அத்தியாயம் **7**

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும் (Matrices and Determinants)

"காரணங்களின் இசையே கணிதமாகும்"

– சில்வஸ்டர்

JVIZEF

7.1 அறிமுகம் (Introduction)

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கம் கி.மு(பொ.ஆ.மு) நான்காம் நூற்றாண்டில் தோன்றியதாகப் பதிவுகள் இருப்பினும் கி.மு(பொ.ஆ.மு) இரண்டாம் நூற்றாண்டில்தான் அதன் பயன்பாடு தொடங்கியதாகக் கருதப்படுகிறது. பின்னர் பதினேழாம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கம் மீண்டும் பயன்பாட்டுக்கு வந்து வளர்ச்சியடைந்தது எனலாம். பாபிலோனியர்கள் நேரியல் சமன்பாடுகள் தொடர்பான கணக்குகளை ஆராய்ந்து அவற்றைக் களிமண் தட்டுகளில் (claytablet) பதிந்துள்ளனர். நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளின் தீர்வுகளைச் சுருக்கமாகக் காண முற்பட்டபோது அணிகளின் கோட்பாடு மேலும் வளர்ச்சியடைந்தது என்பது ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய ஒன்றாகும். வடிவியல் உருமாற்றங்கள் பற்றிய ஆய்விற்கும் அணிகளின் கருத்தாக்கம் அடிப்படையாக அமைகிறது.

'அணி' (இலத்தீன் மொழியில் Māter என்பது 'தாய்' எனப் பொருள்படும்) என்ற சொல் வழக்கறிஞரும், கணிதவியலாளருமான ஜேம்ஸ் ஜோசப் சில்வஸ்டர் என்பவரால் முதன்முதலில் 1850-ல் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. அணிகள் கணிதவியலில் ஒரு முக்கியமான கருவியாகப் பார்க்கப்படுகிறது.

அணி என்பது செவ்வக வடிவில் உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்தும் ஓர் அமைப்பு ஆகும். இராணுவ அணிவகுப்பு, பள்ளி மாணவர்களின் அணிவகுப்பு மற்றும் பயிரிடுதல் போன்ற நடைமுறை வாழ்க்கை நிகழ்வுகளில் அணிகள் பயன்படுவதைக் காண்கிறோம்.

Disquisitiones arithmeticae (1801) என்ற நூலில் கார்ல் எஃப் காஸ் என்ற கணிதவியலாளர் இருபடி வடிவங்களை ஆய்வு செய்யும்போது அணிக்கோவை என்ற சொல்லை முதன்முதலில் பயன்படுத்தினார். ஆனால், இவருடைய கருத்தாக்கம் தற்போது பயன்படுத்தப்படும் அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கத்திலிருந்து மாறுபட்டது, இருபடி வடிவங்களின் கெழுக்களைச் செவ்வக வடிவில் வரிசைப்படுத்துதலில் அணிகளின் பெருக்கல் குறித்து விவரித்துள்ளார்,

சில்வஸ்டர் **(1814 - 1897)**

1812-ல் கோஷி என்ற கணிதவியலாளர் அணிக்கோவையினை புதிய கோணத்தில் அணுகியது மட்டுமல்லாமல் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும்

01_7 Matrices and Determinants.indd 1 25-03-2019 13:17:53

சேர்ப்பு அணி பற்றி ஏற்கனவே பயன்பாட்டில் இருந்த முடிவுகளை மறுநிரூபணம் செய்து புதிய முடிவுகளைக் கொடுத்தார். ஆர்தர் கெய்லி என்பார் அணிகளின் இயற்கணிதம் என்ற கருத்தாக்கத்தை மேம்படுத்தியதில் முக்கிய பங்காற்றியுள்ளார். அணிக்கோவைகளின் கோட்பாடுகளை 1841–ல் இவர் வெளியிட்டார். அணிக்கோவையைக் குறிப்பிடத் தற்போது பயன்படுத்தப்படும் விதமாக வரிசைப்படுத்தலின் இருபுறமும் இரு செங்குத்தான கோடுகளைப் பயன்படுத்தினார். 1858–ல் இவரால் வெளியிடப்பட்ட **"Memoir on the theory of matrices"** என்ற புத்தகத்தில் அணிகளுக்கான முதல் வரையறை சுருக்கமாக கொடுக்கப்பட்டிருந்தது குறிப்பிடத்தக்கதாகும். மேலும் ஏற்கனவே நடைமுறையில் இருந்த இருபடி வடிவங்கள் மற்றும் நேரியல் உருமாற்றங்களில் படிக்கப்பட்ட கெழுக்களின் வரிசைப்படுத்தலானது இவரால் கூறப்பட்ட பொதுக் கருத்தாக்கத்தின் சிறப்பு நிலைகளே எனவும் நிரூபித்துக் காட்டினார். கடினமான கணக்கீடுகளைக் கொண்ட மற்ற நேரிடையான முறைகளை விடக் கணக்கீடுகளை எளிமையாக்கியது இவருடைய பணியாகும். ஜேம்ஸ் ஜோசப் சில்வஸ்டர் (1814-1897), **வில்லியம் ரோவன் ஹாமில்டன்** (1805–1865) மற்றும் **ஆர்தர் கெய்லி** (1821-1895) போன்ற கணிதவியலாளர்கள் அணிகளின் கருத்தாக்கத்தை மேம்படுத்துவதில் முக்கிய பங்காற்றியவர்கள் ஆவர். அணிகளை அடைப்புக்குறிக்குள் எழுதும் குறியீட்டு முறையை ஆங்கிலேய கணிதவியலார் **கல்லிஸ்** (Cullis) என்பார் 1913–ல் முதன்முதலில் பயன்படுத்தினார். அணிகள் கணிதவியலில் உள்ள பிரிவுகளில் மட்டுமல்லாமல், அறிவியல், மரபியல், பொருளியல், சமூகவியல், நவீன உளவியல் மற்றும் தொழில்துறை மேலாண்மை போன்ற துறைகளிலும் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளின் கெழுக்களைக் குறிப்பிட அணிகள் பயன்படுகின்றன. வியாபாரத் தொடர்பான பட்ஜெட் தயாரித்தல், விற்பனைத்திட்டம் விலை நிர்ணயம் மற்றும் அறிவியலில் ஒரு சோதனையின் முடிவுகளை ஆராய்தல் போன்ற பல்வேறு பிரிவுகளில் கணினி மின்னணுப் பரவல்தாள் தயாரிக்க அணிக்குறியீடுகளும் அதன் செயல்பாடுகளும் பயன்படுகின்றன.

வடிவியல் உருமாற்றங்களான உருப்பெருக்கம், சுழற்சி மற்றும் ஒரு தளத்தின் மீது பிரதிபலிப்பு போன்ற செயல்பாடுகளை கணிதமுறையில் குறிப்பிடவும், பொருளாதார நிபுணர்களால் சமூகக் கணக்கீடு, உள்ளீடு–வெளியீடு அட்டவணை தயாரித்தல் மற்றும் தொழில் பொருளாதார ஆய்வு போன்றவற்றிலும், மின் பொறியியலில் தகவல் தொடர்புக் கோட்பாடு மற்றும் பிணையப் பகுப்பாய்விலும், சங்கேத மொழியிலும் அணிகள் பயன்படுகின்றன.

இப்பாடப்பகுதியில் அணிகள் மற்றும் அவற்றின் பல்வேறு பண்புகளைப் பற்றி முதலில் படிப்போம். பின்னர், 3 ஆம் வரிசை அணிக்கோவைகள், அவற்றின் அடிப்படைப் பண்புகள், சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக் காரணிகளைப் பற்றி படிப்போம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- கடினமான கணக்குகளை அணிமுறையில் எளிமையாகக் காணல்
- அணிகளின் பல்வேறு வகைகளை அறிதல் மற்றும் அணிகளின் இயற்கணிதத்தை புரிந்து கொள்ளல்
- அணிக்கோவைகளின் விரிவுபடுத்தலை நேரிடையாகவும், பல்வேறு பண்புகளைப் பயன்படுத்தியும் காணல்
- அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காணல் மற்றும் மூன்று புள்ளிகளின் ஒரு கோடமைத் தன்மையை ஆராய்தல்

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

7.2 அணிகள் (Matrices)

உறுப்புகள் அல்லது மூலகங்களை செவ்வக வடிவில் நிரைகள் மற்றும் நிரல்களாக [ ] என்ற அடைப்புக்குறியினுள் குறிப்பிடுவது அணியாகும்.

ஓர் அணியின் உறுப்புகள் பொதுவாக மெய்யெண்கள், கலப்பெண்கள், ஒருமாறிச் சார்புகள், (அதாவது பல்லுறுப்புக் கோவைகள், முக்கோணவியல் சார்புகள் மற்றும் இவற்றின் கலப்பாக)

01_7 Matrices and Determinants.indd 2 25-03-2019 13:17:53

பலமாறிச் சார்புகள் உறுப்பாக இருக்கலாம். அணிகளை A, B, C, ... என்ற எழுத்துக்களால் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இப்பாடப்பகுதியில் மெய்யெண்கள் அல்லது மெய் மதிப்புடையச் சார்புகளை மட்டுமே அணியின் உறுப்புகளாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

அணியின் பொது வடிவம் (General form of a matrix)

m நிரைகள் (rows) மற்றும் n நிரல்கள் (columns) கொண்ட ஓர் அணி A-யினை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $1\le i\le m, 1\le j\le n$. அதாவது,

n columns →

Column 1, Column 2, Column j, Column n

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \text{Row } 1 \\ \leftarrow \text{Row } 2 \\ \\ \leftarrow \text{Row } i \\ \\ \leftarrow \text{Row } m \end{matrix}$$

m rows ↓

இங்கு m, n என்பன மிகை முழு எண்களாகும்.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 9 & -8 & 6 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 7 & -9 & 1.2 & 0 \\ \sin\frac{x}{4} & 2 & x^2 & 4 \\ \cos\frac{x}{2} & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 3.4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ e^2 & -3 & 4 \\ \sqrt{5} & 2 & a \end{bmatrix}$$

ஆகியவை அணிகளுக்கான சில உதாரணங்கள் ஆகும்.

ஓர் அணியில், உறுப்புகளின் கிடைமட்ட வரிசைகள் நிரைகள் எனவும், செங்குத்து வரிசைகள் நிரல்கள் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே, அணி A ஆனது 3 நிரைகள் மற்றும் 3 நிரல்களையும், B என்பது 3 நிரைகள் மற்றும் 4 நிரல்களையும், C என்பது 4 நிரைகள் மற்றும் 3 நிரல்களையும் கொண்டுள்ளன.

வரையறை 7.1

ஓர் அணி A ஆனது m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்களைப் பெற்றிருந்தால் $m\times n$ (m by n எனப்படிக்கவும்) என்பது அந்த அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணம் எனப்படும்.

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ என்பன $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ என்ற அணியின் உறுப்புகள் அல்லது மூலகங்கள் எனப்படும். i-ஆவது நிரை மற்றும் j-ஆவது நிரலில் உள்ள பொது உறுப்பு a_{ij} ஆகும். இவ்வுறுப்பு அணி A-ன் (i, j)-ஆவது உறுப்பு எனப்படும். அணி A-ன் i-ஆவது நிரை மற்றும் j-ஆவது நிரல் ஆகியவை முறையே $1\times n$ மற்றும் $m\times 1$ வரிசை உடைய $[a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}]$ மற்றும் $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளாகும்.

நடைமுறை வாழ்க்கைக் கணக்குகளை அணி அமைப்பில் எழுதி அவற்றின் தீர்வுகளை எவ்வாறு காண்பது எனக் காண்போம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 7.1

எடுத்துக்காட்டாக பல்வேறு தேர்வுகளில் பல்வேறு பாடப்பிரிவுகளில் ஒரு மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்களைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

	தமிழ்	ஆங்கிலம்	கணிதம்	அறிவியல்	சமூக அறிவியல்
தேர்வு 1	48	71	80	62	55
தேர்வு 2	70	68	91	73	60
தேர்வு 3	77	84	95	82	62

இந்த அட்டவணையில் உள்ள விவரங்களை அணி வடிவத்திற்கு மாற்றலாம். அட்டவணையில் உள்ள மதிப்பெண்களை 3×5 வரிசை கொண்ட அணி அமைப்பில் பின்வருமாறு எழுதலாம். இதில் மூன்றாவது நிரை மற்றும் இரண்டாவது நிரலில் உள்ள உறுப்பு எதனைக் குறிக்கின்றது?

$$A = \begin{bmatrix} 48 & 71 & 80 & 62 & 55 \\ 70 & 68 & 91 & 73 & 60 \\ 77 & \mathbf{84} & 95 & 82 & 62 \end{bmatrix}$$

மேற்கண்ட அணியில் மூன்றாவது நிரை மற்றும் இரண்டாவது நிரலில் அமைந்துள்ள 84 என்ற உறுப்பு, ஆங்கிலப் பாடப்பிரிவில் தேர்வு 3-ல் அம்மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்ணைக் குறிப்பிடுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 7.1

ஓர் அணியில் *12* உறுப்புகள் உள்ளது. அவ்வணியின் வாய்ப்புள்ள வரிசைகளைக் காண்க. மேலும், அந்த அணியில் *7* உறுப்புகள் இருந்தால் வரிசைகள் என்னவாகும்?

தீர்வு

ஓர் அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைப் பெருக்கினால் அவ்வணியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கிடைக்கும். எனவே, இரு இயல் எண்களின் பெருக்கற் பலன் 12 தரக்கூடிய எல்லா வரிசை ஜோடிகளையும் காணலாம். ஆகவே, பெருக்கற்பலன் 12 தரக்கூடிய 12-ன் இரண்டு வகு எண்களைக் கொண்டு பெறக்கூடிய பெருக்கல்களான $1\times 12, 12\times 1, 2\times 6, 6\times 2, 3\times 4$ மற்றும் 4×3 ஆகியவை வரிசைகளாக அமையலாம்.

மேலும் ஓர் அணியில் 7 உறுப்புகள் இருந்தால், 7 என்பது பகா எண் என்பதால் 1×7 மற்றும் 7×1 என்பவை மட்டுமே அணியின் வரிசைகளாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.2

$a_{ij} = \frac{\sqrt{3}}{2}|2i-3j|, (1 \le i \le 2, 1 \le j \le 3)$ என இருக்குமாறு (i, j)-ஆவது உறுப்புகளைக் கொண்ட 2×3 அணியை எழுதுக.

தீர்வு

2×3 அணியின் பொது வடிவம் $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

a_{ij} -ன் வரையறையின்படி, $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}|2-3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ இதே போன்று A என்ற அணியின் மற்ற உறுப்புகளையும் காணலாம். எனவே தேவையான அணி $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} & \frac{7\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

01_7 Matrices and Determinants.indd 4 25-03-2019 13:18:00

7.2.1 அணிகளின் வகைகள் (Types of matrices)

நிரை, நிரல், பூஜ்ஜிய அணிகள் (Row, Column, Zero matrices)

வரையறை 7.2
ஒரே ஒரு நிரையை மட்டுமே உடைய அணி **நிரை அணி** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A=[A]_{1\times 4}=[1 \quad 0 \quad -1.1 \quad \sqrt{2}]$ என்பது $1\times n$ வரிசை உடைய நிரை அணியாகும்.

$A=[a_{ij}]_{1\times n}=[a_{1j}]_{1\times n}$ என்பது $1\times n$ வரிசை உடைய நிரை அணியின் பொது அமைப்பாகும்.

வரையறை 7.3
ஒரே ஒரு நிரலை மட்டுமே உடைய அணி **நிரல் அணி** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $[A]_{4\times 1}=\begin{bmatrix} x+1 \\ x^2 \\ 3x \\ 4 \end{bmatrix}$ என்பது $m\times 1$ வரிசை உடைய நிரல் அணியாகும். இதன் உறுப்புகள் மெய்யெண் சார்புகள் ஆகும். $A=[a_{ij}]_{m\times 1}=[a_{i1}]_{m\times 1}$ என்பது $m\times 1$ வரிசை உடைய நிரல் அணியின் பொது வடிவமாகும்.

வரையறை 7.4
ஓர் அணி $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ -இல் அனைத்து $1\leq i\leq m$ மற்றும் $1\leq j\leq n$ மதிப்புகளுக்கும் $a_{ij}=0$ எனில், இவ்வணி **பூஜ்ஜிய அணி** எனப்படும். இது O எனக்குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்பன முறையே 1×1, 3×3, மற்றும் 2×4 வரிசை உடைய பூஜ்ஜிய அணிகளாகும்.

ஓர் அணி A-ல் குறைந்தபட்சம் ஓர் உறுப்பு பூஜ்ஜியமற்றது எனில், அவ்வணி **பூஜ்ஜியமற்ற அணி** எனப்படும்.

சதுர, மூலைவிட்ட, அலகு மற்றும் முக்கோண வடிவ அணிகள் (Square, Diagonal, Unit, Triangular matrices)

வரையறை 7.5
ஓர் அணியின் நிரை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவ்வணி **சதுர அணி** எனப்படும். அதாவது, $n\times n$ வரிசை உடைய ஒரு சதுர அணி n வரிசை உடைய சதுர அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & c & f \\ g & h & l \end{bmatrix}$ என்பது 3 வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணியாகும்.

வரையறை 7.6
n வரிசை உடைய ஒரு சதுர அணி $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ -ன் உறுப்புகள் $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ என்பன *முதன்மை மூலைவிட்ட அல்லது பிரதான மூலைவிட்ட உறுப்புகள்* எனப்படும்.

வரையறை 7.7

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற சதுர அணியில் அனைத்து $a_{ij}=0,\ i\neq j$ எனில், அவ்வணி ஒரு ***மூலைவிட்ட அணி*** எனப்படும்.

எனவே, ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் பிரதான மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியமாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A=\begin{bmatrix}2.5 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & s\end{bmatrix},\ C=[6]\quad \text{மற்றும்}\quad D=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

என்பன முறையே 3, 2, 1 மற்றும் n வரிசை உடைய மூலைவிட்ட அணிகளாகும். ஒரு பூஜ்ஜிய சதுர அணி ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகுமா?

வரையறை 7.8

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் சமம் எனில், அவ்வணி ஒரு ***திசையிலி அணி*** எனப்படும்.

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij}=\begin{cases}c\ ;\ i=j\\ 0\ ;\ i\neq j\end{cases}$ எனில்,

A என்ற அணி திசையிலி அணியாகும். இங்கு c என்பது ஒரு நிலை எண்ணாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix},\ C=\left[\sqrt{3}\right]\quad \text{மற்றும்}\quad D=\begin{bmatrix}c & 0 & \cdots & 0\\ 0 & c & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & c\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{matrix}$$

என்பன முறையே வரிசை 3, 2, 1 மற்றும் n உடைய திசையிலி அணிகளாகும்.

மேலும், ஒரு பூஜ்ஜிய சதுர அணி, திசையிலி 0 உடைய திசையிலி அணியாகும் என்பதை கவனத்தில் கொள்க.

வரையறை 7.9

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் 1 ஆகவும் மற்ற உறுப்புகள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமாகவும் இருந்தால், அவ்வணி ***அலகு அணி அல்லது சமனி அணி*** எனப்படும். எனவே,

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij}=\begin{cases}1\ ;\ i=j\\ 0\ ;\ i\neq j\end{cases}$ எனில், A என்பது ஓர் அலகு அணியாகும்.

மேலும், n வரிசை உடைய அலகு அணியை I_n எனக் குறிக்கிறோம்.

$$I_1=[1],\ I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \text{மற்றும்}\quad I_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{matrix}$$

என்பன முறையே வரிசை 1, 2, 3 மற்றும் n உடைய அலகு அணிகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 6 25-03-2019 13:18:09

குறிப்பு 7.1

அலகு அணியானது ஒரு திசையிலி அணிக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

முக்கோண வடிவ அணிகளில், மேல் முக்கோண வடிவ அணி மற்றும் கீழ் முக்கோண வடிவ அணி என இரண்டு வகைகள் உள்ளன.

வரையறை 7.10

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில் அவ்வணி **மேல் முக்கோண வடிவ அணி** எனப்படும்.

எனவே $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij}=0,\ i>j$ எனில், அவ்வணி மேல் முக்கோண வடிவ அணியாகும்.

$$\begin{bmatrix}4&3&0\\0&7&8\\0&0&2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-5&2\\0&1\end{bmatrix}\text{ மற்றும் }\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$ என்பன மேல் முக்கோண வடிவ அணிகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

வரையறை 7.11

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில், அவ்வணி **கீழ் முக்கோண வடிவ அணி** எனப்படும்.

எனவே, $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij}=0,\ i<j$ எனில், அவ்வணி கீழ் முக்கோண வடிவ அணியாகும்.

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\4&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2&0&0\\4&1&0\\8&-5&7\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-2&0\\9&-3\end{bmatrix}\text{ மற்றும் }\begin{bmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$ என்பன கீழ் முக்கோண வடிவ அணிகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

வரையறை 7.12

மேல் முக்கோண வடிவில் அல்லது கீழ் முக்கோண வடிவில் உள்ள ஒரு சதுர அணியை **முக்கோண வடிவ அணி** என்கிறோம்.

மேலும், ஒரே நேரத்தில் மேல் மற்றும் கீழ் முக்கோண வடிவில் உள்ள ஒரு சதுர அணியானது ஒரு மூலைவிட்ட அணியாக அமைவதைக் காணலாம்.

7.2.2 அணிகளின் சமத்தன்மை (Equality of Matrices)

வரையறை 7.13

$A=[a_{ij}]$ மற்றும் $B=[b_{ij}]$ என்ற இரு அணிகள் **சம அணிகள்** ($A = B$ எனக் குறிப்பிடுவோம்) எனில்

(i) A, B என்ற அணிகள் ஒரே வரிசை அல்லது பரிமாணம் உடையவையாகும்.

(ii) A, B ஆகிய அணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாக இருக்கும். அதாவது, அனைத்து i, j-க்கு $a_{ij}=b_{ij}$ ஆக இருக்கும். இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ எனில், $x = 2.5, y = -1, u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ மற்றும் $v = \frac{3}{5}$ எனப்பெறுகிறோம்.

வரையறை 7.14

A, B என்ற இரு அணிகளுக்கு வரையறை 7.13-ல் உள்ள நிபந்தனைகள் (i) அல்லது (ii) இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூர்த்தி செய்யப்படவில்லை என்றால், அவ்விரு அணிகளும் **சமமற்றவை** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. ஏனெனில் இவ்வணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமற்றவை.

மேலும் $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$. ஏனெனில் இவ்வணிகளின் வரிசைகள் சமமல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 7.3

$\begin{bmatrix} 3x+4y & 6 & x-2y \\ a+b & 2a-b & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ எனில், x, y, a, b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

இரண்டு அணிகளும் சம அணிகள் என்பதால், அவற்றின் ஒத்த உறுப்புகளும் சமம்.

எனவே, $3x+4y = 2,\ x-2y = 4,\ a+b = 5,\ 2a-b = -5$

இச்சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண, $x = 2,\ y = -1,\ a = 0,\ b = 5$ எனக் கிடைக்கும்.

7.2.3 அணிகளின் மீதான இயற்கணிதச் செயல்முறைகள் (Algebraic Operations on Matrices)

இப்பகுதியில் அணிகளின் அடிப்படைச் செயல்களான

(1) ஓர் அணியை திசையிலியால் பெருக்குதல்

(2) அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல்

(3) அணிகளின் பெருக்கல்

ஆகியவற்றைப் பார்ப்போம்.

ஓர் அணியை மற்றோர் அணியால் வகுத்தல் பற்றிய கருத்தாக்கம் வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, A, B என்ற ஏதேனும் இரண்டு அணிகளுக்கு $\frac{A}{B}$ என்ற செயல்பாடு வரையறுக்கப்படவில்லை.

(1) ஓர் அணியைத் திசையிலியால் பெருக்குதல்

ஓர் அணி $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் k என்பது மெய் திசையிலி என்க. இப்போது, $kA = [b_{ij}]_{m\times n}$ என்ற புதிய அணியை வரையறுப்போம். இங்கு, அனைத்து i, j-க்கு $b_{ij} = ka_{ij}$ ஆகும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 8 25-03-2019 13:18:18

எடுத்துக்காட்டாக, $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $kA=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$ ஆகும்.

குறிப்பாக, $k=-1$ எனில், $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ எனப்பெறுகிறோம். இந்த – A என்பது A என்ற அணியின் எதிர்மறை அணி எனப்படும்.

(2) இரண்டு அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல்

A, B என்பவை ஒரே வரிசையுடைய இரு அணிகள் எனில் இவற்றின் கூடுதல் அதே வரிசையுள்ள அணியாகும். இவ்வணி A + B எனக் குறிக்கப்பட்டு A, B-ன் ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ என்ற இரு அணிகளின் கூடுதல் $A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$ என்ற அணியாகும். இங்கு அனைத்து i, j-க்கு $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ஆகும்.

இதேபோல், கழித்தல் A – B ஆனது $A-B=A+(-1)B$ என வரையறுக்கப்படுகிறது

அதாவது, $A-B=[d_{ij}]_{m\times n}$, இங்கு $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, $\forall$ i மற்றும் j.

($\forall$ என்ற குறியீடு ஒவ்வொரு அல்லது அனைத்து எனப் பொருள்படும்).

குறிப்பு 7.2

A, B என்ற அணிகளின் வரிசைகள் சமமற்றவை எனில், A + B மற்றும் A – B என்பவற்றை வரையறுக்க இயலாது.

அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் செயல்களை எந்த ஒரு முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள அணிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.4

$$A=\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{5} & 7 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{5} & 7.3 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$ எனில், A + B மற்றும் A – B ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் வரையறைகளின்படி,

$$A+B=\begin{bmatrix} 4+\sqrt{3} & 2\sqrt{5} & 14.3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } A-B=\begin{bmatrix} 4-\sqrt{3} & 0 & -0.3 \\ -2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.5

$$A=\begin{bmatrix} \sin^2\theta & 1 \\ \cot^2\theta & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ -\mathrm{cosec}^2\theta & 1 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } C=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$ எனில்,

A + B + C -ஐக் காண்க.

தீர்வு

வரையறைப்படி, மூன்று அணிகளின் கூடுதல்

$$A+B+C=\begin{bmatrix} \sin^2\theta+\cos^2\theta+0 & 1+0-1 \\ \cot^2\theta-\mathrm{cosec}^2\theta-1 & 0+1+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

01_7 Matrices and Determinants.indd 9 25-03-2019 13:18:25

எடுத்துக்காட்டு 7.6

$B=\begin{bmatrix}2&3&0\\1&-1&5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1&-2&3\\-1&0&2\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}0&4&-1\\5&6&-5\end{bmatrix}$ எனில், 3B + 4C – D-ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$3B+4C-D=\begin{bmatrix}6&9&0\\3&-3&15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4&-8&12\\-4&0&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-4&1\\-5&-6&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&13\\-6&-9&28\end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.7

சுருக்குக : $\sec\theta\begin{bmatrix}\sec\theta&\tan\theta\\\tan\theta&\sec\theta\end{bmatrix}-\tan\theta\begin{bmatrix}\tan\theta&\sec\theta\\\sec\theta&\tan\theta\end{bmatrix}$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கோவையினை A எனக்கொள்க.

அணிகளின் திசையிலிப் பெருக்கலுக்கான வரையைறையைப் பயன்படுத்த,

$$A=\begin{bmatrix}\sec^2\theta&\sec\theta\tan\theta\\\sec\theta\tan\theta&\sec^2\theta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tan^2\theta&\tan\theta\sec\theta\\\sec\theta\tan\theta&\tan^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

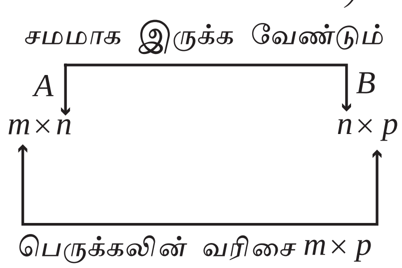
(3) அணிகளின் பெருக்கல்

வரையறை 7.15

A என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் B என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் A என்ற அணி B என்ற அணியுடன் பெருக்கலுக்கு உகந்தது எனப்படும்.

அதாவது, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ என்பன இரு அணிகள் எனில், இவ்வணிகளின் பெருக்கல் AB எனக்குறிப்பிடப்படும். மேலும் இதன் வரிசை $m\times p$ ஆகும்.

$$AB\text{-ன் வரிசை } m\times p=\begin{pmatrix}A\text{ல் உள்ள நிரைகளின்}\\\text{எண்ணிக்கை}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}B\text{ல் உள்ள நிரல்களின்}\\\text{எண்ணிக்கை}\end{pmatrix}$$



$A=[a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_n]_{1\times n}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}_{n\times 1}$, எனும்போது AB-யின் வரிசை 1×1 ஆகவும், ஒரே ஒரு உறுப்பு உடையதாகவும் இருக்கும். $AB=[a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=[a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n]=\left[\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right]$.

01_7 Matrices and Determinants.indd 10
25-03-2019 13:18:29

எடுத்துக்காட்டாக,

$$[1\ \ 2\ \ 3]\begin{bmatrix}-2\\3\\5\end{bmatrix}=[1(-2)+2(3)+3(5)]=[-2+6+15]=[19].$$

பொதுவாக,

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\text{ மற்றும் } B=[b_{ij}]_{n\times p}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{np}\end{bmatrix}\text{ எனில்,}$$

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{np}\end{bmatrix}$$

மேலும் பெருக்கல் $AB=[c_{ij}]_{m\times p}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1p}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&a_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mp}\end{bmatrix}$

இங்கு c_{ij} என்ற உறுப்பினை $c_{ij}=[a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \ldots\ \ a_{in}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{nj}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.8

$A=\begin{bmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{bmatrix}$ எனில், A^2 –ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{bmatrix}$$

இங்கு, $c_{11}=[0\ \ c\ \ b]\begin{bmatrix}0\\c\\b\end{bmatrix}=0\cdot0+c\cdot c+b\cdot b=c^2+b^2$. இதேபோல் மற்ற உறுப்புகளின் c_{ij} –க்கைளை கணக்கிடலாம்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 11 25-03-2019 13:18:33

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0 \\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0 \\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.9

$[x \quad 2 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ எனில், x-ஐ காண்க.

தீர்வு

$$[x \quad 2 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \quad [x-2+1 \quad x-8+1 \quad 2x+2+2]\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \quad [x-1 \quad x-7 \quad 2x+4]\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \quad x(x-1)+2(x-7)+1(2x+4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+3x-10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -5, 2.$$

குறிப்பு 7.3

(1) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, மற்றும் $m \neq p$, எனில், AB என்ற பெருக்கல் அணியை வரையறுக்க முடியும். ஆனால் BA–ஐ காண முடியாது.

(2) மெய்யெண்களின் பின்வரும் அடிப்படைப் பண்புகள் அணிகளிலும் விவாதிக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$ab = ba \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

$ab = ac \Rightarrow b = c \ \forall \ a,b,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$

$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ அல்லது $b = 0 \ \forall \ a,b \in \mathbb{R}$

இதேப்போன்று அணிகளிலும் விவாதிக்கலாம். அதாவது,

(i) AB மற்றும் BA என்பவை வரையறுக்கப்பட்டிருந்தாலும், $AB = BA$ ஆக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ என்பதால்}$$

$AB \neq BA$, எனக் காண்கிறோம்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 12 25-03-2019 13:18:39

இந்நிலையில், A, B என்ற அணிகள் பெருக்கலைப் பொறுத்து பரிமாற்றுப் பண்பை பெறவில்லை என்கிறோம்.

மேலும் $AB = BA$ என்பதும் சில நேரங்களில் உண்மையாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு $AB = BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ எனக் காண்கிறோம்.

(ii) அணிப்பெருக்கலில் நீக்கல் பண்பு உண்மையாகாது. அதாவது, $n\times n$, $n>1$ என்ற வரிசை உடைய $A\neq 0$, B, C என்ற மூன்று சதுர அணிகளுக்கு, $AB = AC$ எனில், $B = C$, மற்றும் $BA = CA$ எனில், $B = C$ என்பவை உண்மையாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

இவ்வுண்மைகளை, பின்வரும் எளிய எடுத்துக்காட்டின் மூலம் காணலாம்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆனால் $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(iii) $A \neq O$ மற்றும் $B \neq O$ ஆக இருந்து $AB = O$ ஆக வாய்ப்புள்ளது. அதாவது, $AB = O$ எனில், $A = O$ அல்லது $B = O$ ஆக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் செயல்களுக்கு உகந்த ஏதேனும் இரு அணிகள் A மற்றும் B–க்குப் பொதுவாக

- $(A\pm B)^2$ என்பது $A^2 \pm 2AB + B^2$ –க்கு சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை
- $A^2 - B^2$ என்பது $(A+B)(A-B)$ –க்கு சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை

எடுத்துக்காட்டு 7.10

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் AB மற்றும் BA ஆகியவற்றை இயலுமெனில் காண்க.

தீர்வு

A–ன் வரிசை 3×3 மற்றும் B–இன் வரிசை 3×2. எனவே AB–இன் வரிசை 3×2 ஆகும். A, B என்ற அணிகள் பெருக்கல் AB காண $C = AB$ என்க.

c_{11} = (A-இன் முதல் நிரை) (B–ன் முதல் நிரல்)

$$\Rightarrow \quad c_{11} = [1 \quad -1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1+1+2 = 4$$ (c_{11} ஓர் உறுப்பு என்பதாகும்)

இதேபோல், $c_{12} = 0, c_{21} = 0, c_{22} = 13, c_{31} = 7, c_{32} = 5.$

எனவே, $$AB = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 13 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

01_7 Matrices and Determinants.indd 13 25-03-2019 13:18:47

B என்ற அணியில் உள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை, *A* அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமல்ல என்பதால் *BA*–ஐக் காண முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு 7.11

ஒரு பழவியாபாரி 3 வெவ்வேறு வகையான பரிசுத் தொகுப்புகளைத் தயார் செய்கிறார். தொகுப்பு I-ல், 6 ஆப்பிள், 3 ஆரஞ்சு மற்றும் 3 மாதுளை உள்ளன. தொகுப்பு II–ல், 5 ஆப்பிள், 4 ஆரஞ்சு மற்றும் 4 மாதுளை உள்ளன. தொகுப்பு III-ல் 6 ஆப்பிள், 6 ஆரஞ்சு மற்றும் 6 மாதுளை உள்ளன. ஓர் ஆப்பிள், ஓர் ஆரஞ்சு மற்றும் ஒரு மாதுளை ஆகியவற்றின் விலை முறையே ₹ 30, ₹ 15 மற்றும் ₹ 45 எனில், ஒவ்வொரு பழத் தொகுப்பையும் தயார் செய்ய ஆகும் செலவு எவ்வளவு?

தீர்வு

விலை அணி $A = [30 \;\; 15 \;\; 45]$,

$$\text{பழ அணி } B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{matrix} \text{P - I} & \text{P - II} & \text{P - III} \\ \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ஆப்பிள்} \\ \text{ஆரஞ்சு} \\ \text{மாதுளை} \end{matrix}$$

(நிரல்கள்: P - I, P - II, P - III)

AB என்ற அணியை காண்பதன் மூலம் பழத் தொகுப்புகளின் விலைகளைக் காணலாம்.

அதாவது, *A*-இல் உள்ள ஒவ்வொரு உருப்படியின் விலையுடன் (விலை அணி *A*) *B*–இல் உள்ள உருப்படிகளின் எண்ணிக்கையைப் (பழ அணி *B*) பெருக்குவதால் பழத்தொகுப்புகளின் விலைகளைப் பெறலாம்.

$$AB = [30 \;\; 15 \;\; 45]\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = [360 \;\; 390 \;\; 540]$$

எனவே தொகுப்பு I–ன் விலை ₹ 360, தொகுப்பு II–ன் விலை ₹ 390, தொகுப்பு III–ன் விலை ₹ 540.

7.2.4. அணிக்கூட்டல், அணியை திசையிலியால் பெருக்குதல் மற்றும் அணிப்பெருக்கல் ஆகியவற்றின் பண்புகள்

(Properties of matrix addition, scalar multiplication and Product of Matrices)

A, *B*, *C* என்பன சமவரிசையுடைய கூட்டலுக்கு உகந்த மூன்று அணிகள் மற்றும் *a*, *b* என்பன திசையிலிகள் என்க. இப்போது,

(1) $A + B$ என்பது அதே வரிசையுடைய அணியைக் கொடுக்கும்.

(2) $A + B = B + A$ (அணிக்கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்புடையது)

(3) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (அணிக்கூட்டல் சேர்ப்புத் தன்மையுடையது)

(4) $A + O = O + A = A$ (*O* என்பது கூட்டல் சமனி)

(5) $A + (-A) = O = (-A) + A$ ($-A$ என்பது கூட்டலைப் பொறுத்து *A*-ன் எதிர்மறை அணியாகும்).

(6) $(a + b)A = aA + bA$ மற்றும் $a(A + B) = aA + aB$

(7) $a(bA) = (ab)A$, $1A = A$ மற்றும் $0A = O$.

அணிகளின் பெருக்கல் பண்புகள் (Properties of matrix multiplication)

அணிகளின் இயற்கணிதப் பண்புகளில் இருந்து பின்வருவனவற்றைப் பெறலாம்.

- A, B, C என்பன முறையே $m \times n$, $n \times p$ மற்றும் $p \times q$ வரிசைகள் உடைய மூன்று அணிகள் எனில், $A(BC)$ மற்றும் $(AB)C$ என்பன $m \times q$ என்ற ஒரே வரிசை உடைய அணிகளாகும். மேலும்

  $A(BC) = (AB)C$ (அணிகளின் பெருக்கல் சேர்ப்புத் தன்மையுடையது).

- A, B, C என்பன முறையே $m \times n$, $n \times p$ மற்றும் $n \times p$ வரிசைகள் உடைய மூன்று அணிகள் எனில், $A(B + C)$ மற்றும் $AB + AC$ என்பன $m \times p$ என்ற ஒரே வரிசை உடைய அணிகளாகும். மேலும் $A(B + C) = AB + AC$. (அணிகளின் பெருக்கல் கூட்டலைப் பொறுத்து இடது பங்கீட்டுத் தன்மையுடையது)
- A, B, C என்பன முறையே $m \times n$, $m \times n$ மற்றும் $n \times p$ வரிசைகள் உடைய மூன்று அணிகள் எனில், $(A + B)C$ மற்றும் $AC + BC$ என்பன $m \times p$ என்ற சமவரிசை உடைய அணிகளாகும். மேலும் $(A + B)C = AC + BC$. (அணிகளின் பெருக்கல் கூட்டலைப் பொறுத்து வலது பங்கீட்டுத் தன்மையுடையது).
- A, B என்பன முறையே $m \times n$, $n \times p$ வரிசைகள் உடைய இரண்டு அணிகள் மற்றும் α ஒரு திசையிலி எனில், $\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$ என்பது $m \times p$ வரிசை உடைய ஓர் அணியாகும்.
- I என்பது ஓர் அலகு அணி எனில், $AI = IA = A$ (I என்பது பெருக்கல் சமனி).

7.2.5 நிரை நிரல் அணியின் மீதான செயல்முறைகள் மற்றும் அதன் பண்புகள் (Operation of transpose of a matrix and its properties)

வரையறை 7.16

ஓர் அணி A–ன் நிரை மற்றும் நிரல்களை இடமாற்றம் செய்வதன் மூலம் பெறப்படும் அணி A–ன் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். இது A^T எனக் குறிக்கப்படும்.

அதாவது, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ எனில், $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, இங்கு $b_{ij} = a_{ji}$ ஆகும். மேலும் A^T –ன் (i, j) –ஆவது உறுப்பு a_{ji} ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 4 \\ -8 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ எனில் } A^T = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது நாம், வெளிப்படையான நிரூபணங்களைக் கொண்ட நிரை நிரல் மாற்று அணிக்கான சில அடிப்படை முடிவுகளைக் காண்போம்.

A , B என்பன உகந்த வரிசைகள் உடைய இரு அணிகள் எனில்,

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(kA)^T = kA^T$ (இங்கு k ஒரு திசையிலி)

(iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$ (நிரை நிரல் மாற்று அணியின் பின் திருப்புகை விதி)

எடுத்துக்காட்டு 7.12

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ எனில், பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க.

(i) $(AB)^T = B^T A^T$ (ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (iii) $(A-B)^T = A^T - B^T$ (iv) $(3A)^T = 3A^T$

தீர்வு

(i) $AB = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 22 \\ -2 & 9 & 9 \\ 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \qquad \ldots (1)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \; A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)–லிருந்து, $(AB)^T = B^T A^T$.

(ii) $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \qquad \ldots (3)$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \qquad \ldots (4)$$

(3) மற்றும் (4)–லிருந்து, $(A+B)^T = A^T + B^T$.

(iii) $A - B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$(A-B)^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots (5)$$

01_7 Matrices and Determinants.indd 16 25-03-2019 13:19:01

$$A^T - B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (6)$$

(5) மற்றும் (6)–லிருந்து, $(A-B)^T = A^T - B^T$

(iv) $3A = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

$$(3A)^T = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 18 & 3 & 9 \\ 6 & 15 & 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = 3(A^T) \; .$$

7.2.6 சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகள் (Symmetric and skew-symmetric matrices)

வரையறை 7.17

A என்பது ஒரு சதுர அணி என்க. $A^T = A$ எனில், A என்பது **சமச்சீர்** அணியாகும்.

அதாவது, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி எனில், அனைத்து i, j-க்கு $a_{ij} = a_{ji}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு $A^T = A$ என்பதால், இவ்வணி ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

A^T என்ற அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி A என்ற அணியேயாகும் என்பதை கவனிக்கவும். அதாவது $\left(A^T\right)^T = A$.

வரையறை 7.18

A என்ற சதுர அணிக்கு $A^T = -A$ எனில், அவ்வணி **எதிர் சமச்சீர்அணி** எனப்படும்.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ என்பது எதிர் சமச்சீர்அணி எனில், அனைத்து i, j-க்கு $a_{ij} = -a_{ji}$ ஆகும்.

$i = j$ எனப்பிரதியிட்டால், $2a_{ii} = 0$ அல்லது $a_{ii} = 0 \; \forall \; i$.

அதாவது, ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியில் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமாகும் என்பதே இதன் பொருளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு $A^T = -A$ என்பதால், இவ்வணி ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

மேலும் எந்தவொரு சதுர அணியையும் சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 17 25-03-2019 13:19:07

தேற்றம் 7.1

A என்பது மெய்யெண் மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு சதுர அணி எனில், $A + A^T$ என்பது ஒரு சமச்சீர் அணியாகும். மற்றும் $A - A^T$ என்பது ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

நிரூபணம்

$B = A + A^T$ என்க.

$$B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = B$$

எனவே, $A + A^T$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

$C = A - A^T$ என்க.

$$C^T = (A + (-A^T))^T = A^T + (-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -C$$

எனவே $A - A^T$ என்பது ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியாகும். ■

தேற்றம் 7.2

ஒரு சதுர அணியை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

நிரூபணம்

A என்பது ஒரு சதுர அணி என்க.

$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ என எழுதலாம்.

தேற்றம் 7.1லிருந்து, $(A + A^T)$ மற்றும் $(A - A^T)$ என்பன முறையே சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளாகும். $(kA)^T = kA^T$ என்பதிலிருந்து $\frac{1}{2}(A + A^T)$ மற்றும் $\frac{1}{2}(A - A^T)$ ஆகியவை முறையே சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகள் ஆகும். இதிலிருந்து தேவையான முடிவினைப் பெறலாம். இதன் மூலம் தேற்றம் நிரூபிக்கப்படுகிறது. ■

குறிப்பு 7.4

சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணியாக உள்ள அணி பூஜ்ஜிய அணியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.13

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதுக.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$P = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ என்க.

01_7 Matrices and Determinants.indd 18 25-03-2019 13:19:15

இப்பொழுது $$P^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix} = P$$

ஆகையால், $P = \frac{1}{2}(A+A^T)$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்

$Q = \frac{1}{2}(A-A^T)$ என்க.

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -9 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 9 & 0 & 3 \\ 9 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

ஆகையால் $Q = \frac{1}{2}(A-A^T)$ எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

$$A = P+Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -9 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆகவே A என்பதை ஒரு சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளில் கூடுதலாக எழுதலாம்.

பயிற்சி 7.1

(1) (i) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}, m=2, n=3$ (ii) $a_{ij} = \frac{|3i-4j|}{4}, m=3, n=4$ என இருக்குமாறு உறுப்புகளைக் கொண்ட $m \times n$ வரிசை உடைய $A=[a_{ij}]$ அணிகளை உருவாக்குக.

(2) $\begin{bmatrix} p^2-1 & 0 & -31-q^3 \\ 7 & r+1 & 9 \\ -2 & 8 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & \frac{3}{2} & 9 \\ -2 & 8 & -\pi \end{bmatrix}$ எனில், p, q, r, s ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(3) $\begin{bmatrix} 2x+y & 4x \\ 5x-7 & 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7y-13 \\ y & x+6 \end{bmatrix}$ எனில், $x+y$ -ஐ காண்க.

(4) $2A-B+\begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$ மற்றும் $A-2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ என்ற அணிச்சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் A, B என்ற அணிகளைக் காண்க.

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், A^4-ஐ காண்க.

01_7 Matrices and Determinants.indd 19 25-03-2019 13:19:21

(6) $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ எனில்.

(i) $A_\alpha \, A_\beta = A_{(\alpha+\beta)}$ என நிறுவுக.

(ii) $A_\alpha + A_\alpha^T = I$ என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் α –ன் அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் காண்க.

(7) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix}$ மற்றும் $(A-2I)(A-3I) = O$ எனில், x–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$ எனில், A^2 என்பது அலகு அணியாகும் என நிறுவுக.

(9) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $A^3 - 6A^2 + 7A + kI = O$, எனில். k–ஐ காண்க.

(10) பின்வரும் நிபந்தனைகள் ஒவ்வொன்றையும் நிறைவுசெய்யும் அணிகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகளைத் தருக.

(i) $AB \neq BA$ எனுமாறுள்ள A மற்றும் B அணிகள்

(ii) $AB = O = BA, A \neq O$ மற்றும் $B \neq O$ எனுமாறுள்ள A, B அணிகள்

(iii) $AB = O$ மற்றும் $BA \neq O$ எனுமாறுள்ள A, B அணிகள்

(11) $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், $f(x)f(y) = f(x+y)$ என நிறுவுக.

(12) A என்பது $A^2 = A$ என்றவாறுள்ள ஒரு சதுர அணி எனில், $7A - (I + A)^3$–ன் மதிப்புக் காண்க.

(13) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ எனில், $A(B + C) = AB + AC$ எனும் பண்பினைச் சரிபார்க்க.

(14) $A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ என்ற அணிச்சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யும் A என்ற அணியைக் காண்க.

(15) If $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க.

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T = B^T + A^T$ (ii) $(A-B)^T = A^T - B^T$ (iii) $(B^T)^T = B$

01_7 Matrices and Determinants.indd 20 25-03-2019 13:19:28

(16) 3×4 வரிசை உடைய ஒரு அணி A மற்றும் B என்ற இரண்டு அணிகளும் $A^T B$ மற்றும் BA^T ஆகிய இரண்டையும் வரையறை செய்யுமாறுள்ள அணிகள் எனில், B அணியின் வரிசையைக் காண்க.

(17) பின்வரும் அணிகளை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதுக.

(i) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

(18) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ எனுமாறுள்ள A என்ற அணியைக் காண்க.

(19) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ x & 2 & y \end{bmatrix}$ மற்றும் $AA^T = 9I$ எனில், x, y–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(20) (i) x–ன் எம்மதிப்புக்கு, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & x^3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்?

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & p & 3 \\ 2 & q^2 & -1 \\ r & 1 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணி எனில், p, q, r–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(21) $a_{ij} = i - j$ எனில், $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ என்ற அணியை உருவாக்குக. மேலும், A என்பது சமச்சீர் அணியா அல்லது எதிர் சமச்சீர் அணியா எனக் கூறுக.

(22) A, B என்பன இரு சமச்சீர் அணிகள் என்க. AB = BA எனில், AB என்பது சமச்சீர் அணியாகும் என நிறுவுக. மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மை என நிறுவுக.

(23) A, B என்பன சமவரிசையுள்ள இரு சமச்சீர் அணிகள் எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) AB + BA என்பது சமச்சீர் அணியாகும்

(ii) AB – BA என்பது எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்

(24) ஓர் அங்காடியில் முந்திரி, உலர் திராட்சை மற்றும் பாதாம் பருப்பு ஆகியவற்றைக் கொண்டு மூன்று விதமான பரிசுப் பைகள் தயார் செய்யப்படுகின்றன.

பை I–ல் 100 கிராம் முந்திரி, 100 கிராம் உலர் திராட்சை மற்றும் 50 கிராம் பாதாம் பருப்பும்,

பை II–ல் 200 கிராம் முந்திரி, 100 கிராம் உலர் திராட்சை மற்றும் 100 கிராம் பாதாம் பருப்பும்,

பை III–ல் 250 கிராம் முந்திரி, 250 கிராம் உலர் திராட்சை மற்றும் 150 கிராம் பாதாம் பருப்பும் உள்ளன.

50 கிராம் முந்திரியின் விலை ₹ 50, 50 கிராம் உலர் திராட்சையின் விலை ₹ 10 மற்றும் 50 கிராம் பாதாம் பருப்பின் விலை ₹ 60 எனில், ஒவ்வொரு பரிசுப் பையின் விலையைக் காண்க.

01_7 Matrices and Determinants.indd 21 25-03-2019 13:19:31

7.3 அணிக்கோவைகள் (Determinants)

n வரிசையுள்ள ஒவ்வொரு சதுர அணி A உடன், நாம் அணி A-ன் அணிக்கோவை என்ற எண்ணைத் தொடர்புபடுத்தலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ எனில், A–ன் அணிக்கோவை $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ஆகும்.

குறிப்பு 7.5

(i) சதுர அணிகளுக்கு மட்டுமே அணிக்கோவைகளை வரையறுக்க முடியும்.

(ii) ஒரு சதுர அணி A-ன் அணிக்கோவையை $|A|$ எனக் குறிக்கிறோம்.

(இதனை அணிக்கோவை A எனப்படிக்கவும்)

(iii) ஓர் அணி என்பது வடிவமைப்பு மட்டுமே. ஆனால், அணிக்கோவை ஒரு மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

7.3.1 பல்வேறு வரிசைகள் உடைய அணியின் அணிக்கோவைகள் (Determinants of matrices of different order)

வரிசை 1 உடைய அணியின் அணிக்கோவை

$A = [a]$ என்பது வரிசை 1 உடைய அணி எனில், A–ன் அணிக்கோவை 'a' என வரையறுக்கப்படுகிறது.

வரிசை 2 உடைய அணியின் அணிக்கோவை

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 2 உடைய அணி எனில், A–ன் அணிக்கோவை

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 7.14

மதிப்பிடுக : (i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

தீர்வு

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 2) - (-1 \times 4) = 4 + 4 = 8.$

(ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = (\cos\theta.\cos\theta) - (-\sin\theta.\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$

வரிசை 3 உடைய அணியின் அணிக்கோவை

மெய்யெண்கள் அல்லது $\mathbb{R}$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய் மதிப்புகளையுடைய சார்புகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட 3×3 வரிசையுடைய அணிக்கோவையை எடுத்துக்கொண்டு, அதன் பண்புகளைப் பற்றிப் படிப்பதுடன் அணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளைக் காணும் பல்வேறு முறைகள் குறித்தும் விவாதிப்போம்.

வரையறை 7.19

$A = [a_{ij}]_{3\times3}$ என்பது 3–ஆம் வரிசையுடைய சதுர அணி என்க. ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு a_{ij} –ன் **சிற்றணிக்கோவை**யானது a_{ij} உள்ள i-ஆவது நிரை மற்றும் j-ஆவது நிரலை நீக்குவதால் பெறப்படும் அணிக்கோவையாகும். a_{ij} –ன் சிற்றணிக்கோவையானது வழக்கமாக M_{ij} எனக் குறிக்கப்படும்.

வரையறை 7.20

தகுந்த குறியிடப்பட்ட சிற்றணிக்கோவை **இணைக்காரணி** எனப்படும். a_{ij} –ன் இணைக்காரணி A_{ij} எனக்குறிக்கப்படும். மேலும் $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ என வரையறுக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ என்பது 3×3 வரிசை உடைய அணி என்க.

இவ்வணியின் உறுப்புகள் a_{11}, a_{12}, a_{13} ஆகியவற்றின் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகள் பின்வருமாறு :

(i) a_{11} –ன் சிற்றணிக்கோவை $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

a_{11} –ன் இணைக்காரணி $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

(ii) a_{12} –ன் சிற்றணிக்கோவை $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$

a_{12} –ன் இணைக்காரணி $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$

(iii) a_{13} –ன் சிற்றணிக்கோவை $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

a_{13} –ன் இணைக்காரணி $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

முடிவு 7.1 லாப்லாஸ் விரிவாக்கம் (Laplace Expansion)

கொடுக்கப்பட்ட $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ என்ற அணியின் முதல் நிரையிலுள்ள உறுப்புகளை அவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகளுடன் பெருக்கிக் கூடுதல் கண்டால், அது A–ன் அணிக்கோவைக்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. ... (1)

இதனையே சிற்றணிக் கோவைகளின் வரையறையைப் பயன்படுத்தி பின்வருமாறு எழுதலாம்.
$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$.

ஓர் அணிக்கோவையை எந்தவொரு நிரை அல்லது நிரல் வழியாகவும் விரிவுப்படுத்தலாம். இவ்வாறு காணப்படும் எல்லா விரிவாக்கங்களின் மதிப்புகள் அனைத்தும் சமமாக இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 23 25-03-2019 13:19:41

எடுத்துக்காட்டாக,

R_1 வழியாக விரிவுபடுத்த, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

R_2 வழியாக விரிவுபடுத்த, $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

C_1 வழியாக விரிவுபடுத்த, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

எடுத்துக்காட்டு 7.15

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், A என்ற அணியின் அனைத்து சிற்றணிக்கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகளைக் காண்க. இவற்றைப் பயன்படுத்தி $|A|$-ஐக் காண்க. மேலும். எந்த ஒரு நிரை அல்லது நிரலைப் பயன்படுத்தி விரிவுபடுத்தினாலும் $|A|$–ன் மதிப்பு மாறுவதில்லை எனச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

சிற்றணிக்கோவைகள் :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 30 = -40$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 18 = 26$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 10 = 16$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 9 = 14$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 12 = -17$$

இணைக்காரணிகள் :

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(-40) = -40$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}(+26) = -26$$

01_7 Matrices and Determinants.indd 24 25-03-2019 13:19:46

$$A_{13} = (-1)^{1+3}(5) = 5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}(16) = -16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}(-4) = -4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}(14) = -14$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}(8) = 8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}(14) = -14$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}(-17) = -17$$

R_1 வழியாக விரிவுபடுத்த,

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$|A| = 1(-40) + (3)(-26) + (-2)(5) = -128 \quad \dots (3)$$

C_1 வழியாக வரிவுபடுத்த,

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= 1(-40) + 4(-16) + -3(8) = -128 \quad \dots (4)$$

(3) மற்றும் (4)லிருந்து,

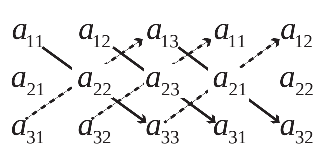
R_1 வழியாக விரிவுபடுத்திப் பெறப்பட்ட | A |–ன் மதிப்பானது C_1 வழியாக விரிவுபடுத்திப் பெற்ற | A |–ன் மதிப்புக்குச் சமம் என நிரூபணமாகிறது.

சாரஸ் விதியைப் பயன்படுத்தி வரிசை 3 உடைய அணிக்கோவையை மதிப்பிடல் (பிரெஞ்சுக் கணித மேதை பியாரே ப்ரடிக் சாரஸ் என்பவரது பெயரால் இவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது)

(Evaluation of determinant of order 3 by using Sarrus Rule)

$$[A]_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A என்ற அணியின் உறுப்புகளை பின்வருமாறு எழுதுக:



| A | ஆனது பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது :

$$|A| = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{33}a_{21}a_{12} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{31}a_{22}a_{13}]$$

01_7 Matrices and Determinants.indd 25 25-03-2019 13:19:50

எடுத்துக்காட்டு 7.16

$A=\begin{bmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{bmatrix}$ எனில், $|A|$-ஐ காண்க.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} = 0M_{11} - \sin\alpha M_{12} + \cos\alpha M_{13}$$

$$= 0 - \sin\alpha(0-\cos\alpha\sin\beta) + \cos\alpha(-\sin\alpha\sin\beta - 0) = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.17

$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ எனில், $|A|$-ன் மதிப்பை சாரஸ் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{array}$$

$$|A| = \left[3(-1)(6)+4(2)(5)+1(0)(-2)\right] - \left[5(-1)(1)+(-2)(2)3+6(0)(4)\right]$$

$$= [-18+40+0]-[-5-12+0] = 22+17 = 39.$$

குறிப்பு 7.6

ஓர் அணிக்கோவையின் மதிப்பை எளிமையாகக் காண, அவ்வணிக்கோவையைப் பூஜ்ஜியங்கள் அதிகமாக உள்ள நிரை அல்லது நிரல் வழியாக விரிவுபடுத்தலாம்.

வரிசை n, $n \geq 4$ என உள்ள சதுர அணியின் அணிக்கோவை

அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கத்தை வரிசை $n, n \geq 4$ என உள்ள சதுர அணிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். $A=[a_{ij}]_{n\times n}, n\geq 4$ என்க.

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற அணியின் அணிக்கோவையில் i ஆவது நிரை மற்றும் j ஆவது நிரலை நீக்கினால், வரிசை $(n-1)$ உடைய ஒரு அணிக்கோவை கிடைக்கும். இவ்வணிக்கோவை a_{ij} என்ற உறுப்பின் சிற்றணிக் கோவையாகும். இதனை M_{ij} எனக்குறிக்கிறோம். a_{ij}–ன் இணைக்காரணி $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

முடிவு 7.2

வரிசை n உடைய சதுர அணி $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ –ன் முதல் நிரையில் உள்ள உறுப்புகளையும் அவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகளையும் பெருக்கிக் கூட்டினால், அது அணிக்கோவை A–க்கு சமமாகும். அதாவது,

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$. இதற்குச் சமமாகச் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகளின் வரையறையைப் பயன்படுத்தி பின்வருமாறு எழுதலாம்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 26 25-03-2019 13:19:55

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \ .$$

இங்கு, A_{1j} என்பது a_{1j}–ன் இணைக்காரணி மற்றும் M_{1j} என்பது a_{1j}–ன் சிற்றணிக் கோவையாகும். $j = 1, 2, \ldots n$ ஆகும்.

குறிப்பு 7.7

(i) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ எனில், A–ன் அணிக்கோவையை $det(A)$ அல்லது $det\ A$ அல்லது Δ எனக் குறிப்பிடலாம்.

(ii) இதனை, ஏதேனுமொரு நிரை அல்லது நிரலைப் பயன்படுத்தியும் கணக்கிடலாம்.

7.3.2 அணிக்கோவைகளின் பண்புகள் (Properties of Determinants)

அணிக்கோவைகளின் மதிப்புக் காண, பின்வரும் அணிக்கோவையின் பண்புகளில் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்டவற்றைப் பயன்படுத்தலாம்.

பண்பு 1

ஓர் அணிக்கோவையின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் இடமாற்றம் செய்தால் அதன் மதிப்பு மாறாது. அதாவது, $|A| = |A^T|$.

ஓர் அணிக்கோவையில் நிரைவழி விரிவு காண்பதும், நிரல் வழி விரிவு காண்பதும் சமம் என்பதிலிருந்து இப்பண்பு உண்மையாகிறது.

பண்பு 2

ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் இரு நிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) இடமாற்றம் செய்யப்படும்போது, அணிக்கோவையின் குறி மாறும். ஆனால் எண்ணளவு மாறாது.

சரிபார்த்தல்

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (R_2 \leftrightarrow R_3) \text{ என்க.}$$

$$= a_1(b_3c_2 - b_2c_3) - b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_3b_2 - a_2b_3)$$

$$= -a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$$

$$= -|A|$$

$$|A_1| = -|A|.$$

பண்பு 3

A என்ற அணியின் n நிரைகள் (நிரல்கள்) இடமாற்றம் செய்யப்படின், அவ்வணியின் அணிக்கோவை $(-1)^n |A|$ ஆகும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 27 25-03-2019 13:19:59

பண்பு 4

ஓர் அணிக்கோவையில் இரு நிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) சர்வ சமம் எனில், அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

சரிபார்த்தல்

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ என்க. இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நிரைகள் சர்வ சமம் எனக் கொள்க.

இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நிறைகளைப் பரிமாற்றம் செய்யக் கிடைப்பது

$$-|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = |A|$$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\Rightarrow\ 2|A| = 0\ \Rightarrow |A| = 0.$

பண்பு 5

A என்ற அணியின் ஒரு நிரை (அல்லது நிரல்) அவ்வணியின் மற்றொரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) திசையிலிப் பெருக்கலாக இருப்பின், அதன் அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

குறிப்பு 7.8

(i) ஓர் அணிக்கோவையின் ஒரு நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில், அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

(ii) ஒரு முக்கோண வடிவ அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பானது அதன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாகும்.

பண்பு 6

ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு திசையிலி kஆல் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு kஆல் பெருக்கப்பட்டதாக அமையும்.

சரிபார்த்தல்

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்க.

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்க.

$$= ka_1(b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1(a_2c_3 - a_3c_2) + kc_1(a_2b_3 - a_3b_2) = k|A|$$

$$= k[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] = k|A|$$

$$\Rightarrow |A_1| = k|A|.$$

குறிப்பு 7.9

(i) A என்பது வரிசை n உடைய சதுர அணி எனில்,

(ii) $|AB| = |A||B|$

(iii) $AB = O$ எனில், $|A| = 0$ அல்லது $|B| = 0$.

(iv) $|A^n| = (|A|)^n$

01_7 Matrices and Determinants.indd 28 25-03-2019 13:20:02

பண்பு 7

ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள ஒரு நிரையின் (நிரலின்) ஒவ்வொரு உறுப்பும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருக்குமெனில், அவ்வணிக்கோவையை இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிக்கோவைகளின் கூட்டல் பலனாக எழுத இயலும்.

அதாவது, $$\begin{vmatrix} a_1+m_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+m_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

சரிபார்த்தல்

முதல் நிரல் வழியாக விரிவுபடுத்த

$$\text{LHS} = (a_1+m_1)(b_2c_3-b_3c_2)-(a_2+m_2)(b_1c_3-b_3c_1)+(a_3+m_3)(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)+m_1(b_2c_3-b_3c_2)-m_2(b_1c_3-b_3c_1)$$
$$+m_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

‘ $$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{RHS}$$

பண்பு 8

ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்போடும் மற்ற பிற நிரைகளில் (நிரல்களில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளைக் குறிப்பிட்ட மாறிலிகளால் முறையே பெருக்கிக் கூட்டுவதால் அல்லது கழிப்பதால் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

சரிபார்த்தல்

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்க.

மற்றும் $$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1+pa_2+qa_3 & b_1+pb_2+qb_3 & c_1+pc_2+qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa_2 & pb_2 & pc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qa_3 & qb_3 & qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ (பண்பு 7–ன்படி)

$$|A_1| = |A| + p\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$|A_1| = |A| + p(0) + q(0) = |A|$ (பண்பு 4–ன்படி)

$|A_1| = |A|$

இப்பண்பு ஒரு குறிப்பிட்ட நிறையை அல்லது நிரலைச் சார்ந்தது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 7.18

a, b, c மற்றும் x என்பன மிகை மெய்யெண்கள் எனில், $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^x+b^{-x})^2 & (b^x-b^{-x})^2 & 1 \\ (c^x+c^{-x})^2 & (c^x-c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix}$ என்பது பூஜ்ஜியமாகும் என நிரூபிக்க.

01_7 Matrices and Determinants.indd 29 25-03-2019 13:20:08

தீர்வு

$C_1 \to C_1 - C_2$ -ஐ பயன்படுத்த, $\begin{vmatrix} 4 & (a^x - a^{-x})^2 & 1 \\ 4 & (b^x - b^{-x})^2 & 1 \\ 4 & (c^x - c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ [C_1, C_3 விகிதச் சமமானவை]

எடுத்துக்காட்டு 7.19

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{bmatrix}$ ஆகியவற்றின் அணிக்கோவைகளை விரிவுபடுத்தாமல், $|B| = 2|A|$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$|B| = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} \quad (R_2 \to R_2 - R_1 \text{ and } R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= 2(-1)^2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= 2|A|.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.20

மதிப்பு காண்க $\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix}$.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 2017-2014 & 0 \\ 2020 & 2023-2020 & 1 \\ 2023 & 2026-2023 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 3 & 0 \\ 2020 & 3 & 1 \\ 2023 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2014 & 1 & 0 \\ 2020 & 1 & 1 \\ 2023 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3(2014 - 2023) = -3(-9) = 27.$$

01_7 Matrices and Determinants.indd 30
25-03-2019 13:20:13

எடுத்துக்காட்டு 7.21

$\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ எனில், x-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் என்பதால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு $(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, 2, 3$.

எடுத்துக்காட்டு 7.22

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$ எனில்

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)[(z+x)-(y+x)]$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y)$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x) = \text{RHS}.$$

பயிற்சி 7.2

(1) அணிக்கோவையை விரிவுபடுத்தாமல், $\begin{vmatrix} s & a^2 & b^2+c^2 \\ s & b^2 & c^2+a^2 \\ s & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & bc & b^2c^2 \\ c+a & ca & c^2a^2 \\ a+b & ab & a^2b^2 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ என நிறுவுக.

(4) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ என நிறுவுக.

01_7 Matrices and Determinants.indd 31 25-03-2019 13:20:18

(5) $\begin{vmatrix} \sec^2\theta & \tan^2\theta & 1 \\ \tan^2\theta & \sec^2\theta & -1 \\ 38 & 36 & 2 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(6) $\begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(7) 3 × 3 வரிசை உடைய எதிர் சமச்சீர் அணியின் பொது வடிவத்தை எழுதுக. அதன் அணிக்கோவையின் மதிப்பு 0 எனக் காட்டுக.

(8) $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ எனில், a, b, c என்பன G.P.–ல் அமையும் அல்லது α என்பது $ax^2 + 2bx + c = 0$–ன் ஒரு மூலமாகும் என நிறுவுக.

(9) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(10) a, b, c என்பன ஒரு A.P.–ன் p, q மற்றும் r-ஆவது உறுப்புகள் எனில், $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$–ன் மதிப்பு காண்க.

(11) $\begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab & ac \\ ab & b^2+x^2 & bc \\ ac & bc & c^2+x^2 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவை x^4ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

(12) a, b, c என்பவை மிகை மற்றும் அவை ஒரு G.P.–ன் p, q மற்றும் rஆவது உறுப்புகள் எனில், $\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(13) $x, y, z \neq 1$ எனில், $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு காண்க.

(14) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ எனில், $\sum_{k=1}^{n} \det(A^k) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$ என நிறுவுக.

(15) விரிவுபடுத்தாமல் பின்வரும் அணிக்கோவைகளின் மதிப்பைக் காண்க. :

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6x & 9x & 12x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(16) A என்பது ஒரு சதுர அணி மற்றும் $|A| = 2$ எனில், $|AA^T|$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(17) A, B என்பன $|A| = -1$ மற்றும் $|B| = 3$ எனுமாறு உள்ள 3 வரிசை சதுர அணிகள் எனில், $|3AB|$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(18) $\lambda = -2$ எனில், $\begin{vmatrix} 0 & 2\lambda & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 3\lambda^2+1 \\ -1 & 6\lambda-1 & 0 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(19) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

(20) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ என சரிபார்க்க.

(21) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் இரண்டாம் நிரையில் உள்ள உறுப்புகளின் இணைக்காரணிகளைப் பயன்படுத்தி, $|A|$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

7.3.3 அணிக்கோவைகளுக்குக் காரணித் தேற்றத்தின் பயன்பாடு (Application of factor theorem to determinants)

தேற்றம் 7.3 (காரணித்தேற்றம்) (Factor Theorem)

ஓர் அணி A–ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் x–ஆல் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருந்து, $x = a$ எனப் பிரதியிட $|A|$ –ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும் எனில், $(x - a)$ என்பது $|A|$ –ன் ஒரு காரணியாகும்.

குறிப்பு 7.10

(i) ஓர் அணிக்கோவையின் மதிப்பைக் காரணிகளின் பெருக்கல் வடிவில் பெறுவதற்கு இத்தேற்றம் மிகவும் பயன்படுகிறது.

(ii) $b = a$ என $|A|$-ல் பிரதியிட, அதன் ஏதேனும் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்கள் சர்வசமமானால், $|A| = 0$ ஆகும். எனவே காரணித் தேற்றத்தின்படி $(a-b)$ என்பது $|A|$–ன் ஒரு காரணியாகும்.

(iii) n $(n \geq r)$ வரிசையுள்ள அணிக்கோவையில் $x = a$ எனப் பிரதியிட, r நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வசமமானால், $(x - a)^{r-1}$ என்பது $|A|$ –ன் ஒரு காரணியாகும்.

(iv) ஒரு சதுர அணியின் (அல்லது அதன் அணிக்கோவை) ஒவ்வொரு நிரையும் முதல் நிரையில் உள்ள மாறிகளை வட்டச் சுழல் முறையில் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்பட்டால், அது வட்டச் சமச்சீர் வடிவம் எனப்படும்.

(v) ஒரு வட்டச் சமச்சீர் அணிக்கோவையில் m என்பது காரணிகளின் (பிரதியிடுவதால் பெறப்பட்ட) பெருக்கலின் படிக்கும் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கலின் படிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் என்க.

01_7 Matrices and Determinants.indd 33 25-03-2019 13:20:24

(1) இப்போது $m = 0$ எனில் மேலும் தேவையான காரணி மாறிலி k ஆகும்.

(2) $m = 1$ எனில் மேலும் தேவையான காரணி $k(a+b+c)$ ஆகும்.

(3) $m = 2$ எனில் மேலும் தேவையான காரணி $k(a^2+b^2+c^2)+l(ab+bc+ca)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.23

காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+9)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$x = 1$ எனப்பிரதியிட, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

இங்கு மூன்று நிரைகளும் சர்வசமம். எனவே, $(x - 1)^2$ ஆனது $|A|$–ன் ஒரு காரணியாகும்.

$|A|$–ல் $x = -9$ எனப் பிரதியிட, $|A| = \begin{vmatrix} -8 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

எனவே, $(x + 9)$ஆனது $|A|$–ன் காரணியாகும். $[C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$

அதாவது $(x - 1)^2 (x + 9)$ என்பது $|A|$–ன் காரணியாகும். இதன் படி 3 ஆகும். அணிக்கோவை x–ல் அமைந்த 3–ம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எனவே, மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி, மாறிலி 'k' ஆகும்.

ஆகவே, $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = k(x-1)^2(x+9)$

x^3 உறுப்புகளை இருபுறமும் சமப்படுத்த, $k = 1$ எனப்பெறுகிறோம்.

எனவே, $|A| = (x - 1)^2 (x + 9)$.

எடுத்துக்காட்டு 7.24

$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)\ (y-z)\ (z-x)\ (xy+yz+zx)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$x = y$ எனப்பிரதியிட, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (R_1 = R_2)$

01_7 Matrices and Determinants.indd 34 25-03-2019 13:20:28

எனவே, $(x-y)$ என்பது $|A|$-ன் ஒரு காரணியாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவை x, y, z என்பவற்றில் வட்ட சமச்சீரானது. ஆகவே, $(y-z)$ மற்றும் $(z-x)$ ஆகியவையும் $|A|$ -ன் காரணிகளாகும்.

இப்போது $(x-y)(y-z)(z-x)$ என்பது $|A|$-ன் காரணியாகும். இதன் படி 3 ஆகும்.

முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கல் $1\times y^2\times z^3$. இதன் படி 5 ஆகும்.

எனவே மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி $k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)$ ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = [k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)]\times(x-y)(y-z)(z-x)$$

$x=0, y=1$ மற்றும் $z=2$ எனப்பிரதியிட,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \left[k(0+1+4)+\ell(0+2+0)\right](-1)(1-2)(2-0)$$

$$\Rightarrow \quad (8-4) = [(5k+2\ell)](-1)(-1)(2)$$

$$4 = 10k+4\ell \Rightarrow 5k+2\ell = 2 \qquad \ldots (1)$$

மேலும், $x=0, y=-1, z=1$ எனப்பிரதியிட,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [k(2)+\ell(-1)](1)(-2)(1)$$

$$\Rightarrow \quad [(2k-\ell)(-2)] = 2$$

$$2k-\ell = -1 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2)-ஐ தீர்க்க, $k=0, \ell=1$ எனப்பெறுகிறோம்.

எனவே, $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$.

எடுத்துக்காட்டு 7.25

$$|A| = \begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = 2pqr\ (p+q+r)^3$$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$p=0$ எனப்பிரதியிட, $|A| = \begin{vmatrix} (q+r)^2 & 0 & 0 \\ q^2 & r^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & q^2 \end{vmatrix} = 0$

எனவே, $(p-0)$ என்பது ஒரு காரணியாகும். அதாவது p ஒரு காரணியாகும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 35 25-03-2019 13:20:34

$|A|$ என்பது p, q, r என்பவற்றில் வட்டச் சமச்சீராகும். எனவே, q, r ஆகியவையும் $|A|$–ன் காரணிகளாகும்.

$p+q+r=0$ எனில், $q+r=-p$; $r+p=-q$; $p+q=-r$

$$|A| = \begin{vmatrix} p^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & q^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & r^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ எனப்பெறுகிறோம்.}$$

இங்கு மூன்று நிரல்களும் சர்வசமம். எனவே, $(p+q+r)^2$ என்பது $|A|$–ன் காரணியாகும்.

இப்போது $pqr\,(p+q+r)^2$ என்பது $|A|$–ன் காரணியாகும். இதன் படி 5 ஆகும். $|A|$–ன் படி 6 ஆகும்.

எனவே, மற்றொரு காரணி $k\,(p+q+r)$ ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = k(p+q+r)\,(p+q+r)^2 \times pqr$$

$p=1,\ q=1,\ c=1$ எனப்பிரதியிட,

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = k(1+1+1)^3\ (1)\ (1)\ (1)$$

$4(16-1)-1(4-1)+1(1-4)=27k$

$60-3-3=27\,k \ \Rightarrow\ k=2.$

எனவே, $|A| = 2pqr\,(p+q+r)^3$.

எடுத்துக்காட்டு 7.26

முக்கோணம் ABC–ல் $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin B(1+\sin B) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0$ எனில், ΔABC ஆனது ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

தீர்வு

$\sin B = \sin A$ எனப் பிரதியிட,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin A & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin A(1+\sin A) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $\sin B = \sin A$ எனில், சமன்பாடு நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

இதேபோல் $\sin B = \sin C$ மற்றும் $\sin C = \sin A$ எனும்போதும் சமன்பாடு நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

ஆகவே, $A = B$ அல்லது $B = C$ அல்லது $C = A$ எனப்பெறுகிறோம்.

மேற்கண்ட எல்லா நிலைகளிலும் ஏதேனும் இரண்டு கோணங்கள் சமமாக உள்ளன. எனவே ΔABC ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணமாகும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 36 25-03-2019 13:20:37

பயிற்சி 7.3

பின்வருவனவற்றிற்கு காரணித் தேற்றத்தை பயன்படுத்துக :

(1) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^2(x+2a)$ என நிறுவுக.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$ என நிறுவுக.

(3) தீர்க்க : $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0.$

(4) $\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\ (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$ என நிறுவுக.

(5) தீர்க்க : $\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$ என நிறுவுக.

7.3.4 அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் (Product of determinants)

இரு அணிகளின் பெருக்கலைக் காண 'நிரை–நிரல்' பெருக்கல் விதி மட்டுமே பின்பற்றப்படுகிறது. ஒரு அணிக்கோவையின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் இடமாற்றம் செய்வதால் அதன் மதிப்பு மாறாது (பண்பு 1) எனப் பார்த்தோம். எனவே, இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கலில் பின்வரும் பெருக்கல் முறைகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(i) நிரை–நிரல் பெருக்கல் விதி

(ii) நிரை–நிரை பெருக்கல் விதி

(iii) நிரல்–நிரல் பெருக்கல் விதி

(iv) நிரல்–நிரை பெருக்கல் விதி

JH2RHQ

குறிப்பு 7.11

(i) A, B என்பன n வரிசை உடைய இரு சதுர அணிகள் எனில், $|AB| = |A|\ |B|$ ஆகும்.

(ii) அணிகளில் பொதுவாக $AB \neq BA$ என இருப்பினும் $|AB| = |BA|$ என்பது எப்போதும் உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.27

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ எனில், $|AB| = |A|\ |B|$ எனச் சரிபார்க்க.

01_7 Matrices and Determinants.indd 37 25-03-2019 13:20:40

தீர்வு

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 1 \qquad \ldots (1)$$

$$|A| = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$$

$$|B| = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$$

$$|A|\ |B| = 1 \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)–லிருந்து, $|AB| = |A|\ |B|$.

எடுத்துக்காட்டு 7.28

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0 \\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0 \\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c^2+b^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix} = \text{RHS}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.29

$$\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{RHS} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

01_7 Matrices and Determinants.indd 38 25-03-2019 13:20:44

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{இரண்டாவது} \\ \text{அணிக்கோவையில் } R_2 \leftrightarrow R_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

நிரை–நிரல் பெருக்கல் முறைப்படி

$$= \begin{vmatrix} -a^2+bc+cb & -ab+ab+c^2 & -ac+b^2+ac \\ -ab+c^2+ab & -b^2+ac+ac & -bc+bc+a^2 \\ -ac+ac+b^2 & -bc+a^2+bc & -c^2+ab+ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \text{RHS.}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.30

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}$$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times (-1)\,(-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x^2-x^2 & x-x-x^2 & x-x^2-x \\ x-x-x^2 & x^2-1-x^2 & x^2-x-x \\ x-x^2-x & x^2-x-x & x^2-x^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}$$

$= \text{R.H.S.}$

01_7 Matrices and Determinants.indd 39 25-03-2019 13:20:48

7.3.5 அணிக்கோவைக்கும் அதன் இணைக்காரணி அணிக்கோவைக்கும் உள்ள தொடர்பு (Relation between a determinant and its cofactor determinant)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

a_1, b_1, c_1 ... என்பவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் முறையே A_1, B_1, C_1 .... என்க.

எனவே, இணைக்காரணிகளின் அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

$$|A| = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

இதேபோன்று, $|A| = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2$ மற்றும் $|A| = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$

அதாவது, ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) உறுப்புகள் மற்றும் அவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதலானது அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பிற்குச் சமமாவதைக் கவனிக்கவும்.

மேலும்,
$$\begin{aligned} a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 &= -a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= -a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + b_1(a_1c_3 - a_3c_1) - c_1(a_1b_3 - a_3b_1) \\ &= a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 + a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1 = 0 \end{aligned}$$

இதேபோன்று நாம் பெறுவது

$$a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0 \; ; \; a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0 \; ;$$

$$a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0 \; ;$$

குறிப்பு 7.12

ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) உறுப்புகள் மற்றும் வேறேதேனும் நிரை (அல்லது நிரல்) உறுப்புகளின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதலானது பூஜ்ஜியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.31

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ என்க. a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3 என்பவற்றின் இணைக்காரணிகள் A_i, B_i, C_i

எனில், $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3b_1B_3 + c_1C \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

01_7 Matrices and Determinants.indd 40
25-03-2019 13:20:55

$$= \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3$$

$$|A| \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^3 .$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2$$

7.3.6 முக்கோணத்தின் பரப்பு (Area of a triangle)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ மற்றும் (x_3, y_3) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பானது $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$ –ன் எண்ணளவாகும் என நாமறிவோம்.

இக்கோவையை அணிக்கோவை வடிவத்தில் $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.32

(– 3, 0), (3, 0), (0, k) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 9 சதுர அலகுகள் எனில், k –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ –ன் எண்ணளவு ஆகும். எனவே,

$$9 = \left| \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}(-k)(-3-3) \right|$$

ஆகையால் $9 = 3|k|$, $k = \pm 3$.

குறிப்பு 7.13

மூன்று புள்ளிகளால் உருவாக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூஜ்ஜியம் எனில், அம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையும். இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். மேலும், அணிக்கோவையின் மதிப்பு குறை எண்ணாக இருக்கலாம். ஆனால், பரப்பு என்பது எப்போதும் ஒரு குறையற்ற எண்ணாகும் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.33

(– 2, – 3), (3, 2), (– 1, – 8) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \left| \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$

01_7 Matrices and Determinants.indd 41 09-04-2020 11:50:51

$$\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & -3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & -8 & 1\end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(-20+12-22)\right| = |-15| = 15$$

எனவே தேவையான பரப்பு 15 சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 7.34

$(a, b + c), (b, c + a), (c, a + b)$ என்பன ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என நிரூபிக்க

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b+c & 1\\ b & c+a & 1\\ c & a+b & 1\end{vmatrix} = 0$$ என நிறுவினால் போதுமானது.

$C_1 \to C_1 + C_2$ என எடுக்க,

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1\\ a+b+c & c+a & 1\\ a+b+c & a+b & 1\end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1\\ 1 & c+a & 1\\ 1 & a+b & 1\end{vmatrix} = (a+b+c)\times 0 = 0$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும்.

7.3.7 பூஜ்ஜியக் கோவை மற்றும் பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகள் (Singular and non-singular matrices)

வரையறை 7.21

ஒரு சதுர அணி A-ன் அணிக்கோவை $|A| = 0$ எனில், அது பூஜ்ஜியக்கோவை அணி எனப்படும்.

ஒரு சதுர அணி A-ன் அணிக்கோவை $|A| \neq 0$ எனில், அது பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1\\ -4 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}$ என்க.

$|A| = 3(1-1) - 8(-4+4) + 1(-4+4) = 0$.

எனவே A என்பது ஒரு பூஜ்ஜியக் கோவை அணியாகும்.

$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1\\ -3 & 0 & 5\\ 5 & 4 & -7\end{bmatrix}$ என்க. $|B| = 2(0 - 20) - (-3)(-42 - 4) + 5(30 - 0) = -28 \neq 0$.

எனவே, B என்பது ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணியாகும்.

குறிப்பு 7.14

A, B என்பன ஒரே வரிசை உள்ள பூஜ்ஜியமற்ற அணிகள் எனில், $|AB| = |A|\,|B| = |BA|$ என்பதால் AB மற்றும் BA என்பனவும் பூஜ்ஜியமற்ற அணிகளாகும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 42 25-03-2019 13:21:02

பயிற்சி 7.4

(1) (0, 0), (1, 2), (4, 3) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(2) (k, 2), (2, 4) மற்றும் (3, 2) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 4 சதுர அலகுகள் எனில், k–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(3) கீழ்க்காண்பவற்றில் எவை பூஜ்ஜிய மற்றும் பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகள் எனக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & a-b & k \\ b-a & 0 & 5 \\ -k & -5 & 0 \end{bmatrix}$

(4) பின்வருவன பூஜ்ஜியக் கோவை அணிகள் எனில், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & a \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} b-1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

(5) $\cos 2\theta = 0$ எனில், $\begin{vmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}^2$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(6) $\begin{vmatrix} \log_3 64 & \log_4 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_8 3 \\ \log_3 4 & \log_3 4 \end{vmatrix}$ என்ற பெருக்கலின் மதிப்பைக் காண்க.

பயிற்சி 7.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

JHBHJD

(1) $a_{ij} = \frac{1}{2}(3i - 2j)$ மற்றும் $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ எனில், A என்பது

(1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $2X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், X என்ற அணியானது

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையல்ல?

(1) ஒரு திசையிலி அணி (2) ஒரு மூலைவிட்ட அணி

(3) ஒரு மேல் முக்கோண வடிவ அணி (4) ஒரு கீழ் முக்கோண வடிவ அணி

01_7 Matrices and Determinants.indd 43 25-03-2019 13:21:09

(4) A, B என்பன A + B மற்றும் AB என்பவற்றை வரையறுக்கும் இரு அணிகள் எனில்,

(1) A, B என்பன ஒரே வரிசை கொண்டவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

(2) A, B என்பன சமவரிசையுள்ள சதுர அணிகள்

(3) A–நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B–ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமம்.

(4) $A = B$

(5) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$ எனில், λ –ன் எம்மதிப்புகளுக்கு $A^2 = O$?

(1) 0 (2) ±1 (3) – 1 (4) 1

(6) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ எனில், a, b–ன் மதிப்புகள்

(1) $a = 4, b = 1$ (2) $a = 1, b = 4$ (3) $a = 0, b = 4$ (4) $a = 2, b = 4$

(7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix}$ என்பது $AA^T = 9I$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் அணியாகும், இங்கு I என்பது 3 × 3 வரிசையுள்ள சமனி அணி எனில், (a, b) என்ற வரிசை ஜோடி

(1) (2, – 1) (2) (– 2, 1) (3) (2, 1) (4) (– 2, – 1)

(8) A என்பது ஒரு சதுர அணி எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது சமச்சீரல்ல?

(1) $A + A^T$ (2) AA^T (3) $A^T A$ (4) $A - A^T$

(9) A, B என்பன n வரிசையுள்ள சமச்சீர் அணிகள், இங்கு $A \neq B$ எனில்,

(1) A + B ஆனது ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணி (2) A + B என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி

(3) A + B என்பது ஒரு மூலைவிட்ட அணி (4) A + B என்பது ஒரு பூஜ்ஜிய அணி

(10) $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & a \end{bmatrix}$ மற்றும் $xy = 1$ எனில், det $(A\ A^T)$ –ன் மதிப்பு

(1) $(a-1)^2$ (2) $(a^2+1)^2$ (3) $a^2 - 1$ (4) $(a^2-1)^2$

(11) $A = \begin{bmatrix} e^{x-2} & e^{7+x} \\ e^{2+x} & e^{2x+3} \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு பூஜ்ஜியக் கோவை அணி எனில், x–ன் மதிப்பு

(1) 9 (2) 8 (3) 7 (4) 6

(12) $(x,-2),\ (5,2),\ (8,8)$ என்பன ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் எனில், x–ன் மதிப்பு

(1) – 3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 1 (4) 3

(13) $\begin{vmatrix} 2a & x_1 & y_1 \\ 2b & x_2 & y_2 \\ 2c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{2} \neq 0$ எனில், $\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right), \left(\frac{x_2}{b}, \frac{y_2}{b}\right), \left(\frac{x_3}{c}, \frac{y_3}{3}\right)$ என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{4}abc$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{8}abc$

01_7 Matrices and Determinants.indd 44 25-03-2019 13:21:18

(14) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ என்ற ஒரு சதுர அணியின் வர்க்கம் வரிசை 2 உடைய ஒரு அலகு அணி எனில்,

α, β மற்றும் γ என்பவை நிறைவு செய்யும் தொடர்பு

(1) $1+\alpha^2+\beta\gamma=0$ (2) $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$

(3) $1-\alpha^2+\beta\gamma=0$ (4) $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

(15) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$, எனில் $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kx & ky & kz \\ kp & kq & kr \end{vmatrix}$ என்பது

(1) Δ (2) $k\Delta$ (3) $3k\Delta$ (4) $k^3\Delta$

(16) $\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு

(1) 6 (2) 3 (3) 0 (4) – 6

(17) $A = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பு

(1) – $2abc$ (2) abc (3) 0 (4) $a^2+b^2+c^2$

(18) x_1, x_2, x_3 மற்றும் y_1, y_2, y_3 ஆகியவை ஒரே பொது விகிதம் கொண்ட பெருக்குத் தொடர் முறையில் இருந்தால், (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகள்

(1) சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள்

(2) செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள்

(3) இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள்

(4) ஒரே கோட்டிலமையும்

(19) $\lfloor . \rfloor$ என்பது மீப்பெரு முழு எண் சார்பு என்க. மேலும் $-1 \le x < 0,\ 0 \le y < 1,\ 1 \le z < 2$

எனில், $\begin{vmatrix} \lfloor x \rfloor + 1 & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor + 1 & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor + 1 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பு

(1) $\lfloor z \rfloor$ (2) $\lfloor y \rfloor$ (3) $\lfloor x \rfloor$ (4) $\lfloor x \rfloor + 1$

(20) $a \ne b, b, c$ ஆகியவை $\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ 3 & b & c \\ 4 & a & b \end{vmatrix} = 0$ என்பதை நிறைவு செய்தால், abc என்பது

(1) $a+b+c$ (2) 0 (3) b^3 (4) $ab+bc$

01_7 Matrices and Determinants.indd 45 25-03-2019 13:21:24

(21) $A=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 2\end{vmatrix}$ மற்றும் , $B=\begin{vmatrix}-2 & 4 & 2\\ 6 & 2 & 0\\ -2 & 4 & 8\end{vmatrix}$ எனில்

(1) $B=4A$ (2) $B=-4A$ (3) $B=-A$ (4) $B=6A$

(22) A என்பது n-ஆம் வரிசை உடைய எதிர் சமச்சீர் அணி மற்றும் C என்பது $n\times 1$ வரிசை உடைய நிரல் அணி எனில், $C^T AC$ என்பது

(1) n-ஆம் வரிசையுடைய சமனி அணி (2) வரிசை 1 உடைய சமனி அணி

(3) வரிசை 1 உடைய பூஜ்ஜிய அணி (4) வரிசை 2 உடைய சமனி அணி

(23) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் A என்ற அணி

(1) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

(24) $A+I=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ எனில் $(A+I)(A-I)$ -ன் மதிப்பு

(1) $\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 8 & -9\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}-5 & 4\\ -8 & 9\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}5 & 4\\ 8 & 9\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}-5 & -4\\ -8 & -9\end{bmatrix}$

(25) A, B என்பன சம வரிசையுள்ள இரு சமச்சீர் அணிகள் எனில், கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

(1) A + B என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி (2) AB என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி

(3) $AB=(BA)^T$ (4) $A^T B=AB^T$

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

- மெய்யெண்கள் அல்லது $\mathbb{R}$ -ன் மீதான மெய்மதிப்புச் சார்பு அல்லது கலப்பெண்களை செவ்வக வடிவில் வரிசைப்படுத்துதல் அணியாகும்.
- ஓர் அணி m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் பெற்றிருந்தால், அதன் வரிசை $m\times n$ ஆகும்.
- $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ என்ற அணியில்

$m = n$ எனில், அவ்வணி சதுர அணியாகும்.

$m = 1$ எனில், அவ்வணி நிரை அணியாகும்.

$n = 1$ எனில், அவ்வணி நிரல் அணியாகும்.

$a_{ij}= 0 \;\forall\; i, j$ எனில் அவ்வணி பூஜ்ஜிய அணியாகும்.

$m = n$ மற்றும் $a_{ij} = 0 \;\forall\; i\neq j$ எனில் அவ்வணி மூலைவிட்ட அணியாகும்.

$m = n, a_{ij} = 0 \;\forall\; i\neq j$ மற்றும் $a_{ii} = \lambda, \;\forall\; i$ அவ்வணி திசையிலி அணியாகும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 46 25-03-2019 13:21:30

$m = n, a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$ மற்றும் $a_{ii} = 1, \ \forall \ i$ எனில் அவ்வணி அலகு அணி அல்லது சமனி அணியாகும்.

$m = n$ மற்றும் $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$ எனில் மேல் முக்கோண வடிவ அணியாகும்.

$m = n$ மற்றும் $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$ எனில் கீழ்முக்கோண வடிவ அணியாகும்.

- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ என்ற அணிகளுக்கு $a_{ij} = b_{ij}, \ \forall \ i$ மற்றும் j எனில் அவை சம அணிகள் எனப்படும்.
- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ எனில் $A + B = [c_{ij}]_{m\times n}$, இங்கு $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் λ ஒரு திசையிலி எனில் $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$.
- $-A = (-1)A$
- $A + B = B + A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, இங்கு A, B, C என்பன ஒரே வரிசை உடையவை.

  (i) $A(BC) = (AB)C$ (ii) $A(B+C) = AB+AC$ (iii) $(A+B)C = AC+BC$
- ஓர் அணி A-யின் நிரை மற்றும் நிரல்களை இடமாற்றம் செய்வதன் மூலம் பெறப்படும் அணி A-ன் நிரை நிரல் மாற்று அணி A^T எனப்படும்.

  (i) $(A^T)^T = A$, (ii) $(kA)^T = kA^T$, (iii) $(A+B)^T = A^T + B^T$, (iv) $(AB)^T = B^T A^T$
- A என்ற ஒரு சதுர அணி

  (i) $A^T = A$ எனில், அது சமச்சீர் அணி எனப்படும்

  (ii) $A^T = -A$ எனில், அது எதிர் சமச்சீர் அணி எனப்படும்.
- ஒரு சதுர அணியை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.
- ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் பூஜ்ஜியமாகும்.
- A என்பது மெய்யெண் உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு சதுர அணி எனில் $A + A^T$ என்பது சமச்சீர் அணியாகும் மற்றும் $A - A^T$ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணியாகும். மேலும் $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.
- சதுர அணிகளுக்கு மட்டுமே அணிக்கோவைகளை வரையறுக்க முடியும்.
- $|A^T| = |A|$.
- A, B என்பன சம வரிசை உடைய இரு சதுர அணிகள் எனில், $|AB| = |A|\,|B|$
- ஒரு சதுர அணி $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ எனில் $|kA| = k^n |A|$ இங்கு k என்பது ஒரு திசையிலி.
- ஒரு சதுர அணி A-ன் அணிக்கோவையின் மதிப்பானது அதன் ஒரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) உறுப்புகள் மற்றும் அவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கலின் கூடுதலுக்குச் சமம். எடுத்துக்காட்டாக, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

01_7 Matrices and Determinants.indd 47 25-03-2019 13:21:35

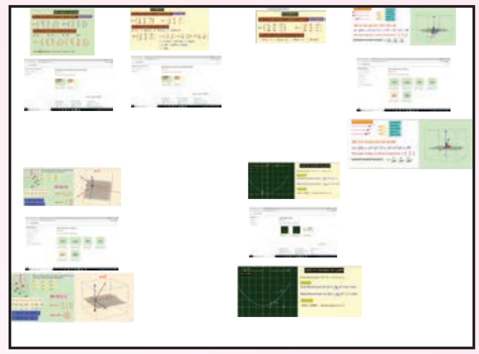
- ஒரு சதுர அணி A-ன் அணி அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரை அல்லது நிரலின் உறுப்புகள் மற்றும் மற்றொரு நிரை அல்லது நிரலின் உறுப்புகளின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனின் கூடுதலானது பூஜ்ஜியமாகும். எடுத்துக்காட்டாக, $a_{11}A_{13} + a_{12}A_{23} + a_{13}A_{33} = 0$.
- ஓர் அணிக்கோவையின் அனைத்து நிரைகளையும் நிரல்களாக இடமாற்றம் செய்தால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.
- ஓர் அணிக்கோவையின் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்கள் இடமாற்றம் செய்யப்பட்டால், அணிக்கோவையின் குறி மாறும்.
- ஓர் அணிக்கோவையின் ஒரு நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில், அதன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.
- ஓர் அணிக்கோவையின் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்கள் சர்வசமம் எனில், அதன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.
- ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு திசையிலி kஆல் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு kஆல் பெருக்கப்பட்டதாக அமையும்.
- ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள ஒரு நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் r உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருக்குமெனில், அவ்வணிக்கோவையை r அணிக்கோவைகளின் கூட்டல் பலனாக எழுதலாம்.
- ஓர் அணிக்கோவை $R_i + \alpha R_j + \beta R_k (j, k \neq i)$ என்ற நிரை (R_i) உருமாற்றத்திற்கு அல்லது $C_i + \alpha C_j + \beta C_k (j, k \neq i)$ என்ற நிரல் (C_i) உருமாற்றத்திற்கு உட்படுத்தப்பட்டால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது. இங்கு α, β என்பன ஏதேனும் இரு மாறிலிகள்.
- காரணித் தேற்றம்: ஓர் அணி A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் x-ல் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருந்து, $x = a$ எனப் பிரதியிட $|A|$-ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியம் எனில், $x = a$ என்பது $|A|$-ன் ஒரு காரணியாகும்.
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ மற்றும் (x_3, y_3) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ -ன் எண்ணளவாகும்.
- முக்கோணத்தின் பரப்பு பூஜ்ஜியம் எனில், இம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையும்.
- ஒரு சதுர அணி A-க்கு $|A| = 0$ எனில், அது பூஜ்ஜியக்கோவை அணி எனப்படும். $|A| \neq 0$ எனில், அது பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 48 25-03-2019 13:21:37

இணையச் செயல்பாடு 7 (a)

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

செயல்பாட்டின் இறுதியில்
கிடைக்கப் பெறுவது



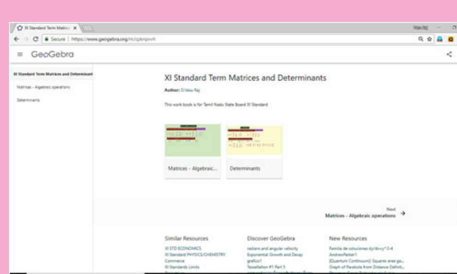
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra–வின் "Matrices and Determinants" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

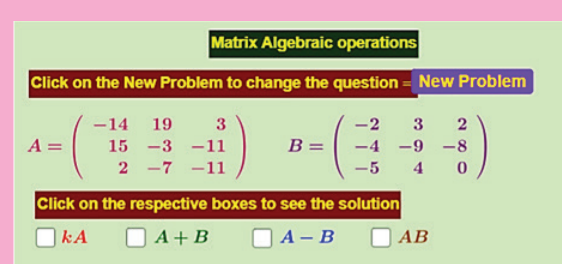
படி –2

"Matrices–Algebraic operations" என்பதைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அதில் உள்ள கணக்குகளைச் செய்து, அதெற்கென கொடுத்திருக்கும் கட்டங்களில் விடைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

மேலும் புது வினாக்களுக்கு "New Problem" என்பதைத் தேர்வு செய்யவும்.



படி – 1



படி –2

உரலி :

https://ggbm.at/cpknpvvh

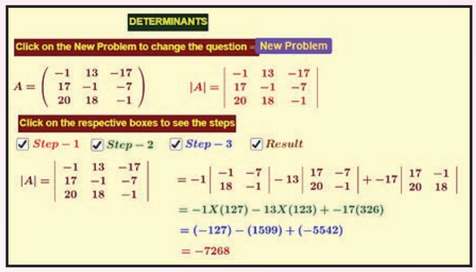
B125_11_MAT_TM

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

01_7 Matrices and Determinants.indd 49 25-03-2019 13:21:38

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது



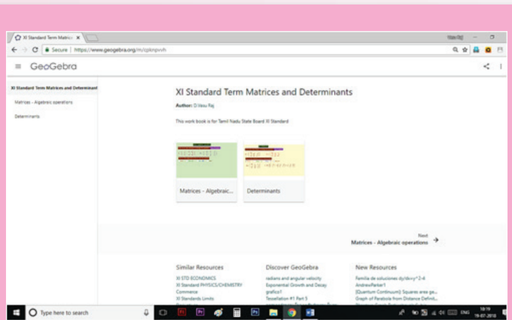
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "Matrices and Determinants" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

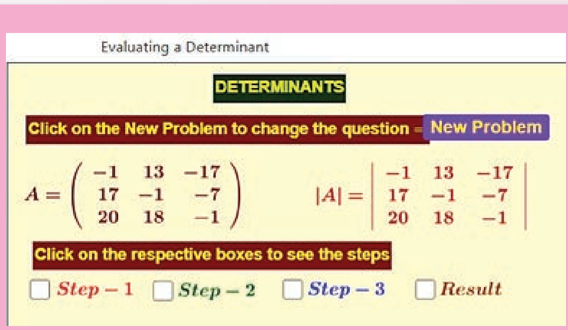
படி –2

“Determinants" என்பதைத் தேர்வு செய்து கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் அணிக்கோவைகளின் மதிப்பினை நிர்ணயிக்கவும், மேலும் கொடுத்திருக்கும் கட்டங்களைத் தேர்வு செய்து அதன் படிகளைச்சரி பார்க்கவும்.

புது வினாக்களைப் பெறுவதற்கு "New Problem" என்பதைத் தேர்வு செய்யவும்.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/cpknpvvh

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

B125_11_MAT_TM

01_7 Matrices and Determinants.indd 50 25-03-2019 13:21:39