अध्याय 8

ज्यामितीय आकारों का अन्वेषण
(EXPLORING GEOMETRICAL FIGURES)

8.0 परिचय

दैनिक जीवन में विविध ज्यामितीय आकार हमारे सामने आते ही रहते हैं। हमारे जीवन की वस्तुएँ एवं क्रियाएँ प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से ज्यामितीय से संबंध रखती हैं। इन वस्तुओं एवं क्रियाओं में ज्यामितीय के लक्षण व संक्रियाएँ देखी जा सकती हैं।

निम्नलिखित आकृतियों को देखिए, क्या इनमें ज्यामितीय आकार और पैटर्न समाहित हैं। आपने इस प्रकार के अन्य आकार प्रकृति में देखे ही होंगे, इनमें कुछ समरूप होते हैं और कुछ में अन्य ज्यामितीय लक्षण होते हैं। यदि हम ध्यान दें तो देखेंगे कि हमारे फर्श अनेक ज्यामितीय आकार बिखरे पड़े हैं।

क्या आप इन चित्रों में कुछ समरूप आकार, अनुरूप आकार और सममित पैटर्न ढूँढ़ सकते हैं?

लिखेंग ₹

चित्र.8.1 (a)

चित्र. 8.1(b)

इस चित्र में खिड़कियों के आकार में सर्वसमानता; त्रिकोणीय डिजाइनों में समरूपता और टाइल पैटर्न में सममितता देखी जा सकती है।

आइए, पढ़ें कि ज्यािमतीय आकार और इनके सिद्धांत हमारे दैनिक जीवन को किस प्रकार प्रभावित करते हैं।

SCERT TELANGANA

8.1 सर्वसमानता (Congruency)

आपने अपने दैनिक जीवन में अनेक समान आकार एवं माप वाली वस्तुओं को देखा ही होळगा। उदाहरणात: पंखों के समान साकार व समान माप के ब्लेडों को।

चित्र. 8.2

दैनिक जीवन में समरूपता का अक अन्य उदाहरण देखिए।

किसी आडियो की दुकान में जाइए और वहाँ की सीडियों पर ध्यान दीजिए।

सभी सीडियाँ समान रूप और समान आकार की हैं। यदि तुम उन्हें एक के ऊपर एक रखो तो वे एक दूसरे को पूरी तरह ढंक लेंगी।

अब कुछ पोस्टकार्डों को एक के ऊपर एक रखिए। आप देखेंगे कि सभी पोस्टकार्ट समान रूप एवं आकार के हैं; वे सभी एक दूसरे से सर्वांगसम/सर्वसमान हैं।

आप भी इस प्रकार के अनेक सर्वांगसम वस्तुएँ खोज सकते हैं।

8.1.1 आकारों की सर्वसमानता (Congruency of shapes)

निम्न पर ध्यान दीजिए।

(i)

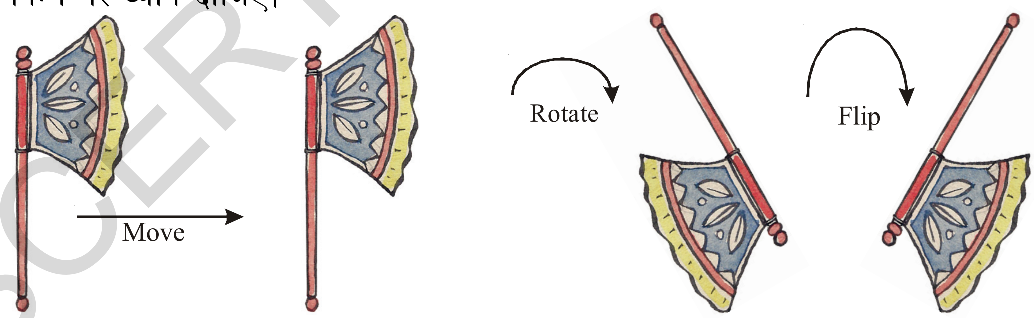


Fig. 8.3

उपर्युक्त चित्र में, क्या सभी एक ही आकृति को घुमा-फिरा कर बताया गया है?

यहाँ एक ही आकृति को घुमाया, फिराया और झुकाया गया है। वे एक ही हाथ के पंखे के चित्र हैं।

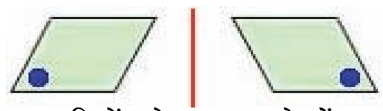
यदि हम सभी आकारों को एक के ऊपर एक रखें तो क्या पाएँगे?

ये सभी एक-दूसरे को पूरी तरह से समान रूप से ढँक लेंगी। अत: इनका आकार एवं माप समान है।

SCERT TELANGANA

क्या आपको याद है कि हम समान आकार एवं माप वाली आकृतियों को क्या कहते हैं?

समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियाँ, सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती हैं।

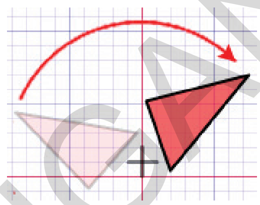


क्या आपको याद है कि समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियों को क्या कहते हैं?

समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियों को सर्वसमान/सर्वांगसम कहते हैं।

फ्लिप (पलटना) : जब किसी समतल आकृति को पलटना फ्लिप (पलटना) कहलाता है, जैसा चित्र में दिखाया गया है।

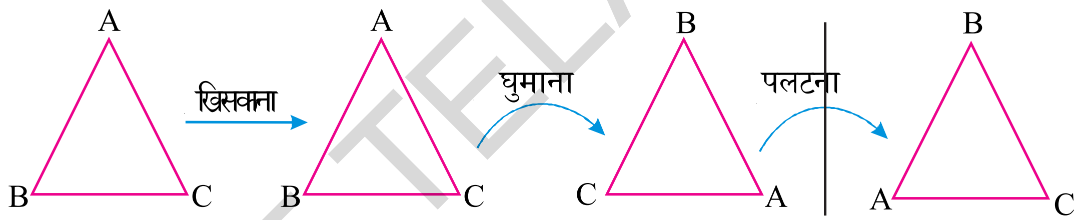
घुमाव **(Rotation) :** केंद्र के आधार पर किसी आकृति को घुमाना 'घुमाव' कहलाता है। केंद्र से आकृति के किसी भी बिंदु तक की दूरी घुमाव के बाद भी समान होती है। प्रत्येक बिंदु पर वृत्त के केंद्र से वृत्त बना सकते हैं।



इसमें केवल केंद्र स्थिर रहता है और सभी बिंदु वृत्ताकार रूप में घूमते रहते हैं। एक बार का 'पूर्ण घुमाव' 360° के समान होता है।

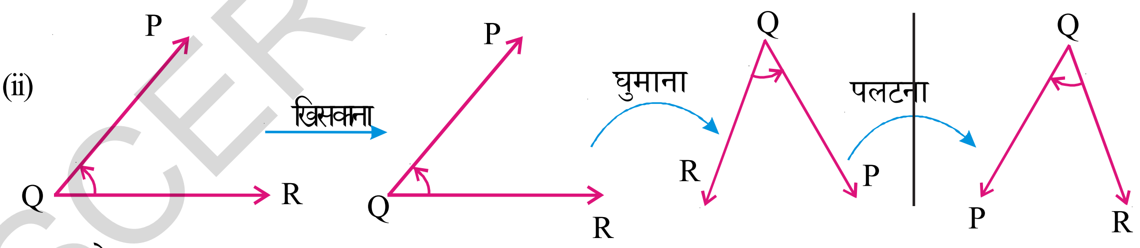
इन ज्यामितीय आकृतियों पर ध्यान दीजिए।

(i)



त्रिभुज

(ii)



कोण

इन सभी पंक्तियों में आकृतियों को क्रमशः बढ़ाया, घुमाया और पलटाया गया है। इन आकृतियों में आये परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

नहीं, ये सभी आकृतियाँ समान हैं केवल उनकी स्थिति में परिवर्तन है।

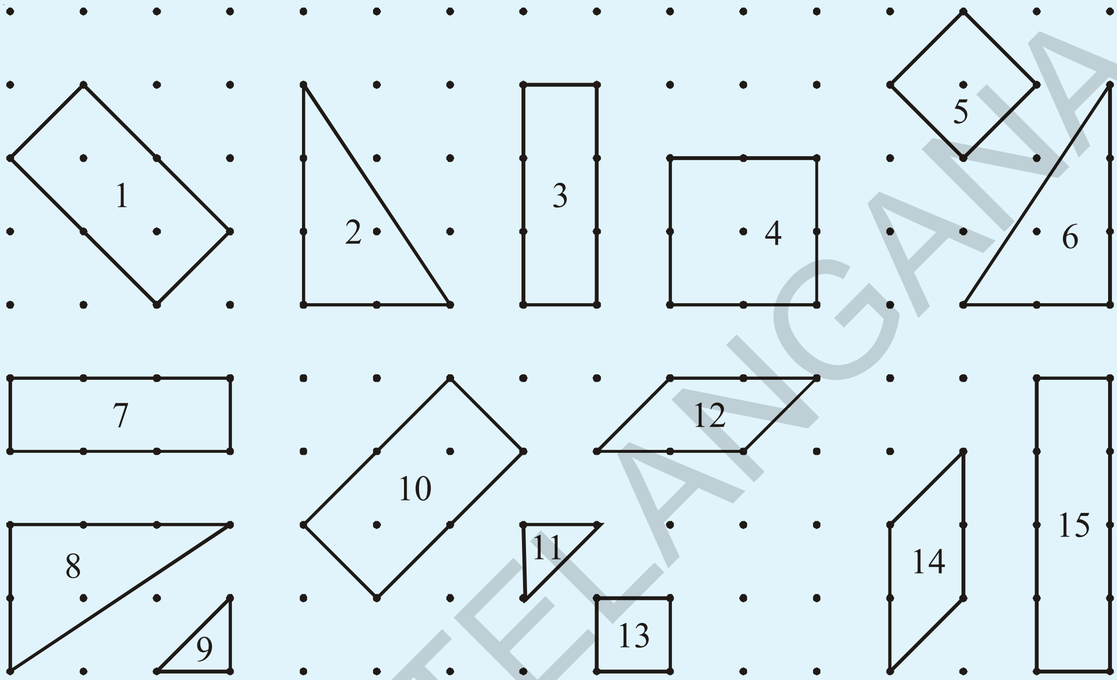
यदि दो आकृतियाँ सर्वसमान हैं, तो उन्हें खिसकाने, घुमाने और पलटाने से भी वह सर्वसमान ही रहेगा।

सर्वसमानता के लिए $\cong$ चिह्न का प्रयोग करते हैं।

SCERT TELANGANA

इसे कीजिए।

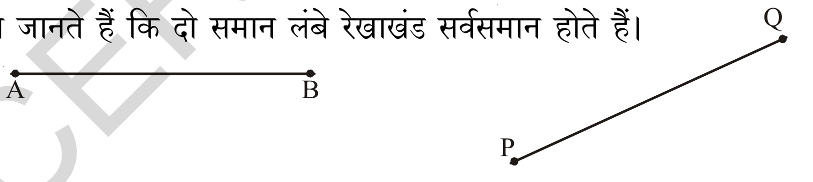
निम्नलिखित आकृतियों में सर्वसमान आकृतियों को पहचानिए।



SCERT TELANGANA

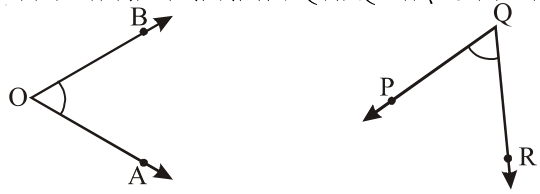
क्या आप बता सकते हैं कि दोनों आकृतियों में कौन से (a) रेखा खंड (b) कोण और (c) त्रिभुज सर्वसमान हैं ?

(a) हम जानते हैं कि दो समान लंबे रेखाखंड सर्वसमान होते हैं।



AB की लंबाई = PQ की लंबाई तो $AB \cong PQ$

(b) दो कोण आपस में सर्वसमान होते हैं यदि उनके माप समान हों।



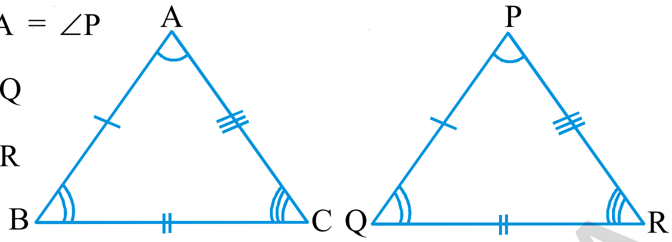
(c) यदि दो त्रिभुजों ΔABC और ΔPQR की संलग्न भुजाएँ व कोण समान हों तो वे सर्वसमान होती हैं।

अर्थात्, $AB = PQ$ और $\angle A = \angle P$

$BC = QR$ $\angle B = \angle Q$

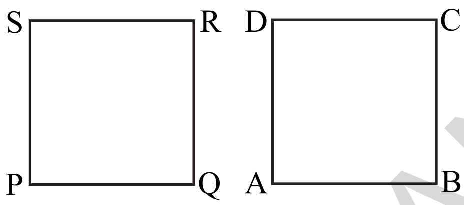
$CA = RP$ $\angle C = \angle R$

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$.



अब आप किस प्रकार कह सकते हैं कि दो बहुभुज सर्वसमान होते हैं?

आइए इसका एक उदाहरण लेकर चर्चा करें। मान लीजिए कि दो वर्ग ABCD और PQRS हैं। एक-दूसरे के ऊपर रखने से यदि वे एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेते हैं तो वे सर्वसमान होंगे।



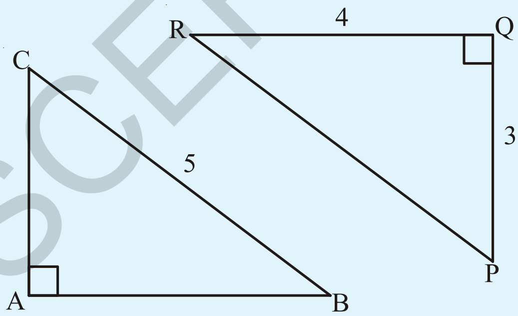
अर्थात, जब दो वर्गों की भुजाएँ एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लें तो इन्हें सर्वसमान वर्ग कहते हैं।

यदि दो बहुभुज सर्वसमान हों तो उनकी संलग्न भुजाएँ और कोण समान होते हैं।

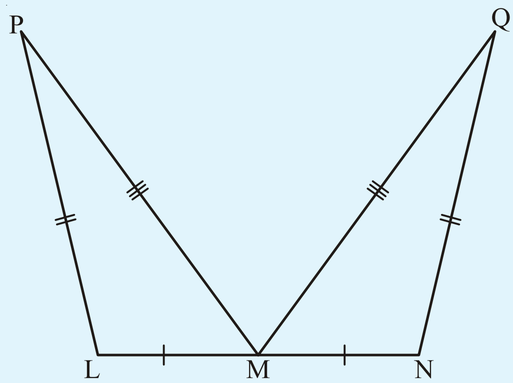
इसे कीजिए।

निम्न चित्रों के जोड़ों को देखिए और बताइए कि वे सर्वसमान हैं या नहीं। कारण बताइए। उनका नामांकन कीजिए।

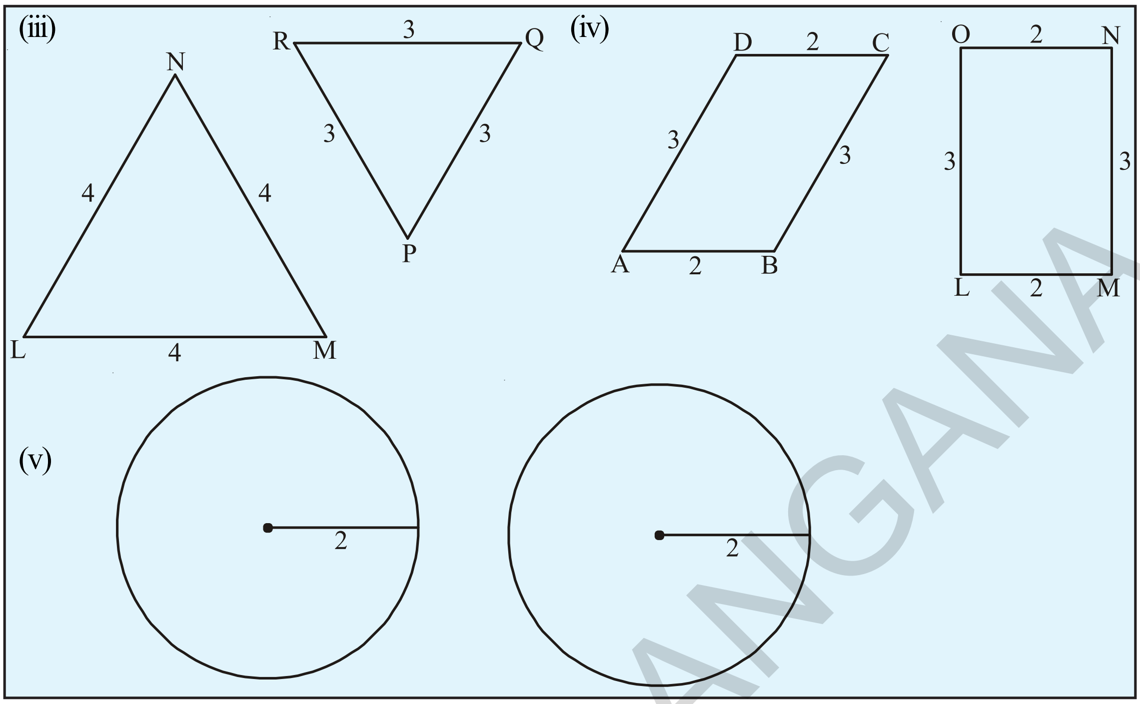
(i)



(ii)



SCERT TELANGANA



8.1.2 समरूप आकृतियाँ

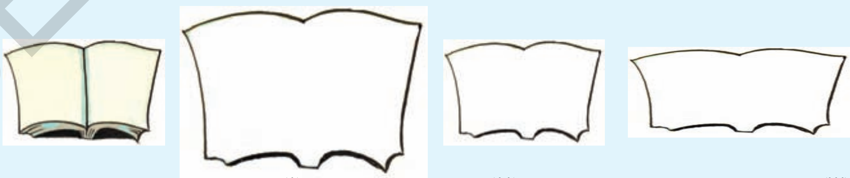
हमारी पुस्तकों में आसपास की अनेक चित्र हैं। उदाहरण के लिए, हाथी, बाघ, भवन निर्माण की रूपरेखा, माइक्रोचिप की संरचना आदि।

क्या इन्हें उनके समान माप में बनाया गया है? नहीं, यह असंभव है। इनमें से कुछ अपने वास्तविक माप से कम हैं तो कुछ अधिक।

इसे कीजिए।

1. पहली आकृती में समरूप आकृतियाँ पहचानिए।

(a)



(i) (ii) (iii)

(b)

(i) (ii) (iii)

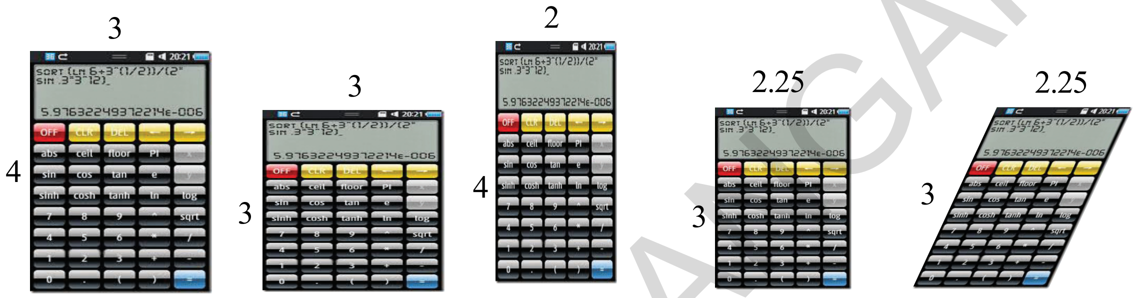
SCERT TELANGANA

एक कागज पर पेड़ का चित्र बना है।हम कैसे कह सकते हैं कि ये चित्र एक दूसरे के समरूप हैं?

वास्तविक

बनाया गया

यहाँ एक वस्तु विविध स्थितियों में दर्शाई गई है। कौनसी वास्तविक आकृति का छोटा समरूप है।



वास्तविक वस्तु लघुकरण-1 लघुकरण-2 लघुकरण-3 लघुकरण-4

इन सभी को देखकर हम कह सकते हैं कि लघुकरण-3 वास्तविक आकृति का समरूप है। क्यों? अब वास्तविक वस्तु और लघुकरण-3 की संगत तत्वों का अनुपात ज्ञात कीजिए। आपने क्या देखा?

$$\frac{\text{वास्तविक वस्तु की लंबाई}}{\text{लघुकरण-3 की लंबाई}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\text{वास्तविक वस्तु की चौड़ाई}}{\text{लघुकरण-3 की चौड़ाई}} = \frac{3}{2.25} = \frac{3\times4}{2.25\times4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

यहाँ सभी संलग्न कोण समकोण और समान हैं।

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं- "दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनके संलग्न कोण और सर्वसमान हों और संगत भुजाओं की लंबाई समानुपाती हो।"

सभी अन्य लघुकरणों की संगत भुजाओं के अनुपात ज्ञात कीजिए।

8.1.3 हम समरूपता के उपयोग किस प्रकार पता कर सकते हैं?

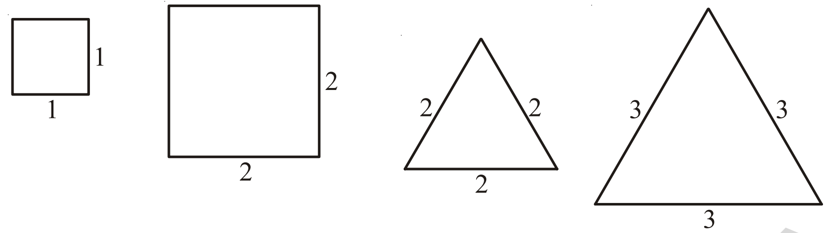
इंजीनियरों ने एक भवन का बाहर से समरूप नक्शा तैयार किया, डी.टी.पी. करने वालों ने इसकी आकृति कंप्यूटर की सहायता से बनाई जो कि उस भवन के समानुपाती है। इसका प्रयोग भवन का बैनर बनाने के लिए किया गया। फोटोग्राफर ने इसे समानुपात रूप में बढ़ा कर या घटाकर तस्वीरें निकालीं। विज्ञान के या समामाजजिक अध्ययन के मानचित्र इसी प्रकार अपने वास्तविक रूप के समानुपाती लघुकरण होते हैं। अर्थात, वास्तविक रूप के समरूप।

SCERT TELANGANA

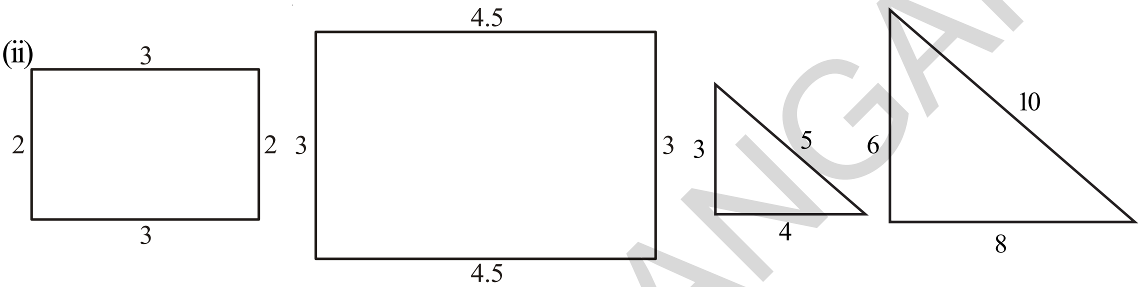
समरूपता की जाँच (Checking the similarity)

इन समरूप चित्रों को ध्यान से देखिए। इनकी भुजाएँ मापिए और संगत भुजाओं के अनुपात ज्ञात कीजिए, साथ ही संगत कोण ज्ञात कीजिए। आपने क्या देखा?

(i)



(ii)



पिछले पृष्ठ की आकृतियों के आधार पर निम्न तालिका की पूर्ति कीजिए।

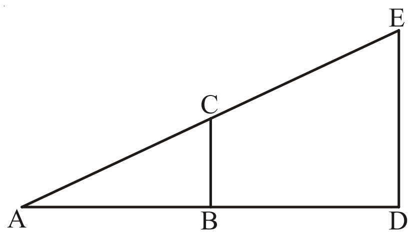
संलग्न भुजाओं का अनुपात	संलग्न कोण
(i) वर्ग = $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(90^o, 90^o, 90^o, 90^o) = (90^o, 90^o, 90^o, 90^o)$
(ii) समबाहु त्रिभुज = $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$(60^o, 60^o, 60^o) = (60^o, 60^o, 60^o)$
(iv) आयत = $\frac{2}{3}$ = ...	$(90^o, 90^o, 90^o, 90^o) = (90^o, 90^o, 90^o, 90^o)$
(iv) समकोण त्रिभुज = $\frac{3}{6}$ = ...	(......., ..., ...,) = (......., ..., ...,)

इन प्रत्येक जोड़ों के उदाहरण में, हम संगत भुजाओं के अनुपात को समान पाएँगे और संलग्न कोणों के अनुपात भी समान होंगे।

एक अन्य उदाहरण देखिए।

यदि दो त्रिभुज ΔABC और ΔADE समरूप हैं तो हम लिख सकते हैं कि $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

यदि वे त्रिभुज एक दूसरे पर रखे जायें, तो आप देख सकते हैं कि उनके संलग्न कोण समान हैं।



अर्थात $\angle A \cong \angle A$

$\angle B \cong \angle D$ (क्यों ?)

$\angle C \cong \angle E$ (क्यों ?)

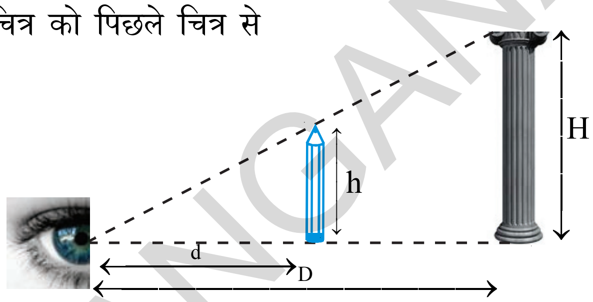
SCERT TELANGANA

और संगत भुजाओं का अनुपात भी समान होगा।

अर्थात $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$

आइए, अब हम समरूप त्रिभुज बनाने के सिद्धांत का उपयोग करते हुए दूरी पर स्थित वस्तुओं की ऊँचाई ज्ञात करें।

चित्र बनाना- एक लड़की ने एक स्तंभ के कुछ दूरी पर खड़े होकर हो में एक पेंसिल खड़े ढंग से लेकर उसे देखा। उसका चित्र पेंसिल के सहारे एक स्तंभ का चित्र बनाया। उसने देखा कि पेंसिल ने स्तंभ को पूरी तरह ढक लिया है। यदि इस चित्र को पिछले चित्र से तुलना करें तो हम कह सकते हैं कि



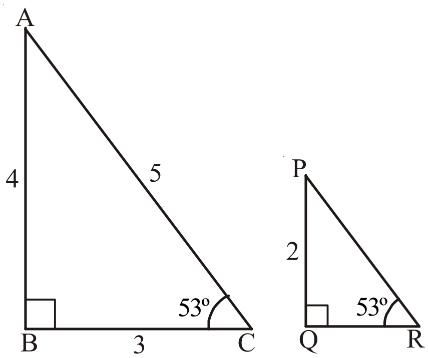
$$\frac{\text{स्तंभ की ऊँचाई (H)}}{\text{पेंसिल की लंबाई (h)}} = \frac{\text{स्तंभ से लड़की तक की दूरी (D)}}{\text{हाथ की लंबाई (d)}}$$

पेंसिल की लंबाई, भुजा की लंबाई और स्तंभ से लड़की तक की दूरी माप कर स्तंभ की ऊँचाई (H) का अनुमान लगा सकते हैं।

प्रयत्न कीजिए।

अब अपने हाथ में स्केल लेकर उसे अपनी पाठशाला भवन की दिशा में उठाइए और पाठशाला भवन की ऊँचाई का अनुमान लगाइए। (पाठशाला भवन से अपनी स्थिति में समुचित परिवर्तन लाइए) चित्र बनाइए और पाठशाला भवन की ऊँचाई का अनुमान लगाइए।

उदाहरण 1: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ समरूप और $\angle C = 53^0$ हैं। PR भुजा की लंबाई और कोण $\angle P$ ज्ञात कीजिए।



हल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

जब दो त्रिभुज समरूप होते हैं तो उनकी संलग्न कोण समान होते हैं और संगत भुजाएँ समानुपात होती हैं।

$$\frac{PR}{AC} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{PR}{5} = \frac{2}{4}$$

$$PR = \frac{2}{4} \times 5 = 2.5$$

SCERT TELANGANA

अत:

$\angle R = \angle C = 53^o$

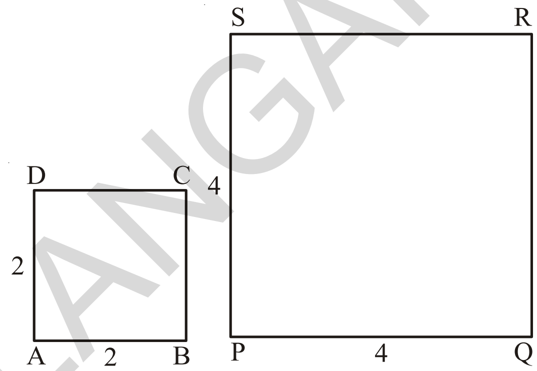
त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^o होता है।

अर्थात $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^o$

$\angle P + 90^o + 53^o = 180^o$

$\angle P = 180^o - 143^o = 37^o$

उदाहरण 2: दो भिन्न भुजाओं के वर्ग बनाइए। क्या आप कह सकते हैं कि वे समरूप हैं। दो वर्गों की परिमिति के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



सभी भुजाएँ समानुपाती हैं- $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

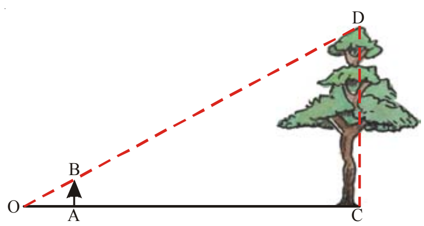
संलग्न कोण 90^o के हैं।

अत: वर्ग ABCD ~ वर्ग PQRS

□ABCD की परिमिति $= 4 \times 2 = 8$ सेमी

□PQRS की परिमिति $= 4 \times 4 = 16$ सेमी

उनकी परिमिति का अनुपात $= 8 : 16 = 1 : 2$ इनकी परिमिति समानुपाती है।



ABCD का क्षेत्रफल $= 2 \times 2 = 4\ cm^2$

PQRS का क्षेत्रफल $= 4 \times 4 = 16\ cm^2$

क्षेत्रफल का अनुपात $= 4 : 16 = 1 : 4 = 1^2 : 2^2$

$\therefore$ वर्गों के क्षेत्रफलों का अनुपात = वर्ग की संगत भुजाओं का अनुपात समान है।

SCERT TELANGANA

उदाहरण 3: जगदीश ने एक स्केल को लंबवत ढंग से 1 मी. की दूरी पर रखकर एक पेड़ की ऊँचाई का अनुमान लगाना चाहा और यह आकृति बनाई। यदि पेड़ की स्केल द्वारा मापी गई ऊँचाई 85 सेमी हो और पेड़ से उस तक की दूरी 15 मी. हो तो पेड़ की वास्तविक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

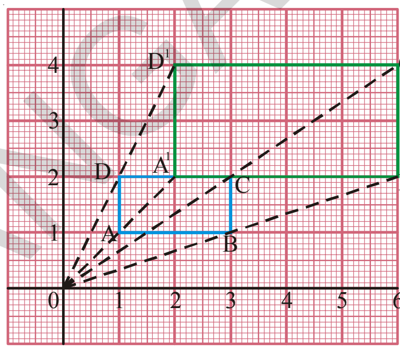
हल : $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ आकृति में दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपाती होती हैं।

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$$

$$\therefore \frac{1}{15} = \frac{0.85}{CD} \Rightarrow CD = 0.85 \times 15 = 12.75 \text{ मी}$$

$\therefore$ पेड़ की ऊँचाई $= 12.75$ मी

8.2 विस्तारीकरण (Dilations) :



कभी-कभी हमें कुछ आकृतियों को बड़ा व छोटा करने की आवश्यकता पड़ती है। यहाँ दोनों ही परिस्थितियों में आकृतियाँ वास्तविक आकृति के समरूप ही होती हैं। तात्पर्य है कि अपने दैनिक जीवन में हम समरूप आकृतियाँ बनाते ही हैं। समरूपता का ध्यान रखते हुए किसी आकृति को बड़ा या छोटा करना विस्तारीकरण 'विस्तारीकरण (Dilation)' कहलाता है।

निम्न विस्तारीकरण ABCD को देखिए। यह एक आयत का आलेख कागज पर चित्रण है। प्रत्येक शीर्ष A, B, C, D केंद्र 'O' से जोड़ा गया है और लंबाई को A^1, B^1, C^1 और D^1 तक क्रमशः दो गुणा तक बढ़ाया गया है। फिर A^1, B^1, C^1, D^1 को जोड़कर आयत बनाया गया है जो कि आयत ABCD के दो गुणा है। यहाँ, O को विस्तारीकरण का केंद्र कहा जाता है और $\frac{OA^1}{OA} = \frac{2}{1} = 2$ मापन गुणन 'k' कहलाता है।

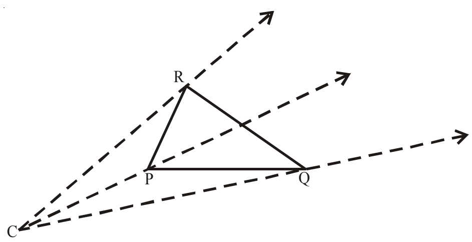
इसे कीजिए।

1. ग्राफ पेपर पर एक त्रिभुज बनाइए और इसे तीन गुणा विस्तारित करते हुए फिर एक त्रिभुज बनाइए। क्या ये दोनों आकृतियाँ समरूप हैं?
2. एक वर्ग को ग्राफ पर उतारकर उसकी विस्तारित करने का प्रयास कीजिए और मापन गुणन 4, 5 तक बढ़ाइए। आपने क्या देखा?

8.2.1 विस्तारीकरण की रचना (Constructing a Dilation) :

उदाहरण 4: विस्तारीकरण की रचना मापन गुणक $k = 2$ के साथ एक त्रिभुज का निर्माण केवल पटरी और प्रकार द्वारा कीजिए।

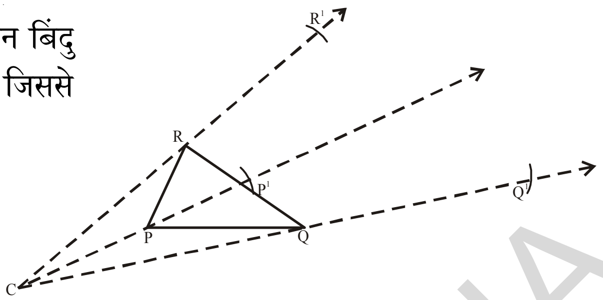
हल : सोपान 1: एक त्रिभुज ΔPQR बनाइए और केंद्र C से विस्तारीकरण किया जाये जो कि त्रिभुज में स्थित नहीं है। प्रत्येक शीर्ष जोड़कर त्रिभुज बनाइए।



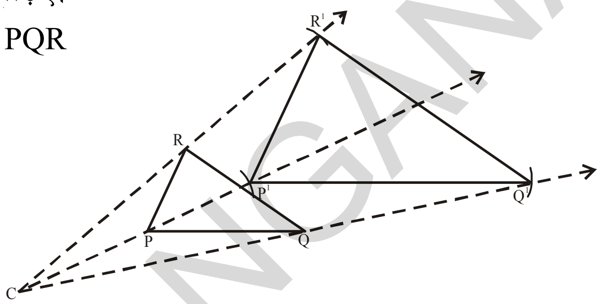
सोपान 2: कंपास का प्रयोग करते हुए, तीन बिंदु P^1, Q^1 और R^1 अंकित कीजिए जिससे कि $CP^1 = k\,(CP) = 2\,CP$

$CQ^1 = 2\,CQ$

$CR^1 = 2\,CR$



सोपान 3: P^1Q^1, Q^1R^1 और R^1P^1 को जोड़िए। ध्यान रहे कि $\Delta\, P^1Q^1R^1 \sim \Delta\, PQR$



अभ्यास - 8.1

1. किन्हीं पाँच सर्वसमान वस्तुओं के नाम बताइए जिनका उपयोग हमारे दैनिक जीवन में होता है।
2. (a) दो सर्वसमान आकृतियाँ बनाइए। क्या वे समरूप हैं? कैसे?

   (b) दो समरूप आकृतियाँ लीजिए। यदि आप इसमें से किसी को भी खिसकाते या पलटते हैं तो भी क्या वे समरूप हैं?
3. यदि $\Delta\, ABC \cong \Delta\, NMO$, सर्वसमान भुजाओं और कोणों को नामांकित कीजिए।
4. बताइए कि निम्न लिखित कथन सही हैं या गलत। कारण सहित बताइए।

   (i) 3 सेमी भुजा वाले दो वर्ग हैं। उनमें से एक को 45° तक घुमाने पर भी वे सर्वसमान हैं।

   (ii) कोई भी दो समकोण त्रिभुज जिनका कर्ण 5 सेमी हो, आपस में सर्वसमान होंगे।

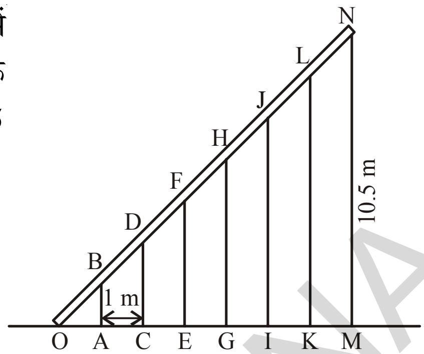
   (iii) कोई भी दो वृत्त जिनकी त्रिज्या 4 सेमी हो एक-दूसरे के सर्वसमान होंगे।

   (iv) दो समबाहु त्रिभुज जिनकी भुजा 4 सेमी हो लेकिन $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, LHN$ के रूप में नामांकित हों, एक-दूसरे के सर्वसमान नहीं हैं।

   (v) बहुभुज का प्रतिबिंब वास्तविक बहुभुज के सर्वसमान होता है।
5. बिंदुओं वाले कागज पर एक बहुभुज का निर्माण कीजिए। साथ ही इसके सर्वसमान आकृतियाँ और दर्पण प्रतिबिंब विविध स्थितियों में बनाइए।
6. बिंदुओं वाले वर्गाकार पेपर या ग्राफ पेपर पर एक आयत बनाइए। फिर इसकी समरूप आकृतियाँ बनाइए। दोनों की परिमिति और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। उनकी संगत भुजाओं से उनके अनुपात की तुलना कीजिए।

SCERT TELANGANA

7. एक लोहे के स्तंभ को 7 सात स्तंभों के सहारे चित्र में दिखाये अनुसार रखा गया है। यदि प्रत्येक दो स्तंभों के मध्य की दूरी 1 मी. है और अंतिम स्तंभ की ऊँचाई 10.5 मी. है तो लोहे के अन्य स्तंभों की लंबाई ज्ञात कीजिए।

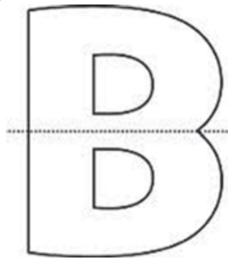


8. एक 3 मी. के लंबवत स्थित स्तंभ से 5 मी. की दूरी पर खड़े होकर सुधा ने स्तंभ के पीछे स्थित भवन को देखा। यदि स्तंभ का शीर्ष बिंदु, भवन के ऊपरी भाग के बराबर प्रतीत होता है, तो भवन की ऊँचाई का अनुमान लगाइए। स्तंभ से भवन तक की दूरी 10 मी. है। (संकेत: यहाँ सुधा की ऊँचाई का ध्यान नहीं रखना है)

9. किसी भी माप का एक चतुर्भुज बनाइए। उसका तीन गुणा विस्तारीकरण कीजिए। उनकी संगत भुजाओं को मापिए और उनकी समरूपता की जाँच कीजिए।

8.3 सममित (Symmetry) :

निम्नलिखित आकृतियाँ देखिए। यदि हम उन्हें उनके ठीक आधे से मोड़ें तो दोनों ओर समान आकृतियाँ प्राप्त होंगी।

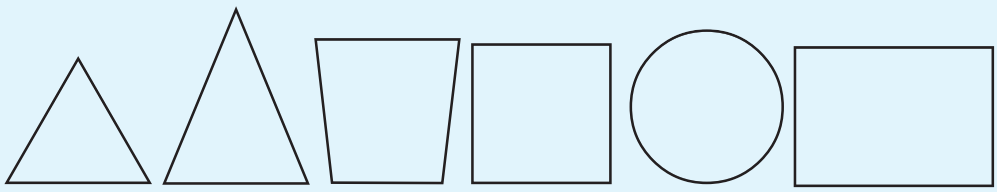


हम इस तरह की आकृतियों को क्या कहते हैं? उस रेखा को क्या कहते हैं जिसपर से इन दोनों को मोड़ा जाता है या जो दोनों को आधे से विभाजित करती है? क्या आप पिछली कक्षाओं में सीखी इन बातों को स्मरण कर सकते हैं?

ये सममित आकृतियाँ कहलाती हैं और जो रेखा इन्हें ठीक आधे से विभाजित करती है वह सममित रेखा कहलाती है।

इसे कीजिए।

इन आकृतियों में सभी संभव सममित रेखाएँ खींचिए।



SCERT TELANGANA

नीचे कुछ सममित आकार देखिए जिन्हें हम अपने दैनिक जीवन में देखते ही रहते हैं।

ये सभी आकृतियाँ अनेक प्रकार की सममित आकृतियों से बनी हैं।

यहाँ, कुत्ते के चित्र को अद्भुत तरीके से दो सममित आकारों में विभाजित किया गया है। क्या आपको चित्र के केंद्र से एक लंबवत रेखा दिखाई दे रही है?

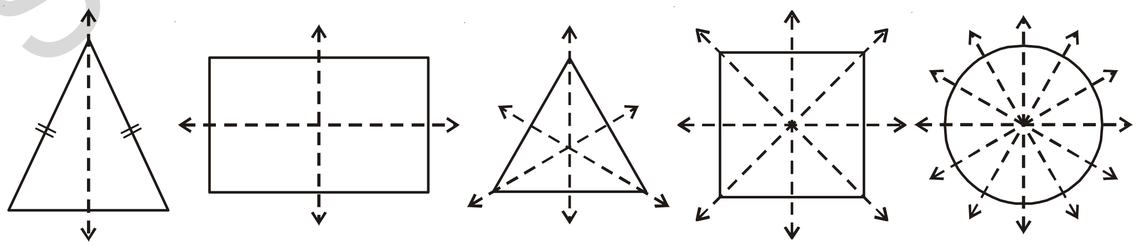
इसे ही 'सममित रेखा' या 'दर्पण रेखा' कहा जाता है।

हम इस प्रकार की सममितता को 'प्रतिबिंबित सममितता' या 'दर्पण सममितता' कहते हैं।

इस प्रकार का एक अन्य उदाहरण देखें, इस झील में पर्वत का प्रतिबिंब दिखाई दे रहा है। क्या यह प्रतिबिंब भी सममित है और इसकी सममित रेखा क्षितिजीय है जो प्रतिबिंब और वास्तविक पर्वत को अलग करती है। शायद ये पूर्णतः सममित न हों क्योंकि पर्वत का निचला भाग झील की सतह के कारण धुँधला दिखाई दे रहा है।

8.3.1 चक्रीय सममितता

निम्न लिखित सममित रेखाओं को ध्यान से देखिए।



विविध ज्यामितीय आकृतियों में विविध सममित रेखाओं का निर्माण हो सकता है।

SCERT TELANGANA

इन सभी आकृतियों को घुमाइए। आप पाएँगे कि एक बार के घुमाव में ये कम से कम एक बार अवश्य अपनी आरंभिक वास्तविक रूप में होते हैं।

उदाहरण के लिए, आयत में सममित रेखाओं के दो अक्ष होते हैं। जब किसी आयत को घुमाया जाता है तो वह दो बार अपनी आरंभिक स्थिति की तरह दिखाई देता है। इस संख्या को 'घुमाव का क्रम (order of rotation)' के नाम से जाना जाता है।

अपनी प्राप्ति को इस तालिका में उचित स्थान पर लिखिए।

ज्यामितीय आकृति	सममित अक्षों की संख्या	आरंभिक स्थिति की प्राप्ति संख्या	घुमावों की संख्या
समद्विबाहु त्रिभुज	....	....	....
आयत	2	2	2
समबाहु त्रिभुज	....	....	....
वर्ग	....	....	....
वृत्त	....	....	....

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. घुमावों के क्रम और ज्यामितीय आकृतियों की सममितता के रेखाओं में क्या संबंध होता है?
2. एक नियमित बहुभुज में कितनी समिमत रेखाएँ होते हैं? क्या नियमित बहुभुज की भुजाओं और घुमावों के क्रम में कोई संबंध होता है? वह क्या है? वह क्या है?

8.3.2 बिंदु सममितता (Point symmetry)

इस चित्र को देखिए। क्या इसमें सममित रेखाएँ हैं? इसमें सममित रेखाएँ नहीं हैं लेकिन इसमें अन्य प्रकार की सममितता है। यह चित्र ऊपर व नीचे दोनों ओर से एक ही तरह का दिखाई देता है। इसे बिंदु सममितता (point symmetry) कहते हैं। यदि आप इस चित्र को ध्यान से देखें तो पाएँगे कि इसका प्रत्येक भाग एक सुमेलन बिंदु (matching point) से जुड़ा है। यदि आप इसके केंद्र से एक रेखा खींचें तो यह इस चित्र को दो समान भागों में विभाजित करती है। केंद्र से कुछ और रेखाएँ खींचिए और इनकी जाँच कीजिए। अब हम यह कह सकते हैं कि इस चित्र में बिंदु सममितता (point symmetry) है।

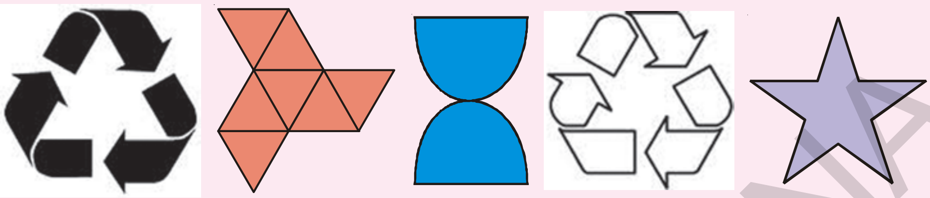
क्या हम कुछ अँग्रेजी अक्षरों में भी इस प्रकार की बिंदु सममितता (point symmetry) देख सकते हैं?

X H I S N Z

SCERT TELANGANA

प्रयत्न कीजिए।

1. पहचानिए कि किन चित्रों में बिंदु सममितता है?

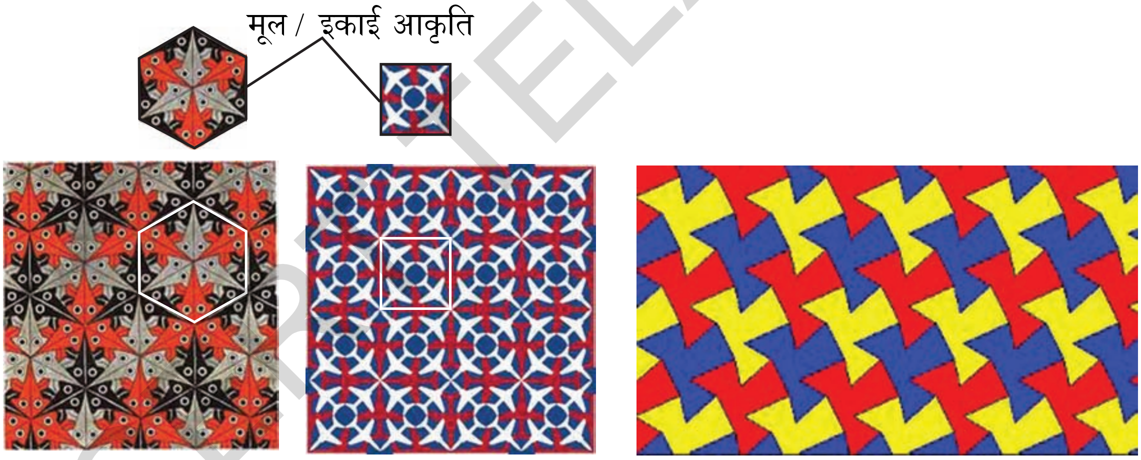


2. उपर्युक्त किन चित्रों में सममितता है?
3. रेखा सममितता और बिंदु सममिता में क्या संबंध है?

8.3.3 सममितता के प्रयोग

- अधिकतर वस्तुएँ जिनका हम उपयोग करते हैं वे कम से कम एक प्रकार की सममितता रखती हैं।
- मशीनों से बनीं अधिकांश वस्तुओं में सममितता पाई जाती है। इससे उत्पाद के दर में वृद्धि होती है।

इन पैटर्नों पर ध्यान दीजिए।



हम इन्हें फर्श, कपड़े पर पेंटिग, साड़ी आदि पर देख सकते हैं?

ये पैटर्न कैसे बनते हैं?

साधारणतः ये पैटर्न सर्वसमान आकृतियों या दर्पण प्रतिबिंबों को एक ढंग से व्यवस्थित करके बनाये जाते हैं। इसमें ध्यान रखा जाता है कि इन आकृतियों में कोई दूरी न रह जाये या ये एक-दूसरे पर न पड़ें। इस प्रकार इन्हें मूल आकृति के प्रत्येक दिशा में फैलाया जाता है।

इसे खचित पैटर्न/चतुरंगी पैटर्न (tessellation) कहा जाता है। ये आकृतियों की शोभा बढ़ाते हैं।

क्या पूर्ण आकृति भी एक सममित है?

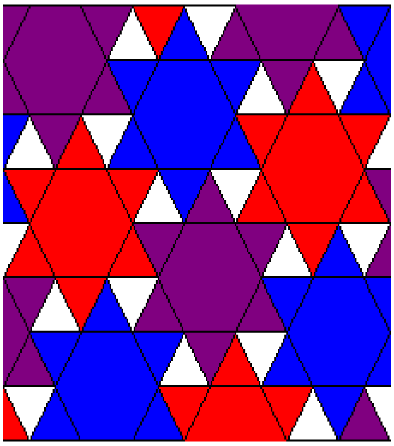
मूल आकृति जिसका प्रयोग करते हुए यह खचित पैटर्न/चतुरंगी पैटर्न (tessellation) बनाया गया है, क्या वह भी सममित है?

SCERT TELANGANA

आप देख सकते हैं कि चित्र के कुछ पैटर्न ही सममित हैं-आकृति (b) और दूसरे पैटर्न सममित नहीं हैं- आकृति (a), फिर भी मूल/इकाई आकृति सममित हैं।

निम्न खचित पैटर्नों पर ध्यान दीजिए।

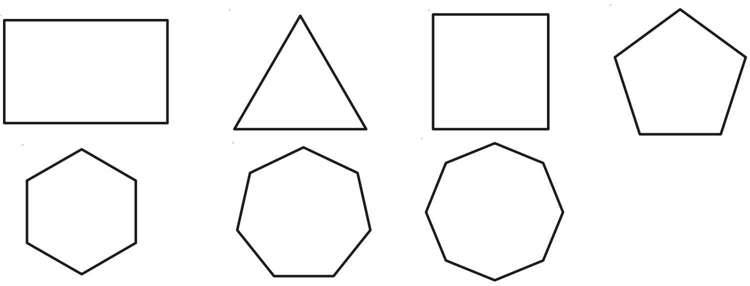
इन खचित पैटर्नों में मूल/इकाई आकृति क्या है?



आप ने ध्यान दिया होगा कि प्रयोग की हुई मूल इकाई आकृतियाँ खचित पंचभुज, आयत, वर्ग और समबाहु त्रिभुज हैं। अधिकांश खचित आकृतियाँ इनके द्वारा ही बनाई जाती हैं।

अभ्यास - 8.2

1. मोटे आकार वाले अँग्रजी अक्षरों को काटिए और अपनी नोटबुक में चिपकाइए। प्रत्येक अक्षर के लिए सभी संभव सममित रेखाएँ खींचिए।
   (i) कितने अक्षरों में सममित रेखाएँ नहीं है?
   (ii) कितने अक्षरों में एक सममित रेखा है?
   (iii) कितने अक्षरों में दो सममित रेखाएँ हैं?
   (iv) कितने अक्षरों में दो से अधिक सममित रेखाएँ है?
   (v) कितने अक्षरों में चक्रीय सममित रेखाएँ हैं?
   (vi) कितने अक्षरों में बिंदु सममितता है?
2. निम्न आकृतियों के लिए सममित रेखाएँ खींचिए। पहचानिए कि किनमें बिंदु सममितता है? क्या रेखा सममितता एवं बिंदु सममितता में कोई संबंध है?



SCERT TELANGANA

3. कुछ प्राकृतिक वस्तुओं के नाम बताइए जिनमें कम से कम एक सममित रेखा पाई जाती है।

4. तीन खटित पैटर्न बनाइए। इनमें उपयोग की की गई मूल इकाई आकृति बताइए।

हमने क्या सीखा?

- वे आकृतियाँ सर्वसमान कहलाती है जो समान आकार एवं समान माप की हों।
- वे आकृतियाँ समरूप कहलाती है जिनके रूप समान हों लेकिन माप असमान हों।
- यदि हम सर्वसमान व समरूप आकृतियों को पलटते, खिसकाते या घुमाते हैं तो उनकी सर्वसमानता व समरूपता समान बनी रहती है।
- कुछ आकृतियाँ एक से अधिक सममित रेखाएँ रखती हैं।
- सममितताएँ तीन तरह की होती हैं। वे हैं- रेखा सममितता, चक्रीय सममितता और बिंदु सममितता।
- चक्रीय सममितता में आकृति को केंद्र को स्थिर रखते हुए घुमाने पर एक बार के घुमाव में एक या दो बार अपनी आरंभिक आकृति की तरह दिखाई देती है। वह संख्या जितनी बार वह एक घुमाव में आरंभिक अवस्था में दिखाई देती है, उसे सममितता की संख्या (order) कहा जाता है।
- किसी भी आकृति को उसकी समरूपता को बनाए रखते हुए बढ़ाने या घटाने को विस्तारीकरण (Dialation) कहते हैं।
- किसी समतल को बिना खाली स्थान छोड़े या एक-दूसरे के ऊपर रखे, दोहराते हुए व्यवस्थित करने को खचित पैटर्न (tessellations) कहते हैं।

SCERT TELANGANA