13

सदिश (Vector)

13.01 परिचय (Introduction)

हमारे दैनिक जीवन में विभिन्न प्रकार की भौतिक राशियों का काफी महत्व है। उदाहरणार्थ जैसे यात्रा के समय बस की गति 40 किमी./घण्टा थी से हम यह नहीं बता सकते है कि बस किस तरफ जा रही थी अर्थात् यहाँ हमें केवल गति का परिमाण ही ज्ञात है परन्तु इसके साथ ही यदि हम बता दें कि बस की दिशा किस तरफ थी तो हम यह भी बता सकेंगे कि एक निश्चित समय में बस किस स्थान पर पहुँच जायेगी।

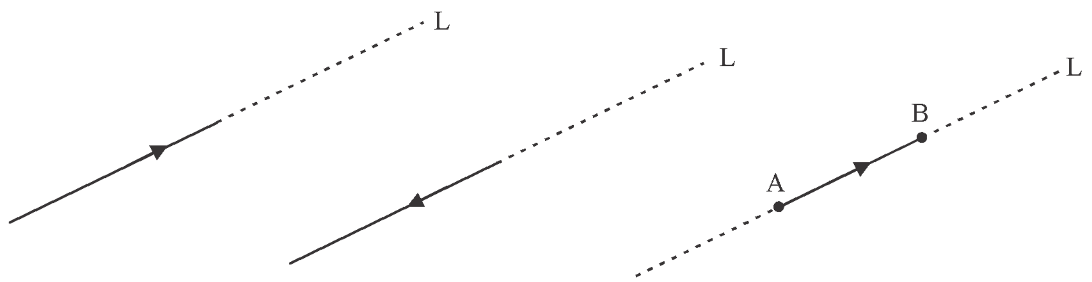
अतः हम कह सकते हैं कि व्यवहार में दो प्रकार की भौतिक राशियाँ होती है, एक वे जिनमें केवल परिमाण ज्ञात हो जैसे लम्बाई, क्षेत्रफल समय, आयतन, इत्यादि तथा दूसरी वे जिनमें परिमाण के साथ-साथ दिशा भी ज्ञात हो जैसे वेग, त्वरण, बल, संवेग इत्यादि। यहाँ प्रथम प्रकार की राशियों को अदिश राशियाँ तथा द्वितीय प्रकार की राशियों को सदिश राशियाँ कहते हैं।

इस अध्याय में हम सदिश राशियों की कुछ आधारभूत संकल्पनाएँ, सदिशों की विभिन्न संक्रियाएँ और उनके बीजीय एवं ज्यामितीय गुण धर्मों का अध्ययन करेंगे।

13.02 आधारभूत संकल्पनाएँ (Basic concepts)

माना किसी तल अथवा त्रिविमीय अतंरिक्ष में L कोई सरल रेखा है। तीर के निशानों की सहायता से इस रेखा को दिशाएं प्रदान की जा सकती हैं निश्चित दिशा वाली कोई भी रेखा दिष्ट रेखा कहलाती है।

यदि हम एक दिष्ट रेखा L को रेखा खण्ड AB तक प्रतिबंधित कर देते है तब हमें एक निश्चित दिशा वाली रेखा L पर परिमाण निर्धारित हो जाता है। इस प्रकार हमें एक दिष्ट रेखा खण्ड प्राप्त होता है। अतः एक दिष्ट रेखा खण्ड में परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं।



आकृति 13.01

प्रत्येक दिष्ट रेखा खण्ड की निम्न विशेषताएँ होती है–

(i) लम्बाई (Length): दिष्ट रेखा खण्ड $\vec{AB}$ की लम्बाई, रेखाखण्ड की लम्बाई है जिसे AB या $|\vec{AB}|$ से निरूपित करते है।

(ii) आधार (Support): एक दिष्ट रेखा खण्ड $\vec{AB}$ का आधार एक रेखा L है जिसका AB एक खण्ड है।

(iii) अभिदिशा (Sense): एक दिष्ट देखा खण्ड की अभिदिशा इसके प्रारम्भिक बिन्दु से अन्तिम बिन्दु की ओर है। अतः $\vec{AB}$ की अभिदिशा A से B की ओर है, जबकि $\vec{BA}$ की अभिदिशा B से A की ओर है।

टिप्पणी: यद्यपि $\vec{AB}$ और $\vec{BA}$ की लम्बाई और आधार वही है परन्तु ये भिन्न दिष्ट रेखा खण्ड है क्योंकि $\vec{AB}$ और $\vec{BA}$ विपरीत अभिदिशा के है।

सदिश राशि: एक ऐसी राशि जिसमें परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं, सदिश कहलाती है। अतः एक दिष्ट रेखाखण्ड सदिश होता है। जिसे $\vec{AB}$ अथवा $\vec{a}$ के रूप में निर्दिष्ट करते है और इसे सदिश $\vec{AB}$ अथवा सदिश $\vec{a}$ के रूप में पढ़ा जाता है।

वह बिन्दु A जहाँ से सदिश $\vec{AB}$ प्रारम्भ होता है, प्रारम्भिक बिन्दु कहलाता है और वह बिन्दु B जहाँ पर सदिश $\vec{AB}$ समाप्त होता है, अंतिम बिन्दु कहलाता है।

सदिश का मापांक: किसी सदिश का मापांक वह धनात्मक वास्तविक संख्या है जो उस सदिश के परिमाण अथवा उसको निरूपित करने वाले दिष्ट रेखा खण्ड की लम्बाई का अभिव्यक्त करती हैं।

यदि $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ एक सदिश हो, तो इसके मापांक को प्रायः $|\vec{a}|$ या $|\overrightarrow{AB}|$ से प्रकट करते हैं। अर्थात् सदिश $\vec{a}$ का मापांक $= |\vec{a}| = a$

टिप्पणी: $|\vec{a}| \geq 0$

13.03 सदिशों के प्रकार (Various types of vectors)

(1) मात्रक अथवा इकाई सदिश (Unit vector): जिस सदिश का मापांक एक इकाई हो, उसे मात्रक सदिश कहते हैं। a, b, c की दिशाओं में मात्रक सदिशों को क्रमशः $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ से प्रकट किया जाता है।

इस प्रकार $$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

$\hat{a}$ को a कैप पढ़ते है।

(2) शून्य सदिश (Zero or null vector): जिस सदिश का मापांक (Modulus) शून्य होता है, उसे **शून्य सदिश** कहते हैं। ऐसी स्थिति में प्रारम्भिक और अन्तिम बिन्दु सम्पाती होते हैं और दिशा अनिर्धारित होती है या दिशा स्वेच्छ (Arbitrary) होती है।

एक शून्य सदिश को $\vec{O}$ या गहरे काले टाइप **O** से प्रकट किया जाता है। $\overrightarrow{AA}$ या $\overrightarrow{BB}$ शून्य सदिश है। एक शून्य सदिश की निश्चित दिशा नहीं होती हैं $\vec{a}$ एक शून्य सदिश होगा।

यदि और केवल यदि $|\vec{a}| = 0$

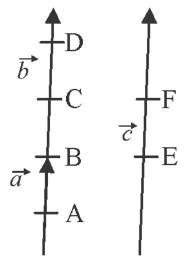
अर्थात् यदि $|\overrightarrow{AB}| = 0$

तो A और B सम्पाती हैं।

(3) समदिश सदिश (Like Vectors): यदि सदिशों की एक ही अभिदिशा हो तो वे समदिश सदिश कहलाते हैं।

(4) समान अथवा तुल्य सदिश (Equal vectors)– यदि (i) सदिशों के परिमाण बराबर हों; (ii) उनका आधार समान अथवा समान्तर हो (iii) उनकी अभिदिशा (Sense of direction) एक ही हो तो उन्हें समान या तुल्य सदिश कहते हैं। यह आवश्यक नहीं कि उनका प्रारम्भिक बिन्दु एक ही हो।

आकृति (13.02) में दिष्ट रेखा खण्ड $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ से निरूपित तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के प्रारम्भिक तथा अन्तिम बिन्दु भिन्न–भिन्न हैं परन्तु उनकी लम्बाई समान है तथा उनका आधार समान या समान्तर है। अतः वे समान सदिश है।



आकृति 13.02

अर्थात् $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$$

यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान या तुल्य सदिश हों तो हम इसे

$\vec{a} = \vec{b}$ द्वारा लिखते हैं

(5) विपरीत सदिश (Unlike vectors): यदि सदिशों की अभिदिशा विपरीत हो तो वे विपरीत सदिश कहलाते हैं।

(6) ऋण सदिश (Negative vector): विपरीत अभिदिशा वाले वे सदिश जिनका मापांक समान हो को ऋण सदिश कहते हैं।

अतः यदि $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ तो $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$

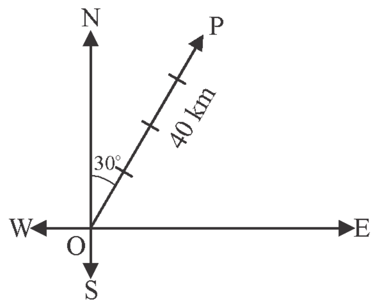
स्थिति सदिश (Position vector)

किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु P की स्थिति को सदिश $\overrightarrow{OP}$ से अद्वितीयतः (Uniquely) वर्णित किया जा सकता है। ऐसे सदिश को O के सापेक्ष बिन्दु P का स्थिति सदिश (Position vector) कहा जाता हैं। इस प्रकार O के सापेक्ष P का स्थिति-सदिश $\overrightarrow{OP}$ है।

यदि $\overrightarrow{AB}$ कोई सदिश हो और O मूलबिन्दु हो तो A के स्थिति सदिश $\overrightarrow{OA}$ को $\vec{a}$ से और B के स्थिति-सदिश $\overrightarrow{OB}$ को $\vec{b}$ से प्रकट करते हैं।

उदाहरणार्थ 1. उत्तर से 30° पूर्व में 40 km के विस्थापन का आलेखीय निरूपण कीजिए।

हलः 10 km को 1 cm मानकर 4 cm का एक रेखाखण्ड OP, ON की दायीं ओर ON के साथ 30° का कोण बनाते हुए खींचा गया। इस प्रकार सदिश $\overrightarrow{OP}$, ON से 30° पूर्व में 40 km के विस्थापन को निरूपित करता है। (आकृति 13.03)



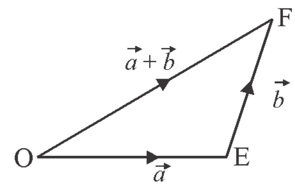
आकृति 13.03

13.04 सदिशों का योग (Addition of vectors)

(A): दो सदिशों का योग (Addition of two vectors)

किसी समतल में $\overrightarrow{AB}$ व $\overrightarrow{CD}$ दो सदिश जिन्हें $\vec{a}$ व $\vec{b}$ से निरूपित किया जाता है तो सदिशों का योग दो प्रकार से किया जा सकता है।

I. सदिश योग का त्रिभुज नियम (Triangle law of vector addition): माना सदिशों के समतल में स्थित O एक निश्चित बिन्दु है। O से $\overrightarrow{AB}$ के समान्तर एवं बराबर दिष्ट रेखा खण्ड $\overrightarrow{OE}$ खीचों। यह सदिश $\vec{a}$ को निरूपित करेगा। इसके पश्चात् E से $\overrightarrow{CD}$ के समान्तर और बराबर दिष्ट रेखा खण्ड $\overrightarrow{EF}$ खीचों यह सदिश $\vec{b}$ को निरूपित करेगा। इस प्रकार प्राप्त रेखा खण्ड $\overrightarrow{OF}$ सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के योग को निरूपित करेगा। अर्थात्



आकृति 13.04

$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OF}$$

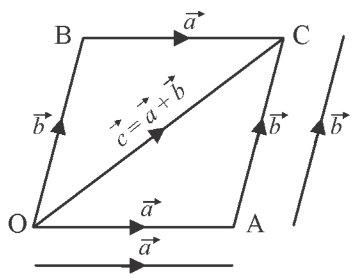
दो सदिशों के योग करने की इस विधि को सदिश योग का त्रिभुज नियम कहते हैं। इस नियम के अनुसार **"दो सदिश यदि एक ही क्रम में किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को निरूपित करते हैं तो उनका योग उल्टे क्रम में त्रिभुज की तीसरी भुजा द्वारा निरूपित होगा।"**

II. सदिश योग का समान्तर चतुर्भुज नियम (Parallelogram law of vector addition):

माना कि एक ही तल में $\vec{a}$ व $\vec{b}$ दो सदिश राशियाँ हैं। इसी तल में O एक स्वेच्छ बिन्दु लिया, O को मूलबिन्दु लेते हुए O से सदिश $\vec{a}$ व सदिश $\vec{b}$ के समान दिशा में $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ सदिश खींचो। अतः $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ और $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ होगा।

अब समान्तर चतुर्भुज OACB बनाइए। अब OC समान्तर चतुर्भुज OACB का विकर्ण है। यहाँ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ और $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ है।

अब त्रिभुज OAC में, योग के त्रिभुज नियम द्वारा $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$



आकृति 13.05

अतः यदि दो सदिशों को एक समान्तर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाये तो इन दो सदिशों के योगफल को समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण जिसका आरम्भिक बिन्दु वहीं हो जो दिये हुए सदिशों का है, द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इस नियम को सदिश योग का समान्तर चतुर्भुज नियम कहते हैं।

(B) दो से अधिक सदिशों का योग (Addition of more than two vectors)

दो से अधिक सदिशों के योग के लिए सदिश योग का त्रिभुज नियम बढ़ाया जा सकता है। इस नियम को बार–बार काम में लेने पर हम दो से अधिक सदिशों का योग ज्ञात कर सकते हैं। इसे सदिश योग का बहुभुज नियम (Polygon law of vector addtion) भी कहते हैं।

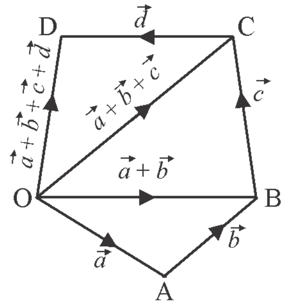
उदाहरणार्थः मान लो हमें चार सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ का योग ज्ञात करना है। सदिशों के तल में O एक स्वेच्छ बिन्दु लिया।

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ खींचों। सदिश $\overrightarrow{OA}$ के अन्तिम बिन्दु A से $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ खींचों। इसी प्रकार $\overrightarrow{AB}$ के अन्तिम बिन्दु B से $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ खींचों। $\vec{c}$ के अन्तिम बिन्दु C से $\overrightarrow{CD} = \vec{d}$ खींचों। अब सदिश योग के त्रिभुज द्वारा हम देखते हैं कि

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OC}$$

तथा
$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{OD}$$



आकृति 13.06

अतः सदिश $\overrightarrow{OD}$, सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ के योग को व्यक्त करता है। बहुभुज OABCD सदिशों का बहुभुज (Polygon of vectors) या सदिश–बहुभुज कहलाता है।

टिप्पणीः यदि पहले सदिश का आरम्भिक बिन्दु व अन्तिम सदिश का अन्तिम बिन्दु एक हो जाये तो सदिशों का योग शून्य (zero) सदिश होगा।

13.05 सदिश योग के गुणधर्म (Properties of vector addition):

सदिशों का योग निम्नलिखित नियमों का पालन करता हैः

(i) क्रम विनिमेयता (Commutativity): सदिशों का योग क्रम-विनिमेय नियम का पालन करता है, अर्थात् किन्ही सदिश $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के लिए

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

प्रमाणः मान लो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को क्रमशः $\overrightarrow{OA}$ व $\overrightarrow{AB}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अतः $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ और $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ है।

सदिश योग के त्रिभुज नियम द्वारा

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \text{. . . (i)}$$

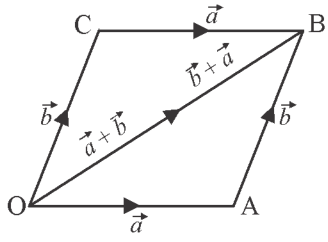
समान्तर चतुर्भुज OABC को पूरा करो जिसकी OA व AB दो संलग्न भुजाएं हैं, तब तुल्य सदिशों की परिभाषा से,

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

और $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}$

पुनः सदिश योग के त्रिभुज OCB, से

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{. . . (ii)}$$



आकृति 13.07

इस प्रकार समीकरण (i) और (ii) से,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

अतः सदिशों का योग क्रम विनिमेय होता है।

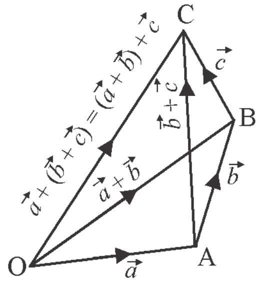
(ii) साहचर्यता (Associativity): सदिशों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है, अर्थात् $\vec{a}, \vec{b}$ व $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हों तो

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

प्रमाणः मान लो सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ व $\vec{c}$ को क्रमशः $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{BC}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अतः $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ व $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ है। त्रिभुज OAB तथा OBC में सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$$

तथा $$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} \qquad (1)$$



आकृति 13.08

इसी प्रकार त्रिभुज ABC और त्रिभुज OAC से सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{c}$$

तथा $$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \qquad (2)$$

अतः समीकरण (1) और (2) से

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

अतः सदिशों का योग साहचर्य होता है।

टिप्पणीः उपर्युक्त नियम से यह स्पष्ट है कि तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ का योग उनके क्रम (Order) पर जिसमें वे जोड़े जाते हैं, निर्भर नहीं करता। इसलिए उपर्युक्त योग को बिना किसी संदिग्धता से $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ द्वारा लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार बल त्रिभुज के संयोजन के नियम से न केवल विस्थापन या बलों को संयोजित कर सकते हैं परन्तु सभी सदिश राशियों, जैसे–वेग, त्वरण आदि को भी संयोजित कर सकते हैं।

तत्समकता (Identity):

प्रत्येक सदिश $\vec{a}$ के लिए $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$, जहाँ $\vec{0}$ शून्य सदिश है, इसे सदिश योग के लिए तत्समक सदिश भी कहते हैं।

दो सदिशों के योग की परिभाषा से

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA} = \vec{a} + \vec{0}$$

$$\therefore \quad \vec{a} = \vec{a} + \vec{0}$$

इसी प्रकार $$\vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$$

प्रमाणः मान लो कोई सदिश $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तो ऋण सदिश (Negative Vector) की परिभाषा के अनुसार सदिश $(-\vec{a}), \overrightarrow{PO}$ द्वारा व्यक्त किया जायेगा।

आकृति 13.09

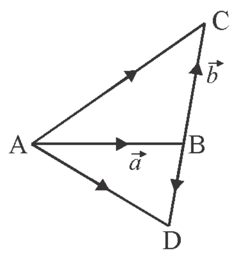
अब $$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OO} = \vec{O}$$

इसी प्रकार $$(-\vec{a}) + \vec{a} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP} = \vec{O}$$

अतः समीकरण (1) और (2) से, $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{O}$

13.06 सदिशों का व्यवकलन या घटाना (Subtraction of vectors)

मान लो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सदिश राशियाँ है। सदिशों के तल में A एक स्वेच्छ बिन्दु लिया। A को प्रारम्भिक बिन्दु मानते हुए A से सदिश $\vec{a}$ के समान सदिश $\overrightarrow{AB}$ खींचो। अब सदिश $\overrightarrow{AB}$ के अन्तिम बिन्दु पर सदिश $\vec{b}$ के समान सदिश $\overrightarrow{BC}$ खींचों। अतः $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ और $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ होगा। अब यदि हम $\vec{a} - \vec{b}$ ज्ञात करना चाहें तो B पर BC के बराबर परिमाण की विपरीत दिशा में एक रेखा BD खींचों तो दिष्ट रेखाखण्ड $\overrightarrow{BD}$ सदिश $(-\vec{b})$ को निरूपित करेगा अर्थात् $\overrightarrow{BD} = -\vec{b}$



आकृति 13.10

बिन्दु A को बिन्दु D से मिलायें। अब त्रिभुज ABD में सदिश योग के त्रिभुज नियम से

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

अतः सदिश $\vec{b}$ को सदिश $\vec{a}$ में से घटाने के लिए अर्थात् $(\vec{a} - \vec{b})$ ज्ञात करने के लिए सदिश $\vec{b}$ की दिशा विपरीत करके सदिश $\vec{a}$ में जोड़ो अर्थात् सदिश $\vec{a}$ में $-\vec{b}$ को जोड़ो।

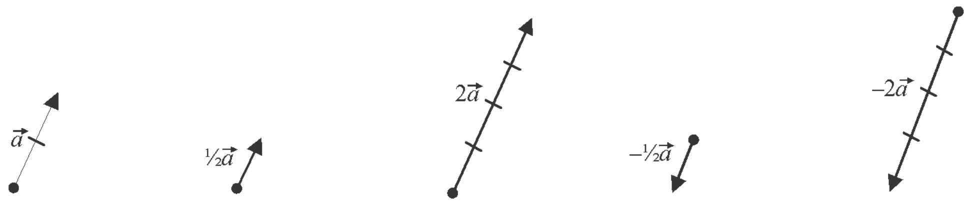
इसी प्रकार यदि सदिश $\vec{a}$ को सदिश $\vec{b}$ में से घटना हो अर्थात् $(\vec{b} - \vec{a})$ ज्ञात करना है तो सदिश $\vec{b}$ में सदिश $\vec{a}$ का ऋण सदिश $(-\vec{a})$ को जोड़ों।

13.07 एक सदिश का अदिश से गुणन (Multiplication of a vector by a scalar)

मान लीजिए कि $\vec{a}$ एक दिया हुआ सदिश है और λ एक अदिश है। तब सदिश $\vec{a}$ का अदिश λ से गुणनफल जिसे $\lambda\vec{a}$ के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है, सदिश $\vec{a}$ का अदिश λ से गुणन कहलाता है। ध्यान कीजिए कि $\lambda\vec{a}$ भी सदिश $\vec{a}$ के संरेख एक सदिश है। λ के मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक होने के अनुसार $\lambda\vec{a}$ की दिशा, $\vec{a}$ के समान अथवा विपरीत होती है। $\lambda\vec{a}$ का परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण का $|\lambda|$ गुणा होता है, अर्थात्

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

एक सदिश से अदिश के गुणन का ज्यामितीय चाक्षुषीकरण (रूप की कल्पना (visualisation)) आकृति 13.11 में दी गई है।



आकृति 13.11

जब $\lambda = -1$, तब $\lambda\vec{a} = -\vec{a}$ जो एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $\vec{a}$ के समान है और दिशा $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत है। सदिश $-\vec{a}$ सदिश $\vec{a}$ का ऋणात्मक (अथवा योज्य प्रतिलोम) कहलाता है और हम हमेशा $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{O}$ पाते हैं।

यदि $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, जहाँ $\vec{a} \neq 0$, अर्थात् $\vec{a}$ एक शून्य सदिश नहीं है, तब

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

इस प्रकार $\lambda\vec{a}, \vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश को निरूपित करता है। हम इसे

$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ के रूप में लिखते हैं।

13.08 एक सदिश के घटक (Components of a vector)

माना A (1, 0, 0), B(0, 1, 0) तथा C (0, 0, 1) क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष ओर z-अक्ष पर स्थित बिन्दु है। स्पष्ट रूप से

$$|\vec{OA}| = 1, |\vec{OB}| = 1 \text{ और } |\vec{OC}| = 1$$

सदिश $\vec{OA}, \vec{OB}$ और $\vec{OC}$ जिनमें से प्रत्येक का परिमाण 1 है, क्रमशः OX, OY और OZ अक्षों के अनुदिश मात्रक सदिश (unit vectors) कहलाते हैं और इनको क्रमशः $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

माना P $(x, y,. z)$ एक बिन्दु है, जिसका स्थिति सदिश, आकृतिानुसार $\vec{OP}$ है। अतः

$$\vec{OL} = x\hat{i}$$

$$\vec{OM} = \vec{LQ} = y\,\hat{j}$$

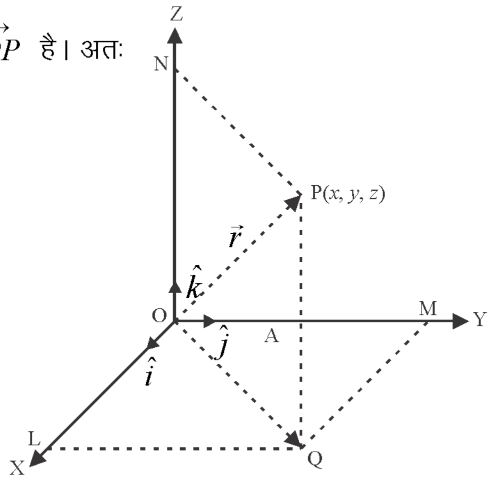
$$\therefore \quad \vec{OQ} = \vec{OL} + \vec{LQ}$$

$$= x\hat{i} + y\,\hat{j}$$

पुनः
$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

$$= \left(x\hat{i} + y\,\hat{j}\right) + z\,\hat{k}$$

$$= x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$



आकृति 13.12

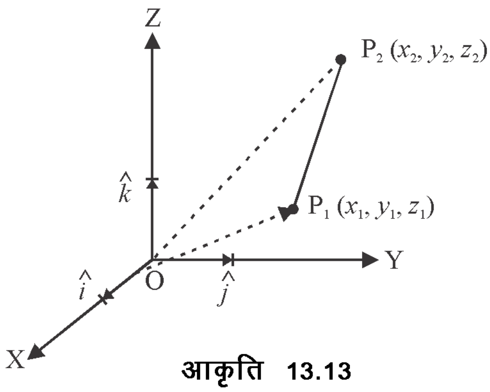
इस प्रकार, O के सापेक्ष P का स्थिति सदिश $\vec{OP} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$ के रूप में प्राप्त होता है। किसी भी सदिश का यह रूप घटक रूप कहलाता है। यहाँ x, y एवं z, $\overrightarrow{OP}$ के अदिश घटक कहलाते है और $x\hat{i}, y\,\hat{j}$ एवं $z\,\hat{k}$ क्रमागत अक्षों के अनुदिश $\overrightarrow{OP}$ के घटक कहलाते हैं। x, y एवं z को समकोणिक घटक भी कहा जाता हैं।

यदि $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$ हो, तो

$$\overrightarrow{OP} = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

13.09 दो बिन्दुओं को मिलाने वाला सदिश (Vector joining two points)

यदि $P_1(x_1, y_1, z_1)$ और $P_2(x_2, y_2, z_2)$ दो बिन्दु हैं, तब P_1 को P_2 से मिलाने वाला सदिश $\overrightarrow{P_1P_2}$ है (आकृति 13.13) P_1 व P_2 को मूल बिन्दु O से मिलाने पर और त्रिभुज नियम का प्रयोग करने पर हम त्रिभुज OP_1P_2 से पाते हैं कि $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$



आकृति 13.13

सदिश योगफल के गुणधर्मो का उपयोग करते हुए उपर्युक्त समीकरण निम्नलिखित रूप से लिखा जाता है।

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

अर्थात् $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2$ का स्थिति सदिश $-P_1$ का स्थिति सदिश

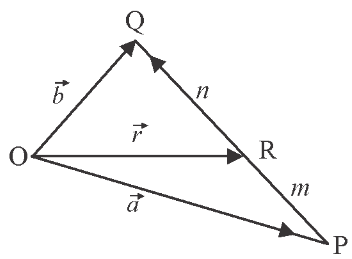
अर्थात्
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}\right) - \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right)$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

सदिश $\overrightarrow{P_1P_2}$ का परिमाण, $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ के रूप में प्राप्त होता है।

13.10 खंड सूत्र (Section formula)

मान लीजिए मूल बिन्दु O के सापेक्ष दो बिन्दुओं P व Q के आकृति 13.14 (a) में स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ से निरूपित किये गये है। बिन्दुओं P एवं Q को मिलाने वाले रेखा खंड पर स्थित किसी तीसरे बिन्दु R द्वारा इसे दो प्रकार से विभाजित किया जा सकता है। (आकृति 13.14 (a) एवं आकृति 13.14 (b))। यहाँ हमारा उद्देश्य मूल बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु R का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR}$ ज्ञात करना है। हम दोनों स्थितियों पर विचार करते हैं।



आकृति 13.14 (a)

स्थिति–I: जब R, PQ को अंतः विभाजित करता है:

माना R, $\overrightarrow{PQ}$ को $m : n$ अनुपात में अंतः विभाजित करता है (आकृति 13.14(a)), तो

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$$

$\Rightarrow \quad nPR = mRQ$

$\Rightarrow \quad n\overrightarrow{PR} = m\overrightarrow{RQ}$

$\Rightarrow n$ (R का स्थिति सदिश –P का स्थिति सदिश) $= m$ (Q का स्थिति सदिश –R का स्थिति सदिश)

$\Rightarrow \quad n(\vec{r} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{r})$

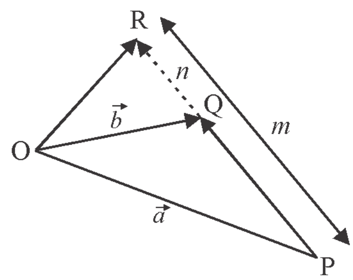
$\Rightarrow \quad (m+n)\vec{r} = m\vec{b} + n\vec{a}$

$\Rightarrow \quad \vec{r} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$

अतः बिन्दु R, जो कि P और Q को $m : n$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है, का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$ के रूप में प्राप्त होता है।

स्थिति–II: जब R, PQ को बाह्य विभाजित करता है:

माना R, $\overrightarrow{PQ}$ को आगे बढ़ाने पर $m : n$ अनुपात में बाह्य विभाजित करता है (आकृति 13.14 (b)), तो



आकृति 13.14 (b)

$$\frac{PR}{QR} = \frac{m}{n}$$

$\Rightarrow \quad nPR = mQR$

$\Rightarrow \quad n\overrightarrow{PR} = m\overrightarrow{QR}$

$\Rightarrow n$ (R का स्थिति सदिश –P का स्थिति सदिश) $= m$ (R का स्थिति सदिश –Q का स्थिति सदिश)

$\Rightarrow \quad n(\vec{r} - \vec{a}) = m(\vec{r} - \vec{b})$

$\Rightarrow \quad m\vec{b} - n\vec{a} = m\vec{r} - n\vec{r}$

$\Rightarrow \quad \vec{r} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$

अतः बिन्दु R, जो कि P और Q को m : n के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है,

का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ के रूप में प्राप्त होता है।

टिप्पणीः यदि R, PQ का मध्य बिन्दु है, तो $m = n$ और इसलिए स्थिति I से $\overrightarrow{PQ}$ के मध्य बिन्दु R का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ के रूप में होगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. सदिश $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=-2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: सदिशों का योगफल

$$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$
$$=\left(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\right)+\left(-2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}\right)+\left(\hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}\right)$$
$$=\left(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\right)+\left(-2\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}\right)+\left(\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}\right)$$
$$=0-\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}=-4\hat{j}-\hat{k}$$

उदाहरण-2. यदि सदिश $\vec{a}=x\hat{i}+2\hat{j}+z\hat{k}$ और $\vec{b}=2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}$ समान है तो x, y और z के मान ज्ञात कीजिए।

हल: ध्यान दीजिए कि दो सदिश समान होते हैं यदि और केवल यदि उनके संगत घटक समान है।

अतः दिए हुए सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान होंगे यदि और केवल यदि $x=2,\ y=2,\ z=1$

उदाहरण-3. मान लीजिए $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}$ और $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}$ तब क्या $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ है? क्या सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान हैं?

हल: यहाँ $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ और $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

इसलिए $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ परन्तु दिए हुए सदिश समान नहीं हैं क्योंकि इनके संगत घटक भिन्न हैं।

उदाहरण-4. सदिश $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल: सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक संदिश $\hat{a}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ द्वारा प्राप्त होता है।

अब $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$

इसलिए $\hat{a}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\left(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{14}}\hat{i}+\dfrac{3}{\sqrt{14}}\hat{j}+\dfrac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$

उदाहरण-5. सदिश $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 7 इकाई है।

हल: दिए हुए सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{a}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\hat{i}-2\hat{j}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\hat{i}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

इसलिए $\vec{a}$ के अनुदिश और 7 परिमाण वाला सदिश $7\hat{a}=7\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\hat{i}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right)=\dfrac{7}{\sqrt{5}}\hat{i}-\dfrac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

उदाहरण-6. सदिश $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल: दिए हुए सदिशों का योगफल

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ (माना) अतः $\vec{c}=4\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ है।

और $|\vec{c}|=\sqrt{4^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$

अतः अभीष्ट मात्रक सदिश

$$\hat{c}=\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\frac{1}{\sqrt{29}}\left(4\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}\right)=\frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i}+\frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j}-\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k} \text{ है।}$$

उदाहरण-7. बिन्दु P(2, 3, 0) एवं Q(–1, –2, –4) को मिलाने वाला एवं P से Q की तरफ दिष्ट सदिश ज्ञात कीजिए।

हल: क्योंकि सदिश P से Q की तरफ दिष्ट है, स्पष्टतः P प्रारंभिक बिन्दु है और Q अंतिम बिन्दु है,

इसलिए P और Q को मिलाने वाला अभीष्ट सदिश $\overrightarrow{PQ}$, निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$$\overrightarrow{PQ} = Q \text{ का स्थिति सदिश } -P \text{ का स्थिति सदिश}$$

$$= -i - 2j - 4k - (2i + 3j)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

अर्थात् $$\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

उदाहरण-8. दो बिन्दु P और Q जिनके स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ और $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ हैं। एक ऐसे बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए, जो P एवं Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में (i) अंतः (ii) बाह्य विभाजित करता है।

हल: (i) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में अंतः विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश है:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)}{3} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश है:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)}{2-1} = 4\vec{b} - \vec{a}$$

उदाहरण-9. दर्शाइए कि बिन्दु $A\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right), B\left(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}\right), C\left(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}\right)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल: हम देखते हैं कि

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i} + (-4+3)\hat{j} + (-4+5)\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

और $$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i} + (-1+4)\hat{j} + (1+4)\hat{k} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

इसके अतिरिक्त ध्यान दीजिए कि

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6 + 35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

अतः दिया हुआ त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्नमाला 13.1

1. निम्नलिखित सदिशों के परिमाण का परिकलन कीजिए:

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k};\ \vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k};\ \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2. समान परिमाण वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।
3. समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।
4. यदि सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j}$ और $x\hat{i} + y\hat{j}$ समान हों तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।
5. एक सदिश का प्रारंभिक बिन्दु (2, 1) है और अंतिम बिन्दु (–5, 7) हैं। इस सदिश के अदिश एवं सदिश घटक ज्ञात कीजिए।
6. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k};\ \vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।
7. सदिश $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

8. सदिश $\overrightarrow{PQ}$, के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ बिन्दु P और Q क्रमशः (1, 2, 3) और (4, 5, 6) हैं।

9. दिए हुए सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के लिए सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

10. सदिश $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 8 इकाई है।

11. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ संरेख हैं।

12. बिन्दुओं $P(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ और $Q(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में (i) अंतः (ii) बाह्य, विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

13. दो बिन्दुओं P(2, 3, 4) और Q(4, 1, –2) को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

14. दर्शाइए कि बिन्दु A, B और C, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण करते हैं।

13.11 दो सदिशों का गुणनफल (Product of two vectors)

हम जानते हैं कि दो संख्याओं का गुणनफल एक संख्या होती है, दो आव्यूहों का गुणनफल एक आव्यूह होता है परन्तु दो सदिशों का गुणनफल आवश्यक नहीं की सदैव सदिश हो। सदिशों की स्थिति में हम उन्हें दो प्रकार से गुणा करते हैं।

(I) अदिश गुणनफल (Scalar product): इसमें दो सदिशों के गुणनफल से प्राप्त राशि अदिश होती है।

(II) सदिश गुणनफल (Vector product): इसमें दो सदिशों के गुणनफल से प्राप्त राशि सदिश होती है।

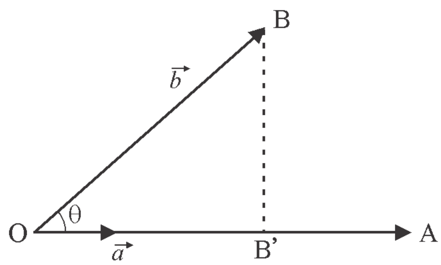
13.12 अदिश (बिन्दु) गुणनफल (Scalar or dot product)

जब दो सदिश राशियों का गुणनफल एक अदिश राशि हो तो उसे दो सदिशों का अदिश गुणन कहते हैं। अर्थात् दो सदिशों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के अदिश गुणनफल को $\vec{a} \cdot \vec{b}$ यथा $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य बिन्दु (·) लगाकर प्रदर्शित करते हैं, अतः इसे बिन्दु गुणनफल भी कहते हैं।

परिभाषाः यदि दो सदिशों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य कोण θ हो तो उनका अदिश गुणनफल $\vec{a} \cdot \vec{b}$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है।

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ab\cos\theta$$

($|\vec{a}| = a$ एवं $|\vec{b}| = b$ क्रमशः $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के परिमाण है।)



आकृति 13.15

टिप्पणीः जब दोनों सदिश, इकाई सदिश हों तो

$$\hat{a}.\hat{b} = (1)(1)\cos\theta = \cos\theta$$

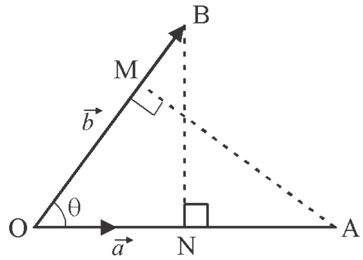
13.13 अदिश गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical interpretation of scalar product)

मानाकि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ दो सदिश हैं जिनके मध्य कोण θ है। परिभाषानुसार उनका अदिश गुणनफल

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos\theta$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad (1)$$

अब A एवं B बिन्दुओं से OB एवं OA पर क्रमशः AM तथा BN लम्ब डालें। तब ΔOMA तथा ΔONB से



आकृति 13.16

$OM = OA\cos\theta = \overrightarrow{OA}$ का $\overrightarrow{OB}$ की दिशा में प्रक्षेप,

$ON = OB\cos\theta = \overrightarrow{OB}$ का $\overrightarrow{OA}$ की दिशा में प्रक्षेप,

समीकरण (1) से, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta) = |\vec{a}|(ON)$

$= (\vec{a}$ का परिमाण) ($\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप) (2)

इसी प्रकार समीकरण (1) से

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta) = |\vec{b}|(OM)$

$= (\vec{b}$ का परिमाण) ($\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप) (3)

अतः दो सदिशों का अदिश गुणनफल उन दो संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है, जिनमें से प्रथम संख्या किसी एक सदिश का मापांक तथा द्वितीय संख्या, द्वितीय सदिश का प्रथम सदिश की दिशा में प्रक्षेप है।

टिप्पणीः समीकरण (2) से, $\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{b} = \hat{a}\cdot\vec{b}$

तथा समीकरण (3) से, $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}\cdot\hat{b}$

13.14 अदिश गुणन के कुछ महत्वपूर्ण निगमन (Some important deductions from scalar product of vectros) :

माना दो सदिश राशियों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य का कोण θ है तथा इनके परिमाण क्रमशः a एवं b है। परिभाषा के अनुसार

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \qquad (1)$$

अब यहाँ हम कुछ विशेष स्थितियों में इस परिणाम की व्याख्या करेंगे।

(i) जब सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समदिश समान्तर होंः इस स्थिति में सदिशों के मध्य का कोण $\theta = 0^\circ$ होगा। अतः समीकरण (1) से

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0^\circ = |\vec{a}||\vec{b}| = ab$$

अर्थात् इस स्थिति में सदिशों का अदिश गुणन उनके परिमाणों के गुणनफल के बराबर होता है।

(ii) जब सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ समान सदिश होंः इस स्थिति में सदिशों के मध्य का कोण $\theta = 0^\circ$ होगा। अतः समीकरण (1) से

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}||\vec{a}| = aa = a^2$$

अर्थात् किसी सदिश का वर्ग उसके मापांक के वर्ग के बराबर होता है।

(iii) जब सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ विपरित समान्तर होंः इस स्थिति में सदिशों के मध्य का कोण $\theta = 180^\circ$ होगा। अतः समीकरण (1) से

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^\circ = ab(-1) = -ab$$

अर्थात् दो विपरीत समान्तर सदिशों का अदिश गुणनफल उनके परिमाणों के गुणनफल के बराबर एवं ऋण चिन्ह् का होता है।

(iv) जब सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत् हों : इस स्थिति में सदिशों के मध्य का कोण $\theta = \pi/2$ होगा। अतः समीकरण (1) से

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2} = |\vec{a}||\vec{b}|0 = 0$$

अर्थात् दो परस्पर लम्बवत् सदिशों का अदिश गुणनफल सदैव शून्य होता है। अतः यदि सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

विलोमतः यदि दो अशून्य सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का अदिश गुणनफल शून्य हों, तो सदिश परस्पर लम्बवत् होंगे।

माना $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\Rightarrow \quad |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \qquad \left[\because |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0\right]$

$\Rightarrow \quad \theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$

अतः $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$

टिप्पणी: मूल बिन्दु O से तीन परस्पर लम्बवत् दिशाओं OX, OY तथा OZ में इकाई सदिश क्रमशः $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ है। स्पष्टतः इनमें से प्रत्येक दो इकाई सदिशों के मध्य का कोण $\pi/2$ है। अतः उपर्युक्त परिभाषा एवं निगमनों की सहायता से

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0$$

तथा
$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

उपर्युक्त परिणामों को निम्न तालिका द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है।

$\cdot$	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

13.15 अदिश गुणन के गुणधर्म (Properties of scalar product)

(i) क्रमविनिमेयता (Commutativity): सदिशों का अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय होता है।

प्रमाण: यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ कोई दो अशून्य सदिश हो तथा इनके मध्य कोण θ है, तो अदिश गुणन की परिभाषा से

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta$$
$$=ba\cos\theta \qquad (\because ab=ba, \text{ संख्याओं का गुणन क्रमविनिमेय होता है।})$$
$$=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

टिप्पणी: यदि कोई एक सदिश शून्य सदिश है तो यह गुणधर्म स्वतः स्पष्ट हो जाता है।

(ii) साहचर्यता (Associativity): यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ कोई दो सदिश हों तथा m कोई अदिश राशि हो, तो

$$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(iii) बंटनता (Distributivity): यदि $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हों तो

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

इसी प्रकार
$$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}$$

13.16 घटकों के पदो में दो सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar product of two vectors in terms of the components)

माना कि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ और $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, दो सदिश राशियाँ हैं, तो

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\right)\cdot\left(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}\right)$$
$$=a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})$$
$$+a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k}) \quad \text{(बीजीय गुणधर्म (ii) एवं (iii) से)}$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \quad \text{(अनुच्छेद 13.14 की टिप्पणी से)}$$

अतः $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

टिप्पणी:
$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\right)\cdot\left(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\right)$$
$$=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2=a^2$$

अर्थात्, $(\vec{a})^2=a^2$

13.17 दो सदिशों के मध्य कोण (Angle between two vectors):

माना कि दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य कोण θ है। अतः सदिशों के अदिश गुणन की परिभाषा से,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\theta$$

या $$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \left(\frac{\vec{a}}{a}\right)\cdot\left(\frac{\vec{b}}{b}\right) = \hat{a}\cdot\hat{b}$$, जहाँ $\hat{a}, \hat{b}$ क्रमशः $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ की दिशा में इकाई सदिश हैं।

पुनः यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ हों, तो

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$ (अनुच्छेद 13.16 से)

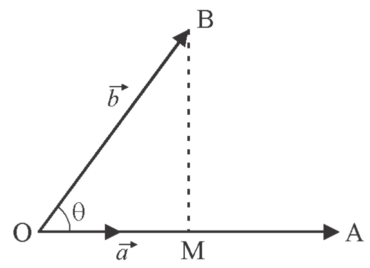
अतः $$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

टिप्पणी: सदिशों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के परस्पर लम्बवत होने पर $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

13.18 किसी सदिश $\vec{b}$ के सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश एवं इसके लम्बवत् दिशा में घटक (Components of any vector $\vec{b}$ along and perpendicular to a vector $\vec{a}$)

माना कि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ तथा $BM \perp OA$.

अतः ΔOBM में त्रिभुज नियम से, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}$, जहाँ $\overrightarrow{OM}$ एवं $\overrightarrow{MB}$ सदिश $\vec{b}$ के सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश तथा इसके लम्बवत् घटक हैं।



आकृति 13.17

अब $$\overrightarrow{OM} = (OM)\hat{a} = (b\cos\theta)\hat{a}$$

$$= b\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b}\right)\hat{a}$$ (अनुच्छेद 13.17 से)

$$= \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a}\right)\hat{a} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\right)\vec{a}$$ $\left[\because\ \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}\right]$

तथा $$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

$$= \vec{b} - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\right)\vec{a}$$

अतः सदिश $\vec{b}$ के घटक, सदिश $\vec{a}$ की दिशा में तथा सदिश $\vec{a}$ के लम्बवत् दिशा में क्रमशः $\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\right)\vec{a}$ तथा $\vec{b} - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\right)\vec{a}$ होंगे।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण-10. यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ हो तो $\vec{a}\cdot\vec{b}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})\cdot(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$= (1)(3) + (2)(2) + (3)(1) = 3 + 4 + 3 = 10$$

अतः $\vec{a}\cdot\vec{b}$ का मान 10 है।

उदाहरण-11. λ के किस मान के लिये सदिश $2\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$ और $-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् है।

हल: दिये गये सदिश लम्बवत् होंगे यदि इनका अदिश गुणनफल शून्य हो, अर्थात्

$$(2\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k})\cdot(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=0$$

या $$(2)(-1)+(\lambda)(1)+(5)(1)=0$$

या $$2+\lambda+5=0$$

या $$\lambda=-3$$

अतः $\lambda=-3$ के लिये दिये गये सदिश परस्पर लम्बवत् होंगे।

उदाहरण-12. सदिश $3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य कोण θ हो तो

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\frac{(3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{9+1+9}\sqrt{4+4+1}}$$

$$=\frac{(3)(2)+(1)(2)+(3)(-1)}{\sqrt{19}\sqrt{9}}=\frac{5}{3\sqrt{19}}$$

अतः दिये गये सदिशों के मध्य का कोण $\cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{19}}\right)$ है।

उदाहरण-13. प्रदर्शित कीजिए कि–

(i) $(\vec{a}+\vec{b})=a^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2$

तथा (ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=a^2-b^2$

हल: (i) $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=a^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2 \qquad [\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}]$$

$$=a^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2$$

(ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$$=a^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-b^2$$

$$=a^2-b^2 \qquad [\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}]$$

उदाहरण-14. यदि दो इकाई सदिशों $\hat{a}$ और $\hat{b}$ के मध्य का कोण θ हो, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\sin(\theta/2)=\frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$$

हल: $$|\hat{a}-\hat{b}|^2=(\hat{a}-\hat{b})\cdot(\hat{a}-\hat{b})$$

$$=\hat{a}.\hat{a}-\hat{a}.\hat{b}-\hat{b}.\hat{a}+\hat{b}\hat{b}$$

$$=|\hat{a}|^2-2\hat{a}.\hat{b}+|\hat{b}|^2 \qquad \left[\because \hat{a}.\hat{b}=\hat{b}.\hat{a}\right]$$

$$= 1 - 2\hat{a}\cdot\hat{b} + 1 \qquad \left[\because |\hat{a}| = 1 = |\hat{b}|\right]$$

$$= 2 - 2(1)(1)\cos\theta = 2(1-\cos\theta)$$

$$= 2\cdot\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ $$|\hat{a}-\hat{b}| = 2\sin\frac{\theta}{2} \text{ या } \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण-15. (i) यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समान परिमाण के परस्पर लम्ब सदिश हों, तो सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ के साथ बराबर कोण बनाता है।

(ii) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ क्रमशः 3, 4, 5 परिमाण के सदिश हैं। यदि प्रत्येक सदिश अन्य दो सदिशों के योग पर लम्ब हों, तो सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल: (i) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ परस्पर लम्ब है अतः $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0$

पुनः सदिशों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के परिमाण बराबर है अतः $a = b = c$

तथा $$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}$$

$$= a^2+b^2+c^2 = 3a^2 \qquad \left[\because a=b=c \text{ तथा } \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \text{ इत्यादि}\right]$$

$\Rightarrow$ $$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{3}a$$

$\because$ $$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a} = a^2$$

माना $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ एवं $\vec{a}$ के मध्य कोण θ_1 है।

अतः $$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} = |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\,|\vec{a}|\cos\theta_1$$

$\Rightarrow$ $$a^2 = (\sqrt{3}a)(a)\cos\theta_1$$

$\Rightarrow$ $$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ $$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

इसी प्रकार, यदि सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के साथ क्रमशः θ_2 तथा θ_3 कोण बनाता है, तो सिद्ध किया जा सकता है कि $\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ तथा $\theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

अर्थात् सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ एवं $\vec{c}$ के साथ बराबर कोण बनाता है।

(ii) $$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=0,\; \vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=0 \text{ तथा } \vec{c}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$$

तीनों को जोड़ने पर, $2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=0$

तथा $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 = 9,\ b^2 = 16,\ c^2 = 25$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = 9+16+25+0 = 50$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ इकाई।}$$

प्रश्नमाला 13.2

1. यदि दो सदिशों के परिमाण 4 और 5 इकाई हों, तो उनका अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए जबकि उनके मध्य का कोण हों
   (i) 60° (ii) 90° (iii) 30°
2. $\vec{a}.\vec{b}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ क्रमशः है
   (i) $2\hat{i}+5\hat{j};\ 3\hat{i}-2\hat{j}$ (ii) $4\hat{i}+3\hat{k};\ \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ (iii) $5\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k};\ 2\hat{i}-3\hat{j}$
3. सिद्ध कीजिए कि $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \le |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2$
4. यदि दो बिन्दुओं P एवं Q के निर्देशांक क्रमशः $(3, 4)$ एवं $(12, 9)$ हो, तो $\angle POQ$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ O मूल बिन्दु है।
5. λ के किस मान के लिए सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत् है।
   (i) $\vec{a} = 2\hat{i}+\lambda\hat{j}+\hat{k};\quad \vec{b} = 4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ (ii) $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k};\quad \vec{b} = 3\hat{i}+2\hat{j}-\lambda\hat{k}$
6. सदिश $4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ का सदिश $3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।
7. यदि $\vec{a} = 2\hat{i}-16\hat{j}+5\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ हो, तो एक सदिश $\vec{c}$ ज्ञात कीजिए कि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं को निरूपित करें।
8. यदि $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ परस्पर लम्ब सदिश है।
9. यदि बिन्दुओं A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमशः $(3, 2, 4), (4, 5, -1), (6, 3, 2)$ तथा $(2, 1, 0)$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि रेखाएं AB तथा CD परस्पर लम्ब है।
10. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\vec{a} = (\vec{a}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{a}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{a}\cdot\hat{k})\hat{k}$
11. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए की समान्तर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

13.19 दो सदिशों का सदिश या वज्र गुणन (Vector or cross product of two vectors)

परिभाषाः यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिशों के मध्य का कोण $\theta\left(0 \le \theta \le \pi\right)$ हो, तो इनका सदिश या वज्र गुणनफल एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$ के बराबर है और जिसकी दिशा $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लम्बवत् इस प्रकार है कि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा यह सदिश एक दक्षिण हस्त पेंच के तंत्र के अनुरूप हों।

सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के सदिश गुणनफल को प्रतिकात्मक रूप में $\vec{a}\times\vec{b}$ से व्यक्त करते हैं।

अतः $$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}, \tag{1}$$

जहाँ $\hat{n}, \vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लम्बवत् इकाई सदिश है तथा $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\hat{n}$ दक्षिण हस्त तंत्र का निर्माण करते है। अतः परिभाषा से

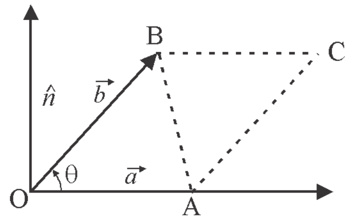
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \tag{2}$$

सूत्र (1) से, $$\hat{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

अतः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ की तल के लम्बवत् इकाई सदिश $= \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ (3)

क्योंकि इस प्रकार दो सदिशों का गुणनफल, एक सदिश प्राप्त होता है अतः इसे सदिश गुणन कहते हैं। पुनः इसको $\vec{a}\times\vec{b}$ से अर्थात् $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य वज्र का चिह्न ('$\times$') लगाकर प्रदर्शित करते हैं अतः इसे वज्र गुणन भी कहते हैं।

13.20 सदिश गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical interpretation of vector product)



आकृति 13.18

माना कि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ कोई दो असमान्तर तथा अशून्य सदिश हैं, जिनके मध्य का कोण θ है। $\hat{n}$ इन दोनों सदिशों के लम्बवत् $\vec{a}$ से $\vec{b}$ के घूर्णन की दिशा में इकाई सदिश है।

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

$$= (OA)(OB)\sin\theta \qquad (1)$$

OA एवं OB को आसन्न भुजाएं मानकर समान्तर चतुर्भुज $OACB$ पूरा करने पर, समान्तर चतुर्भुज $OACB$ का क्षेत्रफल

$$= 2\left(\Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल }\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta\right) = OA\cdot OB\sin\theta \qquad (2)$$

(1) और (2) से स्पष्ट है कि सदिश गुणनफल $\vec{a}\times\vec{b}$ का मापांक $=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

= उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी आसन्न भुजाएं सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ से निरूपित होती हैं। इस सदिश गुणनफल को उस समान्तर चतुर्भुज का सदिश क्षेत्रफल कहते है।

13.21 सदिश गुणन से कुछ महत्वपूर्ण निगमन (Some important deductions from vector product)

(i) दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल सदैव शून्य सदिश होता है।

प्रमाण: यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ दो समान्तर सदिश हैं तो उनके मध्य का कोण $\theta = 0^\circ$ या $\theta = \pi^\circ$ होगा। अतः दोनों ही स्थिति में $\sin\theta$ का मान शून्य होगा। अतः

$$\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta\hat{n} = (0)\hat{n} = \vec{O} \text{ (शून्य सदिश)}$$

विलोम: यदि दो अशून्य सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य सदिश हो तो, वे समान्तर सदिश होते है, क्योंकि

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{O}, \quad \Rightarrow \quad ab\sin\theta\hat{n} = \vec{O} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 0 \qquad [\because a\neq 0, b\neq 0]$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 0 \text{ या } \theta = \pi$$

अर्थात् $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ समान्तर सदिश है।

टिप्पणी: (i) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{O}$, (ii) $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{O}$

(ii) दो लम्बवत् सदिशों के सदिश गुणनफल का परिमाण उन सदिशों के परिमाणों के गुणनफल के तुल्य होता है।

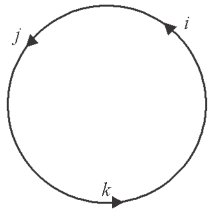
प्रमाण: यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ दो लम्बवत् सदिश हों, तो $\theta = 90^\circ$ होगा।

अतः $$\vec{a}\times\vec{b} = \left(ab\sin 90^\circ\right)\hat{n}$$

$$= (ab)\hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab$$

अर्थात् सदिश $\vec{a}\times\vec{b}$ का परिमाण $= (\vec{a}$ का परिमाण$)$ $(\vec{b}$ का परिमाण$)$, यहाँ $\hat{n}$, सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के तल के लम्बवत् इकाई सदिश है तथा ये दक्षिण हस्त तंत्र के नियम का पालन करते है।



आकृति 13.19

विशेष अवस्था: इकाई सदिशों का सदिश गुणन $\hat{i}\times\hat{j} = (1)(1)\sin 90^\circ \hat{k} = \hat{k}$

इसी प्रकार, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$ तथा $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

पुनः $\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$ (अर्थात् $\hat{i}\times\hat{j}$ के विपरित)

इसी प्रकार $\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$ तथा $\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

इसे सामने के आकृति 13.19 के द्वारा भी समझा जा सकता है। यदि इकाई सदिशों के गुणन में घूर्णन घड़ी की दिशा के विपरीत अर्थात् वामावर्त है तो परिणामी इकाई सदिश धनात्मक होगा तथा यदि घूर्णन दक्षिणावर्त्त है तो परिणामी इकाईसदिश ऋणात्मक होगा।

13.22 सदिश गुणन के बीजीय गुणधर्म (Algebraic properties of vector product)

(i) क्रमविनिमेयता (Commutativity): सदिश गुणनफल क्रमविनिमेय नहीं होता है, अर्थात् किन्ही दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए

$$\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$$

(ii) साहचर्यता (Associativity): किसी अदिश राशि के प्रति, सदिश गुणनफल साहचर्य होता है, अर्थात् यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ कोई दो सदिश हैं तथा m कोई एक अदिश राशि हो, तब

$$m(\vec{a}\times\vec{b}) = (m\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(m\vec{b})$$

(iii) बंटनता (Distributivity): सदिश गुणनफल सदिश योग पर बंटन नियम का पालन करता है, अर्थात् यदि $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ तीन सदिश हों, तो

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

13.23 घटकों के पदों में दो सदिशों का सदिश गुणन (Vector product of two vectors in terms of components)

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ दो सदिश हों, तो

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k}) + a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})$$

$$+a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j}) + a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k}) + a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\vec{0}) + a_1b_2(\hat{k}) + a_1b_3(-\hat{j}) + a_2b_1(-\hat{k}) + a_2b_2(\vec{0}) + a_2b_3(\hat{i}) + a_3b_1(\hat{j}) + a_3b_2(-\hat{i}) + a_3b_3(\vec{0})$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

अतः $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

जो कि $\vec{a}\times\vec{b}$ का सारणिक रूप है।

13.24 दो सदिशों के मध्य कोण (Angle between two vectors)

यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य θ कोण हो तो

$$\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta\hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}\times\vec{b}| = |ab\sin\theta||\hat{n}| = ab|\sin\theta||\hat{n}|$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|^2}{(a^2)(b^2)}$$

$$= \frac{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}$$

अतः θ का मान उपर्युक्त सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है।

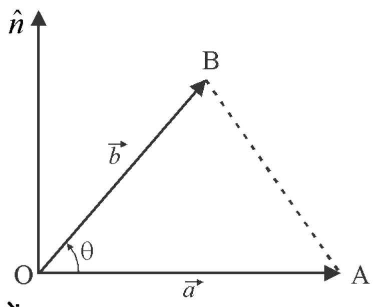
13.25 त्रिभुज का सदिश क्षेत्रफल (Vector area of a triangle)

(i) जब त्रिभुज की दो आसन्न भुजाओं को निरूपित करने वाले सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ दिये गये हों

माना कि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ हो, तो $\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta\hat{n}$

अतः त्रिभुज (ΔOAB) का सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}ab\sin\theta\hat{n} = \frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})$,

यहाँ $\hat{n}$ सदिश क्षेत्रफल की दिशा है।



आकृति 13.20

टिप्पणी: ΔOBA का सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(\vec{b}\times\vec{a}) = -\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})$

(ii) जब त्रिभुज के शीर्षों A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ दिये गये हों :

ΔABC की आसन्न भुजाएं क्रमशः AB एवं AC हैं तथा

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a} \text{ एवं } \overrightarrow{AC} = \vec{c}-\vec{a}$$

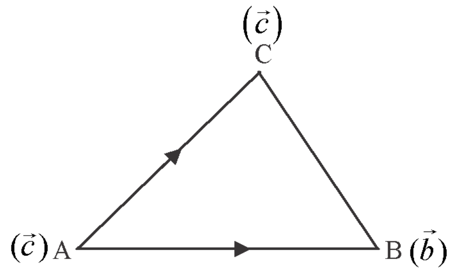
अतः ΔABC का सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

$$= \frac{1}{2}\left[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{a}\right] \qquad \left[\because \vec{a}\times\vec{a} = \vec{O}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right]$$



आकृति 13.21

13.26 तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबन्ध (Condition of collinearity of three points)

यदि बिन्दु A, B एवं C संरेख हैं, तो तीनों बिन्दु एक ही रेखा पर होगें। अतः इन बिन्दुओं से निर्मित त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल शून्य होगा। माना कि इनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ हैं। अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a} = 0$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-16. $(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})\times(3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k})$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल: $$(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})\times(3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 4 & -4\end{vmatrix}$$

$$=(12-16)\hat{i}+(12+8)\hat{j}+(8+9)\hat{k}=-4\hat{i}+20\hat{j}+17\hat{k}$$

अतः अभीष्ट मान $-4\hat{i}+20\hat{j}+17\hat{k}$ है।

उदाहरण-17. यदि $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{b}=2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ हों तो, $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत् इकाई सदिश $\hat{n}$ ज्ञात कीजिए।

हल: सदिश गुणन की परिभाषा से,

$$\hat{n}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

$$=\frac{(3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})\times(2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})}{\left|(3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})\times(2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})\right|}$$ होगा।

पुनः $$(3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})\times(2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 2\end{vmatrix}$$

$$=(2+4)\hat{i}+(4-6)\hat{j}+(-6-2)\hat{k}$$

$$=6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}$$

अतः $$\hat{n}=\frac{6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}}{\left|6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}\right|}$$

$$=\frac{6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}}{\sqrt{36+4+64}}=\frac{6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}}{\sqrt{104}}$$

$$=\frac{3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}}{\sqrt{26}}$$, जो कि अभीष्ट हल है।

अतः अभीष्ट लम्बवत् इकाई सदिश $\frac{1}{\sqrt{26}}(3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k})$ है।

उदाहरण-18. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ तथा $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}-\vec{d}$ एवं $\vec{b}-\vec{c}$ समान्तर है।

हल: $$(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c})-(\vec{d}\times\vec{b}-\vec{d}\times\vec{c})$$

$$=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}+(-\vec{c})\times\vec{d}$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{d}-\vec{a}\times\vec{c})$$

$$=\vec{O}+\vec{O}=\vec{O}$$

अतः $\vec{a}-\vec{d}$ एवं $\vec{b}-\vec{c}$ समान्तर सदिश हैं।

उदाहरण-19. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{b}$ तो सिद्ध कीजिए $\vec{a}-\vec{c}=\lambda\vec{b}$, जहाँ λ एक अदिश है।

हल: $$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{b}$$

$\Rightarrow$ $$\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{b}=0$$

$\Rightarrow$ $$(\vec{a}-\vec{c})\times\vec{b}=0$$

$\therefore$ $\vec{a}-\vec{c}$ एवं $\vec{b}$ समान्तर हैं। अतः $\vec{a}-\vec{c}=\lambda\vec{b}$, जहाँ λ अदिश राशि है।

टिप्पणी: (i) यदि $\vec{a}-\vec{c}$ एवं $\vec{b}$ समदिश हैं, तो λ धनात्मक होगा।

(ii) यदि $\vec{a}-\vec{c}$ एवं $\vec{b}$ विपरीत हैं, तो λ ऋणात्मक होगा।

उदाहरण-20. यदि $A(1, 2, 2), B(2, -1, 1)$ तथा $C(-1, -2, 3)$ समतल में कोई तीन बिन्दु हों, तो समतल ABC के अभिलम्ब की दिशा में एक सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई हो।

हल: $\overrightarrow{AB}=$ (B का स्थिति सदिश) – (A का स्थिति सदिश)

$$=\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)-\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

$$=\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$$

तथा $\overrightarrow{AC}=$ (C का स्थिति सदिश) – (A का स्थिति सदिश)

$$=\left(-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}\right)-\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

$$=-2\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$$

$\because$ $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{AC}$ दोनों, समतल ABC में हैं। अतः सदिश $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ समतल के अभिलम्ब के अनुदिश होगा।

अतः $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}\right)\times\left(-2\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -3 & -1\\ -2 & -4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-7\hat{i}+\hat{j}-10\hat{k}$$

समतल ABC के अभिलम्ब के अनुदिश इकाई सदिश

$$\hat{n}=\frac{-7\hat{i}+\hat{j}-10\hat{k}}{\sqrt{49+1+100}}=\frac{-1}{\sqrt{150}}\left(7\hat{i}-\hat{j}+10\hat{k}\right)$$

अतः अभिलम्ब की दिशा में 5 इकाई परिमाण का सदिश

$$=5\left[\frac{-1}{\sqrt{150}}\left(7\hat{i}-\hat{j}+10\hat{k}\right)\right]=\frac{-1}{\sqrt{6}}\left(7\hat{i}-\hat{j}+10\hat{k}\right)$$

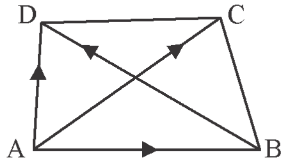
उदाहरण-21. सिद्ध कीजिए कि चतुर्भुज $ABCD$ का सदिश क्षेत्रफल $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}$ द्वारा व्यक्त होता है, जहाँ AC तथा BD इसके विकर्ण है।

हल: चतुर्भुज $ABCD$ का सदिश क्षेत्रफल $= \Delta ACD$ का सदिश क्षेत्रफल $+\Delta ABC$ का सदिश क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}\times\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\right] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}$$



आकृति 13.22

अतः चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right|$ इतिसिद्धम्।

प्रश्नमाला 13.3

1. सदिशों $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ तथा $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ का सदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।
2. सदिशों $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ तथा $2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ के लम्ब इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।
3. सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} \\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b} \end{vmatrix}$
4. सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$
5. यदि $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ इस प्रकार के इकाई सदिश हैं कि $\hat{a}\cdot\hat{b}=\hat{a}\cdot\hat{c}=0$ तथा $\hat{b}$ और $\hat{c}$ के मध्य का कोण $\pi/6$ है, तब सिद्ध कीजिए कि $\hat{a}=\pm2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$
6. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $\left|\vec{a}\right|=10, \left|\vec{b}\right|=2$ तथा $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$
7. सदिशों $4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के लम्बवत् 9 इकाई परिमाण वाला सदिश ज्ञात कीजिए।
8. प्रदर्शित कीजिए कि $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ इसकी ज्यामितीय व्याख्या भी कीजिए।
9. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\left|\vec{a}\times\hat{i}\right|^2+\left|\vec{a}\times\hat{j}\right|^2+\left|\vec{a}\times\hat{k}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2$
10. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएं सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ से निरूपित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13.27 तीन सदिशों का गुणनफल (Product of three vectors)

तीन सदिशों के गुणन की संभावित स्थितियां निम्नलिखित है:

(i) $\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ (ii) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ (iii) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$

(iv) $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (v) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (vi) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

इन संभावित स्थितियों का परिक्षण करने पर निम्नलिखित तथ्य स्पष्ट होते हैं।

(i) $\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ **अर्थयुक्त है,** क्योंकि $\vec{b}\cdot\vec{c}$ अदिश राशि है। अतः यहाँ परिणाम $\vec{a}$ की दिशा में एक सदिश है जिसका परिमाण $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ गुणा है। परन्तु यह स्थिति तीन सदिशों का गुणन नहीं कहलाती है।

(ii) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ **अर्थहीन है,** क्योंकि $\vec{b}\cdot\vec{c}$ अदिश राशि है जबकि $\vec{a}$ के साथ अदिश गुणन के लिए एक सदिश राशि की आवश्यकता होती है।

(iii) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\,.\,\vec{c}\right)$ **अर्थहीन हैं।** क्योंकि $\vec{b}\cdot\vec{c}$ अदिश राशि है जबकि $\vec{a}$ के साथ सदिश गुणन के लिए एक सदिश राशि की आवश्कता होती है।

(iv) $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ **अर्थहीन है।** क्योंकि $\vec{b}\times\vec{c}$ सदिश राशि है तथा $\vec{a}$ भी एक सदिश है एवं क्योंकि इन दो सदिश राशियों के मध्य न तो $(\cdot)$ एवं न ही $(\times)$ चिन्ह है। अतः परिणामी के बारे में कुछ नहीं कहा जा सकता है।

(v) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ **अर्थयुक्त है।** क्योंकि $\vec{b}\times\vec{c}$ सदिश राशि है तथा $\vec{a}$ भी एक सदिश राशि है। इन दो सदिशों का अदिश गुणनफल संभव होगा तथा परिणामी एक अदिश राशि होगी। अतः इस प्रकार के गुणन को अदिश त्रिक् गुणन (Scalar triple product) कहते है।

(vi) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ **अर्थयुक्त है।** क्योंकि $\vec{b}\times\vec{c}$ सदिश राशि है तथा $\vec{a}$ भी एक सदिश राशि है। इन दो सदिशों का सदिश गुणनफल संभव होगा तथा परिणामी एक सदिश राशि होगी। अतः इस प्रकार के गुणन को सदिश त्रिक् गुणन (Vector triple product) कहते है।

उपर्युक्त विश्लेषण से यह स्पष्ट होता है कि तीन सदिशों के दो ही तरह के गुणनफल अर्थयुक्त है जिनका अध्ययन यहाँ किया जाएगा।

13.28 अदिश त्रिक् गुणनफल (Scalar triple product)

परिभाषा: किन्ही दो सदिशों के सदिश गुणनफल का तीसरे सदिश के साथ अदिश गुणनफल को तीन सदिशों का अदिश त्रिक् गुणनफल कहते हैं।

क्योंकि इस प्रकार के गुणनफल में दोनो ही तरह के गुणनफल (अदिश एवं सदिश) ज्ञात करते हैं अतः कभी–कभी इसे मिश्र गुणनफल भी कहते है।

यदि $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ कोई तीन सदिश हो तो $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ को सदिश $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ का अदिश त्रिक् गुणनफल कहते है तथा इसे $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ से निरूपित करते हैं। अतः संकेतानुसार $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ तथा $[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ ।

टिप्पणी: बॉक्स में लिखने के कारण इसे बॉक्स गुणा भी कहते हैं, ध्यान रहे कि बॉक्स में लिखते समय मध्य में कोमा चिह्न का प्रयोग न करें।

13.29 अदिश त्रिक् गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical interpretation of scalar triple product)

माना $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ तथा $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ है। आकृतिनुसार तीन संगामी कोरो $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ वाली समान्तर षट्फलकी का निर्माण किया।

अब, समान्तर चतुर्भुज OBDC का सदिश क्षेत्रफल $=\vec{b}\times\vec{c}$ जिसकी दिशा OBDC के लम्बवत है।

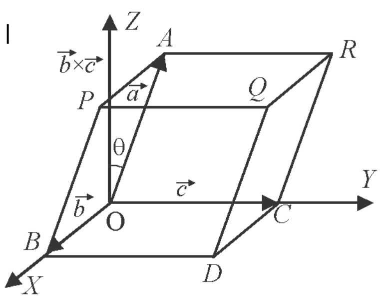
$\therefore\quad \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta,$ जहाँ θ सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}\times\vec{c}$ के बीच का कोण है।

$=|\vec{b}\times\vec{c}|\left(|a|\cos\theta\right)$

= (समान्तर चतुर्भुज OBDC का क्षेत्रफल) (समान्तर षट्फलक की ऊँचाई)

= (अर्थात् आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई)

$\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=$ समान्तर षट्फलक का आयतन जिसकी तीन संगामी कोरें सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ से निरूपित है



आकृति 13.23

अतः तीन सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ का अदिश त्रिक् गुणनफल उस समान्तर षट्फलकी के आयतन के बराबर होता है जिसकी तीनों आसन्न कोरें सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ से निरूपित होती है।

इसी प्रकार हम प्रदर्शित कर सकते हैं कि $\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$ समान्तर षट्फलक का आयतन जिसकी संगामी कोरें दिये गये सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ द्वारा निरूपित हैं। अतः

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$$

या $$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$

13.30 अदिश त्रिक् गुणनफल के गुणधर्म (Properties of scalar triple product)

(i) अदिश त्रिक् गुणन में बिन्दु तथा वज्र की स्थिति परस्पर बदली जा सकती है।

ज्यामितीय व्याख्या से

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \quad (1)$$

पुनः $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} \quad (2)$$

इसी प्रकार $$\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} \quad (3)$$

तथा $$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \quad (4)$$

समीकरण (1) तथा (4) से $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

अर्थात् $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

अतः चक्रिय क्रम अपरिवर्तित रखने पर बिन्दु तथा वज्र का चिह्न परस्पर परिवर्तित किया जा सकता है।

(ii) सदिशों के चक्रिय क्रम बदलने पर अदिश त्रिक् गुणन का चिह्न बदल जाता है।

$\because$ $$(\vec{b}\times\vec{c})=-(\vec{c}\times\vec{b})$$

$\therefore$ $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$$

अतः $$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=-[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]$$

इसी प्रकार अन्य भी लिखे जा सकते है। परिणाम में एक बार फिर सदिशों का क्रम बदलने पर पुनः वे प्रारम्भ वाले चक्रिय क्रम में आ जाते है तथा चिन्ह् भी पहले के समान हो जाता है।

(iii) अदिश त्रिक् गुणनफल में जब दो सदिश समान्तर हों, तब गुणनफल शून्य होता है।

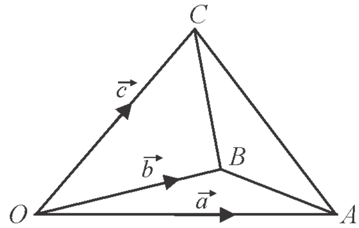
माना कि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन सदिश है जिनमें सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समान्तर है। अब चूंकि $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समान्तर है अतः $\vec{b}=\lambda\vec{c}$, जहाँ λ एक अचर राशि है।

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{c}\times\vec{c})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{0})=0 \qquad \because[\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}]$$

टिप्पणी: यदि दो सदिश समान हो तो भी परिणाम शून्य ही होगा।

13.31 चतुष्फलक का आयतन (Volume of a tetrahedron)

माना कि चतुष्फलक OABC में O मूल बिन्दु तथा $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ एवं $C(\vec{c})$ अन्य शीर्ष है।



आकृति 13.24

चतुष्फलक का आयतन $(V)=\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) $\times$ (ऊँचाई)

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})\right]\cdot\vec{c}=\frac{1}{6}[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$$

अतः चतुष्फलक का आयतन $=(1/6)$ (समान्तर षट्फलकी का आयतन, जिसकी तीन संगामी कोरे $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ है)

टिप्पणी: यदि चतुष्फलक के चारों शीर्ष $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ तथा $D(\vec{d})$ हो तो चतुष्फलक का आयतन

$$=\frac{1}{6}[\vec{a}-\vec{b} \quad \vec{a}-\vec{c} \quad \vec{a}-\vec{d}]$$

13.32 तीन असमान्तर और अशून्य सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के समतलीय होने का आवश्यक एवं प्रर्याप्त प्रतिबन्ध $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$ है। (Necessary and sufficient condition for the three non-parallel and non-zero vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ to be coplanar is that $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$)

आवश्यक प्रतिबन्ध: माना कि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन अशून्य, असमान्तर समतलीय सदिश है। अतः $\vec{b}\times\vec{c}$ समतल के लम्ब दिशा में एक सदिश होगा। पुनः $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

($\because \vec{a}$ समतल में है तथा $\vec{b}\times\vec{c}$ समतल के लम्ब सदिश है एवं दो लम्ब सदिशों का अदिश गुणन शून्य होता है।)

अर्थात् $\quad [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$

पर्याप्त प्रतिबन्ध: माना कि

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

$\Rightarrow \quad \vec{a}\perp(\vec{b}\times\vec{c})$, परन्तु $\vec{b}\times\vec{c}$, सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लम्बवत् होता है। अर्थात् सदिश $\vec{a}$ सदिश $\vec{b}$ एवं $\vec{c}$ के तल में स्थिति होना चाहिए। अतः सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-22. सिद्ध कीजिए कि $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}]+[\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}]=3.$

हल: $\quad [\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]=\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})=\hat{i}\cdot\hat{i}=1$

$\because \quad [\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]=[\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}]=[\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}]$

अतः $\quad [\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}]+[\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}]=1+1+1=3$

उदाहरण-23. यदि $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ हो, तो $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ तथा $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ का मान ज्ञात कीजिए। दर्शाइये कि $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

हल:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$ ($\because$ प्रथम एवं तृतीय स्तम्भ समान है।)

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$ ($\because$ प्रथम एवं तृतीय स्तम्भ समान है।)

अतः $\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

उदाहरण-24. सिद्ध कीजिए कि $\left[\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}\right]=2\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$

हल: चूंकि
$$\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right) \quad \text{(बंटन नियम से)}$$
$$=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) \quad \text{(बंटन नियम से)}$$
$$=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) \quad (1)$$
$$\therefore \quad \left[\vec{a}+\vec{b}\ \ \vec{b}+\vec{c}\ \ \vec{c}+\vec{a}\right]=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left\{\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)\right\}$$
$$=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left\{\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\right\} \quad \text{(समीकरण (1) से)}$$
$$=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) \quad \text{(बंटन निमय से)}$$
$$=\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\vec{b}.\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\vec{a}.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{b}.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$$
$$=\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]+0+0+0+0+\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right] \quad \text{($\because$ त्रिक् गुणन के गुणधर्म से)}$$
$$=2\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$$

उदाहरण-25. λ के किस मान के लिये सदिश $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$ समतलीय होगें।

हल: तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के समतलीय होने का प्रतिबन्ध $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]=0$ है।

अर्थात्
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & \lambda & 5 \end{vmatrix}=0 \quad \text{या} \quad \begin{vmatrix} 3 & \lambda & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$$

(चक्रिय क्रम में पंक्तिया बदलने पर सारणीक के मान में अन्तर नहीं आता)

अतः
$$3(3-2)+\lambda(1+6)+5(4+1)=0 \qquad \Rightarrow 3+7\lambda+25=0$$
$$\Rightarrow \qquad \lambda=-4$$

अतः $\lambda=-4$ के लिये तीनो सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ समतलीय होंगे।

उदाहरण-26. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $A(4,8,12), B(2,4,6), C(3,5,4), D(5,8,5)$ समतलीय है।

हल: यदि चारों बिन्दु समतलीय है, तो सदिश $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ भी समतलीय होंगे। पुनः समतलीयता के प्रतिबन्ध से $\left[\overrightarrow{BA}\ \ \overrightarrow{BC}\ \ \overrightarrow{BD}\right]=0$

अब
$$\overrightarrow{BA}=\left(4\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k}\right)-\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)=2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$$
$$\overrightarrow{BC}=\left(3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}\right)-\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$$
$$\overrightarrow{BD}=\left(5\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k}\right)-\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)=3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$$

अतः
$$\left[\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BD}\right]=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=2(7)+4(-5)+6(1)=0$$

अतः चारो बिन्दु समतलीय है।

उदाहरण-27. यदि चार बिन्दु $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ एवं $D(\vec{d})$ समतलीय हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}\right] + \left[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{d}\right] + \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}\right]$$

हल: चारों बिन्दु समतलीय है। अतः सदिश $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ एवं $\overrightarrow{AD}$ भी समतलीय होगें।

$$\Rightarrow \qquad \left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\ \left(\vec{c}-\vec{a}\right)\ \left(\vec{d}-\vec{a}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left\{\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{d}-\vec{a}\right)\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left\{\vec{c}\times\vec{d}-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{d}+\vec{a}\times\vec{a}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)-\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)-\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = 0$$

(शेष अदिश त्रिक् गुणनफल का मान शून्य होगा क्योंकि $\vec{a}$ दो बार आयेगा।)

अतः $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}\right] + \left[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{d}\right] + \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}\right]$

उदाहरण-28. उस समान्तर षट्फलकी का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी तीन संगामी कोरे $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ है।

हल: माना कि $\vec{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ है। षट्फलकी का आयतन $= \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(3)+3(-4)+4(-5) = 6-12-20 = -26 \text{ इकाई}$$

चूंकि आयतन सदैव धनात्मक होता है। अतः उत्तर 26 इकाई।

उदाहरण-29. एक चतुष्फलक के चारों शीर्ष $O(0, 0, 0), A(1, 2, 1), B(2, 1, 3)$ और $C(-1, 1, 2)$ है। चतुष्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $O(0, 0, 0)$ मूल बिन्दु है तथा शीर्षो के स्थिति सदिश $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{c} = -\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ है।

अतः चतुष्फलक का आयतन $= \dfrac{1}{6}\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{6}\left[1(-1)+2(-7)+1(3)\right] = -2 \text{ इकाई}$$

चूंकि आयतन सदैव धनात्मक होता है अतः उत्तर 2 इकाई।

प्रश्नमाला 13.4

1. सिद्ध कीजिए कि

(i) $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}]=0$ (ii) $[2\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}]+[\hat{k}\ \hat{j}\ 2\hat{i}]=-1$

2. यदि $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ हो, तो $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि सदिश $-2\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}, -2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ तथा $4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ समतलीय है।

4. λ के किस मान के लिये, निम्नलिखित सदिश समतलीय होंगे

(i) $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$

(ii) $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\lambda\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$

5. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित चारों बिन्दु समतलीय हैं।

(i) $A(-1,4,-3), B(3,2,-5), C(-3,8,-5), D(-3,2,1)$

(ii) $A(0,-1,0), B(2,1,-1), C(1,1,1), D(3,3,0)$

6. सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज की सदिश भुजाएं हैं।

7. उस समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी तीन संगामी कोरे निम्न लिखित सदिशों द्वारा निरूपित हैं:

(i) $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

(ii) $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{c}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

13.33 सदिश त्रिक् गुणनफल (Vector triple product)

परिभाषा: "किन्ही दो सदिशों के सदिश गुणनफल का तीसरे सदिश के साथ सदिश गुणनफल, तीनों सदिशों का सदिश त्रिक् गुणनफल कहलाता है।"

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिश है, तो इनके सदिश त्रिक् गुणनफल $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}), (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}, (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ इत्यादि होंगे।

ज्यामितीय व्याख्या : क्योंकि दो सदिशों का सदिश या वज्र गुणनफल उन दोनों सदिशों के तल के लम्बवत् एक सदिश होता है, अतः सदिश $\vec{b}\times\vec{c}$, सदिश $\vec{b}$ तथा सदिश $\vec{c}$ के तल के लम्बवत एक सदिश है।

अब $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, सदिश $\vec{a}$ तथा सदिश $(\vec{b}\times\vec{c})$ के लम्बवत् एक सदिश है अर्थात् यह, सदिश $\vec{b}$ तथा सदिश $\vec{c}$ के तल में स्थित एक सदिश है। अतः इसे $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के पदों में भी व्यक्त किया जा सकता है, अर्थात् $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$, जहाँ λ तथा μ अदिश राशियाँ है।

टिप्पणी: सदिश त्रिक् गुणनफल की उपर्युक्त परिभाषा एवं ज्यामितीय व्याख्या से स्पष्ट है कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, अर्थात् सदिश त्रिक् गुणनफल साहचर्य नहीं है।

13.34 सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के लिये सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

माना कि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}, \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$

अब $$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\right)\times\left\{\left(b_2c_3-b_3c_2\right)\hat{i}+\left(b_3c_1-b_1c_3\right)\hat{j}+\left(b_1c_2-b_2c_1\right)\hat{k}\right\}$$

$$=\sum\left\{a_2\left(b_1c_2-b_2c_1\right)-a_3\left(b_3c_1-b_1c_3\right)\right\}\hat{i}$$

$$=\sum\left\{b_1\left(a_2c_2+a_3c_3\right)-c_1\left(a_2b_2+a_3b_3\right)\right\}\hat{i}$$

$$=\sum\left\{\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)b_1-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)c_1\right\}\hat{i}$$ ($a_1b_1c_1$ जोड़ने एवं घटाने पर)

$$=\sum\left\{\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)b_1-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)c_1\right\}\hat{i}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

अतः $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

इसी प्रकार $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=-\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\left\{\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}-\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}\right\}=\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}-\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-30. यदि $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{c}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ हो, तो $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\left(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)\cdot\left(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$$

$$=(3)(2)+(2)(1)+(1)(-1)=7$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

$$=(3)(1)+(2)(-2)+(1)(2)=1$$

अतः $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

$$=7\left(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right)-1\left(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)=5\hat{i}-15\hat{j}+15\hat{k}$$

उदाहरण-31. सिद्ध कीजिए कि $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, यदि और केवल यदि $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{O}$

हल: माना कि $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

$\Rightarrow$ $\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

$\Rightarrow$ $-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}=-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

$\Rightarrow$ $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}-\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\vec{c}=\vec{O}$

अतः $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{O}$

उदाहरण-32. सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}), \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ तथा $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ समतलीय है।

हल: माना कि $\vec{P}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}), \vec{Q}=\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ तथा $\vec{R}=\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$, तो

$$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=\{(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\}+\{(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\}+\{(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}\}=\vec{O}$$

$\Rightarrow \quad \vec{P}=(-1)\vec{Q}+(-1)\vec{R}$

$\Rightarrow \quad \vec{P},\vec{Q}$ एवं $\vec{R}$ एक ही समतल में हैं।

$\Rightarrow \quad \vec{P},\vec{Q},\vec{R}$ समतलीय है

उदाहरण-33. सिद्ध कीजिए कि $\left[(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})\right]=\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]^2$

हल: $\left[(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})\right]=\{(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})\}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

$=\{\vec{d}\times(\vec{b}\times\vec{c})\}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}),\qquad$ (माना $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$)

$=\{(\vec{d}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{d}\cdot\vec{b})\vec{c}\}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

$=\{[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]\,\vec{b}-[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{b}]\,\vec{c}\}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

$\left[\because \vec{d}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]\right.$ तथा $\left.\vec{d}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{b}]=0\right]$

$=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]\{\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\}\quad\{\because[\vec{c}\;\vec{c}\;\vec{a}]=0\}$

$=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}][\vec{b}\;\vec{c}\;\vec{a}]=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]^2\qquad\left[\because[\vec{b}\;\vec{c}\;\vec{a}]=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]\right]$

प्रश्नमाला 13.5

1. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

 (i) $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$

 (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

2. सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ यदि

 (i) $\vec{a}=2\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}, \vec{b}=-3\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=-\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$

 (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}, \vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k}, \vec{c}=4\hat{i}-2\hat{j}+\sqrt{3}\hat{k}$

3. सूत्र $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ का सत्यापन कीजिए, जबकि

 (i) $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$

 (ii) $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$

4. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$$

5. सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$$

6. सिद्ध कीजिए कि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समतलीय है, यदि और केवल यदि $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$ समतलीय हैं।

7. सिद्ध कीजिए कि

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\vec{c}-[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{d}$$

8. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ एवं 2 हैं और $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$ है तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

9. सदिशों $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ और $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

10. सदिश $\hat{i}+\hat{j}$ पर सदिश $\hat{i}-\hat{j}$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

11. सदिश $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ का, सदिश $7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

12. $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot(2\vec{a}+7\vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि इनके परिमाण समान है और इन के बीच का कोण 60° है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

14. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$, के लिए $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=12$ हो तो $|\vec{x}|$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=3\hat{i}+3\hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a}+\lambda\vec{b},\vec{c}$ पर लंब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ तो $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B, C क्रमशः $(1,2,3)(-1,0,0)(0,1,2)$ हैं तो $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta$, अतः $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\,(\vec{a}\neq 0\neq\vec{b})$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$$

.	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

2. यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ तो $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

3. $\vec{a}\times\vec{b}=(ab\sin\theta)\hat{n}$

$\sin\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{ab}$ तथा $\hat{n}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

उपर्युक्त परिणामों को आकृति के अनुसार पढ़ने पर

$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k},\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i},\ \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$

$\hat{i}\times\hat{i}=\vec{O}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}$

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{O}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}\qquad(\vec{a}\neq\vec{O}\neq\vec{b})$

X	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	0	$\hat{k}$	$\hat{j}$
$\hat{j}$	$-\hat{k}$	0	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	0

4. $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ तो $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

5. समान्तर चतुर्भुज का सदिश क्षेत्रफल $=\vec{a}\times\vec{b}$, जहाँ $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाएं है।

6. ΔABC का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$, जहाँ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं।

7. तीन बिन्दुओं जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ है, के संरेख होने का प्रतिबन्ध $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{O}$

8. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, जिसके विकर्ण $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं $=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

9. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के अदिश त्रिक् गुणनफल $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ को $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ से व्यक्त करते है।

10. यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k},\ \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k},$

$\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$, तो $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

11. समान्तर षट्फलकी का आयतन $=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$, (जहाँ सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ इसकी संगामी कोरों को निरूपित करती है।)

12. चतुष्फलक का आयतन $=\frac{1}{6}[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$, जहाँ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ संगामी कोरे हैं।

13. तीन सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ का सदिश त्रिक् गुणनफल $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

14. सदिशों में सदिश गुणन की क्रिया साहचर्य के गुणधर्म का पालन नहीं करती है, अर्थात् $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 13.1

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{3}; |\vec{b}| = \sqrt{62}; |\vec{c}| = 1$ (2) कोई दो सदिश (3) कोई दो सदिश (4) $x = 2,\ y = 3$

(5) –7, 6 तथा $-7i, 6j$ (6) $-4\hat{j} - \hat{k}$ (7) $\dfrac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$ (8) $\dfrac{\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)}{\sqrt{3}}$

(9) $\dfrac{\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}}$ (10) $\dfrac{8(5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{30}}$ (11) $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k} = -2(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$

(12) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}$ (13) $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{2}{3}$ (14) $\dfrac{-\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}}{3}, -3\hat{i} + 3\hat{k}$ (15) (3, 2, 1)

प्रश्नमाला 13.2

(1) (i) 10 ; (ii) 0 ; (iii) $10\sqrt{3}$ (2) (i) –4 ; (ii) 7 ; (iii) 7 (4) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{72}{75}\right)$

(5) (i) 3 ; (ii) 3 (6) $\dfrac{2}{7}$ (7) $5\hat{i} - 15\hat{j} + 7\hat{k}$

प्रश्नमाला 13.3

(1) $4\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ (2) $\dfrac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}}$ (6) 16 (7) $-3\hat{i} + 6\hat{j} + 6\hat{k}$ (10) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

प्रश्नमाला 13.4

(2) –7 (5) (i) –4 ; (ii) 1 (8) (i) 30 ; (ii) 14

प्रश्नमाला 13.5

(1) (i) $-2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$; (ii) $8\hat{i} - 19\hat{j} - \hat{k}$

(8) $\dfrac{\pi}{4}$ (9) $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{7}\right)$ (10) 0 (11) $\dfrac{60}{\sqrt{114}}$ (12) $6|\vec{a}|^2 + 11\vec{a}\cdot\vec{b} - 35|\vec{b}|^2$

(13) $|\vec{a}|^2 = 1, |\vec{b}| = 1$ (14) $\sqrt{13}$ (15) 8 (16) $-\dfrac{3}{2}$ (17) $\cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{102}}\right)$