dx}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = u^v\left\{\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log_e u\frac{dv}{dx}\right\}$$

### दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-11.** निम्न फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए

(i) $x^x$ (ii) $(\sin x)^x$ (iii) $x^{\log_e x}$ (iv) $x^{\sin x}$

**हलः** (i) माना कि $y = x^x$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$$\log_e y = \log_e (x^x)$$

$$\Rightarrow \quad \log_e y = x\log_e x$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{1}{x} + \log_e x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\{1+\log_e x\} = x^x\{1+\log_e x\} = x^x \log_e ex$$

(ii) माना कि $\quad y = (\sin x)^x$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर $\quad \log_e y = x\log_e \sin x$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{\sin x}.\cos x + 1.\log_e \sin x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\left\{x\cot x + \log_e \sin x\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (\sin x)^x\left\{x\cot x + \log_e \sin x\right\}$$

(iii) माना कि $\quad y = x^{\log_e x}$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$$\log_e y = \log_e x.\log_e x$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.\log_e x + \frac{1}{x}.\log_e x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}\log_e x = \frac{2x^{\log_e x}}{x}.\log_e x = 2x^{(\log_e x-1)}.\log_e x$$

(iv) माना कि $\quad y = x^{\sin x}$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$$\log_e y = \sin x \log_e x$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x.\frac{1}{x} + \log_e x(\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log_e x\right\}$$

$$= x^{\sin x}\left\{\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log_e x\right\}$$

$$= x^{\sin x-1}.\sin x + x^{\sin x}.\cos x.\log_e x.$$

**उदाहरण-12.** निम्न फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $\cos x.\cos 2x.\cos 3x$ (ii) $(\log x)^{\cos x}$ (iii) $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

**हल:** (i) माना कि $\quad y = \cos x.\cos 2x.\cos 3x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = \log(\cos x) + \log(\cos 2x) + \log(\cos 3x)$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)+\frac{1}{\cos 2x}(-2\sin 2x)+\frac{1}{\cos 3x}(-3\sin 3x)$$

$$\frac{dy}{dx}=-y\{\tan x+2\tan 2x+3\tan 3x\}$$

$$=-\cos x.\cos 2x.\cos 3x\{\tan x+2\tan 2x+3\tan 3x\}$$

(ii) माना कि $y=(\log x)^{\cos x}$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$$\log y=\cos x\log(\log x)$$

$x$ सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\cos x\frac{d}{dx}\{\log(\log x)\}+\log(\log x)\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$=\cos x.\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}-\sin x.\log(\log x)$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left\{\frac{\cos x}{x\log x}-\sin x.\log(\log x)\right\}$$

$$=(\log x)^{\cos x}\left\{\frac{\cos x}{x\log x}-\sin x\log(\log x)\right\}$$

(iii) माना कि $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

दोनों पक्षों में लघुगणक लेने पर

$$\log y=\frac{1}{2}\{\log(x-1)+\log(x-2)-\log(x-3)-\log(x-4)-\log(x-5)\}$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x-3)}-\frac{1}{(x-4)}-\frac{1}{(x-5)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x-3)}-\frac{1}{(x-4)}-\frac{1}{(x-5)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x-3)}-\frac{1}{(x-4)}-\frac{1}{(x-5)}\right]$$

**उदाहरण-13.** $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए

(i) $x^y=y^x$ (ii) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+.....\infty}}}$ (iii) $(\cos x)^y=(\sin y)^x$ (iv) $x^y.y^x=\kappa$

**हलः** (i) यहाँ $x^y = y^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$y \log x = x \log y$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करन पर

$$y.\frac{1}{x} + \log x.\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y.1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left\{\log x - \frac{x}{y}\right\} = \log y - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x\log y - y)}{x(y\log x - x)}.$$

(ii ) यहाँ $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + .....\infty}}}$

$$\therefore \quad y = \sqrt{x + y}$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = x + y$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$(2y - 1)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - 1}$$

(iii ) यहाँ $(\cos x)^y = (\sin y)^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$y \log(\cos x) = x \log(\sin y)$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y.\frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \log(\cos x)\frac{dy}{dx} = x.\frac{\cos y}{\sin y}\frac{dy}{dx} + \log(\sin y).1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log(\sin y) + y\tan x}{\log(\cos x) - x\cot y}$$

(iv ) यहाँ $x^y.y^x = k$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log x^y + \log y^x = \log k$$

$$\Rightarrow \quad y\log x + x\log y = \log k$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y.\frac{1}{x} + \log x\frac{dy}{dx} + x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y.1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\log x + \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(\log y + \frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-y(x\log y + y)}{x(y\log x + x)}.$$

**उदाहरण-14.** $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए

(i) $x^a.y^b = (x+y)^{a+b}$ (ii) $\sqrt{x^2+y^2} = \log(x^2-y^2)$

(iii) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ (iv) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$

**हल:** (i) यहाँ $x^a.y^b = (x+y)^{a+b}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log x^a + \log y^b = (a+b)\log(x+y)$$

$$\Rightarrow \qquad a\log x + b\log y = (a+b)\log(x+y)$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$a.\frac{1}{x} + b.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (a+b).\frac{1}{(x+y)}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{b}{y} - \frac{a+b}{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{a+b}{x+y} - \frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \left\{\frac{b(x+y)-y(a+b)}{y(x+y)}\right\}\frac{dy}{dx} = \frac{x(a+b)-a(x+y)}{x(x+y)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

(ii) यहाँ $\sqrt{x^2+y^2} = \log(x^2-y^2)$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{(x^2-y^2)}\left(2x-2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y}{x^2-y^2}\right\}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{x^2+y^2} - x(x^2-y^2)}{y(x^2-y^2) + 2y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(iii) यहाँ $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$$\Rightarrow \qquad x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$$

वर्ग करने पर

$$x^2(1+y) = y^2(1+x)$$

$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 + x^2y - xy^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x+y) + xy(x-y) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x+y+xy) = 0$

यदि $x-y=0$ या $x=y$ जो कि दी गई समीकरण को संतुष्ट नहीं करता अतः $x-y \neq 0$

अतः $x+y+xy=0$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$1+\frac{dy}{dx}+1.y+x\frac{dy}{dx}=0$$

$\Rightarrow \quad (1+x)\frac{dy}{dx} = -(1+y)$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1+y}{1+x}\right)$

(iv) यहाँ $\quad \sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$

यहाँ $\quad x=\sin\theta,\ y=\sin\phi$ रखने पर

$$\sqrt{1-\sin^2\theta}+\sqrt{1-\sin^2\phi}=a(\sin\theta-\sin\phi)$$

$\Rightarrow \quad \cos\theta+\cos\phi=a(\sin\theta-\sin\phi)$

$\Rightarrow \quad 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}.\cos\frac{\theta-\phi}{2}=2a\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$

$\Rightarrow \quad \cot\frac{\theta-\phi}{2}=a$

$\Rightarrow \quad \frac{\theta-\phi}{2}=\cot^{-1}(a)$

$\Rightarrow \quad \theta-\phi=2\cot^{-1}(a)$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1}x-\sin^{-1}y=2\cot^{-1}a$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}=0$$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

**उदाहरण-15.** $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए–

(i) $y=\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\ldots\infty}}}$ (ii) $y=(\sin x)^{(\sin x)^{\cdots\infty}}$ (iii) $y=e^{x+e^{x+e^{x+\ldots\infty}}}$

**हलः** (i) यहाँ $$y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \ldots\infty}}}$$

या $$y = \sqrt{\log x + y}$$

वर्ग करने पर $$y^2 = \log x + y$$

$x$ के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow$ $$(2y-1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}.$$

(ii) यहाँ $$y = (\sin x)^{(\sin x)^{\ldots\infty}}$$

$$= (\sin x)^y$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = y \log(\sin x)$$

$x$ के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y.\frac{1}{\sin x}.\cos x + \log(\sin x).\frac{dy}{dx}$$

$$\left\{\frac{1}{y} - \log(\sin x)\right\}\frac{dy}{dx} = y \cot x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cot x}{1 - y\log(\sin x)}.$$

(iii) यहाँ $$y = e^x + e^x + e^x + \ldots\infty = e^{x+y}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = (x+y)\log e$$

$\Rightarrow$ $$\log y = x + y$$

$x$ के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\left(\frac{1}{y} - 1\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}.$$

## प्रश्नमाला 7.3

निम्नलिखित फलनों से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

1. (a) $2x+3y=\sin y$ (b) $x^2+xy+y^2=200$
2. (a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (b) $\tan(x+y)+\tan(x-y)=4$
3. (a) $\sin x+2\cos^2 y+xy=0$ (b) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=1$
4. (a) $(x^2+y^2)^2=xy$ (b) $\sin(xy)+\frac{x}{y}=x^2-y$
5. (a) $x^3+y^3=3axy$ (b) $x^y+y^x=a^b$
6. (a) $y=x^y$ (b) $x^a.y^b=(x-y)^{a+b}$
7. (a) $e^x+e^{x^2}+....+e^{x^5}$ (b) $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}, x>0$
8. (a) $\frac{\cos x}{\log x}, x>0$ (b) $y=\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\dots\infty}}}$
9. (a) $y\sqrt{1-x^2}=\sin^{-1}x$ (b) $y\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}$
10. (a) $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\dots\infty}}}$ (b) $y^x+x^y+x^x=a^b$

## 7.07 फलनों के प्राचलिक रूपों के अवकलज (Derivative of parametric functions)

यदि चरों $x$ तथा $y$ दोनों किसी अन्य चर के पदों में व्यक्त किए जाते हैं जैसे $x=f(t), y=\phi(t)$ तब चर राशि $t$ को प्राचल कहते है तथा इस प्रकार की समीकरण को प्राचलिक समीकरण (parametric equation) कहते हैं। यदि दी गई प्राचलिक समीकरण से प्राचल का विलोपन, कठिन हो तब $\frac{dy}{dx}$ का मान निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}, \text{ जहाँ } \frac{dx}{dt}\neq 0.$$

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-16.** $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि

(i) $x=2at^2, y=at^4$ (ii) $x=\sin t, y=\cos 2t$ (iii) $x=4t, y=\frac{4}{t}$

**हल:** (i) यहाँ $x=2at^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=4at$

तथा $y=at^4 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=4at^3$

अतः, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{4at^3}{4at}=t^2.$

(ii) यहाँ $x = \sin t \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t$

तथा $y = \cos 2t \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$

अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{2\sin 2t}{\cos t} = \frac{-2.2\sin t\cos t}{\cos t} = -4\sin t$

(iii) यहाँ $x = 4t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4$

तथा $y = \frac{4}{t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{t^2}$

अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-4/t^2}{4} = -\frac{1}{t^2}$

**उदाहरण-17.** $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि

(i) $x = \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right), \quad y = \cos^{-1}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ (ii) $x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

(iii) $x = e^{\theta}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right), \quad y = e^{-\theta}\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)$

**हल:** (i) $x = \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right), \quad y = \cos^{-1}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$

यहाँ $t = \tan\theta$ रखने पर,

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta \qquad \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2$$

तथा $$y = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta \qquad \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2$$

अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2}{2} = 1.$

(ii) यहाँ $x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

$t$ के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^3)(3a) - 3at(0+3t^2)}{(1+t^3)^2} = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2}$$

तथा $$\frac{dy}{dt}=\frac{(1+t^3)(6at)-3at^2(0+3t^2)}{(1+t^3)^2}=\frac{6at-3at^4}{(1+t^3)^2}$$

अतः $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{6at-3at^4}{3a-6at^3}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

(iii) यहाँ $$x=e^{\theta}\left(\theta+\frac{1}{\theta}\right),\quad y=e^{-\theta}\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)$$

$\theta$ के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{d\theta}=e^{\theta}.\left(\theta+\frac{1}{\theta}\right)+e^{\theta}\left(1-\frac{1}{\theta^2}\right)=e^{\theta}\left(\frac{\theta^2-1+\theta^3+\theta}{\theta^2}\right)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-e^{-\theta}\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)+e^{-\theta}\left(1+\frac{1}{\theta^2}\right)=e^{-\theta}\left(\frac{\theta^2+1-\theta^3+\theta}{\theta^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{e^{-\theta}(\theta^2+1-\theta^3+\theta)}{e^{\theta}(\theta^2-1+\theta^3+\theta)}.$$

**उदाहरण-18.** यदि $x^2+y^2=t-\frac{1}{t}$ तथा $x^4+y^4=t^2+\frac{1}{t^2}$ तब सिद्ध कीजिए $x\frac{dy}{dx}+y=0$

**हल:** दिया है $t-\frac{1}{t}=x^2+y^2$ तथा $t^2+\frac{1}{t^2}=x^4+y^4$

$\because$ $$\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$$

$\Rightarrow$ $$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4-2$$

$\Rightarrow$ $$x^4+y^4+2x^2y^2=x^4+y^4-2$$

$\therefore$ $$x^2y^2=-1$$

$x$ के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$x^2.2y\frac{dy}{dx}+2x.y^2=0$$

$\Rightarrow$ $$2xy\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=0$$

$\Rightarrow$ $$x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

## प्रश्नमाला 7.4

$\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि

1. (a) $x = a\sec t,\ y = b\tan t$ (b) $x = \log t + \sin t,\ y = e^t + \cos t$
2. (a) $x = \log t,\ y = e^t + \cos t$ (b) $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$
3. (a) $x = \cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sin\theta - \sin 2\theta$ (b) $x = \theta - \sin\theta,\ y = a(1+\cos\theta)$
4. (a) $x = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ (b) $x = a\left(\cos t + \log\tan\dfrac{t}{2}\right),\ y = a\sin t$
5. (a) $x = \sqrt{\sin 2\theta},\ y = \sqrt{\cos 2\theta}$ (b) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$
6. यदि $x^3 + y^3 = t - \dfrac{1}{t}$ तथा $x^6 + y^6 = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$ तब सिद्ध कीजिए कि $x^4 y^2 \dfrac{dy}{dx} = 1$

## 7.08 द्वितीय कोटि का अवकलज (Second order derivative)

माना कि $y = f(x)$

तब $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ (1)

अब यदि $f'(x)$ अवकलनीय है तब हम समीकरण (1) का $x$ के सापेक्ष पुनः अवकलन कर सकते है। तब बायाँ पक्ष $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ हो जाता है, जिसे $f(x)$ का द्वितीय कोटि का अवकलज कहते हैं तथा संकेत में इसे $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ से निरूपित करते हैं। $f(x)$ के द्वितीय क्रम या कोटि के अवकलज को $f''(x)$ से भी निरूपित करते हैं। इसी प्रकार उच्च कोटि के अवकलन भी इसी प्रकार प्राप्त किए जाते हैं।

### दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-19.** निम्न फलनों के द्वितीय क्रम के अवकलज ज्ञात कीजिए

(i) $x^{20}$ (ii) $x^3\log x$ (iii) $e^{6x}.\cos 3x$

(iv) $\log(\log x)$ (v) $\sin(\log x)$ (vi) $\tan^{-1} x.$

**हल:** (i) माना कि $y = x^{20}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = 20x^{19}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 20.19x^{18} = 380x^{18}.$

(ii) माना कि $y = x^3\log x$

$\Rightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = x^3.\dfrac{1}{x} + \log x.3x^2 = x^2 + 3x^2\log x$

$\therefore$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2x + 3\left\{x^2.\dfrac{1}{x} + \log x.2x\right\}$

$= 2x + 3(x + 2x\log x) = 5x + 6x\log x = x(5 + 6\log x).$

(iii) माना कि $y = e^{6x}\cos 3x$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{6x}(-\sin 3x).3 + \cos 3x.e^{6x}.6$

$= 6e^{6x}.\cos 3x - 3e^{6x}.\sin 3x$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6\{e^{6x}(-\sin 3x).3 + \cos 3x.e^{6x}.6\} - 3\{e^{6x}.\cos 3x.3 + \sin 3x.e^{6x}.6\}$

$= -18e^{6x}\sin 3x + 36e^{6x}\cos 3x - 9e^{6x}\cos 3x - 18e^{6x}\sin 3x$

$= 9e^{6x}(3\cos 3x - 4\sin 3x).$

(iv) माना कि $y = \log(\log x)$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\log x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\log x}\right)$

$$= -\frac{1}{x^2\log x} + \frac{1}{x}\left\{\frac{\log x.(0) - 1.\frac{1}{x}}{(\log x)^2}\right\} = -\frac{1}{x^2\log x} + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x(\log x)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2\log x} - \frac{1}{x^2(\log x)^2} = -\frac{1}{x^2\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right).$$

(v) माना कि $y = \sin(\log x)$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \cos(\log x).\frac{1}{x}$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \cos(\log x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}(-\sin(\log x)).\frac{1}{x}$

$$= -\frac{\cos(\log x)}{x^2} - \frac{\sin(\log x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\{\cos(\log x) + \sin(\log x)\}.$$

(vi) माना कि $y = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+x^2)(0) - 1.(0+2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

**उदाहरण-20.** यदि $y = (x + \sqrt{x^2-1})^m$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0.$$

**हल:** दिया है कि $$y=(x+\sqrt{x^2-1})^m$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=m\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{m-1}\left\{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right\}$$

$$=m(x+\sqrt{x^2-1})^{m-1}\frac{(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{m(x+\sqrt{x^2-1})^m}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{my}{\sqrt{x^2-1}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(x^2-1\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=m^2y^2$$

पुनः $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\left(x^2-1\right)\cdot 2\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{d^2y}{dx^2}+2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=m^2 2y\frac{dy}{dx}$$

$2\frac{dy}{dx}$ से भाग देने पर

$$\left(x^2-1\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-m^2y=0.$$

**उदाहरण-21.** यदि $x^3+y^3+3ax^2=0$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2a^2x^2}{y^5}=0.$$

**हल:** यहाँ $$x^3+y^3+3ax^2=0 \qquad (1)$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}+3a.2x=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x^2+2ax}{y^2}\right) \qquad (2)$$

पुनः $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left[\frac{y^2(2x+2a)-(x^2+2ax)2y\frac{dy}{dx}}{(y^2)^2}\right]$$

$\frac{dy}{dx}$ का मान समीकरण (2) से रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y^3}\left\{y(2x+2a)+\left(x^2+2ax\right)2.\frac{\left(x^2+2ax\right)}{y^2}\right\}$$

$$=-\frac{2}{y^5}\left\{y^3(x+a)+x^4+4a^2x^2+4ax^3\right\}$$

समीकरण (1) से $y^3 = -\left(3ax^2 + x^3\right)$ रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{y^5}\left\{-\left(3ax^2 + x^3\right)(x+a) + x^4 + 4a^2x^2 + 4ax^3\right\}$$

$$= -\frac{2}{y^5}\left\{-3ax^3 - x^4 - 3a^2x^2 - ax^3 + x^4 + 4a^2x^2 + 4ax^3\right\}$$

$$= -\frac{2}{y^5}\left(a^2x^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$$

**उदाहरण-22.** यदि $y = \sin\left(a\sin^{-1}x\right)$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 + a^2y = 0$$

**हल:** यहाँ $y = \sin(a\sin^{-1}x)$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_1 = \cos\left(a\sin^{-1}x\right).\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

वर्ग करने पर $(1-x^2)y_1^2 = a^2\cos^2(a\sin^{-1}x) = a^2\{1-\sin^2(a\sin^{-1}x)\}$

$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_1^2 = a^2(1-y^2)$

पुनः $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$(1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = a^2(0-2yy_1)$$

$2y_1$ से भाग देने पर

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + a^2y = 0.$$

## प्रश्नमाला 7.5

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि

(a) $y = x^3 + \tan x$ (b) $y = x^2 + 3x + 2$ (c) $y = x\cos x$

(d) $y = 2\sin x + 3\cos x$ (e) $y = e^{-x}\cos x$ (f) $y = a\sin x - b\cos x$

2. यदि $y = a\sin x + b\cos x$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

3. यदि $y = \sec x + \tan x$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

4. यदि $y = a\cos nx + b\sin nx$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0.$$

5. यदि $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ तब $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ पर $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $x^3+y^3-3axy=0$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^2xy}{(ax-y^2)^3}.$$

7. यदि $y=\sin^{-1}x$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0.$$

8. यदि $y=(\sin^{-1}x)^2$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2=0.$$

## 7.09 रोले का मध्यमान प्रमेय (Rolle's mean value theorem)

यदि एक वास्तविक फलन $f$ संवृत अन्तराल $[a, b]$ में निम्न प्रकार परिभाषित है

(i) $f$ संतृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत है।

(ii) $f$ विवृत अन्तराल $(a, b)$ में अवकलनीय है।

(iii) $f(a)=f(b)$

तब विवृत अन्तराल $(a, b)$ में कम से कम एक बिन्दु $c$ इस प्रकार विद्यमान होगा कि $f'(c)=0$

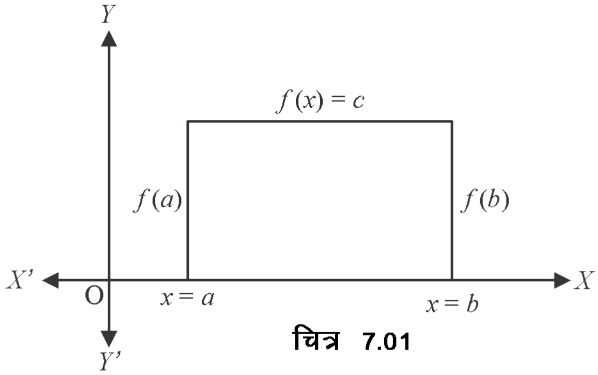
## 7.10 रोले प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical meaning of Rolle's theorem)

रोले प्रमेय की ज्यामितीय व्याख्या हम निम्न दो स्थितियों में करते हैं–

**स्थिति I:** जब फलन $f$ अचर हो अर्थात्

$$f(x)=c, \quad \forall\, x\in[a,b]$$

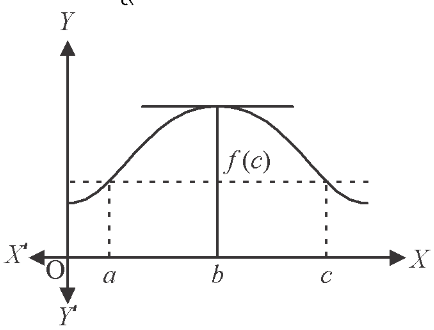
इस फलन का आरेख $x$-अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा होगी। अतः विवृत अन्तराल $(a, b)$ के प्रत्येक बिन्दु के लिए $f'(x)=0$ होगा (देखे चित्र 7.01)



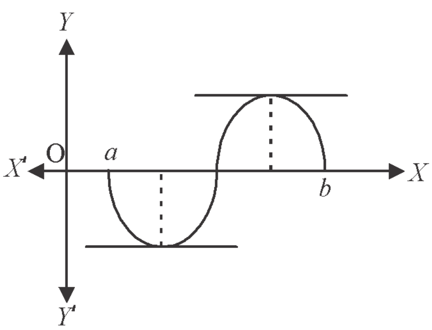

चित्र 7.01

**स्थिति II:** जब फलन $f$, अचर नहीं हो।

रोल प्रमेय की प्रथम शर्त से फलन $f$, अन्तराल $[a, b]$ में संतत है तथा द्वितीय शर्त के अनुसार अन्तराल $(a, b)$ में $f$ अवकलनीय है अर्थात् $f$ के आरेख पर बिन्दु $x=a$ तथा $x=b$ के मध्य प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा खीचीं जा सकती है। तृतीय शर्त के अनुसार $f(a)=f(b)$ है। इससे स्पष्ट है कि फलन $f(x)$ का मान या तो पहले बढ़ेगा, फिर घटेगा या विलोम (देखे चित्र 7.02)। दोनों ही स्थितियों में आरेख पर कम से कम एक ऐसा बिन्दु स्थिति होगा जहाँ पर खीचीं गई स्पर्श रेखा, $x$-अक्ष के समान्तर होगी, अर्थात् इन बिन्दुओं पर $f'(x)=0$ होगा। अर्थात् इन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य हो जाती है।




(a)




(b)

चित्र 7.02

## 7.11 लाग्राँज मध्यमान प्रमेय (Lagrange's mean value theorem)

यदि एक वास्तविक फलन $f$, संवृत अन्तराल $[a, b]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि

(i) $f$, $[a, b]$ में संतत है।

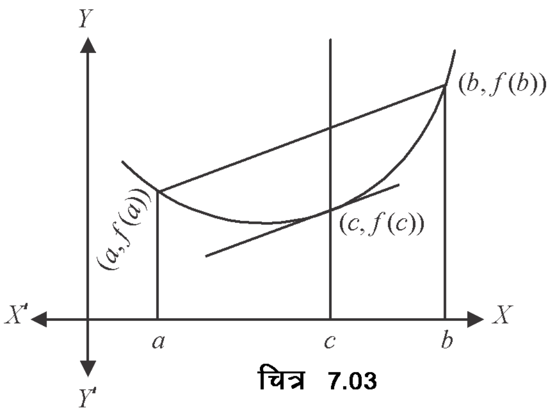
(ii) $f$, $(a, b)$ में अवकलनीय है।

तब अन्तराल $(a, b)$ में कोई बिन्दु $c$ इस प्रकार स्थित होगा कि $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**टिप्पणी:** ध्यान देने योग्य है कि मध्यमान प्रमेय, रोल प्रमेय का विस्तार है।

## 7.12 लाग्राँज मध्यमान प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ

माना फलन $y=f(x)$ का आलेख, निम्नानुसार चित्र 7.03 है। चूँकि $f'(c)$ वक्र $y=f(x)$ के बिन्दु $(c, f(c))$ पर खीचीं गई स्पर्श रेखा की प्रवणता है। चित्र से स्पष्ट है कि $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ बिन्दुओं $(a, f(a))$ तथा $(b, f(b))$ के मध्य खीचीं गई छेदक रेखा की प्रवणता है। मध्यमान प्रमेय में कहा गया है कि अन्तराल $(a, b)$ में एक बिन्दु $c$ इस प्रकार है कि बिन्दु $(c, f(c))$ पर खीचीं गई स्पर्श रेखा, बिन्दुओं $(a, f(a))$ और $(b, f(b))$ के मध्य खीचीं गई छेदक रेखा के समान्तर होती है।




चित्र 7.03

## 7.13 लाग्राँज मध्यमान प्रमेय का अन्य रूप (Other form of Lagrange's mean value theorem)

यदि हम लाग्राँज मध्यमान प्रमेय में $b=a+h,\ h>0, c=a+\theta h,\ 0<\theta<1$ ले तब $c\in(a,b)\Rightarrow a+\theta h\in(a, a+h)$, तथा लाग्राँज मध्यमान प्रमेय निम्न रूप ले लेती है–

यदि वास्तविक फलन $f$ अन्तराल $[a, a+h]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि–

(i) $f$, संवृत अन्तराल $[a, a+h]$ मे संतत है।

(ii) $f$, विवृत्त अन्तराल $(a, a+h)$ में अवकलनीय है तब अन्तराल $(0,1)$ में कम से कम एक वास्तवितक संख्या $\theta$ इस प्रकार विद्यमान होगी कि $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$

**टिप्पणी:** इस प्रमेय के लिए $f(a)=f(b)$ प्रतिबन्ध आवश्यक नहीं है। यदि $f(a)=f(b)$ हो जाता है। तब यह प्रमेय रोले प्रमेय में परिवर्तित हो जाती है।

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-23.** निम्न फलनों के लिए रोले प्रमेय को सत्यापित कीजिए

(i) $f(x)=\sqrt{4-x^2};\quad x\in[-2, 2]$ (ii) $f(x)=e^x\sin x;\quad x\in[0, \pi]$

**हल:** (i) स्पष्ट है कि फलन $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, अन्तराल $[-2, 2]$ में संतत है। तथा $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, जो कि विवृत अन्तराल $(-2, 2)$ के प्रत्येक बिन्दु पर परिमित व विद्यमान है अर्थात् $f(x)$, अन्तराल $(-2, 2)$ में अवकलनीय है।

$\because \quad f(-2)=0=f(2)$

$\Rightarrow \quad f(-2)=f(2)$

उपरोक्त से फलन $f(x)$, दिए गए अन्तराल मे रोले प्रमेय के तीनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है

अब, $\quad f'(c)=0\Rightarrow\dfrac{-c}{\sqrt{4-c^2}}=0$

$\Rightarrow \quad c=0 \qquad \because c\in(-2, 2)$

अतः रोले प्रमेय सत्यापित होती है।

(ii) $$f(x) = e^x \sin x, \ \ x \in [0, \pi]$$

स्पष्ट है कि फलन $f(x)$, अन्तराल $[0, \pi]$ में संतत है तथा $f'(x) = e^x \cos x + e^x \sin x$, जो कि अन्तराल $(0, \pi)$ के प्रत्येक बिन्दु पर परिमित व विद्यमान है अर्थात् $f(x)$, $(0, \pi)$ में अवकलनीय है।

$\because$ $$f(0) = 0 = f(\pi)$$

उपर्युक्त से फलन $f(x)$ दिए गए अन्तराल में रोले प्रमेय के तीनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है।

अब $$f'(c) = 0 \Rightarrow e^c \cos c + e^c \sin c = 0$$

$\Rightarrow$ $$e^c(\cos c + \sin c) = 0$$

$\Rightarrow$ $$\cos c + \sin c = 0$$

$\Rightarrow$ $$c = \frac{3\pi}{4} \qquad \because c \in (0, \pi)$$

अतः रोले प्रमेय सत्यापित होती है।

**उदाहरण-24.** निम्न फलनों के लिए रोले प्रमेय की शर्तों एवं निष्कर्षो की जाचँ कीजिए

(i) $f(x) = 3 + (x-2)^{2/3}; \ \ x \in [1, 3]$ (ii) $f(x) = \sin\frac{1}{x}; \ \ x \in [-1, 1]$

**हल:** (i) $$f(x) = 3 + (x-2)^{2/3}; \ \ x \in [1, 3]$$

स्पष्ट है कि $f(x)$, अन्तराल $[1, 3]$ में सतंत है।

$f'(x) = \dfrac{2}{3(x-2)^{1/3}}$, जो कि $x = 2 \in [1, 3]$ पर अपरिमित $(\infty)$ है अर्थात् $f(x), x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है फलतः $f(x)$, अन्तराल $(1, \ 3)$ में अवकलनीय नहीं है।

अतः $f(x)$ के लिए अन्तराल $[1, \ 3]$ में रोले प्रमेय लागू नहीं होती है।

(ii) $$f(x) = \sin\frac{1}{x}; \ \ \ x \in [-1, 1]$$

$\because$ फलन $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, x = 0$ पर संतत नहीं है तथा $0 \in [-1, 1]$ फलतः $f(x), [-1, 1]$ में संतत् नहीं है। फलनः $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ के लिए अन्तराल $[-1, 1]$ में रोले प्रमेय सत्यापित नहीं होती है।

**उदाहरण-25.** निम्न लिखित फलनों के लिए लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय की वैधता की जाचँ कीजिए

(i) $f(x) = |x|; \ \ \ x \in [-1, 1]$ (ii) $f(x) = \dfrac{1}{x}; \ \ \ x \in [-1, 1]$

(iii) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}; \ \ \ x \in [1, 3]$ (iv) $f(x) = x - 2\sin x; \ \ \ x \in [-\pi, \pi]$

**हल:** (i) $\because f(x) = |x|$ सर्वत्र संतत फलन है अतः यह अन्तराल $[-1, \ 1]$ में भी संतत होगा, परन्तु $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है फलतः फलन $f(x)$, अन्तराल $(-1, \ 1)$ में अवकलनीय नहीं है। अतः $f(x)$ के लिए अन्तराल $[-1, \ 1]$ में लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय लागू नहीं होती है।

(ii) $\because f(x) = \dfrac{1}{x}; \ \ x = 0 \in [-1, 1]$ पर संतत नहीं है। अर्थात $f(x)$, अन्तराल $[-1, \ 1]$ में संतत नहीं है। फलतः दिए गए फलन के लिए लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय लागू नहीं होती है।

(iii) यहाँ $f(x) = x - \frac{1}{x}$;  $x \in [1, 3]$, जो कि अन्तराल [1, 3] में संतत है तथा $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, जो कि अन्तराल (1, 3) में परिमित व विद्यमान है अतः $f(x)$, अन्तराल (1, 3) में अवकलनीय है। फलतः फलन $f(x)$, लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय के दोनों प्रतिबन्धों को सतुंष्ट करता है।

अब,
$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{c^2} = \frac{3 - \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{1}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{c^2} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{3} \in (1, 3)$$

अतः लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय सत्यापित होती है।

(iv) यहाँ $f(x) = x - 2\sin x$;  $x \in [-\pi, \pi]$ स्पष्ट है कि फलन $f(x)$, अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में संतत व अवकलनीय है अतः अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय दोनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है अतः अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में एक बिन्दु $c$ इस प्रकार विद्यमान होगा कि

$$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi - (-\pi)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2\cos c = \frac{\pi - (-\pi)}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos c = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2} \qquad \because c = \pm\frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$$

अतः लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय सत्यापित होती है।

## प्रश्नमाला 7.6

1. निम्नलिखित फलनों के लिए रोल प्रमेय की सत्यता की जाचँ कीजिए

   (a) $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$;  $x \in [\pi/4, 5\pi/4]$  (b) $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$;  $x \in [a, b], m, n \in N$

   (c) $f(x) = |x|$;  $x \in [-1, 1]$  (d) $f(x) = x^2 + 2x - 8$;  $x \in [-4, 2]$

   (e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 3 - x & ; \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$  (f) $f(x) = [x]$;  $x \in [-2, 2]$

2. निम्नलिखित फलनों के लिए रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए

   (a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$;  $x \in [-3, -2]$  (b) $f(x) = e^{-x}\sin x$;  $x \in [0, \pi]$

   (c) $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$;  $x \in [0, 1]$  (d) $f(x) = \cos 2x$;  $x \in [0, \pi]$

3. निम्नलिखित फलनों के लिए लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय की सत्यता की जाचँ कीजिए

(a) $f(x) = x + \frac{1}{x}; \quad x \in [1, 3]$ (b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}; \quad x \in [0, 2]$

(c) $f(x) = x^2 - 3x + 2; \quad x \in [-2, 3]$ (d) $f(x) = \frac{1}{4x - 1}; \quad x \in [1, 4]$

## विविध उदाहरण

**उदाहरण-26.** निम्नलिखित फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए

(a) $\cos x^{\circ}$ (b) $\sin\log(1+x^2)$ (c) $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

(d) $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$ (e) $\log_7(\log x)$

**हल:** (a) माना कि $y = \cos x^{\circ}$

$\because$ $180^{\circ} = \pi$ रेडियन

$x^{\circ} = \frac{\pi}{180}x$ रेडियन

$y = \cos\left(\frac{\pi x}{180}\right)$

$x$ के सापेक्ष अवकल करने पर

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{-\pi}{180}\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{-\pi}{180}\sin x^{\circ}.$$

(b) माना कि $y = \sin\log\left(1+x^2\right)$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \cos\log\left(1+x^2\right)\frac{d}{dx}\left\{\log\left(1+x^2\right)\right\}$

$$= \cos\left(\log\left(1+x^2\right)\right).\frac{1}{\left(1+x^2\right)}\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)$$

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)}\cos\left(\log(1+x^2)\right)(0+2x) = \frac{2x}{1+x^2}\cos\log(1+x^2)$$

(c) माना कि $y = \log\tan\left(\pi/4 + x/2\right)$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan(\pi/4+x/2)}\frac{d}{dx}\{\tan(\pi/4+x/2)\}$

$$= \frac{1}{\tan(\pi/4+x/2)}\sec^2(\pi/4+x/2)\frac{d}{dx}(\pi/4+x/2)$$

$$= \frac{1}{2\sin(\pi/4+x/2)\cos(\pi/4+x/2)}$$

$$= \frac{1}{\sin 2(\pi/4+x/2)} = \frac{1}{\sin(\pi/2+x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

(d) माना कि $$y=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+a^2})}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

$$=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+a^2})}.\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

(e) माना कि $y=\log_7(\log x)=\dfrac{1}{\log_e 7}\{\log_e(\log x)\}$, (आधार परिवर्तन के सूत्र द्वारा)

जो सभी वास्तवितक संख्याओं $x>1$ के लिए परिभाषित है।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(\log 7)}\frac{d}{dx}\{\log(\log x)\}$$

$$=\frac{1}{\log_7}.\frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x\log 7.\log x}.$$

**उदाहरण-27.** निम्नलिखित का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(a) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x^{1/3}+a^{1/3}}{1-(ax)^{1/3}}\right)$ (c) $\sin^{-1}(x\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2})$.

**हल:** (a) माना कि $$y=\sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{2^x\cdot 2}{1+(2^x)^2}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \qquad [2^x=\tan\theta \text{ रखने पर}]$$

$$=\sin^{-1}(\sin 2\theta)=2\theta=2\tan^{-1}(2^x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{1}{1+(2^x)^2}\frac{d}{dx}(2^x)=\frac{2}{(1+4^x)}.2^x\log 2=\frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}.$$

(b) माना कि $$y=\tan^{-1}\left(\frac{x^{1/3}+a^{1/3}}{1-(ax)^{1/3}}\right)$$

(सूत्र $\tan^{-1}\left(\dfrac{A+B}{1-AB}\right)=\tan^{-1}A+\tan^{-1}B$ का प्रयोग करने पर)

$$y=\tan^{-1}(x^{1/3})+\tan^{-1}(a^{1/3})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+(x^{1/3})}\frac{d}{dx}(x^{1/3})+0$$

$$=\frac{(1/3)x^{-2/3}}{1+x^{2/3}}=\frac{1}{3x^{2/3}(1+x^{2/3})}.$$

(c) माना कि $$y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2})$$

(सूत्र $\sin^{-1}A-\sin^{-1}B=\sin^{-1}(A\sqrt{1-B^2}-B\sqrt{1-A^2})$ का प्रयोग करने पर)

$$y=\sin^{-1}(x)-\sin^{-1}(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

**उदाहरण-28.** $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x=(t+1/t)^a$ तथा $y=a^{t+1/t}$, जहाँ $a$ अचर है।

**हल:** स्पष्ट है कि दोनों $x$ तथा $y$ समस्त वास्तविक संख्या $t\neq 0$ के लिए परिभाषित है।

अब $$\frac{dx}{dt}=a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)=a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}\left(1-\frac{1}{t^2}\right).$$

यहाँ $\frac{dx}{dt}\neq 0$ यदि $1-\frac{1}{t^2}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad t\neq\pm 1$

तथा $$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(a^{t+1/t})=a^{t+1/t}.\log a\frac{d}{dt}(t+1/t)=a^{t+1/t}\cdot\log a\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

अब, $t\neq\pm 1$ के लिए

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{a^{(t+1/t)}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a(t+1/t)^{a-1}(1-1/t^2)}=\frac{a^{(t+1/t)}\log a}{a(t+1/t)^{a-1}}.$$

**उदाहरण-29.** यदि $p^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$ तब सिद्ध कीजिए कि $p+\frac{d^2p}{d\theta^2}=\frac{a^2b^2}{p^3}$.

**हल:** दिया है कि $$p^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta \tag{1}$$

$\theta$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2P\frac{dp}{d\theta}=-2a^2\cos\theta\sin\theta+2b^2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\left(b^2-a^2\right)\sin 2\theta \tag{2}$$

$\theta$ के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$2p\frac{d^2p}{d\theta^2}+2\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2=2\left(b^2-a^2\right)\cos 2\theta$$

दोनों तरफ $p^2$ से गुणा करने पर

$$p^3\frac{d^2p}{d\theta^2}+p^2\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2=p^2\left(b^2-a^2\right)\cos 2\theta$$

दोनों तरफ $p^4$ जोड़ने पर

$$p^4 + p^3\frac{d^2p}{d\theta^2} + \left(p\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = p^4 + p^2\left(b^2 - a^2\right)\cos 2\theta$$

समीकरण (2) से मान रखने पर

$$p^4 + p^3\frac{d^2p}{d\theta^2} + \frac{\left(b^2 - a^2\right)^2}{4}\cdot\sin^2 2\theta = p^4 + p^2(b^2 - a^2)\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \quad p^4 + p^3\frac{d^2p}{d\theta^2} + (b^2 - a^2)\sin^2\theta\cos^2\theta = p^2\{p^2 + (b^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\}$$

$$= p^2\{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) + (b^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\} \text{[समीकरण (1) से]}$$

$$= p^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)$$

$$= (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) \quad \text{[समीकरण (1) से]}$$

$$\Rightarrow \quad p^4 + p^3\frac{d^2p}{d\theta^2} = a^2b^2(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta\cos^2\theta - (b^2 - a^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= a^2b^2(\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta) = a^2b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \quad p + \frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^3}$$

**उदाहरण-30.** यदि $x = a\cos\theta + b\sin\theta,\ \ y = a\sin\theta - b\cos\theta$ तब सिद्ध कीजिए कि $y^2y_2 - xy_1 + y = 0$

**हल:** दी गई समीकरण, $x = a\cos\theta + b\sin\theta,\ y = a\sin\theta - b\cos\theta$ से,

$$x^2 + y^2 = \left(a\cos\theta + b\sin\theta\right)^2 + \left(a\sin\theta - b\cos\theta\right)^2 = a^2 + b^2$$

$x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\Rightarrow \quad 2x + 2yy_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -\frac{x}{y} \qquad (1)$$

पुनः $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_2 = -\left\{\frac{y.1 - xy_1}{y^2}\right\} = -\left\{\frac{y + x\cdot x/y}{y^2}\right\} \qquad \text{[समीकरण (1) से]}$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} \qquad (2)$$

अब,

$$y^2y_2 - xy_1 + y = y^2\left(-\frac{y^2 + x^2}{y^3}\right) - x\left(\frac{-x}{y}\right) + y$$

$$= \frac{1}{y}\{-y^2 - x^2 + x^2 + y^2\} = 0.$$

**उदाहरण-31.** निम्न फलनों के लिए रोल प्रमेय की शर्तों एवं निष्कर्षो की जाँच कीजिए

(i) $f(x)=\log\left\{\dfrac{x^2+ab}{x(a+b)}\right\}; \quad x\in[a,b], x\neq 0$ (ii) $f(x)=\tan x; \quad x\in[0,\pi]$

**हल:** (i)
$$f(x)=\log\left\{\frac{x^2+ab}{x(a+b)}\right\}; \quad x\in[a,b], x\neq 0$$
$$=\log(x^2+ab)-\log x-\log(a+b)$$

स्पष्ट है कि $f(x)$, अन्तराल $[a, b]$ में संतत है तथा लघुगणकीय फलन, अवकलनीय होते है। अतः $f(x)$, $(a, b)$ में अवकलनीय है।

अब
$$f(a)=\log\left\{\frac{a^2+ab}{a(a+b)}\right\}=\log 1=0$$

तथा
$$f(b)=\log\left\{\frac{b^2+ab}{b(a+b}\right\}=\log 1=0$$

$\Rightarrow$
$$f(a)=f(b)$$

उपरोक्त से $f(x)$, रोले प्रमेय के तीनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है। अतः
$$f'(c)=0$$

$\Rightarrow$
$$\frac{c^2-ab}{c(c^2+ab)}=0$$

$\Rightarrow$
$$c=\sqrt{ab}\in(a,b)$$

अतः रोले, दिए गए फलन के लिए सत्यापित होती है।

(ii) $\because$ $f(x)=\tan x$, $x=\pi/2$ पर संतत नहीं है तथा $\pi/2\in[0,\pi]$ अर्थात् $f(x)$, अन्तराल $[0, \pi]$ में संतत नहीं है फलनः फलन $f(x)=\tan x; \quad x\in=[0,\pi]$ के लिए रोले प्रमेय लागू नहीं होती है।

## विविध प्रश्नमाला–7

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक दिए गए फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

1. $\sin^{-1}(x\sqrt{x}); \quad 0\le x\le 1$

2. $\dfrac{\cos^{-1}x/2}{\sqrt{2x+7}}; \quad -2<x<2$

3. $\cot^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right\}; \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

4. $x^3.e^x.\sin x$

5. $\log\left(\dfrac{x}{a^x}\right)$

6. $(x\log x)^{\log x}$

7. $\log x=\tan^{-1}\left(\dfrac{y-x^2}{x^2}\right)$

8. $x^{x^2-3}+(x-3)^{x^2}; \quad x>3$

9. $y=12(1-\cos t), \quad x=10(t-\sin t)$

10. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

11. यदि $\cos^{-1}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\tan^{-1}a$ तब सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$

12. यदि $\sin y = x\sin(a+y)$ तब सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

13. यदि $y = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $y = \sin(\sin x)$ तब प्रदर्शित कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x.\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0.$$

15. (a) यदि $y = e^{ax}\sin bx$ तब प्रदर्शित कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + \left(a^2 + b^2\right)y = 0.$$

(b) यदि $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$(1-x^2)y_2 = 3ay_1 - y = 0.$$

16. निम्नलिखित फलनों के लिए रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

(a) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}; \quad x \in [0, 2]$ (b) $f(x) = (x-1)(x-3); \quad x \in [1, 3]$

17. निम्नलिखित फलनों के लिए लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय की सत्यता की जाँच कीजिए।

(a) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3); \quad x \in [0, 4]$ (b) $f(x) = \begin{cases} 1+x & ; \quad x < 2 \\ 5-x & ; \quad x \geq 2 \end{cases}; \quad x \in [1, 3]$

## महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित फलन $f$ तथा $g$, अन्तराल $[a, b]$ के किसी बिन्दु $c$ पर अवकलनीय है तो $f \pm g, fg$ तथा $f/g$ बिन्दु $c$ पर अवकलनीय होंगे तथा

(i) $D(f \pm g)(c) = f'(c) \pm g'(c)$ (ii) $D(fg)(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

(iii) $D(f/g)(c) = \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{[g(c)]^2}$ ; शर्त $g(c) \neq 0$

2. यदि $y = f(u)$ तथा $u = \phi(x)$ तो $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

3. (i) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; (ii) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; (iii) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$

(iv) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2}$ ; (v) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ ; (vi) $\frac{d}{dx}\left(\cos ec^{-1}x\right) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

4. अस्पष्ट फलनों का अवकलन ज्ञात करने के लिए $y$ को $x$ का फलन मानकर समीकरण $f(x, y) = 0$ के प्रत्येक पद का $x$ के सापेक्ष अवकलन करके $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करते हैं।

5. $y = u^v$ प्रकार के फलनों के अवकलन ज्ञात करने के लिए दोनों तरफ log लेकर अवकलन करना चाहिए।

6. $x = f(t), y = g(t)$ में प्राचल $t$ है। इससे $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ प्राप्त करते है। जहाँ $dx/dt \neq 0$

7. ; fn $f'(x)$ भी $x$ का संतत फलन है तो इसका पुनः अवकलन किया जा सकता है।

8. **रोले का मध्यमान प्रमेयः** यदि एक वास्तविक फलन $f$ संवृत अन्तराल $[a, b]$ में निम्न प्रकार परिभाषित है

(i) $f$ संतृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत है।

(ii) $f$ विवृत अन्तराल $(a, b)$ में अवकलनीय है।

(iii) $f(a) = f(b)$

तब विवृत अन्तराल $(a, b)$ में कम से कम एक बिन्दु $c$ इस प्रकार विद्यमान होगा कि $f'(c) = 0$

9. **लाग्राँज मध्यमान प्रमेयः** यदि एक वास्तविक फलन $f$, संवृत अन्तराल $[a, b]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि

(i) $f$, $[a, b]$ में संतत है।

(ii) $f$, $(a, b)$ में अवकलनीय है।

तब अन्तराल $(a, b)$ में कोई बिन्दु $c$ इस प्रकार स्थित होगा कि $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

10. **लाग्राँज मध्यमान प्रमेयः** यदि वास्तविक फलन $f$ अन्तराल $[a, a + h]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि–

(i) $f$, संवृत अन्तराल $[a, a+h]$ मे संतत है।

(ii) $f$, विवृत्त अन्तराल $(a, a+h)$ में अवकलनीय है तब अन्तराल $(0, 1)$ में कम से कम एक वास्तवितक संख्या $\theta$ इस प्रकार विद्यमान होगी कि $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$

# उत्तरमाला

## प्रश्नमाला 7.1

1. $2x\cos x^2$ 2. $2\sec^2(2x+3)$ 3. $-2x\sin x^2 \cos\left(\cos x^2\right)$ 4. $\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$ 5. $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

6. $\dfrac{\pi}{180}\cos x^\circ$ 7. $\cos ecx$ 8. $\dfrac{\pi}{180}\sec x^\circ \tan x^\circ$ 9. $\sec x$ 10. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 11. $\dfrac{2(1-x^2)}{1+x^2+x^4}$

12. $\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)\sec^2\left(\log\sqrt{1+x^2}\right)$ 13. $3.a^{\tan 3x}.\sec^2 3x.\log a$ 14. $\sec x$ 15. $3\sin^2 x.\sin 4x$

## प्रश्नमाला 7.2

1.(a) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ 2.(a) $\dfrac{-2}{1+x^2}$ (b) $\dfrac{2}{1+x^2}$ 3.(a) $\dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

4.(a) $\dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{2}{1+x^2}$ 5.(a) 0 (b) $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ 6.(a) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $\dfrac{2^{x+1}.\log 2}{1+4^x}$

7.(a) $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $-\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}$

## प्रश्नमाला 7.3

1.(a) $\dfrac{2}{\cos y - 3}$ (b) $\dfrac{-(2x+y)}{x+2y}$ 2.(a) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ (b) $\dfrac{\sec^2(x+y)+\sec^2(x-y)}{\sec^2(x-y)-\sec^2(x+y)}$

3.(a) $\dfrac{\cos x + y}{2\sin 2y - x}$ (b) $\dfrac{-y}{x}\left(\dfrac{\sqrt{y}+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}\right)$ 4.(a) $\dfrac{4x^3+4xy^2-y}{x-4x^2y-4y^3}$ (b) $\dfrac{y\{2xy-1-y^2\cos(xy)\}}{\{y^2x\cos(xy)-x+y^2\}}$

5.(a) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$ (b) $-\left\{\dfrac{yx^{y-1}+y^x\log y}{xy^{x-1}+x^y\log x}\right\}$ 6.(a) $\dfrac{y^2}{x(1-y\log x)}$ (b) $\dfrac{y}{x}$

7.(a) $e^x+2xe^{x^2}+3x^2e^{x^3}+4x^3e^{x^4}+5x^4e^{x^5}$ (b) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x.e^{\sqrt{x}}}}$

8.(a) $\dfrac{x\sin x\log x+\cos x}{x(\log x)^2}$ (b) $\dfrac{y^2}{x(2-y\log x)}$ 9. (a) $\dfrac{1+xy}{1+x^2}$ (b) $\dfrac{y}{x^2-1}$

10.(a) $\dfrac{\cos x}{2y-1}$ (b) $-\left\{\dfrac{y^x.\log y+y.x^{y-1}+x^x(1+\log x)}{x.y^{x-1}+x^y\log x}\right\}$

## प्रश्नमाला 7.4

1. (a) $\dfrac{b}{a}.\operatorname{cosec} t$ (b) $\dfrac{t(e^t-\sin t)}{1+t\cos t}$ 2. (a) $t\left(e^t-\sin t\right)$ (b) $\dfrac{-b}{a}\cot\theta$

3. (a) $\dfrac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta-\sin\theta}$ (b) $-\cot\dfrac{\theta}{2}$ 4. (a) $\dfrac{\cos t(1-2\cos 2t)}{1+2\cos 2t}$ (b) $\tan t$

5. (a) $-(\tan 2\theta)^{3/2}$ (b) $-\tan t$

## प्रश्नमाला 7.5

1.(a) $6x+2\sec^2 x\tan x$ ; (b) 2 ; (c) $-(x\cos x+2\sin x)$ ; (d) $-2\sin x-3\cos x$ ; (e) $2e^{-x}\sin x$ ;

(f) $-a\sin x+b\cos x$ 5. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3a}$

## प्रश्नमाला 7.6

1. (a) वैध (b) वैध (c) वैध नहीं (d) वैध (e) वैध नहीं (f) वैध नहीं
3. (a) वैध (b) वैध नहीं (c) वैध नहीं (d) वैध (e) वैध (f) वैध नहीं

## विविध प्रश्नमाला—7

1. $\dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}$ 2. $-x\left\{\dfrac{2x+7+\sqrt{4-x^2}\cos^{-1}x/2}{\sqrt{4-x^2}(2x+7)^{3/2}}\right\}$ 3. $\dfrac{1}{2}$ 4. $x^3e^x\cos x+x^3e^x\sin x+3x^2e^x\sin x$

5. $\dfrac{1}{x}-\log a$ 6. $(x\log x)^{\log x}.\left[\dfrac{\log x(1+\log x)}{x\log x}+\dfrac{\log(x.\log x)}{x}\right]$ 7. $2x\{1+\tan(\log x)\}+x\sec^2(\log x)$

8. $x^{x^2-3}\left\{\dfrac{x^2-3}{x}+2x\log x\right\}+(x-3)^{x^2}\left\{\dfrac{x^2}{x-3}+2x\log(x-3)\right\}$ 9. $\dfrac{6}{5}\cot\left(\dfrac{t}{2}\right)$ 10. 0

13. $(\sin x-\cos x)^{\sin x-\cos x}.(\cos x+\sin x)\{1+\log(\sin x-\cos x)\};\sin x>\cos x$