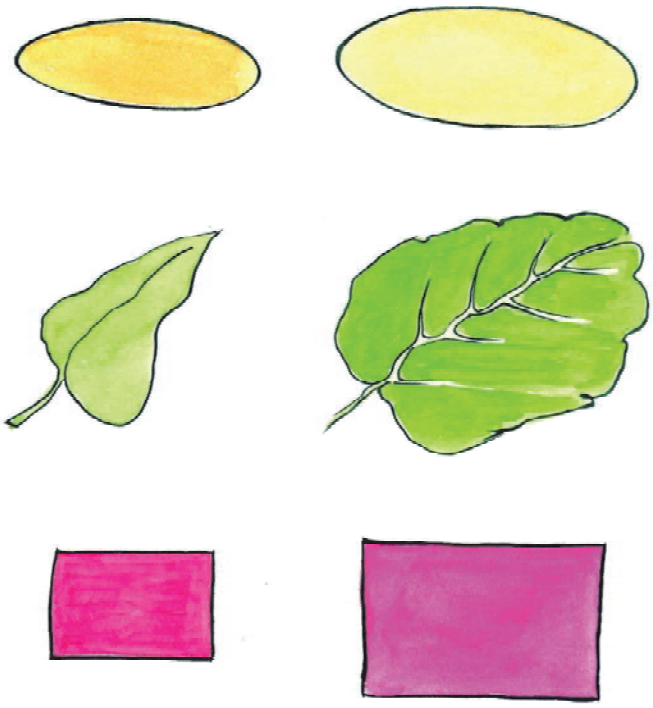
अध्याय पन्द्रह

क्षेत्रफल (Area)

क्षेत्रफल (Area)

सभी बंद आकृतियों के अंदर कुछ जगह होती है। इन आकृतियों के बाहर स्थित किसी बिंदु से इनके अंदर स्थित किसी बिंदु तक आकृति की रेखा को काटे बिना नहीं जा सकते। बंद आकृतियों के अंदर की जगह ही उसका क्षेत्र हैं। कुछ आकृतियों में ज्यादा जगह होती है। जिनमें ज्यादा जगह होती है वही बड़ी होती है।

नीचे आकृतियों के जोड़ों में पहचानें। कौन ज्यादा जगह घेरती है? दोनों आयतों में से कौनसा आयत बड़ा है? सभी में से बड़ी आकृति पहचानिए।

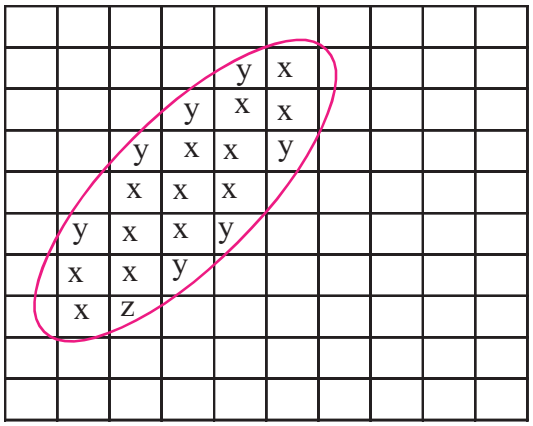


चित्र–15.1

उपरोक्त चित्रों में आपने देखा कि छोटी या बड़ी आकृति का होना किसी तल में उस आकृति द्वारा कम या अधिक जगह घेरने से है।

किसी समतल पर कोई वस्तु/आकृति कितनी जगह घेरती है, उसका माप कैसे करें? एक तरीका निम्न प्रकार से है। इसमें यह देखा जाता है कि किसी आकृति में एक निश्चित माप की कितनी छोटी आकृतियां आएंगी। पत्तियों, पंखुड़ियों व अन्य ऐसी वस्तुओं की आकृति को ग्राफ पेपर पर उतार कर आप उनके द्वारा घेरे गये जगह को पता कर सकते है। कोई वस्तु/आकृति समतल पर जितनी जगह घेरती है, वह उसका **क्षेत्रफल** कहलाता है।

ग्राफ पेपर की सहायता से किसी आकृति का क्षेत्रफल नापना –



चित्र–15.2

ग्राम पेपर पर कोई बंद आकृति बनायें। क्षेत्र की गणना निम्नानुसार करें।

1. बंद आकृति के भीतर पूर्ण वर्गाकार भागों को गिनिए।
2. बंद आकृति के अंदर आधे से बड़े वर्गाकार भागों को गिनिए।
3. बंद आकृति के ठीक आधे वर्ग के भागों को गिनिए।
4. बंद आकृति के आधे से छोटे वर्गों को छोड़ दें ।

गणना के लिए वर्गों की संख्या = (पूर्ण वर्गाकार खानों की संख्या + आधे से बड़े वर्गाकार खानों की संख्या $+ \frac{\text{ठीक आधे वर्गाकार खानों की संख्या}}{2}$)

तो आकृति का क्षेत्रफल = ऊपर गणना किये गये कुल खानों की संख्या

आधे से बड़े वर्ग को भी पूर्ण वर्ग में गिना गया है इसलिए आधे से छोटे आकार के वर्गों को छोड़ दिया गया है तथा ठीक आधे खंड के वर्ग को आधा खंड गिना गया है।

नापने की इकाई 1 सेमी × 1 सेमी का वर्ग है। जिसकी प्रत्येक भुजा 1 सेमी है इसलिए क्षेत्रफल 1 वर्ग सेमी अथवा 1 सेमी^{2} के रूप में दर्शाया जाता है।

इस विधि से ऊपर दिये गए चित्र का क्षेत्रफल :

पूर्ण वर्गाकार खाने (यदि x मानें) = 13

आधे से बड़े वर्गाकार खाने (यदि y मानें) = 7

ठीक आधे वर्गाकार खाने (यदि z मानें) = 1

आकृति का क्षेत्रफल $x + y + \frac{z}{2} = 13 + 7 + \frac{1}{2} = 20.5$ वर्ग से.मी.

क्रियाकलाप–1 (Activity-1)

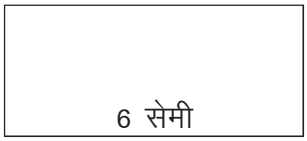
इसी प्रकार अपनी हथेली को ग्राफ पेपर पर रख कर पेंसिल की सहायता से हथेली का चित्र बनाइए तथा उसके क्षेत्रफल की गणना कीजिए।

आयत का क्षेत्रफल (Area of a Rectangle)

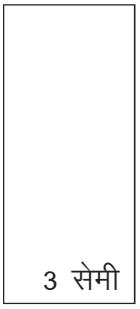
कक्षा 5वी में आपने आयत के बारे में पढ़ा होगा। यह एक चतुर्भुज है, जिसके आमने सामने की भुजा बराबर है तथा प्रत्येक कोण समकोण हैं।

क्रियाकलाप–2 (Activity-2)

1. एक आयत है जिसकी लम्बाई 6 सेमी एवं चौड़ाई 3 सेमी है। प्रत्येक भुजा पर एक–एक सेमी की दूरी पर लम्बाई तथा चौड़ाई की ओर चिह्न लगावें।



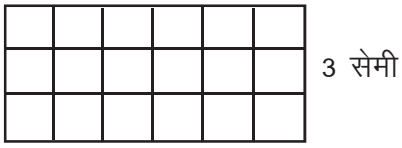
आयत आड़ी स्थिति में

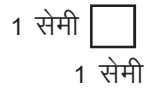


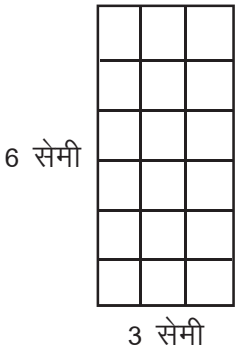
आयत खड़ी स्थिति में

चित्र– 15.3

2. आयत को 1 सेमी × 1 सेमी के खण्डों में निम्नानुसार बांटें –







चित्र–15.4

दर्शाए गए चित्र में 1 सेमी x 1 सेमी के बन रहे वर्गों को गिनिए।

वर्गों की संख्या = 18

1 वर्ग का क्षेत्रफल = 1 वर्ग सेमी

18 वर्ग का क्षेत्रफल = 18 वर्ग सेमी

निष्कर्ष : जितना बड़ा आयत होगा 1 वर्ग सेमी के वर्गों की संख्या उतनी ही अधिक होगी।

क्षेत्रफल = 18 वर्ग सेमी

= 6 सेमी × 3 सेमी या 3 सेमी × 6 सेमी

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई (Area of a Rectangle = Length × breadth)

चूंकि गुणा की संक्रिया क्रम विनिमय के नियम का पालन करती है अतः –

आयत का क्षेत्रफल = चौड़ाई x लम्बाई, भी लिख सकते हैं।

क्रियाकलाप–3

(1) ग्राफ पेपर पर निम्नलिखित आयतों का निर्माण कर आप उन्हें 1 सेमी x 1सेमी के कितने वर्गाकार खण्डों में बाँट सकते हैं, लिखिए –

(i) 7 सेमी लम्बाई और 3 सेमी चौड़ाई

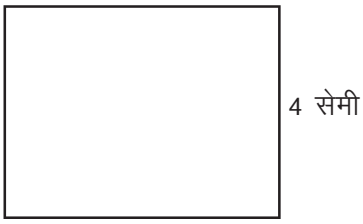
(ii) 10 सेमी लम्बाई और 1 सेमी चौड़ाई

(iii) 5 सेमी लम्बाई और 5 सेमी चौड़ाई

वर्ग का क्षेत्रफल (Area of a Square)

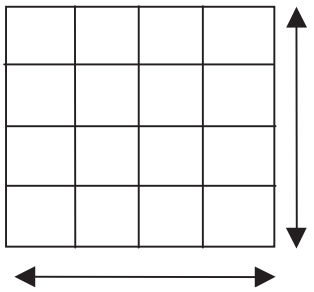
वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत है।

जिसकी भुजाएं समान हैं अर्थात् लम्बाई तथा चौड़ाई बराबर है।



चित्र–15.5

4 सेमी x 4 सेमी भुजा वाले वर्ग को 1 सेमी x 1 सेमी वाले वर्गों में बाँटने पर –



चित्र–15.6

1 वर्ग सेमी = 1 सेमी × 1 सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग खण्डों की संख्याएँ

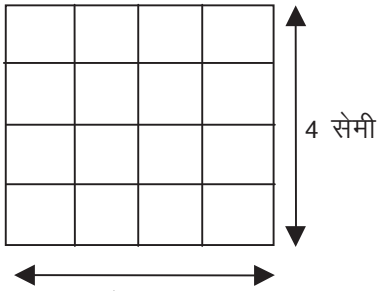
= 16

1 वर्गखण्ड का क्षेत्रफल = 1 वर्ग सेमी

16 वर्गखण्डों का क्षेत्रफल= 16 वर्ग सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = 16 वर्ग सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = 4 सेमी x 4 सेमी

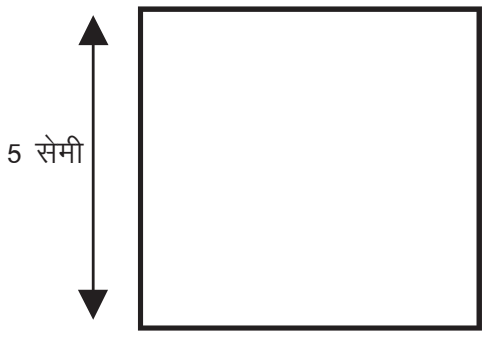


चित्र–15.7

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा = (भुजा)^2

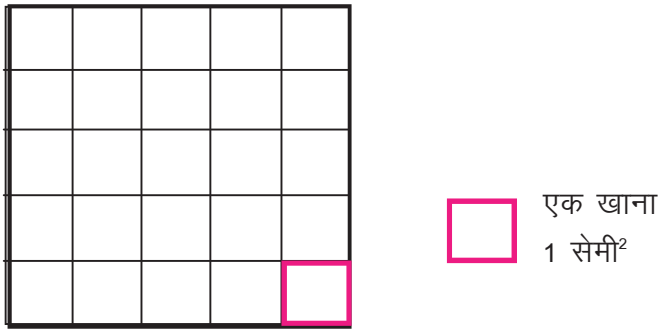
Area of a square = (side)^2

उदाहरण 1. यदि एक वर्ग की भुजा 5 सेमी है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?



चित्र–15.8

चित्र में 5 सेमी भुजा का एक वर्ग दिखाया गया है। प्रत्येक भुजा पर 1–1 सेमी दूरी पर चिह्न अंकित कीजिए।



चित्र–15.9

अब आमने–सामने के सभी बिन्दुओं को मिलाकर आड़ी और खड़ी रेखाएँ खींचिए।

इस वर्ग के भीतर 1 सेमी लम्बे व 1 सेमी चौड़े खानों को गिनिये।

वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग के भीतर 1 सेमी लम्बे व 1 सेमी चौड़े खानों की संख्या।

= 25 = 25 × 1 खाने का क्षेत्रफल

= 25 × 1 वर्ग सेमी = 25 वर्ग सेमी

अतः वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग की लम्बाई × वर्ग की चौड़ाई

= भुजा का वर्ग

उदाहरण 2. एक आयत की लम्बाई 9 सेमी व चौड़ाई 4 सेमी है, इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ आयत की लम्बाई = 9 सेमी

आयत की चौड़ाई = 4 सेमी

इसलिये आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौडाई

= 9 सेमी x 4 सेमी = 36 सेमी^{2} या 36 वर्ग सेमी

उदाहरण 3. एक वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 6 सेमी लम्बी है।

हल :

अतः वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

= 6 सेमी x 6 सेमी

= 6 सेमी x 6 सेमी

= 36 सेमी^{2} या 36 वर्ग सेमी

उदाहरण 4. एक कपड़े की लम्बाई 2 मीटर और चौड़ाई 100 सेमी है, उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

यहाँ आयताकार कपड़े की लम्बाई = 2 मीटर (चूंकि 1 मी. = 100सेमी)

आयताकार कपड़े की चौड़ाई = 100 सेमी

यहाँ लम्बाई व चौड़ाई की इकाई भिन्न–भिन्न है ।

आयताकार कपड़े की लम्बाई = 2 मीटर

= 2 x 100 सेमी

= 200 सेमी

(A) अब आयताकार कपड़े का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

= 200 सेमी x 100सेमी

= 20,000 वर्ग सेमी या 20,000 सेमी^{2}

(B) यदि भुजाओं को मीटर में व्यक्त किया जाए तो –

आयताकार कपड़े की लम्बाई = 2 मीटर (चूंकि 100 सेमी = 1 मीटर)

आयताकार कपड़े की चौड़ाई = 100 सेमी

= 1 मीटर

अतः आयताकार कपड़े का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

= 2 मीटर x 1 मीटर

= 2 वर्ग मीटर या 2 मीटर^2

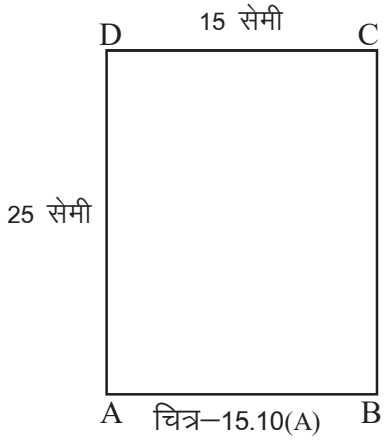
यहां A व B की तुलना करने पर

20000 सेमी^{2} = 2 मीटर^2

या 10000 सेमी^{2} = 1 मीटर^2

अर्थात् **1 मीटर^2 = 10000 सेमी^{2}**

उदाहरण 5. एक आयताकार कागज की लम्बाई 25 सेमी और चौड़ाई 15 सेमी है। उसके कुछ हिस्से को मोड़कर सबसे बड़ी वर्गाकार आकृति प्राप्त की जाती है। प्राप्त वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

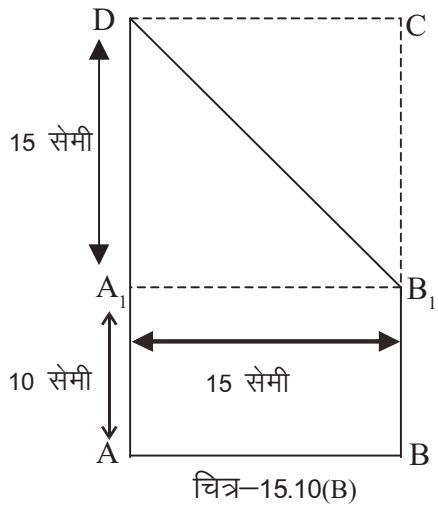


चित्र–15.10(A)

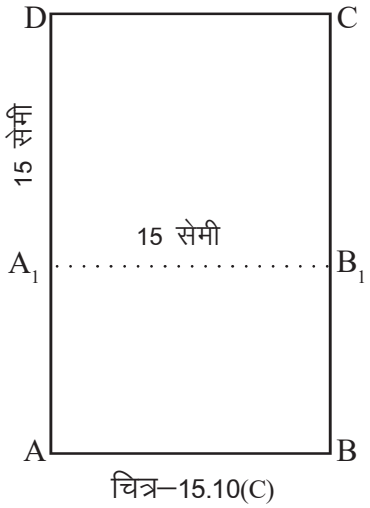
हल :

जैसा कि आपने पूर्व के क्रियाकलाप में देखा था कि आयताकार कागज के कुछ हिस्से को मोड़कर एक वर्गाकार आकृति प्राप्त की जा सकती है।

इसके लिए चित्र में दिखाए अनुसार आयताकार कागज़ की छोटी भुजा पर मोड़ कर बड़ी भुजा पर रखिए। अब कागज़ को CB_1 रेखा के अनुदिश चित्रानुसार मोड़ कर कागज़ को खोलिए और $A_1 B_1 C D$ वर्ग प्राप्त कीजिए –



चित्र–15.10(B)



चित्र–15.10(C)

अब इस बड़े से बड़े वर्गाकार आकृति का क्षेत्रफल

= भुजा x भुजा

= $A_1 B_1$ x $A_1 D_1$

= 15 सेमी x 15 सेमी

= 15 सेमी x 15 सेमी = 225 सेमी^{2}

उदाहरण 6. एक कमरे के आयताकार फर्श की लम्बाई 12 फीट व चौड़ाई 5 फीट है। इस फर्श पर 2 फीट x 1 फीट की फर्शी पत्थर टाइल्स बिछाने का खर्च ज्ञात कीजिए जबकि एक टाइल्स का मूल्य 10 रुपये है।

हल : यहाँ आयताकार फर्श की लम्बाई = 12 फीट

आयताकार फर्श की चौड़ाई = 5 फीट

इस आयतकार कमरे का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

= 12 फीट x 5 फीट

= 60 फीट^2 या 60 वर्ग फीट

चूंकि 1 टाइल्स का क्षेत्रफल = 2 फीट x 1 फीट

= 2 वर्ग फीट

चूंकि 2 वर्ग फीट फर्श में टाइल्स लगती है = 1

1 वर्ग फीट फर्श में टाइल्स लगेगी $= \frac{1}{2}$

तब 60 वर्ग फीट फर्श में टाइल्स लगेगी $= \frac{1}{2}$ x 60

= 30 टाइल्स

इस प्रकार इस कमरे के आयतकार फर्श में लगने वाले टाइल्स की संख्या = 30

अब 1 टाइल्स की कीमत 10 रु. है।

∴ 30 टाइल्स की कीमत 10 x 30 रु होगी = 300 रु

अतः उस कमरे के आयताकार फर्श में

2 फीट x 1 फीट की टाइल्स बिछाने का खर्चा = 300 रु

प्रश्नावली 15.1 (Exercise 15.1)

(1) प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, लम्बाई व चौड़ाई निम्नानुसार है –

(i) लम्बाई – 5 सेमी, चौड़ाई – 3 सेमी

(ii) लम्बाई – 3.5 सेमी, चौड़ाई – 2 सेमी

(2) निम्नलिखित वर्गों जिनकी भुजा निम्नानुसार है का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए –

(i) 5 सेमी

(ii) 7 सेमी

(3) एक वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्गमीटर है, तो इसी वर्ग का क्षेत्रफल वर्ग सेमी में ज्ञात कीजिए।

(4) एक वर्ग का क्षेत्रफल 10,000 वर्ग सेमी है, तो इसी वर्ग का क्षेत्रफल वर्ग मीटर में ज्ञात कीजिए।

(5) एक 10 वर्ग सेमी आयताकार कागज की पट्टी से 1 वर्ग सेमी के कितने वर्ग काटे जा सकते है? प्रयोग करके जाँचिए।

(6) एक 10 सेमी x 2 सेमी आयताकार कागज के टुकड़े से 2 वर्ग सेमी के कितने टुकड़े काटे जा सकते है? प्रयोग करके जाँचिए।

(7) एक कमरे के आयताकार फर्श की लम्बाई 6 मीटर व चौड़ाई 2 मीटर है। इस फर्श पर 10 सेमी x 5 सेमी के टाइल्स के बिछाने का खर्च ज्ञात कीजिए जबकि एक टाइल्स की कीमत 5 रु. है।

(8) एक वर्ग की एक भुजा 10 मीटर है तो इस वर्ग के क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ेगा । यदि

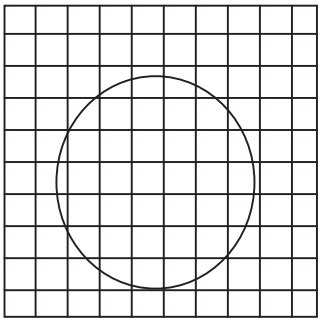
(i) उसकी भुजा की लम्बाई दुगुनी कर दी जाए।

(ii) उसकी भुजा की लम्बाई तिगुनी कर दी जाये।

(9) एक टेबल के ऊपरी आयताकार तल की लम्बाई 200 सेमी और चौड़ाई 50 सेमी है। इसे पूरी तरह सनमाइका से ढँकने का खर्च रुपये में ज्ञात कीजिए जबकि सनमाइका की कीमत 25 पैसे प्रति वर्ग सेमी है।

(10) एक कमरे की सभी दीवारें आयताकार हैं। प्रत्येक दीवार की लम्बाई 3 मीटर व चौड़ाई 2 मीटर है। दीवार पर पुताई करवाने का खर्च ज्ञात कीजिए जबकि पुतवाई का खर्च 10 पैसे प्रति वर्ग सेमी है।

वृत्त का क्षेत्रफल (Area of a circle)



चित्र–15.11

कक्षा 5वीं में आपने वृत्त बनाया होगा।

एक ग्राफ पेपर पर परकार की सहायता से वृत्त बनाइए। वृत्ताकार क्षेत्र में वर्गाकार खंडों की गिनती करें।

जिस प्रकार आपने पत्ती का क्षेत्रफल निकाला था, उसी प्रकार वृत्त का क्षेत्रफल वर्गाकार खानों की गिनती कर निकालें।

A = वृत्त के अन्दर पूर्ण खानों की संख्या = ------

B = वृत्त के अन्दर आधे से ज्यादा घिरे खानों की संख्या = ------

$C = \frac{\text{वृत्त के अन्दर आधे आकार के खानों की संख्या}}{2} =$ -----

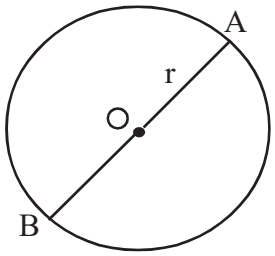
कुल वर्गाकार खानों की संख्या = A + B + C = ------ = ------

∵ एक वर्गाकार खाने का क्षेत्रफल = 1 सेमी x 1 सेमी = 1 वर्ग सेमी

अतः वृत्त का क्षेत्रफल = (A + B + C) वर्ग सेमी

वृत्त का क्षेत्रफल सूत्र विधि से ज्ञात करना
(Finding the Area of a circle with the help of Formula)

चित्र 13 में O वृत्त का केन्द्र है। OA व OB वृत्त की त्रिज्या है। वृत्त की त्रिज्या को r से प्रदर्शित करते हैं।



चित्र–15.12

तथा AB = OA + OB

= r + r

AB = 2r

AB = 2 x त्रिज्या

AB, वृत्त का व्यास कहलाता है।

व्यास = 2 x त्रिज्या (Diameter = 2 × Radius)

$\pi = \frac{22}{7}$ वृत्त की परिधि एवं व्यास का अनुपात है जिसका मान $\frac{22}{7}$ के लगभग होता है।

वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times r^2 = \pi \times$ त्रिज्या^{2}

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

ग्राफ पेपर पर किसी निश्चित त्रिज्या का वृत्त खींचिए तथा वर्गाकार खानों को गिनकर वृत्त का क्षेत्रफल प्राप्त कीजिए। इसी वृत्त का क्षेत्रफल सूत्र की सहायता से प्राप्त कर दोनों क्षेत्रफलों के बीच तुलना कीजिए।

प्रश्नावली 15.2 (Exercise 15.2)

1. निम्नलिखित त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 3 सेमी
   (ii) 7 सेमी
   (iii) 14 सेमी
2. निम्नलिखित व्यास वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 8 सेमी
   (ii) 20 सेमी
   (iii) 14 सेमी

6Y9GS4

हमने सीखा (We have learnt)

1. किसी समतल पर कोई वस्तु जितना स्थान घेरती है वह उसका क्षेत्रफल होता है।
2. आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई
3. वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा = (भुजा)^2
4. वृत्त का व्यास = 2 x त्रिज्या
5. वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या हैं।
6. क्षेत्रफल का मात्रक वर्ग इकाई होता है।

❖❖❖