அத்தியாயம் 4

திரிகோணமிதி

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்த பின்பு மாணாக்கர்கள் பின்வரும் பாடக்கருத்துக்களைப் புரிந்து கொள்ள இயலும்

9Z4E36

- திரிகோணமிதியின் கோண விகிதங்கள்
- கூட்டல் சூத்திரம், பெருக்கல் மற்றும் உட்பெருக்கல் கோணங்கள்
- கூடுதல், பெருக்கலாக உருமாற்றம் மற்றும் மறுதலை
- நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகளின் அடிப்படைக் கருத்துக்கள்
- நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகளின் பண்புகள்

பிரம்மகுப்தா

அறிமுகம்

திரிகோணமிதி என்ற வார்த்தை கிரேக்க வார்த்தைகளான டிரிகோணா (trigona) மற்றும் மெட்ரான் (metron) என்ற வார்த்தைகளிலிருந்து உருவாக்கப்பட்டது. உண்மையிலேயே திரிகோணமிதி என்பது ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் மற்றும் கோணங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்புப் பற்றி அறிவது ஆகும். ஏறத்தாழ இரண்டாம் நூற்றாண்டில் A.D. ஜார்ஜ் ரீடீகஸ் என்பவர் முதன்முதலில் செங்கோணங்களைப் பொறுத்து திரிகோணமிதி சார்புகளை வரையறுத்தார். பழங்கால இந்தியாவின் கணிதவியலாளர்கள் ஆரியபட்டா, பிரம்மகுப்தா, பாஸ்கரா–I மற்றும் பாஸ்கரா–II ஆகியோர், திரிகோணமிதி சம்பந்தமான சில முக்கியமான முடிவுகளை அளித்தார்கள். பாஸ்கரா–I என்பவர் 90 பாகைக் கோணங்களுக்கு அதிகமான மதிப்புகளின் sine விகிதங்களை காணுவதற்கான வாய்ப்பாடுகளைக் கண்டுபிடித்தார். முற்காலத்தில் திரிகோணமிதி கடற்படையியல், நில அளவையியல் மற்றும் வானவியல் ஆகியவற்றில் பயன்படுத்தப்பட்டது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

தற்காலத்தில் திரிகோணமிதி மின் வரைபடம், அணுக் கொள்கை விரிவாக்கம், கடலில் எழும் அலைகளின் உயரத்தை கணிப்பது, இசைக் குரலைப் பகுப்பாய்வு செய்வது போன்ற பல பகுதிகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மீள் பார்வை

1. $\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$

2. $\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$

3. $\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

4. $\cot\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்பக்கம்}}$

5. $\sec\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

6. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்பக்கம்}}$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 81 20-04-2020 05:01:58 PM

திரிகோணமிதி விகிதங்களுக்கு இடையேயான தொடர்பு

1. $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ அல்லது $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

2. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ அல்லது $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

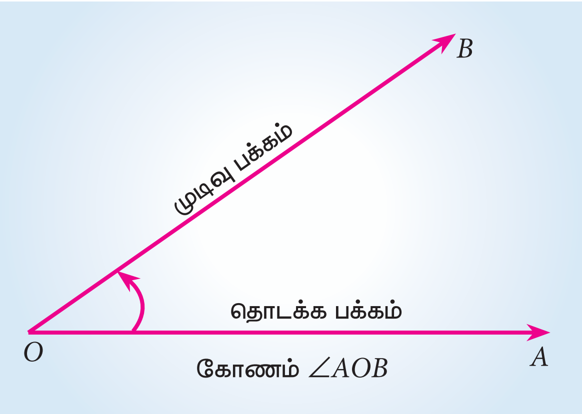
3. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ அல்லது $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

4. $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ அல்லது $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

திரிகோணமிதி முற்றொருமைகள்

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
3. $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

கோணம்



படம் 4.1

ஒருகதிர் அதன் தொடக்க நிலையிலிருந்து முடிவு நிலை வரை ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்து சுழலும் அளவைக் கோணம் என்கிறோம். கதிர் ‘OA’ யை தொடக்க பக்கம் என்றும் கதிர் ‘OB’ யின் முடிவு நிலை கோணத்தின் முடிவு பக்கம் என்றும் அழைக்கலாம். புள்ளி ‘O’ –ஐ சுழலும் கதிரின் முனை என்பர்.

இச்சுழற்சி கடிகார சுழற்சிக்கு எதிர்திசையில் இருந்தால், கோணத்தை மிகைக்கோணம் என்றும் மற்றும் சுழற்சியானது கடிகார சுழற்சி திசையில் இருந்தால், கோணத்தை குறைக்கோணம் என்றும் கூறலாம்.

கோணங்களின் அளவு

கோணங்களின் அளவுகளை இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். ஒன்று பாகை அளவு மற்றொன்று ரேடியன் அளவு.

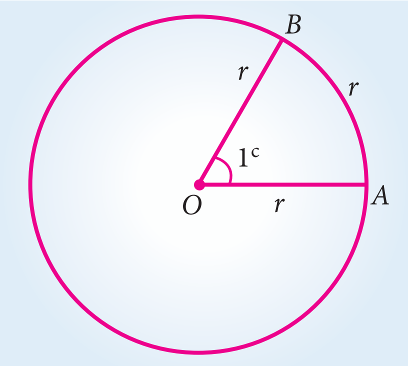
பாகை அளவு

ஒரு கோணத்தின் அளவு தொடக்க நிலையிலிருந்து முடிவு நிலை வரை ஒரு முழு சுற்றின் $\left(\dfrac{1}{360}\right)$ பங்கு சுழற்சிக்குச் சமமாக இருந்தால் அந்த கோணம் ஒரு பாகை அளவை கொண்டுள்ளது எனக் கூறலாம். மேலும் அதனை 1° பாகை (one degree) என எழுதலாம். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை 90° சமப்பகுதியாக பிரித்தால் அவை ஒரு பாகை எனப்படும். பாகையை கலைகளாகவும் மற்றும் கலைகளை விகலைகளாகவும் பிரிக்கலாம்.

1 பாகை = 60 கலைகள் (minutes) $60'$
1 கலை = 60 விகலைகள் (seconds) $(60'')$

ரேடியன் அளவு

ஆரத்திற்கு சமமான வட்டவில், அதன் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் ஒரு ரேடியன் எனப்படும் இதை 1^{c} எனக் குறிக்கிறோம்.



படம் 4.2

குறிப்பு

ஒரு வட்டத்தின் வட்டவில் அதன் மையத்தில் தாங்கக் கூடிய கோணத்தின்

$$\text{ரேடியன் அளவு} = \frac{\text{வில்லின் நீளம்}}{\text{ஆரம்}}$$

$\therefore \theta = \dfrac{s}{r}$ இங்கு θ என்பது வட்ட மைய கோணம், s வட்ட வில்லின் நீளம், r வட்டத்தின் ஆரம்.

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 82 20-04-2020 05:02:02 PM

பாகைகளுக்கும் ரேடியன்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

ஒரு அலகு ஆரம் உடைய வட்டத்தின் சுற்றளவு 2π என்பதனை நாம் அறிவோம். ஆரமானது ஒரு முழுச்சுற்று எடுத்துக் கொள்ளும் போது உருவாகும் கோணம் 2π ரேடியன்கள் ஆகும். வட்டம் அதன் மையப் பகுதியில் உருவாக்கும் கோணம் 360°.

$$2\pi \text{ ரேடியன்} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ ரேடியன்} = 180^\circ$$

$$1 \text{ ரேடியன்} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.1

(i) 160° யை ரேடியனாக மாற்றுக

(ii) $\frac{4\pi}{5}$ ரேடியனை பாகையாக மாற்றுக

(iii) $\frac{1}{4}$ ரேடியனை பாகையாக மாற்றுக

தீர்வு

(i) $160^\circ = 160 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8}{9}\pi$

(ii) $\frac{4\pi}{5}$ ரேடியன் $= \frac{4}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 144^\circ$

(iii) $\frac{1}{4}$ ரேடியன் $= \frac{1}{4}\frac{180}{\pi}$

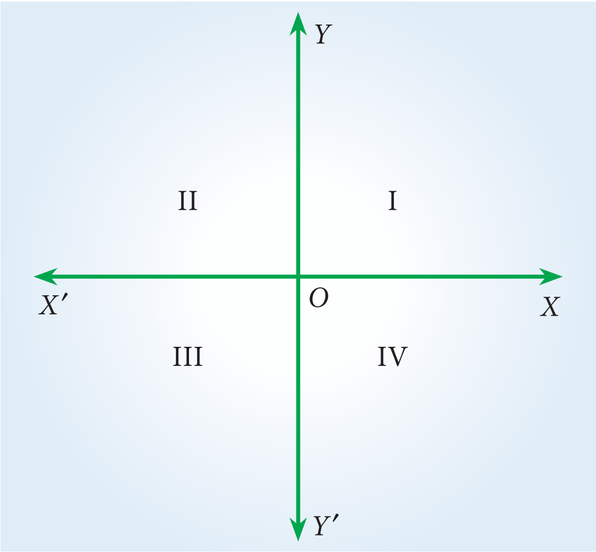
$$= \frac{1}{4} \times 180 \times \frac{7}{22} = 14^\circ 19' 5''$$

4.1 திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறியீடுகள் (Signs of trigonometric ratios)

4.1.1 கால் பகுதிகள் (Quadrants)

படத்தில் உள்ளபடி $X'OX$ மற்றும் $Y'OY$ என்பவைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு கோடுகளாகும். $X'OX$ –ஐ X-அச்சு என்றும், $Y'OY$ –ஐ Y-அச்சு என்றும் அழைக்கின்றோம்.

இந்த அச்சுக்கள், முழு தளத்தையும் 4 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. அவைகள் கால்பகுதிகள் ("Quadrants") என்று அழைக்கப்படு கின்றன. XOY, YOX', $X'OY'$ மற்றும் $Y'OX$ என்பவைகள் முறையே முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் மற்றும் நான்காம் கால்பகுதி என அறியப்படுகின்றன.



படம் 4.3

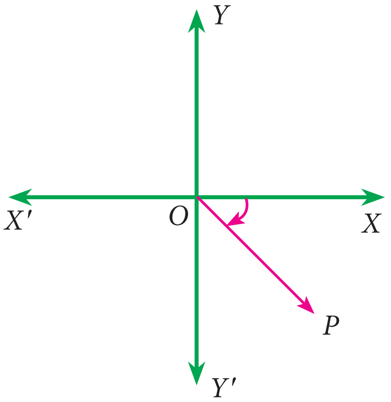
எடுத்துக்காட்டு 4.2

கீழ்க்காணும் கோணங்களின் முடிவு நிலை எந்தக் கால்பகுதியில் அமையும் எனக் காட்டுக.

(i) -70° (ii) -320° (iii) 1325°

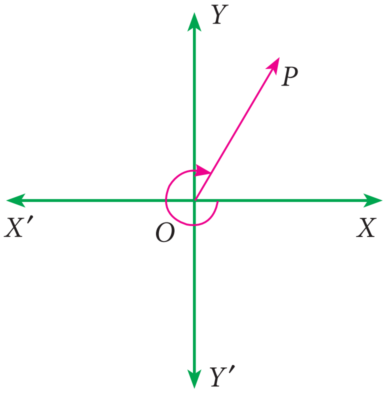
தீர்வு

(i) -70°–ன் முடிவு நிலை நான்காம் கால்பகுதியில் அமைகிறது.



படம் 4.4

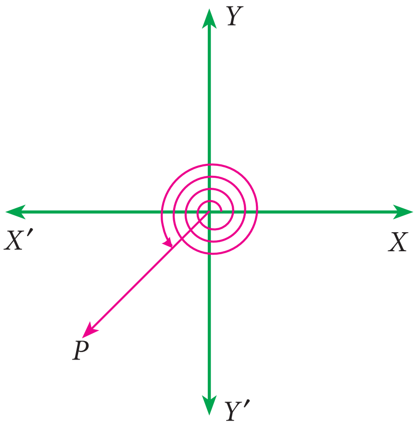
(ii) -320°–ன் முடிவு நிலை முதல் கால் பகுதியில் அமைகிறது.



படம் 4.5

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 83 20-04-2020 05:02:05 PM

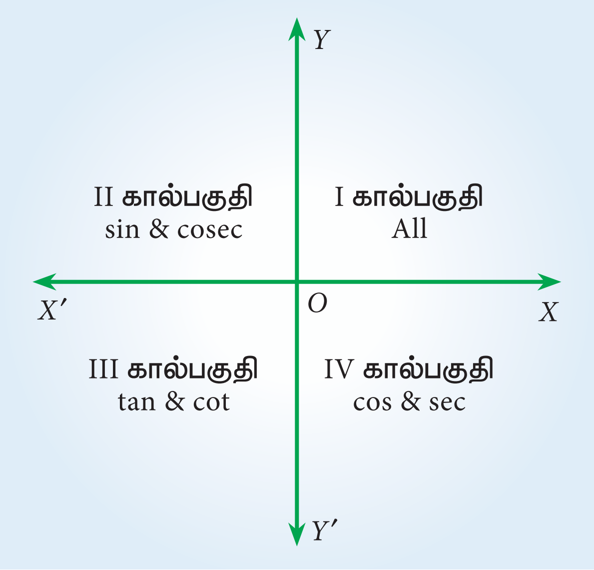
(iii) $1325^\circ = (3 \times 360) + 180^\circ + 65^\circ$ –ன் முடிவு நிலை மூன்றாம் கால்பகுதியில் அமைகிறது



படம் 4.6

4.1.2 0° லிருந்து 360° வரை மாறுபடுகின்ற கோணம் θ வின் திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறியீடுகள் (Signs of the trigonometric ratios of an angle θ as it varies from 0° to 360°)

முதல் கால் பகுதியில் x, y இரண்டும் மிகை குறியாக இருக்கின்றன. ஆகவே எல்லா திரிகோணமிதி விகிதங்களும் மிகையாக இருக்கும். இரண்டாம் கால் பகுதியில் $(90^\circ < \theta < 180^\circ)$ x குறை குறியாகவும், y மிகை குறியாகவும் இருக்கின்றன. ஆகவே sinθ மற்றும் cosecθ மிகையாக இருக்கும். மூன்றாம் கால்பகுதியில், $(180^\circ < \theta < 270^\circ)$ x மற்றும் y ஆகிய இரண்டும் குறைகுறி உடையதாக இருக்கின்றன. ஆகவே $\tan\theta$ மற்றும் $\cot\theta$ மிகையாக இருக்கும். நான்காம் கால்பகுதியில் $(270^\circ < \theta < 360^\circ)$ x மிகை குறியாகவும், y குறை குறியாகவும் இருக்கின்றன. ஆகவே $\cos\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ மிகையாக இருக்கும்.



All Silver Tea Cups (ASTC)

படம் 4.7

$f(x)$ என்பது ஒற்றைப்படைச் சார்பு எனில், $f(-x) = -f(x)$ ஆகும். $\sin\theta, \tan\theta, \cot\theta$ மற்றும் $\operatorname{cosec}\theta$ ஆகியவை ஒற்றைப்படைச் சார்புகளாகும். $f(x)$ இரட்டைப்படைச் சார்பு எனில், $f(-x) = f(x)$ ஆகும். $\cos\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ என்பன இரட்டைப்படைச் சார்புகளாகும்.

கோணம் / விகிதம்	$-\theta$	$90^\circ-\theta$ (அ) $\frac{\pi}{2}-\theta$	$90^\circ+\theta$ (அ) $\frac{\pi}{2}+\theta$	$180^\circ-\theta$ (அ) $\pi-\theta$	$180^\circ+\theta$ (அ) $\pi+\theta$	$270^\circ-\theta$ (அ) $\frac{3\pi}{2}-\theta$	$270^\circ+\theta$ (அ) $\frac{3\pi}{2}+\theta$	$360^\circ-\theta$ (அ) $2\pi-\theta$	$360^\circ+\theta$ (அ) $2\pi+\theta$
Sine	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
Cosine	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tangent	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$
cotangent	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$
secant	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$
cosecant	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$

அட்டவணை 4.1

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 84 20-04-2020 05:02:11 PM

4.1.3 துணைக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of allied angles)

இரு கோணங்களின் கூடுதல் அல்லது வித்தியாசங்கள் பூச்சியக் கோணமாகவும் அல்லது 90° பெருக்கங்களாகவும் இருக்கும்போது அவ்விருகோணங்கள் துணைக் கோணங்கள் எனக் கூறப்படும். கோணங்கள் $-\theta$, $90^\circ\pm\theta$, $180^\circ\pm\theta$, $360^\circ\pm\theta$ ஆகியன θ வின் துணைக் கோணங்கள் ஆகும். துணைக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு கோணத்தின் திரிகோணமிதி விகிதங்களையும் நாம் காண முடியும். அவை அட்டவனை 4.1 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

கீழ்க்காணும் திரிகோணமிதி விகிதங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin 150^\circ$ (ii) $\cos(-210^\circ)$
(iii) $\operatorname{cosec} 390^\circ$ (iv) $\tan(-1215^\circ)$
(v) $\sec 1485^\circ$

தீர்வு

(i) $\sin 150^\circ = \sin(1\times 90^\circ + 60^\circ)$

அதாவது 150° இரண்டாம் கால் பகுதியில் அமைவதனால்

$$\sin 150^\circ = \sin(1\times 90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

(ii) $\cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ$ என்க

அதாவது 210° மூன்றாம் கால் பகுதியில் அமைவதனால்,

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(iii) $\operatorname{cosec} 390^\circ = \operatorname{cosec}(360^\circ + 30^\circ) = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

(iv) $\tan(-1215^\circ) = -\tan(1215^\circ)$
$= -\tan(3\times 360^\circ + 135^\circ)$
$= -\tan 135^\circ$
$= -\tan(90^\circ + 45^\circ)$
$= -(-\cot 45^\circ) = 1$

(v) $\sec 1485^\circ = \sec(4\times 360^\circ + 45^\circ)$
$= \sec 45^\circ = \sqrt{2}$

எடுத்துக்காட்டு 4.4

$\sin 600^\circ \cos 390^\circ + \cos 480^\circ \sin 150^\circ = -1$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\sin 600^\circ = \sin(360^\circ+240^\circ) = \sin 240^\circ$
$= \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ)$
$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 480^\circ = \cos(360^\circ + 120)$
$= \cos 120^\circ$
$= \cos(180^\circ - 60^\circ)$
$= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ)$
$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

இப்போது, $\sin 600^\circ \cos 390^\circ + \cos 480^\circ \sin 150^\circ$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-3-1}{4} = -1$$

எடுத்துக்காட்டு 4.5

$$\frac{\sin(-\theta)\tan(90^\circ-\theta)\sec(180^\circ-\theta)}{\sin(180+\theta)\cot(360-\theta)\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)} = 1$$

என நிறுவுக.

தீர்வு

L.H.S

$$= \frac{\sin(-\theta)\tan(90^\circ-\theta)\sec(180^\circ-\theta)}{\sin(180+\theta)\cot(360-\theta)\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)}$$

$$= \frac{(-\sin\theta)\cot\theta(-\sec\theta)}{(-\sin\theta)(-\cot\theta)\sec\theta} = 1$$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 85 20-04-2020 05:02:14 PM

பயிற்சி 4.1

1. கீழ்கண்ட பாகை அளவுகளை ரேடியன் அளவில் மாற்றுக

(i) 60° (ii) 150°

(iii) 240° (iv) -320°

2. கீழ்கண்ட ரேடியன் அளவுகளை பாகை அளவுகளாக மாற்றுக.

(i) $\frac{\pi}{8}$ (ii) $\frac{9\pi}{5}$

(iii) -3 (iv) $\frac{11\pi}{18}$

3. கீழ்கண்ட கோணங்கள் எந்த கால்பகுதியில் அமையும்.

(i) 380° (ii) -140° (iii) 1195°

4. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு திரிகோணமிதி விகிதங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin 300^o$ (ii) $\cos(-210^o)$

(iii) $\sec 390^o$ (iv) $\tan(-855^o)$

(v) $\operatorname{cosec} 1125^o$

5. கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:

(i) $\tan(-225^o)\cot(-405^o) - \tan(-765^o)\cot(675^o) = 0$

(ii) $2\sin^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

(iii) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\tan\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right) = -1$

6. A, B, C, D என்பன வட்ட நாற்கரத்தின் கோணங்கள் எனில்

$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$ என நிறுவுக.

7. கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:

(i) $\frac{\sin(180^\circ-\theta)\cos(90^\circ+\theta)\tan(270-\theta)\cot(360-\theta)}{\sin(360-\theta)\cos(360+\theta)\sin(270-\theta)\operatorname{cosec}(-\theta)} = -1$

(ii) $\sin\theta\cdot\cos\theta\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\operatorname{cosec}\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sec\theta\right\} = 1$

8. $\cos 510^o\cos 330^o + \sin 390^o\cos 120^o = -1$ என நிறுவுக.

9. நிறுவுக :

(i) $\tan(\pi+x)\cot(x-\pi) - \cos(2\pi-x)\cos(2\pi+x) = \sin^2 x$

(ii) $\frac{\sin(180^\circ+A)\cos(90^\circ-A)\tan(270^\circ-A)}{\sec(540^\circ-A)\cos(360^\circ+A)\operatorname{cosec}(270^\circ+A)} = -\sin A\cos^2 A$

10. $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\varphi = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ எனில், $8\tan\theta - \sqrt{5}\sec\varphi$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

4.2 கூட்டுக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of compound angles)

கூட்டுக் கோணங்கள் (Compound angles)

கோணங்களின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தலின் முடிவானது கூட்டுக்கோணம் எனப்படும். அதாவது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கோணங்களின் இயற்கணிதக் கூடுதல் கூட்டுக்கோணங்கள் எனப்படும்.

உதாரணமாக, A, B மற்றும் C ஆகியன மூன்று கோணங்கள் எனில், $A+B$, $A-B$, $A+B+C$, $A-B+C$ என்பன கூட்டுக் கோணங்களாகும்.

4.2.1 sine, cosine மற்றும் tangent என்பனவற்றின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தலின் சூத்திரங்கள் (Sum and difference formulae of sine, cosine and tangent)

(i) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(ii) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

(iii) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(iv) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 86 20-04-2020 05:02:16 PM

(v) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(vi) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

எடுத்துக்காட்டு 4.6

$\cos A = \dfrac{4}{5}$ மற்றும் $\cos B = \dfrac{12}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2} < (A, B) < 2\pi$, எனில்

(i) $\sin(A-B)$ மற்றும் (ii) $\cos(A+B)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$\dfrac{3\pi}{2} < (A, B) < 2\pi$ என்பதால் A மற்றும் B ஆகியன நான்காம் கால் பகுதியில் அமைகிறது. எனவே $\sin A$ மற்றும் $\sin B$ ஆகியவை குறைகுறி உடையதாக இருக்கும்.

$\cos A = \dfrac{4}{5}$ மற்றும் $\cos B = \dfrac{12}{13}$,

ஆகவே,

$$\sin A = -\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$= -\sqrt{1-\frac{16}{25}}$$
$$= -\sqrt{\frac{25-16}{25}}$$
$$= -\frac{3}{5}$$

$$\text{Sin } B = -\sqrt{1-\cos^2 B}$$
$$= -\sqrt{1-\frac{144}{169}}$$
$$= -\sqrt{\frac{169-144}{169}}$$
$$= -\frac{5}{13}$$

(i) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\left(\frac{-3}{5}\right)\times\left(\frac{-5}{13}\right)$$
$$= \frac{48}{65}-\frac{15}{65}=\frac{33}{65}$$

(ii) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$$= \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right)$$
$$= \frac{-36}{65}+\frac{20}{65}=\frac{-16}{65}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.7

பின்வரும் திரிகோணமிதி விகிதங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin 15^\circ$ (ii) $\cos(-105^\circ)$

(iii) $\tan 75^\circ$ (iv) $-\sec 165^\circ$

தீர்வு

(i) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

(ii) $\cos(-105^\circ) = \cos 105^\circ$

$$= \cos(60^\circ + 45^\circ)$$
$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(iii) $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$
$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

(iv) $\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ)$

$$= -\cos 15^\circ$$
$$= -\cos(60^\circ - 45^\circ)$$
$$= -(\cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ)$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore -\sec 165^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\times\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 87 20-04-2020 05:02:20 PM

எடுத்துக்காட்டு 4.8

$\tan A = m \tan B$ எனில்,

$\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \dfrac{m+1}{m-1}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\tan A = m \tan B$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\frac{\sin A}{\cos A} = m\frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B} = m$$

கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சம விதியைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது

$$\frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\sin A\cos B - \cos A\sin B} = \frac{m+1}{m-1} \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{m+1}{m-1},$$

என நிறுவப்பட்டது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சம விதி:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ எனில், $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

4.2.2 மடங்கு கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of multiple angles)

$\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$, $\sin 3A$ etc. ஆகியன மடங்கு கோணங்களின் விகிதங்கள் ஆகும்.

அவற்றின் முற்றொருமைகள்

(i) $\sin 2A = \sin(A+A)$
$= \sin A\cos A + \cos A\sin A$
$= 2\sin A\cos A.$

(ii) $\cos 2A = \cos(A+A)$
$= \cos A\cos A - \sin A\sin A$
$= \cos^2 A - \sin^2 A$

(iii) $\sin 3A = \sin(2A+A)$
$= \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A$
$= (2\sin A\cos A)\cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A$
$= 2\sin A\cos^2 A + \sin A - 2\sin^3 A$
$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$
$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

இவ்வாறாக நாம் கீழ்க்கண்ட மடங்கு கோணங்களின் சூத்திரங்களை பெற்றிருக்கின்றோம்

1. (i) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

   (ii) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

2. (i) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

   (ii) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

   (iii) $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

   (iv) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

3. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

4. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

5. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

6. $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

குறிப்பு

(i) $\cos^2 A = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2A)$ (அல்லது)

$\cos A = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2A}{2}}$

(ii) $\sin^2 A = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2A)$ (அல்லது)

$\sin A = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2A}{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 4.9

$\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

எடுத்துக்காட்டு 4.10

$\tan 60^{o}$ மதிப்பினை இரட்டை கோணங்களின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$A = 30^{o}$ என பிரதியிட கிடைக்கப் பெறுவது,

$$\tan 60^{o} = \frac{2\tan 30^{\circ}}{1-\tan^2 30^{\circ}}$$

$$= \frac{2\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.11

$\tan A = \frac{1}{7}$ மற்றும் $\tan B = \frac{1}{3}$ எனில், $\cos 2A = \sin 4B$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}}$$

$$= \frac{48}{49} \times \frac{49}{50} = \frac{24}{25} \qquad \ldots (1)$$

இப்போது, $\sin 4B = 2\sin 2B \cos 2B$

$$= 2\frac{2\tan B}{1+\tan^2 B} \times \frac{1-\tan^2 B}{1+\tan^2 B}$$

$$= \frac{4\times\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}} \times \frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{24}{25} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$\cos 2A = \sin 4B$ என கிடைக்கப்பெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.12

$\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B}$ எனில், $\tan 2A = \tan B$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{1-\cos B}{\sin B} = \frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \tan\frac{B}{2} \qquad \ldots (1)$$

$\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \tan A = \tan\frac{B}{2} \qquad (1) \text{ –ன் படி}$$

$$\Rightarrow A = \frac{B}{2}$$

$$2A = B$$

$$\therefore \tan 2A = \tan B$$

எடுத்துக்காட்டு 4.13

$\tan\alpha = \frac{1}{3}$ மற்றும் $\tan\beta = \frac{1}{7}$ எனில், $(2\alpha+\beta) = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\tan(2\alpha+\beta) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\beta}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan(2\alpha+\beta) = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}$$

$$= 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$$

பயிற்சி 4.2

1. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:
   (i) $\operatorname{cosec} 15^{o}$ (ii) $\sin(-105^{o})$ (iii) $\cot 75^{o}$
2. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:
   (i) $\sin 76^{o}\cos 16^{o} + \cos 76^{o}\sin 16^{o}$
   (ii) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$
   (iii) $\cos 70^{o}\cos 10^{o} - \sin 70^{o}\sin 10^{o}$
   (iv) $\cos^2 15^{o} - \sin^2 15^{o}$
3. $\sin A = \frac{3}{5}, 0 < A < \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $\cos B = \frac{-12}{13}, \pi < B < \frac{3\pi}{2}$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:
   (i) $\cos(A+B)$ (ii) $\sin(A-B)$
   (iii) $\tan(A-B)$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 89 20-04-2020 05:02:29 PM

4. $\cos A = \frac{13}{14}$, $\cos B = \frac{1}{7}$; A மற்றும் B குறுங்கோணங்கள் எனில், $A-B = \frac{\pi}{3}$ என நிறுவுக.

5. $2\tan 80^{\circ} = \tan 85^{\circ} - \tan 5^{\circ}$ என நிறுவுக.

6. $\cot\alpha = \frac{1}{2}$, $\sec\beta = \frac{-5}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ மற்றும் $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ எனில், $\tan(\alpha+\beta)$–ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் $(\alpha + \beta)$ என்பது எந்த கால்பகுதியில் அமையும் ?

7. $A+B = 45^{\circ}$ எனில், $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து $\tan 22\frac{1}{2}^{\circ}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க

8. (i) $\sin(A+60^{\circ}) + \sin(A-60^{\circ}) = \sin A$

   (ii) $\tan 4A \tan 3A \tan A + \tan 3A + \tan A - \tan 4A = 0$ என நிறுவுக.

9. (i) $\tan\theta = 3$ எனில், $\tan 3\theta$ –ன் மதிப்பை காண்க.

   (ii) $\sin A = \frac{12}{13}$ எனில், $\sin 3A$ –ன் மதிப்பை காண்க.

10. $\sin A = \frac{3}{5}$ எனில், $\cos 3A$ மற்றும் $\tan 3A$ –ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

11. $\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} + \frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} = 0$ என நிறுவுக.

12. $\tan A - \tan B = x$ மற்றும் $\cot B - \cot A = y$ எனில் $\cot(A-B) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ என நிறுவுக.

13. $\sin\alpha + \sin\beta = a$ மற்றும் $\cos\alpha + \cos\beta = b$ எனில், $\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$ என நிறுவுக.

14. $\tan\frac{\pi}{8}$ –ன் மதிப்புக் காண்க.

15. $\tan\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) எனில், $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$, என நிறுவுக.

4.3 உருமாற்று சூத்திரங்கள் (Transformation formulae)

இரண்டு வகையான உருமாற்று சூத்திரங்கள் கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

4.3.1 பெருக்கலை கூட்டல் அல்லது கழித்தல் வடிவமாக மாற்றுதல் (Transformation of the products into sum or difference)

$$\sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin(A+B) \quad (1)$$

$$\sin A\cos B - \cos A\sin B = \sin(A-B) \quad (2)$$

$$\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A+B) \quad (3)$$

$$\cos A\cos B + \sin A\sin B = \cos(A-B) \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) –ஐ கூட்ட கிடைக்கப்பெறுவது,

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

(1) லிருந்து (2) –ஐ கழிக்க கிடைக்கப்பெறுவது

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

(3) மற்றும் (4) ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்ட கிடைக்கப்பெறுவது

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

(4) லிருந்து (3) –ஐ கழிக்க கிடைக்கப்பெறுவது

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

இவ்வாறு நாம் கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களைப் பெறுகிறோம்;

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

மேலும்

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B)$$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 90 20-04-2020 05:02:38 PM

4.3.2 திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் கூட்டல் அல்லது கழித்தலை பெருக்கலாக மாற்றுதல் (Transformation of sum or difference into product)

$$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.14

கீழ்கண்டவற்றைக் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் வடிவில் எழுதுக

(i) $2\sin 2\theta\cos\theta$ (ii) $2\cos 3\theta\cos\theta$

(iii) $2\sin 4\theta\sin 2\theta$ (iv) $\cos 7\theta\ \cos 5\theta$

(v) $\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{5A}{2}$ (vi) $\cos 9\theta\sin 6\theta$

(vii) $2\cos 13A\sin 15A$

தீர்வு

(i) $2\sin 2\theta\cos\theta$

$= \sin(2\theta+\theta)+\sin(2\theta-\theta)$

$= \sin 3\theta+\sin\theta$

(ii) $2\cos 3\theta\cos\theta$

$= \cos(3\theta+\theta)+\cos(3\theta-\theta)$

$= \cos 4\theta+\cos 2\theta$

(iii) $2\sin 4\theta\sin 2\theta$

$= \cos(4\theta-2\theta)-\cos(4\theta+2\theta)$

$= \cos 2\theta-\cos 6\theta$

(iv) $\cos 7\theta\ \cos 5\theta$

$= \frac{1}{2}[\cos(7\theta+5\theta)+\cos(7\theta-5\theta)]$

$= \frac{1}{2}[\cos 12\theta+\cos 2\theta]$

(v) $\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{5A}{2}$

$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3A}{2}+\frac{5A}{2}\right)+\cos\left(\frac{3A}{2}-\frac{5A}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{8A}{2}+\cos\left(\frac{-2A}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}[\cos 4A+\cos(-A)]$

$= \frac{1}{2}[\cos 4A+\cos A]$

(vi) $\cos 9\theta\sin 6\theta$

$= \frac{1}{2}[\sin(9\theta+6\theta)-\sin(9\theta-6\theta)]$

$= \frac{1}{2}[\sin(15\theta)-\sin 3\theta]$

(vii) $2\cos 13A\sin 15A$

$= \sin(13A+15A)-\sin(13A-15A)$

$= \sin 28A+\sin 2A$

எடுத்துக்காட்டு 4.15

$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

LHS $= \sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$

$= \sin 20^\circ\sin(60^\circ-20^\circ)\sin(60^\circ+20^\circ)$

$= \sin 20^\circ[\sin^2 60^\circ-\sin^2 20^\circ]$

$= \sin 20^\circ\left[\frac{3}{4}-\sin^2 20^\circ\right]$

$= \sin 20^\circ\left[\frac{3-4\sin^2 20^\circ}{4}\right]$

$= \frac{3\sin 20^\circ-4\sin^3 20^\circ}{4} = \frac{\sin 3(20^\circ)}{4}$

$= \frac{\sin 60^\circ}{4} = \frac{\sqrt{3}/2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

எடுத்துக்காட்டு 4.16

$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

என நிறுவுக.

தீர்வு

L.H.S $= \sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$

$= \sin 60^\circ\sin 20^\circ\sin(60^\circ-20^\circ)\sin(60^\circ+20^\circ)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ-\sin^2 20^\circ)$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 91 20-04-2020 05:02:45 PM

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\left(\frac{3}{4}-\sin^2 20^\circ\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)(3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\sin 60^\circ$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16} = \text{R.H.S}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.17

$\cos^2 A + \cos^2(A+120^\circ) + \cos^2(A-120^\circ) = \frac{3}{2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\cos^2 A + \cos^2(A+120^\circ) + \cos^2(A-120^\circ)$$
$$= \cos^2 A + \cos^2(A+120^\circ) + (1-\sin^2(A-120^\circ))$$

[அதாவது $\cos^2 A = 1-\sin^2 A$]

$$= \cos^2 A + 1 + \cos^2(A+120^\circ) - \sin^2(A-120^\circ)$$
$$= \cos^2 A + 1 + \cos[(A+120^\circ)+(A-120^\circ)]\cos[(A+120^\circ)-(A-120^\circ)]$$

[அதாவது $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B)$]

$$= \cos^2 A + 1 + \cos 2A \cos 240^\circ$$
$$= \cos^2 A + 1 + (2\cos^2 A - 1)\cos(180^\circ + 60^\circ)$$

[அதாவது $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$]

$$= \cos^2 A + 1 + (2\cos^2 A - 1)(-\cos 60^\circ)$$
$$= \cos^2 A + 1 + (2\cos^2 A - 1)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \cos^2 A + 1 - \cos^2 A + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.18

கீழ்க்கண்டவற்றைத் திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் பெருக்கல் வடிவில் மாற்றி எழுதுக.

(i) $\sin 9A + \sin 7A$ (ii) $\sin 7\theta - \sin 4\theta$
(iii) $\cos 8A + \cos 12A$ (iv) $\cos 4\alpha - \cos 8\alpha$
(v) $\cos 20^\circ - \cos 30^\circ$ (vi) $\cos 75^\circ + \cos 45^\circ$
(vii) $\cos 55^\circ + \sin 55^\circ$

தீர்வு

(i) $\sin 9A + \sin 7A$

$$= 2\sin\left(\frac{9A+7A}{2}\right)\cos\left(\frac{9A-7A}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{16A}{2}\right)\cos\left(\frac{2A}{2}\right)$$
$$= 2\sin 8A\cos A$$

(ii) $\sin 7\theta - \sin 4\theta$

$$= 2\cos\left(\frac{7\theta+4\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{7\theta-4\theta}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{11\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

(iii) $\cos 8A + \cos 12A$

$$= 2\cos\left(\frac{8A+12A}{2}\right)\cos\left(\frac{8A-12A}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{20A}{2}\right)\cos\left(\frac{-4A}{2}\right)$$
$$= 2\cos 10A\cos(-2A)$$
$$= 2\cos 10A\cos 2A$$

(iv) $\cos 4\alpha - \cos 8\alpha$

$$= -2\sin\left(\frac{4\alpha+8\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{4\alpha-8\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{12\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{4\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\sin 6\alpha\sin 2\alpha$$

(v) $\cos 20^\circ - \cos 30^\circ$

$$= -2\sin\left(\frac{20^\circ+30^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{20^\circ-30^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{50^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{10^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\sin 25^\circ\sin 5^\circ$$

(vi) $\cos 75^\circ + \cos 45^\circ$

$$= 2\cos\left(\frac{75^\circ+45^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ-45^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\cos 60^\circ\cos 15^\circ$$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 92 20-04-2020 05:02:51 PM

(vii) $\cos 55^\circ + \sin 55^\circ$

$= \cos 55^\circ + \cos(90^\circ - 55^\circ)$

$= \cos 55^\circ + \cos 35^\circ$

$= 2\cos\left(\frac{55^\circ + 35^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{55^\circ - 35^\circ}{2}\right)$

$= 2\cos 45^\circ \cos 10^\circ = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot \cos 10^\circ$

$= \sqrt{2}\cos 10^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 4.19

கோணங்கள் A, B மற்றும் C என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் உள்ளன எனில், $\cot B = \frac{\sin A - \sin C}{\cos C - \cos A}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\frac{\sin A - \sin C}{\cos C - \cos A}$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{A-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\sin\left(\frac{A-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} = \cot\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$= \cot B$ [A, B, C என்பன கூட்டுத்தொடர் வரிசை என்பதால் $B = \frac{A+C}{2}$]

எடுத்துக்காட்டு 4.20

$\frac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\frac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x}$

$$= \frac{\sin 5x + \sin x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x(\cos 2x - 1)}{-2\sin 3x\sin 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x$$

எடுத்துக்காட்டு 4.21

$\sin 105^o + \cos 105^o$ –ன் மதிப்பைக் காண்க

தீர்வு

$\sin 105^o + \cos 105^o$

$= \sin(90^o + 15^o) + \cos 105^o$

$= \cos 15^o + \cos 105^o$

$= \cos 105^o + \cos 15^o$

$= 2\cos\left(\frac{105^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{105^\circ - 15^\circ}{2}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right)$

$= 2\cos 60^o \cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 4.22

$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\cos\alpha + \cos\beta$

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ ....(1)

$\sin\alpha + \sin\beta$

$= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ ....(2)

$(1)^2 + (2)^2$

$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$

$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$

$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 93 20-04-2020 05:02:56 PM

பயிற்சி 4.3

1. பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் sine அல்லது cosine ஆகியவற்றின் கூடுதல் அல்லது கழித்தல் வடிவில் எழுதுக:

   (i) $\sin\frac{A}{8}\sin\frac{3A}{8}$

   (ii) $\cos(60^\circ + A)\sin(120^\circ + A)$

   (iii) $\cos\frac{7A}{3}\sin\frac{5A}{3}$

   (iv) $\cos 7\theta \sin 3\theta$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் sine மற்றும் cosine ஆகியவற்றின் பெருக்கல் வடிவில் எழுதுக.

   (i) $\sin A + \sin 2A$

   (ii) $\cos 2A + \cos 4A$

   (iii) $\sin 6\theta - \sin 2\theta$

   (iv) $\cos 2\theta - \cos\theta$

3. (i) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

   (ii) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$

   என நிறுவுக.

4. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

   (i) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

   (ii) $\sin A \sin(60^\circ + A)\sin(60^\circ - A) = \frac{1}{4}\sin 3A$

5. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

   (i) $\sin(A-B)\sin C + \sin(B-C)\sin A + \sin(C-A)\sin B = 0$

   (ii) $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$

6. (i) $\frac{\cos 2A - \cos 3A}{\sin 2A + \sin 3A} = \tan\frac{A}{2}$ மற்றும்

   (ii) $\frac{\cos 7A + \cos 5A}{\sin 7A - \sin 5A} = \cot A$ என நிறுவுக.

7. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$ என நிறுவுக.

8. பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

   (i) $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

   (ii) $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ$

9. $\cos A + \cos B = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\sin A + \sin B = \frac{1}{4}$ எனில், $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

10. $\sin(y+z-x)$, $\sin(z+x-y)$, $\sin(x+y-z)$, என்பன கூட்டுத்தொடரில் (A.P.) உள்ளன எனில், $\tan x$, $\tan y$ மற்றும் $\tan z$ என்பன கூட்டுத்தொடரில் உள்ளது என நிறுவுக.

11. $\operatorname{cosec}A + \sec A = \operatorname{cosec}B + \sec B$ எனில், $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan A \tan B$ என நிறுவுக.

4.4 நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் (Inverse Trigonometric Functions)

4.4.1 நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் (Inverse Trigonometric Functions)

$\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x, \ldots$ போன்ற அளவைகள் நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

$\sin\theta = x$, எனவே $\theta = \sin^{-1}x$. நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் சார்பகம் (domain) மற்றும் வீச்சகம் (range) ஆகியவற்றின் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

சார்பு	சார்பகம் (x)	வீச்சகம் (y)
$\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}x$	$R = (-\infty, \infty)$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{cosec}^{-1}x$	$R-(-1, 1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \neq 0$
$\sec^{-1}x$	$R-(-1, 1)$	$[0, \pi], y \neq \frac{\pi}{2}$
$\cot^{-1}x$	R	$(0, \pi)$

அட்டவணை 4.2

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 94 20-04-2020 05:03:01 PM

4.4.2 நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் பண்புகள் (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

பண்பு (1)

(i) $\sin^{-1}(\sin x) = x$

(ii) $\cos^{-1}(\cos x) = x$

(iii) $\tan^{-1}(\tan x) = x$

(iv) $\cot^{-1}(\cot x) = x$

(v) $\sec^{-1}(\sec x) = x$

(vi) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } x) = x$

பண்பு (2)

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{cosec}^{-1}(x)$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}(x)$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1}(x)$

(iv) $\text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1}(x)$

(v) $\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos^{-1}(x)$

(vi) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}(x)$

பண்பு (3)

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$

(ii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

(iii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$

(iv) $\cot^{-1}(-x) = -\cot^{-1}(x)$

(v) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}(x)$

(vi) $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1}(x)$

பண்பு (4)

(i) $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1}(x) + \cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\sec^{-1}(x) + \text{cosec}^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

பண்பு (5)

$xy < 1$ க்கு

(i) $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(ii) $\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

பண்பு (6)

$$\sin^{-1}(x) + \sin^{-1}(y) = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.23

கீழ்க்காண்பவைகளின் முதன்மை மதிப்பு காண்க.

(i) $\sin^{-1}(1/2)$ (ii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

தீர்வு

(i) $\sin^{-1}(1/2) = y$ என்க

இங்கு $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin y = (1/2) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$

$\sin^{-1}(1/2)$ –ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = y$ என்க

இங்கு $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \tan y = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow y = -\frac{\pi}{3}$

$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ –ன் முதன்மை மதிப்பு $-\frac{\pi}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 4.24

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$ (ii) $\tan\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right)$

தீர்வு

(i) $\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right) = \theta$ என்க ... (1)

$\sin\theta = \frac{5}{13}$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 95 20-04-2020 05:03:07 PM

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{25}{169}}$$

$$= \frac{12}{13} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\therefore \cos\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right) = \cos\theta = \frac{12}{13}$$

(ii) $\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \theta$ என்க

$$\cos\theta = \frac{8}{17}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{64}{289}}$$

$$= \frac{15}{17} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\tan\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.25

நிறுவுக:

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$

தீர்வு

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right)$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{13}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{20}{90}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \theta$ என்க.

எனவே, $\cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{5}$

$$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\therefore \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

இப்பொழுது $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.26

மதிப்பிடுக : $\tan\left[\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$

தீர்வு

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \theta$ என்க

எனவே $\tan\theta = \frac{1}{8}$

$$\therefore \tan\left[\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}} = \frac{7}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.27

தீர்க்க : $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$

தீர்வு:

$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right]=\tan^{-1}\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right)$$

$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2x^2-4}{-3} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$2x^2-4 = -3$$

$$\Rightarrow 2x^2-1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 96 20-04-2020 05:03:13 PM

எடுத்துக்காட்டு 4.28

சுருக்குக: $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

தீர்வு

$$\sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(y)$$

$$= \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$\therefore\ \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{4}{9}}+\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{9}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{9}}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.29

தீர்க்க:

$$\tan^{-1}(x+2)+\tan^{-1}(2-x) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

தீர்வு

$$\tan^{-1}\left[\frac{(x+2)+(2-x)}{1-(x+2)(2-x)}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \tan^{-1}\left(\frac{4}{1-(4-x^2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\ 2x^2 - 6 = 12$$

$$\Rightarrow\quad x^2 = 9$$

$$\therefore\quad x = \pm 3$$

எடுத்துக்காட்டு 4.30

$\tan(x + y) = 42$ மற்றும் $x = \tan^{-1}(2)$ எனில், y –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\tan(x+y) = 42$$

$$x + y = \tan^{-1}(42)$$

$$\tan^{-1}(2)+y = \tan^{-1}(42)$$

$$y = \tan^{-1}(42) - \tan^{-1}(2)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{42-2}{1+(42\times 2)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{40}{85}\right)$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{8}{17}\right]$$

பயிற்சி 4.4

1. பின்வருவனவற்றின் முதன்மை மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\tan^{-1}(-1)$

   (iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$ (iv) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$

2. நிறுவுக:

   (i) $2\tan^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

   (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$

3. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ என நிறுவுக.

4. தீர்க்க: $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$

5. தீர்க்க:

   $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{7}\right)$

6. மதிப்பிடுக : (i) $\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$

   (ii) $\sin\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right]$

7. $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$ –ன்மதிப்பு காண்க.

8. $\tan^{-1}\left(\frac{m}{n}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

9. $\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)-\sin^{-1}\left(-\frac{8}{17}\right) = \cos^{-1}\frac{84}{85}$ என நிறுவுக.

10. $\tan^{-1}\left[\frac{\cos x}{1-\sin x}\right], -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ என்பதனை எளிய வடிவில் விவரிக்கவும்.

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 97 20-04-2020 05:03:18 PM

பயிற்சி 4.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $\frac{\pi}{8}$ –ன் கோண மதிப்பு

(a) $20^\circ60'$
(b) $22^\circ30'$
(c) $22^\circ60'$
(d) $20^\circ30'$

9ZDA4T

2. $37^\circ30'$ –ன் ரேடியன் அளவு

(a) $\frac{5\pi}{24}$ (b) $\frac{3\pi}{24}$
(c) $\frac{7\pi}{24}$ (d) $\frac{9\pi}{24}$

3. $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ மற்றும் θ முதல் கால்பகுதியில் அமைகிறது எனில், $\cos\theta$ –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{6}}$
(c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ (d) $\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

4. $\sin 15^o$-ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

5. $\sin(-420^\circ)$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-1}{2}$

6. $\cos(-480^\circ)$ -ன் மதிப்பு

(a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-1}{2}$

7. $\sin 28^o \cos 17^o + \cos 28^o \sin 17^o$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 1 (c) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (d) 0

8. $\sin 15^o \cos 15^o$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

9. $\sec A \sin(270^o + A)$ –ன் மதிப்பு

(a) –1 (b) $\cos^2 A$
(c) $\sec^2 A$ (d) 1

10. $\sin A + \cos A = 1$ எனில், $\sin 2A =$

(a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

11. $\cos^2 45^o - \sin^2 45^o$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) 0 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. $1-2\sin^2 45^o$ –ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{4}$ (d) 0

13. $4\cos^3 40^o - 3\cos 40^o$ –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

14. $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$ –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

15. $\sin A = \frac{1}{2}$ எனில், $4\cos^3 A - 3\cos A =$

(a) 1 (b) 0
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

16. $\frac{3\tan 10^\circ - \tan^3 10^\circ}{1-3\tan^2 10^\circ}$ –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 98 20-04-2020 05:03:24 PM

17. $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

18. $\sec^{-1}\frac{2}{3} + \operatorname{cosec}^{-1}\frac{2}{3} =$

(a) $\frac{-\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) π (d) $-\pi$

19. α, β என்பன 0 மற்றும் $\frac{\pi}{2}$ என்ற இடைவெளியில் உள்ளது, மேலும் $\cos(\alpha+\beta) = \frac{12}{13}$ மற்றும் $\sin(\alpha-\beta) = \frac{3}{5}$ எனில் $\sin 2\alpha =$

(a) $\frac{16}{15}$ (b) 0

(c) $\frac{56}{65}$ (d) $\frac{64}{65}$

20. $\tan A = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\tan B = \frac{1}{3}$ எனில், $\tan(2A+B)$ –ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

21. $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ க்கு சமமானது.

(a) $\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$ (b) $\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$

(c) $1-\tan x$ (d) $1+\tan x$

22. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{3}$

(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{5}{4}$

23. $\frac{1}{\operatorname{cosec}(-45^\circ)}$ –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\sqrt{2}$ (d) $-\sqrt{2}$

24. $p\sec 50^\circ = \tan 50^\circ$ எனில், p –ன் மதிப்பு

(a) $\cos 50^\circ$ (b) $\sin 50^\circ$

(c) $\tan 50^\circ$ (d) $\sec 50^\circ$

25. $\left(\frac{\cos x}{\operatorname{cosec} x}\right) - \sqrt{1-\sin^2 x}\sqrt{1-\cos^2 x}$ க்குச் சமமானது.

(a) $\cos^2 x - \sin^2 x$ (b) $\sin^2 x - \cos^2 x$

(c) 1 (d) 0

இதர கணக்குகள்

1. நிறுவுக : $\frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

2. நிறுவுக: $\sqrt{3}\operatorname{cosec} 20^\circ - \sin 20^\circ = 4$

3. நிறுவுக: $\cot 4x(\sin 5x + \sin 3x) = \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$

4. $\tan x = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ எனில், $\sin\frac{x}{2}$ மற்றும் $\cos\frac{x}{2}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

5. $2\sin^2\frac{3\pi}{4} + 2\cos^2\frac{\pi}{4} + 4\sec^2\frac{3\pi}{4} = 10$ என நிறுவுக.

6. மதிப்பிடுக : (i) $\sin 75^\circ$ (ii) $\tan 15^\circ$

7. $\sin A = \frac{1}{3}, \sin B = \frac{1}{4}$ எனில், $\sin(A+B)$ –ன் மதிப்பைக் காண்க. இங்கு, A, B குறுங்கோணங்கள்.

8. $\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$ என நிறுவுக.

9. $\cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}$ மற்றும் $\sin(\alpha-\beta) = \frac{5}{13}$ (இங்கு $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha-\beta$ குறுங்கோணங்கள்) எனில், $\tan 2\alpha$ ஐக் காண்க.

10. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), 0 < x < \pi$ என்பதனை எளிய வடிவில் எழுதுக.

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 99 20-04-2020 05:03:32 PM

தொகுப்புரை

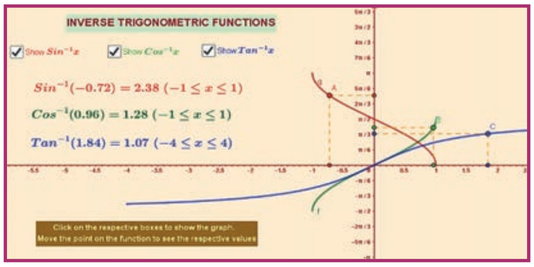
- ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r, வில்லின் நீளம் l, மையத்தில் தாங்கக்கூடிய கோணம் θ ரேடியன் எனில் $l = r\theta$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
- $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
  $= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
- $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$
- $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
- $\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- $\cos x\sin y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$
- $\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
- $\sin x\sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)

உருமாற்று சூத்திரங்கள்	Transformation formulae
கால் பகுதிகள்	Quadrants
கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சமம்	Componendo and dividendo.
கூட்டுக் கோணங்கள்	Compound angles
கோணம்	Angle
திரிகோணமிதி முற்றொருமைகள்	Trignometric identities
திரிகோணமிதி விகிதங்கள்	Trignometric Ratios
துணைக் கோணங்கள்	Allied angles
நேர்மாறு சார்பு	Inverse function
பாகை அளவை	Degree measure
மடங்கு கோணங்கள்	Multiple angles
ரேடியன் அளவு / ஆரையன் அளவு	Radian measure
வில்லின் நீளம்	Length of the arc.

04_11th_BM-STAT_Ch-4-TM.indd 100 20-04-2020 05:03:36 PM

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

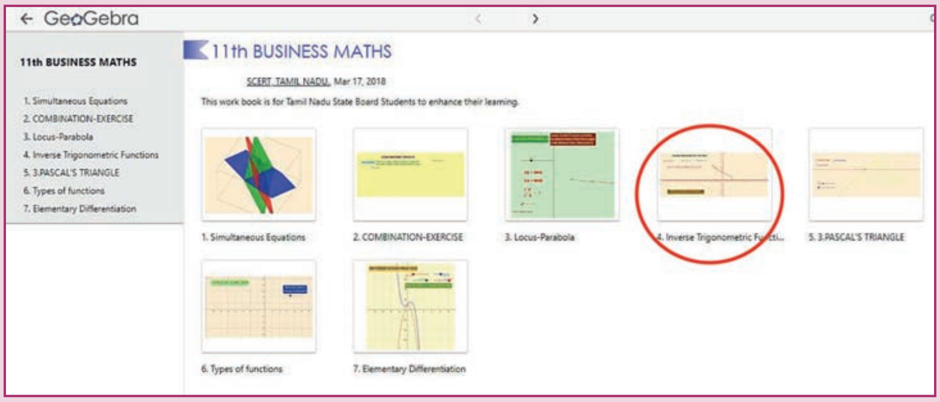
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க.

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப்புத்தகத்தில் **"Inverse Trigonometric Functions"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

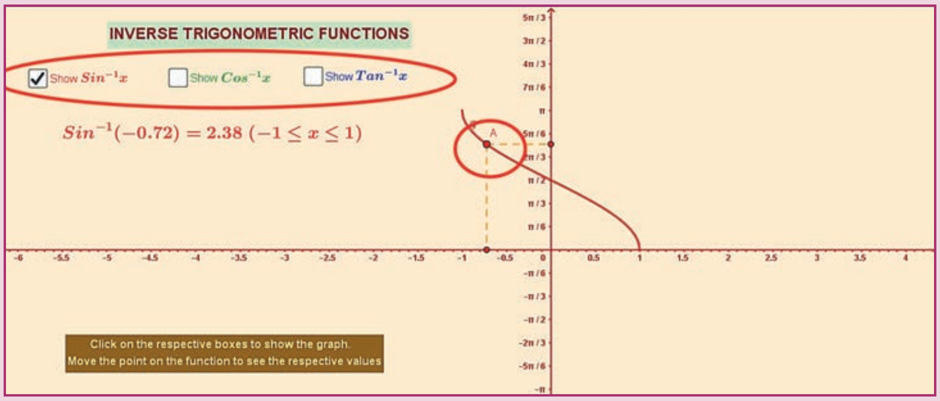
படி - 2

"Inverse Trigonometric Functions" க்கான பணித்தாளில் இடப் பக்கம் உள்ள தேர்வுப் பெட்டிகளில் தேவையான நேர்மாற்று திரிகோணச் சார்புகளை ஒவ்வொன்றாகச் சொடுக்கி வரைபடத்தில் காணலாம். மேலும் சார்புகளின் வரைபடத்தின் மேல் உள்ள புள்ளியினை நகர்த்தி x மற்றும் y அச்சுகளில் மதிப்புகளைக் கண்டு மீளாய்வு செய்க.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM