தமிழ்நாடு அரசு

மேல்நிலை முதலாம் ஆண்டு

புள்ளியியல்

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு - 2018

(புதிய பாடத்திட்டத்தின்கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும்
தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்
© SCERT 2018

நூல் அச்சாக்கம்

கற்க கசடற

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்
www.textbooksonline.tn.nic.in

பொருளடக்கம்

புள்ளியியல்

பாடம் 1	புள்ளியியலின் நோக்கங்களும் தரவின் வகைகளும்	01
பாடம் 2	தரவு சேகரித்தலும் மாதிரி எடுத்தல் முறைகளும்	18
பாடம் 3	தரவுகளை வகைப்படுத்துதலும் அட்டவணையிடுதலும்	45
பாடம் 4	தரவுகளின் விளக்கப்படங்களும் வரைபடங்களும்	76
பாடம் 5	மைய அளவைகள்	116
பாடம் 6	சிதறல் அளவைகள்	163
பாடம் 7	சில கணித முறைகள்	196
பாடம் 8	அடிப்படை நிகழ்தகவு கோட்பாடுகள்	223
பாடம் 9	வாய்ப்பு மாறிகளும் கணித எதிர்பார்ப்பும்	258
பாடம் 10	நிகழ்தகவு பரவல்கள்	293

6BE1U5 — மின்னூல்

6BHHVS — மதிப்பீடு

B136_11_STA_TM — இணைய வளங்கள்

பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீட்டைப் (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?

- உங்கள் திறன்பேசியில், கூகுள் playstore /ஆப்பிள் app store கொண்டு QR Code ஸ்கேனர் செயலியை இலவசமாகப் பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியைத் திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தித் திரையில் தோன்றும் கேமராவை QR Code–இன் அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம் திரையில் தோன்றும் உரலியைச் (URL) சொடுக்க, அதன் விளக்கப் பக்கத்திற்குச் செல்லும்.

இந்நூலின் சிறப்பு அம்சங்கள்

புள்ளியியல் அறிஞரை பற்றிய குறிப்பு	ஒரு புள்ளியியல் அறிஞரைப் பற்றிய சிறு குறிப்பு.
கற்றல் நோக்கங்கள்	கற்போரை மையப்படுத்தி அவர்களின் திறனை மேம்படுத்தும் விதமாக அமைகிறது.
உங்களுக்குத் தெரியுமா?	வியத்தகு உண்மைகள், மாணவர்களின் சிந்தனையைத் தூண்டும் வகையிலான துணுக்குகள்.
குறிப்பு	பாடம் சார்ந்த கூடுதல் செய்திகளை உள்ளடக்கியது.
செயல்பாடு	மாணவர்கள் பாடக்கருத்தை ஆராய்ச்சிகள் மூலம் புரிந்துகொள்ள செயல்பாடுகள் வழி வகுக்கின்றன.
	மாணவர்கள் பாடப்பொருளை மேலும் தெளிவாகப் புரிந்துகொள்ளும் விதமாக மின்னணு பாடப் பொருள் அமைகிறது.
வெற்றிக் கதை	மாணவர்களை ஊக்குவிக்க வெற்றிகதைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.
நினைவில் கொள்க	முக்கிய கருத்துகளின் சுருக்கம் முடிவில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.
இணைய செயல்பாடு	மாணவர்களின் கணினி சார் அறிவுத்திறனை மேம்படுத்துகிறது.
மதிப்பீடு	மாணவர்களின் நினைவாற்றல், சிந்தனை மற்றும் புரிதலை மதிப்பீடு செய்கிறது.
கலைச் சொற்கள்	புள்ளியியல் சார்ந்த ஆங்கில-தமிழ் சொற்கள்.

புள்ளியியல் – பணி வாய்ப்புகள்

மேல்நிலைக்கல்வி முடிந்தபின், புள்ளியியல் பாடம் பல்வேறு இளங்கலை, முதுகலை, தொழில்சார்ந்த மற்றும் ஆராய்ச்சி படிப்புகளுக்கான பாடத்திட்டத்தில் ஒர் அங்கமாக உள்ளது.

இளங்கலை படிப்புகள்	முதுகலை படிப்புகள்	போட்டித் தேர்வுகள்
பொருளியல்	பொருளியல்	நடுவன் தேர்வாணையத் தேர்வு
வணிகவியல்	வணிகவியல்	மாநிலத் தேர்வாணையத் தேர்வு
வணிக நிர்வாகவியல்	வணிக நிர்வாகவியல்	ஊழியர் தேர்வாணையத் தேர்வு
கணினி பயன்பாட்டியல்	கணினி பயன்பாட்டியல்	இந்திய ஆட்சிப் பணித் தேர்வு
கணிதம்	கணிதம்	இந்திய காவல் பணித் தேர்வு
மருந்தியல்	மருந்தியல்	இந்திய அயலகப் பணித் தேர்வு
கல்வியியல்	கல்வியியல்	மற்றும் பல....
புள்ளியியல்	புள்ளியியல்	
பொறியியல்	பொறியியல்	
பட்டயப் படிப்புகள்	கணக்கியல் (C.A)	
	I.C.W.A	
	அளவீட்டு அறிவியல்	

புள்ளியியலுக்கான சிறப்பு துறைகள்: கல்லூரிகள் / பல்கலைக் கழகங்கள், இந்தியப் புள்ளியியல் நிறுவனம் (ISI) பல்வேறு இளங்கலை, முதுகலை மற்றும் ஆராய்ச்சிப் படிப்புகளை வழங்குகின்றன.

தலைப்புகள்

- புள்ளியியலாளர்
- வணிக ஆய்வாளர்
- கணிதவியலாளர்
- பேராசிரியர்
- பேரிடர் ஆய்வாளர்
- தரவு ஆய்வாளர்
- பகுப்பாய்வாளர்
- புள்ளியியல் பயிற்றுநர்
- தரவியல் அறிஞர்
- ஆலோசகர்
- உயிர் புள்ளியியலாளர்
- பொருளியல் அளவீட்டாளர்

துறைகள்

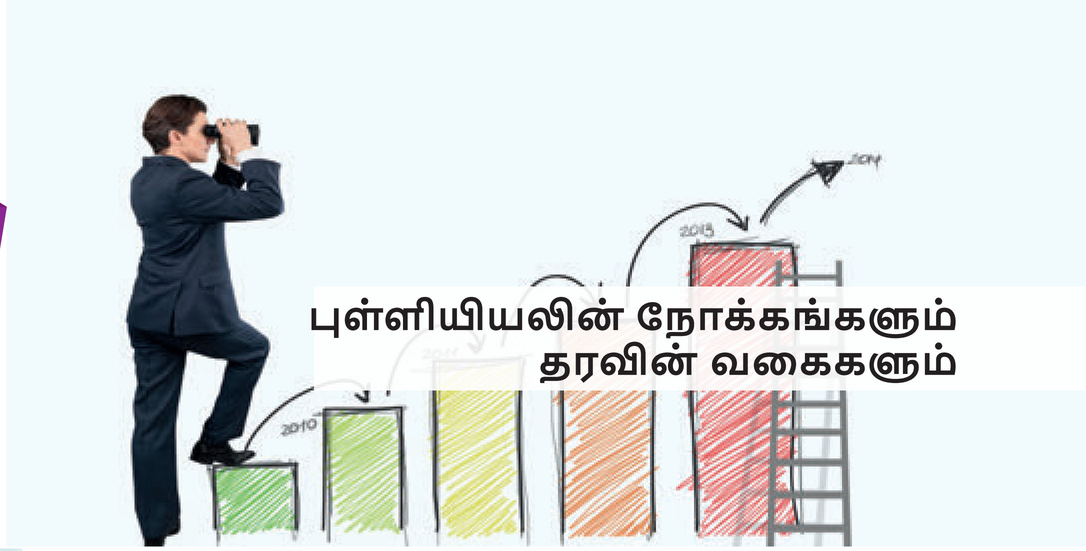
- மக்கள் தொகை
- சூழலியல்
- மருத்துவம்
- தேர்தல்
- குற்றவியல்
- பொருளியல்
- கல்வியியல்
- திரைப்படம்
- விளையாட்டு
- சுற்றுலா

புள்ளியியலாளருக்கான சிறப்புத் திறன்கள்

- கணிதப் புள்ளியியலில் வலுவான அடித்தளம்.
- தருக்க சிந்தனை மற்றும் முக்கிய கருத்துக்களைப் புரிந்து கொள்ளும் திறன்.
- பிரச்சினைகளைப் புரிந்து கொள்ள, பல்வேறு துறையினருடன் தொடர்பு கொள்வதற்கான திறன்.
- புள்ளியியல் கணிப்பில் வலுவான அடித்தளம்.
- புதிய புள்ளியியல் மென்பொருள்கள், தொழில்நுட்பங்களைக் கையாளும் திறன்.
- சூழலுக்கேற்ப பிரச்சினைகளைத் தீர்க்கும் பல்வகைத் திறன்.

அத்தியாயம்

1



புள்ளியியலின் நோக்கங்களும் தரவின் வகைகளும்

பிரசந்த சந்திர மஹலனோபிஸ்
(29 ஜூன், 1893–28 ஜூன், 1972)

இந்தியப் புள்ளியியலின் தந்தை என P.C. மஹலனோபிஸ் அழைக்கப்படுகிறார். தொடக்கக் கல்வியைப் பிராமோ மாணவர் பள்ளியிலும், இயற்பியல் இளங்கலை பட்டத்தை கொல்கத்தாவில் உள்ள பிரசிடென்சி கல்லூரியிலும் பெற்றார். உயர்கல்வி தொடர்வதற்காக அவர் 1913 –ம் வருடம் இங்கிலாந்தில் உள்ள லண்டன் பல்கலைக் கழகத்திற்கு சென்றார். பயோமெட்ரிக்கா என்ற இதழ் வெளியீட்டாளர்களோடு ஏற்பட்ட அறிமுகம் அவருக்கு புள்ளியியலில் ஆர்வத்தை தூண்டியது.

ஒரு புள்ளியியல் ஆய்வகத்தை பிரசிடென்சி கல்லூரியில் தொடங்கினார். அதுவே பின்னர் கொல்கத்தாவிலுள்ள பிரசித்தி பெற்ற புள்ளியியல் நிறுவனத்தை உருவாக்குவதற்கு அடித்தளமிட்டது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

P.C. மஹலனோபிஸ் பிறந்த தினமான ஜூன் 29 இந்தியப் புள்ளியியல் தினமாக கொண்டாடப்படுகிறது

பெருமளவிலான மாதிரி கணிப்பு ஆய்வுகளுக்கு அவர் பெரும் பங்களித்திருக்கிறார். துரித ஆய்வு பற்றி விவரங்களை அவர்தான் அறிமுகப்படுத்தினார். மேலும் மாதிரி கணிப்பு முறைகளின் பயன்பாட்டை உணர்த்தினார்.

'புள்ளியியலே அறிவியலின் இலக்கணம்' – கார்ல் பியர்ஸன்

நோக்கங்கள்

- ✪ புள்ளியியலின் பொருள் மற்றும் வரையறையை அறிமுகப்படுத்துதல்
- ✪ புள்ளியியலின் தோற்றமும் வளர்ச்சியும் பற்றி விளக்குதல்
- ✪ புள்ளியியலின் நோக்கம், பயன்பாடுகளை பட்டியலிடுதல்
- ✪ புள்ளியியலின் பல்துறை பயன்பாடுகளை விவரித்தல்
- ✪ தரவின் பொருளை அறிமுகப்படுத்துதல்
- ✪ பல்வேறு வகையான தரவுகளை வேறுபடுத்துதல்

6BHSXF

அறிமுகம்

இப்பாடத்தில் நாம் புள்ளியியலின் பொருள், பல்வேறு வரையறைகள், தோற்றம் மற்றும் வளர்ச்சி, செயல்பாடுகள், நோக்கம், விவசாயம், பொருளாதாரம் போன்ற பல்வேறு துறை பயன்பாடுகளின் விவரத்தை அறிந்து கொள்கிறோம். மேலும் தரவுகளின் வரையறை, வகைகள் மற்றும் அளவீட்டு அளவைகள் ஆகியவற்றை அறிந்து கொள்கிறோம்.

1.1 புள்ளியியலின் தோற்றமும் வளர்ச்சியும்

புள்ளியியலின் தோற்றமென்பது ஆதிகால மனிதனிடம் இருந்து ஆரம்பித்தது. அவன் தன் உடைமைகளை அறிந்துகொள்ள மரத்தில் குறியிட்டு அறிந்து கொண்டான். கி.மு 5000 ஆண்டு காலகட்டத்தில் மன்னர்கள் மக்கள் தொகை கணக்கெடுப்பு மற்றும் நாட்டின் வளத்தையும் இதன் மூலம் அறிந்துகொண்டனர். பண்டைய காலத்தில் போர்க் காலங்களில் ஏற்படும் இக்கட்டான சூழ்நிலையை எதிர்கொள்ள தங்களின் காலாட்படை, குதிரைப்படை, யானைப்படை மற்றும் எதிரிகளின் படைபலங்களின் புள்ளியியல் விவரங்களைக்கொண்டு முடிவுகள் எடுத்தனர். பின்னர் வரி மற்றும் அரசு நிர்வாகத்திற்கும் பயன்படுத்தப்பட்டது.

'புள்ளியியல்' என்ற சொல் 'ஸ்டேட்டஸ்' (status) என்ற லத்தீன் சொல் அல்லது ஸ்டேட்டிஸ்டா (statista) என்ற இத்தாலிய சொல் அல்லது 'ஸ்டேடடஸ்டிக்' (statistic) என்ற ஜெர்மன் சொல்லை மூலமாகக் கொண்டிருக்கிறது. இதன் பொருள் அரசியல் நிலைமை என்பதாகும். 'புள்ளியியல்' என்ற சொல் ஒரு நாட்டின் அரசாங்கத்தின் மக்கள், சமூகம் மற்றும் அரசியல் நிலைமை சார்ந்த புள்ளிவிவரங்கள் மற்றும் கணக்கெடுத்தல் போன்றவற்றைத் தருவதில் தொடர்புடையதாக இருந்தது. காலப்போக்கில் அதன் பரிணாம வளர்ச்சி அறிவியல் மற்றும் பெரும்பாலான துறைகளுக்கு அடிப்படையாக அமைந்தது. புள்ளியியலானது விவசாயத்துறை, மருத்துவத்துறை, தொழில்துறை, விளையாட்டு மற்றும் வணிகத்துறை ஆகியவற்றை உள்ளடக்கிய துறைகளின் கருத்துருவாக்கம் மற்றும் பயன்பாட்டுப் பகுதிகளின் வளர்ச்சியில் பயன்படுகிறது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

"தரவு" (data) என்ற சொல் முதன் முதலில் 1640 களில் பயன்படுத்தப்பட்டது. 1946ல் "தரவு" என்ற சொல் "படிமாற்றத்திற்கு, கணிணியில் சேமித்து வைப்பதற்கு உகந்த" என்று பொருள்பட்டது. 1954ல் தகவல் செயலாக்கம் (data processing) என்ற சொல் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. இது இலத்தீன் மொழியில் "கொடுத்த (அ) கொடுக்க" எனப் பொருள்படும்

பண்டைய காலத்தில் புள்ளியியல் அரசு நிர்வாகத்திற்கும் போர்களுக்காகவும் பயன்படுத்தப்பட்டன. பின்னர் வரி வசூலிக்கும் நோக்கத்திற்காக பயன்படுத்தப்பட்டது என்பதற்குச் சான்றாக கௌடில்யரின் அர்த்தசாஸ்திரம் (கி.மு 324–300) என்ற நூலில் காணலாம். அக்பரின் நிதித்துறை அமைச்சரான இராஜா தோடர்மால் விவசாய நிலங்களைப் பற்றிய விவரங்களை சேகரித்தார். 17ஆம் நூற்றாண்டின் தொடக்க காலத்தில் வாழ்நிலைப்புள்ளியியல் என்ற அடிப்படைக் கருத்து தொடங்கி இப்போதைய நவீன காலத்தைய நிபுணத்துவ அளவீட்டு அறிவியல் (Actuarial science) வரை புள்ளியியலின் பயன்பாடுகள் வளர்ந்துள்ளன. 18ஆம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் இயற்பியலில் பிழைகளின் கோட்பாடு என்ற கருத்தை காஸ் (Gauss) என்பவர் அறிமுகப்படுத்தினார்.

புள்ளியியல் என்பது அறிவியல் ரீதியாக எண் விவரங்களைச் சேகரிப்பது, அளிப்பது, பகுத்தாய்வது மற்றும் விளக்கமளிப்பது போன்றவற்றோடு தொடர்புடையது. எண் விவரங்களை முறையாகச் சேகரித்து தெளிவாக்குவதுடன் புள்ளியியல் தொடர்புடையதே புள்ளிவிவரம் என்ற சொல்லாகும்.

புள்ளியியல் என்ற சொல்லானது ஒருமை, பன்மை என இருவகைகளாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. பன்மையில் எடுத்துக்கொள்ளும் இது ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்துடன்,

ஒரு திட்டமிட்ட முறையில் அளவிட்டோ, கணக்கிட்டோ பெறப்பட்ட எண்களின் விவரம் என்பதைக் குறிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக நகரில் ஒரு நெருக்கடியான சாலையில் நடக்கும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கை, ஒரு நாளில் ஒரு நாள்பட்ட நோய் காரணமாக இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் பலவற்றைக் கூறலாம். ஒருமையில் எடுத்துக்கொள்ளும்போது இது புள்ளியியல் கோட்பாடுகள் மற்றும் சேகரிப்பது, அளிப்பது, பகுத்தாய்வது மற்றும் எண்ணியியல் புள்ளி விவரங்களை விளக்குவது போன்றவற்றைக் குறிக்கிறது.

பின்னர் புள்ளியியலின் முக்கியத்துவம் உறுதியாக உணரப்பட்டு 20ஆம் நூற்றாண்டில் அபார வளர்ச்சி அடைந்தது. இந்த காலக்கட்டத்தில் நிறைய புதிய கோட்பாடுகளும் பல்வேறு துறைகளின் பயன்பாடுகளும் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டன. புகழ்பெற்ற புள்ளியியலாளர்களின் பங்களிப்பின் காரணமாக பின்வரும் கருத்துகள் வெளிப்படுகின்றன. மாதிரியின் கோட்பாடு, நிகழ்தகவு கோட்பாடு, கருதுகோள் மதிப்பீடு மற்றும் புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனை, போக்குபகுப்பாய்வு, ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு, பரிசோதனை, சோதனை வடிவமைத்தல், முன்கணிப்பு, காலத்தொடர், உயிரி புள்ளியியல், உளவியல் மற்றும் பல.

1900ஆம் ஆண்டுகளின் முற்பகுதியில், புள்ளியியலும் புள்ளியியலாளர்களும் அதிகம் முக்கியத்துவத்தை பெற்றிருக்கவில்லை. தொடர்ந்து வந்த ஆண்டுகளில் ஏற்பட்ட முன்னேற்றம் மற்றும் தொழில்நுட்ப வளர்ச்சியினால் எல்லா துறைகளிலும் பயன்படுத்தத் தக்கதாகவும், அனைவரின் கவனத்தை ஈர்க்கத்தக்கதாகவும் புள்ளியியல் துறை வளர்ச்சி அடைந்திருக்கிறது. இதன் விளைவாகப் பல புதிய இடைநிலைப் பிரிவுகள் உருவாகியது. தரவு சேகரித்தல் தரவின் ஆதாரமையம், புவியியல் தகவல் அமைப்பு, செயற்கை நுண்ணறிவு இன்னும் பல. இன்றைய காலகட்டத்தில் புள்ளியியலின் தொழில்நுட்பம் உயர் தகவலியல், குறிகையியல், தொலை தொடர்பு, பொறியியல், மருத்துவம், குற்றங்கள், சூழ்நிலையியல் இன்னும் பலவற்றில் பயன்படுகிறது.

இன்றைய வணிக மேலாளர்கள் நல்லமுடிவுகளை எடுத்து நல்ல விளைவுகளை பெறுவதற்கு பகுப்பாயும் திறனைக் கற்று வளர்த்துக்கொள்ள வேண்டிய தேவை இருக்கிறது. சிறந்த வணிக முடிவுகளை எடுப்பதற்குப் புள்ளியியல் உதவுகிறது. தங்களைச் சுற்றியுள்ள அபரிமிதமான விவரங்களை அறிந்துகொள்ள புள்ளியியல் சம்மந்தமான தரவுகள் தேவைப்படுகின்றன. மேலும் பரிவர்த்தனை நுட்பங்களான தீர்மான மரங்கள், ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு, தொகுப்பு போன்றவை வணிக செயல்முறைகள் மேம்பாட்டிற்குப் பயன்படுகின்றன.

1.2 வரையறைகள்

புள்ளியியலானது பல்வேறு ஆசிரியர்களால் வெவ்வேறு விதமாக வரையறுக்கப்பட்டிருக்கிறது..

- "புள்ளியியல் என்பது எண்ணுதலின் அல்லது கணக்கிடுதலின் அறிவியல்" – (ஏ.எல்.பௌலி)
- "புள்ளியியல் என்பது எண் விவரங்களைச் சேகரிப்பது, அளிப்பது, பகுத்தாய்வது மற்றும் விளக்கம் அளிப்பது போன்ற செயல்பாடுகளை கொண்ட அறிவியல் ஆகும்." –(கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன்)

வாலிஸ்ட் மற்றும் இராபட்டின் புள்ளியியலின் வரையறை :

- "நிச்சயமற்ற எதிர்கொள்ளலில், முடிவுகளை எடுப்பதற்கான செயல்முறைகளின் வடிவமே புள்ளியியல் எனப்படும்."
- யா–லூன்–ஜோ என்ற அறிஞர் வாலிஸ்ட் மற்றும் இராபட்டின் புள்ளியியல் வரையறையை சிறிது மாற்றி கீழ்க்கண்டவாறு விவரிக்கிறார் : "புள்ளியியல் என்பது நிச்சயமற்ற நிகழ்வுகளின் விளைவால் வரும் எண்வடிவிலான தீர்மானிக்கப்பட்ட அளவிற்கு சாதகமற்ற விவரங்களைக் கொண்டு முடிவெடுப்பதற்கான ஒரு முறை"

மேலே கொடுக்கப்பட்ட பெரும்பாலான வரையறைகள் ஓர் அரசுக்குத் தேவையான எண் விவரங்களை அளவிடுதல், கணக்கிடுதல் போன்றவற்றிற்கும் மட்டுமாக சுருக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஆனால் சேக்ரிஸ்ட் போன்ற நவீன சிந்தனையாளர்கள் புள்ளியியலை கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கிறார்கள்.

'முன்னதாகவே தீர்மானிக்கப்பட்ட ஒரு நோக்கத்திற்காக ஒழுங்கான முறையில் சேகரிக்கப்பட்டதும் ஒன்றோடொன்று ஒப்பிடக்கூடியதாகவும், எண்ணிக்கையில் கூடியதாகவும் நியாயமான அளவுக்கு செம்மையாக மதிப்பிடத்தக்கதாகவும் பல்வகைக் காரணங்களால் குறிப்பிடத்தக்க அளவுக்கு பாதிக்கக்கூடியதுமான விவரங்களின் மொத்தமே புள்ளியியல் ஆகும்'.

மேற்கண்ட வரையறைகளில் கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன் அவர்களின் வரையறை அதனுடைய முழுமைத் தன்மையினால் ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடியதாக இருக்கிறது. இவ்வரையறையிலிருந்து புள்ளியியலானது கீழ்க்கண்ட குணங்களை வெளிப்படுத்துகிறது என்பது தெளிவாகிறது.

புள்ளியியலின் குணங்கள்:

(1) ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காக திட்டமிடப்பட்ட முறையில் சேகரிக்கப்பட்ட மொத்த விவரங்கள்.

சேகரிக்கப்பட்ட மொத்த விவரங்கள் மற்றும் எண்களைக் கொண்டு செயல்படுவது புள்ளியியல் ஆகும். ஒர் ஒற்றை எண் புள்ளியியல் விவரம் என்ற கூறமுடியாது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு மாணவனின் எடை 65 கிராம் எனில் இது புள்ளியியல் விவரம் ஆகாது. ஆனால் ஒரு வகுப்பில் உள்ள 60 மாணவர்களின் எடைகள் என்பது புள்ளியியல் விவரம் எனப்படும். ஏனெனில் அவற்றை சேர்த்துக் கணக்கிடலாம். மேலும் ஒன்றோடொன்று ஒப்பிடலாம். இவ்வுதாரணமானது "ஓர் இறப்பு என்பது துயரச் செய்தி பல இறப்புகள் என்பது புள்ளியியல் விவரம்" என்ற ஜோசப் ஸ்டாலினின் அறியப்பட்ட மேற்கோளை நினைவூட்டுகிறது. தரவு சேகரிக்கப்படும் நோக்கம் தெளிவாக இருத்தல் வேண்டும். சேகரிக்கப்பட்ட தரவு திட்டமிட்ட முறையில் இருத்தல் வேண்டும். முறைசாராததாக இருத்தல் கூடாது.

(2) அதிக எண்ணிக்கையிலான காரணிகளால் ஒரு குறிப்பிடக்கூடிய அளவிற்கு பாதிக்கக்கூடியவை.

பல்வகைக் காரணங்களால் குறிப்பிடத்தக்க அளவுக்கு பாதிக்கக்கூடியதுமான விவரங்களின் மொத்தமே புள்ளியியல் தரவுகள் ஆகும். இது புள்ளியியல் வல்லுநர்களுக்கு விளைவுகளை ஏற்படுத்தக்கூடிய காரணிகளை கண்டறிய உதவுகிறது. உதாரணமாக, சில பொருட்களின் விற்பனை விநியோகம், தேவை மற்றும் இறக்குமதி தரம் போன்ற காரணங்களால் பாதிக்கப்படுகிறது. இதேபோல் மில்லியன் இறப்புகள் ஏற்படும்போது நிர்வாகத்திற்கு அதற்குரிய காரணங்களை அறிந்து பின்னர் அதுபோல் மீண்டும் ஏற்படாதவாறு பார்த்துக்கொள்வர்.

(3) எண் வடிவில் விவரங்களை அளிப்பது

எல்லா புள்ளியியல் விவரங்களும் எண்வடிவில் சேகரிக்கப்படும். உதாரணமாக ஒரு தொலைபேசி நிறுவனத்தால் வழங்கப்படும் சேவையை குறை, சாராசரி, நிறை, மிக நிறை, சிறந்த போன்றவாறு வகைப்படுத்தலாம். இவைகள் இயற்கை பண்பு சார்ந்த விவரங்களாக அமைந்ததே தவிர புள்ளியியல் விவரங்களாக இல்லை. இவற்றையே எண் வடிவ தரவரிசையில்

குறை என்பதற்கு 0, சராசரி 1, நிறை 2, மிகநிறை 3, சிறந்த 4 என்ற வகையில் குறியிடலாம். இந்த புள்ளி விவரங்கள் பகுப்பாய்வு செய்வதற்கு பொருத்தமானது. இவைகள் எண் வடிவில் அமையும்போது புள்ளியியல் விவரம் எனப்படும். மற்றொரு வகையான பண்பு சார்ந்த குணநலன்களான நேர்மை, அழகு, அறிவு போன்றவை எண்வடிவில் அளக்க முடியாது. எனவே அவை புள்ளியியல் விவரம் ஆகாது.

(4) விவரங்களைச் செம்மையான அளவிற்கு மதிப்பீடு செய்தல்

எண்ணியல் தரவுகளைச் சேகரிக்கும் போது உண்மையான கணக்கீடு அல்லது அளவீடு அல்லது மதிப்பீடு மூலம் சேகரிக்கப்படுகிறது. வரம்புக்குட்பட்ட தரவுகளைச் சேகரிப்பது விசாரணையின் நோக்கம் என்றால் உண்மையான எண்ணிக்கை அல்லது சிறந்த அளவீடு மூலம் சேகரிக்க வேண்டும். உதாரணமாக ஒரு மருத்துவமனையில் சேர்க்கப்பட்ட நோயாளிகளைக் கணக்கிட நோயாளிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட வேண்டும். நோயாளிகளின் உயரம் மற்றும் எடையைக் கணக்கிட வேண்டும். ஏனெனில் உண்மையான மதிப்பிடல் சேகரிப்பது சாத்தியமாகவோ, சாத்தியம் அல்லாமலும் இருக்கலாம். சாத்தியமாக இருப்பின் அது நேரமும் செலவும் அதிகரிக்கும். கணக்கிடப்பட்ட விவரங்கள் துல்லியமாகவும், தெளிவாகவும் இருக்காது. ஓர் அர்த்தமுள்ள பகுப்பாய்விற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட தரத்திற்கு சரியான விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட வேண்டும்.

(5) ஒன்றோடொன்று தொடர்புள்ள வகையில் விவரங்களை அமைத்தல்

புள்ளியியல் தரவுகளைச் சேகரிப்பதின் முக்கிய நோக்கங்களில் ஒன்று ஒப்பிடலாகும். அர்த்தமுள்ள மற்றும் ஏற்புடைய ஒப்பிடல் செய்ய தரவுகள் முடிந்த அளவிற்கு ஒருமைதன்மை கொண்டதாக இருக்க வேண்டும், பலவகைத் தன்மை பெற்றிருக்கக் கூடாது. உதாரணமாக ஒரு நிர்வாகத்தில் உள்ள ஆண் ஊழியர்கள் மற்றும் பெண் ஊழியர்கள் மாதாந்திர சேமிப்புகளை ஒப்பிடலாம். ஆனால் 20 வயதுடைய மரங்களின் உயரத்தை 20 வயதுடைய இளைஞர்களின் உயரத்தோடு ஒப்பிடுவது என்பது அர்த்தமற்றதாகும்.

பின்வருவன அனைத்தும் புள்ளியியலை ஒருமையில் எடுத்துக்கொள்ளும்போது, அதற்கான வரையறைகளாகும்.

புள்ளியியலை தரவுகள் என்ற பொருளில் எடுத்துக்கொள்ளும்போது, புள்ளியியல் என்பது பகுப்பாயத்தக்கதும், விளக்கமளிக்க ஏற்றவாறு எண்வடிவிலான விவரங்கள் ஆகும்.

புள்ளியியலை அறிவியலாக எடுத்துக்கொள்கையில், எந்தவொரு தள விசாரணையிலும் கிடைக்கும் எண்வடிவிலான தரவுகளைச் சேகரிப்பதற்கும், அளிப்பதற்கும், பகுப்பாய்வதற்கும், விளக்கமளிப்பதற்கும் பயன்படும் மற்றும் கோட்பாடுகளை ஆய்வதற்கான அறிவியல் ஆகும்.

1.3 புள்ளியியலின் செயல்பாடுகள்

புள்ளியியலின் முக்கிய ஏழு பண்புகளை இங்கு காண்போம்:

வ. எ	செயல்பாடுகள்	செயல்
1	விவரங்களைச் சேகரித்தல்	புள்ளியியலில் அடிப்படையானது தரவாகும். ஆகையால் மிகவும் துல்லியமாகவும் அறிவியல் ரீதியாகவும் சேகரிக்க வேண்டும்.
2	வகைப்படுத்துதல்	சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகளை, பெரிய மற்றும் சிக்கலான தரவுகளை புரியும் வகையில் ஒத்த குணங்களுடைய குழுக்களாக வகைப்படுத்த வேண்டும்.

3	சுருங்கக் கூறுதல்	பகுப்பாய்விற்குத் தேவையான தகவல்களை இழந்துவிடாமல் தரவுகள் நேர்த்தியாக சுருக்கப்படவேண்டும். தரவுகளைச் சுருங்கக் கூறுதலின்போது தேவையான தகவலை இழந்துவிடாமல் துல்லியமாக புள்ளிவிவரத்தைப் பகுப்பாய்வு செய்யவேண்டும்.
4	ஒப்பிடல்	சிறந்த தரவுகளை அடையாளம் காண மற்றும் பிரிவுகளில் உள்ள ஒருங்கமைத்தன்மை அறிந்துகொள்வதற்குப் பயன்படுகிறது.
5	ஒட்டுறவு	மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள உறவைக் கண்டறியப் பயன்படுகிறது.
6	காரணம் அறிதல்	சார்பற்ற மாறிகள் மீது சார்புடைய மாறிகளின் பாதிப்பை மதிப்பீடு செய்ய உதவுகிறது.
7	வாய்ப்பு	நிச்சயமற்ற தன்மையிலிருந்து சரியான தீர்மானத்தை எடுக்க புள்ளியியல் மிகவும் உதவுகிறது.

1.4 நோக்கம் மற்றும் பயன்பாடுகள்

பண்டைய காலங்களில், புள்ளியியலின் நோக்கம் மிகக் குறுகியது. புள்ளியியல் என்ற சொல்லைக் கேட்கும்போது, மக்கள் உடனடியாக விளையாட்டு தொடர்பான எண்கள் அல்லது கல்லூரியில் பயின்ற மிகக் குறைந்த அளவு மதிப்பெண் பெற்று தேர்ச்சி பெற்ற ஒரு பாடத்தைப் பற்றி சிந்திக்கின்றனர். புள்ளியியலை இந்நிலையில் கற்பிக்கும்போது, அதற்கு ஒரு விரிவான வாய்ப்பு இருப்பதை உணர முடிகிறது. இன்றைய காலங்களில், புள்ளியியலைப் பயன்படுத்தாத எந்த மனித நடவடிக்கைகளும் இல்லை எனலாம். புள்ளியியலில் விளக்கப் புள்ளியியல் (விவரிக்கும்) முறை, தீர்மானிக்கும் புள்ளியியல் (அனுமான) முறை என இரு பிரிவு முறைகள் உள்ளன. மேலும் இவ்விரு முறைகளும் முக்கியமானவை மற்றும் வெவ்வேறான நோக்கங்களைக் கொண்டுள்ளன.

விளக்க புள்ளியியல் முறையானது பெரிய அளவில் உள்ள தரவுகளைச் சுருக்கி தொகுத்தளிப்பதில் பயன்படுகிறது. உதாரணமாக கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு, மையபோக்கு அளவைகள் விளக்க புள்ளியியல் ஆகும். விளக்க புள்ளியியலானது, சில குறிப்பிட்ட பிரச்சனைகளுக்குத் தீர்வு காண்பதற்காக, தரவுகளைச் சுருக்கிய வடிவில் தந்து விளக்குகிறது. இவை பெறப்பட்ட தரவுகளில் மட்டுமே செயல்படக்கூடியவைகளாகும். அதைத்தாண்டி செயல்பட கூடியவைகள் அல்ல.

மாறாக தீர்மானிக்கும் புள்ளியியலானது, பெருமளவிலான முழுமை தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட மாதிரிகளிலிருந்து அர்த்தமுள்ள சில முடிவுகளை எடுப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

உதாரணமாக, ஒருவர் தாம் கண்டுபிடித்த ஒரு மருந்தானது, புராதன மருந்தைவிட, ஒரு குறிப்பிட்ட நோயைக் குணப்படுத்துவதில் சிறந்ததாக இருக்கிறதா என்பதனைக் கண்டறிய சோதனை நடத்தலாம். அதற்காக அக்குறிப்பிட்ட நோயால் பாதிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு நோயாளிக்கும் அம்மருந்தைக் கொடுத்து சோதிக்க முடியாது. ஆனால் அதை ஒரு தேர்வு செய்யப்பட்ட மாதிரி தரவுகளில் சோதனை செய்து நிரூபிக்கலாம். ஒரு தர கட்டுப்பாட்டு பொறியியலாளர் ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிப்புகளின் தரத்தை அறிவதில் ஆர்வம் காட்டலாம். அதற்கு அவர் ஒர் ஆற்றல்மிக்க (சிறப்பான) முறையான ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய மாதிரியைக் கொண்டு தயாரிப்பாளர் மற்றும் நுகர்வோர்களின் உணர்வுகளைப் பாதுகாக்கலாம். ஒரு வேளாண் விஞ்ஞானி உரங்களின் செயல்பாடுகளின் தன்மையை உணர்ந்துகொள்ள வடிவமைக்கப்பட்ட சோதனைகள் மூலம் அவற்றை சோதித்துத் தெரிந்து கொள்கிறார். இதன்மூலம் பண்ணையின் பரப்பு, பயன்படுத்தப்பட்ட

நிலம், அறுவடை செய்யப்பட்ட பயிரின் அளவு போன்றவற்றையும் ஆர்வமிருப்பின், அறிந்துகொள்ளலாம்.

புள்ளியியல் முறையைப் பயன்படுத்துவதிலுள்ள மற்றொரு சிறப்பு என்னவெனில், ஒருவர் புள்ளியியலை அறிவியலின் எந்தவொரு பிரிவோடும், தொழில்நுட்பம் அல்லது பொருளாதாரம், வணிகம், பொறியியல், மருத்துவம், குற்றப்புலனாய்வு போன்ற பல சமூக அறிவியலோடும் சேர்த்துப் பயன்படுத்தலாம். புள்ளியியல் துறை அலுவல் என்பது பரபரப்பானது, சவாலானது மற்றும் வெகுமதியளிப்பதாகும். புள்ளியியல் வல்லுநர் என்பது மிக கௌரவமான பட்டமாகும். ஆனால் இடர்பாட்டுநிலை பகுப்பாய்வர், தரவு ஆய்வர், வணிக பகுப்பாய்வர் போன்றோர் புள்ளியியல் சார்ந்த துறைகளில் ஈடுபட்டுள்ளனர். புள்ளியியலிற்குப் பெருகி வரும் வாய்ப்பைக் கருத்தில்கொண்டு இந்திய பல்கலைக்கழகங்களும் மற்றும் பல்வேறு இடங்களில் உள்ள பல்கலைகழகங்களும் இளங்கலை மற்றும் முதுகலை பட்ட படிப்புகளில் புள்ளியியல் பாடங்களை பயிற்றுவிக்கின்றன. புள்ளியியலானது எல்லா வகையான துறைகளிலும் பயன்படுகிறது என்பதை ஏற்கனவே குறிப்பிட்டிருந்தோம். இப்பகுதியில் சில தேர்வு செய்யப்பட்ட துறை பிரிவுகளில் இதன் பயன்பாட்டைக் குறிப்பிட்டு காட்டுகிறோம்

1.4.1 புள்ளியியல் மற்றும் நிபுணத்துவ அளவீட்டு அறிவியல் (Statistics and actuarial science)

காப்பீட்டு அறிவியல் என்ற ஒரு அறிவியலானது புள்ளியியல் முறைகளை மிக அதிக அளவில் மற்ற எந்த பிரிவுகளைவிடவும் ஆயுட்காப்பீட்டு திட்டத்திலும், நிதி நிறுவனங்களிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. கல்வி மற்றும் அனுபவவாயிலாகவும் நிபுணத்துவ அளவீட்டு அறிவியலில் தகுதிபெற்றவர்கள் நிபுணத்துவ வல்லுநர்கள் என்றழைக்கப்படுகின்றனர். முன்பு ஒரு தீர்மானிக்கப்பட்ட மாதிரியையே காப்பீட்டு திட்டங்களுக்கான தவணைத் தொகையைத் தீர்மானிப்பதில் பயன்படுத்தினர். இன்றைய நாட்களில், நவீன கணினிகள் மற்றும் புள்ளியியல் முறைகள் இவ்வறிவியலை மிகப்பெரிய அளவில் வளர்த்திருக்கிறது. இந்தியாவில், 2006ஆம் ஆண்டிலிருந்து ஓர் அமைப்பு நிபுணத்துவ அளவீட்டு கல்வியை கொடுப்பதிலும், அதில் பயில்வோரின் திறமையை வளர்ப்பதிலும் கவனம் செலுத்துகிறது.

1.4.2 புள்ளியியல் மற்றும் வணிகம்

புள்ளியியல் முறைகள் வணிகத்தில் பெரும் அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. மேலும் பண பரிவர்த்தனை பகுப்பாய்வு, சந்தை ஆய்வு மற்றும் மனித ஆற்றலைத் திட்டமிடல் போன்ற பல வர்த்தக தீர்வுகளுக்கும் புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுகிறது.

எந்த வகையான நிறுவனமாக இருப்பினும், பாகுபாடின்றி ஒவ்வொரு வர்த்தக நிறுவனமும் அதன் வளர்ச்சிக்காக புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தியே ஆக வேண்டும். வர்த்தகர்கள் கடந்த கால தரவுகளிலிருந்தும், புள்ளியியல் முறைகளிலிருந்தும், பொருட்களின் விலை, வாங்குதல், விற்றல், இறக்குமதி, ஏற்றுமதி ஆகியவற்றின் போக்கைக் கணிக்கிறார்கள்.

யா–லூன்–சௌ என்ற புள்ளியியல் ஆசிரியர்; இன்றைய நாட்களில், "வர்த்தகத்தில் ஒவ்வொரு முடிவும் புள்ளியியல் தரவுகள் மற்றும் புள்ளியியல் முறைகள் ஆகியவற்றின் உதவியால்தான் எடுக்கப்படுகிறது" என்று கூறுகிறார்.

வெற்றிக் கதை

2004ஆம் ஆண்டு அமெரிக்கா ஐக்கிய நாடுகளின் கடற்கரை பிரதேசங்களை சாண்டி (Sandy) என்ற பெயரிடப்பட்ட புயல் கடுமையாகத் தாக்கியது. அதனால் பல்லாயிரக்கணக்கான மக்கள் அங்கு நிலவிய மோசமான பருவ நிலையாலும், மின்சாரம் இல்லாததாலும் பெரிதும் துன்பமுற்றனர்.

அச்சமயத்தில்தான் அப்பகுதியில் சில்லரை வணிகத்தில் ஈடுபட்டுள்ள புகழ் பெற்ற ஒரு பன்னாட்டு நிறுவனம் தமது தரவுத்தளத்தை ஆய்வு செய்த போது வியக்கத்தக்க முடிவுகளைக் கண்டறிந்தது. அதில் அப்பகுதி மக்களுக்கு அவசரகால கருவிகளும், உறைநிலை உணவுப் பொருட்களும் அதிகம் தேவைப்படுகிறது எனத் தெரிய வந்தது.

இம்முறையில் பகுப்பாய்வுகளை நடத்திய அப்பன்னாட்டு நிறுவனம் 2012 ஆம் ஆண்டு, பிரான்ஸ் (France) என்று பெயரிடப்பட்ட மற்றொரு புயல் வருவதை முன்கூட்டியே கணித்து, அதற்கேற்ப தனது வணிக யுத்தியை வகுத்துக்கொண்டது. முன்னேற்பாடாக, அந்நிறுவனம் அதிக அளவில் அவசரகால கருவிகளையும், உறைநிலை உணவுப் பொருட்களையும், பேரிடர் நிகழும் காலங்களில் தேவைப்படும் மற்ற பொருட்களையும் ஹரிக்கேன் புயல் பாதிப்பிற்கு உட்பட்ட பகுதியிலுள்ள எல்லா விற்பனை நிலையங்களுக்கும் அனுப்பி வைத்தது. அதனால் அந்நிறுவனத்தின் விற்பனை, மற்ற எல்லா நிறுவனங்களை விட மிகமிக அதிக அளவில் அமைந்ததால் விற்பனையில் மிகப்பெரும் வெற்றியைப் பெற்றது.

அதற்கு மிக முக்கிய காரணமாக இருந்தது, அப்பன்னாட்டு நிறுவனம் பெரும் தரவு பகுப்பாய்வைத் (Bigdata Analysis) தக்க முறையில் பயன்படுத்திக் கொண்டதேயாகும். இதன் மூலம் கணிப்புகளை மேற்கொள்வதால் அப்பன்னாட்டு நிறுவனங்கள், நேரம், செலவு, உழைப்பு போன்றவற்றைக் குறைத்து தங்கள் விற்பனையைப் பெரிதும் பெருக்கிக் கொள்ள உதவுகிறது.

1.4.3 புள்ளியியல் மற்றும் பொருளாதாரம்

கடைபிடிக்க வேண்டிய கொள்கைகள் மற்றும் பொது நிதிக்கொள்கைகள் போன்ற பொருளாதார விவரங்களைப் புரிந்துகொள்ள புள்ளியியல் முறைகள் மிகவும் பயனுள்ளவைகளாக உள்ளன. இந்த நவீன உலகில், பொருளாதார பாடமானது, நாட்டின் ஒரு சரியான சேவைக்கான பாடமாகவே நடத்தப்படுகிறது. இம்முயற்சி புள்ளியியலின் மிக அதிக அளவிலான பயன்பாட்டினால் உருவாக்கப்படுகிறது.

பொருளாதார பகுப்பாய்வில் பயன்படுத்தப்படும் சில முக்கியமான புள்ளியியல் முறைகள் (நுட்பங்கள்) காலத்தொடர்கள், குறியீட்டு எண்கள், மதிப்பீட்டு கருத்துருவாக்கல், வேறுபாட்டின் முக்கியத்துவத்தை மிகைக்காண் சோதனைகளை அறியும் சோதனைகள், வாய்ப்பு சார்ந்த மாதிரி வடிவம் போன்றவைகளாகும். என்பெர்க் (Enberg) அவர்களின் கூற்றுப்படி "எந்தவொரு பொருளாதார வல்லுநரும், புள்ளியியல் தரவுகளை விரிவாக ஆராயாமல் நாட்டின் வளத்தைப் பெருக்குவது அல்லது விநியோகிப்பது பற்றிய முடிவுகளை எடுப்பதற்கு முயற்சிப்பதில்லை."

நமது நாட்டில், பல மாநிலங்களில், அம்மாநிலங்களில் பெறப்பட்ட பொருளாதார தரவுகளை ஆராய்ந்து முடிவெடுப்பதற்காக வளர்ச்சியடைந்த துறையாக, பொருளாதார மற்றும் புள்ளியியல் துறையை நிறுவியிருக்கின்றன

1.4.4 புள்ளியியல் மற்றும் மருத்துவம்

மருத்துவ துறையில், புள்ளியியல் முறைகள் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. மருத்துவ வெளியீடுகளைக் கவனித்துப் பார்த்தால், புள்ளியியல் முறைகள் மருத்துவத்தில் எந்த அளவிற்கு ஒரு முக்கியமான பங்கு அளிக்கிறது என்பதை உணர முடிகிறது. மருத்துவ புள்ளியியல், மிகைக்காண் சோதனைகள், நம்பிக்கை இடைவெளிகள் மற்றும் பெருவாரியாக விரைவாக பரவுகின்ற நோய் மற்றும் பொதுநலம் உள்ளடக்கிய உடல்நல அறிவியலில் பயன்படுகிறது. நவீன புள்ளியியல் முறைகள், நாள்பட்ட வியாதியால் பாதிக்கப்பட்ட ஒருவர் இன்னும் எவ்வளவு காலங்கள் உயிரோடிருப்பார் என்றும், எந்தெந்த காரணிகள் அவரின் இறப்பிற்குக் காரணங்களாக இருக்கின்றன என்பது போன்ற ஒரு மருத்துவரின் கேள்விகளுக்கு விடையளிக்கக் கூடியதாக உள்ளன.

உடல்நலம் காப்பதில் புரட்சி

– The Economist, Feb 03,2018

இணையம் மூலமாக தமக்குப் பொருத்தமான மருத்துவப் பரிந்துரைகளைப் பெறுவது பற்றி நாம் அறிந்திருக்கறோம். தற்போதுள்ள தொழில்நுட்ப மேம்பாடுகளினால் நமது கைபேசி வழியாகவே நமது நடல்நலத்தைப் பேணும் வழிமுறைகளை அறிந்து கொள்ளலாம்.

நமது முந்தையை மருத்துவக் குறிப்புகளுடன் விடுபட்ட தேவையான மருத்துவ குறிப்புகளை கைபேசியின் மூலமாக பதிவு செய்து வழங்குவதன் மூலம் நோயின் தன்மையை கண்டறியும் திறன் பன்மடங்கு பெருகுகிறது. அதனால் திறமையின்மை குறைக்கப்பட்டு, சிக்கலான மருத்துவ நிரல்களுக்கு தீர்வு காணப்படுகிறது. இது போன்ற மருத்துவ செயலிகள் மூலம் நம் உடல் நலம் பேணிக் காப்பது பற்றி நாமும் சிந்திக்கலாமே...

1.4.5 புள்ளியியல் மற்றும் வேளாண்மை

பரிசோதித்தல் அதன் அடிப்படையில் உணர்தல் என்பது பொதுவான அறிவியல் முறையின் முக்கியமான பண்புகளாகும். வேளாண்மை அறிவியல் முறையிலும் சோதனைகள் நடத்தி ஒரு குறிப்பிட்ட வகை பயிர் மற்ற எந்த வகைப்பயிரை விடவும் அதிக விளைச்சலைக் கொடுக்கிறதா என்பதை உணர்ந்து முடிவுகள் எடுக்கப்படுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட வகை உரம் மற்ற எந்த வகையான உரங்களைவிடவும் அதிக பலன் அளிக்கக்கூடியதா? என்பதை உணர்ந்து முடிவுகள் எடுக்கப் பயன்படுகிறது.

விவசாய ஆராய்ச்சியில் ஈடுபடும் பல நிறுவனங்கள் உள்ளன. அவை மாறுபாட்டளவை பகுப்பாய்வு போன்ற சோதனை வடிவமைப்புகளில் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்துகின்றன. விவசாய புள்ளியியலில் ஆய்வுகள் செய்வதற்கென்றே (IASRI) என்ற நிறுவனம் புது தில்லியில் உள்ளது.

1.4.6 புள்ளியியல் மற்றும் தொழில்துறை

அறிவியல் மற்றும் தொழில் நுட்பத்தின் நவீனமயமான பயன்பாட்டிற்குப் புள்ளியியல் முறைகள் முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. பல புள்ளியியல் முறைகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளன. மேலும் அவை தொழிற்துறையில் ஏற்படும் பல்வேறுபட்ட பிரச்சனைக்கு தீர்வுகாண பயன்படுகிறது. உதாரணமாக, தயாரிக்கப்படும் பொருளின் தரத்தை பராமரிக்க (நீட்டிக்க) புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு முறைகளைப் பயன்படுத்துகின்றன.

காலச்சூழலில் தரம், எந்திரங்கள், மின்பொருட்கள், மின்னணு பொருட்கள் ஆகியவற்றில் நம்பகத்தன்மை அறியும் முறை விரிவடைந்திருக்கிறது. இவைகளில் புள்ளியியல் முறைகளே பயன்படுத்தப்படுகிறது. மொத்த தர மேலாண்மை மற்றும் சிக்ஸ் சிக்மா கருத்துரு (six sigma theory) போன்றவற்றில் புள்ளியியல் விதிகளே பயன்படுத்தப்படுகிறது.

1.4.7 புள்ளியியல் மற்றும் தகவல் தொழில் நுட்பம்

தகவல் தொழில்நுட்பத்தின் மூலம் கணினி மற்றும் தொலைத்தொடர்பு சாதனங்களைப் பயன்படுத்தி தரவுகளை சேகரிக்கவும், திரும்பப் பெறவும், பரிமாற்றம் மற்றும் செயல்படுத்தவும் முடிகிறது. இந்நாட்களில், பெரும்பாலான தொழிற்சாலைகள் தகவல் தொழில் நுட்பத்துடன் இணைந்திருக்கின்றன. மேலும் பெருமளவிலான தரவுகள் ஒவ்வொரு நாளும் சேகரிக்கப்படுகின்றன. இவ்வகையான தரவுகள் சரியான முறையில் பகுப்பாயப்படுவதால், இத்தரவுகளிலுள்ள தகவல்களை பயன்பாட்டாளர்கள் பயன்படுத்த ஏதுவாகிறது. ஆய்வு களத்தைப் பற்றி அறிந்துகொள்ள, தரவு எடுத்தல் (Data mining) என்பது வலைதளத்தில் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. தரவு எடுத்தல் (Data mining) என்பது கணினி அறிவியலின் உள்ளடங்கிய ஒரு பகுதியாகும். இது பெரும்அளவிலான தரவு தொகுப்பிலிருந்து, குறிப்பிட்ட முறைகளை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான கணக்கிடும் முறையாகும். இம்முறையில் செயற்கை நுண்ணறிவு மற்றும் புள்ளியியல் விபரங்களும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. புள்ளியியல் முறைகளில் பயிற்சியும், கணினி அறிவும் பெற்றவர்கள் தரவு பகுப்பாய்வாளர்களாக பெருமளவிலான தரவுகளை ஆராய்வதற்காகப் பணிபுரிகின்றனர்.

1.4.8 புள்ளியியல் மற்றும் அரசு நிர்வாகம்

புள்ளியியலானது, புள்ளியியல் தரவுகளை அரசுக்கு அளித்து, அரசின் திட்ட வளர்ச்சியைக் காணவும், சட்டம் ஒழுங்கைப் பேணவும், நலத்திட்டங்களை உருவாக்கவும், அரசின் மற்ற பிற திட்டங்களை மதிப்பிடவும் பயன்படுகிறது. குறிப்பாக, புள்ளியியல் தகவல்கள், மாநிலத்தின் மொத்த ஆளுமைக்கும் இன்றியமையாததாகும். உதாரணமாக, புள்ளியியலானது மக்கட்தொகை, விவசாய உற்பத்தி, தொழில் உற்பத்தி, வளம், இறக்குமதி, ஏற்றுமதி, குற்றங்கள், பிறப்பு விகிதம், வேலையின்மையின் அளவு, கல்வி, கனிமவளம் போன்ற இன்னும் பலவற்றைப் பற்றிய தகவல்களை அரசிற்குக் கொடுக்கிறது.

1.5 பெரும் தரவுகள் (Big Data)

மிகவும் அதிக எண்ணிக்கையால் ஆன தரவு உறுப்புகளைக் கொண்டதும் சிக்கலானதுமான தரவு அமைப்புகள் பெருந்தரவுகள் எனப்படும். அப்பெரும் எண்ணிக்கையிலான தரவு உறுப்புகளைச் சேமித்து வைப்பதும் பிறகு அவற்றை வழக்கமான தரவுத்தள மென்பொருள்களைக் கொண்டு தகவல்களைப் பெறுவதும் எளிதன்று. தினமும் மில்லியன் அளவிலான தகவல் தரவுகள் பதிவேற்றம் செய்யப்படுகின்றன. உலகத்தின் தகவல் தொகுப்புகளில் சுமார் 90% அளவிற்கு சமீப ஆண்டுகளில் தான் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன.

இன்றைய காலம், மகத்தான தகவல்கள் மூலம் இயக்கப்படுகிறது. எனவே தரவுகளைக் கையாளும் முறையும் அதனை விளக்குவதற்குமான வல்லுனர்களும் அதிகபடியான அளவில் தேவைப்படுவர். ஆதலால் வருங்காலத்தில் இது எல்லோரையும் ஈர்க்கும் ஒரு முக்கிய துறையாக மாறும்.

பெரும்தரவுகளின் பயன்பாடுகள்

மக்களைக் கருதாமல் பெருந்தரவுகளைப் பற்றி பேசுவது சரியல்ல. ஏனெனில் பெருந்தரவுகளால் மக்கள் பெறும் பயன்கள் அதிகமாகும். பொதுவாக இன்றைய நிலவரங்களில்

எல்லா தொழிலகங்களும் பெரும் தரவுகளைப் பயன்படுத்த ஆரம்பித்துவிட்டன. இனி பெரும் தரவுகள் பயன்படுத்தப்படும் சில துறைகளைக் காண்போம்.

உடல் நலம் பேணும் துறை: பல்வேறு நோயாளிகளின் உடல்நிலை சம்பந்தமான தரவுகள் கணினிகளில் பீட்டாபைட் (Petabyte) கணக்கில் சேமிக்கப்பட்டிருக்கும். அத்தரவுகளிலிருந்து மருத்துவம் சார்ந்த நிறுவனங்கள், தமக்கு வேண்டிய பயனுள்ள தகவல்களைப் பெற்று நோயாளிகளின் நலம் சார்ந்த செயல்களுக்கு முன்பாகவே உருவாக்கம் செய்ய முடியும்..

சில்லறை விற்பனை செய்யும் பெரும் நிறுவனங்கள்: பெரும் தரவுகளால் மிகப்பெரிய பயனை அடைவோர் சில்லறை விற்பனையில் ஈடுபடும் பெரும் நிறுவனங்களே. இப்பெரும் தரவு விவரங்களிலிருந்து நுகர்வோரின் மனப்பாங்கை அறிந்து, அவர்களின் மனநிலைக்கேற்ப பொருட்களை வழங்கி, விற்பனையைப் பெருக்குகின்றனர்.

உற்பத்தித்துறை: பெரும் தரவுகளைப் பகுப்பாய்வு செய்து, அதன்மூலம் எந்திரப் பொருட்களின் உதிரிபாகங்களிலுள்ள குறைகளைக் குறைக்கவும், பொருட்களின் தரத்தை உயர்த்தவும் திறன் மேம்பாடு அடையவும், நேரம், பணம் ஆகியவற்றை மிச்சப்படுத்தவும் உதவுகிறது.

போக்குவரத்து கண்காணிப்பு: உலக அளவில் பெரிய நகரங்களில் காணப்படும் போக்குவரத்து நெரிசலைச் சமாளிப்பது சவால் நிறைந்ததாகும். அதிக அடர்த்தியுள்ள மக்கள் தொகையுள்ள நகரங்களில் சென்சார்களைக் (sensor) கொண்டு, பெரும் தரவுகளைப் பெற்று போக்குவரத்து நெரிசல் தீர்க்கப்பட்டு மேம்படுத்தப்படுகிறது.

தேடல் தரம்: கூகுல் (google) தேடுபொறி மூலம் தேடும் ஒவ்வொரு தகவலுக்கும் நாம் அச்சொல்லை கூகுளுக்குள் சேர்த்து வைக்கிறோம். பெரும் தரவுகளுள் ஒன்றாக இதையும் சேமித்து அடுத்த முறை தேடும்போது தேடும் தரத்தை உயர்த்துகிறது.

விற்பனை பெருக்கத்திற்கான விளம்பரம்: மிகச் சிறந்த விளையாட்டு வீரர்கள், நடிகர்கள், புகழ்வாய்ந்தவர்கள் பற்றிய செய்திகள், செய்தித்தாள்கள், சமூக ஊடகங்கள், வலைதளங்களில் இடம் பெறுவதால் அவர்களை பெரும் நிறுவனங்கள் தத்தம் விளம்பரத் தூதுவர்களாக நியமித்து தங்கள் வணிகத்தைப் பெருக்குகின்றன.

பெரும் தரவுகளுக்குள்ள சவால்கள்

பெரும் தரவுதகளால் பெரும்பயன் பெற்றாலும் சில சவால்களைச் சந்திக்க வேண்டியுள்ளது. அவை தரவுகளைச் சேமிப்பதற்கான மிகப்பெரும் சேமிக்கும் இடம், தரவுகளின் தரம், பகுப்பாய்வுத் திறன், திறமையின்மை போன்றவையாகும்.

இச்சவாலை சமாளிக்கும் விதமாக ஹடூப் (Hadoop) என்ற மென்பொருள் பெருமளவில் உதவிபுரிகிறது. இது ஜாவா மொழியை அடிப்படையாகக் கொண்ட திறந்த வகையிலான நிரல்களைக் கொண்ட அமைப்பாகும். இம்மென்பொருள் அமைப்பு பரவலான பங்கீட்டு முறை சூழ்நிலையில் கணக்கிடுவதற்கும் ஏராளமான தரவு கணங்களைக் கையாள்வதற்கும் ஏற்றதாகும்.

1.6 தரவுகளின் பொருளும் வகைகளும்

முடிவு எடுப்பதற்காக, சேகரிக்கப்பட்ட தகவல்கள் குறிப்பாக விவரங்கள் (அல்லது) தரவுகள் எனப்படும். தரவுகள் எண் சார்ந்தவையாகவோ தீர்மானமானவையாகவோ (வகைப்படுத்தப்படக்கூடிய) இருக்கலாம். தரவுகள் ஒரு மாறி சார்ந்தும் உருவாக்கப்படலாம்.

மாறி: இடத்திற்கு இடம், நபருக்கு நபர், முயற்சிக்கு முயற்சி மேலும் பல சூழல்களில், மாறக்கூடிய ஒன்று மாறி எனப்படும். உதாரணமாக, உயரம் ஒரு மாறி, வசிப்பிடம் ஒரு மாறி ஏனெனில் இவை நபருக்கு நபர் மாறுபடுகிறது.

ஒரு மாறியானது அளவிடக்கூடியதாகவும் எண் உருவில் குறிப்பிடக்கூடியதாகவும் இருப்பின் அது எண் சார்ந்த மாறி எனப்படும்.

ஒரு மாறியானது அளவிடமுடியாததாகவும், எண்ணுருவில் குறிப்பிட முடியாததாகவும் இருப்பின் அது பண்பு சார்ந்த மாறி எனப்படும். இம்மாறிகள் தீர்மானமான மாறிகள் (வகைப்படுத்தப்படக் கூடிய) என்றும் அழைக்கப்படும்.

உயரம் என்பது எண் சார்ந்த மாறி, ஏனெனில் இதை அளவிட முடியும். மேலும் எண்ணால் குறிப்பிட முடியும். அதே வேளையில், வசிப்பிடம் ஒரு பண்பு சார்ந்த மாறி ஏனெனில் இதை அளவிட முடியாது. மேலும் கிராமம் அல்லது நகரம் என்றே குறிக்க முடிகிறது. இவைகள் எண்ணால் குறிப்பிடப்படுவதில்லை என்பதை கவனத்தில் கொள்ளவும்.

எண் சார்ந்த தரவுகள்:

அளவுகள் சேகரிக்கப்பட்டு, எண்களாக பதிவிடப்பட்டிருப்பின் அம்மாதிரியான தரவுகள் எண்சார்ந்த தரவுகள் எனப்படும். உதாரணமாக உயரம், எடை போன்ற பல எண் சார்ந்த தரவுகளாகும்.

பண்புசார்ந்த தரவுகள்:

இயற்கையாக எண் முறைப்படி, அளவிட முடியாததாக உள்ள தரவுகள் பண்பு சார்ந்த தரவுகள் எனப்படும். உதாரணமாக, இரத்தத்தின் பிரிவானது Rh காரணியோடு சேர்த்து O,A,B என வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இவை ஏற்கனவே சொல்லப்பட்டிருக்கிற அல்லது வடிவமைக்கப்பட்டிருக்கிற ஏதாவது ஒன்றாக வகைப்படுத்தப்படுகிறது.

1.7 அளவீட்டு அளவைகள்

தரவுகள் நான்கு வகைகளாக (அ) அளவீட்டு அளவைகளாக பிரிக்கப்படுகின்றன. அவை பெயரளவு (பண்பு சார்ந்த) வரிசைப்படுத்தக்கூடிய இடைவெளிகளில் கொடுக்கக்கூடிய மற்றும் விகிதாசாராத்தில் கொடுக்கக்கூடிய தரவுகள் எனப்படும். அளவீட்டு அளவைகள் ஸ்டான்லி ஸ்டீவன்ஸ் என்பவரால் உருவாக்கப்பட்டது.

1.7.1 பெயரளவு அளவுகள் (Nominal Scale):

பெயரளவு அளவுகள் (பண்பு சார்ந்த அளவுகள்) ஒரு மாறியை எந்தவொரு எண் அளவு இல்லாமல் குறிப்பதற்காக கொடுக்கப்படும் அளவுகள். உதாரணமாக உங்கள் பாலினம் என்ன? என்று ஒரு வினாபட்டியலில் நாம் ஒரு கேள்வியை எழுப்பலாம். அதற்கு ஆண் இனம் அல்லது பெண் இனம் என விடையாக இருக்கும். இங்கு பாலினம் என்பது பெயரளவு மாறியாகும். மேலும் ஆண் இனம் எனில் 1 எனவும் பெண் இனம் எனில் 2 எனவும் இம்மாறிகளை எண் மதிப்போடு தொடர்புபடுத்தலாம். இவைகள் பெயரளவிலே எண்களாக குறிப்பிடப்படுகிறது. மேலும் ஒருவர் தனியாகவோ, திருமணமானவராகவோ, விதவையாக, விவாகரத்து பெற்றவராகவோ இருப்பின் முறையே 1, 2, 3, 4 என்ற எண்களால் குறிப்பிடலாம். இந்த எண்கள், நாம் அன்றாட வாழ்வில் பயன்படுத்தும் எண்களின் பண்புகள் எதையும் கொண்டிருப்பதில்லை. இங்கு 4 > 1 or 2 < 3 or 1+3 = 4 என நாம் கூற முடியாது. இவற்றை வரிசைப்படுத்துவது என்பது முரணானதாகும். இவ்வகையான தரவுகளை வரிசைப்படுத்தியோ, கணித விதிகளைப் பயன்படுத்தியோ செய்யப்படும் எந்தவொரு புள்ளியியல் ஆய்வும் அர்த்தமற்றதாகும்.

1.7.2 வரிசைப்படுத்தக்கூடிய அளவுகள் :

இந்த மாதிரியான அளவுகள் எண்ணியலின் சில பண்புகளைப் பெற்றிருக்கின்றன. ஆனால் அனைத்து பண்புகளையும் பெற்றிருப்பதில்லை. உதாரணமாக மகிழுந்துகளை நாம் சிறிய, நடுத்தர மற்றும் பெரிய அளவிலான மகிழுந்து என அவற்றின் அளவுகளைப் பொறுத்து சொல்கிறோம். வரிசைப்படுத்துதலில் அளவுகளின் வரிசையே மிக முக்கியம். ஆனால் அவ்வளவுகளில் வேறுபாடு தெரிவதில்லை. கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம்.

நேற்று வேடந்தாங்கலுக்கு நாம் சென்ற உல்லாசப் பயணம் எப்படி இருந்தது என்ற கேள்விக்கு விடையாக : (1) மிக்க மகிழ்ச்சி இல்லை (2) மகிழ்ச்சியில்லை (3) பரவாயில்லை (4) மகிழ்ச்சி (5) மிக்க மகிழ்ச்சி எனக் கிடைக்கலாம். இவ்வரிசையில் எண் 5, 4 ஐ விட சிறந்தது அல்லது 3 ஐ விட சிறந்தது என அறிவோம். ஆனால் எவ்வளவு சிறந்தது என அறிய முடிவதில்லை. உதாரணமாக பரவாயில்லை மற்றும் மகிழ்ச்சி இல்லை என்பதற்கும் உள்ள வித்தியாசமும் மிக மகிழ்ச்சி மற்றும் மகிழ்ச்சி என்பதற்கு இடையேயுள்ள வித்தியாசமும் சமம் என நம்மால் கூற இயலாது.

இதைப்போலவே மருத்துவர், ஒரு நோயாளியின் நிலையை நன்று, பரவாயில்லை, மோசம், மிகமிக மோசம் எனக் கூறலாம். மேலும் அவர் நன்றுக்கு 1 எனவும், பரவாயில்லை என்பதற்கு 2 எனவும், மோசம் என்பதற்கு 3 எனவும், மிக மோசம் என்பதற்கு 4 எனவும் எண் குறியிடலாம். நோயாளியின் நிலைமையின் அளவானது 1 இல் இருந்து 4 வரை கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கலாம் 1 < 2 அல்லது 2 < 3 அல்லது 3 < 4 எனினும் மேல்கண்டவை நோயாளியின் நிலையை மட்டுமே குறிக்கிறது. வரிசைப்படுத்துதல் அளவில் நாம் மாறிகளின் வரிசையை மட்டுமே உணருகிறோம். இம்மாதிரியான தரவுகளில் சராசரி அளவிட முடியாது. ஆனால் இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு அளவிட முடியும்.

1.7.3 இடைவெளி அளவுகள்:

இடைவெளி அளவுகளில் மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசத்தை கணக்கிட முடியும். ஆனால் அவற்றின் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல்களைக் காண முடியாது. வேறுவிதமாக இடைவெளி மாறிகளுக்கு இடையில் உள்ள தூரங்களை மட்டுமே அறிய முடியும்.

உதாரணமாக ஃபாரன்ஹீட் அளவுகளில்: $60^\circ, 65^\circ, 88^\circ, 105^\circ, 115^\circ$, and 120° என்று வெப்பநிலை அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பது எனில் நாம் $105^\circ > 88^\circ$ அல்லது $60^\circ < 65^\circ$ என எழுதலாம். இவைகள் 105° என்பது 88° விட வெப்பமானது என்றும் 60° என்பது 65° ஐ விட குளிரானது என்பதைக் குறிக்கின்றன. மேலும் $65^\circ - 60^\circ = 120^\circ - 115^\circ$ ஐ விட குளிரானது என்பதைக் குறிக்கின்றன. மேலும் 650 – 600 = 1200 – 1150 என எழுதலாம். ஏனெனில் சம வெப்பநிலை வித்தியாசங்கள் சமம். அதாவது வெப்பநிலையானது 60° –லிருந்து 65° ஆவதற்கு தேவையான வெப்பம் 115° –லிருந்து 120° அளவிற்கு ஆவதற்கு தேவைப்படும் வெப்பத்திற்கு சமம் ஆதலில் 120° என்பது 60° –ல் வகுபடும்போது 2 என இருப்பினும் வெப்பநிலை இருமடங்கு அல்ல. அதற்கான காரணம் பாரன்ஹீட் அளவை செல்சியஸ் அளவில் மாற்றும்போது காணலாம்.

$$60^\circ F = \frac{5}{9}[60^\circ - 32^\circ]C = 15.570^\circ C \text{ மற்றும்}$$

$$120^\circ F = \frac{5}{9}[120^\circ - 32^\circ]C = 48.870^\circ C$$

குறிப்பு

'0' என்பது ஆதியாக இல்லாதபோது விகிதங்களை காண்பது இயலாது..

மேலே கண்ட சமன்பாடுகளில் இடதுபக்க அளவுகளில் $120^\circ F$ என்பது $60^\circ F$ இருமடங்கு என்பதும் வலது பக்க அளவுகளில் $48.87^\circ C$ என்பது $15.57^\circ C$ மூன்று மடங்கைவிட பெரியது என தெளிவாக தெரிகிறது. இந்த பிரச்சனைக்கான காரணம் என்னவெனில் பாரன்ஹீட், செல்சியஸ் அளவைகள் செயற்கை ஆதிகளைப் பெற்றிருக்கின்றன. வெப்பமின்மை என்ற ஒன்றே இல்லை.

1.7.4 விகித அளவுகள்

அளவிடக்கூடிய அளவுகள் என்று வரும்போது விகித அளவுகள் முக்கியமானவை. ஏனெனில் அவை வரிசைகளைக் கூறுகளுக்கான சரியான அளவுகளைக் குறிக்கின்றன. மேலும் பூஜ்ஜியம் என்ற மதிப்பைக் கொண்டுள்ளது. இது விளக்கப் புள்ளியியல் மற்றும் உய்த்துணர்வு புள்ளியியல் ஆகியவற்றில் பயன்படுத்தக்கூடியதாக இருக்கிறது. விகித மாறிகளுக்கு சரியான உதாரணங்களில் உயரம் மற்றும் எடை ஆகியவை உள்ளன. விகித மாறிகள் புள்ளியியல் பகுப்பாய்வுகள் விகித அளவைகள் ஏராளமான வழிகளைத் தருகிறது. இந்த மாறிகளைக் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் போன்ற கணித செயல்பாடுகளுக்குப் பயன்படுத்த முடியும். விகித அளவைகளைப் பயன்படுத்தி மைய அளவையான முகடு, இடைநிலை அளவு, சராசரி ஆகியவற்றையும் சிதறல் அளவைகளான திட்டவிலக்கம் மற்றும் மாறுபாட்டுக்கெழு போன்றவற்றைக் கணக்கிடலாம்.

தொகுப்பாக பண்பு சார்ந்த அளவைகள் குறியிடுவதற்கும் பயன்படுகிறது. வரிசை அளவைகள் வரிசையிடுதலில் நல்ல தகவல்களைத் தருகின்றன. வாடிக்கையாளர் திருப்தி ஆய்வில் இருப்பதைவிட இடைவெளி அளவுகள் வரிசைப்படுத்தலையும் மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசத்தில் அறியப்படுகின்றன. இறுதியாக விகித அளவுகள் வரிசைப்படுத்துதல், இடைவெளி மதிப்பிடுதல் விகிதங்களை கணக்கிடுதல் ஆகியவற்றிற்கு பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஏனெனில் இங்கு பூஜ்ஜியம் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. பண்பு, வரிசை, இடைவெளி மற்றும் விகித அளவைகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசங்களை நாம் விரிவாகக் கண்டோம். ஏனெனில் இவற்றின் பயன்பாடுகள் கணிணியிலும் புள்ளியியல் மென்பொருள்களான SPSS, SAS, R, STATA போன்ற பலவற்றில் காணப்படுகின்றன.

நினைவில் கொள்க...	
● புள்ளியியலின் குணங்கள்	ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காக திட்டமிடப்பட்ட முறையில் சேகரிக்கப்பட்ட மொத்த விவரங்கள் அதிக எண்ணிக்கையிலான காரணிகளால் ஒரு குறிப்பிடக்கூடிய அளவிற்கு பாதிக்கக்கூடியவைகள் எண் வடிவில் விவரங்களை அளிப்பது விவரங்களைச் செம்மையான அளவிற்கு மதிப்பீடு செய்தல் ஒன்றோடொன்று தொடர்புள்ள வகையில் விவரங்களை அமைத்தல்
● பெரும்தரவுகளின் பயன்பாடுகள்	சுகாதாரத் துறை, சில்லறை விற்பனை செய்யும் பெரும் நிறுவனங்கள், போக்குவரத்து கண்காணிப்பு, உற்பத்தித்துறை, தர நிர்ணயம், விற்பனை பெருக்கத்திற்கான விளம்பரம்
● நோக்கம் மற்றும் பயன்பாடுகள்	விவரங்களைச் சேகரித்தல், வகைப்படுத்துதல், சுருங்கக் கூறுதல், ஒப்பிடல், ஒட்டுறவு, காரணம் அறிதல், வாய்ப்பு அறிதல்
● நோக்கம் மற்றும் பயன்பாடுகள்	புள்ளியியல் மற்றும் வணிகம், புள்ளியியல் மற்றும் பொருளாதாரம், புள்ளியியல் மற்றும் மருத்துவம், புள்ளியியல் மற்றும் விவசாயம், புள்ளியியல் மற்றும் தொழில்துறை, புள்ளியியல் மற்றும் தகவல் தொழில் நுட்பம், புள்ளியியல் மற்றும் அரசு நிர்வாகம்
● தரவுகளின் வகைகள்	எண் சார்ந்த தரவுகள், பண்பு சார்ந்த தரவுகள்
● அளவீட்டு அளவைகள்	பெயரளவு அளவுகள், வரிசைப்படுத்தக்கூடிய அளவுகள், இடைவெளி அளவுகள், விகித அளவுகள்

பயிற்சி

6C6NZ3

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. ஒரு தொழிலாளி ஒரு வருடத்தில் எடுத்த விடுமுறை நாட்களின் எண்ணிக்கை

   (a) பண்பு அளவு (b) வரிசை அளவு (c) இடைவெளி அளவு (d) விகித அளவு

2. நிறத்தைப் பொறுத்து வகையிடக்கூடிய தரவு என்பது

   (a) பண்பு அளவு (b) வரிசை அளவு (c) இடைவெளி அளவு (d) விகித அளவு

3. படங்களைத் தரமிடுதல் என்பது

   (a) பண்பு அளவு (b) வரிசை அளவு (c) இடைவெளி அளவு (d) விகித அளவு

4. மருத்துவமனையில் இருந்த நேரத்தில் ஒரு நோயாளியின் வெப்பநிலை $100^{O}F$ என்பது

   (a) பண்பு அளவு (b) வரிசை அளவு (c) இடைவெளி அளவு (d) விகித அளவு

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக:

5. புள்ளியியல் ____________________ ஐ சார்ந்தது

6. புள்ளியியலை ____________________ மற்றும் ____________________ என்று வகைப்படுத்தலாம்

7. பண்டைய காலப் புள்ளியியலில் ____________________ அளவை பயன்படுத்தப்பட்டது.

8. மாணவர்களின் வயது ____________________ மாறியாகும்.

9. இந்திய புள்ளியியல் நிறுவனத்தை (ISI) தோற்றுவித்தவர் ____________________

10. உன் நகரத்தின் தட்டவெட்ப நிலை ____________________ அளவீட்டு அளவையாகும்.

11. ஒரு மாணவரின் அறிவுத்திறன் விகிதம் ____________________ மாறியாகும்.

12. ஒரு காரின் நிறம் ____________________ அளவீட்டு அளவையாகும்.

13. ஒரு நாடாளுமன்ற பிரதிநிதியின் பெயரைக் குறிப்பிடுவது ____________________ அளவீடு.

14. ஒரு விற்பனையாளரின் செயல்பாடு சிறந்தது. அச்சிறந்த என்பது ____________________ அளவீடு.

III. குறுவினா (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி):

15. புள்ளியியல் என்பதை வரையறு.

16. தரவுகள் என்றால் என்ன?

17. நிபுணத்துவ மதிப்பீட்டு அறிவியலில் புள்ளியியல் பயன்பாடுகளைக் கூறுக.

IV. சிறுவினா (ஓரிரு சொற்றொடர்களில் விடையளி):

18. கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன் அவர்களின் புள்ளியியல் வரையறையை எழுதுக.

19. புள்ளியியலின் குணங்களை பட்டியலிடுக?

20. பண்புசார்ந்த மற்றும் எண்சார்ந்த மாறிகளைப் பற்றி நீவீர் அறிவன யாவை?

V. விரிவாக விடையளி:

21. P.C. மஹலனோபிஸ் அவர்களின் பங்களிப்பைப் பற்றி ஒரு குறிப்பு வரைக.

22. புள்ளியியலின் தோற்றமும் வளர்ச்சியும் பற்றி ஒரு குறிப்பு வரைக

23. புள்ளியியலின் பணிகளைப் பற்றி விளக்குக.

24. விவசாயம் மற்றும் தொழில்துறையில் புள்ளியியலின் பயன்பாடுகளைப் பற்றி விளக்குக.

விடைகள்

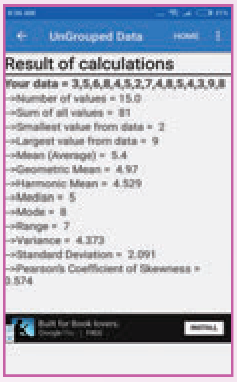
I. 1. d 2. b 3. b 4. c

II. 5. எண் விவரங்கள் 6. ஒருமை மற்றும் பன்மை 7. எண்ணுதல் 8. எண் சார்ந்த 9. P.C.மஹாலனோபிஸ் 10. இடைவெளி 11. எண் சார்ந்த 12. வரிசைப்படுத்தக்கூடிய 13. பெயரளவு 14. வரிசைப்படுத்தக்கூடிய

இணையச்செயல்பாடு

புள்ளியியல் பகுப்பாய்வு

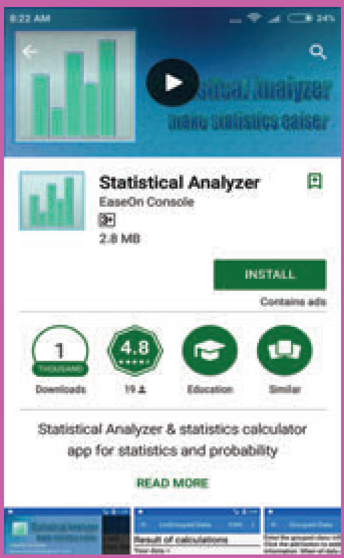
சராசரி, இடைநிலை, வீச்சு, பரவல், திட்ட விளக்கம் அறிவோமா!



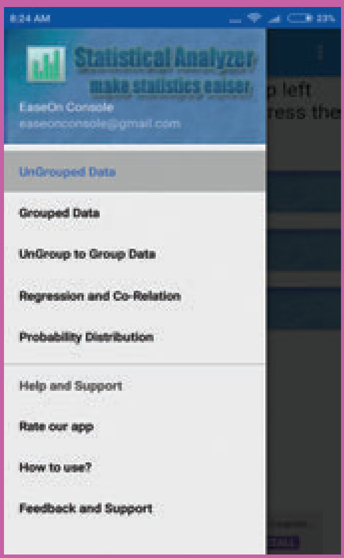
படிகள்

1. கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி Google Play store இல் "Statistical Analyzer" என்னும் செயலியைத் தரவிறக்கி நிறுவிக்கொள்க.
2. திரையில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தெரிவுகளில் "Menu" வைத் தெரிவு செய்து கொள்க. திரையில் தோன்றும் மெனுவில் "Ungrouped data" என்பதைத் தெரிவு செய்க.
3. "Ungrouped data" பக்கத்தில் மூலத்தரவை தட்டச்சு செய்து "CALCULATE" பொத்தானைச் சொடுக்கினால் தேவையான வெளியீடு கிடைக்கும்.

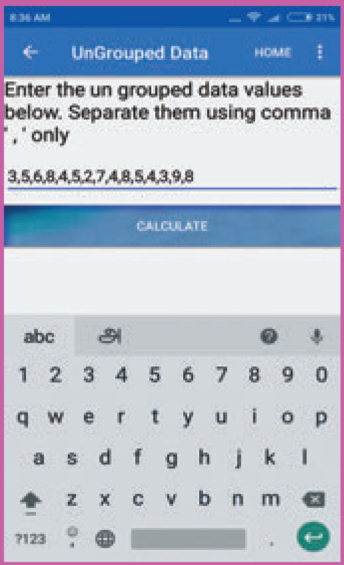
படி 1



படி 2



படி 3



* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

உரலி:

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.easeonconsole.malik.statisticcalculator

B136_11_STA_TM

அத்தியாயம்

2

தரவு சேகரித்தலும் மாதிரி கணிப்பு முறைகளும்

பாண்டுரங் வாசுதியோ சுகாத்மே
(27 ஜூலை, 1911 –
28 சனவரி 1997)

பாண்டுரங் வாசுதியோ சுகாத்மே அவர்கள் 1911–ம் ஆண்டு ஜுலை திங்கள் 27ஆம் நாள் புனேவில் உள்ள சதாரா மாவட்டத்தின் புத் என்னும் கிராமத்தில் பிறந்தார். அவர் 1933–36 ஆண்டுகளில் லண்டனில் உள்ள பல்கலைக்கழக கல்லூரியில் பயின்றார். 1936இல் முனைவர் பட்டமும்; 1939இல் D.Sc பட்டமும் பெற்றார். லண்டனில் பயின்ற காலங்களில் ஆர்.ஏ.பிஷர், ஜெர்சி நெய்மென், மற்றும் இ.எஸ். பெர்சன் போன்ற புள்ளியியல் அறிஞர்களின் வழிகாட்டுதலோடு புள்ளியியலில் மாதிரிகணிப்பு முறைகளின் கருத்துருவாக்க ஆராய்ச்சிகளை மேற்கொண்டார். இந்தியாவில், ICAR என்ற அமைப்பில் புள்ளியியல் துறையின் தலைவராகவும், ஆலோசகராகவும் நியமிக்கப்பட்டார். இவருடைய ஆளுமைமிக்க தலைமையின் கீழ் ICAR அமைப்பின் புள்ளியியல் துறையானது படிப்படியாக வளர்ந்து இந்திய வேளாண்மைப் புள்ளியியல் ஆராய்ச்சி நிறுவனமாக (IASRI) வளர்ந்தது. இந்நிறுவனமானது வேளாண்மைப் புள்ளியியலில் சிறந்த ஆய்வுகளை மேற்கொள்வதற்கு என்றே உருவாக்கப்பட்டு சிறந்த முறையில் பணியாற்றி வருகிறது.

'அனுபவம் மூலமாகக் கற்றுக்கொள்ளும் அறிவியலே புள்ளியியல் எனக் கூறலாம்'
– பிராட்லி எப்ரான்

நோக்கங்கள்

- தரவு சேகரித்தலின் முக்கியத்துவத்தை அறிதல்.
- முதல் மற்றும் இரண்டாம் நிலைத் தரவுகளை வேறுபடுத்துதல்.
- முதல்நிலை தரவுகளை சேகரிக்கும் முறைகளை நிறை, குறைகளோடு அறிமுகப்படுத்துதல்.
- தரவுகளை சேகரிக்க வினாப்பட்டியல் தயாரித்தல்.
- இரண்டாம் நிலைத் தரவுகளை விவரித்தல்.
- மாதிரி தொகுதி , முழுமைத் தொகுதியைவிட சிறந்தது என விளக்கமளித்தல்.

6CFK1Q

- ✪ நிகழ்தகவு மாதிரிக் கணிப்பு, நன்மைகளை விவரித்தல்.
- ✪ நிகழ்தகவு சாரா மாதிரிக் கணிப்பு முறையின் பயன்களை விளக்குதல்.
- ✪ மாதிரிக் கணிப்புமுறை மிகை மற்றும் மாதிரிக் கணிப்பு அற்ற பிழைகள் வேறுபடுத்துதல்

அறிமுகம்

புள்ளியியல் தரவு என்பது புள்ளியியல் வல்லுநர்களுக்கு அடிப்படையான மூலப்பொருளாகும். பெறப்பட்ட விவரங்களைக் குறிக்கும் எண்வடிவிலான தொகுப்பே புள்ளியியல் தரவு எனப்படும். மனித வாழ்வின் ஒவ்வொரு செயலுக்கும் தரவு சேகரித்தல் மிக அவசியமாகும். தேவையற்ற விவரங்களைச் சேகரித்து தேவையற்ற முடிவுகளைப் பெறுவதும் புள்ளியியலில் சாத்தியமாகும். ஆதலால் தரவுகளைச் சேகரிக்கும்போது உரிய கவனிப்புடன் சேகரிப்பது நல்லது.

தரவு சேகரிக்கும் முறை:

எந்த? என்ன? எப்படி? யார்? எங்கே? எப்போது? என்ற ஐந்து முக்கிய வினாக்களைத் தரவு சேகரிக்கும்போது எழுப்பி அதற்கான விடை தேட வேண்டும்.

வினாக்கள்	செயல்பாடுகள்
எவ்விதமான தரவு சேகரிக்கப்பட வேண்டும்?	ஆய்விற்குத் தொடர்புடைய தரவினை முடிவு செய்தல்
தரவுகளை எப்படி சேகரிப்பது?	தரவுகளைச் சேகரிப்பதன் செயலிகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல்
தரவுகளை யார் சேகரிப்பது?	முதன்மை தரவு ∴ இரண்டாம் தரவு சேகரிக்கும் முறை
எங்கே இருந்து தரவினைத் தேர்ந்தெடுப்பது?	முதன்மை தொகுதியை தேர்ந்தெடுத்தல்
எப்போது தரவினை தேர்ந்தெடுப்பது?	சரியான கால நேரத்தினைத் தேர்ந்தெடுப்பது

மேற்கண்டவற்றைப் பற்றி இப்பாடத்தில் விரிவாகக் காண்போம்

2.1 தரவுகளின் வகைகளும் அவற்றைப் பெறும் முறைகளும்

தரவுகளை முதல் நிலைத் தரவுகள், இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள் என்று இருவகையாக வகைப்படுத்தலாம்.

முதல் நிலை தரவுகள்: ஓர் ஆய்வாளர் விசாரணை மூலமாகவோ, பரிசோதனையிலிருந்தோ அல்லது உன்னிப்பாக கவனித்தோ தாமே நேரிடையாகச் சேகரிக்கும் விவரங்கள் முதல்நிலைத் தரவுகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக

- தங்களது குழந்தையை, தங்கள் பகுதியில் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட பள்ளியில் சேர்ப்பதற்கான காரணங்களைப் பெற்றோர்களிடம் இருந்து விசாரித்து அறியும் தரவுகள்
- வாடிக்கையாளர்களிடம், நிர்வாகத்தின் சேவை பற்றி அவர்கள் பெற்ற அனுபவங்களைக் கொண்டு சேகரித்த தரவுகள்
- ஒரு குறிப்பிட்ட மருந்தின் செயல் திறனை அறிந்து கொள்ள அம்மருந்தையும் அதே போன்ற மற்றொரு மருந்தையும் (Placebo) கொண்டு சோதனை செய்வதால் பெறப்படும் தரவுகள்.

முதல் நிலைதரவுகளைப் பெறும் பல்வேறு முறைகளை இனி விரிவாகக் காணலாம்.

2.2 முதல் நிலை தரவுகளைச் சேகரிக்கும் முறைகள்

இப்பகுதியில் முதல்நிலை தரவுகளைச் சேகரிக்கும் வெவ்வேறு வகையான முறைகளைக் காணலாம். இங்கு ஆய்வாளர் என்பவர் புள்ளியியல் ஆய்வு (விசாரணை) நடத்துபவர் எனவும், ஆய்வாளருக்குத் தகவல்களை நேரிடையாகக் கொடுப்பவர் தகவல் அளிப்பவர் (பதிலளிப்பவர்) (Respondent) எனவும் எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது.

முதல்நிலைத் தரவுகளை கீழ்க்காணும் மூன்று வகைகளில் பெறலாம்.

(i) **விசாரணை முறை (தரவுகள்) :** ஆய்வாளர் அல்லது அவருடைய பிரதிநிதிகள் தகவல் அளிப்பவரை நேரிடையாகச் சந்தித்துப் பெறப்படும் தரவுகள், விசாரணை தரவுகள் எனப்படும்

(ii) **சோதனை முறை தரவுகள் (தளத்திலிருந்து / ஆய்வகத்திலிருந்து) :** சோதனை முறையில் சார்பற்ற மாறிகளை சில நிபந்தனைகளுக்கு உட்படுத்தி சார்புடைய மாறிகளின் மதிப்புகளைப் பெறும் தரவுகள்.

(iii) **கவனித்தறிதல் மூலம் பெறப்படும் தரவுகள்:** உளவியல் ஆய்வு அல்லது மருத்துவ முறையில் ஆய்வாளர் சம்பந்தப்பட்டவர் பற்றிய விவரப் பதிவுகளை பதிவேடுகளிலிருந்து நன்கு கவனித்து தரவுகளை சேகரித்துக்கொள்வார். இம்முறையில் ஆய்வாளர் பார்வையாளராக மட்டும் இருப்பார்.

முதல்நிலை தரவுகளைப் பெறும் பல்வேறு முறைகள்:

(i) நேரிடை முறை
(ii) மறைமுக முறை
(iii) வினா விடைப்பட்டியல் முறை
(iv) தகவல் பரிமாற்று முறை
(v) கணிப்பு முறை

2.2.1 நேரிடை முறை:

நேரிடை முறையில் நான்கு வழிகளில் தகவல்களைப் பெறலாம்

(i) நேரிடை தொடர்பு முறை

ஆய்வாளர் தகவல் அளிப்பவரை நேரிடையாகச் சந்தித்து தரவுகளைப் பெறும் முறையாகும். இம்முறையில் ஆய்வாளர் நேரிலோ, தொலைபேசியிலோ, மின்னனு சாதனங்கள் மூலமாகவோ விவரங்களைப் பெறலாம். இம்முறை சிறு விசாரணைகளுக்கும் துல்லியமான தகவல்களைப் பெறுவதற்கும் ஏற்றதாகும்

நிறைகள்:

- ஆய்வாளரின் நேரிடை தொடர்பால் தரவுகள் பெறப்படுவதால் இவை துல்லியமானதாக இருக்கும்;
- இந்த முறையில் ஆய்வாளர் தகவல் அளிப்பவரின் சூழ்நிலைக்கு ஏற்றவாறு நடந்து தரவுகளைப் பெற முடியும்.

வரம்புகள்:

- விசாரணைத் தளம் பெரியதாயின் இம்முறையில் நேரமும் செலவும் அதிகமாகும். மேலும் தகவல்களைச் சேகரிப்பது கடினமாகும்.
- இம்முறையில் தனிநபர் விருப்பு வெறுப்பினால் சேகரிக்கும் தரவுகளில் ; பிழைகள் வருவதற்கு வாய்ப்புகள் உண்டு.

(ii) தொலைபேசியின் மூலம் தரவுகளைச் சேகரிக்கும் முறை

தொலைத் தொடர்பு சாதனங்கள் விரிவடைந்த, இக்கால சூழ்நிலையில் தொலைபேசிகளும், கைபேசிகளும் மிக விரைவாகவும், துல்லியமாகவும் தகவல் அளிப்பவரிடம் இருந்து விவரங்களைப் பெற பெரிதும் உதவுகிறது. மேலும் இம்முறையில் பணமும், நேரமும், அதிக அளவில் சேமிக்கப்பட்டு விவரங்கள் துல்லியமாகச் சேகரிக்கப்படுகிறது.

(iii) கணிப்பொறி உதவியுடன் தொலைபேசி முறையில் விவரங்களை சேகரிக்கும் முறை (Computer Assisted Telephone Interviewing (CATI)

கணினியின் பயன்பாடு அதிகமாக உள்ள காரணத்தால் தொலைபேசியின் மூலம் பெறப்படும் தகவல்கள் முனையத்தில் தனிக்கணினி அல்லது குரல் தரவு உள்ளீடு உள்ள தகவல் கோப்பில் உடனடியாகச் சேகரிக்கப்படுகிறது. இம்முறை உலகெங்கிலும் உள்ள சந்தை ஆய்வு நிறுவனங்களால் பயன்படுத்தப்படுகிறது

(iv) கணினியின் நிர்வாகத்தில் தொலைபேசியின் மூலம் தகவல்கள் சேகரிக்கும் முறை (Computer Administered Telephone Survey)

கணினி நிர்வாகத்தில் தொலைபேசியின் மூலம் தகவல்களைச் சேகரிக்கும் மற்றொரு முறை CATS ஆகும். CATI முறை போல் அல்லாமல் இம்முறையில் கணினியே ஒருவருடைய தொலைபேசியின் மூலம் தேவையான தகவல்களைச் சேகரித்து அதன் கோப்புகளில் பதிவு செய்கிறது. இம்முறையில் கேள்விகள் குரல் ஒலி வடிவமைக்கப்பட்டது, பதிலளிப்பவர் தரும் பிரதிபலிப்பினைப் பொறுத்து தரவுகள் பெறப்படும் நேரத்தைப் பொறுத்து கணினியே தொடரவோ, துண்டிக்கவோ செய்கிறது. மேற்கண்ட இம்மூன்று முறைகள் தனிநபர் பிழைகளை குறைப்பதோடு மட்டுமல்லாமல் பணத்தையும் நேரத்தையும் சேமிக்கிறது.

2.2.2 மறைமுக முறை:

இம்முறையானது தகவல் அளிப்பவரின் விருப்பமில்லாமல் விவரங்களைச் சேகரிக்கும்போது சிரமமாகவோ அல்லது தர்மசங்கடமாக இருக்கும் பட்சத்தில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இம்முறையில் தேவையான விவரங்கள், தகவல் பெற வேண்டிய நபருக்கு தெரிந்த அறிமுகமான மூன்றாவது நபரிடமிருந்து பெறப்படுகிறது. போதைக்கு அடிமையான விவரங்கள், திருமண ஒப்பந்த விவரங்கள், பொருளாதார நிலைமை, நீதி மன்ற சாட்சிகள், குற்ற விசாரணை போன்றவற்றிற்கு இம்முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. தகவல் அளிப்பவரின் விவரங்கள் மூன்றாவது நபரிடமிருந்து பெறப்படுவதால் இதன் உண்மைத்தன்மையும், அதன் துல்லியமும் குறைவாக இருக்கும் என்பதே இம்முறையின் குறைபாடாகும்.

2.2.3 வினாவிடை பட்டியல் முறை

வினா விடைப்பட்டியல் என்பது ஓர் ஒழுங்குமுறையில் தொகுக்கப்பட்ட வினாக்களின் தொடர் வரிசை ஆகும். வினா பட்டியல் தயாரிப்பது என்பது ஓர் ஆர்வமிக்க மற்றும் சவாலான வேலையாகும். மேலும் அதற்கு தகுந்த அனுபவமும் திறமையும் தேவைப்படுகிறது.

ஒரு தரமான வினாப்பட்டியல் தயாரிப்பதற்கான பொதுவான வழிகாட்டுதல்கள்:

- சொற்கள் தெளிவாகவும் மற்றும் ஆய்விற்கு தொடர்பானதாகவும் அமைய வேண்டும்.
- தகவல் அளிப்பவரின் திறமைக்கு ஏற்றவாறு வினாப்பட்டியல் தயாரிக்க வேண்டும்.
- அர்த்தமற்ற வாசகங்களைத் தவிர்த்தல் வேண்டும்.
- வினாப்பட்டியல் நீட்டிக்கப்படாமல் தேவையான வினாக்கள் மட்டும் கேட்கப்பட வேண்டும்.
- வினாக்கள் ஒழுங்குமுறையில் அமைக்கப்பட வேண்டும்.
- தகவல் அளிப்பவரின் மனதைக் காயப்படுத்தாதவாறு வினாக்கள் அமைய வேண்டும்.
- கணக்கிடுதல் தவிர்க்கப்பட வேண்டும்.
- தகவல் அளிப்பவரின் விவரங்கள் ரகசியமாக பாதுகாக்கப்படும் என்ற உறுதியை அளிக்க வேண்டும்..

ஆயத்த வினாப்பட்டியலைத் தொகுத்தல்

ஆயத்த வினாப்பட்டியல் தயாரித்தபின், ஆய்வாளர் அதனை மதிப்பிடவும் தேவையெனில் தொகுக்கவும் வேண்டும். தேவையற்ற வினாக்கள் தவிர்க்கப்படவேண்டும். வினா பட்டியலின் முக்கியமான பணியினையும் நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.

முன்சோதனை

முன்வரவு வினாப்பட்டியல் தயாரித்தபின், அதைக்கொண்டு முன்சோதனை நடத்தப்பட வேண்டும். இவ்வழி முறையானது வினாப்பட்டியலிலுள்ள குறைபாடுகளை நீக்கி மாற்று வினாபட்டியலின் இறுதி வடிவம் அமைக்க உதவும். சில சமயங்களில் முன் வரவு பட்டியலானது தகுந்த மற்ற ஆய்வாளர்களுக்கிடையே சுற்றறிக்கை விடப்பட்டு, வினாப்பட்டியல் மேம்படுத்தப்பட்டு தரவுகளைச் சேகரிக்க இறுதி வடிவம் அளிக்கப்படுகிறது.

நிறைகள்:

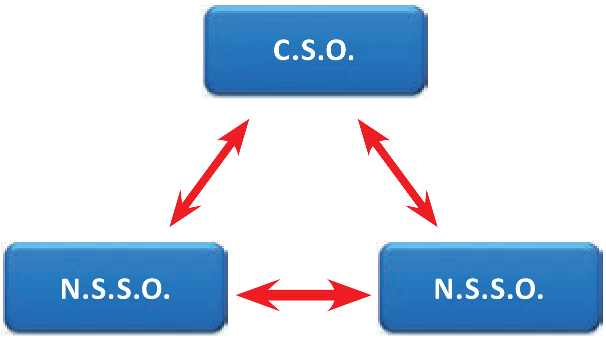
- குறைந்த கால அளவில் மிகுதியான பகுதிகளிலிருந்து விவரங்கள் சேகரிக்க முடியும்.
- மனித உழைப்பு குறைகிறது.

வரம்புகள்:

- இம்முறை கற்றவர்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுகிறது.
- அனுப்பப்பட்ட சில வினாப்பட்டியல்கள் திரும்பப் பெறப்படுவதில்லை.
- சில வினா விடைப்பட்டியல்கள் முழுமையாகப் பூர்த்தி செய்யப்படாமல் திரும்பப் பெறப்படுகின்றன.

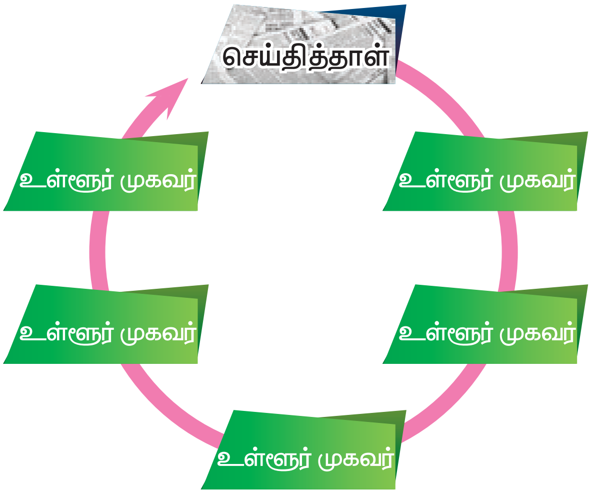
- வினாக்களின் தன்மையையும் தகவல் அளிப்பவரின் ஈடுபாட்டையும் பொறுத்து இதன் வெற்றி அமைகிறது.

2.2.4 அருகமை தொடர்பு முறை



இம்முறையில் ஆய்வாளர் பல இடங்களில் அருகில் உள்ள முகவர்களை நியமனம் செய்து பல இடங்களிலுள்ள தகவல்கள் சேகரிக்கின்றார். முகவர்களால் சேகரிக்கப்பட்ட தகவல்கள் ஆய்வாளர்களுக்கோ அல்லது தலைமை யகத்திற்கோ அனுப்பப்படுகிறது. பத்திரிக்கை துறையிலும் அரசாங்க நிறுவனத்திலும் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது

இந்திய அரசின், மத்திய புள்ளியியல் அமைப்பானது தனது கிளை அமைப்பாக நாட்டின் மாதிரி ஆய்வு அமைப்பைக்கொண்டு தகவல்களைச் சேகரிக்கிறது. பத்திரிக்கை வெளியீட்டாளர்கள் தினசரி செய்திகளைச் சேகரிப்பதற்கு உள்ளூர் நிருபர்களை நியமித்து இருக்கிறார்கள். அந்நிருபர்கள் சேகரித்த தகவல்களைப் பத்திரிக்கையின் தலைமை அலுவலகத்திற்கு அனுப்புகிறார்கள்.



இம்முறை ஒரு சிக்கனமான முறையாகும். மேலும் சரியான நேரத்தில் தொடர்ச்சியாகவும் தகவல்களைப் பெறமுடியும். இம்முறையில் தொடர்பாளர்களால் ஏற்படும் பிழைகளுக்கு அதிக வாய்ப்புள்ளது.

2.2.5 கணக்கெடுப்பாளர் மூலம் தரவு சேகரித்தல்:

இம்முறையில் பயிற்சி பெற்ற கணக்கெடுப்பாளரோ, ஆய்வாளரோ தகவல் சேகரிப்பதற்கு வினா விவர பட்டியலைத் தங்களோடு கொண்டு சென்று தாங்களாகவே விவரங்களைச் சேகரிக்கிறார்கள். வினாப்பட்டியலில் தகவல் பெறுபவரே விவரங்களைப் பூர்த்தி செய்கிறார். இம்முறையில் தரவுகளைச் சேகரிக்கும் கணக்கெடுப்பாளர்களுக்கு மதிப்பூதியம் வழங்கப்படுகிறது. இம்முறையானது கல்வியறிவில்லா தகவல் அளிப்பவரைக் கொண்ட தொகுதிக்குப் பயன்படுகிறது. இம்முறையின் வெற்றியானது கணக்கெடுப்பாளருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட பயிற்சியிலேயே உள்ளது. வாக்காளர் பட்டியல் தயாரித்தல், குடும்ப அட்டையில் பதிவிட தகவல் சேகரித்தல் போன்றவை இம்முறையில் சேகரிக்கப்படுகின்றன. தேசிய மாதிரிக் கணக்கெடுப்பு அமைப்பானது (NSSO) வினா விவர பட்டியலைக் கொண்டு தேவையான விவரங்களைச் சேகரிக்கிறது.

2.3 இரண்டாம் நிலை தரவுகள்

முன்பே சேகரிக்கப்பட்டு, வெளியிடப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து தற்போதைய விசாரணைக்காக எடுத்துக்கொள்ளப்படும் தரவுகள் இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள் என்று அழைக்கப்படும். இவை அரசாங்கத்தால் வெளியிடப்பட்ட அறிக்கைகளிலிருந்தும், பதிவேடுகள்,

பத்திரிக்கைகள், பொருளாதார நிபுணர்களால் எழுதப்பட்ட புத்தகங்கள் மற்றும் வலைதளங்கள் போன்றவற்றின் மூலமும் பெறப்படுகின்றன. இரண்டாம் நிலை தரவுகளைப் பெறுவது நேரத்தையும் செலவையும் குறைக்கிறது. இரண்டாம் நிலை தரவுகளைப் பயன்படுத்துவற்கு முன் அவற்றின் தகுதியினையும், உண்மைதன்மையையும், துல்லியதன்மையையும், போதுமானதா என்பது பற்றியும் சோதித்துக் கொள்ள வேண்டும்

இரண்டாம் நிலை தரவுகளின் ஆதாரங்கள்:

இரண்டாம் நிலை தரவுகள் குறிப்பாக இரண்டு வகையான ஆதாரங்களாகப் பெறப்படுகின்றன. அவை வெளியிடப்பட்ட ஆதாரங்கள் மற்றும் வெளியிடப்படாத ஆதாரங்கள் ஆகும்.

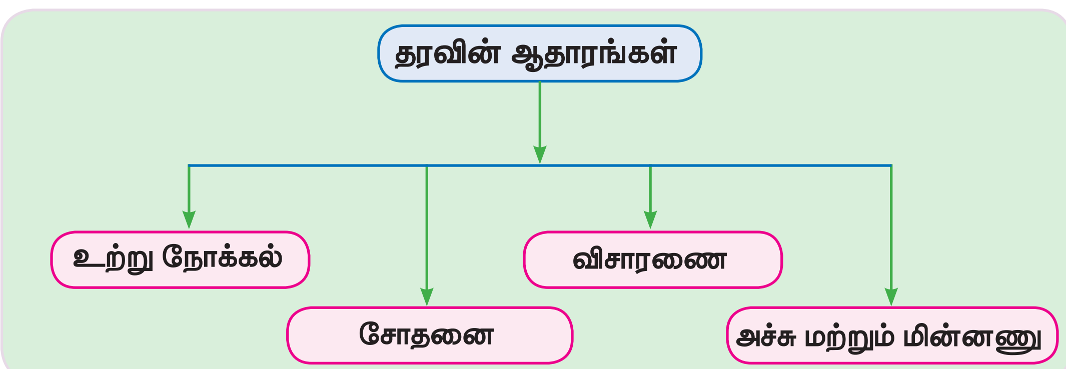
வெளியிடப்பட்ட ஆதாரங்கள் என்பன:

- அரசு சார்ந்த வெளியீடுகள், ரிசர்வ் வங்கியின் செய்தி வெளியீடுகள் (RBI Bulletin) மத்திய புள்ளியியல் நிறுவனத்தால் (Central Statistical Organisation–CSO) வெளியிடப்படும் இந்திய புள்ளியியல் செய்தி சுருக்கங்கள், தமிழக அரசின், பொருளாதார மற்றும் புள்ளியியல் துறையில் வெளியிடப்படும், தமிழக அரசின் புள்ளியியல் செய்திச் சுருக்கங்கள்

உலகளாவிய பிரசுரங்கள்

- உலக சுகாதார கழகத்தின் (World Health Organisation – WHO) வெளியீடுகள்
- உலக வங்கியின் (World Bank) வெளியீடுகள்
- உலக தொழிலாளர் கழகத்தின் (International Labour Organisation – ILO) வெளியீடுகள்
- ஐக்கிய நாடுகள் (United Nations Organisation–UNO) வெளியீடுகள்
- இந்திய மருத்துவ ஆராய்ச்சிக் கழகங்களின் (Indian Council of Medical Research – ICMR) வெளியீடுகள்
- இந்திய வேளாண்மை ஆராய்ச்சிக் கழகம் (Indian Council of Agricultural Research – ICAR) வெளியீடுகள்
- செய்தி பிரசுரங்கள், கட்டுரைகள், செய்தித்தாள்கள் (எக்னாமிக் டைம்ஸ்; பிசினஸ் லைன்)

வெளியிடப்படாத தரவுகள் அரசு மற்றும் தனியார் நிறுவனங்களின் கோப்புகள் மற்றும் பதிவேடுகளிலிருந்தும் பெறப்படுகின்றன. மேற்கண்ட ஆதாரப் பதிவுகளை வரைபடமாக கீழே காணலாம்.



முதல் நிலை மற்றும் இரண்டாம் நிலை தரவுகளை ஒப்பிடல்

முதல் நிலை	இரண்டாம் நிலை
முதன் முதலாகப் பெறப்படும் தரவு	ஏற்கனவே இருக்கும் ஆதாரங்களிலிருந்து தொகுக்கப்படும் தரவு.
ஆய்வாளர் (அல்லது) அவரின் குழுவினரால் நேரடியாகப் பெறப்படும் தரவு.	ஒருவரால் சேகரிக்கப்பட்ட முதல்நிலை தரவுகளிலிருந்து மற்றொருவரால் தொகுக்கப்படும் தரவுகள்
செலவினங்களை அதிகரிக்கும்	செலவினங்களைக் குறைக்கும்
நேரத்தை அதிகரிக்கும்	ஏற்றுக்கொள்ளும் வகையிலான நேரத்தை எடுக்கும்.
தனி நபர் பிழையால் பாதிக்கப்பட கூடியது.	தனி நபர் பிழை வெகுவாக குறைக்கப்படுகிறது.

2.4 முழுமைத் தொகுதி:

புள்ளியியலின் செயல்பாடுகளில் முழுமைத் தொகுதி மற்றும் மாதிரிகள் என்ற கருத்துகள் முக்கிய பங்கு வகுப்பதால் அவற்றைப் பற்றித் தெளிவாக அறிந்து கொள்வோம்.

முழுமைத் தொகுதி: புள்ளியியலில் முழுமைத்தொகுதி என்பது ஆய்விற்கு தேவையான அனைத்து கூறுகள் அல்லது அனைத்து உறுப்புகளின் தொகுப்பாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

(i) தமிழ்நாட்டிலுள்ள ஒரு கல்லூரியின் கல்வி தரத்தை அறிந்து கொள்ள விரும்புகிறோம் எனில் அக்கல்லூரியில் பயிலும் அனைத்து மாணவர்களின் தொகுப்பு ஒரு முழுமைத் தொகுதியாகும்.

(ii) ஒரு மேல்நிலைப்பள்ளியில், மேல்நிலை வகுப்பில் பயிலும் மாணவர்களின் பொருளாதார நிலையை அறிந்து கொள்வது நோக்கமெனில் அப்பள்ளியில் +1 மற்றும் +2 வகுப்பில் பயிலும் மாணவர்களின் தொகுப்பே முழுமைத் தொகுதியாகும். முழுமைத்தொகுதி என்பது உயிருள்ள மற்றும் உயிரற்றவைகளுக்கும் பொருந்தும்

முடிவுறு முழுமைத்தொகுதி

ஒரு முழுமைத்தொகுதி எண்ணிடத்தக்கதாகவோ, அதன் உறுப்புகளைக் குறியிட்டுக் காண்பிக்கத்தக்கதாகவோ இருப்பின் அவை முடிவுறு முழுமைத்தொகுதி எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு மணி நேர கால அளவில் நெடுஞ்சாலையில் செல்லும் வாகனங்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியில் ஒரு மாத காலத்திற்குள் ஏற்படும் பிறப்புகளின் எண்ணிக்கை, ஒரு குறிப்பிட்ட காலஅளவில் வரும் தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் கூறலாம். ஒரு முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை N என்று குறிக்கிறோம். இது முழுமைத்தொகுதியின் அளவு எனப்படும்.

முடிவுறா முழுமைத்தொகுதி

ஒரு முழுமைத்தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகள் (கூறுகள்) எண்ணிடத்தக்க முடியாததாகவும், அல்லது குறியிடத்தக்க முடியாததாகவும் இருப்பின் அம்முழுமைத்தொகுதி முடிவுறா முழுமைத்தொகுதி அல்லது எண்ணிட முடியாத முழுமைத்தொகுதி எனப்படும்.

முடிவுறு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிக் கணிப்பை இப்பாடத்தின் பிற்பகுதியில் காண்போம். முடிவுறா முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து மாதிரிக் கணிப்பை முழுமைத்தொகுதியின் மாதிரிகளின் பரவலில் இருந்து பெறுகிறோம். ஒரு முடிவுறா தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட வாய்ப்பு மாதிரி என்பது ஒரு நிகழ்தகவு பரவலில் இருந்து பெறப்பட்ட வாய்ப்பு மாதிரி என்பதே ஆகும். இவ்விவரங்களை இரண்டாம் வருட (+2) பாடப்பகுதியில் உள்ள 'வேறுபாடுகளின் முக்கியத்துவத்தை அறியும் சோதனையில்' பயன்படுத்துவோம்.

2.5 முழு கணக்கெடுப்பு முறை (Census Method)

இம்முறையானது முழுகணிப்பு முறை என்றும் அழைக்கப்படும். இம்முறையில் புள்ளியியல் முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிலிருந்தும் தரவுகள் பெறப்படும். இந்திய மக்கள்தொகைக் கணக்கெடுப்பு இதற்கு ஒரு சிறந்த எடுத்துக்காட்டாகும். மக்கள்தொகை கணக்கெடுப்பு ஒவ்வொரு பத்து வருட இடைவெளியில் எடுக்கப்படும். இம்முறையில் ஒவ்வொரு வீட்டிலிருந்தும், தரவுகள் பெறப்படுகின்றன. இம்முறையானது மக்கள் சார்ந்த விவரங்களுக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்கிறது. இவ்விவரமானது இந்திய பொது பதிவு அதிகாரியின் தலைமையின் கீழ் சேகரிக்கப்பட்டு இந்திய அரசால் வெளியிடப்படுகிறது.

சாதகமான சூழல்:

இவ்வகையான கணக்கெடுக்கும் முறை முழுமைத் தொகுதியின் அளவு மிகக் குறைவாகவும், விரிவாக இல்லாமல் இருக்கும் சூழலில் பயன்படுத்துவதற்கு ஏற்றது. அவ்வாறு இல்லையெனில், கீழ்க்கண்ட குறைபாடுகள் பெறக்கூடும்.

குறைபாடுகள்:

- இம்முறை கணக்கெடுப்பில் நேரமும், செலவும் அதிகமாகும். மேலும், அதிக எண்ணிக்கையிலான வல்லுனர்களும், பயிற்சி பெற்றவர்களும் தேவைப்படுவர்;.
- மிக அதிகப்படியான வேலையின் காரணமாக பிழைகள் வர காரணமாகிறது.
- அழியும் தன்மையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட தொகுதியைப் பெற, இந்த முறை ஏற்றது அல்ல. எடுத்துக்காட்டாக

  இரத்த பரிசோதனை, அரிசியின் வெந்திருக்கும் நிலை, மின் விளக்குகளின் ஆயுட்காலம் போன்ற பல ஆய்விற்கு இம்முறை பயன்படாது
- ஆய்வு நடைபெறும் பகுதி பரப்பளவில் அதிகமாக இருப்பின், முழுமை தொகுதியின் தன்மை முழுதும் தெரியாத நிலையிலும் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுவதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக,

  இந்திய காடுகளில் உள்ள புலிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுதல், மரங்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுதல்.

2.6 மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Sampling method):

மேற்கண்ட சூழ்நிலைகளில் மாதிரிக் கணிப்பு முறை சிறந்தது. மாதிரி என்பது முழுமை தொகுதியிலிருந்து விகிதாசார முறையில் பெறப்பட்ட ஒரு சிறு பகுதியாகும். இதிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளை அறிய முடியும்.

மாதிரிக் கணிப்பு முறை என்பது முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளைத் தெரிந்து கொள்வதற்காக மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறையாகும். முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளைக் கொண்ட ஒரு மாதிரி, முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பிரதிநிதியாக கருதப்படும்.

மாதிரிக் கூறு (அ) மாதிரி அலகு: முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறக்கூடிய மேலும் சிறு பகுதிகளாகப்பிரிக்க முடியாத கூறு மாதிரி அலகு (அல்லது) மாதிரிக் கூறு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக குடும்பம் சார்ந்த ஆய்வில் ஒரு குடும்பத்தின் தலைவர் ஒரு மாதிரிக் கூறு ஆவார். ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களின் சராசரி வயதினை அறிந்து கொள்ளும் ஆய்வில் அவ்வகுப்பில் ஒவ்வொரு மாணவரும் ஒரு மாதிரி அலகு ஆகும்.

"ஒரு பானை சோற்றுக்கு ஒரு சோறு பதம்" என்ற தமிழ் பழமொழி மாதிரி எடுத்தலைப் பற்றி சுருக்கமாகவும் தெளிவாகவும் கூறுகிறது.

மாதிரிக் கணிப்பு பட்டியல்: மாதிரிக் கணிப்பு முறையை செயல்படுத்தும்போது ஒவ்வொரு மாதிரிக் கணிப்பு அலகிற்கும் ஒன்றுக்கு ஒன்று தொடர்புடைய வகையில் அதை அடையாளம் காண ஓர் எண் தருவது அவசியமாகிறது. அவ்வாறு பெறப்பட்ட பட்டியல் அல்லது வரைபடம் மாதிரிக் கணிப்பு பட்டியல் எனப்படும் (எடுத்துக்காட்டாக) ஒரு மாவட்டத்தில் உள்ள கிராமங்களின் பட்டியல், +1 மற்றும் +2 பயிலும் மாணவர்களின் பெயர் பட்டியல்.

மாதிரி அளவு : ஒரு மாதிரியில் உள்ள அலகுகளின் எண்ணிக்கை மாதிரி அளவு எனப்படும்.

நிறைகள்

- செலவு: மாதிரிக் கணிப்பு ஆய்விற்கு ஆகும் செலவானது முழு கணிப்பு முறையில் ஆகும். செலவோடு ஒப்பிடும்போது மிக குறைவு.
- காலம்: மிகப்பெரிய தரவுகளை பெறுவதற்கான கால அளவைவிட மாதிரிக் கணிப்பு முறையில் ஆகும் கால அளவு குறைவு.
- துல்லியம்: முழுகணிப்பு முறையில் பெறப்பட்ட முடிவுகளைவிட, மாதிரிக் கணிப்பு முறையில் பெறப்படும் அளவுகள் மிக துல்லியமாக உள்ளதாக சோதனைகள் மூலம் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.
- அழியும்தன்மை: அழியும்தன்மை உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமை தொகுதிக்கு, மாதிரிகணிப்பு முறையே ஏற்றதாகும்.

வரம்புகள்

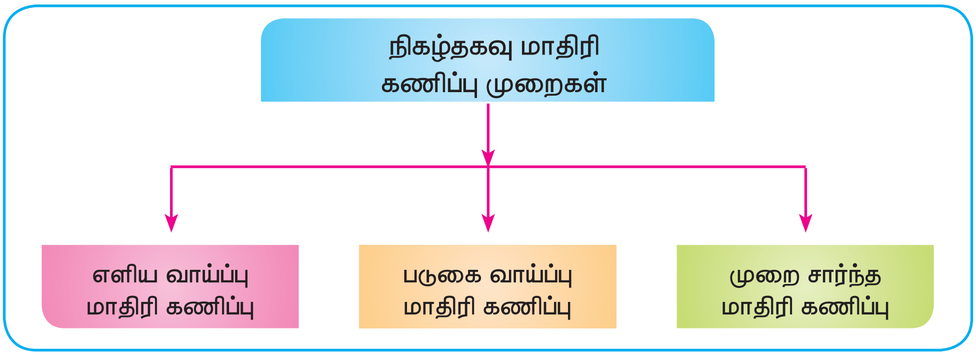
- இம்முறையின் சரியான முடிவு என்பது ஆய்வாளரின் நேர்மையான அணுகுமுறையில் உள்ளது.
- சரியான மாதிரிகள் தேர்ந்தெடுக்கபடவில்லையெனில், மாதிரிக் கணிப்பு பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்பிருக்கிறது.

2.7 நிகழ்தகவு மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Probability sampling):

நிகழ்தகவு மாதிரிக் கணிப்பு முறை அல்லது வாய்ப்பு மாதிரிகணிப்பு முறை என்பது முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளை வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து மாதிரி அமைக்கும்

முறையாகும். வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறையில், அலகுகள் அனைத்தும் தேர்வு செய்வதற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவைப் பெற்றிருக்கும். வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறையில், ஆய்வாளர்களின் தனிப்பட்ட பிழை ஏற்படுவது தடுக்கப்படுகிறது.

நிகழ்தகவு மாதிரிக் கணிப்பு முறையின் சில முக்கிய கணிப்பு முறைகள்: (1) எளிய வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு (Simple Random Sampling), (2) படுகை வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு (Stratified Sampling), (3) முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு (Systematic Sampling).



2.7.1 எளிய வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறை

இம்முறையில் மாதிரி தேர்வு செய்யப்படும்போது ஒவ்வொரு மாதிரியும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கு ஒரு சமமான நிகழ்தகவைப் பெற்றிருக்கும் அல்லது ஒவ்வொரு உறுப்பும் மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கு ஒரு சமமான நிகழ்தகவைப் பெற்றிருக்கும் அவற்றை இங்கு காண்போம்.

(1) குலுக்கல் முறை

N உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு முடிவுறு முழுமை தொகுதியிலிருந்து n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு வாய்ப்பு மாதிரியை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமெனில், முதலில் முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள அலகுகளுக்கு 1 முதல் N வரை உள்ள எண்களால் குறியிட வேண்டும். பின் ஒரே மாதிரியான N துண்டு சீட்டுகள் அல்லது அட்டைகளை எடுத்து, 1 முதல் N வரை எல்லாவற்றிற்கும் குறியிட வேண்டும். அப்படி எண்ணிடப்பட்ட சீட்டுகள் (அ) அட்டைகளை ஒரே மாதிரியாக மடித்து ஓர் உருளையிலோ, பெட்டியிலோ, கொள்கலனிலோ இட்டு, ஒவ்வொரு முறையும் நன்றாக சீட்டுகளைக் குலுக்கி ஒவ்வொரு உறுப்புகளாகத் தேர்வு செய்து, n அலகுகள் உள்ள மாதிரியைத் தேர்வு செய்ய வேண்டும். இம்முறையே குலுக்கல் முறை எனப்படுகிறது. உறுப்புகளை ஒவ்வொன்றாக தேர்வு செய்யும்போது, முதலில் எடுக்கப்பட்ட ஓர் உறுப்பை, அடுத்த உறுப்பைத் தேர்வு செய்வதற்குமுன், உருளையில் திரும்ப வைத்தோ, வைக்காமலோ இருக்கலாம். இம்முறையில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் நிகழ்தகவின் அடிப்படையிலேயே தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

திரும்ப வைக்காத முறையில் எளிய வாய்ப்பு மாதிரி தேர்வு செய்யும் முறை (SRSWOR):

ஒரு முறை தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அலகு, அடுத்த அலகை தேர்ந்தெடுப்பதற்கு முன், திரும்ப பெட்டியில் போடப்படாமல் ஒவ்வொரு உறுப்பாக தேர்ந்தெடுக்கும் முறை திரும்ப வைக்காத முறையில் எளிய வாய்ப்பு மாதிரியைத் தெரிவு செய்யும் முறை எனப்படும்.

திரும்ப வைக்கும் முறையில் எளிய வாய்ப்பு மாதிரியைத் தேர்வு செய்யும் முறை (SRSWR):

ஒரு முறை எடுக்கப்பட்ட உறுப்பு மற்றொரு உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு முன் பெட்டியில் வைக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு உறுப்பாகத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறைக்கு இப்பெயராகும்.

குறிப்புரை:

முழுமைத் தொகுதியின் அளவு மிக அதிகமாக இருப்பின், இம்முறை கடினமான ஒன்றாகும். அச்சமயங்களில், சமவாய்ப்பு உள்ள எண்களின் அட்டவணையிலிருந்து (table of random numbers) மாதிரி அலகுகளைத் தேர்வு செய்யலாம்.

(2) வாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணை:

எளிய வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பிற்கு, வாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி மாதிரியைத் தேர்வு செய்வது எளிதாகும். பலவகையான வாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணைகள் உள்ளன. அவற்றுள் சில

(i) கென்டல் மற்றும் ஸ்மித் இன் வாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணை (Kendall and Smith random number table).

(ii) டிப்பெட்ஸின் வாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணை (Tippet's random number table).

(iii) பிஸர் மற்றும் யேட்ஸின் வாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணை (Fisher's and Yates' random number table).

வாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும் முறை:

இங்கு வாய்ப்பு எண்களைப் பயன்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முழுமை தொகுதியிலிருந்து, ஓர் எளிய வாய்ப்பு மாதிரியைத் தேர்வு செய்யும் முறையைப் பற்றி பார்க்கிறோம்.

இவ்வட்டவணையானது வெவ்வேறு இலக்கங்களில் ஆன எண்களைக் கொண்டிருக்கிறது. இவ்வெண்களில் இலக்கங்கள் 0 லிருந்து 9 வரை இருக்கும். மேலும் இவ்வெண்கள் வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பை உறுதி செய்யும். எண்களின் அட்டவணையின் ஒரு பகுதியானது பிற்சேர்க்கையாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இப்பகுதியைப் பயன்படுத்தி 100 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு முடிவுறு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 10 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு மாதிரியைத் தேர்வு செய்வதைக் காண்கிறோம். அதற்கான படிகள் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) 100 உறுப்புகளின் பட்டியல் தயாரிக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் எண் குறியிடப்படுகிறது. அவ்வெண்கள் 00 என தொடங்கி 99 வரை முடிகிறது.

(ii) வாய்ப்பு அட்டவணையிலிருந்து ஓர் எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அவ்வெண் மாதிரி அலகுகளைத் தேர்வு செய்யும் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கருதப்படுகிறது.

(iii) அத்தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து செங்குத்தாகவோ, கிடைமட்டமாகவோ, மூலை விட்டத்திலோ நகர்ந்து எண்களைத் தேர்வு செய்கிறோம்.

(iv) எண்ணிடப்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமை தொகுதியில், உறுப்புகள் 00 லிருந்து 99 வரை இரு இலக்கங்களையே கொண்டுள்ளதால் இரு இலக்க எண்களையே தேர்வு செய்கிறோம். மேலும் தேர்வு செய்யும்போது காணுகின்ற எந்த எண்களையும் விட்டுவிடுதல் கூடாது.

(v) இவ்வாறு தொடருகையில், 99ஐ விட அதிகமான மதிப்பு உள்ள எண்களைக் காணும்போது அவ்வெண்கள் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன. மேலும் 99 அல்லது அதைவிடக் குறைவான மதிப்பு உள்ள எண்களைக் காணும்போது அவ்வெண்கள் சேர்த்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. இதே முறை 10 எண்களைப் பெறும் வரை தொடரப்படுகிறது.

(vi) திரும்ப வைக்காத வகையில் உறுப்புகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன எனில், ஒருமுறை பதிவு செய்யப்பட்ட எண் திரும்பவும் காணப்படின், அவ்வெண்ணை தவிர்த்து அடுத்த எண்ணைத் தேர்வு செய்கிறோம்.

(vii) இவ்வாறாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 10 எண்களை, முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகளின் எண்களோடு ஒப்பிட்டு, அவ்வெண் கொண்ட உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்து மாதிரி அளவு 10 உள்ள மாதிரி பெறப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

220 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு முடிவுறு தொகுதியிலிருந்து 15 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு வாய்ப்பு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்க.

தீர்வு

படி 1 : தொகுதியிலுள்ள 220 உறுப்புகளுக்கும் 000 விலிருந்து 219 வரை உள்ள எண்களைக் கொண்டு எண் குறியிட வேண்டும்..

படி 2 : அதிகபட்ச எண் 219, ஒரு மூன்று இலக்க எண் ஆதலால், ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணைத் தொடக்க புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடு. வாய்ப்பு எண்கள் பட்டியலில் உள்ள அத்தொடக்கப்புள்ளி 066 என்க (1 வது நிரையிலும், 4 வது நிரலிலும் உள்ள எண்ணின் முதல் மூன்று இலக்கங்கள்).

படி 3 : மாதிரி அளவு 15 உள்ள ஒரு மாதிரியை தேர்ந்தெடுக்க, இதே நிரலின் கீழ்புறமாக நகர்ந்து, எண்களை தேர்வு செய்யவும்.

படி 4 : எளிய வாய்ப்பு மாதிரியை பெறுவதற்காக, இம்முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட எண்கள் 066, 147, 119, 194, 093, 180, 092, 127, 211, 087, 002, 214, 176, 063, மற்றும் 176 என்க.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு:

எடுக்கப்பட்ட சம வாய்ப்பு எண் 892 என்க. ஆனால் முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகளுக்கு அதிகபட்சமாக ஒதுக்கப்பட்ட எண் 219, ஆகையால் 219ன் நான்கு மடங்குகளைக் கழித்து வரும் எண் 016ஐ எடுக்கப்போகும் மாதிரி அலகிற்குக் கொடுக்கிறோம்.

(எ.து: $892 - 4 \times 219 = 892 - 876 = 16$)

வகை(1) : திரும்ப வைக்கும் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட வாய்ப்பு மாதிரியின் உறுப்புகளின் எண்கள் 066, 147, 119, 194, 093, 180, 092, 127, 211, 087, 002, 214, 176, 063 மற்றும் 176

வகை(2): திரும்ப வைக்காத முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் வாய்ப்பு மாதிரியின் உறுப்புகளின் எண்கள் 066, 147, 119, 194, 093, 180, 092, 127, 211, 087, 002, 214, 176, 063 மற்றும் 157.

[**குறிப்பு :** இரண்டாவது வகையில் 176 இரு முறை தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதிலிருந்து தவிர்க்கப்பட்டு உள்ளது]

குறிப்பு

வாய்ப்பு எண்கள் அறிவியல் கணிப்பான்கள் மூலமோ (அ) கணினியின் மூலமோ உருவாக்கப்படலாம்.

நிறைகள்:

- இது முழுமைத் தொகுதியின் நம்பிக்கையான பிரதிநிதியாகும்.
- இது தனி நபரால் ஏற்படும் பிழைக்கும், விருப்பு வெறுப்பிற்கும் அப்பாற்பட்டது.
- இது பயன்படுத்துவதற்கு எளிதான ஒரு முறையாகும்..
- மாதிரி பிழையினை அறிந்து கொள்வதற்கு எளிதானது.

வரம்புகள்:

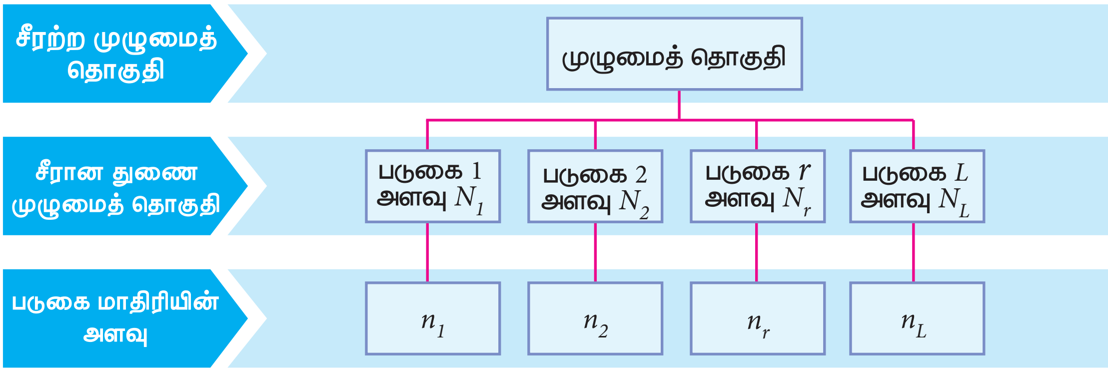
- அலகுகளின் மதிப்பு மிக அதிக அளவில் வித்தியாசப்பட்டிருப்பின், இம்முறையில் பெறப்படும் மாதிரிகள் உண்மையான பிரதிநிதியாக இருப்பதில்லை.
- முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகள் சீரற்றதாக இருக்கும்போது இம்முறையினைப் பயன்படுத்த முடியாது.
- தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட உறுப்புகளின் மதிப்புகள் அதிக இடைவெளியில் இருப்பின், இம்மாதிரியின் மதிப்புகளைக் கொண்டு மதிப்பீடு செய்வது கடினமாகும்.

கருத்து: எளிய வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறையானது, முழுமைத் தொகுதியானது சீரானதாக இருக்கும்போதே மிகவும் சரியான முறையாக இருக்கும். மாறாக முழுமைத் தொகுதி சீரற்றதாக இருக்கும்போது படுகை முறை மாதிரிக் கணிப்பு மிக சரியான முறையாக இருக்கும்.

2.7.2 படுகை முறை மாதிரிக் கணிப்பு (Stratified Random Sampling)

இம்முறையில் N உறுப்புகள் கொண்ட முழுமைத் தொகுதி சீரற்றதாக இருக்கும்போது, பொதுவான உறுப்புகள் அல்லாத, சீரான L துணை முழுமைத் தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இவைகள் படுகைகள் எனப்படும். மேலும் i ஆவது படுகையின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை N_i என்றும் $N_1+N_2+\dots+N_L = N$ எனவும் இருக்குமாறு படுகைகள் பிரிக்கப்படுகிறது. மேலும் $(i=1, 2, 3, \dots, L)$

மாதிரி அளவு n_i உள்ள ஒரு மாதிரி, i ஆவது படுகையிலிருந்து சார்பற்ற வகையில் எளிய வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது. (இங்கு $i=1, 2, \dots, L$) மேலும் $n_1+n_2+\dots+n_L = n$.



இம்முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரி படுகை முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட வாய்ப்பு மாதிரி எனப்படும். ஒவ்வொரு படுகையிலும் மாதிரியின் அளவைத் தீர்மானிப்பதில் இருவகைகள் உள்ளன. அவைகள் விகிதாசார அளவில் (Proportional method) உறுப்புகள் சேர்க்கும் முறை மற்றும் உகந்த அளவில் உறுப்புகள் சேர்க்கும் முறை (Optimum method) விகிதாசார அளவு முறையில், மாதிரியின் அளவானது படுகையின் அளவின் விகிதாசாரத்தில் உள்ளது. படுகையின் அளவானது அதிகமாக இருப்பின், அப்படுகையில் இருந்து அதிக உறுப்புகளை (பிரதிநிதிகளை) மாதிரி பெற்றிருக்கும். அதுபோல படுகையின் அளவு குறைவாக இருப்பின், அதிலிருந்து குறைவான உறுப்புகளையே, மாதிரி பெற்றிருக்கும். i வது படுகையிலிருந்து எடுக்கப்படும் மாதிரியின் அளவு $n_i = (n/N)^* \; N_i$ என்ற விதிமுறையின்படி பெறப்படுகிறது. உகந்த ஒதுக்கீடு முறையானது, படுகையிலுள்ள வித்தியாசம் மற்றும் செலவு இவைகளால் மாதிரியின் அளவு n_i தீர்மானிக்கப் படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.2

ஒரு போட்டித் தேர்வின் அறிமுகத்தைப் பற்றிய ஓர் ஆய்விற்காக மூன்று பள்ளிகளில் பயிலும் மாணவர்களிடமிருந்து கருத்துக்கள் பெறப்பட்டன. அப்பள்ளியில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை முறையே 2000, 2500 மற்றும் 4000 ஆகும். மாதிரியின் அளவு 170 என முடிவு செய்யப்பட்டது எனில் ஒவ்வொரு பள்ளியிலிருந்து பெறப்படும் மாதிரியின் அளவுகள் என்ன என்பதை கணக்கிடுக.

தீர்வு

இங்கு $N = 2000 + 2500 + 4000 = 8500$, $n = 170$ எனில் $n_1 = n_2 = n_{13} = ?$

$$N_1 = 2000, \quad N_2 = 2500, \quad N_3 = 4000$$

$$n_1 = (n/N)\times N_1 = (170 / 8500) \times 2000 = 40$$

$$n_2 = (n/N)\times N_2 = (170 / 8500) \times 2500 = 50$$

$$n_3 = (n/N)\times N_3 = (170 / 8500) \times 4000 = 80$$

எனவே 40 மாணவர்கள் முதல் பள்ளியிலிருந்தும், 50 மாணவர்கள் இரண்டாம் பள்ளியிலிருந்தும், 80 மாணவர்கள் மூன்றாம் பள்ளியிலிருந்தும் எளிய வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, படுகைபடுத்தப்பட்ட வாய்ப்பு மாதிரியாகப் பெறுகிறோம்.

படுகை முறையின் முக்கிய நோக்கமானது, முழுமை தொகுதியினை நல்ல முறையில்

பல்வேறு பகுதியாகப் பிரித்து, அவற்றின் முக்கியத்துவத்தின் தன்மையை உணர்த்துவதே ஆகும். படுகை முறைக்கான சூழல்கள் மாநிலங்கள், வயது மற்றும் இனம், கல்வித்திறன், திருமண விவரம் போன்ற பல வகைகளாகும்.

குணநிலைக் கொண்டு படுகைகள் பிரிக்க முடியாத நடைமுறை பிரச்சனை உள்ள சூழல்களில், நிர்வாக ரீதியான சூழல்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு படுகைகள் பிரிக்கப்படுகின்றன

நிறைகள்

- முழுமைத் தொகுதியின் பல பகுதிகளைப் பற்றியும் அறியமுடிகிறது.
- மாதிரிகள் குறிப்பிட்ட அளவில் இருக்கும்போது, செலவிற்கும், துல்லியத்திற்கும், நம்பகத்தன்மைக்கும் ஏற்ற வகையில், மாதிரியின் அளவைத் தீர்மானிக்கலாம்.
- இம்முறையில் தேர்வு செய்யப்படும் ஒரு மாதிரி நம்பகத்தன்மை உடையது.
- பல படுகைகளிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் பிரதிநிதிகள் உள்ளன.
- பிழை பெரிதும் தவிர்க்கப்படுகிறது. மேலும் மிக அதிக அளவில் துல்லியமானது.

வரம்புகள்

- சரியான முறையில் படுகைகள் பிரிக்கப்படுவதில் தவறுகள் நிகழ வாய்ப்பு இருப்பதால், துல்லியமான முடிவை இழக்க வாய்ப்பு இருக்கிறது.
- விகிதாசார படுகை முறையில் முழுமை தொகுதியில் ஒவ்வொரு படுகையின் விகிதத்தைப் பற்றிய துல்லியமான தகவல் தெரிந்திருக்க வேண்டும்.

2.7.3 முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Systematic Sampling)

இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளுக்கு 1 முதல் N வரை ஏறுவரிசையில் எண்ணிடப்படுகிறது. n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு மாதிரியைத் தேர்வு செய்வதற்கு $k = \frac{N}{n}$ என உள்ளவாறு ம உறுப்புகள் கொண்ட (n–1) மாதிரி இடைவெளிகள் பெறப்படுகிறது. பின் முதல் இடைவெளியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஓர் உறுப்பு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது i ஆவது உறுப்பு என்க. இங்கு $i \leq k$. இந்த எண், மாதிரியை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான தொடக்கப் புள்ளியாகும். மற்ற உறுப்புகள் மதிப்பு இடைவெளியில் ஒவ்வொரு மாதிரி இடைவெளியிலிருந்தும் பெறப்படுகின்றன.

$$i,\ k+i,\ 2k+i,\ 3k+i,\ \ldots,\ nk$$

இம்முறையில் பெறப்படும் மாதிரிக்கான வரைபடம்								
மாதிரி இடைவெளி 1	1	2	3	4	…	i	…	k
மாதிரி இடைவெளி 2	k+1	k+2	k+3	k+4	…	k+i	…	2k
மாதிரி இடைவெளி 3	2k+1	2k+2	2k+3	2k+4	…	2k+i	…	3k
மாதிரி இடைவெளி 4	3k+1	3k+2	3k+3	3k+4	…	3k+i	…	4k
	…	…	…	…	…	…	…	…

மாதிரி இடைவெளி n	(n-1)k+1	(n-1)k+2	(n-1)k+3	(n-1)k+4	…	(n-1)k+i	…	nk

ஆகவே இம்முறையில் முதல் உறுப்பு தேர்வு செய்யப்பட்டவுடன் மாதிரியின் மற்ற உறுப்புகள் தானாகவே தீர்மானிக்கப்பட்டுவிடுகிறது. முதல் உறுப்பு முதல் இடைவெளியில் k உறுப்புகளில் ஏதாவது ஓர் உறுப்பாக இருக்கலாமாதலால், இம்முறையானது k முறை சார்ந்த மாதிரிகளை, சம நிகழ்தகவு வாய்ப்புகளுடன் உருவாக்குகிறது. N ஆனது, n–ன் முழுமடங்காக இல்லாதபோது சில மாதிரி இடைவெளிகளின் அளவுகள் ஒரே ஒரு எண்ணின் அளவிற்கு மாறுபட்டிருக்கும்

குறிப்பு

இம்முறையில் எடுக்கப்பட்ட மாதிரியை, பகுதி வாய்ப்பு மாதிரி என அழைக்கிறோம். ஏனெனில், முதல் உறுப்பு மட்டுமே வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது மற்ற உறுப்புகள் வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படவில்லை.

நிறைகள்:

- இம்முறையானது எளிதானது மற்றும் வசதியானது.
- குறைந்த நேரமே தேவைப்படும் முறையாகும்.
- இது முடிவுறா முழுமை தொகுதிக்கும் பயன்படுத்தக்கூடியதாகும்.

வரம்புகள்:

- இது ஒரு பகுதி வாய்ப்பு மாதிரியாக இருப்பதால், முழுமை தொகுதியின் ஒரு பிரதிநிதியாக இம்மாதிரி இருக்காது.

எடுத்துக்காட்டு 2.3

மாதிரி அளவு $n = 10$ உள்ள ஒரு முறை சார்ந்த வாய்ப்பு மாதிரி முழுமைதொகுதி அளவு $N = 200$ உள்ள ஒரு முழுமை தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டுமெனில் $k = \frac{N}{n} = \frac{200}{10} = 20$ ஆகும் முதல் மாதிரி இடைவெளியில் 1லிருந்து 20 வரை உள்ள எண்கள் இருக்கும். இதிலிருந்து சாதாரணமாக தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட எண் 7 எனில் இம்முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்கள்

$$7, 27,47,67,87,107,127,147,167,187.$$

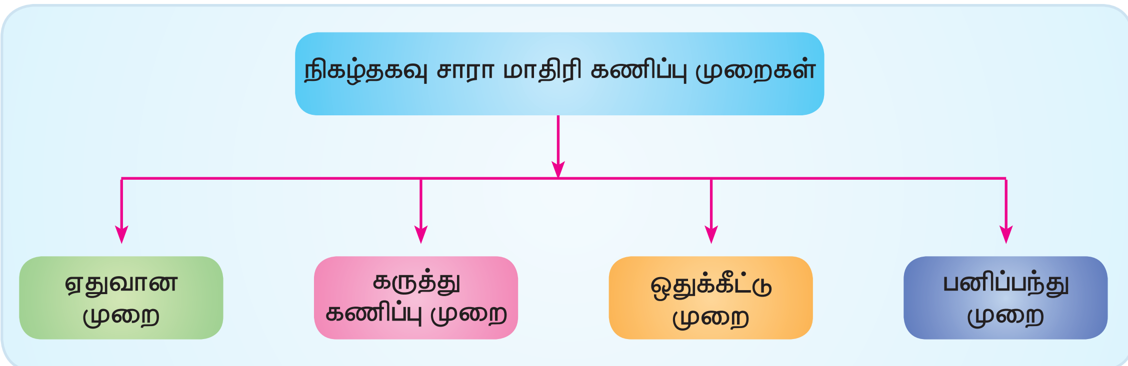
பயன்பாடுகள்:

- முறைசார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பானது, நெடுஞ்சாலையில் உள்ள மரங்களைப் பற்றிய விவரங்களை அறிதல், தொகுப்பு வீடுகளிலிருந்து விபரங்கள் அறிதல் போன்ற சூழ்நிலைகளில் முக்கியமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- தொழிற்சாலைகளில், பொருட்களைத் தயாரிக்கும் உபகரணங்கள் நல்ல முறையில் செயல்படுகின்றனவா என்பதைச் சோதிக்க எடுக்கப்படும் உறுப்புகளின் மாதிரிக்கு, இம்முறை பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. உதாரணமாக ஒவ்வொரு பதினைந்தாவது தயாரிக்கப்படும் பொருட்களின் சேகரிப்பு இம்முறையிலான மாதிரிக் கணிப்பு ஆகும்.

- இம்முறையை வாடிக்கையாளரைப் பற்றிய ஆய்விற்கு எடுக்கப்படும் மாதிரிக்குப் பயன்படுத்தலாம். ஒரு சந்தை மதிப்பீட்டாளர் ஒரு வணிக வளாகத்திற்குள் நுழையும் ஒரு நபரைத் தன்னிச்சையாக தேர்ந்தெடுத்தபின், அவரை தொடக்க உறுப்பாக கொண்டு ஒவ்வொரு பத்தாவது நபரையும் மாதிரிகளாகத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

2.8 நிகழ்தகவு சாரா மாதிரிக் கணிப்பு :

நிகழ்தகவு சாரா மாதிரிக் கணிப்பு முறை என்பதாவது, மாதிரிக் கூறுகளின் சமவாய்ப்பிற்கு முக்கியத்துவம் அளிக்காமல், ஆய்வாளரின் கருத்துக்கு ஏற்றபடி மாதிரி உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறை ஆகும். இம்முறையானது, தொகுதியின் குணங்களைப் பிரதிபலிக்கக்கூடிய உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும் என்பது முக்கியமாக கருதப்படாதபோது பயன்படுத்தப்படுகிறது. இங்கு ஆய்வாளரின் கருத்தும் அவருக்கு ஏதுவானதாகவும் உள்ள சூழலும் முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. பொதுவாக நான்கு வகையான நிகழ்தகவு சாரா மாதிரிக் கணிப்பு முறைகள் உள்ளன. அவை ஏதுவான மாதிரிக் கணிப்பு முறை, கருத்துக் கணிப்பு முறை, ஒதுக்கீட்டு மாதிரிக் கணிப்பு முறை மற்றும் பனிபந்து கணிப்பு முறை என்பதாகும்.



2.8.1 ஏதுவான மாதிரிக் கணிப்பு முறை :

ஆய்வாளரின் வசதிக்காக, எளிதாக கிடைக்கக்கூடிய ஆதாரங்களிலிருந்து மாதிரிகளைப் பெறுகிற முறையாகும். ஆய்வாளர் கிடைக்கக்கூடிய ஆதாரங்களிலிருந்து ஆய்வின் தன்மைக்கு ஏற்ப மாதிரியின் உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறையாகும்.

நிறைகள்:

- விரைவான ஆய்விற்கு மிக பயனுள்ள முறையாகும்.
- எளிதாகக் கிடைக்கக்கூடிய முடிவுகளைப் பயன்படுத்துகிறது.
- மிகவும் பரபரப்பானதாகவும், முரண்பட்டதாகவும் உள்ள ஒரு விவரத்தைப் பற்றி மக்களின் கருத்தை விரைவில் அறிந்துகொள்ள இம்முறை பயன்படுகிறது.
- நேரத்தையும் செலவையும் குறைக்கிறது.

வரம்புகள்:

- பிழையான தேர்விற்கு அதிக வாய்ப்பு உள்ளது
- தவறான தகவல்கள் பெறுவதற்கு வாய்ப்பிருக்கிறது
- முழுமைத் தொகுதியினைப் பிரதிபலிக்காத மாதிரி வர வாய்ப்புள்ளது.

- எளிதில் கிடைக்காத, தொகுதியின் உறுப்பாக அல்லாத தொகுதியின் சம்பந்தமில்லாத உறுப்புகளின் தேர்வினால் பிழைகள் வர வாய்ப்புள்ளது.

குறிப்பு

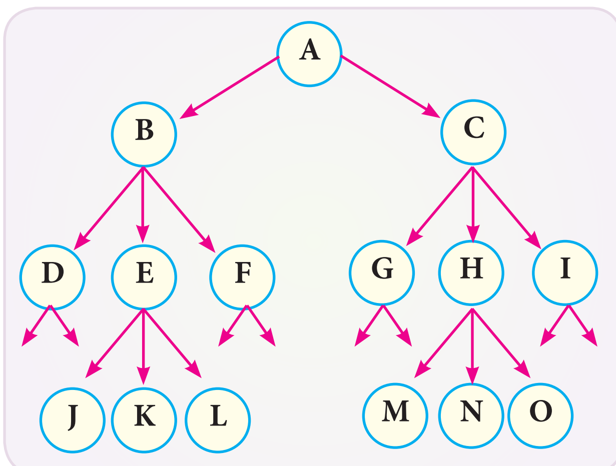
இம்முறையில் ஆய்வு முடிவுகளைப் பொதுமைபடுத்தும்போது ஏற்படும் பிழைகளால் சிறந்த முடிவுகளைப் பெற முடிவதில்லை. எனவே, இம்முறையான மாதிரிக் கணிப்புகளை வழிகாட்டுநர் ஊக்குவிப்பதில்லை. ஆனால் சில குறிப்பிட்ட சூழ்நிலைகளில் ஏதுவான மாதிரி கணிப்பு முறை மட்டுமே உகந்ததாக இருக்கிறது. உதாரணமாக, ஒரு விமான நிறுவனத்தின் வாடிக்கையாளரின் திருப்தியைப் பற்றி ஓர் ஆய்வாளர் தெரிந்துகொள்ள வேண்டுமெனில் இம்முறையை மட்டுமே தேர்ந்தெடுக்கமுடியும். ஏனெனில் கிடைக்க கூடிய வாய்ப்புகளிலிருந்துதான், தகவல்களைப் பெறமுடியும்.

2.8.2 பனிபந்து மாதிரிக் கணிப்பு (Snowball Sampling):

இம்முறையில்,முதலில்தகவல்அளிப்பவர்களைக்கொண்ட ஒருகுழு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அவர்களிடமிருந்தே மற்ற தகவல் அளிப்பவர்களின் பெயர்களைத் தருமாறு வேண்டப்படுகிறது. இம்முறையில் ஆய்விற்கு உட்படுத்தப்பட்ட உறுப்புகளிலிருந்தே, மற்ற பல பயனுள்ள உறுப்புகளை அறிய முடிகிறது. இத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளைக் கண்டறிவதே கடினமான ஒன்றாகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு குறிப்பிட்ட தொழிலில் ஈடுபடும் தொழிலாளர்கள், போதைக்கு அடிமையானவர்கள் போன்றவர்களை கொண்ட தொகுதியின் மாதிரிகளை இம்முறையைப் பயன்படுத்தியே கணிக்கிறோம். இம்முறை மாதிரிக் கணிப்பில் சங்கிலி தொடர் போன்ற பரிந்துரைகள் மூலம் பெறப்படுகிறது. எனவே இம்மாதிரிக் கணிப்பை சங்கிலிதொடர் பரிந்துரை மாதிரிக் கணிப்பு முறை என்றும் அழைக்கிறோம்.

நிறைகள்:

- இம்முறை ஒரு குறிப்பிட்ட சிறிய அளவிலான முழுமைத் தொகுதிக்குப் பொருத்தமான முறையாகும்.
- எளிதில் அறிய முடிகின்ற தகவல் அளிப்பவரை உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஆய்விற்கு மிகவும் பயனுள்ளதாகும்.



வரம்புகள்:

- மிக அதிக காலம் எடுக்கும்.
- பொதுவாக பிரதிநிதித்துவமான மாதிரியாக இருப்பதில்லை.
- தகவல் அளிப்பவருக்கு மிகக் குறைவாக அறிமுகமானவர்கள், விரும்பாதவர்கள், கருத்துக்கு முரணானவர்கள் முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு மிக மிகக் குறைவு.

2.8.3 கருத்து மாதிரிக் கணிப்பு அல்லது நோக்கமுடைய மாதிரிக் கணிப்பு (Judgement Sampling)

இம்முறையைப் பயன்படுத்தும் ஆய்வாளர், சில உறுப்புகள் மற்ற எந்த உறுப்புகளையும் விட மிகச் சிறந்த பிரதிபலிப்பாக இருக்கும் என கருதுகிறார். இம்முறையில் ஆய்வாளர் தன் சொந்த விருப்பபடியே உறுப்புகளைத் தேர்வு செய்கிறார். அதாவது எந்த வகையான மாதிரிகள், முழுமைத் தொகுதியின் பிரதிநிதியாக இருக்குமென அவர் கருதுகிறாரோ அவ்வகையான மாதிரிகளையே அவர் தேர்ந்தெடுக்கிறார். இம்முறையானது பொதுவாக ஆய்வின் பண்புகளைக் கொண்டிருக்கக்கூடிய உறுப்புகள் மிக குறைவான எண்ணிக்கையில் உள்ள சூழலில் பயன்படுத்தப்படும். இம்முறையானது, ஒரு குறிப்பிட்ட மக்களிடமிருந்தோ, ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்வுகளிலிருந்தோ, ஒரு குறிப்பிட்ட விலைப்பட்டியலிலிருந்தோ மாதிரியை தேர்ந்தெடுக்கும்போது பயனுள்ளதாக இருக்கும். இம்முறை கணிப்பானது, நோக்கமுடைய கணிப்புமுறை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

உதாரணம்

(i) வினாடி வினா போட்டிக்கு மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பது

(ii) பேச்சு போட்டிக்கு மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பது போன்றவற்றிற்கு இம்முறையிலேயே மாதிரிக் கணிப்பு நடத்தப்படுகிறது.

நிறைகள்:

- செலவு குறைவான முறை
- மிகக் குறைவான காலம் தேவைப்படும்.
- மிக எளிதானது

வரம்புகள்:

- முழுவதும் ஆய்வாளரின் தன்னிச்சையான முடிவுக்கு உட்பட்டது.
- பொதுவாக பொருத்தமில்லாத முறையாக உள்ளது.
- முழுமைத் தொகுதியின் சில உறுப்புகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கு மிக குறைவான வாய்ப்புகள் பெற்றுள்ளன (அல்லது) வாய்ப்புகள் பெறாமல் இருக்கின்றன.
- ஆய்வாளரின் சுய விருப்பத்திற்கு ஏற்ப, மாதிரி எடுக்கப்படுவதால், அவை முழுமைத் தொகுதியின் பிரதிநிதியாக இருப்பதில்லை.

2.8.4 ஒதுக்கீட்டு மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Quota Sampling)

இது நிகழ்தகவு சாரா மாதிரிக் கணிப்பு முறையின் மற்றொரு முறையாகும். இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதியானது பல குழுக்களாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. ஆய்வாளர் அவற்றிற்கு சில பங்குகளை ஒதுக்குகிறார். ஒவ்வொரு குழுவிலிருந்தும் மாதிரி உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுப்பது ஆய்வாளரின் சுயவிருப்பத்திற்கு உட்பட்டது. இம்முறையே ஒதுக்கீட்டு மாதிரிக் கணிப்புமுறை எனப்படும். இம்முறையில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் குறிப்பிட்ட உறுப்பினர்களே மாதிரியில் சேர்க்கப்படுகின்றனர்.

நிறைகள்:

- இம்முறையில் மிக விரைவாகவும், எளிதாகவும், செலவில்லாமலும் மாதிரிகளைத் தேர்வு செய்ய முடிகிறது.
- மாதிரிகளின் பண்புகளைக் கட்டுப்படுத்த முடிகிறது.
- முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளைப் பிரதிபலிக்கின்ற உறுப்புகள் பெறுவதற்கு அதிக வாய்ப்பு உள்ளது.

வரம்புகள்:

- தவறான தேர்வு முறை
- பிரதிநிதித்துவ மாதிரி தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதில்லை. மேலும் புள்ளியியல் பண்புகளை (ஆய்வுகளை) பயன்படுத்தக்கூடியதும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 2.4

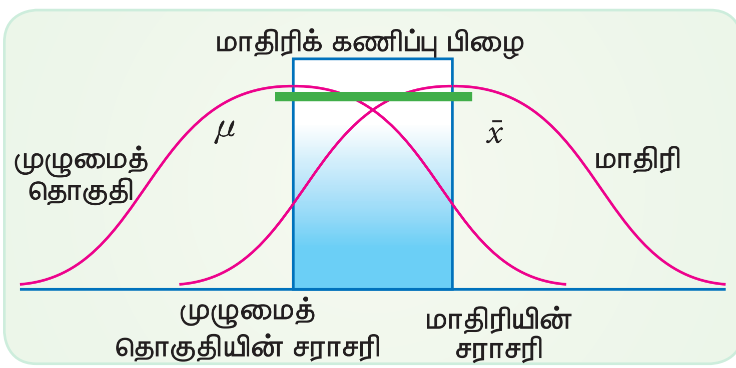
கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து எம்முறையில் கிரிக்கெட் குழுவை டெஸ்ட் மேட்சிற்காக தேர்வுக்குழு தேர்ந்தெடுக்கும்? வெவ்வேறு பகுதிகளைக் கொண்டு ஒதுக்கீட்டு முறையில் கிரிக்கெட் குழுவை தேர்வு செய்யவும்.

குழுக்கள்	வேக பந்து வீச்சாளர்	சுழல் பந்து வீச்சாளர்	அனைத்து சுற்றிலும் உள்ளவர்	பந்து அடிப்பவர்	விக்கெட் கீப்பர்
ஒதுக்கீடு	2	3	3	2	1

இம்முறையில் தேர்வு குழுவானது, விளையாட்டு வீரர்களை, வேகபந்து வீச்சாளர், சுழல்பந்து வீச்சாளர், அனைத்து சுற்றிலும் உள்ளவர், பந்து அடிப்பவர், விக்கெட் கீப்பர் போன்ற பல பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றனர். பின் எதிரணியினரின் பலம் மற்றும் ஆடுகளத்தின் தன்மை ஆகியவற்றைக் கருத்தில்கொண்டு, பெறப்பட்ட பகுதிகளுக்கு வீரர்களை ஒதுக்குகிறார்கள்.

2.9 மாதிரிக் கணிப்பு மற்றும் மாதிரிக் கணிப்பு சாரா பிழைகள்

2.9.1 மாதிரிக் கணிப்புப் பிழை



மாதிரி எடுப்பதின் நோக்கம் என்பது மாதிரியிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளை அறிவதே ஆகும். மாதிரியின் அளவு மற்றும் முழுமை தொகுதியின் அளவு இரண்டும், முழுகணிப்பு எடுக்காத வரையில் சமம் அல்ல. எனவே மாதிரியின் சராசரியும், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியும் வேறுபடும். இவ்வேறுபாடே, மாதிரிகணிப்பு பிழை எனப்படும்.

$\bar{x}$ என்பது மாதிரியின் சராசரி எனவும், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ எனவும் இருப்பின் $\bar{x}-\mu$ என்பது மாதிரிக் கணிப்பு முறையின் பிழை எனப்படும். இது மிகை எண்ணாகவோ குறைவெண்ணாகவோ அல்லது பூச்சியம் ஆகவோ இருக்கலாம்.

2.9.2 மாதிரிக் கணிப்பு சாரா பிழைகள் (Non–Sampling Errors)

மாதிரிக் கணிப்பு சாரா பிழைகள் பல்வேறு காரணங்களால் ஏற்படுகின்றன. அது ஆய்வைப் பற்றி திட்டமிடுதலில் தொடங்கி, விபரங்களை செயல்படுத்துதல் பகுப்பாய்தல், இறுதி நிலை வரைக்கும் ஏற்பட வாய்ப்பு இருக்கிறது. மாதிரிக் கணிப்பு சாரா பிழையானது மாதிரிக் கணிப்பு பிழையைவிட பாதகமானது, ஏனெனில் மாதிரியின் அளவை அதிகப்படுத்தி மாதிரிகணிப்பு பிழையினை வேண்டுமளவிற்கு குறைத்துக்கொள்ள முடியும். ஆனால் மாதிரிக் கணிப்பு சாராத முறையில் மாதிரியின் அளவு அதிகப்படுத்தினால்கூட பிழையைக் குறைப்பது மிகக் கடினம். மாதிரிகணிப்பு சாரா பிழையின் சில முக்கிய காரணங்களை நாம் இப்போது காண்போம்..

(i) பதில் பெறாமை அல்லது பதிலளிக்காமையால் ஏற்படும் பிழைகள்:

மாதிரிக் கணிப்பற்ற பிழைகள், ஆய்வாளர் தகவல் பெறாமல் விடுவதினாலோ, தகவல்கள் விடுபடுவதினாலோ, தகவல் அளிப்பவர் தரவுகள் தர மறுப்பதினாலோ, ஆய்வின் காலத்தில், தகவல் அளிப்பவர் இல்லாமல் இருக்கும் சூழ்நிலையினாலோ ஏற்படுகிறது.

(ii) அளவிடுதலினால் ஏற்படும் பிழைகள்:

அளவிடும் காரணிகள் பிழையானதாகவும், துல்லியமற்றதாகவும் இருக்கும் சூழ்நிலைகள். தகவல் அளிப்பவர் சரியான தகவல் தெரியாதவராகவும், உறுதியற்ற தகவல் தருபவராகவும் இருக்கும் சூழ்நிலைகள் இவற்றிற்கான பொதுவான எடுத்துக்காட்டுகள் வயது, வருமானம், கடந்த கால நிகழ்வுகள் போன்றவை பற்றிய விவரங்கள் பெறுதல். ஆய்வாளர் சரியான விவரங்களைப் பதிவிடாமல் இருப்பது. குறியிடுதல், கோர்த்தல் மற்றும் பட்டியல் இடல் போன்ற காரணங்களால் ஏற்படும் பிழைகள்.

உள்ளடக்க பிழைகள்:

உள்ளடக்க பிழைகள் என்பன குறைவான உள்ளடக்க பிழைகள் மற்றும் அதிகப்படியான உள்ளடக்க பிழைகள் என இரு வகையாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. குறைவான உள்ளடக்க பிழைகள் கீழ்க்கண்ட சூழல் களில் நிகழ்கின்றன:

- மாதிரிப்பட்டியலில் தேர்வு செய்யப்பட்ட ஓர் உறுப்பிலிருந்து ஆய்வாளர் தகவல் பெறாமல் இருப்பது.
- தேர்வு செய்யப்பட்ட ஓர் உறுப்பைத் தவறாக தகுதியற்றது என வகைப்படுத்துதல்.
- ஓர் உறுப்பைத் தவிர்ப்பது அல்லது விட்டுவிடுதல் இதேபோல அதிகபடியான உள்ளடக்க பிழைகள் ஏற்படும் சூழல்கள்
- மாதிரி பட்டியலில் தகுதியற்ற அலகுகளை உள்ளடக்குதல்.
- மாதிரி பட்டியலில் ஒரே உறுப்பு பலமுறை இடம் பெறுதல்.

இது போன்ற பிழைகளைக் கண்டுகொள்ளாமல் விட்டுவிட முடியாது. ஏனெனில் இவையெல்லாம் சேர்ந்தால் ஆய்வின் அடிப்படை நோக்கத்தையே வீணடிக்கக் கூடியதாக இருக்கும்.

மாதிரி ஆய்வு எடுத்தலை செயல்படுத்துதல்

தரவுகள் பெறுவதைப் பற்றியும், மாதிரிகள் எடுத்தலின் வகைகள் பற்றியும் மேற்கண்ட விவரங்களின் வாயிலாக விரிவான விளக்கங்களைப் பெற்றோம். எனினும் மாதிரி எடுத்தல்

மூலமாக தரவுகளைப் பெற முடிவு செய்வோமெனில் கீழ்க்கண்ட நிலைகளைக் கடைபிடிக்க வேண்டும்.

நிலை (i) மாதிரி திட்டத்தைத் தயாரித்தல்

தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கக்கூடிய நிலைகளை ஆய்வாளர் பின்பற்றி, இறுதியாக ஒரு மாதிரியைப் பெறவேண்டும்.

(i) தொடர்புடைய முழுமைத் தொகுதியை வரையறுத்தல்.

(ii) முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்பின் பட்டியலை முடியுமெனில் தவிர்க்கவும். இது பெரும்பாலும் மாதிரி பட்டியல் போல் ஒன்றாக இருக்கும்.

(iii) மாதிரியின் அளவை முடிவு செய்தல்.

(iv) சரியான மாதிரிக் கணிப்பு முறையைத் தேர்வு செய்தல்

(v) மாதிரியைத் தெரிவு செய்தல்

(vi) மாதிரியின் மதிப்பை உறுதி செய்தல்

(vii) தேவையெனில் மறு மாதிரி எடுத்தல்.

நிலை (ii) முன்னோட்ட ஆய்வு அல்லது முன்னறிதல்

இது ஒரு வழிகாட்டுதல் ஆய்வாகும். பொதுவாக சிறு அளவில் பிரதான ஆய்விற்கு முன் நடத்தப்படுகிறது. வழிகாட்டுதல் ஆய்விலிருந்து பெறப்பட்ட தகவல்கள், பெரிதளவில் செய்யப்படும் பிரதான ஆய்வின் தன்மையை மேம்படுத்தவும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இவ்வாய்வு கீழ்க்கண்ட வகையில் பயன்படுகிறது.

(i) சரியான ஆய்விற்காகும் செலவைத் தீர்மானிக்கப் பயன்படுகிறது.

(ii) வினா பட்டியலைத் திருத்துவதற்குப் பயன்படுத்துதல்.

(iii) கள ஆய்வாளர்களைப் பயிற்றுவிக்கப் பயன்படுகிறது.

(iv) களத்தில் ஏற்படும் பிழைகளைக் களையப் பயன்படுகிறது.

(v) ஆய்வின் மற்ற பல விவரங்களை முடிவு செய்யப் பயன்படுகிறது.

நிலை (iii) தகவல் அளிக்காதவர்களை அல்லது தகவல் அளிக்க மறுப்பவர்களைச் சமாளித்தல்

தகவல் அளிக்காதவர்கள் அல்லது மறுப்பவர்களிடமிருந்து விவரங்களைப் பெறுவதற்கான வழிமுறைகள் கண்டறியப்படவேண்டும்..

நினைவில் கொள்க...

- புள்ளியியல் ஆய்வுகள் தரவுகள் மூலமாகவே நடைபெறுகிறது.
- தரவு, முதல் நிலை தரவு இரண்டாம் நிலை தரவு என இருவகைப்படும்.
- ஆய்வின் தன்மையைப் பொறுத்து தரவுகளின் ஆதாரம் அமையும்.
- ஒவ்வொரு தரவு பெறும் முறைக்கும் நிறை குறைகள் உள்ளன. எனவே தரவுகள் பெற பொறுத்தமான முறையைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.
- முழுமைத் தொகுதியின் அனைத்து உறுப்புகளையும் ஆய்வு செய்வது என்பது எளியது அல்ல. எனவே, மாதிரிகளின் பிழைகளிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளை அறிவது சிறந்ததாகும்.

- மாதிரிக் கணிப்புமுறையைப் பயன்படுத்துகையில்;, முழுமைத் தொகுதியின் மாதிரி பட்டியல் கொடுக்ககூடியதாக உள்ளதா என்பதை முக்கியமாகக் கூற வேண்டும். மேலும் அதற்கு தகுந்த மாதிரிகணிப்பைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.
- பல வகையான மாதிரிகணிப்பு முறைகள் இருந்தாலும், வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறைக்கு முன்னுரிமை அளிக்கப்படுகிறது. ஏனெனில், அது முழுமை தொகுதியின் பிரதிநிதியாக இருக்கிறது.

பியிற்சி

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

6CPG3D

1. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எந்த தரவு பெறும் முறை, முதல்நிலை தரவு முறையைச் சார்ந்தது அல்ல?

   (a) வினாபட்டியல் கொண்டு தரவு பெறும் முறை

   (b) வெளியிடப்பட்ட ஆதாரங்களிலிருந்து தரவுகள் பெறப்படும் முறை

   (c) அருகமைந்த ஆய்வாளரைக் கொண்டு தரவு பெறும் முறை

   (d) மறைமுக ஆய்வின் மூலம் தரவுகள் பெறும் முறை

2. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எந்த முறை நிகழ்தகவு சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை

   (a) ஒதுக்கீட்டு மாதிரிக் கணிப்பு முறை (b) பனிப்பந்து மாதிரிக் கணிப்பு முறை

   (c) முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை (d) ஏதுவான மாதிரிக் கணிப்பு முறை

3. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எந்த முறை, பகுதி நிகழ்தகவு சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை

   (a) ஒதுக்கீட்டு மாதிரிக் கணிப்பு முறை (b) பனிப்பந்து மாதிரிக் கணிப்பு முறை

   (c) முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை (d) ஏதுவான மாதிரிக் கணிப்பு முறை

4. தரவுகளைச் சேகரித்தல் என்பதன் நோக்கில் ஒரு வினாத் தொகுதி என்பது

   (a) ஆய்வாளரால் பயன்படுத்தப்படும் வினாபட்டியல்

   (b) தரவுகளை சேகரிக்கும்போது உள்ள நிகழ்ச்சிகளின் பட்டியல்

   (c) கணிப்பு முறையில் பயன்படுத்தும் கருவி

   (d) இரண்டாம் நிலை தரவுகள்

5. வினாபட்டியல் கொண்டு தரவுகள் சேகரிக்கும் முறையில், கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது தவறானது?

   (a) குறைந்த நேரத்தில் பெரும்பகுதியில் தரவு பெறுதல்

   (b) இம்முறையினை எந்தவொரு தகவல் அளிப்பவரிடத்திலும் பயன்படுத்த முடியும்

   (c) தகவல் பெறும் விகிதம் மிக குறைவாக இருக்கலாம்

6. ஓர் ஆய்விற்காகக் கருத்து கணிப்பு எப்போது நடத்தப்படுகிறது?

(a) ஆய்வு தொடங்குவதற்கு முன்பே (b) ஆய்வு நடந்து முடிந்தபின்

(c) ஆய்விற்கு இடையில் (d) ஆய்வு நடைபெறும் எந்த நேரத்திலும்

7. வெளியேறும் கருத்து கணிப்பு எப்போது நடத்தப்படுகிறது?

(a) ஆய்வு தொடங்கப்படுவதற்கு முன் (b) ஆய்வு நடத்தி முடித்த பின்

(c) ஆய்விற்கு இடையில் (d) ஆய்வு நடைபெறும் எந்த நேரத்திலும்

8. ஆய்வாளர் ஒரு நிறுவனத்தின் தரவினைப் பயன்படுத்துகிறார் எனில், அத்தரவானது

(a) எண் அளவிலான தரவு (b) பண்பளவிலான தரவு

(c) இரண்டாம் நிலை தரவு (d) முதல் நிலை தரவு

II . கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக:

9. தரவுகள் என்பது _______________

10. ஒரு வினாபட்டியல் தொகுப்பில் _______________உள்ளன.

11. மாதிரி உறுப்பு (அ) அலகு என்பதன் பொருளை _______________

12. பனிபந்து மாதிரிக் கணிப்பு ஒரு _______________ மாதிரிக் கணிப்பு

13. _______________ என்பது பகுதி வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு எனப்படும்..

III . குறு வினாக்கள் (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி)

14. தரவு என்றால் என்ன?

15. முழுமைத் தொகுதியை வரையறு

16. முழுமைக் கணிப்பு என்றால் என்ன?

17. வினாத் தொகுதி என்பது என்ன?

18. அழியும் வகை சார்ந்த தரவுகள் என்றால் என்ன?

19. மாதிரியை வரையறு

20. மாதிரிக் கணிப்பு பிழையை வரையறு

21. மாதிரியைப் பற்றி முக்கியமாக கருத்தில் கொள்ளவேண்டியது என்ன?

22. மாதிரி பட்டியலை வரையறு

23. பங்கிடலின் விதியைக் கூறு

24. மிகுந்த உள்ளடக்கம் என்றால் என்ன?

IV . சிறு வினாக்கள் (ஓரிரு சொற்றொடர்களில் விடையளி)

25. முதல்நிலை மற்றும் இரண்டாம் நிலை தரவுகளின் வேறுபாட்டைக் கூறுக.

26. இரண்டாம் நிலை தரவைப் பயன்படுத்தும் முன் கவனிக்க வேண்டியவை என்ன என்பதை பட்டியலிடு.

27. மாதிரிக்கும், மாதிரிக் கணிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாடுகளைப் பட்டியலிடுக

28. வாய்ப்பு மாதிரிக்கும், எளிய வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாடுகளைக் கூறுக.

29. மாதிரிக் கணிப்பு சார்;ந்த பிழைக்கும், மாதிரிக் கணிப்பு சாரா பிழைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டைக் கூறுக.

30. வினாபட்டியலிற்கும் வினாத்தொகுதிக்கும் உள்ள வேறுபாடுகளைக் கூறுக

31. பனிபந்து மாதிரிக் கணிப்புமுறை என்பதை விவரி. இம்முறை எம்மாதிரியான சூழ்நிலைக்கு ஏற்றது என கூறுக

32. ஏன் முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறையானது, பகுதி வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறை என அழைக்கப்படுகிறது?

33. தகவல் அளிக்காமைக்கு ஆதாரங்கள் எவை எனக் கூறுக

34. முன் சோதனை வரையறு. அதன் சிறப்புகளைக் கூறுக

35. மாதிரிக் கணிப்பு சாரா பிழைகளின் ஆதாரங்களைப் பட்டியலிடு.

V. விரிவான விடையளி

36. முதல் நிலை தரவினைச் சேகரிக்கும் வெவ்வேறான முறைகளைப்பற்றி விவரி. மேலும் அவற்றின் நிறை மற்றும் குறைகளைப் பற்றிய உன் கருத்தைக் கூறுக

37. வினாபட்டியல் தயாரித்தலில் உள்ள வழிகாட்டுதல்கள் என்ன? மேலும் அவற்றைப் பற்றி விவரி.

38. தரவுகளைப் பெறுவதில் முழுகணிப்பு முறையைவிட மாதிரிக் கணிப்புமுறை சிறந்தது என்பதை விவாதிக்கவும்.

39. பங்கீட்டு வாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறை எந்த சூழ்நிலைக்கு உகந்த முறை எனக் கூறு. எவ்வாறு அது போன்ற மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுப்பாய்? ஒரு எடுத்துக்காட்டுடன் விவரிக்கவும்.

40. நிகழ்தகவு சாரா மாதிரிக் கணிப்பு என்றால் என்ன? ஒவ்வொன்றையும் தக்க எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குக.

41. மாதிரிக் கணிப்பு சாரா பிழைகளை விவரித்து எழுதுக.

விடைகள்

I. 1. b. 2. c. 3. c. 4. c. 5. b. 6. a. 7. b. 8. c.

II. 9. புள்ளியியலுக்கான மூலப்பொருள் 10. வினாக்களின் தொடர் வரிசை

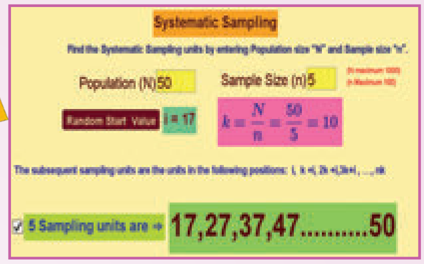
11. மாதிரியிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை

12. நிகழ்தகவு சாரா 13. முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை

இணையச்செயல்பாடு

மாதிரி எடுக்கும் முறைகள் –முறைசார்ந்த மாதிரி எடுக்கும் முறை

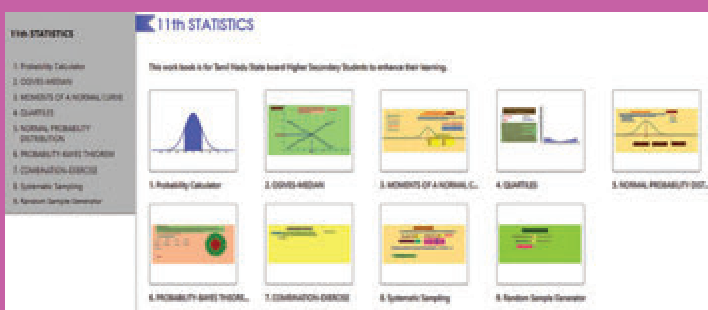
செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



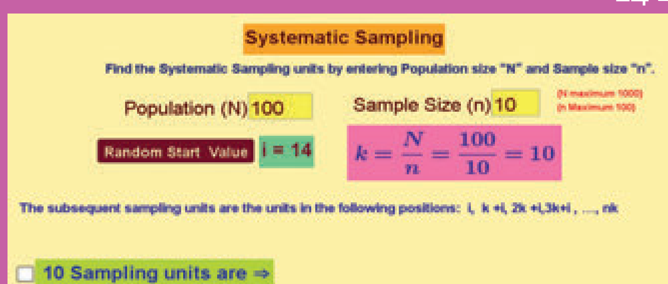
படிகள்

1. கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க.
2. "11th Standard Statistics" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகத்தில் "Systematic Sampling" க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்
3. முழுமைத்தொகுதிக்கான(Population) மதிப்பையும், மாதிரி அளவுக்கான(Sample) மதிப்பையும், அந்தந்த உள்ளீட்டுப்பெட்டிகளில் தட்டச்சு செய்யவும்.இப்பொழுது தேவையான மாதிரிகள் கிடைக்கும். "Random Start Value"(தொடர்பறு தொடக்க எண்)–ஐச் சொடுக்கி ஆரம்ப எண்ணை மாற்றியமைக்கலாம்,

படி 1



படி 2



இதே பணிப்புத்தகத்தில் உள்ள ராண்டம் மாதிரி இயற்றி–யையும் ("Random sample generator") பார்க்கவும்.

* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

உரலி:

https://ggbm.at/uqVhSJWZ

B136_11_STA_TM

அத்தியாயம்

3

தரவுகளை வகைப்படுத்துதலும் அட்டவணையிடுதலும்

பேராசிரியர் ஜான் வில்டர் டக்கி
(16 June, 1915– 26 June, 2000)

ஜான் வில்டர் டக்கி ஓர் அமெரிக்க கணிதவியலார். அவர் அமெரிக்காவிலுள்ள நியூ பெட்ஃபோர்ட் என்ற ஊரில் 1915ஆம் ஆண்டு ஜூன் 16இல் பிறந்தார். 1937ஆம் ஆண்டு பிரவுன் பல்கலைக் கழகத்தில் வேதியியலில் முதுகலை பட்டமும், பிரின்ஸ்டன் பல்கலைக் கழகத்தில் கணிதத்தில் முனைவர் பட்டமும் பெற்றார். அவர் AT & T Bell நிறுவனத்தில் புள்ளியியல் முறைகள் பற்றி ஆய்வுகள் நடத்தியுள்ளார். அங்கு கணினியில் பயன்படுத்தப்படும் Binary Digit என்பதிலிருந்து Bit என்ற சொல்லை உருவாக்கினார். அவரது 'தரவுகளில் தேடலாய்வுப் பகுப்பாய்வு' எனும் நூலில் 'கட்ட விளக்கப்படம் வரைதல்' எனும் புதிய நுணுக்கத்தை அறிமுகப்படுத்தியுள்ளார். புள்ளியியலில் உள்ள ஆர்வத்தால், டக்கியின் வீச்சு சோதனை, டக்கி–லாம்டா பரவல், டக்கியின் கூடுதல் சோதனை, டக்கியின் கிளைத்தேற்றம் போன்றவற்றை உருவாக்கியுள்ளார். ராண்டம் முறையில் அலைமாலைப் பகுப்பாய்வு வழிமுறைகளைக் கண்டறிந்ததற்காக 1882ஆம் ஆண்டு IEEE விருதினைப் பெற்றார். அவர் நியூ ஜெர்ஸியில் உள்ள நியூப்ரன்ஸ்விக் என்ற ஊரில் ஜூலை 26.07.2000 அன்று மறைந்தார்.

'அறிவே சக்தியாகும். வெறும் தரவுகள் எப்பொழுதும் தரவுகள்தாம். எவ்வளவு அதிகமான தரவுகளை நாம் பெற்றிருக்கிறோம் என்பது முக்கியமல்ல. அவற்றை எப்படி அறிவுப்பூர்வமாக பயன்படுத்துவதற்கு மாற்றுகிறோம் என்பதே முக்கியம்'.

நோக்கங்கள்

- வகைப்படுத்துதல் மற்றும் அட்டவணையிடுதலின் முக்கியத்துவத்தை வலியுறுத்துதல்.
- வகைப்படுத்துதலிலும், அட்டவணையிடுதலிலும் உள்ள பல வகைகளை வேறுபடுத்திக் காட்டுதல்.
- நிகழ்தகவுப் பரவல்களை உருவாக்கும் முறை பற்றி விளக்குதல்.
- தண்டு–இலை வரைபடம் பற்றி விளக்குதல்.
- மேற்கண்ட பாடப்பகுதிகளை எண்களோடு பொருந்தும் எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குதல்.

6CYC51

3.0 முன்னுரை

முந்தைய பாடத்தில், தரவுகளின் பல்வேறு வகைகளையும், அவற்றைச் சேகரிக்கும் முறைகளைப் பற்றியும் அறிந்தோம். மேலும் முழுமைக் கணக்கெடுப்பு முறை மாதிரிக் கணக்கெடுப்பு முறை பற்றியும் தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விரிவாகக் கற்றோம். இங்கு சேகரிக்கப்படும் விவரங்களைத் தரவுகள் என்று கூறுகிறோம். தரவு என்பது தொடர்புடைய விவரங்களின் தொகுப்பு ஆகும். பல சமயங்களில், தரவுகள் எண்ணிக்கையில் அதிகமாகவும் பன்முகத் தன்மை பெற்றதாகவும் காணப்படும். அந்நிலையில் சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகளை முறையாக வகைப்படுத்தும்போது, நல்ல புரிதலோடு, புள்ளியியல் பகுப்பாய்வுக்கும் பயன்படுத்த முடிகிறது. இங்கு வகைப்படுத்துதல் பற்றி இனி விரிவாகக் காண்போம்.

3.1 தரவுகளை வகைப்படுத்துதல்

எந்த வகையிலும் தொகுக்கப்படாத மற்றும் வரிசைப்படுத்தப்படாத தரவுகள் செப்பனிடப்படா தரவுகள் (raw data) எனப்படும். அவை, கையாள்வதற்கு எண்ணிக்கையில் அதிகமாகவும் பன்முகத்தன்மை பெற்றதாகவும் இருக்கும். எனவே அவற்றை ஒரு குறிப்பிட்ட வடிவத்தில் தொகுக்கப்படவேண்டியது அவசியமாகிறது. செப்பனிடப்படா விவரங்களில் உள்ள தகவல்களை எண்களைப் பொருத்தோ பண்புகளைப் பொருத்தோ அமைக்கப்படுவதை வரிசை (array) என்கிறோம். குறிப்பாக அவற்றை ஏறுவரிசையிலோ, இறங்குவரிசையிலோ அமைப்பதைத் தொடர்புடைய வரிசை (ordered array) என்கிறோம். தொகுக்கப்படா விவரங்களைக் கொண்டு முக்கிய முடிவுகளை எடுப்பது கடினம். எனவே அந்த விவரங்கள் சுருக்கமாகவும் ஒரே வகை பண்புகளைக் கொண்டு வகைப்படுத்தப்பட்டதாகவும் இருந்தால் பகுப்பாய்வுக்கும், கருத்தாய்வு செய்வதற்கும் பயன்படும்.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

சில ஆயிரம் வருடங்களுக்கு முன்பே உலகத்துப் பொருள்களைத் தொல்காப்பியர் உயர்திணை, அஃறிணை என இரண்டாக வகைப்படுத்தினார். உயிர்களை அவற்றுக்குள்ள அறிவின் படி ஆறாக வகைப்பாடு செய்துள்ளார்.

வகைப்படுத்துதல் என்பது முதல்நிலைத் தகவல்களை ஒரு குறிப்பிட்ட முறையான வடிவத்தில் அமைப்பதாகும். தரவுகளை அதன் பொதுவான மற்றும் தொடர்புடைய பண்புகளைப் பொறுத்துக் குழுக்களாக அமைப்பதே வகைப்படுத்துதல் என ஹோரஸ் செக்ரிஸ்ட் வரையறுக்கிறார். மேலும் வகைப்படுத்துதல் என்பது தரவுகளை அவற்றின் தன்மைக்கேற்ப ஒருங்கமைவுத்தன்மை வாய்ந்த பல்வேறு குழுக்களில் அமைப்பதாகும். ஆனால், குழுக்களிடையே ஒருங்கமைவுத்தன்மை இல்லாமல் இருக்கலாம்.

வகைப்படுத்துதலின் நோக்கங்கள்

தரவுகளை வகைப்படுத்துதலில் பல நோக்கங்கள் உள்ளன.அவற்றில் முக்கியமானவற்றை இங்கு காண்போம்.

- தரவுகளின் தன்மைகளை விளக்குகிறது.
- ஒரே மாதிரியான தரவுகளை ஒப்பிட உதவுகிறது
- ஒத்த பண்பற்றதரவுகளில் இருந்து ஒத்தபண்புடைய தரவுகளைப் பிரித்து வகைப்படுத்த உதவுகிறது.
- வேறுபட்ட தரவுப்புள்ளிகளில் உள்ள ஒத்த பண்பை விளக்குகிறது.
- வகைப்படுத்தும் போது அமையும் சுருக்கப்பண்பினால், தரவுகளின் ஒற்றுமைகளையும், வேற்றுமைகளையும் புரிந்து கொள்ள முடிகிறது.
- சிக்கலமைப்புடன் கூடிய தரவுகளையும் எளிமையாகக் கையாள்வதற்கு உதவுகிறது.
- பிந்தைய புள்ளியியல் செயல்பாடுகளுக்குப் பயன்படும் வகையில் உள்ளது.

3.2 வகைப்படுத்துதலின் வகைகள்

செப்பனிடப்படா விவரங்களின் இயல்புகளைப் பொறுத்து அவை வகைப்படுத்தப்படுகின்றன. பொதுவாக வகைப்படுத்துதல் என்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்படுத்தலாம். அவை

(i) காலம்சார் வகைப்படுத்துதல் (Classification by Time or Chronological Classification)

(ii) இடம்சார்வகைப்படுத்துதல் (Classification by Space or Spatial Classification)

(iii) பண்புசார்வகைப்படுத்துதல் (Classification by Attribute or Qualitative Classification)

(iv) அளவின்மூலம் வகைப்படுத்துதல் (Classification by Size or Quantitative Classification)

இனி அவற்றை விரிவாகக் காணலாம்.

3.2.1 காலம்சார் வகைப்படுத்துதல்

காலத்தின் கூறுகளைக் கொண்டு தரவுகளை வகைப்படுத்தும் முறைக்கு காலம் சார் வகைப்படுத்துதல் என்று பெயர். இந்த வகையில் தரவுகள் வருடம், மாதம், வாரம், நாள் போன்ற காலத்தின் கூறுகளை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் குழுக்களாக வகைப்படுத்தப்படுகின்றன. இவ்வகையில் வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கான எடுத்துக்காட்டைக் கீழே காணலாம்.

- 1995–2015 ஆண்டுகளில் தமிழ்நாட்டில் தொடங்கப்பட்ட புதிய பள்ளிகளின் எண்ணிக்கை
- பள்ளி இறுதி ஆண்டுத் தேர்வுகளில் கடந்த ஐந்து ஆண்டுகளாக ஒரு பள்ளி மாணவர்கள் பெற்ற தேர்ச்சி விழுக்காடுகள்
- பங்குச் சந்தையில் ஒரு வாரத்தில் நடைபெற்ற வணிகத்தில் ஏற்பட்ட பங்குச் சந்தைக் குறியீடுகள்
- ஒரு தொழிலகத்தில் தொழிலாளர்கள் மாதந்தோறும் பெறும் ஊதியத்தின் விவரங்கள்
- நாள்தோறும் ஒரு நல மையத்திற்கு வரும் புறநோயாளிகளின் விவரங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.1

2001–2012 வருடங்களில் இந்தியாவில் 10 கிராம் தங்கத்தின் விலை கீழ்க்கண்ட அட்டவணை 3.1இல் வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 3.1

இந்தியாவில் 10 கிராம் தங்கத்தின் விலை

ஆண்டு	விலை (ரூபாயில்)	ஆண்டு	விலை (ரூபாயில்)	ஆண்டு	விலை (ரூபாயில்)
2001	4300	2005	7000	2009	14500
2002	4990	2006	8400	2010	18500
2003	5600	2007	10800	2011	26400
2004	5850	2008	12500	2012	31799

எடுத்துக்காட்டு 3.2

இந்திய மக்கள் தொகை 1961 முதல் 2011 வரை கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்படுகிறது.

அட்டவணை 3.2

இந்தியமக்கள்தொகைகணக்கெடுப்பு (1931-2011)

ஆண்டு	1961	1971	1981	1991	2001	2011
மக்கள் தொகை (கோடியில்)	43.92	5482	68.33	84.64	10281	121.02

3.2.2 இடம்சார் வகைப்படுத்துதல்

தரவுகளை நாடு, மாநிலம், நகரம், மாவட்டம் போன்றவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு வகைப்படுத்துவது இடம்சார் வகைப்படுத்துதல் எனப்படும்.

அதற்கான கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

- கிராமம் மற்றும் நகர்புற பள்ளிகளில் பயிலும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.
- ஒரு மாநிலத்தில் மண்டல வாரியான கல்வியறிவு நிலை.
- இந்தியாவின் பல்வேறு மாநிலங்களில் விளையும் பயிர் உற்பத்தி.
- தென்கிழக்கு ஆசியாவில் உள்ள நாடுகளின் வாளர்ச்சி நிலை.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

தமிழ்நாட்டின் ஏழு பெரு நகரங்களில் உள்ள பல்வேறு வகை பள்ளிகளும், அவற்றில் பயிலும் பல்வேறு நிலை மாணவர்களின் எண்ணிக்கையும் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 3.3

பள்ளிகளின் எண்ணிக்கையும், வகைகளும்

மாவட்டம்	தொடக்கப்பள்ளி	நடுநிலைப் பள்ளி	உயர்நிலைப் பள்ளி	மேல்நிலைப் பள்ளி	கூடுதல்
சென்னை	697	203	206	448	1554
கோவை	1090	307	185	306	1888
மதுரை	1314	332	172	254	2075
திருச்சி	1260	350	187	199	1996
சேலம்	1402	445	213	231	2291
திருநெல்வேலி	1786	437	178	251	2652
ஈரோடு	986	357	146	176	1665

எடுத்துக்காட்டு 3.4

2014–2015ஆம் ஆண்டில் சராசரி நெல் உற்பத்தி

அட்டவணை 3.4

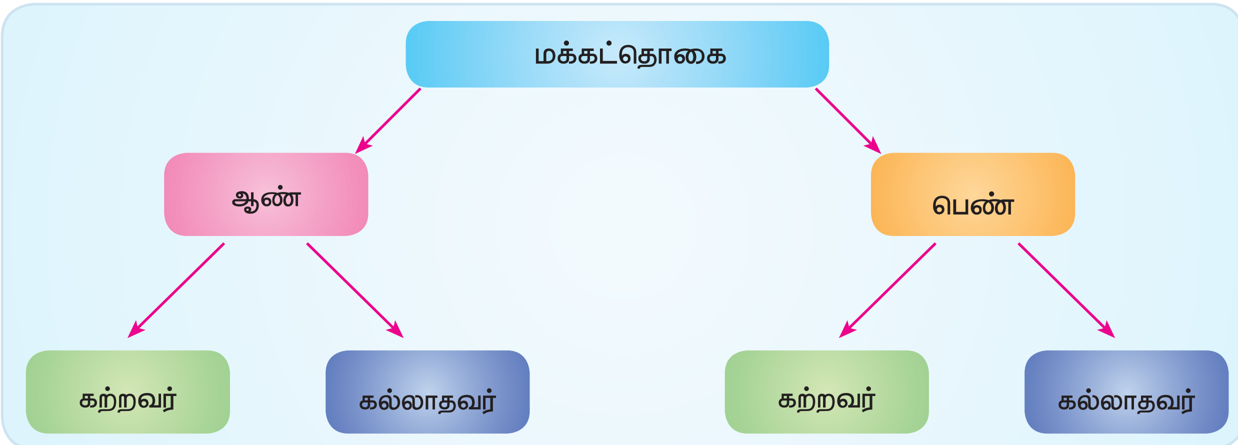
மாநிலம்	உற்பத்தி (கி.கி / ஹெக்டேர்)
தமிழ்நாடு	3191
கர்நாடகம்	2827
கேரளா	2818

உத்திர பிரதேசம்	2082
மேற்கு வங்காளம்	2731

ஆதாரம்: புள்ளியியல் மற்றும் பொருளியல் இயக்குநரகம் விவசாயம் மற்றும் விவசாய நல அமைச்சகம், இந்திய அரசு.

3.2.3 பண்புசார் வகைப்படுத்துதல்

தரவுகளைப் பண்புகளுக்கேற்ப வகைப்படுத்தும் முறைக்கு பண்புசார் வகைப்படுத்துதல் எனப்படும். நாடு, மதம், பாலினம், திருமண நிலை, எழுத்தறிவு போன்றவற்றைப் பண்புகளுக்கான எடுத்துக்காட்டாகக் கூறலாம்.



படம் 3.1

பண்புசார் வகைப்படுத்துதலை இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். அவை.

1. எளியமுறை வகைப்படுத்துதல் (simple classification)

2. பண்முக வகைப்படுத்துதல் (manifold classification)

செப்பனிடப்படா தரவுகளை ஒரே ஒரு பண்பின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்துவது எளிய வகைப்படுத்துதல் எனப்படும் ஒத்த பண்புகளை உடைய அலகுகள் ஒரு குழுவாகவும் மற்றவை வேறொரு குழுவாகவும் எடுத்துக்கொள்ளப்படும். எழுத்தறிவு, பாலினம், பொருளாதார நிலை, போன்றவை எளிய முறை வகைப்படுத்துதலின் கீழ் அமையும்.

பன்முக வகைப்படுத்துதல் என்பது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட பண்புகளை ஒரே சமயத்தில் பயன்படுத்தி வகைப்படுத்துவதாகும். பண்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து தரவுகள் பல்வேறு பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாட்டின் மக்கள் தொகை ஆண் மற்றும் பெண் என இரு பிரிவுகளாக வகைப்படுத்தப்படுவதைக் கூறலாம். மேலும் இந்த இரு பிரிவுகளையும் கற்றவர், கல்லாதவர் என உட்பிரிவுகளாக வகைப்படுத்தலாம்.

பண்புகளைப் பொறுத்து வகைப்படுத்தும்போது அதில் இடம்பெறும் பண்புகள் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக வருமானத்தைச் சார்ந்த குழுக்களாக

பிரிக்கப்படும்போது தரவுப் புள்ளிகள் ஒரே சமயத்தில் வேறுவேறு குழுக்களில் அமையாதவாறு பார்த்துக்கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.5

ஒரு பள்ளியில் உள்ள மாணவர்களைப் பாலின அடிப்படையில் வகைப்படுத்தும் முறை அட்டவணை 3.5இல் தரப்பட்டுள்ளது

அட்டவணை 3.5

பாலினம் மற்றும் வகுப்பு வாரியாகப் பயிலும் மாணவர்களின் விவரம்

வகுப்பு	மாணவர்	மாணவியர்
VI	82	34
VII	74	43
VIII	92	27
IX	87	32
X	90	30
XI	75	25
XII	78	22

3.2.4 அளவின்வழி வகைப்படுத்துதல்

எண் சார்ந்த அளவுகளுக்குத் தக்கவாறு தரவுகளை வகைப்படுத்தும் முறைக்கு அளவின்வழி வகைப்படுத்துதல் என்று கூறப்படும். எடுத்துக்காட்டாக உயரம், எடை, வயது, வருவாய், மாணவரின் மதிப்பெண்கள், உற்பத்தி போன்றவை அளவின் வழியாகவே குறிப்பிடப்படும்.

காய்கறிகளின் நிறங்கள், வகைகள் பண்புசார் வகைப்படுத்துதல் (எண்சாராதது)	காய்கறிகளின் எடைகள், விலைகள் அளவின் வகைப்படுத்துதல் (எண்சார்ந்தது)

எடுத்துக்காட்டு 3.6

பின்வரும் பொருள்களின் ஊட்டச்சத்து மதிப்புகள் அட்டவணை 3.6 இல் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 3.6

சர்க்கரை, வெல்லம், தேன் ஆகியவற்றிலுள்ள ஊட்டச்சத்துக்களின் அளவுகள் (100 கிராமுக்கு)

பொருள்	சக்தி (கலோரியில்)	கார்போஹைட்ரேட் (கிராம்)	சுண்ணாம்புச் சத்து (மி;.கி)	இரும்புச் சத்து (மி. கி)
சர்க்கரை	398	99.4	12	0.15
வெல்லம்	383	95.0	80	2.65
தேன்	313	79.5	5	0.69

ஆதாரம்: தேசிய ஊட்டச்சத்து நிறுவனம் ICMR ஐதராபாத்.

அளவைப் பொருத்து அட்டவணையில் வகைப்படுத்தப்படும் போது, எண்களின் வீச்சிலிருந்து (Range) பல குழுக்களாகப் பிரித்து, அக்குழுக்களுக்கு எதிரே அவற்றின் எண்ணிக்கையைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணையில் அமைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7

ஒரு பள்ளியில் பயிலும் 55 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் அட்டவணை 3.7இல் தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 3.7

மாணவரின் மதிப்பெண்களுக்கு ஏற்ப வகைப்படுத்துதல்

மதிப்பெண்கள்	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35
மாணவர் எண்ணிக்கை	2	6	13	17	11	4	2

வகைப்படுத்துதலுக்கான பொதுவான விதிகள்

தரவுகளை வகைப்படுத்தும்போது சில விதிகளை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். அவற்றை இங்கு காண்போம்.

- வகைப்படுத்தும்போது முழுமையாக எல்லா உறுப்புகளும் ஏதாவது ஒரு குழுவில் இடம் பெற்றிருக்க வேண்டும்.
- ஒரு குழுவில் இடம் பெற்றிருக்கும் உறுப்புகள் வேறு குழுவில் இடம்பெறாதபடி அமைக்க வேண்டும்.
- குழுக்களின் எண்ணிக்கை மிகக் குறைவாகவோ, மிக அதிகமாகவோ இருக்கக்கூடாது. அதாவது, குழுக்களின் எண்ணிக்கை நான்கிலிருந்து பதினைந்திற்குள் இருக்கும்படி அமைக்க வேண்டும்.
- குழுக்களின் இடைவெளிக்குள்ள அளவு எல்லாக் குழுக்களிலும் ஒரேமாதிரியாக இருக்கும்படி அமைக்க வேண்டும்.
- பொதுவாக திறந்த பிரிவுகள் கொண்ட குழுக்கள் அமைப்பதைத் தவிர்க்க வேண்டும்.

3.3 அட்டவணையிடுதல்

முறையான வகைப்படுத்துதலுக்குப் பின் அத்தரவுகள் அட்டவணை வடிவத்தில்

அமைக்கப்படும். அட்டவணை என்பது புள்ளியியல் தரவுகளை முறையாக வரிசைப்படுத்தி நிரை (row), நிரல்களாக (column) அமைக்கப்படுவதாகும்.

அட்டவணைப்படுத்துதலின் முக்கிய நோக்கம், பொதுவாக ஓர் ஆய்வுக்குத் தேவைப்படும் வினாக்களுக்கான விடைகளை அந்த அட்டவணையில் பெறும்படி அமைப்பதாகும். பகுப்பாய்வு முறையில் கருத்துகளை உய்த்துணர்வதற்கும் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகள் பயன்படுகின்றன. புள்ளியியல் தரவுகளை ஒழுங்குபடுத்தும் இறுதி வடிவம் அட்டவணை எனப்படும். இவ்வட்டவணைப்படுத்துதலே புள்ளியியலின் அடுத்தகட்டப் பயன்பாட்டிற்கான அடிப்படையாகக் கருதப்படுகிறது.

அட்டவணையிடுதலின் பயன்கள்

- வகைப்படுத்தியபின், புள்ளியியல் தரவுகளை ஒரு முறையான வடிவத்தில் அமைக்கும் அடுத்தக்கட்ட படியாகும்.
- தரவுகளை நிரைகளாகவும், நிரல்களாகவும் அட்டவணையில் அமைக்கும்போது தகவல்களை எளிதில் புரிந்து கொள்ள முடிகிறது.
- அட்டவணைப் படுத்துதல் மூலம் தரவுகளை சுருக்கமாகவும் மிகத் தெளிவாகவும் குறைந்த இடத்திலேயே அமைக்கலாம்.
- தரவுகளை ஒரே அட்டவணையில் அமைக்கும்போது ஒப்பிடுவதற்கு எளிதாக இருக்கும்.
- தரவுப்புள்ளிகளை அட்டவணையில் நல்ல முறையில் அமைக்கும்போது, ஒரு வகைக் காட்சிப்பொருளைப் போன்று எளிதில் நினைவில் நிற்கும்.
- தரவுப் பதிவுகளில் உள்ள குறைகள், பிழைகள், விடுபட்டவை ஆகியவற்றை எளிதில் கண்டறிவதற்கு உதவுகிறது.
- அட்டவணைப் பதிவுகளிலிருந்து பெறும் தரவுகளைப் பிந்தைய புள்ளியியல் செயல்பாடுகளுக்குப் பயன்படுத்தி சரியான முடிவுகளைப் பெறுவதற்குப் பயன்படுகிறது.

3.4 அட்டவணையின் வகைகள்:

அட்டவணைகள் பொதுவாக பொது அட்டவணை (General Table), சுருக்க அட்டவணை (Summary Table) என இரு வகையாக வகைப்படுத்தப்படும். பொது அட்டவணையில், ஒரு கருத்தின் அடிப்படையில் அதற்குத் தேவையான எல்லா விவரங்களும் விரிவாக அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும். அதன் முக்கிய நோக்கம் ஒரே இடத்தில், கிடைத்த எல்லா தகவல்களையும் பார்த்து முடிவுகளை எளிதில் மேற்கொள்ள உதவுவதற்காக ஆகும். பொதுவில் இவ்வட்டவணைகள் தகவல் அறிக்கைகளில் பிற்சேர்க்கையாக அமைக்கப்படும்.

சுருக்க அட்டவணைகள், சில தனிப்பட்ட காரணங்களைக் கருதி உருவாக்கப்படுகின்றன. அவை, பொது அட்டவணைகளைவிட அளவில் சிறியவை. அவை பாடப்பொருளுக்குள் அமையும் விவரங்களை மட்டும் வலியுறுத்துகின்றன. சுருக்க அட்டவணைகள், பொது அட்டவணைகளிடமிருந்து பெறப்படுவதால், பொது அட்டவணை வழி தோன்றும் அட்டவணைகள் (Derived Table) என்றும் கூறலாம்.

சுருக்க அட்டவணை அமைப்பதின் நோக்கம், அதில் உள்ள தகவல்களைப் பகுப்பாய்வு செய்வதற்கும் கருத்து உய்த்துணர்வதற்குப் பயன்படும்படியாக அமைப்பதே ஆகும். எனவே, இவ்வட்டணையைப் பொருள் விளக்கும் அட்டவணை(Interpretative Table) என்றும் கூறலாம்.

புள்ளியியல் அட்டவணைகள் மேலும், இருவகைகளாக எளிய அட்டவணை என்றும் பன்முக அட்டவணை என்றும் பகுக்கப்படுகிறது. எளிய அட்டவணை என்பது ஒரே ஒரு பண்பினைச் சுருக்கமாகக் கூறும்படியாக அமைக்கப்பட்டிருக்கும். அது ஒரு வழி அல்லது ஒரு மாறியைக் கொண்ட அட்டவணை என்று கூறப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம் அட்டவணை 3.8இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 3.8

மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்கள்

மதிப்பெண்கள்	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 – 40	40 - 50	50 - 60
மாணவர் எண்ணிக்கை	10	12	17	20	15	6

இந்த அட்டவணை, மதிப்பெண்கள் என்ற ஒரு பண்பினைப் பொருத்து அமைக்கப்படுகிறது. அந்த மதிப்பெண்களும் பல பிரிவிடைகளுக்குள் அமைந்த குழுக்களாக அமைக்கப்படுகிறது. மதிப்பெண்கள் 50–60க்குள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, அதிக எண்ணிக்கையில் உள்ள மாணவர்கள் எந்த பிரிவிடைக்குள் அமைகிறார்கள் போன்றவற்றைக்காண இந்த அட்டவணை உதவுகிறது. ஒரு பன்முக அட்டவணையில், சிக்கலான தகவல்களையும் இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட, அவற்றிற்குத் தொடர்புடைய பிரிவுகளாக சுருக்கமாக அமைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக இரு வேறுபட்ட பண்புகளைக் குறிப்பிட, இரு வழி அட்டவணையும் மூன்று பண்புகளைக் குறிப்பிட வேண்டுமாயின் மூவழி அட்டவணையும் அமைக்கப்படுகிறது. மூன்றிற்கும் மேற்பட்ட குழுக்களைக் கொண்ட அட்டவணையை அமைத்தால் அது பன்முக அட்டவணை எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.9

இரு வழி அட்டவணைக்கான எடுத்துக்காட்டு அட்டவணை 3.8.2இல் தரப்பட்டுள்ளது. இதில் இரண்டு பண்புகளாக, ஒரு தேர்வில் மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்களும், மாணவரின் பாலினமும், குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வட்டவணையில் மாணவரின் பாலினமும், அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களும் இரு தொடர்புடைய பண்புகளாக அமைக்கப்பட்டு அது பற்றிய விவரங்களையும் காணலாம். இந்த அட்டவணையிலிருந்து 26 மாணவர்கள், 40லிருந்து 50க்குள் மதிப்பெண்கள் பெற்றிருக்கிறார்கள் என்றும் அவர்களுக்குள் 16 பேர் ஆண்களாகவும், 10 பேர் பெண்களாகவும் இருப்பதை அறிகிறோம்.

அட்டவணை 3.9

மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள்

மதிப்பெண்கள்	மாணவர் எண்ணிக்கை		கூடுதல்
	ஆண்கள்	பெண்கள்	
30 – 40	8	6	14
40 – 50	16	10	26
50 – 60	14	16	30
60 – 70	12	8	20
70 – 80	6	4	10
மொத்தம்	56	44	100

எடுத்துக்காட்டு 3.10

மதிப்பெண்கள், பாலினம், இடம் ஆகிய மூன்று பண்புகளைக் கொண்ட மூவழி அட்டவணை, அட்டவணை 3.10 இல் எடுத்துக்காட்டாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 3.10

மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள்

மதிப்பெண்கள்	ஆண்கள்		கூடுதல்	பெண்கள்		கூடுதல்	கூடுதல்		கூடுதல்
	நகரம்	கிராமம்		நகரம்	கிராமம்		நகரம்	கிராமம்	
30 – 40	4	4	8	4	2	6	8	6	14
40 – 50	10	6	16	5	5	10	15	11	26
50 – 60	8	6	14	9	7	16	17	13	30
60 – 70	7	5	12	5	3	8	12	8	20
70 – 80	5	1	6	2	2	4	7	3	10
மொத்தம்	34	22	56	25	19	44	59	44	100

இந்த அட்டவணையில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள், அவர்களது பாலினம், இடம் ஆகியவற்றைத் தொடர்புபடுத்தி அமைத்திருப்பதைக் காணலாம். இதிலிருந்து நாம் பெற வேண்டிய விவரங்களை எளிதில் பெற முடியும்.

3.5 அட்டவணையின் முக்கிய பகுதிகள்

பொதுவாக ஓர் அட்டவணை கீழ்க்கண்டபகுதிகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

- அட்டவணை எண் மற்றும் தலைப்பு
- நிரைகளின் தலைப்பு (Row Heading)
- நிரல்களின் தலைப்பு (Column Heading)
- அட்டவணையின் உட்பகுதி
- அடிக்குறிப்பு
- ஆதாரக் குறிப்பு

அட்டவணை எண் மற்றும் தலைப்பு

ஒவ்வோர் அட்டவணைக்கும் ஓர் அட்டவணை எண் அட்டவணையின் மேல் பகுதியில் தரப்பட வேண்டும். அத்துடன் பொருத்தமான தலைப்பு, அட்டவணையின் விவரங்கள் மற்றும் தன்மைகளைச் சுருக்கமாகக் கூறும்படி அமைக்க வேண்டும்.

நிரைகளின் தலைப்பு (Row Heading)

இது சுருக்கமாக சுயவிளக்கம் தருபவையாக, நிரைகளின் தலைப்பாக எழுதப்படவேண்டும்.

நிரல்களின் தலைப்பு (Column Heading)

இது சுருக்கமாக சுய விளக்கம் தருபவையாக, நிரல்களின் தலைப்பாக எழுதப்படவேண்டும் இத்தலைப்புகளுடன் துணை தலைப்புகளையும் அமைக்கலாம்.

அட்டவணையின் உட்பகுதி

அட்டவணையின் உட்பகுதியில் எண் விவரங்களை அதற்குரிய இடங்களில் குறிப்பிட வேண்டும்.

அடிக்குறிப்பு

அட்டவணையைப் புரிந்து கொள்வதற்கான விளக்கக் குறிப்பை அட்டவணையின் கீழ் அடிக்குறிப்பாக எழுதலாம்.

ஆதாரக் குறிப்பு

அட்டவணையில் உள்ள தரவுகள் எங்கிருந்து எடுக்கப்பட்டன என்ற விவரம் அட்டவணையின் கீழே குறிக்கப்பட வேண்டும்.

அட்டவணையின் மாதிரி வடிவம்

அட்டவணை எண்

தலைப்பு

நிரை	நிரல் தலைப்புகள்	கூடுதல்
நிரை தலைப்புகள்	உட்பகுதி	
கூடுதல்		

அடிக்குறிப்பு

ஆதாரக்குறிப்பு

அட்டவணை அமைக்கும்போது கவனிக்க வேண்டிய பொது விதிகள்

அட்டவணை அமைக்கும்போது கீழ்க்கண்டவற்றைக் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

- அட்டவணை சுருக்கமாகவும் புரிந்து கொள்வதற்கு எளிமையாகவும் இருக்க வேண்டும்.
- குழப்பங்களைத் தவிர்த்து தரவுகளின் முக்கியத்துவத்தை வெளிக்கொணர்வதாகவும் அமைய வேண்டும்.
- அதிக தரவுகளை ஒரே அட்டவணையில் வழங்குவதைத் தவிர்த்தல் வேண்டும். அவ்வாறு வழங்கும்போது தவறும் சீரற்ற தோற்றமும் ஏற்படும். அது போன்ற சூழலில் தரவுகளின் தன்மைக்கு ஏற்ப அட்டவணையின் எண்ணிக்கையினை அதிகரிப்பது, தேவையைப் பூர்த்தி செய்வதாக அமையும்.
- நிரல்களில் உள்ள விவரங்களை ஒப்பிடும் விதமாக சதவீதம், கூடுதல், சராசரி போன்றவை அருகருகே அமைக்க வேண்டும். கூடுதல் போன்றவற்றை திடமான (அச்சு) எழுத்துக்களில் அமைக்க வேண்டும்.
- ஒவ்வொரு அட்டவணையும் சுருக்கமான சுய விளக்கத் தலைப்பினைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.
- முக்கிய தலைப்புகளும், துணைத் தலைப்புகளும் தக்க இடைவெளியோடு அமைக்க வேண்டும்.
- ஆதாரக் குறிப்புகள் அட்டவணையின் கீழ் அடிக்குறிப்பாக இருக்க வேண்டும். விளக்கக் குறிப்புகள் முழுமையான வடிவத்தில் அடிக்குறிப்புப் பகுதியில் இருத்தல் வேண்டும்.
- அட்டவணையின் நிரை, நிரல் தலைப்புகளில் பொருத்தமான அலகுகள் குறிக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.
- நிரல்களின் தலைப்புகளை எளிதில் ஒப்பிடுவதற்காக எண்களாலும் குறிப்பிட வேண்டும்.
- அட்டவணைப்படுத்தும்போது அகர வரிசைப்படியோ, காலம் சார்ந்தோ, இடம் சார்ந்தோ, வேறு ஏதேனும் பொருத்தமான வரிசைப்படியோ இடம் பெறும் உறுப்புகளை அமைக்கலாம்.
- அட்டவணையில் இடம் பெறும் அனைத்து விவரங்களும் துல்லியத்தன்மை வாய்ந்ததாக இருக்க வேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனில் அவை தோராயமானவை என்பதைக் குறிப்பிட வேண்டும்.

3.6 நிகழ்வெண் பரவல்

செப்பனிடப்படா தரவுகளை ஓர் அட்டவணையில் அவற்றின் மதிப்பிற்கு ஏற்ப சில குழுக்களுக்குள் வகைப்படுத்தி அமைத்து அவற்றின் எண்ணிக்கையை அதற்கு ஏற்ற குழுக்களுக்கு எதிராக எழுத வேண்டும். அக்குழுக்களுக்குள் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை நிகழ்வெண் எனப்படும். அவ்வாறு பல குழுக்களுக்குள் அமையும் நிகழ்வெண்களை நிகழ்வெண் பரவல் என்கிறோம். நிகழ்வெண் பரவல்கள், தனித்த நிகழ்வெண் பரவல், தொடர் நிகழ்வெண் பரவல் என இருவகைப்படும்.

3.6.1 தனித்த நிகழ்வெண் பரவல்

சில சமயங்களில் குறிப்பிட்ட செப்பனிடப்படா தரவில் உறுப்புகள் பலமுறை வந்திருப்பதைக் காணலாம். அத்தரவு உறுப்புகளை ஒழுங்குபடுத்தி அட்டவணையில் அமைக்கலாம். அவ்வாறு தரவு

மதிப்புகளையும் அதன் எண்ணிக்கைகளையும் நிகழ்வெண்களாகக் கொண்டு ஓர் அட்டவணையில் அமைப்பது எளிய நிகழ்வெண் பரவல் எனப்படும். அவ்வாறு நிகழ்வெண் பரவலை அமைக்க ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் எதிரே ஓர் அடையாளக்குறி (Tally Mark) ஒரு நேர்க்கோட்டினையிட்டு ஒரு நிரல் அமைக்க வேண்டும். நிகழ்வெண்கள் கணக்கிடுவதற்கான அடையாளக்குறி அட்டவணையை கீழ்க்கண்ட முறையில் அமைக்க வேண்டும்.

- ஒவ்வொரு தரவு மதிப்பும் எந்தக் குழுவில் அமையும் என்பதைக் காண்க.
- அக்குழுவிற்கு எதிரே நேர்கோடாக அடையாளக்குறி (/) இடுக.
- நான்கு கோடுகளுக்கு மேற்பட்டால், நான்கு கோடுகளின் மீது ஒரு குறுக்குக் கோடு இட்டு ஐந்து எண்ணிக்கை கொண்ட (𝍸) ஒரு தொகுப்பாகக் கருதுக.
- அடையாளக் குறிகளின் எண்ணிக்கையே அக்குழுவிற்கான நிகழ்வெண்களின் எண்ணிக்கையாகும். நிகழ்வெண்களை அலைவெண்கள் என்றும் கூறுவர்.

எடுத்துக்காட்டு 3.11

ஒரு தேர்வில் 25 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள்: 10, 20, 20, 30, 40, 25, 25, 30, 40, 20, 25, 25, 50, 15, 25, 30, 40, 50, 40, 50, 30, 25, 25, 15 மற்றும் 40 ஆகும். அவற்றிற்கான நிகழ்வெண் பரவல் அட்டவணை 3.11இல் தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 3.11

மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள்

மதிப்பெண்கள்	அடையாளக் குறியீடுகள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
10	/	1
15	//	2
20	///	3
25	𝍸 //	7
30	////	4
40	𝍸	5
50	///	3
கூடுதல்		25

பழங்களின் எண்ணிக்கை	தனித்த தரவு
பழங்களின் எடை, விலை	தொடர் தரவு

3.6.2 தொடர் நிகழ்வெண் பரவல்

அதிக எண்ணிக்கையில் உள்ள உறுப்புகளால் ஆன தரவுகளைச் சுருங்கிய வடிவத்தில் அமைத்தால் மட்டுமே அத்தரவகளிலிருந்து சிறந்த முடிவுகளைப் பெற முடியும்.

எனவே, பெரிய அளவினால் ஆன தரவு உறுப்புகளைப் பல குழுக்களாகவோ பிரிவுகளாகவோ வகைப்படுத்தி அதனதன் நிகழ்வெண்களோடு அமைக்கும் முறையைத் தொடர்நிகழ்வெண் பரவல் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.12

ஒரு தொழிலகத்தில், ஓர் ஆண்டில், ஒவ்வொரு வாரமும் பெறுகின்ற எந்திர விற்பனையில் விற்பனைக்கோரல் சம்பந்தமான பட்டியல்

அட்டவணை 3.12

ஒரு தொழிலகத்தில் எந்திரம் வாங்குவதற்கான விற்பனைக் கோரலின் விவரம்:

விற்பனைக் கோரல் பட்டியலின் எண்ணிக்கை	வாரங்களின் எண்ணிக்கை
0 – 4	2
5 – 9	8
10 – 14	11
15 – 19	14
20 – 24	6
25 – 29	4
30 – 34	3
35 – 39	2
40 – 44	1
45 – 49	1

இந்த அட்டவணையில், எந்திரம் வாங்குவதற்கான விற்பனைக்கோரல் எண்ணிக்கை பல குழுக்களாகவும், வாரங்களின் எண்ணிக்கை நிகழ்வெண்களாகவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்வமைப்பே தொடர்நிகழ்வெண் பரவல் அமைப்பாகும்.

இவ்வாறு அமைக்கப்படும் தொடர் நிகழ்வெண் பரவலின் பல கூறுகள் பின்வரும் தலைப்புகளில் தரப்பட்டுள்ளன.

குழு (Class)

தரவிலுள்ள உறுப்புகள் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவு இடைவெளியுடன் கூடிய இரு எல்லைகளுக்கு உட்பட்ட பல்வேறு தொகுதிகளில் அமைக்கப்படுமேயானால் அந்த தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு குழு என்று அழைக்கப்படும்.

குழு எல்லைகள் (Class limits)

ஒரு குழுவின் இரு எல்லைகளும் குழு எல்லைகள் எனப்படும். குழுவின் சிறிய மதிப்பு கீழ் எல்லை எனவும், பெரிய மதிப்பு மேல் எல்லை எனவும் அழைக்கப்படும்.

குழு இடைவெளி (Class Interval)

ஒரு குழுவின் மேல் எல்லைக்கும், கீழ் எல்லைக்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசமே, பிரிவு இடைவெளி அல்லது குழு இடைவெளி என்று அழைக்கப்படும்.

குழு பிணைப்பு எல்லைகள் (Class boundaries)

தொடர் நிகழ்வெண் பரவலில், ஒரு குழுவின் மேல் எல்லை மற்றும் அதைத் தொடர்ந்து வரும் குழுவின் கீழ் எல்லை இரண்டிற்கும் இடையேயுள்ள மையப்புள்ளியே குழுவின் பிணைப்பு எல்லை எனப்படும். ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் ஒரு கீழ் பிணைப்பு எல்லையும், ஒரு மேல் பிணைப்பு எல்லையும் இருக்கும்.

மைய மதிப்பு அல்லது மையப் புள்ளி (Mid– point)

ஒரு குழுவின் மேல் பிணைப்பு எல்லைக்கும் கீழ் பிணைப்பு எல்லைக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் பாதி அளவே மைய மதிப்பு அல்லது மைய புள்ளி எனப்படும்.

குழுவின் பிரிவிடை அளவு (Width or size)

ஒரு குழுவின் மேல் பிணைப்பு எல்லைக்கும் கீழ் பிணைப்பு எல்லைக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் பாதி அளவே மையப்மதிப்பு அல்லது மையப்புள்ளி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.11.2இல் பிரிவு இடைவெளி $0–4$இல் 0 என்பது கீழ் எல்லை, 4 என்பது மேல் எல்லை ஆகும். $0–4$இன் கீழ் பிணைப்பு எல்லை -0.5 ஆகும். அதேபோல், $5–9$இன் கீழ் பிணைப்பு எல்லை 4.5 ஆகும். இவ்வாறு எல்லா குழுக்களுக்கும் அவற்றின் பிணைப்பு எல்லைகளைக் காணலாம். இவ்வெடுத்துக்காட்டில் இக்குழுக்களின் பிரிவிடை அளவு 5 ஆகும்.

3.6.3 தொடர் நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கும் முறைகள்

சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையும் தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறையும்

தொடர் நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கும் முறைகளில் சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை (Inclusive method) தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை (Exclusive method), திறந்தவெளி அமைப்பு முறை (Open end classes) எனும் முறைகள் உள்ளன. அவற்றை இங்கு காண்போம்.

சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை

இம்முறையில், குழுவின் மேல் எல்லை, கீழ் எல்லை இரண்டையும் சேர்த்துக் கணக்கிடப்படுகிறது.

குடும்பத்திலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை, தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை போன்ற

தனித்த மாறிகளுக்குச் சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை பயன்படுகிறது. ஆனால் முழு எண்களும், பின்ன எண்களாலும் ஆன உயரம், எடை போன்ற தொடர்ச்சியான மாறிகளுக்கு இம்முறை பயன்படாது.

இம்முறையில் இரு எல்லைகளையும் சேர்த்துக் கொள்வதால், சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை

இம்முறையில் முதல் குழுவின் பிரிவுகளான மேல் எல்லையும், அடுத்த பிரிவின் கீழ் எல்லையும் ஒன்றாக இருக்கும்படி அமைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.13

ஒரு தேர்வில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளன.

23, 25, 36, 39, 37, 41, 42, 22, 26, 35, 34, 30, 29, 27, 47, 40, 31, 32, 43, 45, 34, 46, 23, 24, 27, 36, 41, 43, 39, 38, 28, 32, 42, 33, 46, 23, 34, 41, 40, 30, 45, 42, 39, 37, 38, 42, 44, 46, 29, 37.

மேற்கண்ட 50 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் 22–லிருந்து 47 வரை மாறுபடுவதைக் காணலம். இம்மதிப்பெண்களை 6 குழுக்களுக்குள் அமைக்க வேண்டுமென்றால் பிணைப்பு எல்லைகளாக 25, 30, 35, 40, 45, 50 என்ற மதிப்பெண்களை அமைக்கலாம். பின் ஆறு குழுக்களும் 21–25, 26–30, 31–35, 36–40, 41–45, 46–50 என்ற எல்லைகளோடு அமையும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டிற்கான தொடர் நிகழ்வெண் பரவல், சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையிலும், தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறையிலும் முறையே அட்டவணை 3.13.(i)லும், அட்டவணை 3.13.(ii)லும், காட்டப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 3.13(i)
மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்கள் (சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை)

மதிப்பெண்கள்	முழு எண் மதிப்பு	அடையாளக் குறியீடு	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை
21–25	21 x 25	~~||||~~ |	6
26–30	26 x 30	~~||||~~ |||	8
31–35	31 x 35	~~||||~~ |||	8
36–40	36 x 40	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
41–45	41 x 45	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
46–50	46 x 50	||||	4
		கூடுதல்	**50**

அட்டவணை 3.13(ii)

மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்கள் (தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை)

மதிப்பெண்கள்	x, முழு எண் மதிப்பு	அடையாளக் குறியீடு	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை
20–25	20 x < 25	卌	5
25–30	25 x < 30	卌 ||	7
30–35	30 x < 35	卌 ||||	9
35–40	35 x < 40	卌 卌 |	11
40–45	40 x < 45	卌 卌 ||	12
45–50	45 x < 50	卌 |	6
		கூடுதல்	**50**

உண்மை சார்ந்த குழு எல்லைகள்

தொடர் மாறிகளில், குழுக்களின் அடுத்தடுத்த எல்லைகளுக்கு இடைவெளியின்றி குழுக்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. அதாவது ஒவ்வொரு குழுவின் மேல் எல்லையும், அடுத்து வரும் கீழ் எல்லையும் ஒன்றாக இருக்கும். இவ்வாறு அமைக்கப்படும் எல்லைகள் கொண்ட குழுக்கள் உண்மை சார்ந்த குழு எல்லைகள் எனப்படும்.

சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் அமைக்கப்படும் குழுக்களைக் கொண்டவை உண்மை சாரா குழு எல்லைகள் என்று அழைக்கப்படும்.

நம்மால் உண்மைசாரா குழு எல்லை அமைப்பிலிருந்து உண்மை சார்ந்த குழு எல்லை அமைப்பாக மாற்ற முடியும்.

ஒவ்வொரு குழுவின் கீழ் எல்லைகளிலிருந்து 0.5ஐக் கழித்தும், மேல் எல்லையில் 0.5ஐக் கூட்டியம் பின்வருமாறு உண்மை சார்ந்த குழுக்களைக் கொண்டதாக மாற்றலாம். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் உண்மை சார்ந்த எல்லைகள் 20.5–25.5, 25.5–30.5, 30.5–35.5,35.5–40.5, 40.5–45.5, 45.5–50.5 என்பதாக அமைக்கலாம்.

திறந்த பிரிவெல்லை முறை

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் உள்ள முதல் குழுவின் கீழ் எல்லையோ, கடைசிக் குழுவின் மேல் எல்லையோ, இரண்டு எல்லைகளும் இல்லாமல் இருந்தாலோ, அது திறந்த பிரிவுகளைக் கொண்ட நிகழ்வெண் பரவல் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள 113 தொழிலாளர்களின் ஊதியம் 6 குழுக்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை நிகழ்வெண்களாக அட்டவணை 3.14ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 3.14

திறந்த பிரிவெல்லைகள் உடைய நிகழ்வெண் அட்டவணை

ஊதியம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளர் எண்ணிக்கை
10,000 –க்குக் கீழ்	18
10,000 – 20,000	23
20,000 – 30,000	30
30000 – 40,000	20
40,000 – 50,000	12
50,000–க்கு மேல்	10

3.6.4 தொடர் நிகழ்வெண் பரவலை அமைப்பதற்கான வழிகாட்டுதல்கள்

தொடர் நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கும்போது கீழ்க்கண்ட வழிகாட்டுதல்களை மேற்கொள்ள வேண்டும்.

- தரவுகளின் ஒவ்வொரு மதிப்பும் ஒரே ஒரு பிரிவிடைக் குழுவில் இடம் பெறுமாறு அமைக்க வேண்டும்.
- குழுக்கள் அனைத்தும் இடம்பெறும் எண்களுக்கேற்ப வரிசைப்படுத்தப் படவேண்டும்.
- வழக்கமாக குழுக்கள் எட்டிலிருந்து பத்து குழுக்களாக இருக்கும்படி அமைத்தல் நல்லது. குறிப்பாக 5–க்கு குறையாமலும், 15–க்கு மிகாமலும் அமைக்க வேண்டும்.
- குழுக்கள் சம பிரிவிடைகளை உடையதாக இருக்க வேண்டும். இயலாத நிலையில் அதிக அளவுடைய பிரிவிடைகளை அமைத்துக் கொள்ளலாம். திறந்த வெளி பிரிவுகள் முதல் குழு மற்றும் கடைசி குழுவில் மட்டுமே ஒரு தொடர் நிகழ்வெண் பரவலில் இருக்கலாம்.
- பொதுவாக ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில், குறைந்த மதிப்புகள் உள்ளவை முதல் குழுவாகவும், அதிக மதிப்புகள் உள்ளவை இறுதிக் குழுவாகவும் அமைக்கப்படுவது வழக்கம்.
- ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் எத்தனை குழுக்கள் அமைக்கலாம் என்பதை ஸ்டர்ஜஸ் விதி (Sturges Rule) $K = 1 + 3.322 \log_{10} N$ என்பதன் மூலமும் காணலாம். இங்கு K என்பது குழுக்களின் எண்ணிக்கை, N என்பது நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் ஆகும்.

3.7. குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்

ஒரு குழுவின் அதற்குரிய மேல் பிரிவெல்லைக்குக் கீழுள்ள நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் குவிவு நிகழ்வெண் எனப்படும். இம்முறையில் எல்லா குழுக்களுக்கும் குவிவு நிகழ்வெண்களை அமைக்கலாம். இவ்வாறு குவிவு நிகழ்வெண்களால் அமைக்கப்படும் அட்டவணையே குவிவு நிகழ்வெண் பரவல் எனப்படுகிறது.

நிகழ்வெண் பரவலில் ஒரு குழுவின் இரு பிரிவெல்லைகளுக்கு இடையே அமையும் நிகழ்வெண்கள் மட்டும் குறிக்கப்படும். ஆனால் குவிவு நிகழ்வெண் பரவலில் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவு எல்லைக்கு மேலே அமையும்நிகழ்வெண்களின் கூடுதலையோ, கீழே அமையும் நிகழ்வெண்களின் கூடுதலையோ காணலாம்.

குவிவு நிகழ்வெண்கள், கீழின நிகழ்வெண்கள் மற்றும் மேலின நிகழ்வெண்கள் என இரு வகையாகப் பிரிக்கப்படும். அவற்றை இங்கு காண்போம்.

கீழின குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்:

ஒவ்வொரு குழுவின் மேல் பிரிவெல்லைக்குக் கீழ் அமையும் நிகழ்வெண்கள் கீழின குவிவு நிகழ்வெண்கள் எனப்படும். இவ்வாறு அமையும் கீழின குவிவு நிகழ்வெண்களின் பட்டியல் கீழின குவிவு நிகழ்வெண் பரவல் எனப்படும்.

மேலின குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்:

ஒவ்வொரு குழுவின் கீழ் பிரிவெல்லைக்கு மேலே அமையும் நிகழ்வெண்கள் மேலின குவிவு நிகழ்வெண்கள் எனப்படும். இவ்வாறு அமையும் மேலின குவிவு நிகழ்வெண்களின் பட்டியல் மேலின குவிவு நிகழ்வெண் பரவல் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்கள் இரண்டினையும் கீழ்க்கண்ட அட்டவணைக்கு ஏற்ப உருவாக்கு. ஒரு வணிக நிறுவனத்தில் ஓர் ஆண்டில் பெற்ற விற்பனைக் கோரல் பற்றிய விவரம் பின்வருமாறு

விற்பனைக் கோரல்களின் எண்ணிக்கை	0 – 4	5 – 9	10 – 14	15 – 19	20 – 24
வாரங்களின் எண்ணிக்கை	2	8	11	14	6
விற்பனைக் கோரல்களின் எண்ணிக்கை	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44	45 – 49
வாரங்களின் எண்ணிக்கை	4	3	2	1	1

தீர்வு:

ஒரு வணிக நிறுவனத்தில் ஓராண்டில் ஒரு வாரத்தில் பெறப்படும் விற்பனைக் கோரல்களும் அவற்றிற்கான கீழின மற்றும் மேலின குவிவு நிகழ்வெண்களின் பரவல்கள் அட்டவணை3.15.இல் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 3.15

ஒரு நிறுவனத்தில் விற்பனைக் கோரல்கள் பெறுவதற்கான குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்கள்

கொடுக்கப்பட்ட தரவு		கீழின குவிவு		மேலின குவிவு	
கோரல்களின் எண்ணிக்கை	வாரங்களின் எண்ணிக்கை	மேல் எல்லை	கீழின குவிவு நிகழ்வெண்கள்	கீழ் எல்லை	மேலின குவிவு நிகழ்வெண்கள்
0 – 4	2 நிகழ்வெண்கள்	4	2	0	52
5 – 9	8	9	10	5	50
10 – 14	11	14	21	10	42
15 – 19	14	19	35	15	31
20 – 24	6	24	41	20	17
25 – 29	4	29	45	25	11
30 – 34	3	34	48	30	7
35 – 39	2	39	50	35	4
40 – 44	1	44	51	40	2
45 – 49	1	49	52	45	1

தொடர்புக் குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்கள் (Relative Cumulative Frequency Distribution) அல்லது சதவீதக் குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்கள்

ஒரு குவிவு நிகழ்வெண் பரவலில் ஒவ்வொரு குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கும், நிகழ் வெண்களின் கூடுதலுக்கும் உள்ள விகிதமே தொடர்புக் குவிவு நிகழ்வெண் எனப்படும். இது பொதுவாக சதவீதமாக எழுதப்படுகிறது.

தொடர் குவிவு எண்களை அதற்கு எதிரே அக்குழுவின் பிரிவு எல்லைகளுக்கு ஏற்ப அட்டவணையில் அமைக்கும் முறையே தொடர்புக் குவிவு நிகழ்வெண் பரவல் அல்லது சதவீதக் குவிவு நிகழ்வெண் பரவல் எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.16

எடுத்துக்காட்டு 3.15இல் உள்ள தரவுகளுக்கு தொடர்புக் குவிவு நிகழ்வெண்களைக் காண்க.

தீர்வு:

எடுத்துக்காட்டு 3.15 இல் கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கு ஏற்ப கீழின மற்றும் மேலின குவிவு நிகழ்வெண்கள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு அட்டவணை 3.16 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இப்போது ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் அதன் குவிவு நிகழ்வெண்ணை, மொத்த நிகழ்வெண்ணால் வகுத்து அதனை சதவீதமாக்கி அதற்கு நேரே எழுதுக. அவ்வாறு எழுதப்பட்ட குவிவு நிகழ்வெண்களும், தொடர்புக் குவிவு நிகழ்வெண்களும் கொண்ட பட்டியல் அட்டவணை 3.16 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 3.16

தொடர்புக் குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்

கோரல்களின் எண்ணிக்கை	வாரங்களின் எண்ணிக்கை	கீழின குவிவு நிகழ்வெண்கள்	மேலின குவிவு நிகழ்வெண்கள்	தொடர்பு கீழின குவிவு நிகழ்வெண்கள	தொடர்பு மேலின குவிவு நிகழ்வெண்கள்
0 – 4	2	2	52	3.85	100.00
5 – 9	8	10	50	19.23	96.15
10 – 14	11	21	42	40.38	80.77
15 – 19	14	35	31	67.31	59.62
20 – 24	6	41	17	78.85	32.69
25 – 29	4	45	11	86.54	21.15
30 – 34	3	48	7	92.31	13.46
35 – 39	2	50	4	96.15	7.69
40 – 44	1	51	2	98.08	3.85
45 – 49	1	52	1	100.00	1.92

3.8 இருமாறி நிகழ்வெண் பரவல்கள்:

நிகழ்வெண் பரவலில் ஒரே ஒரு மாறியைப் பயன்படுத்தி ஒரு மாறி நிகழ்வெண் பரவல் என்பதை அமைத்தோம். தரவுகளில் அதிக எண்ணிக்கையிலான மற்றும் இரண்டு பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும்போது இரு வழி அட்டவணையை உருவாக்கலாம். இரு வழி அட்டவணையில், x, y என்பதாக இரு மாறிகளை அமைத்துத் தரவு உறுப்புகளை இடம் பெறச் செய்யலாம். x எனப்படும் ஒரு மாறி m பிரிவுகளாகவும், y என்ற அடுத்த மாறியை n பிரிவுகளாகவும் தொகுக்கலாம். இருமாறி அட்டவணை $m \times n$ கூறுகளாக இருக்கும்.

ஒரு மாறி உறுப்புகளை நிரை வரிசையிலும் மற்ற மாறி உறுப்புகளை நிரல் வரிசையிலும் அமைக்கலாம். x, y என்ற சோடி மதிப்புகள் நிரைகளும் நிரல்களும் வெட்டிக்கொள்ளும் இடத்தில் இருப்பதைக் காணலாம். இவ்வாறு அமைக்கப்படும் உறுப்புகள் இடம்பெறும் அட்டவணை, இரு மாறிகளுக்கான இருவழி அட்டவணை எனப்படும். இதுவே இருமாறி நிகழ்வெண் பரவல் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் இரு மாறிகளுக்கான நிகழ்வெண் பரவல் தரப்பட்டுள்ளது. அதில் வயது, மதிப்பெண்கள் இரண்டும் இரு மாறிகளாக உள்ளன. மதிப்பெண்களுக்கான குழுக்கள் நிரைகளாகவும், வயதிற்கான குழுக்கள் நிரல்களாகவும் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. அதாவது 20–22 வயதுடையவர்களும் 30–40 மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்களும் ஆகிய இரண்டு பண்பையும் உடையவர்கள் எண்ணிக்கை 5 ஆகும். இதேபோல் மற்ற விவரங்களையும் அட்டவணையில் இருந்து எளிதல் பெறலாம்.

அட்டவணை 3.17

இருமாறிக்கான நிகழ்வெண் அட்டவணை

மதிப்பெண்கள்	வயது				கூடுதல்
	16 – 18	18 – 20	20 – 22	22 – 24	
10 – 20	2	1	1	–	4
20 – 30	3	2	3	1	9
30 – 40	3	3	5	6	17
40 – 50	2	2	3	4	11
50 – 60	–	1	2	2	5
60 – 70	–	1	2	1	4
கூடுதல்	10	10	16	14	50

3.9 தண்டு–இலை வரைபடம் (Stem and leaf diagram)

தண்டு–இலை பதிவு அல்லது தண்டு–இலை வரைபடம் என்பது தரவு உறுப்புகளை வேறு ஒரு முறையில் பகுத்தும் வரைபட வடிவமாக்கியும் அமைப்பதாகும். இது அடையாளக் குறியீட்டுக் கணக்கிடும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு மாற்றாக அமைவதாகும். தரவிலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தையும் மாற்றமின்றி இடம்பெறச் செய்வதே இதன் சிறப்பாகும். இதுவும் ஒரு பட்டை விளக்கப் படம்போல் தோற்றமளிக்கக் கூடியதாகும். இங்கு எண்களின் அமைப்பே பட்டை வடிவத்தில் அமைந்திருப்பதைப் பார்க்கலாம்.

தண்டு–இலை பதிவு என்பது தரவிலுள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் ஓர் அட்டவணையில் இரண்டு நிரல்களாக அமைக்கும் முறையாகும். ஓர் எண்ணில் தண்டு (Stem) என்பது இடப்புற எண்ணையும் (முன் இலக்கம்) இலை (Leaf) என்பது வலப்புற எண்ணையும் (பின் இலக்கம்) குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக 63 என்ற எண்ணில் இலைப்பகுதி 3 ஆகும். இந்த இலக்கத்திற்கு இடப்புறம் உள்ள பகுதி தண்டுப் பகுதியாகும். இந்த எண்ணின் தண்டுப்பகுதி 6 ஆகும். அதேபோல், 265இன் இலைப்பகுதி 5, தண்டுப்பகுதி 26 ஆகும்.

252,255, 260, 262, 276, 276, 283, 289, 298 என்ற எண்களைக் கொண்ட தரவின் தண்டு–இலை வரைபடம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகள்	தண்டு (முன் இலக்கங்கள்)	இலை (பின் இலக்கங்கள்)
252, 255	25	2 5
260, 262	26	0 2
276, 276, 276	27	6 6 6
283, 289	28	9
298	29	8

மேற்கண்ட தண்டு–இலை பதிவில், தரவில் உள்ள மிகச்சிறிய எண் 252 என்றும் மிகப்பெரிய எண் 298 என்றும் எளிதில் அறியலாம். மேலும் 270–280 என்ற பிரிவிடைக் குழுவில் மூன்று உறுப்புகள் இருப்பதால், அக்குழுவே அதிக நிகழ்வெண்களைக் கொண்டது எனத் தெரிகிறது.

தண்டு–இலைப் பதிவு வரைபடம் உருவாக்கும் முறையைக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் காணலாம்.

குறிப்பு

தண்டு–இலை பதிவில், தண்டு மற்றும் இலை நிரல்களை மட்டுமே எழுதுவது வழக்கம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு தண்டு–இலைப் பதிவை அமைக்க.

1.13, 0.72, 0.91, 1.44, 1.03, 0.88, 0.99, 0.73, 0.91, 0.98, 1.21, 0.79, 1.14, 1.19, 1.08, 0.94, 1.06, 1.11, 1.01

தீர்வு:

படி 1: தரவு உறுப்புகளை ஏறுவரிசையில் அமைக்க

0.72, 0.73, 0.79, 0.88, 0.91, 0.91, 0.94, 0.98, 0.99, 1.01,

1.03, 1.06, 1.08, 1.11, 1.13, 1.14, 1.19, 1.21, 1.39, 1.44

படி 2: தரவு உறுப்புகளைப் பிரித்து கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்க

0.72, 0.73, 0.79

0.88

0.91, 0.91, 0.94, 0.98, 0.99

1.01, 1.03, 1.06, 1.08

1.11, 1.13, 1.14, 1.19

1.21

1.39

1.44

படி 3;: இப்போது தண்டு–இலைப் பதிவை அமைக்க.

தண்டு (முன் இலக்கங்கள்)	இலைகள் (பின்னிலக்கங்கள்)
0.7	2 3 9
0.8	8
0.9	1 1 4 8 9
1.0	1 3 6 8
1.1	1 3 4 9
1.2	1
1.3	9
1.4	4

தண்டு இலைப் பதிவைப் பயன்படுத்தி சராசரி, இடை நிலையளவு, மற்றும் வீச்சு ஆகியவற்றைக் காணல்.

தண்டு–இலைப் பதிவை உருவாக்கும் முறையை நாம் அறிந்து கொண்டோம். இப்பதிவைப் பயன்படுத்தி தரவுகளிலிருந்து எப்படி சில முடிவுகளைப் பெறுவது என்பதைப் பார்ப்போம். முதலில் முந்தை வகுப்புகளில் நாம் படித்தவற்றை இங்கு நினைவு கூர்வோம்.

- சராசரி என்பது, தரவின் எல்லா உறுப்புகளையும் கூட்டி அதை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துக் கிடைப்பது ஆகும்.
- தரவு உறுப்புகளை ஏறுவரிசையில் எழுதி அதன் மைய உறுப்பின் மதிப்பைக் கூறுவது இடைநிலை அளவு ஆகும்.
- தரவில் உள்ள உறுப்புகளில் அடிக்கடி நிகழும் உறுப்பின் மதிப்பு முகடு ஆகும். தண்டு–இலைப் பதிவில், முகடு என்பது இலைப்பகுதியில் அதிகமுறை வந்தள்ள உறுப்பாகும்.
- வீச்சு என்பது தரவிலுள்ள அதிக மதிப்பிற்கும், குறைந்த மதிப்பிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.18

கீழ்க்கண்ட தண்டு–இலைப் பதிவிலிருந்து, சராசரி, இடைநிலையளவு, முகடு, வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தண்டு	இலை
25	2 5
26	0 2
27	6 6 6
28	3 9
29	8

தீர்வு:

இப்பதிவில், தண்டுப்பகுதி எண்களுடன், இலைப்பகுதி எண்களைச் சேர்க்க. இம்மதிப்புகள் சிறிய எண்களிலிருந்து பெரிய எண் வரை வரிசையாக அமையும்.

அவை 252, 255, 260, 262, 276, 276, 276, 283, 289, 298 ஆகும்.

சராசரி காண்பதற்கு அவற்றைக் கூட்டி மொத்த எண்களின் எண்ணிக்கையால் வகுக்க சராசரி கிடைக்கும்.

$(252 + 255 + 260 + 262 + 276 + 276 + 276 + 283 + 289 + 298) \div 10 = 2727 \div 10 = 272.7)$

எனவே சராசரி 272.7 ஆகும்.

இத்தரவின் உறுப்புகள் முன்பே ஏறுவரிசையில் உள்ளன. அவற்றின் மைய உறுப்புகளாக இரண்டு உறுப்புகள் உள்ளன. இடைநிலை காண்பதற்கு இரண்டு மைய உறுப்புகளின் சராசரியைக் காண்க.

இரு மைய உறுப்புகள் 276 மற்றும் 276

இடைநிலை அளவு $(276 + 276) \div 2 = 276$.

எனவே, இடைநிலை அளவு = 276 ஆகும்.

முகடு என்பது அடிக்கடி நிகழும் மதிப்பாகும். தண்டு–இலைப் பதிவில் 276 மூன்று முறை வந்திருப்பதைக் காணலாம். எனவே, முகடு 276 ஆகும்.

முகடு என்பது அடிக்கடி நிகழும் மதிப்பாகும். தண்டு–இலைப் பதிவில் 276 மூன்று முறை வந்திருப்பதைக் காணலாம். எனவே, முகடு 276 ஆகும்.

வீச்சு என்பத பெரிய மதிப்பிற்கும், சிறிய மதிப்பிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் ஆகும். தண்டு–இலைப் பதிவில் மிகப்பெரிய மதிப்பு கடைசி மதிப்பாகவும் மிகச்சிறிய மதிப்பு முதல் மதிப்பாகவும் இருக்கும். எனவே வீச்சு என்பது $298 - 252 = 46$ ஆகும்.

நினைவில் கொள்க...

- தரவு உறுப்புகளை வரிசையாக அமைக்கும்போது துணைத் தகவல்களைப் பெற முடிகிறது.
- புள்ளியியல் தரவுகளை வகைப்படுத்துதல் மூலம் சுருக்கமாக அமைக்கப்பட வேண்டியது அவசியம் ஆகும்.
- தரவுகளைப் பல்வேறு தொகுப்புகள் அல்லது குழுக்களாகப் பிரித்து, குழுக்களில் உள்ள உறுப்புகளிடையே ஒத்த பண்புகளைப் பொருத்து அமைக்கப்பட்டும், குழுக்களுக்குள் வேறுபட்டும் அமைக்கப்படும் முறையே வகைப்படுத்துதல் எனப்படும்.
- வகைப்படுத்துதலை நான்கு வகையாகப் பிரிக்கலாம். அவை (1) காலம் சார் வகைப்படுத்துதல், (2) இடம்சார் வகைப்படுத்துதல், (3) பண்புசார் வகைப்படுத்துதல், (4) அளவின் மூலம் வகைப்படுத்துதல்.
- அட்டவணை என்பது புள்ளியியல் தரவுகளை முறையாக வரிசைப்படுத்தி நிரை (Row) நிரல்களாக (Column) அமைக்கப்படுவதாகும்.
- அட்டவணைத் தலைப்பு, பொருத்தமானாதாகவும் அட்டவணையின் விவரங்கள் மற்றும் தன்மைகளைச் சுருக்கமாகக் கூறும்படி அமைக்க வேண்டும்.
- ஒவ்வொரு அட்டவைணக்கும் ஓர் அட்டவணை எண் தரப்பட வேண்டும். அது பல அட்டவணைகள் இருக்கும்போது சரியான அட்டவணையைக் காண உதவும்.
- நிரைகளின் தலைப்புகளும், நிரல்களின் தலைப்புகளும், சுருக்கமாகவும், சுயவிளக்கம் தருபவையாகவும் இருக்க வேண்டும்.
- சுருக்க அட்டவணைகள் அமைப்பதின் நோக்கம், அதில் உள்ள தகவல்களைப் பகுப்பாய்வு செய்வதற்கும் கருத்து உய்த்துணர்வதற்குப் பயன்படும் படியாக அமைப்பதே ஆகும்.
- ஓர் அட்டவணையில் தரவுகளிலுள்ள உறுப்புகளை அவற்றின் மதிப்பிற்கு ஏற்ப சில குழுக்களுக்குள் வகைப்படுத்தி அமைத்து அவற்றின் எண்ணிக்கையை அதற்கு ஏற்ற குழுக்களுக்கு எதிராக எழுதவேண்டும். அக்குழுக்களுக்குள் அமையும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை நிகழ்வெண் எனப்படும். இதுவே, நிகழ்வெண் பரவல் எனப்படும்.
- பெரிய அளவிலான தரவு உறுப்புகளைப் பல பிரிவுகளாகவோ, குழுக்களாகவோ, நிகழ்வெண்களோடு உருவாக்கும் முறை தொகுத்த நிகழ்வெண் பரவல் எனப்படும்.
- தொடர்புக் குவிவு நிகழ்வெண் பரவல் சதவீதமாகக் குறிக்கப்படுகிறது.
- தரவுகளில் இரண்டு மாறிகளைப் பெற்றிருக்கும்போது இருமாறி அல்லது இருவழி அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி தரவுகளைச் சுருங்கக் கூறலாம்.

- தண்டு–இலைப் பதிவு என்பது தரவு உறுப்புகளை வேறு முறையில் பகுத்தும், வரைபட வடிவமாக்கியும் அமைப்பதாகும். இதில் தரவிலுள்ள அசலான விவர உறுப்புகள் அனைத்தையும் மாற்றமின்றி இடம்பெறச் செய்வது தனிச் சிறப்பாகும்.
- தண்டு–இலைப் பதிவு என்பது தரவிலுள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் ஓர் அட்டவணையில் இரண்டு நிரல்களாக அமைக்கும் முறையாகும். ஓர் எண்ணில் தண்டு (Stem) என்பது இடப்புற எண்ணையும் (முன் இலக்கம்), இலை (Leaf) என்பது வலப்புற எண்ணையும் (பின் இலக்கம்) குறிக்கும்.

பயிற்சி

6D886N

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. செப்பனிடப்படா தரவுகள் என்பது

(a) முதல் நிலைத் தரவுகள் (b) இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள்

(c) பகுக்கப்பட்ட தரவுகள் (d) அட்டவணைப் படுத்தப்பட்ட தரவுகள்

2. வகைப்படுத்துதல் என்பது தரவுகளை

(a) பல நிரைகளாக அமைத்தல் (b) பல நிரல்களாக அமைத்தல்

(c) பல நிரை நிரல்களாக (d) தொடர்புடைய விவரங்களில் குழுக்களாக

3. காலம்சார் வகைப்படுத்துதலில் தரவுகள் வகைப்படுத்துவது எதைப் பொறுத்தது எனில், அது சார்ந்ததாகும்.

(a) பண்புகள் (b) காலம் (c) குழுக்கள் (d) இடம்

4. தரவுகள் புவியியல் இடங்களைப் பொருத்து வகைப்படுத்தப்படுமேயானால் அது சார்ந்தது.

(a) காலம் (b) இடம்

(c) பண்பு (d) எண்

5. ஓர் அட்டவணையில் மேலிருந்து கீழாக இடப்படும் உறுப்புகளுக்கான தலைப்புகள்

(a) நிரை (b) நிரல் (c) குறிப்பு (d)அட்டவணைத் தலைப்பு

6. தரவு மதிப்புகளுடன் அவை இடம்பெறும் எண்ணிக்கையையும் சேர்த்து அமைக்கப்படும் பட்டியல்

(a) அட்டவணை (b) நிகழ்வெண் பரவல்

(c) நிகழ்வெண் வளை வரை (d) குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்

7. 10–14, 15–19, 20–24, 25–29, 30–34 எனும் பிரிவிடைகளைக் கொண்ட குழுவினால் அமைக்கப்படும் நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கப்பட்ட பரவல்

(a) சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை (b) தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை

(c) திறந்த பிரிவெல்லை முறை (d) ஏதுமில்லை

8. தண்டு–இலைப் பதிவு முறையில் குறிப்பிடப்படும் தண்டுப் பகுதியில் இடம்பெறும் இலக்கம்

(a) முன் இலக்கம் (b) பின் இலக்கம்

(c) இலக்கம் (d) ஏதுமில்லை.

II . கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

9. செப்பனிடப்படா விவரங்களில் உள்ள தகவல்களை எண்களைப் பொருத்தோ பண்புகளைப் பொருத்தோ அமைக்கப்படுவதை ______________ என்கிறோம்.

10. ______________ என்பது முதல் நிலைத் தகவல்களை ஒரு குறிப்பிட்ட முறையான வடிவத்தில் அமைப்பதாகும்.

11. தரவுகளை அவற்றின் பண்புகளுக்கேற்ற முறையில் வகைப்படுத்தும் முறைக்கு ______________ என்போம்.

12. தரவுகளை நாடு, மாநிலம், நகரம், மாவட்டம் போன்றவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு வகைப்படுத்துவது ______________ ஆகும்.

13. ______________ என்பது புள்ளியியல் தரவுகளை முறையாக வரிசைப்படுத்தி நிரை, நிரல்களாக அமைப்பதாகும்.

14. எளிய அட்டவணை என்பது ஒரே ஒரு பண்பினைச் சுருங்கக் கூறும்படியாக இருக்கும். அது ஒரு வழி அல்லது ______________ ஐக் கொண்ட அட்டவணை என்று கூறப்படுகிறது.

15. கிடையாக அமைக்கப்படும் அட்டவணைத் தலைப்புகள் ______________ எனப்படும்.

16. ஒரு குழுவின் மேல் எல்லைக்கும், கீழ் எல்லைக்கும் உள்ள வித்தியாசம் ______________ என்று அழைக்கப்படும்.

17. ஒரு பிரிவிடைக் குழுவின் கீழ் எல்லையும் மேல் எல்லையும் முறையே 10, 19 ஆகும். அவ்வாறாயின் அதன் மையப்புள்ளி ______________ ஆகும்.

18. தொடர் நிகழ்வெண் பரவல் அமைப்பதில் பிரிவிடைக் குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண உதவும் ஸ்டர்ஜஸ் விதி (Sturges Rule) -------------- ஆகும்.

19. ஒரு குவிவு நிகழ்வெண் பரவலில் ஒவ்வொரு குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கும், நிகழ்வெண்களின் கூடுதலுக்கும் உள்ள விகிதம் ______________ எனப்படும்.

20. தண்டு–இலைப் பதிவில் தரவில் உள்ள ______________ உறுப்புகள் அனைத்தையும் மாற்றமின்றி இடம்பெறுவது தனிச்சிறப்பாகும்.

21. இரண்டு மாறிகளைக்கொண்ட நிகழ்வெண் பட்டியலில் அமைக்கப்படும் பரவல் ______________ என்று அழைக்கப்படுகிறது.

III. குறு வினாக்கள் (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி)

22. வரிசை என்பது என்ன?

23. வகைப்படுத்துதலை வரையறுக்க.

24. வகைப்படுத்துதலின் வகைகளை எழுதுக.

25. அட்டவணை என்பதை வரையறுக்க.

26. புள்ளியியல் அட்டவணையில் நிரைகள், நிரல்கள் என்றால் என்ன?

27. இரு மாறி அட்டவணை என்றால் என்ன?

IV. சிறு வினாக்கள் (ஓரிரு சொற்றொடர்களில் விடையளி)

28. வகைப்படுத்துதலின் நோக்கங்கள் யாவை?

29. ஓர் எளிய அட்டவணைக்கு எடுத்துக்காட்டு தருக.

30. அட்டவணையின் பயன்கள் யாவை?

31. ஒரு வழி மற்றும் இரு வழி அட்டவணையை வரையறுக்க.

32. தனித்த நிகழ்வெண் பரவல் என்றால் என்ன?

33. திறந்த பிரிவெல்லை கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கு எடுத்துக்காட்டு தருக.

34. தொடர்பு குவிவு நிகழ்வெண் பரவல் என்றால் என்ன?

35. கீழ்க்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கு கீழின மற்றும் மேலின குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்களை அமைக்க.

குழுக்கள்	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	Total
நிகழ்வெண்கள்	5	8	17	24	16	10	80

V. விரிவான விடை தருக.

36. வகைப்படுத்துதலின் பல்வேறு வகைகளை விளக்குக.

37. தரவுகளை அட்டவணைப்படுத்தும்போது கவனிக்க வேண்டிய முன்னெச்சரிக்கைகள் யாவை?

38. புள்ளியியல் அட்டவணை அமைத்தலில் உள்ள முக்கிய வகைகளை விளக்குக.

39. தொடர் நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கும்போது சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை, தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை ஆகியவற்றின் மூலம் அமைக்கும்போது ஏற்படும் வேறுபாடுகளை எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குக.

40. கீழ்க்கண்ட 40 உறுப்புகளுக்கு சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையிலும், தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறையிலும் நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்க.

67, 34, 36, 48, 49, 31, 61, 34, 43, 45, 38, 32, 27, 61, 29, 47, 36, 50, 46, 30, 46,32,30,33,45,49,48, 41, 53, 36, 37, 47, 47,30, 46, 57, 39, 45, 42, 37

41. கீழ்க்கண்ட 20 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களுக்கான, இருமாறி நிகழ்வெண் பரவலை அமைக்க.

பொருளியியல் மதிப்பெண்கள்: 15 12 17 20 23 14 20 18 15 21 10 16 22 18 16 15 17 19 15 20

புள்ளியியல் மதிப்பெண்கள் : 20 21 22 21 23 20 22 21 24 23 22 24 22 23 20 23 20 22 24 23

42. கூடைப்பந்து போட்டியில் பெற்ற மொத்த புள்ளிகளின் விவரத்திற்கு தண்டு–இலைப் பதிவு ஒன்றை அமைக்க.

216, 223, 183,219, 228, 200, 217, 208, 195, 172, 210, 213, 208, 192, 197, 185, 213, 219.

43. கீழ்க்கண்ட தண்டு–இலைப் பதிவிலிருந்து சராசரி, இடைநிலையளவு, முகடு வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தண்டு (முன் இலக்கங்கள்)	இலைகள் (பின் இலக்கங்கள்)
0	2
1	3 4
2	0 3 5
3	1 2 2 2 2 3 6
4	3 4 4 5
5	1 2 7

குறிப்பு:

மேற்கண்ட பல்வேறு வினாக்களைப் போன்று ஆசிரியரும், மாணவரும் புதிய வினாக்களை உருவாக்கி இப்பயிற்சிப் பகுதியை மேலும் விரிவாக்கம் செய்யலாம்.

செயல்பாடு

1. உமது பள்ளி மாணவர்கள் எவ்வகை போக்குவரத்து முறைகளில் வருகின்றனர் என்ற தரவினைச் சேகரித்து வகைப்படுத்தி அட்டவணை தயாரிக்க.

2. உங்கள் வீட்டில் ஒரு மாதத்திற்குப் பயன்படுத்தப்படும் உணவுப் பொருள்களின் அளவுகளையும் அதற்கான செலவுகளையும் அட்டவணையில் குறிக்க.

3. உமது வகுப்பில் உள்ள ஒவ்வொரு மாணவன் / மாணவியின் உயரத்தை (அல்லது எடையை) அளந்து, கிடைத்த விவரத்தைக் கொண்டு தண்டு–இலைப் பதிவு வரைபடத்தை அமைக்க.

4. முக்கிய தகவல் அட்டவணைகளைப் பல்வேறு வழிகளில் சேகரித்து உமது (Album) நோட்டுப் புத்தகத்தில் ஒட்டி வைக்க.

5. உமது வகுப்பு மாணவர்களின் உயரத்தை (அல்லது எடையை) அளந்து கணினி விரிதாள் துணைகொண்டு ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்க.

விடைகள்:

I.1. (a) 2. (b) 3. (b) 4. (b) 5. (b) 6. (b) 7. (a) 8. (a)

II. 9. வரிசை 10. வகைப்படுத்துதல் 11. பண்புசார் வகைப்படுத்துதல்

12. இடம்சார் வகைப்படுத்துதல் 13. அட்டவணைப்படுத்துதல்

14. ஒரு மாறி 15. நிரை தலைப்புகள் 16. பிரிவு இடைவெளி அளவு 17. 14.5

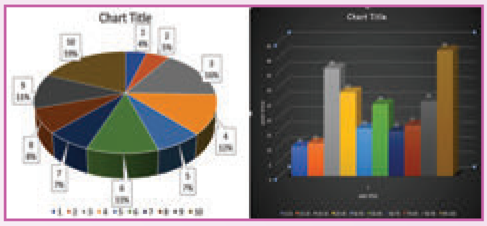
18. $k = 1 + 3.322\log_{10}N$ 19. தொடர்புக் குவிவு நிகழ்வெண்

20. அசலான 21. இருமாறி.

இணையச்செயல்பாடு

பரவல் செவ்வகப்படம் மற்றும் வட்ட விளக்கப் படம் வரைதல்

excel மூலம் தரவுகளைக் கொண்டு வரைபடம் எளிதாய் வரைவோமா!

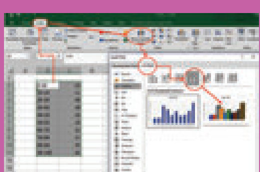


நம்மிடம் இருக்கும் தரவுகளைக் கொண்டு , பரவல் செவ்வகப்படம் மற்றும் வட்ட விளக்கப் படம் வரைவது எப்படி என்று தெரிந்து கொள்ளுங்கள்:

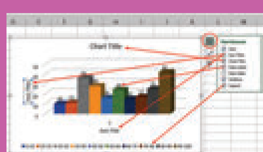
படிகள்

1. Ms – Excel பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும். X – அச்சிற்குரிய விவரங்களை முதல் நிரலிலும்(–column) அதற்குரிய மற்ற விவரங்களை அடுத்தடுத்த நிரல்களிலும் தட்டச்சு செய்யவும். தட்டச்சு செய்த விவரங்களை (select) தேர்வு செய்து, விளக்க வரைபடத்தைப் பெறுவதற்கு Insert–ஐ அழுத்தவும். அங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விளக்க வரைபடங்களில் 'bar chart 3D Cluster column' ஐத் தேர்வு செய்யவும்.
2. தேவையான பரவல் செவ்வகப்படம் கிடைக்கும். தற்போது வலப்புறமுள்ள மூன்று பாவைகளைத் தேர்ந்தெடுத்து விளக்க அட்டவணையின் அமைப்பை மாற்றவும். முதலில், முதல் பொத்தானை அழுத்தி 'Chart elements'– ஐ மாற்றியமைக்கவும். 'Axis Titles', 'Data labels' மற்றும் Chart title –ஐத் தேர்வு செய்யவும். வரைபடத்தாளின் நிலையை மாற்ற, 'Legend' ஐ அழுத்தி மாற்றலாம்.
3. வரைபடத்தை அழகு படுத்த 2–வது மெனு Styles–ஐ தேர்வு செய்யவும்.
4. வட்ட விளக்கப் படம் பெறுவதற்க்கு Insert–ஐ அழுத்தி. அங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விளக்க வரைபடங்களில் 'Pie or Doughnut 3D Pie' ஐத் தேர்வு செய்யவும்.

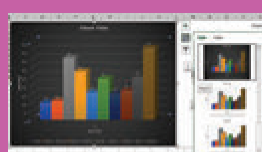
படி 1



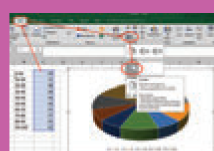
படி 2



படி 3



படி 4



* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

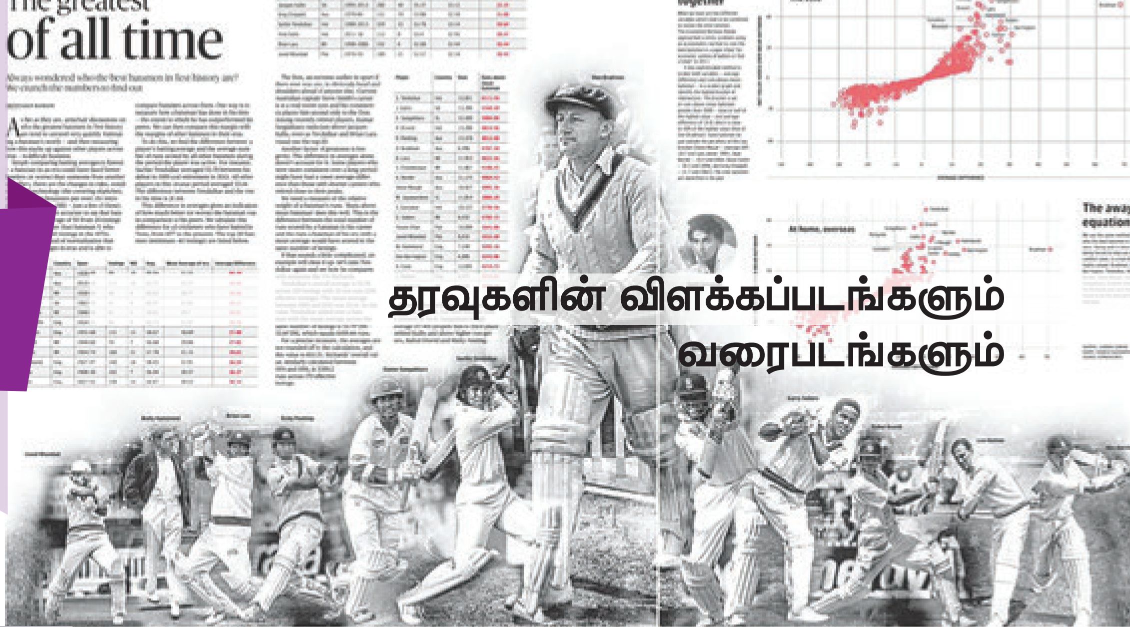
உரலி:

https://www.calculatorsoup.com/calculators/statistics/stemleaf.php

B136_11_STA_TM

அத்தியாயம்

4



தரவுகளின் விளக்கப்படங்களும் வரைபடங்களும்

வில்லியம் பிளேஃபேர்
(22 செப்டம்பர்1759
– 11 பிப்ரவரி 1823)

வில்லியம் பிளேஃபேர் அறிஞர் ஆவார். ஸ்காட்லாந்தில் பிறந்த அவர் பொறியியல், அரசியல், பொருளியல் போன்ற துறைகளில் நிபுணத்துவம் பெற்றவர். அவர் புள்ளியியலில் வரைபடம் அமைப்பது பற்றிக் கண்டுபிடித்தவர் ஆவார். அவர் வட்ட வரைபடம், பட்டை விளக்கப்படங்கள், புள்ளியியலில் கோட்டு வரைபடம் போன்றவற்றை உருவாக்கி பொருளியியலில் தரவுகளுக்குப் பயன்படுத்தியுள்ளார்.

'புள்ளியியலில் பெறப்படும் சிறந்த முடிவுகள் அதன் தரவுகளை தாண்டி வெகுதொலைவுக்கு செல்வதில்லை.' – பிரையன். எஸ். யண்டெல்

6DH48B

நோக்கங்கள்

- தரவுகளை விளக்கப் படத்தின்மூலம் விளக்குதல்
- வெவ்வேறு விதமான விளக்கப் படங்களை அறிதல்
- அட்டவணை தரவு மற்றும் விளக்கப் படம் மூலமாக விவரித்தலை ஒப்பிடல்
- தரவுகளை வரைபடத்தின் மூலம் விளக்குதல்
- வரைபடம் மூலம் மதிப்பினைக் காணல்.
- விளக்கப்படத்திற்கும் வரைபடத்திற்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் காணல்

அறிமுகம்

முந்தைய பாடத்தில் சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகளை வகைப்படுத்தும் முறைகள் பற்றியும், அட்டவணைப்படுத்தும் முறைகள் பற்றியும் விரிவாகப் பார்த்தோம். தரவுகளை எண்கள் மூலமாகத் தரும் முறை சராசரி மனிதனுக்கு ஈர்ப்பையும், ஆர்வத்தையும் ஏற்படுத்தாது. எனவே முதன்மைபடுத்த வேண்டிய முக்கிய தரவுகளை வரைபடங்கள், விளக்கப்படங்கள், உருவப்படங்கள் மூலம் தருவதே சிறந்த முறையாகும். படங்கள் மனதைக் கவர்வதாகவும், அதிக ஈர்ப்புத்தன்மை கொண்டதாகவும்,

நீண்ட நாள் மனதில் நிலைக்கக்கூடியதாவும் இருக்கும் என்பது அனைவராலும் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட உண்மையாகும். மேலும் ஒரு சராசரி மனிதனால் எண்களை விட படங்களை எளிதாகப் புரிந்து கொள்ள இயலும். அதனால்தான் செய்தித்தாள்கள், இதழ்கள், பத்திரிக்கைகள், விளம்பரங்கள் போன்றவை எண் விவரங்களை வரைபடங்கள் மற்றும் விளக்கப்படங்கள் மூலம் விளக்குகிறது.

4.1 விளக்கப்படங்கள் மற்றும் வரைபடங்களின் பொருளும் முக்கியத்துவமும்

விளக்கப்படம் (Diagrams)

ஒரு விளக்கப்படம் என்பது தரவுகளைப் பற்றிய அடிப்படை உண்மைகளையும், பல்வேறு தரவுகளுக்கு உண்டான தொடர்புகளையும் படம் பிடித்துக் காட்டுகிறது. விளக்கப்படங்கள் எளிமையாகப் புரிந்து கொள்ளக்கூடியதாகவும் அனைவராலும் பாராட்டக்கூடியதாகவும் உள்ளது. இது மற்றவர்களின் கவனத்தைக் கவர்ந்து, நேரத்தை மிச்சப்படுத்தி விரைவாக புரிந்து கொள்ள உதவுகிறது. இது குறிப்பாக தன்மைத் தரவுகளை விளக்கத் தேவைப்படுகிறது.

- பண்புசார் தரவுகள் – Qualitative data

வரைபடங்கள் (Graphs):

பொதுவாக எண் தரவுகள் வரைபடம் மூலம் குறிக்கப்படுகிறது. வரைபடங்களை சராசரி மனிதனால் எளிதில் புரிந்து கொள்ள இயலாத போதும், கவனத்தை ஈர்க்க இயலாத போதும், வகைப்படுத்துதல் மற்றும் அட்டவணைப்படுத்துதல் போன்ற முறைகளில் உள்ள சிக்கல்களைக் குறைக்கிறது. புள்ளியியல் நிபுணர்கள் தரவுகளை வரைபடங்கள் மூலமாக விளக்குவதற்கு உண்டான முக்கியத்துவத்தை உணர்ந்திருக்கிறார்கள். வரைபடங்கள் வரைபடத்தாளில் கையால் வரையப்படுகிறது.

விளக்கப்படங்கள் மற்றும் விளக்கப்படங்களின் சிறப்புத் தன்மைகள்:

கீழ்க்கண்ட காரணங்களால் விளக்கப் படங்கள் மற்றும் வரைபடங்கள் மிக அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(i) அவை மனதை கவர்வதாகவும் ஆழமாகப் பதிய வைப்பதாகவும் உள்ளன.

(ii) தரவுகளை எளிமையாகவும் நுட்பமாகவும் அளிக்கின்றன.

(iii) ஒப்பிடுவதற்கு பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(iv) நேரத்தையும், உழைப்பையும் குறைக்கின்றன.

(v) சிறந்த முறையில் நினைவில் நிறுத்துவதற்கு உதவுகின்றன.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

கிரிக்கெட் விளையாட்டில் வரைபடங்களும் விளக்கப்படங்களும் மற்ற விளையாட்டுக்களை விட அதிகளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

4.2 விளக்கப்படங்கள் வரைவதற்கான விதிகள்

தரவுகளை வரைபடங்கள் மூலமாக வரையும் பொழுது கீழ்க்காணும் விதிகளை மனதில் கொள்ள வேண்டும்.

- ஒரு விளக்கப்படம் என்பது தெளிவாகவும், கண்ணைக் கவரும் முறையிலும் வரையப்பட வேண்டும்.
- ஒவ்வொரு படத்திலும் பொருத்தமான, சிறிய தலைப்பு கொடுக்கப்பட வேண்டும்.
- வரைபடத்தாளின் அளவிற்கேற்ப அளவீடுகள் அமைக்கப்பட வேண்டும். (வரையறுக்கப்பட வேண்டும்)
- விளக்கப்படத்தில் அளவுத் திட்டம் குறிப்பிட வேண்டும்.
- சாராத மாறியின் மதிப்புகள் X அச்சிலும், சார்ந்த மாறியின் மதிப்புகள் Y அச்சிலும் குறிக்க வேண்டும்.
- தேவைப்பட்டால் இடைமுறிவுக்கோடுகள் (False base lines) X, Y அச்சுகளில் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.
- X, Y- அச்சுகளில் உள்ள சாராத மாறியின் பிரிவுகளை வேறுபடுத்துவதற்கான படக்குறிப்பு விளக்கங்கள் குறிப்பிட வேண்டும்.
- தேவைப்படும் இடங்களில் அடிக்குறிப்பு, படத்தின் அடியில் குறிப்பிட வேண்டும்.

படக் குறிப்பு விளக்கங்கள் என்பவை விளக்கப்படங்கள், வரைபடங்களில் அமைக்கப்படும் நிழலிடப்பட்டப் பகுதி/வண்ணங்களைக் குறிக்கும். இவற்றை படங்களின் புரிதலுக்கானத் திறவுகோல் எனலாம். பொதுவாக இவை விளக்கப்படங்களின் வலது பக்கத்தில் ஒரு கட்டத்திற்குள் அமைவது வழக்கம்.

4.3 விளக்கப்படங்களின் வகைகள்

நடைமுறையில் தரவுகளை விளக்க பலவிதமான விளக்கப்படங்கள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. அவைகள் கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளன.

4.3.1 எளிய பட்டை விளக்கப்படம்

எளிய பட்டை விளக்கப்படம் கிடைமட்டமாகவோ அல்லது நிலைக்குத்தாகவோ (செங்குத்தாகவோ) வரையப்படுகின்றன. பொதுவாக பட்டைகள் நிலைக்குத்தாக வரைவது வழக்கம். நிலைக்குத்தாக வரையும் போது பட்டைகளின் அகலம் ஒரே சீராக இருக்க வேண்டும். மற்றும் பட்டைகளுக்கு இடையே சமஇடைவெளி இருக்க வேண்டும். இப்படம் வரையும் போது அத்தொடரில் உள்ள மிகப்பெரிய அளவிற்கு ஏற்றவாறு அளவுத்திட்டம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும். அவை கவனத்தை ஈர்ப்பதற்கு பட்டைகள் வண்ணம் தீட்டப்பட வேண்டும். முக்கியமாக

வகைப்படுத்தப்பட்ட மாறிகளுக்காக இப்படம் வரையப்படுகிறது. வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரத் துறைகளில் தரவுகளை விளக்குவதற்கு இவ்வகைப்படங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

ஒரு நிறுவனம் தயாரித்த பொருட்களின் உற்பத்தி விலை (ரூ இலட்சங்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) எளிய பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

(ii) எந்த ஆண்டு உற்பத்தி செய்த பொருளின் விலை
(i) அதிகம் (ii) குறைவு (iii) 40 இலட்சத்திற்கு குறைவு

(iii) நிறுவனம் தயாரித்த பொருளின் சராசரி உற்பத்தி விலை என்ன?

(iv) 2014 முதல் 2015 ஆம் ஆண்டு வரை எத்தனை சதவீதம் உயர்ந்துள்ளது?

ஆண்டு	உற்பத்தி விலை
2010	55
2011	40
2012	30
2013	25
2014	35
2015	70

தீர்வு:

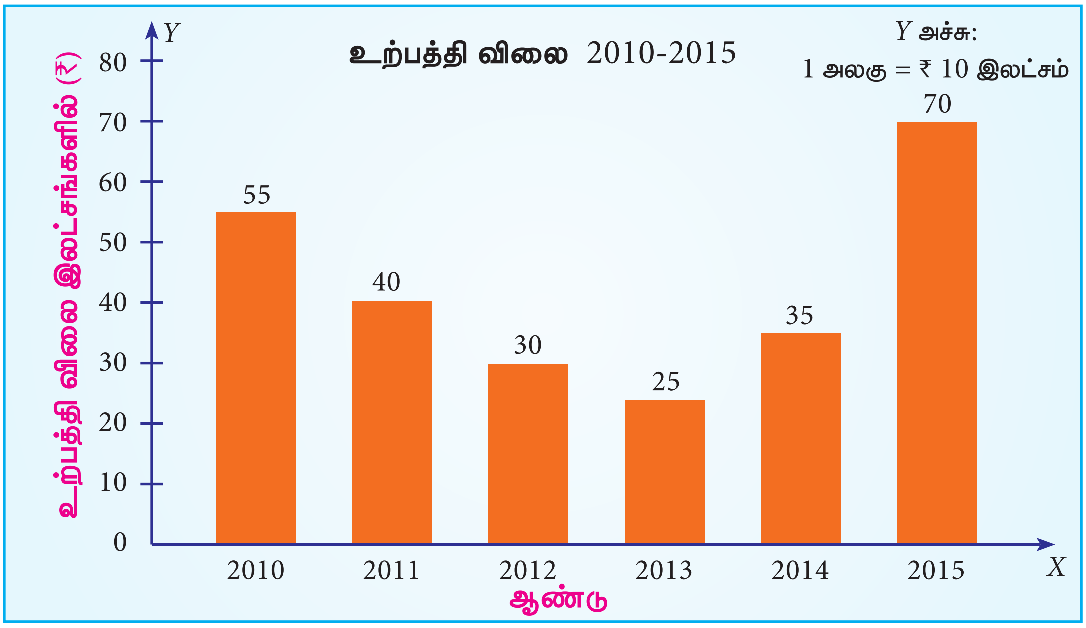
மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கு எளிய பட்டை விளக்கப்படம் பின்வரும் முறையில் வரைய வேண்டும்.

நிலை 1: ஆண்டுகளை X அச்சில் குறித்து 'ஆண்டு' எனக் குறிப்பிட வேண்டும்.

நிலை 2: உற்பத்தி விலையை Y அச்சில் குறித்து "உற்பத்தி விலை"). (ரூ. இலட்சத்தில்) எனக் குறிப்பிட வேண்டும்

நிலை 3: நிலைக்குத்து செவ்வக பட்டைகள், ஆண்டு குறிப்பிடப்பட்ட இடத்திற்கு மேல் வரையப்பட வேண்டும். மற்றும் அதன் உயரம் உற்பத்தி விலையின் எண்ணளவிற்கு விகிதாச்சாரத்தில் அமைக்க வேண்டும்;.

நிலை 4: நிலைகுத்து பட்டைகள் அனைத்தும் ஒரே வண்ணத்தில் தீட்டப்பட வேண்டும்.



படம் 4.1 உற்பத்தி விலையின் எளிய பட்டை விளக்கப்படம்

(ஆ) (i) 2015 ஆம் ஆண்டு உற்பத்தி செய்த பொருளின் விலை அதிகம்;

(ii) 2013 ஆம் ஆண்டு உற்பத்தி செய்த பொருளின் விலை குறைவு.

(iii) ரூ.40 இலட்சத்திற்கு உற்பத்தி விலை குறைவாக உள்ள ஆண்டுகள்: 2012, 2013, 2014

(இ) சராசரி உற்பத்தி விலை $= \dfrac{55+40+30+25+35+70}{6}$

$= \dfrac{255}{6}$

= ரூ. 42.5 இலட்சம்.

(ஈ) 2014 முதல் 2015 ஆம் ஆண்டு வரை உற்பத்தி விலையின் சதவீத உயர்வு

$= \dfrac{70}{35} \times 100 = 200\%$

4.3.2 பெரிட்டோ வரைபடம் (Pareto Diagram) :

வில்பிரட்டோ பெரிட்டோ (1843–1923) பாரிசில் இத்தாலிய பிரபுத்துவ குடும்பத்தில் பிறந்தார். அவர் தூரின் பல்கலைக்கழகத்தில் பொறியியல் மற்றும் கணிதம் பயின்றார். சுவிட்சர்லாந்தில் உள்ள லூசான் பல்கலைக்கழகத்தில் படிக்கும் பொழுது சமுதாயத்தில் வருமானம் மற்றும் செல்வம் சீரற்று பரவி இருப்பதை நிரூபிக்க ஒரு கடினமான கணித சூத்திரத்தை உருவாக்கினார். சமுதாயத்தில் தோராயமாக மொத்த செல்வத்தில், 80% ஆனது, 20% குடும்பத்தில் பரவியுள்ளது என்பதை அறிந்தார். அவர் பொருளியலில் மிகவும் பிரபலமான 'முக்கியமற்ற பலவற்றில் முக்கியமான சில' (Vital few and the Tivial many) என்ற விதியை உருவாக்கினார்.

இது புகழ்பெற்ற பெரிட்டோ விதி என அழைக்கப்படுகிறது.

பெரிட்டோ வரைபடம் என்பது எளிய பட்டைவிளக்கப்படத்தை ஒத்ததாகும். ஆனால் பட்டைகள் அதன் உயரத்தின் இறங்கு வரிசையில் அமைக்கப்படுகிறது. கூடுதலாக, மாறிகளின் பல்வேறு கூறுகளின் குவிவு நிகழ்வெண்கள் (சதவீதத்தில்) நேர்க்கோட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இக்கோடு முக்கியமற்ற பலவற்றில் முக்கியமான சிலவற்றை அறிய உதவுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

ஒரு பள்ளியின் நிர்வாகம் அதன் வேதியியல் ஆய்வகத்தின் உபகரணங்களை சேதமாவதற்கு எதிராக பொருத்தமான தடுப்பு நடவடிக்கைகளைத் தொடங்க விரும்பியது. 2017ஆம் ஆண்டின் போது ஆய்வகத்தின் சேதம் பற்றி சேகரிக்கப்பட்ட தகவல்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உபகரணங்கள்	சேதமடைந்தவற்றின் என்ணிக்கை
பியூரெட்	45
கூம்பு குடுவை	75
சோதனைக்குழாய்	150
பிப்பெட்	30

மேற்கண்ட தரவுகளுக்கு பெரிட்டோ வரைபடம் வரைக. முறிவுகளை குறைப்பதற்கு எந்த கருவிகளுக்கு அதிக கவனம் தேவைப்படுகிறது எனக் காண்க.

தீர்வு:

நாம் பலவற்றில் முக்கியமான சிலவற்றை கண்டுபிடிக்க வேண்டும் என்பதால் நாம் பெரிட்டோ வரைபடத்தை வரையலாம்.

படி 1 : சேதமடைந்த உபகரணங்களின் என்ணிக்கையை இறங்கு வரிசையின்படி உபகரணங்களை ஒழுங்குபடுத்துக.

படி 2 : பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு உபகரணத்திற்கும் சேதத்தின் சதவிகிதம் காண்க.

$$\frac{\text{சேதமடைந்த உபகரணங்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{சேதமடைந்த உபகரணங்களின் மொத்தம்}} \times 100$$

படி 3 : ஒவ்வொரு உபகரணத்திற்கும் குவிப்பு சதவீதம் கணக்கிடுக.

படி 4 : X அச்சில் உபகரணங்களையும் Y அச்சில் சேதமடைந்த உபகரணங்களின் என்ணிக்கையையும் குறிக்கவும். இந்த தரவுகளுக்கு எளிய பட்டை விளக்கப்படம் வரைக. பட்டை விளக்கப்படங்களை இடைவெளியின்றி அடுத்தடுத்து வரைக.

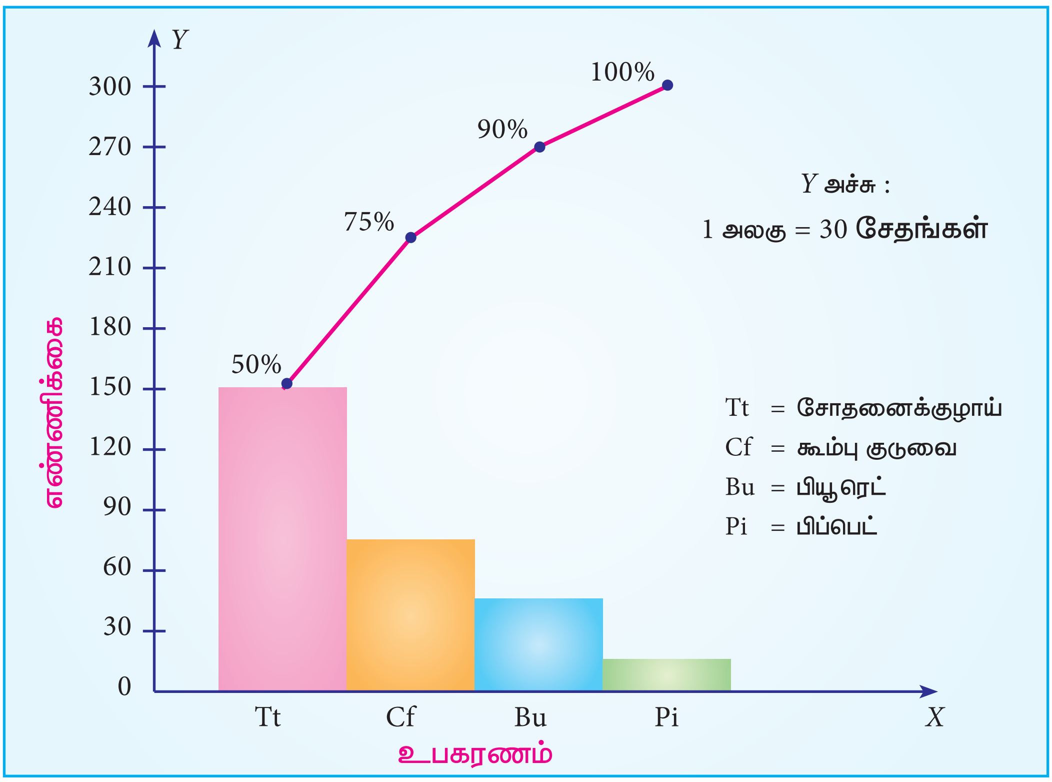
படி 5 : வரைபடத்தாளின் பக்கத்தில் Y அச்சுக்கு இணையாக ஒரு கதிர் வரைந்து

அதில் சதவீதத்தை குறிக்கவும்.

படி 6 : ஒவ்வொரு பட்டையின் மையப்புள்ளியிலிருந்து சேதமடைந்த பொருட்களின் குவிவு சதவீதத்தை குறிக்கவும்.

படி 7 : இப்புள்ளிகளை இணைத்து தொடர்ச்சியான வளைவரை வரைக.

உபகரணம்	சேதமடைந்த கருவிகளின் என்ணிக்கை (நிகழ்வெண்)	சேதமடைந்த பொருட்களின் சதவீதம்	சேதமடைந்த பொருட்களின் குவிவு சதவீதம்
சோதனைக்குழாய்	150	$\frac{150}{100} \times 100=50$	50
கூம்பு குடுவை	75	$\frac{75}{300} \times 100=25$	75
பியூரெட்	45	$\frac{45}{300} \times 100=15$	90
பிப்பெட்	30	$\frac{30}{300} \times 100=10$	100
மொத்தம்	300	100	



படம் 4.2 வேதியியல் ஆய்வகத்தில் சேதமடைந்த கருவிகளின் பாரெட்டோ வரைபடம்.

படம் 4.2 இலிருந்து சேதமடைந்த பொருட்களில் 50% சோதனை குழாய்களாலும், 25% கூம்பு குழாய்களாலும் ஏற்படுகிறது என்பது தெரிகிறது. எனவே பள்ளி நிர்வாகம் சேதத்தைக் குறைப்பதற்கு

சோதனைக் குழாய், கூம்பு குடுவை உபயோகத்தில் கவனம் செலுத்த வேண்டும்.

4.3.3 பலகட்டப் பட்டை விளக்கப்படம் (Multiple Bar Diagram)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளியியல் தரவுகளை ஒப்பிடுவதற்கு பலகட்டப் பட்டை விளக்கப்படம் பயன்படுகிறது. சம அகலமுடைய பட்டைகள் அடுத்தடுத்து வருமாறு குழுவாக (Cluster) வரையப்பட வேண்டும். இரண்டு குழுக்களுக்கு இடையில் சம இடைவெளி இருக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு குழுவில் உள்ள பட்டைகளை வேறுபடுத்திக் காட்ட வெவ்வேறு வண்ணங்கள் தீட்ட வேண்டும் அல்லது வெவ்வேறு விதமாக நிழலிட வேண்டும். படத்தை பற்றிய படக்குறிப்பு கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

கீழே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் 2014 முதல் 2017 வரை கார்கள் விற்பனை செய்வதில் ஒரு வணிக நபரால் வரி செலுத்துவதற்கு முன்னும் பின்னும் (ரூ.லட்சத்தில்) பெறப்பட்ட இலாபம் காட்டுகிறது.

ஆண்டு	வரிக்கு முந்தைய இலாபம்	வரிக்கு பிந்தைய இலாபம்
2014	195	80
2015	200	87
2016	165	45
2017	140	32

(i) மேலே கொடுக்கப்பட்ட தரவுக்கு பலகட்டப் பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

(ii) வரி கட்டுவதற்கு முன் எந்த ஆண்டில் அதிகபட்ச இலாபம் கிடைத்துள்ளது?

(iii) வரி கட்டிய பின்பு எந்த ஆண்டில் குறைந்தபட்ச இலாபம் கிடைத்துள்ளது?

(iv) வரி கட்டுவதற்கு முன்பும் பின்பும் நிறுவனத்தின் சராசரி இலாபத்தின் வித்தியாசம் காண்க.

தீர்வு :

ஒரே நிறுவனத்தின் வரிக்கு முன்னும் பின்னும் கிடைத்த இலாபத்தை ஒப்பிடுவதற்காக பலகட்டப் பட்டை விளக்கப்படம் வரையப்படுகிறது. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள செயல்முறையை பயன்படுத்தி பலகட்டப் பட்டை விளக்கப்படம் வரையப்பட வேண்டும்.

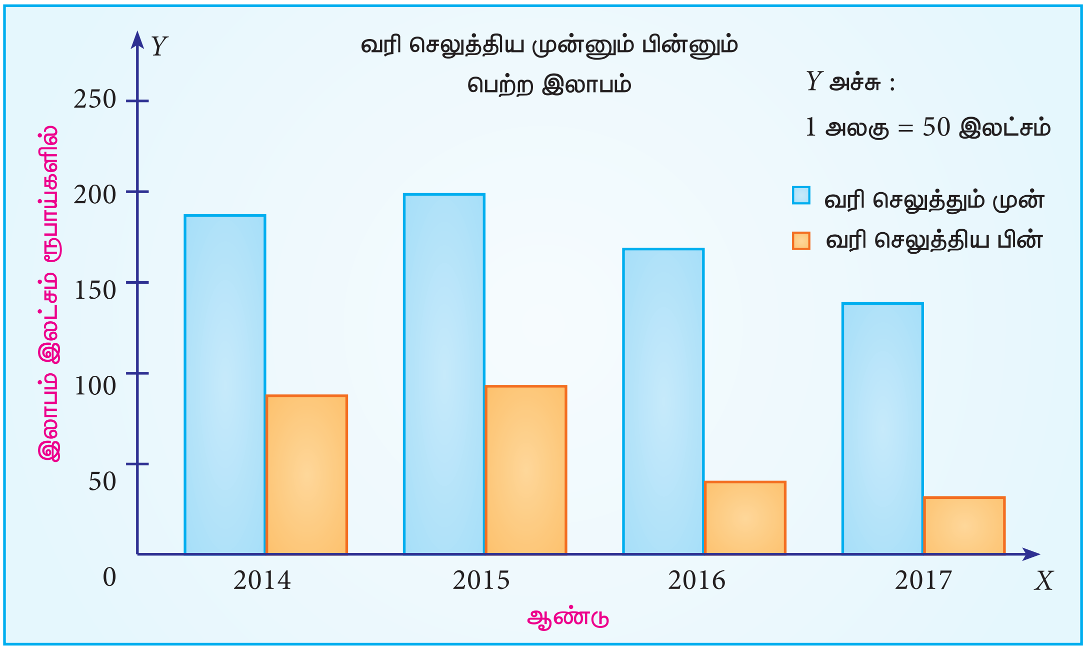
படி 1 : X அச்சில் ஆண்டைக் குறித்து, 'ஆண்டு' எனக் குறிப்பிடுக.

படி 2 : Y அச்சில் வரி செலுத்துவதற்கு முன்னும் பின்னும் கிடைத்த இலாபத்தை குறிப்பிட்டு 'இலாபம் (ரூ இலட்சத்தில்)' எனக் குறிப்பிட வேண்டும்.

படி3 : ஆண்டு எனக் குறிப்பிட்ட இடத்திற்கு மேலே நிலைகுத்து செவ்வகப்பட்டைகள் இலாபத்தின் விகிதத்தில் உயரம்.

படி 4 : வரிக்கு முந்தைய இலாபப் பட்டையை ஒரு வண்ணமும், வரிக்கு பிந்தைய இலாபப் பட்டையை மற்றொரு வண்ணமும் தீட்ட வேண்டும். மேற்கூறிய முறையைப் பின்பற்றி அனைத்து ஆண்டுகளுக்கும் வண்ணம் தீட்ட வேண்டும்.

படி 5 : படக்குறிப்பில் எந்தெந்த வண்ணங்கள் வரிக்கு முந்தைய இலாபம் வரிக்கு பிந்தைய இலாபத்தை குறிக்கிறது எனக் குறிப்பிட வேண்டும்.



படம் 4.3 பல கட்டப் பட்டை விளக்கப்படம்

(i) வரி கட்டுவதற்கு முன் 2015 ஆம் ஆண்டில் அதிகபட்ச இலாபம் கிடைத்துள்ளது.

(ii) வரி கட்டிய பின்பு 2017 ஆம் ஆண்டில் குறைந்தபட்ச இலாபம் கிடைத்துள்ளது.

(iii) வரிக்கு முந்தைய சராசரி இலாபம் = $\frac{700}{4}$ = ரூ.175 இலட்சங்கள்

வரிக்கு பிந்தைய சராசரி இலாபம் = $\frac{244}{4}$ = ரூ 61இலட்சங்கள்.

வரி கட்டுவதற்கு முன்பும் பின்பும் நிறுவனத்தின் சராசரி இலாபத்தின்

வித்தியாசம் = 175−61

= 175 – 61 = ₹ 114 இலட்சங்கள்.

4.3.4 கூறுபட்டை விளக்கப்படம் (Component Bar Diagram or Sub–divided Bar Diagram)

கூறுபட்டை விளக்கப்படம் பலகட்டப் பட்டை விளக்கப் படத்தைப் போல இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளியியல் தரவுகளை ஒப்பிடப் பயன்படுகிறது. பலகட்டப் பட்டை விளக்கப் படத்தைப் போல் அல்லாமல் கூறுபட்டை விளக்கப்படத்தில் பட்டைகள் ஒன்றின் மேல் ஒன்றாக அடுக்கப்படுகின்றன. கூறுபட்டை விளக்கப்படம் வரையும் பொழுது அதன் பட்டைகள் சம அகலமுடையதாகவும் அதன் உயரம் மொத்த நிகழ்வெண்ணின் எண்ணளவிற்கு விகிதத்தில் இருக்குமாறு வரையப்பட வேண்டும். பட்டைகளுக்கு இடையே சமஇடைவெளி இருக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு பட்டையையும் கொடுக்கப்பட்ட கூறுகளின் மதிப்புகளின் விகிதத்திற்கு ஏற்றவாறு பிரிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு கூறும் வெவ்வேறு வண்ணம் தீட்டியோ அல்லது வெவ்வேறு விதமாக நிழலிட்டோ காட்ட வேண்டும். குழுக்களின் எண்ணிக்கை குழுக்களில் உள்ள வகைகளின்

எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்பொழுது பலகட்டப் பட்டை விளக்கப்படம் ஈர்ப்புத்தன்மை அற்றதாக இருக்கும். அச்சூழ்நிலையில் கூறுபட்டை விளக்கப்படமே விரும்பத்தக்கதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.4

இரண்டு பள்ளிகளில் ஓர் ஆண்டின் பல்வேறு செலவினங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

செலவினங்கள்	ரூ (இலட்சத்தில்)	
	பள்ளி 1	பள்ளி 2
கட்டுமானம் / பழுதுபார்த்தல்	80	90
கணினி	35	25
ஆய்வகம்	30	25
நீர்சுத்திகரிப்பு	45	40
நூலக நூல்கள்	40	30
மொத்தம்	230	235

எந்தப் பள்ளி (அ) கட்டுமானம் / பழுதுபார்த்தலுக்கு (ஆ) நீர் சுத்திகரிப்பிற்கு அதிக செலவு செய்துள்ளது?

தீர்வு :

இரண்டு பள்ளிகளில் ஓர் ஆண்டின் பல்வேறு செலவினங்களை ஒப்பிடுவதால் கூறுபட்டை விளக்கப்படம் வரையப்படுகிறது

படி 1 : X-அச்சில் பள்ளிகளை குறித்து, 'பள்ளி' எனக் குறிப்பிடுக.

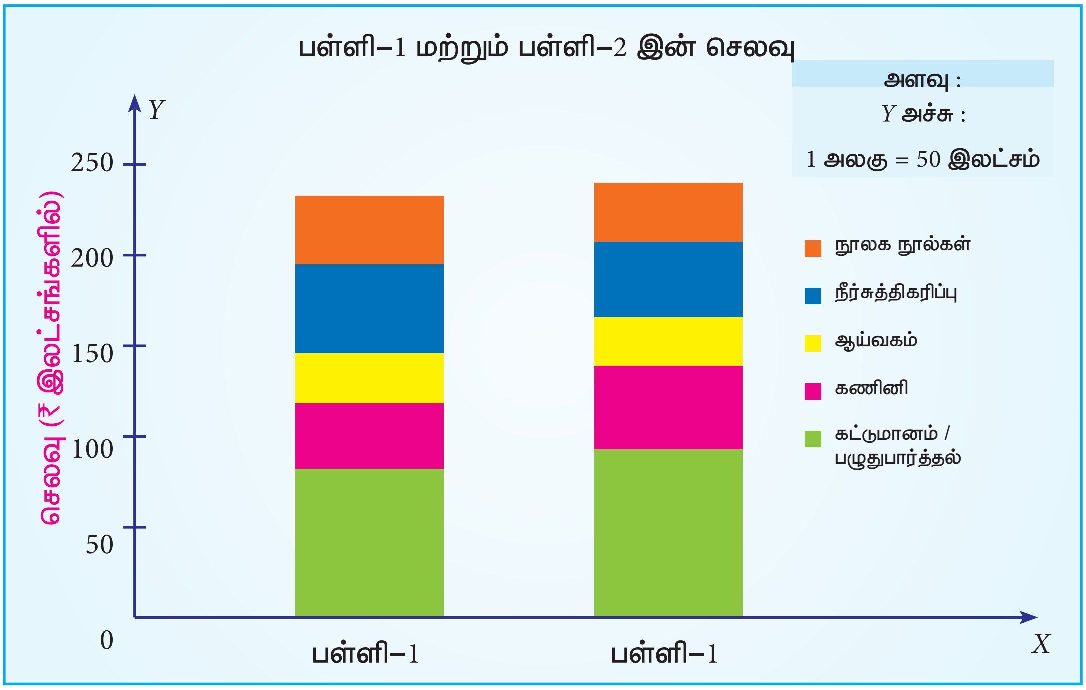
படி 2 : Y-அச்சில் செலவுத் தொகையைக் குறித்து, 'செலவு (ரூ. இலட்சத்தில்)' எனக் குறிப்பிடுக.

படி 3 : ஒவ்வொரு பள்ளிக்கும் நிலைகுத்து செவ்வகப்பட்டைகளின் உயரங்கள் மொத்த செலவினங்கள் விகிதத்தில் அமையுமாறு வரைய வேண்டும்.

படி 4 : ஒவ்வொரு நிலைகுத்துப்பட்டைகளும் செலவினத் தலைப்புகளுக்கு ஏற்றவாறு கூறுகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு கூறின் செவ்வகப் பெட்டியின் பரப்பானது தொடர்புடைய செலவினங்களின் விகிதத்தில் அமைய வேண்டும். ஒவ்வொரு பள்ளியின் செவ்வகப் பெட்டிகளும் வெவ்வேறு வண்ணத்தில் தீட்டப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு பள்ளியின் ஒரே மாதிரி செலவினங்களுக்கு ஒரே மாதிரி வண்ணங்கள் தீட்டப்பட வேண்டும்.

படி 5 : ஒவ்வொரு செலவினத்திற்கும் வரையப்பட்ட செவ்வகப் பெட்டியின் வண்ணத்திற்கு ஏற்றவாறு படக்குறிப்பு குறிப்பிட வேண்டும்.

செலவினங்கள்	தொகை (ரூ இலட்சத்தில்)			
	பள்ளி 1		பள்ளி 2	
	செலவுத் தொகை	குவிவு செலவுத் தொகை	செலவுத் தொகை	குவிவு செலவுத் தொகை
கட்டுமானம் பழுதுபார்த்தல்	80	80	90	90
கணினி	35	115	50	140
ஆய்வகம்	30	145	25	165
நீர்சுத்திகரிப்பு	45	190	40	205
நூலக நூல்கள்	40	230	30	235
மொத்தம்	230	760	235	835



படம் 4.4 ல் பள்ளி 1 மற்றும் பள்ளி 2 செலவினங்களுக்கான கூறுபட்டை விளக்கப்படம்.

அ) பள்ளி 2 கட்டுமானம் / பழுதுபார்த்தலுக்கு அதிக செலவு செய்துள்ளது.

(i) ஆ) பள்ளி 1 நீர்சுத்திகரிப்பிற்கு அதிக செலவு செய்துள்ளது.

4.3.5 விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம் (Percentage Bar Diagram)

கூறுபட்டை விளக்கப்படத்தில் மற்றொரு வடிவம் விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம் ஆகும். இங்கு கூறுகளின் உயரம் உண்மையான மதிப்புகளுக்குப் பதிலாக அதன் சதவீதங்களைக்

காட்டுகிறது. கூறுபட்டை விளக்கப்படங்களுக்கும், சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படங்களுக்கும் உள்ள முக்கிய வேறுபாடு என்னவெனில், முதலாவதில் விவரங்களே வெவ்வேறானவையாக இருப்பதால், பட்டைகள் வெவ்வேறு உயரங்களைப் பெற்றிருக்கும். பின்னதில் எல்லா விவரங்களும் நூற்றுமானத்திற்கு மாற்றப்படுவதால் 100% உயரத்தைப் பெற்றிருக்கும்.

கூறுபட்டை விளக்கப்படத்தை விட விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம் அதிக கவரும் தன்மை உடையது. கூறுகளை ஒப்பிடுவதற்கு விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம் மிகவும் எளிதாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.5

எடுத்துக்காட்டு 4.4 இன் விவரங்களுக்கு விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

(i) பள்ளி 1 கணினிக்காக செலவு செய்த தொகையின் விழுக்காடு என்ன?

(ii) பள்ளி 2 எவற்றிற்கு பள்ளி 1 ஐ விட அதிகம் செலவு செய்கிறது?

தீர்வு :

இரண்டு பள்ளிகளின் பல்வேறு செலவினங்களுடன் மொத்த செலவினங்களின் விழுக்காடுகளுடன் ஒப்பீடு செய்வதால் விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம் வரையப்படுகிறது.

நிலை 1 : X அச்சில் பள்ளிகளைக் குறித்து, "பள்ளி" எனக் குறிப்பிட வேண்டும்.

நிலை 2 : Y அச்சில் செலவினங்களின் விழுக்காடுகளை குறித்து, "செலவினங்களின் விழுக்காடு" எனக் குறிப்பிட வேண்டும்.

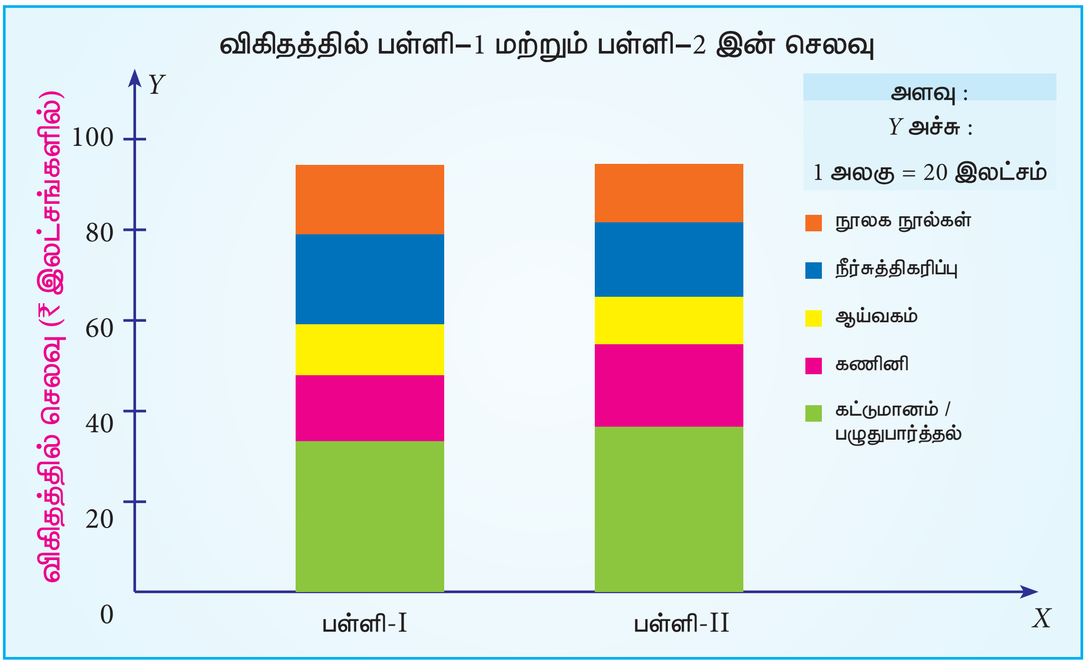
நிலை 3 : ஒவ்வொரு பள்ளிக்கும் செவ்வகப்பட்டை விளக்கப்படம் வரையப்பட வேண்டும். அதன் மொத்த உயரம் நூறாகும்.

நிலை 4 : ஒவ்வொரு பட்டையும் அதன் விழுக்காட்டு செலவினங்களுக்கு ஏற்ப கூறுகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு செவ்வகப் பெட்டியின் பரப்பும் அதற்கு ஒத்த செலவின விழுக்காட்டிற்கு விகித சமமாக இருக்கும். ஒவ்வொரு பள்ளியின் செவ்வகப் பெட்டியும் வெவ்வேறு வண்ணங்களால் தீட்டப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு பள்ளியின் ஒரே மாதிரி செலவினங்களுக்கு ஒரே மாதிரி வண்ணங்கள் தீட்டப்பட வேண்டும்.

நிலை 5 : செவ்வகப் பெட்டிகளின் வண்ணங்கள் எச்செலவினங்களை குறிக்கின்றன என்று குறிப்பிட வேண்டும்.

விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம் படம் 4.5 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

செலவினங்கள்	தொகை (ரூ.இலட்சத்தில்)					
	பள்ளி 1			பள்ளி 2		
	செலவுத் தொகை	செலவுத் தொகை (சதவீதத்தில்)	குவிவு சதவீதம்	செலவுத் தொகை	செலவுத் தொகை (சதவீதத்தில்)	குவிவு சதவீதம்
கட்டுமானம் / பழுதுபார்த்தல்	80	35	35	90	38	38
கணினி	35	15	50	50	21	59
ஆய்வகம்	30	13	63	25	11	70
நீர்சுத்திகரிப்பு	45	20	83	40	17	87
நூலக நூல்கள்	40	17	100	30	13	100
மொத்தம்	230	100		235	100	



படம் 4.5 இல் விகிதத்தில் பள்ளி 1 மற்றும் பள்ளி 2 செலவினங்களுக்கான கூறுபட்டை விளக்கப்படம்.

(i) பள்ளி 1, 2% கணினிக்காக செலவு செய்தது.

(i) பள்ளி 2, கட்டுமானம் / பழுதுபார்த்தல், கணினிக்காக பள்ளி பள்ளி 1 ஐ விட அதிகம் செலவு செய்கிறது.

4.3.6 வட்ட விளக்கப்படம் (Pie Diagram)

இது வட்ட வடிவில் உள்ளதால், வட்ட விளக்கப்படம் என அழைக்கப்படுகிறது. 3600 கோணம் உள்ள வட்டத்தைப் பல்வேறு வட்டகோணப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். வட்டக்கோணப்பகுதி மையத்தில் தாங்கும் கோணம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூறுகளின் நிகழ்வெண்ணின் எண்ணளவிற்கு ஏற்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

செயல்முறை:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கு வட்ட விளக்கப்படம் வரைய கீழ்க்காணும் வழிமுறைகளைப் பயன்படுத்துக.

(i) மொத்த அலைவெண் N ஐ கணக்கிடுக.

(ii) ஒவ்வொரு கூறுகளின் கோணத்தையும் பிரிவு நிகழ்வெண்

$\frac{\text{பிரிவு நிகழ்வெண்}}{N} \times 360$ என்ற வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுக.

(iii) தேவையான அளவு ஆரத்தை கிடைமட்டமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

(iv) முதல் கூறின் கணக்கிட்ட கோணத்தைக் கொண்டு கடிகார எதிர் திசையில் முதல் வட்டகோணப் பகுதியை வரைக.

(v) இரண்டாவது கூறின் கோணத்திற்கு தொடர்புடைய வட்ட கோணப்பகுதியை முதல் வட்டக்கோணப்பகுதிக்கு அடுத்து இருக்குமாறு வரைய வேண்டும்.

(vi) கூறுகளுக்கும் இம்முறையை பயன்படுத்தவும்.

(vii) ஒவ்வொரு வட்டக்கோணப்பகுதிக்கும் வெவ்வேறு வண்ணம் தீட்டுக / நிழலிடுக.

(viii) ஒவ்வொரு கூறுக்கும் படக்குறிப்பு குறிப்பிட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6

கீழே கொடுக்கப்பட்ட தரவுகள் (ரூ நூறில்) ஒரு குடும்பத்தின் செலவினங்களைக் குறிப்பிடுகிறது. இதற்கு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

இனங்கள்	செலவு (ரூ நூறில்)
உணவு	87
உடை	24
பொழுதுபோக்கு	11
கல்வி	13
வாடகை	25
இதர செலவுகள்	20

(i) கல்வி செலவிற்கான வட்டகோணப்பகுதியில் கோணம் காண்க.

(ii) வாடகைக்கும் பொழுதுபோக்கிற்கும் இடையே உள்ள கோண வேறுபாட்டை காண்க.

தீர்வு:

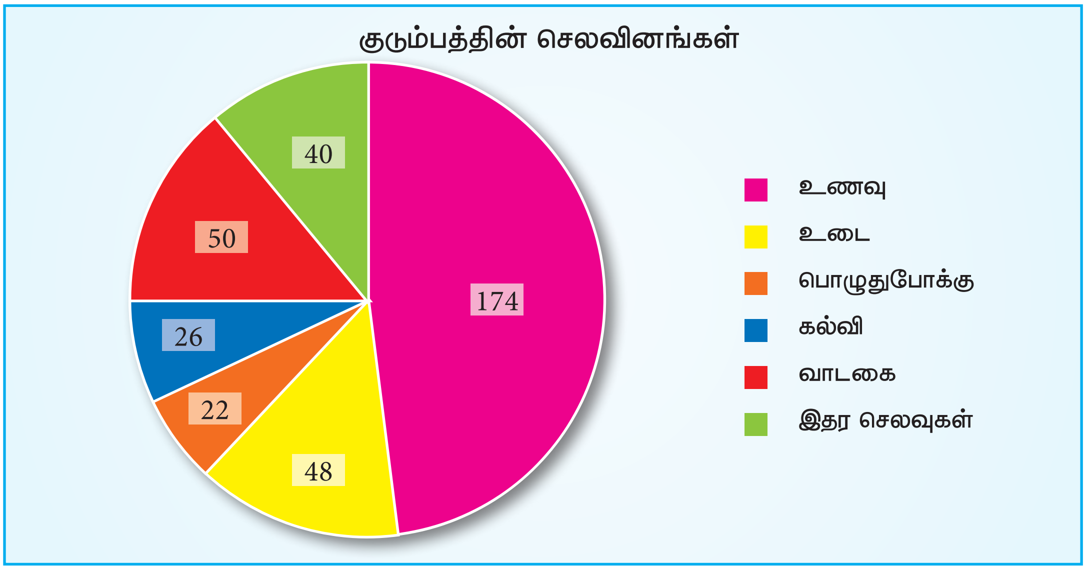
வட்ட விளக்கப்படம் வரைய ஒவ்வொரு கூறின் கோணத்தை

$\frac{\text{கூறின் நிகழ்வெண்}}{N} \times 360$ என்ற வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி கணக்கிடுக.

இனங்கள்	செலவு (ரூ நூறில்)	கோணம்
உணவு	87	$\frac{87}{180} \times 360 = 174$
உடை	24	$\frac{24}{180} \times 360 = 48$
பொழுதுபோக்கு	11	$\frac{11}{180} \times 360 = 22$
கல்வி	13	$\frac{13}{180} \times 360 = 26$
வாடகை	25	$\frac{25}{180} \times 360 = 50$
இதர செலவுகள்	20	$\frac{20}{180} \times 360 = 40$
மொத்தம்	N=180	360

- மொத்த நிகழ்வெண்ணைக் கணக்கிடுக. N என்க.
- ஒவ்வொரு பகுதிக்கான கோணம் = (பிரிவு இடைவெளி / N) X 360
- தேவையான ஆரமுடைய வட்டம் ஒன்றை வரைக.
- கடிகாரமுள் எதிர்திசையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட கோண அளவு கொண்டு "உணவு" பகுதியை அமைக்க.
- முதல் பகுதிக்கு அடுத்த கோண அளவு கொண்டு "உடை" பகுதியை அமைக்க.
- இதேபோன்று பொழுதுபோக்கு, கல்வி, வாடகை மற்றும் இதரசெலவுகள் ஆகியவற்றை அமைக்க.
- ஒவ்வொரு பகுதியையும் வண்ணமிடுக.
- அனைத்திற்கும் படக்குறிப்பு விளக்கங்கள் கொடுக்கவும்.

வட்ட விளக்கப்படம்



(i) கல்வி செலவினத்துக்கான வட்டக்கோணப்பகுதியின் கோணம் 26°

(ii) வாடகையை விட பொழுதுபோக்கு 28° குறைந்துள்ளது

4.3.7 உருவ விளக்கப்படம் (Pictogram)

புள்ளி விவர தரவுகளை உருவங்கள் மூலம் விளக்குவது உருவ விளக்கப்படம் எனப்படும். இவை கவனத்தை ஈர்க்கும் தன்மையுடையது, புரிந்துகொள்வது எளிது. விளம்பரம் செய்ய உருவ விளக்கப்படம் அதிகம் பயன்படுகிறது. எனவே இவை பொருட்காட்சிகளில் காணப்படுகிறது. அரசு அமைப்புகள், தனியார் நிறுவனங்கள் அதிக அளவில் இவற்றை பயன்படுத்துகின்றன. தேவைப்படின் அளவுத்திட்டங்களை நிர்ணயித்துக்கொள்ளலாம்.

காட்சிப்படுத்துவதில் நன்மைகள் இருப்பினும், தரவுகளுக்கு ஏற்ற உருவப்படங்கள் வரையப்பட வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கு உட்பட்டது. சரியான எண்ணளவை விட தோராய மதிப்பையே இவ்வகைப் படங்கள் விளக்குகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 4.7

பின்வரும் அட்டவணை பல்வேறு ஆண்டுகளில் ஒரு ஏக்கரில் உற்பத்தியான கரும்பின் அளவு டன்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	2013	2014	2015	2016	2017
கரும்பு (ஒரு ஏக்கருக்கு டன்னில்)	10	13	9	15	18

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கு உருவ விளக்கப்படம் வரைக.

தீர்வு:

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கு கீழே உருவப்படங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 4.8

பின்வரும் உருவப்படத்தில் தொடர்வண்டியில் ஒரு வாரத்தில் சென்னையிலிருந்து இராமேஸ்வரம் செல்லும் பயணிகளின் எண்ணிக்கை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உருவப்படத்திலிருந்து,

(i) வாரத்தில் பயணம் செய்த பயணிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) தொடர் வண்டியில் எந்நாளில் அதிகக் கூட்டம் இருந்தது?

(iii) அதிகபட்சம் மற்றும் குறைந்த பட்சம் பயணம் செய்தவர்களுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடு காண்க.

தீர்வு:

(i) இங்கு என்ற உருவப்படத்தின் மொத்த எண்ணிக்கை 48, ஒவ்வொரு என்ற படமும் 100 நபர்களைக் குறிப்பதால் ஒரு வாரத்தில் பயணம் செய்த மொத்த பயணிகளின் எண்ணிக்கை $48\times100=4800$.

(ii) தொடர்வண்டியில் வியாழக்கிழமை அதிகக்கூட்டம் இருந்தது.

(iii) வியாழக்கிழமையன்று அதிகபட்ச பயணிகள் பயணம் செய்தனர்.

வியாழக்கிழமை பயணம் செய்த பயணிகளின் எண்ணிக்கை $10\times100 = 1000$

புதன்கிழமையன்று குறைந்தபட்ச பயணிகள் பயணம் செய்தனர்.$= 4$

புதன்கிழமை பயணம் செய்த பயணிகளின் எண்ணிக்கை $4\times100=400$

அதிகபட்சம் மற்றும் குறைந்தபட்சம் பயணம் செய்தவர்களுக்கு இடையேயான வேறுபாடு$1000-400 = 600$ நபர்கள்.

4.4 வரைபடங்களின் வகைகள்

அளவுகளைக் கொண்ட மாறியின் நிகழ்வெண் பரவலின் புள்ளியியல் இயல்பை வெளிக் கொணர வரைபடமுறை உதவுகிறது. அளவை மாறி தனித்த மாறியாகவோ தொடர்ச்சியான மாறியாகவோ இருக்கலாம். பொதுவாக அதிகம் பயன்படுத்தப்படும் வரைபடங்கள்

(i) பரவல் செவ்வகப்படம் (Histogram)

(ii) நிகழ்வெண் பண்முகவரைபடம் (Frequency Polygon)

(iii) நிகழ்வெண் வளைகோடு (Frequency Curve)

(iv) கூட்டுநிகழ்வெண் வளைகோடு (Cumulative Frequency Curves (Ogives))

4.4.1 பரவல் செவ்வகப்படம் (Histogram)

பரவல் செவ்வகப்படம் என்பது பட்டைகள் ஒன்றோடொன்று இணைந்த வரைபடம். இது நிகழ்வெண் பரவல் எவ்வாறு பரவி உள்ளது என்பதைக் காட்சிப்படுத்துகிறது.

பிரிவு இடைவெளிகளை X அச்சிலும், நிகழ்வெண்களை Y அச்சிலும் எடுத்துக்கொள்க. ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியில் வரையப்படும் நிலைகுத்துப்பட்டைகளின் உயரங்கள் அப்பிரிவு நிகழ்வெண்ணின் விகிதத்தில் இருக்குமாறு வரைய வேண்டும்.

வரம்புகள் (Limitations):

திறந்த பிரிவு இடைவெளி பரவல்களுக்கு பரவல் செவ்வகப்படம் வரைய இயலாது. பிரிவு இடைவெளிகள் சமமற்று இருந்தால் பரவல் செவ்வகப்படம், பரவலைப் பற்றிய தவறான கருத்துக்கு வழிவகுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.9

ஒரு வகுப்பில் உள்ள 50 மாணவர்களின் உயரங்கள் (செ.மீ இல்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதற்கு பரவல் செவ்வகப்படம் வரைக.

உயரம்	111 – 120	121 – 130	131 – 140	141 – 150	151 – 160	161 – 170
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	11	15	9	8	3

பரவல் செவ்வகப்படத்தின் உயரமான பட்டையிலிருந்து நீ என்ன புரிந்து கொண்டாய்?

தீர்வு :

பரவல் செவ்வகப்படம் மாணவர்களின் உயரம் மற்றும் எண்ணிக்கையின் பரவலைக் காட்சிப்படுத்த வரையப்படுகிறது.

படி 1 : X அச்சில் உயரத்தைக் குறித்து 'உயரம் (செ.மீ)' எனக் குறிப்பிடுக.

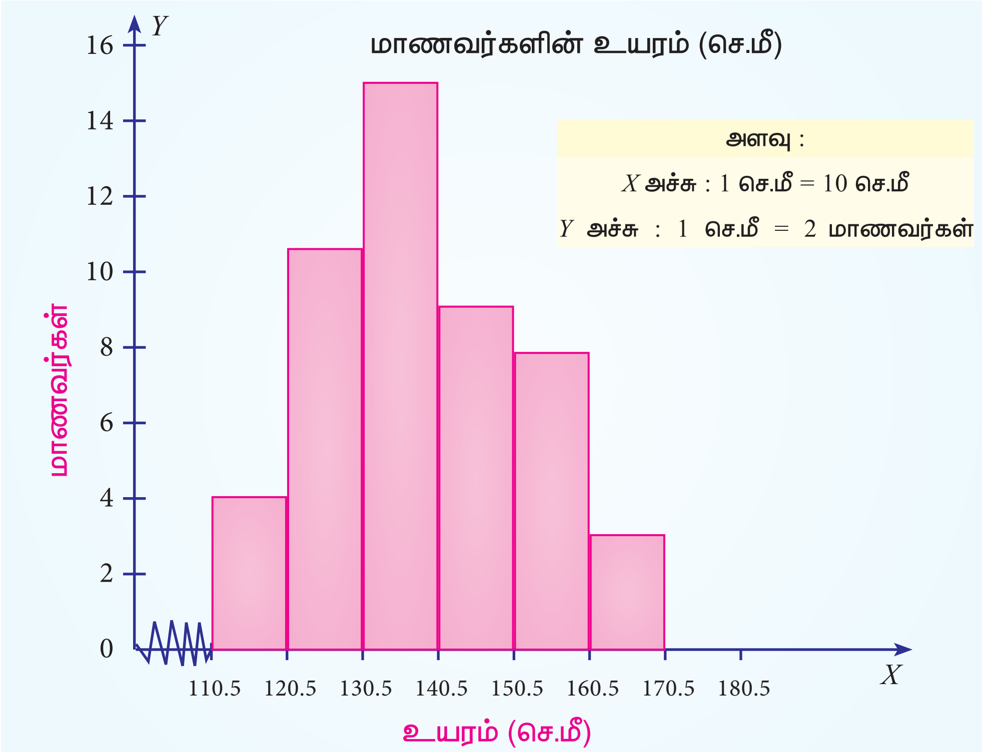
படி 2 : Y அச்சில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறித்து 'மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை)' எனக் குறிப்பிடுக.

படி 3 : மாணவர்களின் உயரத்திற்கான பிரிவு இடைவெளியில் வரையக்கூடிய ஒன்றுடன் ஒன்று இணைந்த நிலைக்குத்துப் பட்டைகளின் உயரம் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையின் விகிதத்தில் இருக்குமாறு வரைக.

இதற்கான பரவல் செவ்வகப்படம் படம் 4.7 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பரவல் செவ்வகப்படம் வரைய பரவலானது தொடர்ச்சியான பரவலாக இருக்கவேண்டும். தொடர்ச்சியான பரவலாக இல்லையெனில் தொடர்ச்சியான பரவலாக மாற்றுக.

உயரம் (செ.மீ)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
110.5 - 120.5	4
120.5 - 130.5	11
130.5 - 140.5	15
140.5 - 150.5	9
150.5 - 160.5	8
160.5 - 170.5	3



படம் 4.6 மாணவர்களின் உயரங்களின் பரவல் செவ்வகப்படம்.

(i) உயரமான பட்டை, மாணவர்களின் உயரம் 130.5 செ.மீ– 140.5 செ.மீ இடைவெளியில் அதிகமாக உள்ளனர் என்பதைக் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.10

பின்வரும் அட்டவணையானது ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மாணவர்கள் பள்ளிக்கு வர எடுத்துக் கொண்ட காலஅளவை (நிமிடம்) குறிக்கிறது.

காலஅளவு	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	25	40	17	13

பரவல் செவ்வகப்படம் வரைக. மேலும் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) 15 நிமிடத்திற்குள் பள்ளிக்கு வந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

(ii) 20 நிமிடத்திற்குமேல் பயணம் செய்து பள்ளிக்கு வந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

தீர்வு:

ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மாணவர்கள் பள்ளிக்கு வர எடுத்துக் கொண்ட காலஅளவை காட்சிப்படுத்த பரவல் செவ்வகப்படம் வரையப்படுகிறது.

படி 1 : X அச்சில் காலஅளவைக் குறித்து, 'காலஅளவு' எனக் குறிப்பிட வேண்டும்.

படி 2 : Y அச்சில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறித்து,"மாணவர்களின் எண்ணிக்கை"எனக் குறிப்பிட வேண்டும்.

படி 3 : காலஅளவின் பிரிவு இடைவெளியில் வரையக்கூடிய ஒன்றுடன் ஒன்று இணைந்த நிலைகுத்துப் பட்டைகளின் உயரம் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையின் விகிதத்தில் இருக்குமாறு வரைக.

படம் 4.8 இல் பரவல் செவ்வகப்படம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) 15 நிமிடத்திற்குள் பள்ளிக்குவந்தமாணவர்களின் எண்ணிக்கை 5+25+40=70

(ii) 20 நிமிடத்திற்குமேல் பயணம் செய்து பள்ளிக்கு வந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 13

எடுத்துக்காட்டு 4.11

கீழ்க்காணும் அட்டவணை 100 நபர்களின் தினசரிக்கூலி (ரூபாயில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்குபரவல் செவ்வகப்படம் வரைக.

தினக்கூலி (ரூ)	0 – 50	50 – 100	100 – 200	200 – 250	250 – 450	450 – 500
நபர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	16	7	48	14

மேலும் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) ரூ .200 ம் அதற்குக் குறைவாகவும் (அதிகபட்சம் ரூ.200) தினக்கூலி பெறும் நபர்களின் எண்ணிக்கை

(ii) ரூ. 50 க்கு மேல் தினக்கூலி பெறும் நபர்களின் எண்ணிக்கை

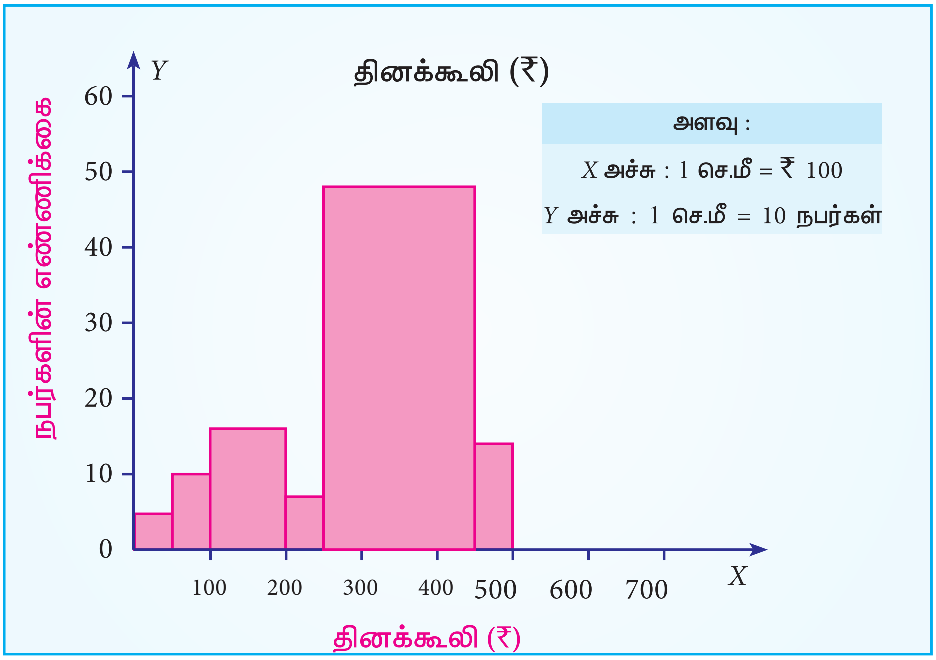
தீர்வு:

தினக்கூலிபெறும் 100 நபர்களின் பரவலைக் காட்சிப்படுத்த பரவல் செவ்வகப்படம் வரையப்படுகிறது.

படி 1 : X அச்சில் தினக்கூலி எனக் குறித்து, 'தினக்கூலி'எனக் குறிப்பிடவேண்டும்.

படி 2 : அச்சில் நபர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறித்து, 'நபர்களின் எண்ணிக்கை' எனக் குறிப்பிடவேண்டும்.

படி 3 : தினக்கூலியின் பிரிவு இடைவெளியில் வரையக்கூடிய ஒன்றுடன் ஒன்று இணைந்த நிலைகுத்துப் பட்டைகளின் உயரம் நபர்களின் எண்ணிக்கையின் விகிதத்தில் இருக்குமாறு வரைக.



படம் 4.7 நபர்களின் தினக்கூலிக்கான செவ்வக விளக்கப்படம்

(i) ரூ. 200 –ம் அதற்குக் குறைவாகவும் தினக்கூலி பெறும் நபர்களின் எண்ணிக்கை 5+10+16=31

(ii) ரூ. 250 க்குமேல் தினக்கூலிபெறும் நபர்களின் எண்ணிக்கை 48+14=62

4.4.2 நிகழ்வெண் பன்முகவரைபடம் (Frequency Polygon)

கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலுக்கு பரவல் செவ்வகப்படம் வரைந்து, பின்னர் நிகழ்வெண் பன்முகவரைபடம் வரைய வேண்டும். நிகழ்வெண் பன்முக வரைபடம் ஏற்படுத்தும் பரப்பானது செவ்வகப்படத்தின் பரப்பிற்கு சமம். பன்முகவரைபடத்தின் முனைகள் அப்பிரிவு அலைவெண்ணைக் குறிக்கும். நிகழ்வெண்பன்முகவரைபடம் மிக உயர்ந்த அலைவெண் உடையபிரிவைத் தீர்மானிக்க உதவுகிறது. இது தரவுகளின் போக்கைக் காட்டுகிறது. நிகழ்வெண் பன்முகவரைபடம் வரைய பின்வரும் வழிமுறைகள் பின்பற்றப்படுகின்றன.

(i) பிரிவு இடைவெளியைக் குறிக்கும் ஒவ்வொரு செவ்வகப்பட்டையின் உச்சியில் மையப்புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

(ii) மையப்புள்ளிகளை கோட்டுத்துண்டுகள் மூலம் இணைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.12

ஒரு நிறுவனத்தின் 2011 முதல் 2016 வரை கிடைத்த நிகர இலாபம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	2011 -2012	2012 – 2013	2013 – 2014	2014 – 2015	2015 - 2016
நிகர இலாபம் (ரூ. இலட்சத்தில்)	100	112	120	133	117

மேலே குறிப்பிட்ட தரவுக்கு நிகழ்வெண் பன்முகவரைபடம் வரைக.

தீர்வு:

மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண் உடைய பிரிவைக் காண்பதற்கு ஒரு நிறுவனத்தின் 2011 முதல் 2016 வரை கிடைத்த நிகர இலாபத்தைக் காட்ட நிகழ்வெண் பன்முகவரைபடம் உதவுகிறது. இப்படம் தரவுகளின் போக்கைக் காட்டுகிறது.

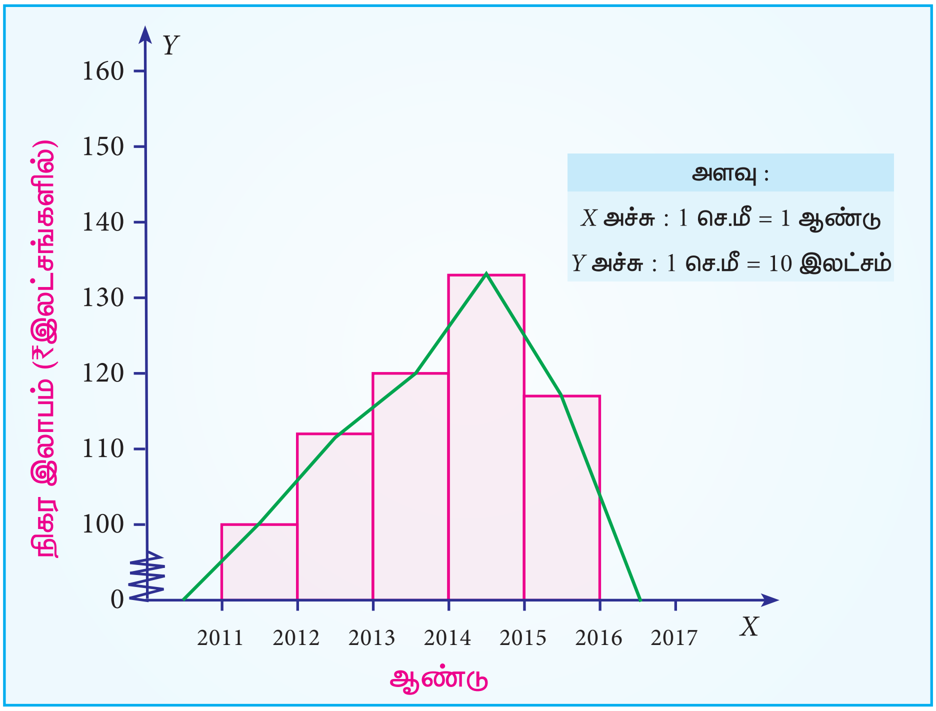
நிகழ்வெண் பன்முகவளைவரை வரைய பின்வரும் வழிமுறைகள் பின்பற்றப்படுகின்றன.

படி 1 : X அச்சில் ஆண்டுகளைக் குறித்து, 'ஆண்டு' எனக் குறிப்பிடுக.

படி 2 : Y அச்சில் நிகர இலாபத்தைக் குறித்து 'நிகர இலாபம் (ரூ.இலட்சங்களில்)' எனக் குறிப்பிடுக.

படி 3 : பரவல் செவ்வகப்பட்டைகளின் பட்டைகளின் மையப்புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

படி 4 : மையப்புள்ளிகளை கோட்டுத்துண்டுகளால் இணைக்கவும்.



படம் 4.8: 2011 – 2016 ஆண்டுகளின் நிகர இலாபத்தின் நிகழ்வெண் பன்முகவரைபடம்

4.4.3 நிகழ்வெண் வளைகோடு (Frequency Curve)

அலைவெண் பரவலை குறிக்க மென்மையாக தடங்கலினின்றி வரையப்படும் பரவலை குறிக்க ஒரு வளைவரை நிகழ்வெண் வளைகோடு ஆகும். நிகழ்வெண் பன்முகவரைபடத்தின் முனைகளை கையால் வளைகோடு கொண்டு வரைவதாகும். நிகழ்வெண் வளைகோடானது நிகழ்வெண் பன்முகவரைபடம் மற்றும் பரவல் செவ்வகப்படம் ஆகியவற்றை காட்டிலும் தரவுகளின் பண்புகளைப் பற்றி புரிந்துக் கொள்ள உதவுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.13

ஓய்வூதியதாரர்களின் வயது பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தரவுகளுக்கு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைக.

வயது	65 - 70	70 - 75	75 - 80	80 - 85	85 - 90
ஓய்வூதியதாரர்களின் எண்ணிக்கை	38	45	24	10	8

தீர்வு:

ஓய்வூதியதாரர்கள் மற்றும் அவர்களின் வயதிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பை நன்கு புரிந்து கொள்ள வரையப்படும் வரைபடம் நிகழ்வெண் பண்முகவரைபடத்தைக் காட்டிலும் நிகழ்வெண் வளைகோடு சிறந்தது என்பதால் நிகழ்வெண் வளைகோடு வரையப்பட்டுள்ளது.

நிகழ்வெண் வளைகோட்டைப் பின்வரும் வழிமுறைகளைப் பின்பற்றி வரையவும்.

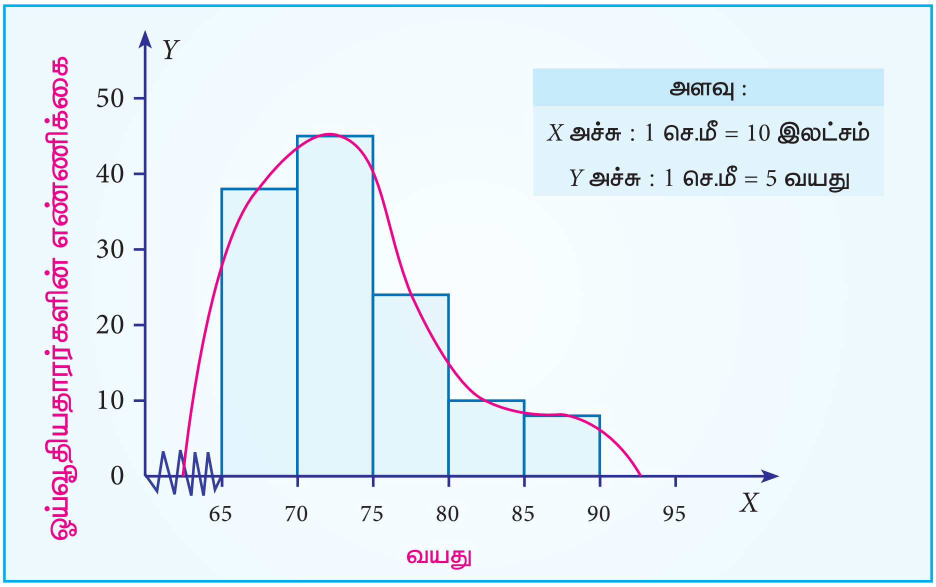
படி 1 : X அச்சில் வயதைக் குறித்து, 'வயது' எனகுறிப்பிடவும்.

படி 2 : Y அச்சில் ஓய்வூதியதாரர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறித்து, 'ஓய்வூதியதாரர்கள்' என குறிப்பிடவும்.

படி 3 : பரவல் செவ்வகப்படத்தின் ஒவ்வொரு பட்டையின் மையப்புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

படி 4 : நிகழ்வெண் பண்முகவளைகோட்டின் உச்சிகளை மென்மையான வளைகோட்டால் சேர்க்கவும்.

படம் 4.11 இல் நிகழ்வெண் வளைகோடு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 4.9 ஓய்வூதியதாரர்கள் மற்றும் அவர்களின் வயதிற்கு வரையப்பட்ட நிகழ்வெண் வளைகோடு.

4.4.4 குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு (Cumulative frequency curve or Ogive)

குவிவு நிகழ்வெண் பரவலைக் குறிப்பதற்கு குறிக்க குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரையப்படுகிறது. நிகழ்வெண் வளைகோடு இரண்டு வகைப்படும். அவை

(i) கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு (Less than Ogive)

(ii) மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு (More than Ogive)

இவ்வளைகோடு வரைய நாம் 'கீழின குவிவு நிகழ்வெண்ணையும்' மற்றும் 'மேலின குவிவு நிகழ்வெண்ணையும்' கணக்கிட வேண்டும். குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைய பின்வரும் வழிமுறைகள் பின்பற்றப்பட வேண்டும்.

கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு (Less than Ogive):

ஒவ்வொரு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண் தொடர்புடைய பிரிவின் மேல் எல்லைக்கு எதிராகக் குறிக்கப்படுகிறது. அனைத்து புள்ளிகளையும் இணைத்து வளைகோடு வரைய கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு கிடைக்கும்.

மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு (More than Ogive):

ஒவ்வொரு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண் தொடர்புடைய பிரிவின் கீழ் எல்லைக்கு எதிராக குறிக்கப்படுகிறது. அனைத்து புள்ளிகளையும் இணைத்து வளைகோடு வரைய மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு கிடைக்கும்.

இரண்டு வளைகோடுகளையும் வெவ்வேறு வரைபடத்தாளிலோ அல்லது ஒரே வரைபடத்தாளிலோ வரையலாம். இரண்டு வளைகோடுகளையும் ஒரே வரைபடத்தாளில் வரைந்தால், அவை வெட்டும் புள்ளியின் X ஆயத் தொலைவு இடைநிலை அளவாகும்.

> மையப்போக்களவையான இடைநிலை அளவு கொடுக்கப்பட்ட தரவு / பரவலை இரண்டு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும். இடைநிலை அளவு பற்றி ஐந்தாம் பாடத்தில் விரிவாக விவாதிக்கப்படும்

வளைகோடுகள் தனியாக வரையப்பட்டால் இடைநிலை அளவை பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

$y=N/2$ இல் Y-க்கு செங்குத்துக்கோடு வரைக. அது கூட்டு நிகழ்வெண் வளைகோட்டை C இல் சந்திக்கும். C இலிருந்து X அச்சுக்கு செங்குத்துக்கோடு வரைக. அது X அச்சை M இல் சந்திக்கும். M இன் X ஆயத் தொலைவு தரவுகளின் இடைநிலை அளவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.14

1) கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைக.

தினக்கூலி (ரூபாயில்)	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	12	18	35	42	50	45	20	8

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்

(i) இடைநிலை அளவு காண்க.

(ii) ரூ.125 க்கு கீழ் தினக்கூலி வாங்கும் வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை காண்க.

தீர்வு:

நாம் தினக்கூலி மற்றும்; வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை பரவல் பற்றி கூறுவதால் குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைவதன் மூலம் தினக்கூலி மற்றும்; வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை பற்றி தெளிவாகப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைய பின்வரும் வழிமுறைகள் பின்பற்றப்பட வேண்டும்.

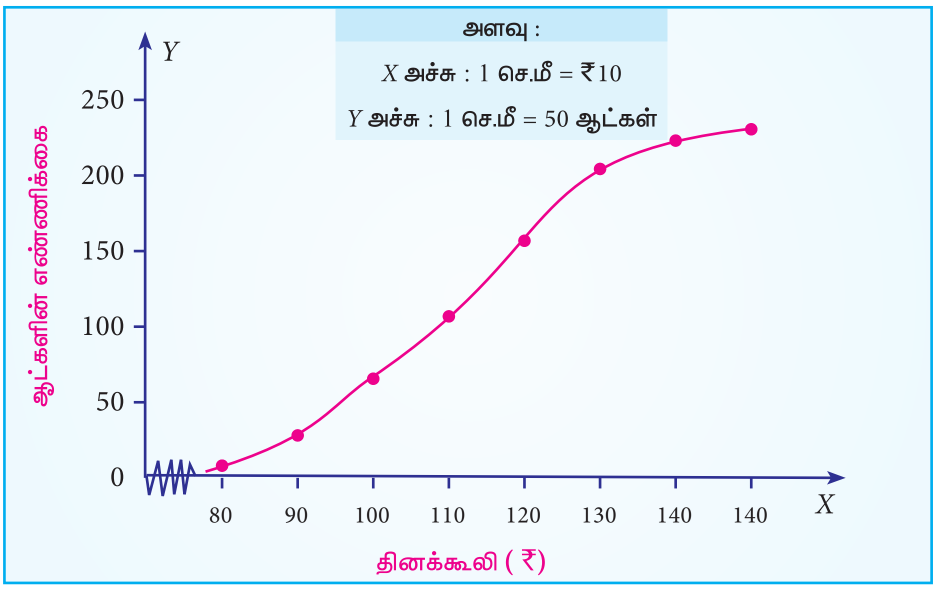
நிலை 1 : X அச்சில் தினக்கூலியைக் குறித்து, 'தினக்கூலி (ரூ)' என்று குறிப்பிட வேண்டும்.

நிலை 2 : Y அச்சில் வேலையாட்களின் எண்ணிக்கையைக் குறித்து, 'வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை' என்று குறிப்பிட வேண்டும்.

நிலை 3 : தினக்கூலியின் மேல் எல்லையை எடுத்துக் கொண்டு கீழின குவிவு நிகழ்வெண் காண்க. தினக்கூலியின் பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லைக்கு எதிரான குவிவு நிகழ்வெண் தினக்கூலியின் எல்லைக்கு கீழே உள்ள வேலையாட்களின் கூடுதலாகும்.

நிலை 4 : தினக்கூலி (மேல் எல்லை) மற்றும் அதற்கு எதிரான கீழின குவிவு நிகழ்வெண் இவற்றைப் புள்ளிகளாக் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை இணைத்து கீழின வளர் நிகழ்வெண் வரைக.

தினக்கூலி (குறைவாக)	80	90	100	110	120	130	140	150
வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	12	30	65	107	157	202	222	230



படம் 4.10

தினக்கூலி மற்றும் வேலையாட்களின் எண்ணிக்கைக்கான கீழின குவிவு வளைகோடு.

(i) இடைநிலை அளவு =ரூ120

(ii) 183 வேலையாட்கள் ரூ.125 க்கு குறைவாக தினக்கூலி பெறுகிறார்கள்

எடுத்துக்காட்டு 4.15

ஒன்பதாம் வகுப்பு படிக்கும் 120 மாணவர்களின் சுழற்சி தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு மேலின குவிவுவளைகோடுவரைக.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	6	8	20	30	22	18	8	4	2

மேலும் (1) இடைநிலைஅளவு காண்க.

(2) 75 மதிப்பெண்களுக்குமேல் மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை காண்க.

தீர்வு:

நாம் மதிப்பெண்கள் மற்றும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை பற்றி கூறுவதால் மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைவதன் மூலம் மதிப்பெண்கள் மற்றும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை பற்றி தெளிவாகப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

மேலின குவிவுவளைகோடு வரைய பின்வரும் வழிமுறைகள் பின்பற்றப்படுகின்றன.

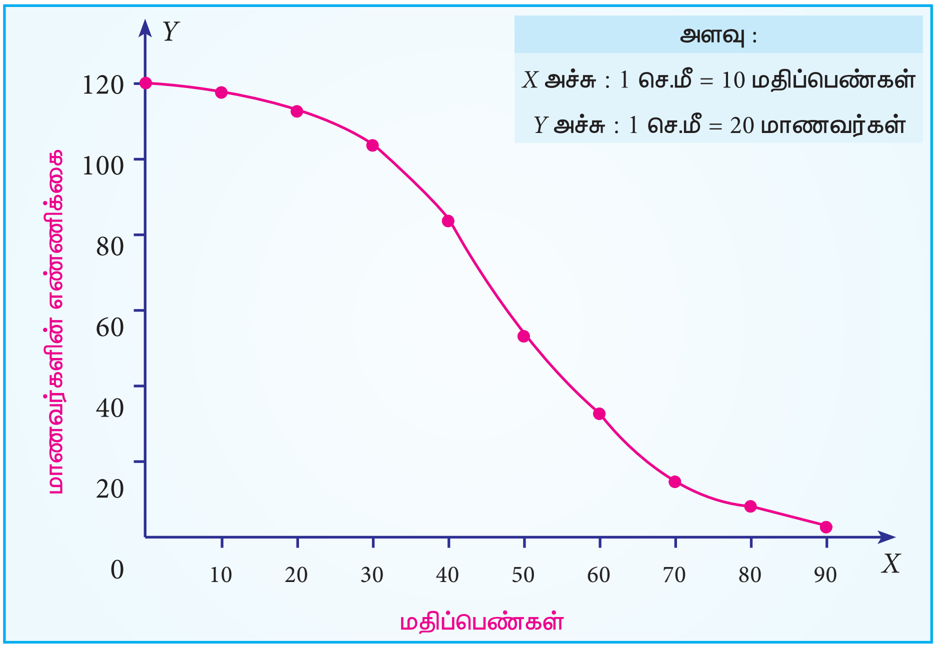
நிலை 1: X அச்சில் மாணவர்களின் மதிப்பெண்களைக் குறித்து, 'மதிப்பெண்கள்' என்று குறிப்பிட வேண்டும்.

நிலை2: Y அச்சில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறித்து, 'எண்ணிக்கை' என்று குறிப்பிட வேண்டும்.

நிலை3: மதிப்பெண்களின் கீழ் எல்லையை எடுத்துக் கொண்டு மேலின குவிவு நிகழ்வெண் காண்க. மதிப்பெண்களின் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லைக்கு எதிரான குவிவுநிகழ்வெண் மதிப்பெண்களின் எல்லைக்கு மேலே உள்ள மாணவர்களின் கூடுதலாகும்.

நிலை4: மதிப்பெண்கள் (கீழ் எல்லை) மற்றும் அதற்கு எதிரான மேலின குவிவு நிகழ்வெண் இவற்றைப் புள்ளிகளாகக் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை இணைத்து மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடுவரைக.

அதிகமான மதிப்பெண்கள்	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	120	118	112	104	84	54	32	14	6	2



படம் 4.11 மதிப்பெண்கள், மாணவர்களின் எண்ணிக்கைக்கான மேலின குவிவுவளைகோடு.

(i) இடைநிலைஅளவு = 47 மாணவர்கள்

(ii) 7 மாணவர்கள் 75 மதிப்பெண்களுக்குமேல் மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர்.

எடுத்துக்காட்டு 4.16

மாங்காய்களின் விளைச்சல் பின்வருமாறு பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளது. வரைபடத்தின் மூலம்

(i) 55 கி.கி க்கு அதிகமாக விளைச்சல் தரும் மாமரங்களின் எண்ணிக்கை காண்க.

(ii) 75 கி.கி க்கு அதிகமாக விளைச்சல் தரும் மாமரங்களின் எண்ணிக்கை காண்க.

இடைநிலை அளவு காண்க.

(iii) கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு, மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைக.

விளைச்சல் (கி.கி)	மரங்களின் எண்ணிக்கை
40 – 50	10
50 – 60	15
60 – 70	17
70 – 80	14
80 – 90	12
90 – 100	2
Total	70

தீர்வு:

நாம் விளைச்சல், மரங்களின் எண்ணிக்கையைப் பற்றி கூறுவதால் குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைவதன் மூலம் விளைச்சல் மற்றும் மரங்களின் எண்ணிக்கை பற்றி தெளிவாகப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைய பின்வரும் வழிமுறைகள் பின்பற்றப்பட வேண்டும்.

நிலை 1 : X அச்சில் மாங்காய்களின் விளைச்சலைக் குறித்து, 'விளைச்சல் (கி.கி)' என்று குறிப்பிட வேண்டும்.

நிலை 2 : Y அச்சில் மரங்களின் எண்ணிக்கையைக் குறித்து, 'மரங்களின் எண்ணிக்கை' என்று குறிப்பிட வேண்டும்.

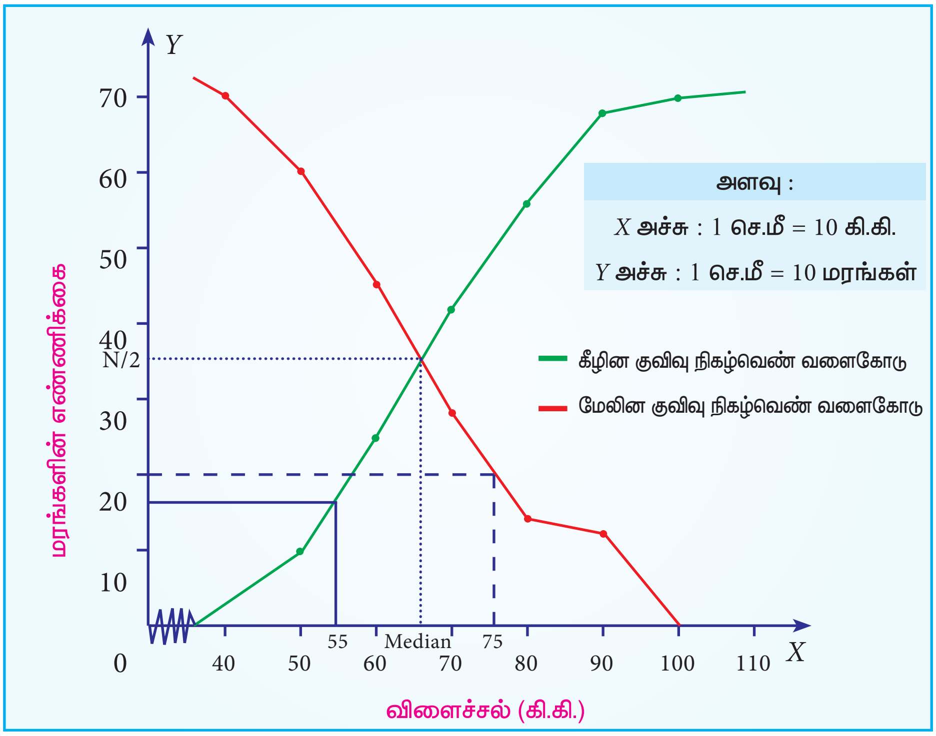
நிலை 3 : மாங்காய்களின் விளைச்சலின் மேல் எல்லையை எடுத்துக் கொண்டு கீழின குவிவு நிகழ்வெண் காண்க. மாங்காய்களின் விளைச்சல்களின் பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லைக்கு எதிரான குவிவு நிகழ்வெண் விளைச்சலின் எல்லைக்கு கீழே உள்ள மரங்களின் கூடுதலாகும்.

நிலை 4 : மாங்காய்களின் விளைச்சலின் கீழ் எல்லையை எடுத்துக் கொண்டு மேலின குவிவு நிகழ்வெண் காண்க. மாங்காய்களின் விளைச்சல்களின் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லைக்கு எதிரான குவிவு நிகழ்வெண் விளைச்சலின் எல்லைக்கு மேலே உள்ள மரங்களின் கூடுதலாகும்.

நிலை 5 : மாங்காய்களின் விளைச்சல் (மேல் எல்லை) மற்றும் அதற்கு எதிரான மேலின குவிவு நிகழ்வெண் இவற்றைப் புள்ளிகளாகக் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை இணைத்து கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைக.

நிலை 6 : மாங்காய்களின் விளைச்சல் (கீழ் எல்லை) மற்றும் அதற்கு எதிரான மேலின குவிவு நிகழ்வெண் இவற்றைப் புள்ளிகளாகக் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை இணைத்து மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைக.

கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு		மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு	
குறைவான விளைச்சல்	மரங்களின் எண்ணிக்கை	அதிகமான விளைச்சல்	மரங்களின் எண்ணிக்கை
50	10	40	70
60	25	50	60
70	42	60	45
80	56	70	28
90	68	80	14
100	70	90	2



படம் 4.12 மாங்காய்களின் விளைச்சல் மற்றும் மரங்களின் எண்ணிக்கைக்கான குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு

(i) 16 மாமரங்கள் 55 கி.கி க்கு குறைவாக விளைச்சல் தருகின்றன.

(ii) 20 மாமரங்கள் 75 கி.கி க்கு அதிகமாக விளைச்சல் தருகின்றன.

(iii) இடைநிலை அளவு = 66 கி.கி

4.5 விளக்கப்படம் மற்றும் வரைபடங்களுக்கும், அட்டவணைகளுக்கும் இடையேயான ஒப்பீடு

தரவுகள் அட்வணை மூலமாகவும், விளக்கப்படங்கள் மற்றும் வரைபடங்கள் மூலமாக விளக்கப்படுகின்றன. அட்டவணையின் பல்வேறு விதமான இயல்புகளை விளக்கப்படங்கள் மற்றும் வரைபடங்களுடன் பின்வருமாறு ஒப்பிடப்படுகின்றன.

(i) அட்டவணை சுருக்கமாக, மிகச் சரியான செய்திகளைத் தருகின்றன. ஆனால் விளக்கப்படங்கள், வரைபடங்கள் தோராயமான செய்திகளைத் தருகின்றன.

(ii) அட்டவணையானது விளக்கப்படங்கள் மற்றும் வரைபடங்களை விட அதிக செய்திகளை தருகின்றது.

(iii) அட்டவணையைப்படிக்கின்றபொழுதுமிகவும்கவனத்துடன்படிக்கவேண்டியுள்ளதால் அதனைக் கொண்டு விளக்கம் அளிப்பதுகடினம். ஆனால் விளக்கப்படத்திலும் வரைபடத்திலும் விளக்கம் அளிப்பது எளிது.

(iv) சாதாரண மனிதனுக்கு அட்டவணையை விட விளக்கப்படங்களும், வரைபடங்களும் அதிக கவர்ச்சியாக இருக்கிறது.

(v) பரவலில் பொதிந்துள்ள போக்கினை அட்டவணையைக் காட்டிலும் விளக்கப்படங்கள் மற்றும் வரைபடங்கள் மூலம் எளிதாக ஒப்பிடலாம்.

(vi) அட்டவணையை விட விளக்கப்படங்களும் வரைபடங்களும் எளிதில் தவறான புரிதலை ஏற்படுத்துகின்றன.

விளக்கப்படங்களுக்கும் வரைபடங்களுக்கும் இடையேயான ஒப்பீடு

(i) விளக்கப்படங்கள் சாதாரண தாளில் வரைய முடியும். ஆனால் வரைபடங்கள் வரைதாளில் மட்டும் வரைய முடியும்.

(ii) விளக்கப்படங்கள் மூலம் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்டமாறிகள் பற்றிய தகவல்களைப் பொருத்தமாகவும், திறம்படவும் வெளிப்படுத்தமுடியும். ஆனால் வரைபடத்தில் சாதாரணமாக ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகள் பற்றியதகவல்களைவரைவதுகடினம்.

(iii) வரைபடங்கள் இடைஇடுகைகள் மற்றும் / அல்லது புறமுக இடுகை செய்வதற்குப் பயன்படுகிறது. ஆனால் வரைபடங்கள் இச்செயல்களுக்குப் பயன்படுத்த இயலாது

(iv) வரைபடங்கள் மூலம் இடைநிலை அளவை சரியாகக் கணக்கிட இயலும். ஆனால் விளக்கப்படங்கள் மூலம் இடைநிலை அளவைக் கணக்கிட இயலாது.

(v) விளக்கப்படங்கள் தரவு / மாறிகளை ஒப்பிடப் பயன்படுகிறது. ஆனால் வரைபடங்கள் மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பினைக் காணப் பயன்படுகிறது.

நினைவில் கொள்க...

- ஒரு விளக்கப்படம் என்பது தரவுகளைப் பற்றியும் அதன் தொடர்புகளையும் எளிய முறையில் படம் பிடித்துக் காட்டுகிறது.
- எளிய பட்டை விளக்கப்படம் கிடைமட்டமாகவோ, நிலைக்குத்தாகவோ வரையப்படுகின்றன. தரவுகளை விளக்குவதற்கு வணிகம் மற்றும் பொருளியல் துறைகளில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.
- பெரிட்டோ வரைபடம் எளிய பட்டை விளக்கப்படத்தை ஒத்ததாகும். ஆனால் அவற்றின் பட்டைகள் அவற்றின் உயரங்களைப் பொறுத்து இறங்கு வரிசையில் அமைக்கப்படுகிறது. மேலும் மாறிகளின் குவிவு நிகழ்வெண்கள் சதவீதத்தில் நேர்கோட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.
- பல பட்டைகளால் அமைந்த பல கட்ட பட்டை விளக்கப்படம், இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளியியல் தகவல்களை ஒப்பிடுவதற்கு பயன்படுகிறது.
- கூறுபட்டை விளக்கப்படத்தில் உள்ள பட்டைகள், ஒன்றின் மீது ஒன்றாக அமைந்து பல புள்ளியியல் தரவுகளை ஒப்பிடுவதற்கு, பல கட்ட பட்டை விளக்கப்படங்களைப் போல் உதவுகிறது.
- விழுக்காடு அல்லது சதவீத பட்டை விலக்கப்படம், கூறுபட்டை விளக்கப்படத்தைப் போன்றதே ஆகும். இங்கு கூறுகளின் உயரங்கள் சதவீதங்களாகக் குறிப்பிடப்படுகின்றது.

- பட்டை விளக்கப் படம் வட்ட வடிவில் அமைந்துள்ள ஓர் படமாகும். 3600 கோணமுள்ள வட்டத்தைப் பல்வேறு வட்டக் கோணப்பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். வட்டக்கோணப் பகுதி மையத்தில் தாங்கும் கோணம், கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூறுகளின் நிகழ்வெண்களின் எண்ணளவுக்கு ஏற்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.
- புள்ளி விவரத் தரவுகளை உருவங்கள் மூலம் விளக்குவது உருவ விளக்கபடம் எனப்படும். இவை அனைவரது கவனத்தையும் எளிதில் ஈர்க்கும் தன்மை கொண்டதாகும்.
- பரவல் செவ்வகப் படம் என்பது பட்டைகள் ஒன்றோடொன்று இணைந்த வரைபடம். இது நிகழ்வெண் பரவல் எவ்வாறு பரவியுள்ளது என்பதைக் காட்சிப்படுத்துகிறது.
- நிகழ்வெண் பரவலைக் குறிக்க மென்மையாக வரையப்படும் ஒரு வளைவரை நிகழ்வெண் வளைகோடு ஆகும். நிகழ்வெண் பன்முக வரைபடத்தின் மையப்புள்ளிகளை கையால் மென்மையாக இணைத்து வளைகோடு வரைவதாகும்.
- குவிவு நிகழ்வெண் பரவலைக் குறிப்பதற்கு இரு முறைகளில் கீழினக் குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு, மேலினக் குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு, என்பவை வரைபடத்தில் குறிப்பிடப்படும்.
- இரு வளைகோடுகளையும் ஒரே வரைபடத்தாளில் வரைந்தால், அவை வெட்டும் புள்ளியின் X ஆயத்தொலைவு, இடைநிலை அளவாகும்.

6DQZ9Y

பயிற்சி

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க

1. பின்வருவனவற்றுள் எந்த பட்டை விளக்கப்படம் ஒரே உயரத்தில் இருப்பதைக் காட்டுகிறது.
   (a) எளிய பட்டை விளக்கப்படம் (b) விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம்
   (c) கூறுபட்டை விளக்கப்படம் (d) பலகட்டப்பட்டை விளக்கப்படம்

2. பின்வரும் விளக்கப்படங்களில் எது தரவுகளை உருவங்கள் மூலம் விளக்கப்படுகிறது.
   (a) உருவ விளக்கப்படம் (b) பெரிட்டோ வரைபடம்
   (c) வட்ட விளக்கப்படம் (d) பரவல் செவ்வகப்படம்

3. எந்த விளக்கப்படத்தில் தரவுகள் கோணங்களாக மாற்றப்படுகிறது.
   (a) உருவ விளக்கப்படம் (b) பெரிட்டோ வரைபடம்
   (c) வட்ட விளக்கப்படம் (d) பரவல் செவ்வகப்படம்

4. பின்வரும் விளக்கப்படங்களில் எந்த விளக்கப்படத்தில் அதன் உயரத்திற்கு ஏற்ப இறங்கு வரிசையில் அமைக்கப்படுகிறது
   (a) உருவ விளக்கப்படம் (b) பெரிட்டோ வரைபடம்
   (c) வட்ட விளக்கப்படம் (d) பரவல் செவ்வகப்படம்

5. பல் அங்க பட்டை விளக்கப்படத்தில் பட்டைகள் -------------- இருக்கின்றன.
   (a) கூறுகளாக (b) அடுத்தடுத்து
   (c) கூறுகளாகவும் அடுத்தடுத்தும் (d) கூறுகளாகவும,; சமமாகவும்

6. எந்த வரைபடத்தில் பட்டைகளின் உயரங்கள் நிகழ்வெண்களின் கூடுதலுக்கு விகிதமாக இருக்கின்றன.

(a) எளிய பட்டை விளக்கப்படம் (b) விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம்

(c) கூறுபட்டை விளக்கப்படம் (d) பலகட்டப்பட்டை விளக்கப்படம்

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

7. -------------- என்பது இடை இடுகை மற்றும் புற இடுகைக்குப் பயன்படுகிறது.

8. பரவல் செவ்வகப்படத்திலிருந்து நிகழ்வெண் வளைகோடு ----------- வரையப்படும் ஒரு வளைவரையாகும்.

9. தரவுகளைப் படங்கள் மூலம் விளக்கும் விளக்கப்படம் ---------------

10. வட்ட வடிவ வரைபடம் என்பது -------------- எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

11. கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரையப்படும் பொழுது குவிவு நிகழ்வெண்கள் --------------- தொடர்புடைய பிரிவு இடைவெளிகளுக்கு எதிராக குறிக்கப்படுகிறது.

12. -------------- வளைகோடு குவிவு நிகழ்வெண் தொடர்புடைய பிரிவுகளின் கீழ் எல்லைக்கு எதிராக குறிக்கப்படுகிறது.

13. கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடும், மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோடும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி -------------- ஆகும்.

14. நிகழ்வெண் பண்முக வளைவரைபடத்தின் முனைகளை ------------ செய்வதன் மூலம் நிகழ்வெண் வளைகோடு வரையப்படுகிறது.

15. நிகழ்வெண் பண்முக வளைவரை ----------- இருந்து வரையப்படுகிறது.

16. நிகழ்வெண் பண்முக வரைபடத்தின் கீழ் உள்ள பரப்பும் மற்றும் பரவல் செவ்வகப்படத்தின் பரப்பும் --------------

III. குறு வினா (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி)

17. விளக்கப்படம் என்றால் என்ன?

18. வரைபடம் என்றால் என்ன?

19. விளக்கப்படத்தின் வகைகளைக் கூறுக.

20. வரைபடங்களின் வெவ்வேறு வகைகளை எழுதுக.

21. எளிய பட்டை விளக்கப்படத்தின் பயன்களை எழுதுக.

22. எளிய பட்டை விளக்கப்படத்திற்கும் பெரிட்டோ வரைபடத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடுகளை எழுதுக.

23. குவிவு நிகழ்வெண் வளைகோட்டின் வகைகளை எழுதுக.

24. வட்ட விளக்கப்படத்தின் கூறுகளின் கோணங்கள் காண்பதற்கான சூத்திரத்தை எழுதுக.

25. உருவ விளக்கப்படத்தின் மூலமாக தரவுகளை எவ்வாறு அளிக்கலாம்?

26. பலகட்ட பட்டை விளக்கப்படத்திற்கும் கூறுபட்டை விளக்கப்படத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடுகளை எழுதுக.

IV. சிறு வினா (ஓரிரு சொற்றொடரில் விடையளி)

27. வட்ட விளக்கப்படம் வரைவதற்கான வழிமுறைகளை எழுதுக.

28. விளக்கப்படம் மற்றும் வரைபடம் வரைவதற்கான முக்கியத்துவத்தை எழுதுக.

29. விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படத்தின் சிறப்பியல்புகள் யாது?

30. வகைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகளுக்கு செவ்வகப்பட்டை விளக்கப்படம் வரையும் வழிமுறைகளை எழுதுக.

31. அட்டவணை தரவுகளை விளக்கப்படம் மற்றும் வரைப்படத்திலிருந்து வேறுபடுத்திக் காட்டும் இரண்டு சிறப்பான வேறுபாடுகளை எழுதுக.

32. குவிவு நிகழ்வெண் வளைக்கோட்டின் இரண்டு வகைகளை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

V. விரிவான விடையளி.

33. விளக்கப்படம் வரைவதற்கான பொது விதிகளை எழுதுக?

34. ஒரு நிறுவனம் 2011 – 2016 ஆண்டுகளில் ஈட்டிய இலாபம் (ரூ1000களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு எளிய பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

ஆண்டு	இலாபம் (ரூ '000')
2011	15000
2012	18000
2013	20000
2014	16000
2015	13000
2016	17000

மேலும்

(a) எந்த ஆண்டு நிறுவனத்திற்கு அதிக பட்சம் இலாபம் கிடைத்தது?\

(b) எந்த ஆண்டு நிறுவனத்திற்கு குறைந்த பட்சம் இலாபம் கிடைத்தது?

(c) 2012 மற்றும் 2013 ஆம் ஆண்டுகளில் ஈட்டிய இலாபத்திற்கு இடையேயான வேறுபாட்டை எழுதுக.

35. கடை A மற்றும் கடை B இன் மாதாந்திர செலவு (ரூ1000களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது அதற்கு பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

செலவினங்கள்	செலவுத்தொகை (ரூபாயில்)	
	கடை A	கடை B
வாடகை	10	18
ஊதியம்	70	90
மின்கட்டணம்	20	35
இதர செலவுகள்	10	15
இதர செலவுகள்	5	7

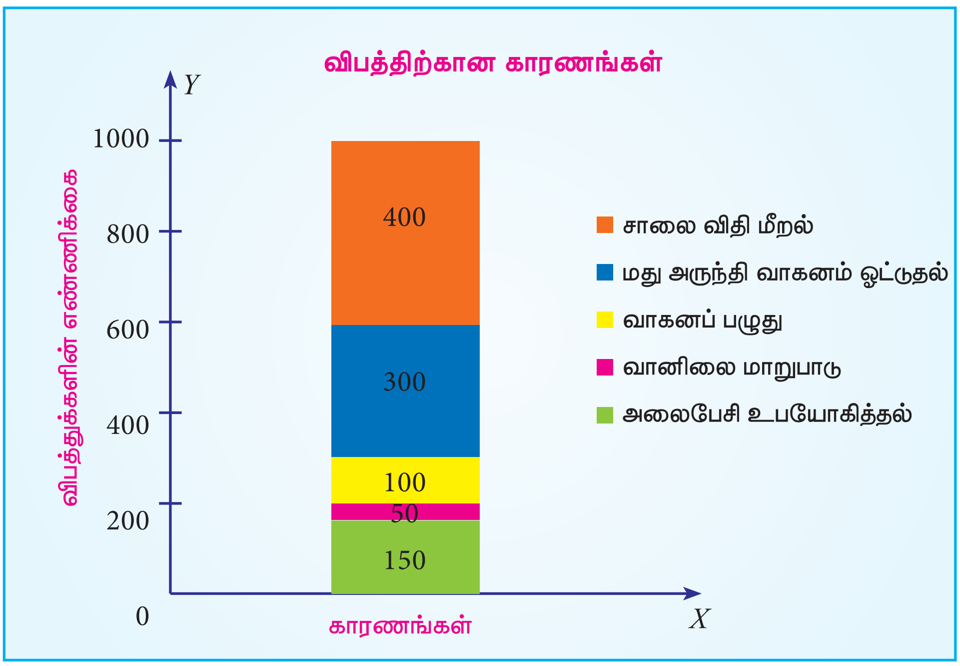
36. 35 ல் கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு கூறுபட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

37. 35 ல் கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கு விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

38. மூன்று பள்ளிகளில் படிக்கும் மாணவர்கள் (நடந்து / மிதிவண்டி மூலமாக) பள்ளிக்கு விரும்பி வருகை புரியும் முறையின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்குப் பலகட்ட பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

மாணவர்களின் விருப்ப வருகை	பள்ளி A	பள்ளி B	பள்ளி C
நடந்து வருதல் மூலம்	400	550	150
மிதிவண்டி மூலம்	450	250	350

39. கீழே கொடுக்கப்பட்ட கூறுபட்டை விளக்கப்படம் ஒரு மாநிலத்தில் ஒரு ஆண்டு காலத்தில் ஏற்பட்ட விபத்துகளின் எண்ணிக்கையும் அதற்கான காரணங்களையும் காட்டுகிறது.



வரைபடத்தின் மூலம் பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை எழுதுக:

(i) --------------- ஆல் அதிக எண்ணிக்கையில் சாலை விபத்துகள் ஏற்படுகிறது.

(ii) குறைந்த அளவு சாலை விபத்துகள் ----------- ஆல் ஏற்படுகிறது.

40. மூன்று கல்லூரிகளில் பல்வேறு இனங்களைப் பட்டப்படிப்பு படிக்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையின் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பயிலும் ஆண்டு	கல்லூரி		
	A	**B**	**C**
முதலாம் ஆண்டு	450	350	400
இரண்டாம் ஆண்டு	250	250	350
மூன்றாம் ஆண்டு	225	200	300

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கு கூறுபட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

41. இந்திய உணவக விடுதி தொழில் துறையின் (Indian Hotel Industries) பல்வேறு செலவினங்களின் விவரங்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

செலவின வகைகள்	சலவினங்கள் (சதவீதத்தில்)
நிர்வாகம்	30
ஊதியம்	20
பராமரிப்பு	14
உணவு மற்றும் பானங்கள்	12
மின்கட்டணம்	16
சேமிப்பு	8

வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

(a) ஊதியத்திற்கு தொடர்புடைய வட்டகோணப்பகுதியின் கோணத்தைக் காண்க.

(b) மின்சாரம் மற்றும் பராமரிப்புக்கு தொடர்புடைய வட்டகோணப்பகுதியின் கோணங்களின் வித்தியாசம் காண்க.

42. கீழே கொடுக்கப்பட்ட உருவ விளக்கப்படமானது 6 மாதங்களில் பள்ளிகல்வி இயக்குனரத்தால் பெறப்பட்ட அஞ்சல்களின் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது.

ஜூன்	

ஜூலை	✉✉✉✉
ஆகஸ்ட்	✉✉✉
செப்டம்பர்	✉✉✉✉✉✉
அக்டோபர்	✉✉
நவம்பர்	✉✉✉✉

✉ =100 அஞ்சல்கள்

மேலே கொடுக்கப்பட்ட உருவ விளக்கப்படத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(அ) ஜுன் மாதத்திலிருந்து நவம்பர் மாதம் வரை பெறப்பட்ட மொத்த அஞ்சல்களின் எண்ணிக்கை

(ஆ) எந்த மாதத்தில் (i) குறைந்த அளவு (ii) அதிக அஞ்சல்கள் பெறப்பட்டன.

(இ) செப்டம்பர் மாதத்திலிருந்து அக்டோபர் மாதம் வரை பெறப்பட்ட அஞ்சல்களின் குறைவு சதவீதம் காண்க.

(ஈ) ஒரு மாதத்தில் பெறப்பட்ட சராசரி அஞ்சல்களின் எண்ணிக்கை

43. பின்வரும் தரவுகளுக்கு பரவல் செவ்வகப்படம் வரைக.

வயது	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
நபர்களின் எண்ணிக்கை	10	45	36	28	5

பரவல் செவ்வகப்படத்திலிருந்து பரவலானது சமச்சீர் தன்மை உடையதா என்பதைக் காண்க.

44. ஒரு தொழிற்சாலை உற்பத்தி செய்த திருகாணிகளில் 500 திருகாணிகள் தரக் கட்டுப்பாட்டு சோதனை செய்யப்பட்டு அவற்றின் எடைகள் (கிராம்) பதிவு செய்யப்பட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கு நிகழ்வெண் பண்முக வரைபடம் மற்றும் நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைக.

எடை(கிராமில்)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை	30	90	130	210	40

45. புள்ளியியல் தரவுகளை அளிப்பதில் அட்டவணையை விளக்கப்படம் மற்றும் வரைபடத்துடன் ஒப்பிடுக.

46. விளக்கப்படங்களை வரைபடங்களுடன் ஒப்பிடுக.

47. ஒரு நிறுவனத்தில் பயிற்சி பெறும் பயிற்சியாளர்களின் உதவித்தொகை (ரூபாயில்) பின்வருமாறு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கீழின கூட்டு நிகழ்வெண் வரைக.

உதவித் தொகை	பயிற்சி பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை
2000 – 3000	4
3000 – 4000	6
4000 – 5000	13
5000 – 6000	25
6000 – 7000	32
7000 – 8000	19
8000 – 9000	8
- 10000	3

(அ) வரைபடத்திலிருந்து ரூ.5500 க்கு குறைவான உதவிதொகை பெறும் பயிற்சியாளர்களின் எண்ணிக்கையை கணக்கிடுக.

(ஆ) கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க.

48. ஒரு பள்ளியில் 11–ஆம் வகுப்பு படிக்கும் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தரவுகளுக்கு மேலின கூட்டு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைக.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0 – 10	2
10 – 20	4
20 – 30	9
30 – 40	10
40 – 50	8
50 – 60	5
60 – 70	3
70 - 80	2

(அ) 33 மதிப்பெண்களுக்கு மேல் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.(b) ஆ) தரவுக்கு இடைநிலை அளவு கண்டுபிடி.

49. தரக்கட்டுப்பாட்டு சோதனையில் பெறப்பட்ட 100 மின்விளக்குகளின் ஆயுட்காலம் கீழே

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆயள்காலம் (மணிகளில்)	600-650	650-700	700-750	750-800	800-850
மின்விளக்கின் எண்ணிக்கை	6	14	40	34	6

(அ) கீழின குவிவு கிகழ்வெண் வளைகோடு மற்றும் மேலின குவிவு கிகழ்வெண் வளைகோடு வரைக.

(ஆ) வரைபடம் மூலம் மின் விளக்கின் இடைநிலை ஆயட்காலம் கண்டுபிடிக்க.

விடைகள்

I. 1. (b) 2. (a) 3. (c) 4. (b) 5. (b) 6. (c)

II. 7. வரைபடம் 8. கையால் வரைதல் 9. உருவ விளக்கப்படம் 10. பட்டை விளக்கப்படம் 11. மேல் எல்லை 12. மேலின குவிவு நிகழ்வெண் 13. இடைநிலை 14.கையால் மென்மை 15. பரவல் செவ்வகப்படம் 16. சமம்

V 34. (a) 2013 (b) 2015 (c) 2000000

39. (1) சாலை விதிகளை மீறுதல் (2) வானிலை மாறுபாடு

41. (a) 72° (b) 29° 29' 42. (a) 2400

(b) (i) செப்டம்பர் (ii) அக்டோபர் (c) 66.7% (d) 400

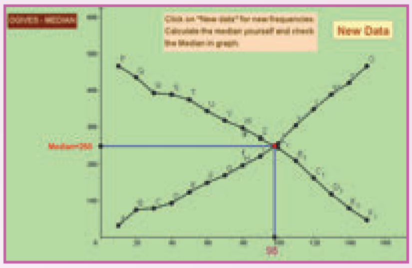
47. (a) 38 பயிற்சி பெறுபவர்கள் (b)1300 48. (a)26 மாணவர்கள் (b) 36

49. (ii) 737.5 மணிகள்

இணையச்செயல்பாடு

ஓகைவ் - இடைநிலை

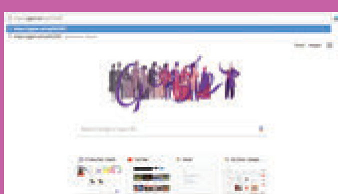
ஓகைவ் வளைகோட்டைப் பயன்படுத்தித் தரவுகளின் இடைநிலைகளை அறிவோமா!



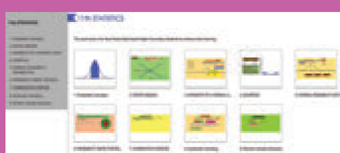
படிகள்

1. கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க.
2. "11th Standard Statistics" எனும் **GeoGebra** பணிப்புத்தகத்தில் "Ogives–Median" க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்
3. ஓகைவ் பணிப்புத்தகத்தில், வலப்பக்கத்தில் x –மதிப்பும், அலைவெண்களும் முதல் இரு நிரல்களில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். 3 மற்றும் 4–ம் நிரல்களில் 'கீழின வளர்' மற்றும் 'மேலின வளர்' அலைவெண்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். இவற்றை இடப்பக்கம் உள்ள ஓகைவ் வளைவுகளுடன் ஒப்பிடுக. "New Data"–வை சொடுக்கித் தரவுகளை மாற்றலாம்.
4. இடைநிலை மதிப்பைக் காண்பதற்கு, இரண்டு ஓகைவ்களும் வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து இரண்டு அச்சுகளுக்கும் செங்குத்துக் கோடு வரைந்து x–அச்சின் மதிப்பைக் (இடைநிலை) குறித்துக்கொள்ளவும். "New Data"–வை சொடுக்கி தரவுகளை மாற்றி புதிய இடைநிலை மதிப்பைக் காண்க.

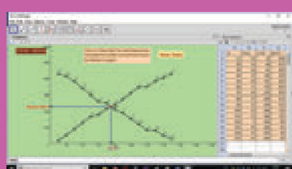
படி 1



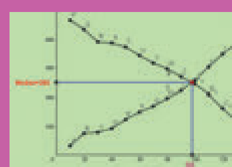
படி 2



படி 3



படி 4



* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

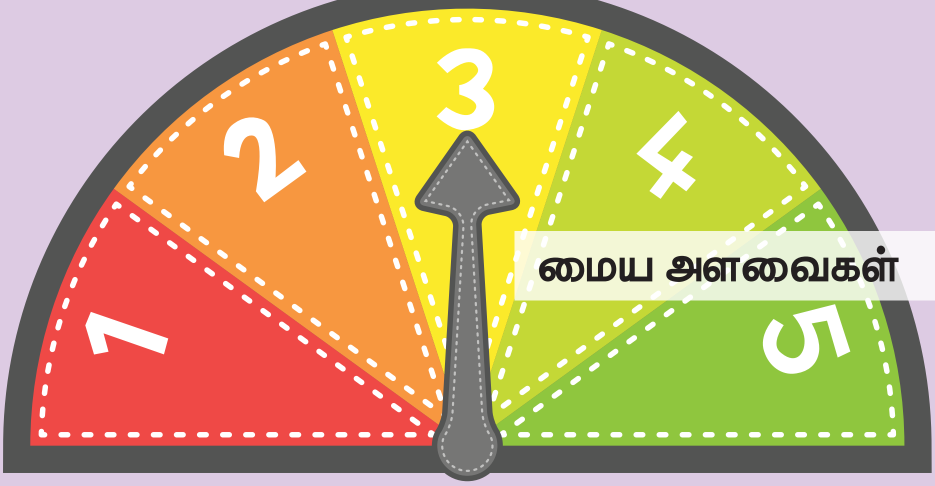
உரலி:

https://ggbm.at/uqVhSJWZ

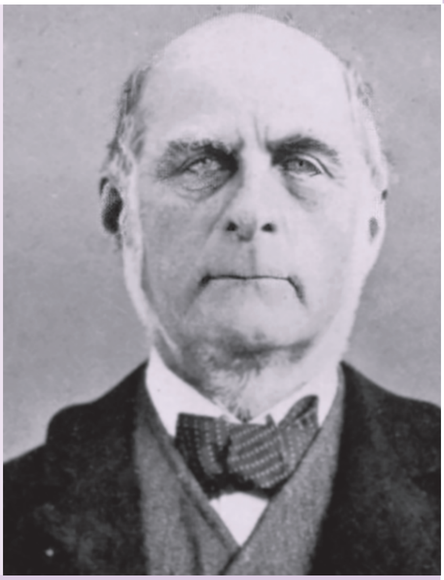
B136_11_STA_TM

அத்தியாயம்

5



மைய அளவைகள்



சர் பிரான்ஸிஸ் கால்ட்டன்

(16 பிப்ரவரி 1822 – 17 சனவரி 1911)

சர் பிரான்ஸிஸ் கால்ட்டன், இங்கிலாந்தில் பிறந்த புள்ளியியலார். அவர் சமூகவியல், உளவியல், இனமேம்பாட்டியல், வானிலை, புவியியல், புதிய ஆய்வுகள் போன்ற பல துறைகளில் சிறந்து விளங்கிய வித்தகர். அவர் 340க்கும் மேற்பட்ட ஆராய்ச்சி கட்டுரைகளும், புத்தகங்களும் வெளியிட்டுள்ளார். ஒட்டுறவு என்ற கருத்தை உருவாக்கி, சராசரி சார்ந்த உடன் தொடர்பு போக்குகளைக் கண்டு அறிமுகப்படுத்தியுள்ளார். அவர் முதன் முதலில் மனிதருக்குள்ளேயுள்ள புத்தி கூர்மையின் மரபு சார்ந்த வேறுபாடுகளை, புள்ளியியல் முறைப்படி ஆய்வு செய்வதற்காக வினாப்பட்டியல் அமைத்து தரவுகளைச் சேகரிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தினார்.

அறிவியலை அடிப்படையாகக் கொண்ட வானிலையியலில், முதன்முறையாக வரைபடங்கள் மூலம் புயல் உருவாகும் முறையைக் கண்டறிந்தார். அதை ஐரோப்பிய அளவுகோலுக்கு இணங்க குறுகிய கால வானிலை பற்றிய முழுமையான பதிவு செய்தார். அவர் மேலும் காது கேளாதோருக்காக, அவர்களைச் சோதனை செய்யும் கால்ட்டன் விசில் எனும் கருவியைக் கண்டுபிடித்து அவர்களுக்குப் பயன்படும்படியாக உதவியுள்ளார்.

'மனித மனம் எண்களால் ஆன அதிக எண்ணிக்கையுடைய தரவுகளை ஒரே சமயத்தில் கிரகித்து நினைவில் வைத்திருக்கும் ஆற்றல் பெற்றிருக்கவில்லையாதலால், அத்தரவுகளைப் பற்றி நமக்குப் போதுமான அளவில் விளக்கம் பெறும்படியாக சில எண்களைக் கொண்டே அவற்றைக் குறிப்பிட வேண்டிய அவசியம் ஏற்பட்டுள்ளது'

- பேராசிரியர் ஆர்.ஏ.பிஷர்

நோக்கங்கள்

6DZVBL

- சராசரி என்பது ஒரு குழுவைப் பற்றிக் குறிப்பிடும் அளவை என்பதை அறிதல்.
- கணித சராசரி அளவைகளையும், இடம் சார்ந்த சராசரிகளையும் விதிப்படி கணக்கிடுதல்.
- கால்மானங்கள், பதின்மானங்கள், நூற்றுமானங்களைக் கணக்கிட்டு விளக்குதல்
- சராசரிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளைப் புரிந்து கொண்டு அவற்றின் பயன்களைக் கூறுதல்

அறிமுகம்

மிக அதிக அளவில் இடம் பெறும் தரவுகளை எளிதில் நினைவில் நிறுத்தியிருப்பது என்பது மனித மனத்திற்கு இயலாத ஒன்றாகும். எனவே சேகரித்த தரவுகளை சுருக்கமாகவும், அத் தரவுகளின் பண்பினை வெளிப்படுத்தும் விதமாகவும் சில எண்களைக் கொண்டே தரவுகளின் தன்மையைப் புரிந்து கொள்ளும் விதமாக அமைக்க வேண்டும். மேற்கூறிய அத்தன்மையைக் கொண்ட 'மையப்போக்கு அளவைகள்' என்பது பற்றி இப்பகுதியில் காணலாம். மையப்போக்கு அளவைகளை சராசரிகள் என்றும் கூறலாம்.

நடைமுறை கணிதச் செயல்களில், பல தரவு உறுப்புகள் கொண்ட கணத்தை அதைச் சார்ந்த ஒரே ஒரு உறுப்பின் அளவைக் கொண்டு கூறும் தேவை ஏற்படுகிறது. அத்தரவு கணத்தின் உறுப்பு மதிப்புகள் வேறுவேறாயினும், ஓர் உறுப்பைச் சுற்றியே மற்ற உறுப்புகள் அமைவதால் அந்த உறுப்பின் மதிப்பே அந்த தரவு கணத்தின் பிரதிநிதி உறுப்பாகக் கருதப்படுகிறது. எனவே அம்மதிப்பே மையப்போக்கு அளவை என்று கூறப்படுகிறது.

இத்தகைய மையப்போக்கு அளவை, அத்தரவு கணத்தின் தன்மையை எளிதாக விளக்கிவிடுகிறது. மேலும் இவ்வளவை பிந்தைய கணிதச் செயல்பாடுகளுக்கும், பகுப்பாய்வுகளுக்கும், பயன்படும்படியாக அமைகிறது.

5.1 மையப் போக்கு அளவைகள்

வரையறை:

புள்ளியியலாளர்கள் சராசரியை வெவ்வேறு விதமாக வரையறுத்துள்ளனர். அவற்றில் முக்கியமான சில வரையறைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

"சேகரிக்கப்பட்ட எண்களைச் சுற்றி அமைந்திருக்கும் மைய மதிப்பே மையப்போக்கு அளவைகள்". – கிளார்க் மற்றும் செகாடே

"சராசரி என்பது முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியாக இருப்பினும் தொகுதி முழுமையையும் குறிப்பிடக்கூடியது". – முர்ரே R. ஸ்பீகல்

"சில சமயங்களில் சராசரி ஒரு எண்ணாக விவரிக்கப்பட்டாலும் தொகுதி முழுமையையும் குறிப்பிடக்கூடியது". – லீபோ

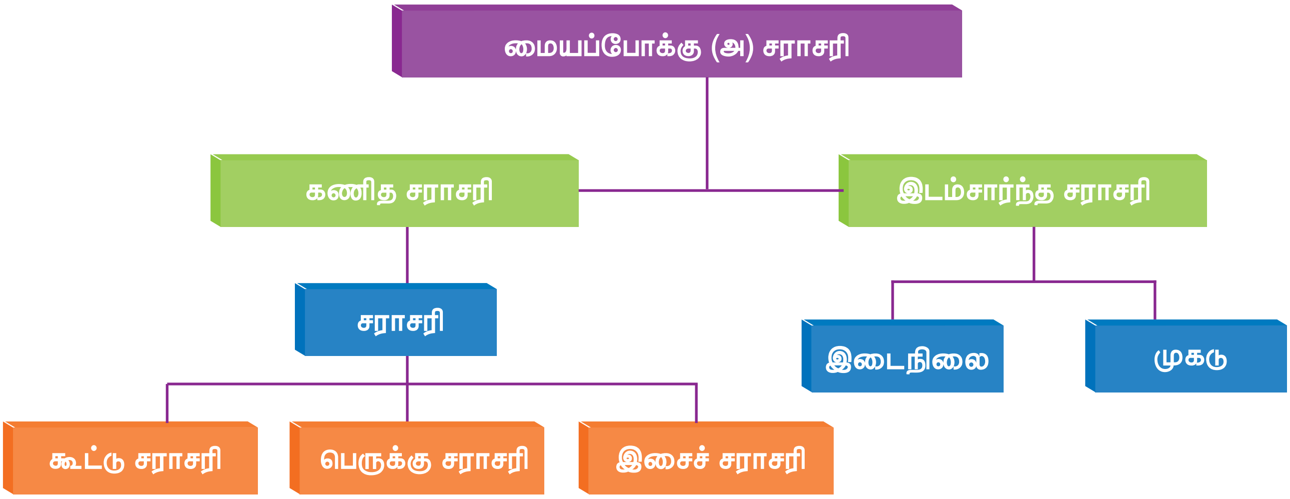
மேற்கூரிய வரையறைகளிலிருந்து சராசரி என்பது முழுமைத் தொகுதியை எடுத்துரைக்கக்கூடிய ஓர் மதிப்பு என நன்கு விளங்குகிறது. மேலும் சராசரி ஓர் மையப்போக்களவையாகும்

5.2 சிறந்த சராசரியின் முக்கிய சிறப்புகள்:

- நன்கு வரையறுக்கப்பட்டு ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.
- எளிதில் புரிந்து கொள்வதாகவும், கணக்கிடுவதற்கு ஏற்ற வகையில் அமைய வேண்டும்.
- விவரங்களின் எல்லா உறுப்புகளையும் அடிப்படையாக வைத்து காணப்படுவதாக இருக்க வேண்டும்.

- கணித வாய்பாட்டின் வடிவில் அமைய வேண்டும்
- மாதிரி நிலைத்தன்மை பெற்றுள்ளதாய் இருக்க வேண்டும்.
- அதிக மதிப்புகளால் இதை பாதிக்காது.

5.3 மையப் போக்கு அளவைகளின் வகைகள்



5.3.1 கூட்டு சராசரி

(a) தொகுக்கப்படாத தரவுகள் மூலம் கூட்டு சராசரி காணுதல்

மாறியின் கூட்டு சராசரி என்பது அம்மாறியின் மதிப்புகளின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் எண் ஆகும்.

மாறியின் n மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n எனில், இதன் கூட்டு சராசரி

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

கூட்டு சராசரியை நேரடிமுறை மற்றும் சுருக்குமுறை என்று இரு முறைகளில் காணலாம்.

(i) நேரடி முறை (ii) எளிய முறை

குறிப்பு

இயல்பான சுகாதார அளவைகளான இரத்த அழுத்தம், நாடித்துடிப்பு, இரத்த செல் எண்ணிக்கை, இரத்த சர்க்கரை அளவு போன்றவை ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலுள்ள மக்களிடத்தில் கணக்கிடப்பட்ட சராசரியே ஆகும். இவை நபர்களுக்கிடையே மாறுபடும்

எடுத்துக்காட்டு 5.1

7 வெவ்வேறு நாட்களில் ஒரு பள்ளியின் நூலகத்திலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை 7, 9, 12, 15, 5, 4 11 புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையின் கூட்டு சராசரி காண்க.

தீர்வு:

(i) நேரடி முறை

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} x_i$$

$$\bar{x} = \frac{7+9+12+15+5+4+11}{7}$$

$$= \frac{63}{7} = 9$$

புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையின் கூட்டுசராசரி 9

(ii) எளிய முறை:

A என்பது d_i ல் அமைந்த இடைப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு மற்றும் $d_i = x_i - A$ எனில்

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.2

ஒரு மாணவனின் 5 பாடங்களின் மதிப்பெண் விவரம் 75, 68, 80, 92, 56 எனில் அதன் கூட்டு சாராசரி காண்க

தீர்வு:

இங்கு A = 68 எனில்,

x_i	$d_i = x_i - 68$
75	7
68	0
80	12
56	–12
92	24
மொத்தம்	31

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$= 68 + \frac{31}{5}$$

$$= 68+6.2 = 74.2$$

மதிப்பெண்களின் கூட்டு சராசரி 74.2

(b) தொகுக்கப்பட்ட தரவுகள் மூலம் கூட்டு சராசரி காணுதல்

If $x_1, x_2, ..., x_n$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட n தரவுகள், அவற்றின் நிகழ்வெண்கள் $f_1, f_2, \ldots, f_n$. எனில் அதன் கூட்டு சராசரி (நேரடி முறை)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$$

சுருக்கு முறை

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} \quad \text{இங்கு} \quad d_i = x_i - A$$

எடுத்துக்காட்டு 5.3

73 பக்கங்கள் அடங்கிய கையெழுத்து பிரதிகளை சரிபார்க்கும்போது ஒவ்வொரு பக்கங்களிலும் கண்டறியப்பட்ட தவறுகளின் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தவறுகளின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	5	6	7
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	5	9	12	17	14	10	6

ஒவ்வொரு பக்கங்களின் கண்டறியப்பட்ட தவறுகளின் கூட்டு சராசரி காண்க

தீர்வு:

(iii) நேரடி முறை

x_i	f_i	$f_i x_i$
1	5	5
2	9	18
3	12	36
4	17	68
5	14	70
6	10	60
7	6	42
மொத்தம்	N=73	299

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$$

$$= \frac{299}{73} = 4.09$$

தவறுகளின் கூட்டு சராசரி 4.09

(iv) எளிய முறை

x_i	f_i	$d_i=x_i-A$	$f_i d_i$
1	5	-3	-15
2	9	-2	-18
3	12	-1	-12
4	17	0	0
5	14	1	14
6	10	2	20
7	6	3	18
	$\sum f_i=73$		$\sum f_i d_i=7$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=l}^{n} f_i d_i}{N}$$

$$= 4 + \frac{7}{73}$$

$$= 4.09$$

தவறுகளின் கூட்டு சராசரி = 4.09

தொடர்ச்சியாக தொகுக்கப்பட்ட தரவுகளின் கூட்டு சராசரி

கூட்டு சராசரி கான முன்பே அறிந்த இரு முறைகளையும் இங்கு பயன்படுத்தலாம்.

(i) நேரடி முறை

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=l}^{n} f_i x_i}{N},$$ x_i என்பது பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி

(ii) எளிய முறை

$$\bar{x} = \text{A}+\frac{\sum_{i=l}^{n} f_i d_l}{N} \times C$$

இங்கு $d = \frac{x_i - A}{c}$

x_i என்பது பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி

A - ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

c - பிரிவு இடைவெளியின் அகலம்

எடுத்துக்காட்டு 5.4

வெவ்வேறு குழுக்களில் உள்ள ஆட்களின் வருமானத்தின் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வரவு (ரூ.1000)	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 – 32	32 – 40	40 – 48
ஆட்களின் எண்ணிக்கை	8	7	16	24	15	7

ஆட்களின் வருமானத்தின் கூட்டு சராசரி காண்க

தீர்வு:

நேரடிமுறை:

Class	f_i	x_i	$f_i x_i$
0-8	8	4	32
8 – 16	7	12	84
16-24	16	20	320
24-32	24	28	672
32-40	15	36	540
40-48	7	44	308
	N =77		1956

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=l}^{n} f_i x_i}{N}$$

$$= \frac{1956}{77}$$

$$=25.40$$

சுருக்கு முறை:

Class	f_i	x_i	$d_i=(x_i-A)/c$	$f_i d_i$
0 – 8	8	4	-3	-24
8 – 16	7	12	-2	-14

16 – 24	16	20	-1	-16
24 – 32	24	28 A	0	0
32 – 40	15	36	1	15
40 – 48	7	44	2	14
மொத்தம்	N= 77			-25

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} \times C$$

$$= 28 + \frac{-25}{77} \times 8 = 25.40$$

நிறைகள்

- கணக்கிடுவதற்கு எளிதாகவும், ஒரே மதிப்பையும் பெற்றிருக்கும்
- கண்டறியப்பட்ட எல்லா மதிப்புகளையும் பொறுத்து அமையும்.
- நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது
- மாறிகளின் தன்மைகளைப் பொறுத்து குறைந்த அளவு மாறுபடும்
- புள்ளியியலை மேலும் அறிவதற்கு இது பயன்படுகிறது.

வரம்புகள்

- சராசரியானது முனை உறுப்புகளால் பாதிக்கக்கூடியது
- அழகு, நேர்மை போன்ற எண் அளவுகளால் குறிக்க இயலாத பண்புகளை இக்கூட்டு சராசரியின் மூலம் காண இயலாது.
- நிகழ்வெண் வரைபடமூலமாக இதனைப் பெற முடியாது

எங்கே பயன்படும் ?

ஒரே பண்புகள் உடைய தரவுகளுக்கு கூட்டு சராசரி மிகவும் உகந்தது. மற்ற மதிப்புகளுக்கு கூட்டுசராசரி காணும்போது அதன் விடை நம்மை தவறான இடத்திற்கு வழிவகுக்கும்

நிறையிட்ட கூட்டுசராசரி

தரவுகளின் கூட்டு சராசரி கணக்கிடும்போது அவ்விவரத்தின் மதிப்புகள் எல்லாமே சமமுக்கியத்துவம் பெற்றுள்ளன. செயலளவில அவ்விதம் இருக்க இயலாது. ஆகவே பரவலில் உள்ள சில மதிப்புகள் மற்ற மதிப்புகளை விட அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை எனில் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் அதன் முக்கியத்துவத்தைப் பொறுத்து எடை கொடுக்கப்படுகிறது.

வரையறை:

$x_1, x_2, ..., x_n$ x_1, x_2, . . . , x_n என்ற மதிப்புகளுக்கு கொடுக்கப்படும் எடைகள் முறையே $w_1, w_2, ..., w_n$ எனில் அம்மதிப்புகளின் நிறையிட்ட கூட்டுசராசரி

$$\overline{x_w} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n} = \frac{\sum_{i=l}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=l}^{n} w_i}$$

நிறையிட்ட கூட்டு சராசரியின் பயன்கள்

- குறியீட்டு எண்களை அமைக்கப் பயன்படுகிறது.
- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட குழுக்களின் வேறுபாடுகளை ஒப்பிடப் பயன்படும்
- இறப்பு, பிறப்பு விகிதங்களைக் கணக்கிட உதவும்

எடுத்துக்காட்டு 5.5

ஒரு தேர்வில் மதிப்பெண்கள் அளவிடும் முறை

பிரிவுகள்	மதிப்பெண்கள் விவரம் (w)	மதிப்பெண்(x) பெற்ற விவரம்
எழுத்துத் தேர்வு	4	60
செய்முறை	3	80
ஒப்படைவு	1	90
திட்டம்	2	75
	10	

நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி காண்க.

தீர்வு:

பிரிவுகள்	மதிப்பெண்கள் பெற்ற விபரம்	முதிப்பெண்களின் அளவீடு (w_i)	$w_i x_i$
எழுத்துத் தேர்வு	60	4	240
செய்முறை	80	3	240
ஒப்படைவு	90	1	90
திட்டம்	75	2	150
	மொத்தம்	10	720

நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி , $\overline{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$

$= 720/10$

$= 72$

இணைந்த கூட்டு சராசரி:

$\overline{x}_1$ மற்றும் $\overline{x}_2$ என்பன n_1 , n_2 தரவுகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி (இரண்டு தரவுகளும் ஒரே அலகுகள் கொண்டவை) எனில் இவற்றின் இணைந்த கூட்டு சராசரி $= \bar{x}_{12} = \dfrac{n_1 \overline{x}_1 + n_2 \overline{x}_2}{n_1 + n_2}$

குறிப்பு

நிறை (மதிப்பெண்களின் அளவீடு) கொடுக்கப்படாவிட்டால் சராசரி

$= (60 + 80 + 90 + 75)\ /4$

$= 76.25$

எடுத்துக்காட்டு 5.6

ஒரு வகுப்பில் 4 மாணவர்களும், 3 மாணவிகளும் உள்ளனர். மாணவர்கள் மற்றும் மாணவிகளின் சராசரி மதிப்பெண்கள் முறையே 20 மற்றும் 30 எனில் அந்த வகுப்பில் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு:

$n_1 = 4,\ \overline{x}_1 = 20,\ n_2 = 3,\ \overline{x}_2 = 30$

இணைந்த கூட்டுசராசரி $= \bar{x}_{12} = \dfrac{n_1 \overline{x}_1 + n_2 \overline{x}_2}{n_1 + n_2}$

$= \left[\dfrac{4 \times 20 + 3 \times 30}{4 + 3} \right]$

$= \left[\dfrac{80 + 90}{7} = \dfrac{170}{7} \right] = 24.3$

குறிப்பு

மேற்கூறிய சூத்திரத்தை இரண்டுக்கு மேற்பட்ட குழுக்களுக்கும் பயன்படுத்தலாம்

5.3.2 பெருக்கு சராசரி (G.M)

(a) தொகுக்கப்படாத தரவுகளுக்கான பெருக்குச் சராசரி

n மதிப்புகளைக் கொண்ட தொடரின் பெருக்குச் சராசரி என்பது n மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகையின் n வது படிமூலம் ஆகும். $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற மதிப்புகளின் பெருக்குசராசரி

$$\text{G. M.} = \sqrt[n]{x_1, x_2 \ldots x_n} = (x_1 . x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

nஆம் படி மூலம் காண்பது கடினம் என்பதால் கீழ்கண்ட முறையில் பெருக்கு சராசரியை காணலாம்.

$$\log \text{G.M.} = \log (x_1 . x_2 \ldots x_n)$$

$$= (\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n)$$

$$= \frac{\sum_{i=l}^{n} \log x_i}{n}$$

$$G.M. = \text{Antilog} \frac{\sum_{i=l}^{n} \log x_i}{n}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.7

2000 முதல் 2005 வரை ஒரு கம்பெனியின் வருடாந்திர இலாபத்தின் சதவீதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது 50, 72, 54, 82, 93 இதன் பெருக்குச் சராசரி காண்க.

50, 72, 54, 82, 93

தீர்வு:

x_i	50	72	54	82	93	மொத்தம்
$\log x_i$	1.6990	1.8573	1.7324	1.9138	1.9685	9.1710

$$G.M. = \text{Antilog} \frac{\sum_{i=l}^{n} \log x_i}{n}$$

$$= \text{Antilog} \frac{9.1710}{5}$$

$$= \text{Antilog } 1.8342$$

$$G.\ M. = 68.26$$

இலாபத்தின் வருடாந்திர உயர்வின் சதவீதத்தின் பெருக்கு சராசரி 68.26

எடுத்துக்காட்டு 5.8

ஒரு நகரின் மக்கட்தொகை உயரும் வீதம் இரு அடுத்தடுத்த ஆண்டுகளில் முறையே 15% மற்றும் 25% அடுத்த வருடத்தில் அது 5% குறைகிறது எனில் அது ஏறும் வீதத்தின் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு :

மக்கட்தொகை 100 எனக் கொள்க

மக்கட்தொகை ஏறும் வீதம்	வருட முடிவில் மக்கட் தொகை x_i	$\log x_i$
15	115	2.0607
25	125	2.0969

5	95	1.9777
		6.1353

$$G.M = \text{Antilog}\ \frac{\sum_{n}^{n} \log x_i}{n}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{(6.1353)}{3}$$

$$= \text{Antilog}\ (2.0451)$$

$$= 110.9$$

(b) தொகுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கான பெருக்குச் சராசரி

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற தரவுகளின் நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1, f_2, \ldots f_n$ எனில் இதன் பெருக்கு சராசரி

$$G.\ M. = \text{Antilog}\ \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i}{N}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.9

ஒரு தொழிற்சாலையில் பழுதடைந்த திருகாணிகள் விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

விட்டம் (செ.மீ)	5	15	25	35
திருகாணிகள் எண்ணிக்கை	5	8	3	4

தீர்வு:

x_i	f_i	$\log x_i$	$f_i \log x_i$
5	5	0.6990	3.4950
15	8	1.1761	9.4088
25	3	1.3979	4.1937
35	4	1.5441	6.1764
	N=20		23.2739

$$G.M = \text{Antilog}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i}{N}$$

$$= \text{Antilog } \frac{23.2739}{20}$$

$$= \text{Antilog } 1.1637$$

$$G.M = 14.58$$

(c) தொடர் தொகுப்பின் தரவுகளுக்கான பெருக்குச் சராசரி

கொடுக்கப்பட்ட பிரிவு இடைவெளியின் நடுப்புள்ளி என்க

$$G.\,M. = \text{Antilog}\left[\frac{\sum_{i=l}^{n} f_i \log x_i}{N}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 5.10

பாடவாரியாக 109 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது அதன் பெருக்கு சராசரி காண்க.

மதிப்பெண்கள்	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	6	10	18	30	15	12	10	6	2

தீர்வு:

மதிப்பெண்கள்	நடுப்புள்ளி (x_i)	f_i	$\log x_i$	$f_i \log x_i$
4-8	6	6	0.7782	4.6692
8-12	10	10	1.0000	10.0000
12-16	14	18	1.1461	20.6298
16-20	15	30	1.2553	37.6590
20-24	22	15	1.3424	20.1360
24-28	26	12	1.4150	16.800
28-32	30	10	1.4771	14.7710
32-36	34	6	1.5315	9.1890
36-40	38	2	1.5798	3.1596
மொத்தம்		**N** =109		137.1936

$$G.M. = \text{Antilog}\left[\frac{\sum_{i=l}^{n} f_i \log x_i}{N}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{137.1936}{109}\right] = \text{Antilog}\ [1.2587]$$

$$\text{G. M.} = 18.14$$

பாடவாரியாக 109 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் பெருக்கு சராசரி 18.14

நிறைகள்

- எல்லா விவரங்களின் தன்மைக்கும் பொருந்தும்
- நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது
- இது மென்மேலும் பல கணித செயல்பாடுகளுக்கு உகந்தது
- முனை உறுப்புகளால் குறைந்த அளவே பாதிக்கப்படும்
- விகிதங்கள், வீதங்கள், சதவீதங்கள் இவற்றின் சராசரி காண்பதில் இது பொருத்தமானது.

வரம்புகள்:

- புரிந்து கொள்ள கடினமானது
- ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு பூச்சியமாகவோ அல்லது குறை எண்ணாகவோ இருக்கும் இடங்களில் இது பயன்படாது.
- தொடரில் உள்ள சரியான மதிப்பாக பெருக்குச் சராசரி இருக்க முடியாது.
- விகிதங்களில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அறிய இயலுமே தவிர, கூட்டு சராசரியைப் போல மாற்றங்களில் ஏற்படும் சரியான வித்தியாசத்தை தர இயலாது.

5.3.3 இசைச்சராசரி (H.M.)

ஒரு மாறியின் மதிப்புகளின் தலைகீழி அதன் இசைச்சராசரி எனப்படும்.

(a) தொகுக்கப்படாத தரவுகளுக்கான இசைச் சராசரி (H.M. for Ungrouped data)

$x_1, x_2, ..., x_n$ என்பது n மாறிகள் எனில் அதன் இசைச் சராசரி H. M. = $\dfrac{n}{\sum_{i=l}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}$

எடுத்துக்காட்டு 5.11

ஒரு மனிதன் காரில் 4 மணி நேரத்தில் ஜெய்ப்பூரிலிருந்து ஆக்ரா வரை உள்ள தூரத்தைக் கடக்கிறார். முதல் 1 மணி நேரத்தில் காரின் வேகம் 50 கி.மீ / மணி இரண்டாவது மணி நேரத்தில் காரின் வேகம் 64 கி.மீ / மணி மூன்றாவது மணி நேரத்தில் காரின் வேகம் 80 கி.மீ / மணி மற்றும் நான்காவது மணி நேரத்தில் காரின் வேகம் 55 கி.மீ / மணி எனில் கார் ஓட்டுனரின் சராசரி வேகத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

x	50	65	80	55	மொத்தம்

1/*x*	0.0200	0.0154	0.0125	0.0182	0.0661

$$\text{H. M.} = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

$$= \frac{4}{0.0661} = 60.5$$

கார் ஓட்டுனரின் சராசரி வேகம் 60.5 கி.மீ /மணி

(b) தொகுக்கப்பட்ட தரவு

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில்

$$\text{H. M.} = \frac{N}{\sum_{i=l}^{n} f_i\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.12

ஒரு கணக்கெடுப்பின் அடிப்படையில் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அதன் இசைச் சராசரி காண்க.

காரின் வேகம்	130	135	140	145	150
கார்களின் எண்ணிக்கை	3	4	8	9	2

தீர்வு:

x_i	f_i	$\frac{f_i}{x_i}$
130	3	0.0231
135	4	0.0091
140	8	0.0571
145	9	0.0621
150	2	0.0133
மொத்தம்	N = 26	0.1648

$$\text{H. M.} = \frac{N}{\sum_{i=l}^{n} f_i\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

$$= \frac{26}{0.1648}$$

$$H.M = 157.77$$

(c) தொடர் தொகுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கான இசைச் சராசரி (H.M. for Continuous data):

பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி x_i எனில்

$$H.M. = \frac{N}{\sum_{i=l}^{n} f_i\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.13

பின்வரும் விவரங்களுக்கு H.M. காண்க

பங்குகள் (%)	2 – 6	6 – 10	10 – 14
கம்பெனிகளின் எண்ணிக்கை	10	12	18

தீர்வு:

பங்குகள்	நடுபுள்ளி (x_i)	கம்பெனிகளின் எண்ணிக்கை (f_i)	தலைகீழி $(1/x_i)$	$f_i\ (1/x_i)$
2 – 6	4	10	¼	2.5
6 – 10	8	12	1/8	1.5
10 – 14	12	18	1/12	1.5
மொத்தம்		N = 40		5.5

$$H.M. = \frac{N}{\sum_{i=l}^{n} f_i\left(\frac{1}{x_i}\right)} = \frac{40}{5.5} = 7.27$$

இசைச் சராசரியின் நிறைகள்:

- இசைச் சராசரியின் நிறைகள்
- எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
- அதிகமாக பரவல் அமையும்போது இது பயன்படுகிறது.
- இது கணித செயல்பாடுகளுக்கு இணக்கமாக உள்ளது.
- இது பெரிய மதிப்புகளுக்கு குறைந்த முக்கியத்துவத்தையும், சிறிய மதிப்புகளுக்கு அதிக முக்கியத்துவத்தையும் கொடுக்கும் இடங்களில் இது பொருத்தமாக அமையும்.

வரம்புகள்:

- இதனை கணக்கிடுவதும், புரிந்து கொள்வதும் கடினம்
- எல்லா மதிப்புகளும் கணக்கீடு முறையில் அமைகிறது.
- கணக்கீடு கடினமாக இருப்பதால் இது பிரபலமாகவில்லை.
- இது ஒரு சுருக்கமான எண்ணே தவிர அத்தொடரின் சரியான உறுப்பாக இருக்க இயலாது.

எங்கே பயன்படும்?

மதிப்பு / அலகு வடிவத்தில் தரவுகள் அமையும் போது இசைச்சராசரி பயன்படுகிறது. ஆகவே சராசரி வேகம் காணப் பயன்படுகிறது.

சராசரிகளுக்கிடையேயான உறவு:

எந்தவொரு பரவலிலும் மூலத்தரவுகள் வெவ்வேறானவை எனில் A.M., G.M.மற்றும் H.M ஆகியவை வெவ்வேறாக இருக்கும். மேலும் கீழ்க்கண்ட வரிசையில் அமையும்.

$$\text{A.M.} \geq \text{G.M} \geq \text{H.M}$$

5.3.4 இடைநிலை அளவு

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட தரவு உறுப்புகளை இரு சரிபாதியாகப் பிரிக்கும் இடத்திலுள்ள உறுப்பின் மதிப்பு இடைநிலை அளவு அல்லது இடைநிலை எனப்படும். 50% மதிப்புகள் இடைநிலை மதிப்பிற்கு மேலும், 50% மதிப்புகள் அதற்குக் கீழும் இருக்கும். எனவே இடைநிலை அளவு என்பது இடம் சார்ந்த சராசரி என்று கூறப்படுகிறது.

(a) செப்பனிடப்படா தரவுகளுக்கான இடைநிலை அளவு

முதலில் கொடுக்கப்பட்ட தரவு உறுப்புகளை அவற்றின் எண் அளவிற்கு ஏற்ப ஏறுவரிசையிலோ, இறங்கு வரிசையிலோ அமைக்க வேண்டும்.

(iii) தரவு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n என்பது ஒற்றை எண்ணாக இருப்பின் $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு இடைநிலை அளவு எனப்படும்.

(iv) தரவு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n என்பது இரட்டை எண்ணாக இருந்தால் தரவுகளுக்கு இடையில் இரண்டு எண்கள் இருக்கும். அந்த இரண்டு எண்களின் சராசரியே இடைநிலை அளவாகும்.

$$\text{இடைநிலை} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{ஆவது உறுப்பு} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ ஆவது உறுப்பு}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.14

சென்னையில் உள்ள சில ஐந்து நட்சத்திர பெரும் விடுதிகளில் உள்ள அறைகளின்

எண்ணிக்கை 71, 30, 61, 59, 31, 40 ஆகும். இடைநிலையளவு மூலம் அறைகளின் சராசரி எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு:

தரவுகளை ஏறுவரிசையில் அமைக்க 29, 30, 31, 40, 59, 61, 71

$$n = 7$$

$$\text{இடைநிலை} = \frac{7+1}{2} = 4\text{ஆவது உறுப்பு}$$

∴ இடைநிலை அளவு = 40 அறைகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.15

1974, 1975 ஆண்டுகளில் விளைந்த வேளாண் பொருட்களின் ஏற்றுமதி மதிப்பு 8 காலாண்டுகளில் (மில்லியன் டாலரில்) 29.7, 16.6, 2.3, 14.1, 36.6, 18.7, 3.5, 21.3 ஆகத் தரப்பட்டுள்ளது. அவற்றிற்கு இடைநிலை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

தரவு உறுப்புகளை இறங்கு வரிசையில் எழுதுக.

36.6, 29.7, 21.3, 18.7, 16.6, 14.1, 3.5, 2.3

$$n = 8$$

$$\text{இடைநிலை} = \frac{4\text{ஆவது உறுப்பு} + 5\text{ஆவது உறுப்பு}}{2}$$

$$= \frac{18.7+16.6}{2}$$

= 17.65 மில்லியன் டாலர்கள்

குவிவு நிகழ்வெண்கள்:

ஒரு தொகுக்கப்பட்ட பரவலின் ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் அதற்குரிய நிகழ்வெண்கள் உண்டு. குழுவின் ஒரு எல்லைக்கு மேலும் அல்லது அதற்குக் கீழும் அமையும் நிகழ்வெண்களைக் காண வேண்டுமெனில் நிகழ்வெண்களை அவ்வெல்லைவரை கூட்ட வேண்டும். இவ்வாறு அமைக்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் கூட்டு நிகழ்வெண்கள் அல்லது குவிவு நிகழ்வெண்கள் என்று கூறப்படும். இக்குவிவு நிகழ்வெண்கள் இடைநிலையளவு, கால்மானங்கள், பதின்மானங்கள் நூற்றுமானங்கள் காண்பதற்குப் பயன்படுகிறது.

(b) தொகுப்புத் தரவுகளுக்கான இடைநிலை அளவு

கீழ்க்கண்ட வழிமுறைப்படி இடைநிலையளவைக் காணலாம்.

(v) குவிவு நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிட்டு எழுதுக.

(vi) $N = \sum f$ = மொத்த நிகழ்வெண்கள் எனில் $\frac{N+1}{2}$ காண்க.

(vii) $\frac{N+1}{2}$ ஐ விட அதிகமான குவிவு நிகழ்வெண்ணைக் காண்க.

(viii) $\frac{N+1}{2}$ விற்கு நிகரான குவிவு நிகழ்வெண் இடைநிலை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.16

ஒரு வகுப்பு மாணவர்களின் எடைகளைக் கொண்ட தரவுகள் தரப்பட்டுள்ளன. அம்மாணவர்களின் சராசரி எடையை இடைநிலையளவின் மூலம் காண்க.

எடை (கி.கி)	10	20	30	40	50	60	70
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	7	12	15	13	5	4

தீர்வு:

எடை (கி.கி) x	மாணவர் எண்ணிக்கை f	குவிவு நிகழ்வெண்கள் $c.f$
10	4	4
20	7	11
30	12	23
40	15	38
50	13	51
60	5	56
70	4	60
மொத்தம்	N = 60	

$$N = \sum f = 60$$

$$\frac{N+1}{2} = 30.5$$

குவிவு நிகழ்வெண் நிரலில் 30.5ஐவிட அதிகமான எண் 38 அந்த குவிவு எண் 38இன் நிரை வரிசையில் அமைந்த 40 இடைநிலையளவு ஆகும்.

குறிப்பு

குழுக்கள், சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் இருந்தால் அதை பிணைப்பெல்லைகளால் ஆன தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் பிரிவிடைகளை உண்மை சார்ந்த குழுக்களாக மாற்றிக்கொள்ள வேண்டும்.

(c) இடைநிலை: தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவல்

தொடர்ச்சியான மாறிகளுக்கான நிகழ்வெண்

பரவலுக்கு இடைநிலை காண கீழ்க்கண்ட விதியைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\text{இடைநிலையளவு} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

l = இடைநிலையளவுக் குழுவின் கீழ்எல்லை மதிப்பு

N = மொத்த நிகழ்வெண்கள்

f = இடைநிலைக் குழுவில் அமையும் நிகழ்வெண்

m = இடைநிலைக் குழுவில் அமையும் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண்

c = இடைநிலைக் குழுவின் பிரிவிடை வித்தியாசத்தின் அளவு.

இடைநிலைகுழு என்பது, குவிவு நிகழ்வெண்களில் $\frac{N}{2}$ ஐவிட அதிக மதிப்பைக் கொண்ட குவிவு நிகழ்வெண் வரிசையாகும். முதலில் இடைநிலைக்குழுவைக் கண்டபின்பே மேற்கண்ட விதியைப் பயன்படுத்த வேண்டும். $\frac{N}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 5.17

ஒரு தோட்டத்தில் விளைந்த ஆப்பிள்களின் எடை விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது. ஆப்பிளின் சராசரி எடையை இடைநிலையளவைக் கொண்டு கணக்கிடுக.

எடை (கிராமில்)	410 – 420	420 – 430	430 – 440	440 – 450	450 – 460	460 – 470	470 – 480
ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை	14	20	42	54	45	18	7

தீர்வு:

எடை (கிராமில்)	ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை	குவிவு நிகழ்வெண்கள்
410 – 420	14	14
420 – 430	20	34
430 – 440	42	76
440 – 450	54	130
450 – 460	45	175
460 – 470	18	193
470 – 480	7	200
மொத்தம்	**N** = 200	

$$\frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100.$$

இடைநிலை பிரிவு இடைவெளி 440 – 450

$$\text{இடைநிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$l = 440, \quad \frac{N}{2} = 100, \quad m = 76, \quad f = 54, \quad c = 10$$

$$\text{இடைநிலை} = 440 + \frac{100 - 76}{54} \times 10$$

$$= 440 + \frac{24}{54} \times 10 = 440 + 4.44$$

$$= 444.44$$

ஆப்பிளின் இடைநிலை எடை 444.44 கிராம்

எடுத்துக்காட்டு 5.18

ஒரு பகுதியில் வசிக்கும் மக்களின் வயது பற்றிய தரவுகள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. அதிலிருந்து இடைநிலையளவு மூலம் அவர்களின் வயது சராசரியைக் காண்க.

வயது (ஆண்டுகளில்)	எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்)
10 க்கு கீழ்	2
20 க்கு கீழ்	5
30 க்கு கீழ்	9
40 க்கு கீழ்	12
50 க்கு கீழ்	14
60 க்கு கீழ்	15
70 க்கு கீழ்	15.5
80 க்கு கீழ்	15.6

தீர்வு:

வினாவில் மேல் எல்லைகளும் கீழின குவிவு நிகழ்வெண்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அதிலிருந்து பிரிவெல்லைகளைக் கொண்ட குழுக்களும் அதற்குரிய நிகழ்வெண்களையும் கணக்கிட்டு அட்டவணை அமைக்கவும். பின் இடைநிலையளவை விதியைப் பயன்படுத்திக் காணவும்.

குழுக்கள்	எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்) f	குவிவு நிகழ்வெண்கள் cf
0 – 10	2	2

10 – 20	3	5
20 – 30	4	9
30 – 40	3	12
40 – 50	2	14
50 – 60	1	15
60 – 70	0.5	15.5
70 – 80	0.1	15.6
மொத்தம்	**N** = 15.6	

$$\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{15.6}{2} = 7.8$$

இடைநிலை பிரிவு இடைவெளி 20 – 30

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{7.8 - 5}{4} \times 10$$

இடைநிலை அளவு = 27 ஆண்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.19

ஒரு கல்லூரியில் 140 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. அதிலிருந்து இடைநிலையளவின் மூலம் சராசரி மதிப்பைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
10-19	7
20-29	15
30-39	18
40-49	25
50-59	30
60-69	20
70-79	16
80-89	7
90-99	2

குறிப்பு

இடைநிலையளவுக் குழுவில் அமையும் கீழ் எல்லையை மட்டும் மாற்றி, பின் வழக்கம்போல் இடைநிலையளவைக் காணலாம்

தீர்வு:

பிணைப்பு எல்லைகள்	f	Cf
9.5 -19.5	7	7
19.5-29.5	15	22
29.5- 39.5	18	40
39.5-49.5	25	65
49.5-59.5	30	95
59.5-69.5	20	115
69.5-79.5	16	131
79.5-89.5	7	138
89.5-99.5	2	140
மொத்தம்	**N** =140	

$$\text{இடைநிலை} = l+\left(\frac{\frac{N}{2}-m}{f}\right)\times c$$

$$\frac{N}{2} = \frac{140}{2} = 70$$

இங்கு, $l = 49.5,\ f = 30,\ m = 65,\ c = 10$

$$\text{இடைநிலை} = 49.5+\left(\frac{70-65}{30}\right)\times 10$$

$$= 49.5 + 1.67$$

$$= 51.17$$

வரைபடம் மூலம் இடைநிலையளவைக் காணுதல்

குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரையைப் பயன்படுத்தி இடைநிலையளவைக் காணலாம். குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரை ஓஜைவ் (Ogive) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இடைநிலையளவைப் பின்வரும் வழிகளின்படிக் காண வேண்டும்.

படி 1: குழுக்கள் X அச்சில் அமைக்கப்படவேண்டும்.

படி 2: கணக்கிடப்பட்ட குவிவெண்களை குழுக்களின் மேல் எல்லைக்கு X அச்சுக்கு எதிரே y அச்சில் குறிக்க வேண்டும்.

படி 3: அப்புள்ளிகள் அனைத்தையும் இணைத்து (அளவுகோல் பயன்படுத்தாமல்) வளைவரை ஒன்றை வரைக. இதுவே கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரை (Less than Ogive) என்று அழைக்கப்படும்.

படி 4: $\frac{N}{2}$ அல்லது $\frac{N+1}{2}$ மதிப்பில் Y அச்சில் X அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு வளைவரையில் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

படி 5: அப்புள்ளியிலிருந்து X அச்சுக்குச் செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைக. அக்கோடு X அச்சில் சந்திக்கும் புள்ளி m என்க.

படி 6: m இன் மதிப்பே இடைநிலை மதிப்பாகும்.

குறிப்பு:

(ix) அதேபோல் ஒரு குழுவின் கீழ்எல்லைகளையும், அதற்குரிய மேலின குவிவு நிகழ்வெண்களையும் X மற்றும் Y அச்சுகளில் அமைத்து மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரையை (more than Ogive) வரைந்து, இடைநிலையளவைக் காணலாம்.

(x) ஒரே வரைபடத்தில் கீழின மற்றும் மேலின குவிவு நிகழ்வெண்கள் வளைவரையை வரையும் போது அவை இரண்டும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியிலிருந்து X அச்சுக்கு செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைந்தால் அக்கோடு X அச்சில் சந்திக்கும் புள்ளியில் அமையும் மதிப்பே இடைநிலையளவு மதிப்பாகும்.

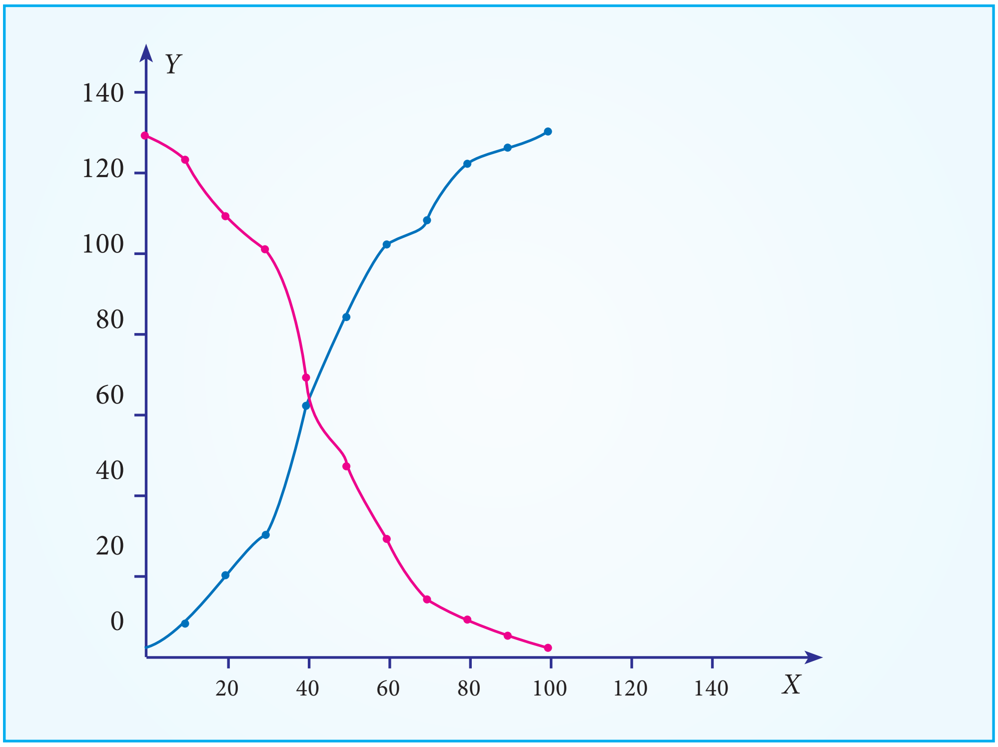
எடுத்துக்காட்டு 5.20

கீழின மற்றும் மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரைகளை வரைந்து இடைநிலை மதிப்பைக் காண்க.

குழுவினர் வயது	எண்ணிக்கை
0 – 10	6
10 – 20	12
20 – 30	10
30 – 40	32
40 – 50	22
50 – 60	18
60 – 70	15
70 – 80	5
80 – 90	4
90 – 100	3

தீர்வு:

குழுக்களின் பிணைப்பு எல்லைகள்	குவிவு நிகழ்வெண்	
	கீழின	மேலின
0	0	127
10	6	121
20	18	109
30	28	99
40	60	67
50	82	45
60	100	27
70	115	12
80	120	7
90	124	3
100	127	0



படத்தில் இடைநிலையளவு மதிப்பு 42 என்பதைக் காணலாம்.

நிறைகள்:

- இடைநிலையளவு கணக்கிடுவதற்கு எளிதானது. இம்மதிப்பை நடுவில் உள்ள இடத்தைப் பார்த்தும் காணலாம். வரைபடம் மூலமும் காணலாம்.
- எல்லை மதிப்புகளால் இடைநிலை மதிப்பு பாதிக்கப்படுவதில்லை.
- குழுக்களின் பிரிவிடைகள் மாறுபட்டு இருந்தாலும் இடைநிலையளவைக் காண முடியும்.

வரம்புகள்:

- பிந்தைய கணக்கீட்டுச் செயல்களில் அதிகம் பயன்படுத்த இயலாது.
- இது இடம் சார்ந்த மைய மதிப்பினை மட்டுமே சார்ந்த சராசரி.
- தரவிலுள்ள உண்மை மதிப்புகளைச் சாராத தன்மையும் இதற்கு உண்டு.

5.3.5 முகடு

ஓர் உறுப்பையே மையப்படுத்தி அதைச் சுற்றியே மற்ற உறுப்புகளும் அதிகமாக அமைந்திருப்பதை முகடு சார்ந்த பரவலாகும் என்று கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன் என்ற புள்ளியியலார் கூறுகின்றனர்.

அதிக வாகனங்கள் செல்லும் சாலை ஒன்றில், ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவில் அச்சாலையில் செல்லும் போக்குவரத்து பற்றிய கணக்கெடுப்பு நடத்தியதில் இரு சக்கர வாகனங்களே, மற்ற எல்லா வாகனங்களைவிட அதிகம் செல்வதாகக் கண்டறியப்பட்டது. இக்கணக்கெடுப்பில் இரு சக்கர வாகனங்களே அதிக நிகழ்வெண்களைப் பெற்றிருப்பதால், அதன் முகடு 'இரு சக்கர வாகனம்' என்பதாகும்.

தரவு உறுப்புகளால் ஆன ஒரு கணத்தில் எவ்வுறுப்பு அதிக முறை அதில் நிகழ்ந்திருக்கிறதோ அந்த உறுப்பு முகடு என்று கூறப்படும். இவ்வாறு அமையும் முகடு, ஒரு பரவலில் ஒன்றாகவோ, இரண்டாகவோ, பலவாகவோ இருக்கலாம்.

முகடு காணும் முறை

(a) தொகுக்கப்படாத தரவுகளுக்கு முகடு காணுதல்

ஒரு தரவு கணத்தில் எந்த மதிப்பு அதிக முறை காணப்படுகிறதோ அதுவே முகடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.21

20 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 90, 70, 50, 30, 40, 86, 65, 73, 68, 90, 90, 10, 73, 25, 35, 88, 67, 80, 74, 46 இவற்றிற்கு முகடு காண்க

தீர்வு:

மற்ற எல்லா மதிப்பெண்களை விட 90 என்ற மதிப்பெண் மூன்று முறை நிகழ்ந்திருப்பதால் முகடு 90 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.22

ஒரு மருத்துவர் 9 நோயாளிகளின் குருதிச் சோதனையில் சர்க்கரை அளவைக் கீழ்க்கண்டவாறு காண்கிறார். 80, 112, 110, 115, 124, 130, 100, 90, 150, 180

தீர்வு:

இங்கு ஒவ்வொரு அளவும் ஒரு முறை மட்டுமே நிகழ்ந்திருப்பதால் முகடு இல்லை எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.23

2, 7, 10, 12, 10, 19, 2, 11, 3, 12 என்றவற்றிற்கு முகடு காண்க.

தீர்வு:

இங்கு 10, 12 ஆகிய இரு உறுப்புகளும் இரண்டு முறை இடம் பெற்றிருக்கின்றன. எனவே 10, 12 ஆகிய இரண்டும் முகடுகள் ஆகின்றன.

குறிப்பு:

ஒரு தரவு கணத்தில் முகடுகள் இரண்டும் இரண்டிற்கு மேலும் இருக்கலாம். முகடுகள் இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

(b) தனித்த நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு முகடு காணுதல்

தனித்த நிகழ்வெண் பரவலில் எந்த உறுப்பின் நிகழ்வெண் அதிக மதிப்பைப் பெற்றிருக்கிறதோ அந்த உறுப்பே முகடு எனப்படும்

எடுத்துக்காட்டு 5.24

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு முகடு காண்க

x	6	7	8	9	10
f	4	6	7	5	3

தீர்வு:

இங்கு அதிக மதிப்புடைய நிகழ்வெண் 7 ஆகும். அதற்குரிய x மதிப்பு 8 ஆகும். எனவே முகடு 8 ஆகும்.

(c) தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு முகடு காணுதல்

முகட்டுக்குழு என்பது குழுவில் அதிக நிகழ்வெண் கொண்ட குழுவாகும். முகடு காணும் சூத்திரம் முகடு = $l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$

இங்கு ட = முகட்டுக்குழுவிலுள்ள கீழ் எல்லை மதிப்பு

f_1 = முகட்டுக் குழுவிலுள்ள நிகழ்வெண்

f_0 = முகட்டுக் குழுவிலுள்ள நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய நிகழ்வெண்

f_2 = முகட்டுக் குழுவிலுள்ள நிகழ்வெண்ணுக்கு பிந்தைய நிகழ்வெண்

c = பிரிவிடையளவு

குறிப்புகள்:

(xi) $(2f_1\text{-}f_0\text{-}f_2)$ மதிப்பு பூஜ்ஜியம் எனில் முகட்டை பின்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் பெறலாம்.

$$M_0 = l+\left(\frac{(f_1-f_0)}{|f_1-f_0|+|f_1-f_2|}\times C\right)$$

(xii) முதல் பிரிவிடைக்குழுவில் முகட்டுக்குழு அமையுமானால் f_0 0 என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

(xiii) திறந்த பிரிவு இடைவெளியைக் கொண்ட பரவலில் முகடானது திறந்த பிரிவு இடைவெளியில் அமையாத வரையில், முகட்டைக் கணிப்பதில் எந்த ஒரு சிக்கலும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 5.25

ஒரு நகரத்தின் ஒரு பகுதியில் வாழும் குடும்பத்தினரின் மாத ஊதிய விவரம் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது. அக்குடும்பத்தினரின் மாத ஊதியத்தை முகடு வாயிலாகக் காண்க.

மாத ஊதியம் (ரூபாயில்)	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
எண்ணிக்கை	5	7	12	18	16	10	5

தீர்வு:

எண்ணிக்கை (ரூபாயில்)	எண்ணிக்கை (f)
0-100	5
100-200	7
200-300	12 f_0
300-400	18 f_1
400-500	16 f_2
500-600	10
600-700	5

முகடு $= l+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times C$

அதிகபட்ச நிகழ்வெண் – 18, முகட்டு பிரிவு இடைவெளி : 300-400

இங்கு, $l=300,\ f_0=12,\ f_1=18,\ f_2=16,$

$$\text{முகடு} = 300 + \frac{18-12}{2\times 18-12-16}\times 100$$

$$= 300 + \frac{6}{36-28}\times 100$$

$$= 300 + \frac{6}{8}\times 100$$

$$= 300 + \frac{600}{8} = 300 + 75 = 375$$

முகடு மதிப்பில் அமையும் ஊதியம் 375 ஆகும்.

முகட்டுக் குழுவைக் காணுதல்

நிகழ்வெண் பரவலில் முகட்டு பிரிவு என்பது அதிகபட்ச நிகழ்வெண்ணிற்கு நேராக உள்ள பிரிவு இடைவெளியாகும். ஆனால் ஒரு சில கீழே குறிப்பிட்டுள்ள இடங்களில்

(xiv) அதிக எண்ணிக்கையிலான நிகழ்வெண் திரும்பவும் வரும்போது,

(xv) அதிக எண்ணிக்கையிலான நிகழ்வெண், பரவலின் ஆரம்பத்திலோ முடிவிலோ வரும்போது,

(xvi) பரவலில் தொடர்பற்ற முறையில் வரும்போது, முகட்டுப் பிரிவு காண்பது எளிதானதல்ல. இந்நிலையில் தொகுப்பு அட்டவணை உருவாக்கி, முகட்டுக் குழுவைக் காண்கிறோம். அம்முறையின் படிகளைக் கீழே விளக்கமாகக் காண்போம்.

பகுப்பாய்வு அட்டவணை உருவாக்குதலில் உள்ள படிகள்:

(i) நிரல் 1 இல் கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்களை எழுதுக

(ii) நிரல் 2 இல் அட்டவணையில் காட்டியபடி இரண்டிரண்டாக நிகழ்வெண்களைக் கூட்டி எழுதுக.

(iii) நிரல் 2 இல் அட்டவணையில் காட்டியபடி இரண்டிரண்டாக நிகழ்வெண்களைக் கூட்டி எழுதுக.

(iv) நிரல் 4 இல் நிகழ்வெண்களை மும்மூன்றாகக் கூட்டி எழுதுக

குறிப்பு:

நிகழ்வெண்கள் முகட்டுக் குழுவிற்கு மிக நெருங்கியதாகவோ, அதற்கு முந்தைய மற்றும் பிந்தைய நிகழ்வெண்களுடன் உள்ள வித்தியாசம் மிகக் குறைவானதாகவோ இருந்தால் முகட்டுக் குழுவைக் காண்பதற்கு நிகழ்வெண்களின் பகுப்பாய்வு அட்டவணை அமைத்து அதிலிருந்து ஒரு தொகுப்பு அட்டவணை உருவாக்கி முகட்டுக் குழுவைக் காண்கிறோம்.

(v) முதல் நிகழ்வெண்களை விடுத்து அடுத்துள்ள நிகழ்வெண்களை மும்மூன்றாகக் கூட்டி எழுதுக.

(vi) நிரல் 6 இல், முதல் மற்றும் இரண்டாம் நிகழ்வெண்களை விடுத்து, அடுத்துள்ள நிகழ்வெண்களைக் கூட்டி எழுதுக.

இப்போது ஒவ்வொரு நிரலிலும் அதிக மதிப்புடைய நிகழ்வெண் மதிப்புகளைக் குறித்துக் கொள்க. பிறகு பகுப்பாய்வு அட்டவணையை அமைக்க. அதிலிருந்து முகடு குழுவைக் காண்க. பின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முகடு காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 5.26

பின்வரும் பரவலுக்கு முகடு காண்க.

அளவு	நிகழ்வெண்
0-5	9
5-10	12
10-15	15
15-20	16
20-25	17
25-30	15
30-35	10
35-40	13

தீர்வு:

<table>
<tr><th>குழு</th><th>f</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr>
<tr><td>0-5</td><td>9</td><td rowspan="2">21</td><td></td><td rowspan="2">36</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5-10</td><td>12</td><td>27</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10-15</td><td>15</td><td rowspan="2">31</td><td></td><td></td><td rowspan="2">43</td><td></td></tr>
<tr><td>15-20</td><td>16</td><td></td><td></td><td>48</td></tr>
<tr><td>20-25</td><td>17</td><td rowspan="2">32</td><td>33</td><td rowspan="2">48</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>25-30</td><td>15</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>30-35</td><td>10</td><td rowspan="2">23</td><td>25</td><td></td><td>42</td><td>38</td></tr>
<tr><td>35-40</td><td>13</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

பகுப்பாய்வு அட்டவணை:

குழுக்கள்	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
1					1			
2					1	1		
3				1	1			
4				1	1	1		
5		1	1	1				
6			1	1	1			
மொத்தம்		1	2	4	5	2		

அதிகபட்ச மதிப்பு 20 – 25 என்ற பிரிவு இடைவெளியில் அமைவதால் அதுவே முகட்டு இடைவெளியாகும்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_1\ f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times C$$

$l = 20,\ f_0 = 16,\ f_1 = 17,\ f_2 = 15$

$$= 20 + \frac{17-16}{2\times 17 - 16 - 15} \times C$$

$$= 20 + \frac{1}{34-31} \times 5$$

$$= 20 + \frac{5}{3} = 20 + 1.67 = 21.67$$

$$\text{முகடு} = 21.67$$

(d) வரைபடம் மூலம் முகடு காணுதல்

(vii) கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைக.

(viii) படத்தில் காட்டியுள்ளபடி மிகப் பெரிய செவ்வகத்தின் (முகட்டுச் செவ்வகம்) வலப்பக்க உயர முனையையும் முந்தைய செவ்வகத்தின் வலப்பக்க செவ்வகத்தின் உயர முனையை நேர்க்கோட்டால் இணைக்க. அதேபோல் முகட்டுச் செவ்வகத்தின் இடப்பக்க உயர முனையையும் அச்செவ்வகத்தின் பிந்தைய செவ்வகத்தின் இடப்பக்க உயர முனையையும் நேர்க்கோட்டால் இணைக்க.

(ix) இரு நேர்க்கோடுகள் வெட்டுமிடத்திலிருந்து X அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக.

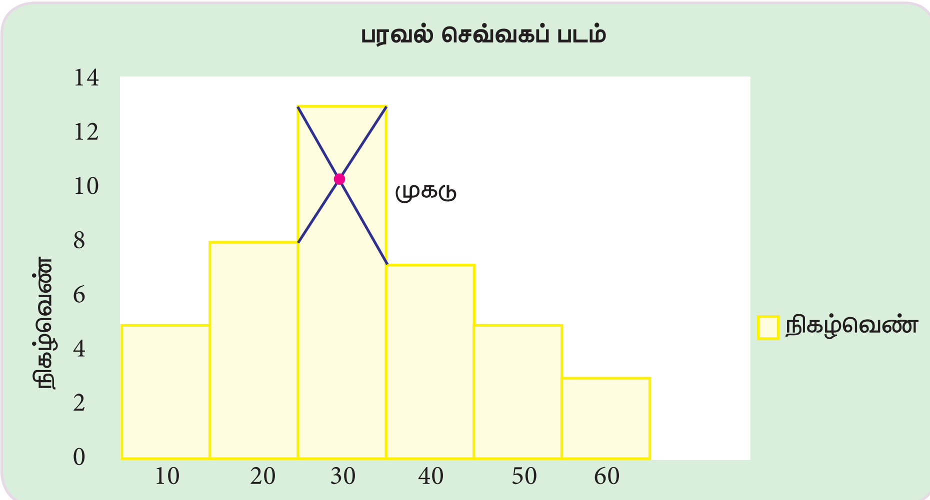
(x) அச்செங்குத்துக் கோடு X அச்சை சந்திக்கும் புள்ளியே முகடு மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.27

வரைபடம் மூலம் கீழ்க்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கு முகடு காண்க.

குழுக்கள்	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
நிகழ்வெண்கள்	5	8	12	7	5	3

தீர்வு:



நிறைகள்:

- இது எளிதில் புரிந்து கொள்ளக்கூடியது.
- இதை வரைபடம் மூலம் காண இயலும்.
- இதைப் பார்த்தறிந்தே கண்டு பிடிக்கலாம்.
- எல்லை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.
- சராசரிகளில் இதை மிக எளிய முறையில் கணக்கிடலாம்.

வரம்புகள்:

- இது பிந்தைய கணிதச் செயல்களுக்கு அதிகம் பயன்படுவதில்லை.
- சமமற்ற பிரிவிடைகளைக் கொண்ட குழுக்களுக்கு முகடு காண இயலாது.
- இரண்டும், அதற்கு மேற்பட்ட முகடுகள் இருக்கும்போது சராசரி காண்பது எளிதன்று.

5.4 கூட்டு சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு.

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் கூட்டு சராசரி, இடைநிலையளவு, முகடு ஆகிய மூன்றும் ஒரே மதிப்பைப் பெற்றால் அப்பரவல் சமச்சீர் பரவல் என்று அழைக்கப்படும். அவை மூன்றும் வேறு வேறு மதிப்புகளைப் பெற்றிருந்தால் அப்பரவல் சமச்சீரற்ற பரவல் அல்லது வளைவுடைய பரவல் என்று அழைக்கப்படும். சுமாரான வளைவையுடைய சமச்சீரற்ற பரவல்களில் கூட்டு சராசரி, இடைநிலையளவு, முகடு ஆகிய மூன்றிற்கும் உள்ள தொடர்பை

முகடு = 3 இடைநிலை – 2 கூட்டு சராசரி

என்று கூறலாம். இத்தொடர்பை கார்ல் பியார்சான் அறிமுகப்படுத்தினார்.

எடுத்துக்காட்டு 5.28

ஒரு சுமாரான சமச்சீரற்ற பரவலில் இடைநிலையளவு 72, கூட்டு சராசரி 78 எனில் முகடு மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

முகடு $= 3$ இடைநிலை $- 2$ சராசரி $= 3\,(72) - 2\,(78)$

$= 216 - 156 = 60$

முகடு $= 60$

எடுத்துக்காட்டு 5.29

ஒரு சுமாரான சமச்சீரற்ற பரவலில், கூட்டு சராசரி, முகடு ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் முறையே 52.3, 60.3 ஆகும். அவ்வாறெனில் இடைநிலை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

முகடு $= 3$ இடைநிலை $- 2$ கூட்டுசராசரி

$60.3 = 3$ இடைநிலை $- 2 \times 52.3$

3 இடைநிலை $= 60.3 + 2 \times 52.3$

$60.3 + 104.6 = 164.9$

இடைநிலை $= \dfrac{164.9}{3} = 54.966 = 54.97$

சராசரி, இடைநிலை, முகடு & வீச்சு

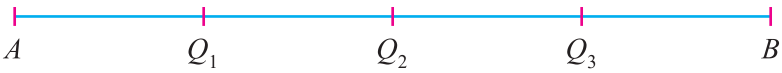
முதலில் ஏறு/ இறங்கு வரிசைப்படி விவரங்களை எழுதவும்.
எடுத்துக்காட்டு: 3, 5, 5, 6, 8, 10, 12

சராசரி	இடைநிலை	முகடு	வீச்சு
விவரங்களின் கூடுதல் வகுத்தல் விவரங்களின் எண்ணிக்கை	விவரத் தொகுப்பின் மைய உறுப்பு	அதிக முறை நிகழும் உறுப்பு	மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம்
1. விவரங்களின் கூடுதல் காண்க 2. கூடுதல் தொகையை விவரங்களின் எண்ணிக்கையால் வகுக்க வேண்டும் 49 ÷ 7 = 7	1. விவரங்களை ஏறு / இறங்கு வரிசையில் எழுதும் போது அதில் மைய உறுப்பு இடைநிலை 2. விவரங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படை எண்ணாக இருப்பின் இரண் டு மைய எண்களின் சராசரியே இடைநிலை	1. விவரத் தொகுப்பில் அடிக்கடி நிகழும் உறுப்பை தெரிவு செய்க (ஒன்றுக்கு மேலும் இருக்கலாம்). 2. எண் 5 இரண்டு முறை உள்ளது எனவே முகடு 5.	1. மிகப்பெரிய மதிப்பிலிருந்து மிகச்சிறிய மதிப்பை கழிக்கவும் . 2. 12−3=9
சராசரி = 7	இடைநிலை = 7	முகடு = 5	வீச்சு=9

5.5 பிரிவு அளவைகள்

5.5.1 கால்மானங்கள்

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றினிடையே Q_1, Q_2 and Q_3 என்ற மூன்று கால்மான இடங்களைக் குறிக்கலாம்.



அதாவது Q_1 க்குக் கீழ் 25% தரவுகளும், Q_2 க்குக் கீழ் 50% தரவுகளும், Q_3 க்குக் கீழ் 75% தரவுகளும் இடம் பெறுவதைக் காணலாம். இங்கு Q_2 என்பது இடைநிலையளவு ஆகும். கால்மானங்களைக் கணக்கிடுவது இடைநிலையளவைக் கணக்கிடுவது போன்றதே ஆகும்.

தொகுக்கப்படாத தரவுகளுக்குக் கால்மானங்கள் காணுதல்:

ஏறுவரிசையில் அமைக்கப்பட்ட n தரவு உறுப்புகளைக் கொண்ட கணத்தில்

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ உறுப்பு, $Q_2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ உறுப்பு மற்றும் $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ உறுப்பு

எடுத்துக்காட்டு 5.30

25, 48, 32, 52, 21, 64, 29, 57 என்ற மதிப்பெண்கள் விவரத்திற்கு முதல் கால்மானம், மூன்றாம் கால்மானம் ஆகியவற்றைக் காண்க

தீர்வு:

$n = 8$

தரவு உறுப்புகளை ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

21, 25, 29, 32, 48, 52, 57, 64

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= \left(\frac{8+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 2.25$ ஆவது உறுப்பு

$= 2$ ஆவது உறுப்பு $+ \left(\frac{1}{4}\right)$ (மூன்றாவது உறுப்பு – இரண்டாவது உறுப்பு)

$= 25 + 0.25\,(29 - 25)$

$= 25 + 1.0$

$Q_1 = 26$

$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 3 \times (2.25)$ ஆவது உறுப்பு

$= 6.75$ ஆவது உறுப்பு

$= 6$ ஆவது உறுப்பு $+ 0.75$ (7 ஆவது உறுப்பு – 6 ஆவது உறுப்பு)

$= 52 + (0.75)\ (57 - 52)$

$= 52 + 3.75$

$Q_3 = 55.75$

தனித்த நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு கால்மானங்கள் காணுதல்

கால்மானங்களைக் காண கீழ்க்கண்ட படிகளை பயன்படுத்தலாம்.

படி 1 : முதலில் குவிவு நிகழ்வெண்களைக் காண்க.

படி 2 : $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ காண்க.

படி 3 : குவிவு நிகழ்வெண்கள் உள்ள நிரலில் $\left(\frac{N+1}{4}\right)$, இன் மதிப்பைவிட அதற்கு அடுத்த அதிக மதிப்புள்ள குவிவு நிகழ்வெண் உள்ள எண்ணுக்கு உரிய x Q_1 மதிப்பு ஆகும்.

படி 4 : $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ காண்க.

படி 5 : குவிவு நிகழ்வெண்கள் உள்ள நிரலில் $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ இன் மதிப்பை விட அதற்கு அடுத்த அதிக மதிப்புள்ள குவிவு நிகழ்வெண் உள்ள எண்ணுக்கு உரிய x இல் உள்ள எண்ணே $Q3$ மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.31

ஒரு கிராமத்தில் உள்ள 543 பேரின் வயது விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்கு Q_1 மற்றும் Q_3 ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

வயது	20	30	40	50	60	70	80
உறுப்பினர் எண்ணிக்கை	3	61	132	153	140	51	3

தீர்வு:

x	f	cf

20	3	3
30	61	64
40	132	196
50	153	349
60	140	489
70	51	540
80	3	543

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= \left(\frac{543+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 136$ ஆவது உறுப்பு

$Q_1 = 40$ ஆண்டுகள்

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 3\left(\frac{543+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 3 \times 136$ ஆவது உறுப்பு

$= 408$ ஆவது உறுப்பு

$Q_3 = 60$ ஆண்டுகள்

தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு கால்மானங்கள் காணுதல்

படி 1 : கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்களுக்கு ஏற்ப குவிவு நிகழ்வெண்களைக் காண்க

படி 2 : $\left(\frac{N}{4}\right)$ காண்க

படி 3 : முதல் கால்மானத்திற்கு $\left(\frac{N}{4}\right)$ காண்க. பின் குவிவு நிகழ்வெண்கள் உள்ள நிரலில் $\left(\frac{N}{4}\right)$ இன் மதிப்பைவிட அதற்கு அடுத்த அதிக மதிப்புள்ள குவிவு நிகழ்வெண் உள்ள நிரையில் உள்ள குழு Q_1 கால்மானக் குழு எனப்படும். இக்குழுவில் பெறும் விவரங்களை Q_1 காணும் சூத்திரத்தில் பிரதியிட முதல் கால்மானம் கிடைக்கும்.

படி 4 : மூன்றாம் கால்மானத்திற்கு $3\left(\frac{N}{4}\right)$ காண்க பின் குவிவு நிகழ்வெண்கள் உள்ள

நிரலில் $3\left(\frac{N}{4}\right)$ இன் மதிப்பைவிட அதற்கு அடுத்த அதிக மதிப்புள்ள குவிவு நிகழ்வெண் உள்ள நிரையில் உள்ள குழு Q_3 கால்மானக்குழு எனப்படும். இக்குழுவில் பெறும் விவரங்களை Q_3 காணும் சூத்திரத்தில் பிரதியிட மூன்றாம் கால்மானம் கிடைக்கும்

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1 \quad \text{மற்றும்} \quad Q_3 = l_3 + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - m_3}{f_3} \times C_3$$

இங்கு $N=\sum f$ = மொத்த நிகழ்வெண்கள்

l_1= முதல் கால்மானக் குழுவின் கீழ்எல்லை

f_1= முதல் கால்மானக் குழுவில் அடைந்த நிகழ்வெண்

c_1= முதல் கால்மானக்குழுவின் அளவு

m_1= முதல் கால்மானக் குழுவில் உள்ள குவிவு எண்ணுக்கு முந்தைய குவிவு எண்

l_3= மூன்றாம் கால்மானக் குழுவின் கீழ்எல்லை

f_3= மூன்றாம் கால்மானக் குழுவில் அமைந்த நிகழ்வெண்

m_3= மூன்றாம் கால்மானக் குழுவின் அளவு

c_3= மூன்றாம் கால்மானக் குழுவில் உள்ள குவிவு எண்ணுக்கு முந்தைய குவிவு எண்

எடுத்துக்காட்டு 5.32

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்குக் கால்மானங்கள் இரண்டினையும் காண்க.

குழுக்கள்	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44
நிகழ்வெண்	12	18	16	14	12	8	6

தீர்வு:

x	*f*	*cf*
30 – 32	12	12
32 – 34	18	30
34 – 36	16	46
36 – 38	14	60
38 – 40	12	72
40 – 42	8	80
42 – 44	6	86

	86	

$$\frac{N}{4} = \frac{86}{4} = 21.5$$

இங்கு 32-34 பிரிவுகளை உடைய குழு முதல் கால்மானக்குழுவாகும்.

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1$$

$$= 32 + \frac{21.5 - 12}{18} \times 2$$

$$= 32 + \frac{19}{18} = 32 + 1.06$$

$$= ₹\ 33.06$$

$$\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 86}{4} = 64.5$$

$\therefore Q_3$ எனவே இங்கு 38-40 பிரிவுகளை உடைய குழு மூன்றாம் கால்மானக்குழுவாகும்.

$$Q_3 = l_3 + \frac{\frac{3}{N} - m_3}{f_3} \times c_3$$

$$= 38 + \frac{64.5 - 60}{12} \times 2$$

$$= 38 + \frac{4.5}{12} \times 2$$

$$= 38 + 0.75 = ₹\ 38.75$$

5.5.2 பதின்மானங்கள்

பதின்மானங்கள் என்பது கால்மானங்களைப் போன்றே அமையும். கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளை கால்மானங்கள் நான்கு பகுதிகளாக பிரிக்கும். பதின்மானங்கள் 10 சமபகுதிகளாக பிரிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.33

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு D_6 காண்க. 11, 25, 20, 15, 24, 28, 19, 21

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

11,15,19,20,21,24,25,28

$$D_6 = \left(\frac{6(n+1)}{10}\right) \text{ உறுப்பு}$$

$$= \left(\frac{6(8+1)}{10}\right) \text{ வது உறுப்பு}$$

$$= \left(\frac{6(9)}{10}\right) \text{ வது உறுப்பு}$$

$= [5.4]$ வது உறுப்பு

$= 5$ வது உறுப்பு $+ (0.4)$ (6 வது உறுப்பு – 5 வது உறுப்பு)

$D_6 = 21+(0.4)(24-21)$

$= 21+(0.4)(3)$

$= 21+1.2$

$= 22.2$

எடுத்துக்காட்டு 5.34

ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள வேலையாட்களின் மாத வருமானம்

வருமானம் (ரூ. ஆயிரத்தில்)	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 24	24 – 28	28 – 32
எண்ணிக்கை	10	12	8	7	5	8	4	6

தீர்வு:

தீர்வு	f	cf
0-4	10	10
4-8	12	22
8-12	8	30
12-16	7	37
16-20	5	42
20-24	8	50
24-28	4	54
28-32	6	60
	N=60	

$$D_5 = \left(\frac{5N}{10}\right) \text{ வது உறுப்பு}$$

$$= \left(\frac{5(60)}{10}\right) \text{ வது உறுப்பு}$$

$$= 30 \text{ வது உறுப்பு}$$

30 வது உறுப்பு 8–12 என்ற இடைவெளியில் அமையும்

$l = 8,\ m = 22,\ f = 8,\ c = 4,\ N = 60$

$$D_5 = l + \left(\frac{\frac{5N}{10} - m}{f}\right) \times c$$

$$= 8 + \left(\frac{30 - 22}{8}\right) \times 4$$

$$= 8 + \frac{8}{8} \times 4$$

$$D_5 = 12$$

வருமானத்தின் D_5 என்பது 12 ஆகும்.

5.5.3 நூற்றுமானங்கள்

பரவலை நூறு சம பாகங்களாக பிரிப்பது நூற்றுமானங்கள் எனப்படும். ஒவ்வொன்றும் 1 சதவீத அளவினைக் குறிக்கும்.

தொடர்பு

$$P_{25} = Q_1$$

$$P_{50} = \text{இடைநிலை} = Q_2$$

$$P_{75} = 3\text{ம் கால்மானம்} = Q_3$$

எடுத்துக்காட்டு 5.35

ஒரு தொழிற்சாலையில் 8 வேலையாட்களின் மாத வருமானம் (ரூ.1000) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது 10, 14, 36, 25, 15, 21, 29, 17 அதன் P_{30} காண்க

தீர்வு:

$$n = 8$$

10,14,15,17,21,25,29,36

$$P_{30} = \left(\frac{30(n+1)}{100}\right) \text{ வது உறுப்பு}$$

$$= \left(\frac{30 \times 9}{100}\right) \text{ வது உறுப்பு}$$

$$= 2.7 \text{ வது உறுப்பு}$$

$= 2$ வது உறுப்பு + 0.7 (3 வது உறுப்பு – 2 வது உறுப்பு)

$= 14+0.7(15-14)$

$= 14+0.7$

$P_{30} = 14.7$

எடுத்துக்காட்டு 5.36

ஒரு தோட்டத்தில் உள்ள செடிகளின் உயரம் தரப்பட்டுள்ளது.

உயரம் (செ.மீ)	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
எண்ணிக்கை	18	20	36	40	26	16

இதன் P_{61} மதிப்பு காண்க

தீர்வு:

குழுக்கள்	f	cf
0 – 5	18	18
5 – 10	20	38
10 – 15	36	74
15 – 20	40	114
20 – 25	26	140
25 – 30	16	156
	N=156	

$$\frac{61N}{100} = \left(\frac{61 \times 156}{100}\right)$$

$= 95.16$ வது உறுப்பு

இந்த மதிப்பு 15-20 இடைவெளியில் அமையும்

$l = 15, m = 74, f = 40, c = 5$

$$P_{61} = l + \left(\frac{\frac{61N}{100} - m}{f}\right) \times c$$

$$= 15 + \left(\frac{95.16 - 74}{40}\right) \times 5$$

$$= 15 + \frac{21.16}{40} \times 5$$

$= 17.645$

$P_{61} = 17.645$

நினைவில் கொள்க...

- மையப்போக்கு அளவை என்பது முழு தரவு மதிப்புகளை ஒரே ஒரு மதிப்பைக் கொண்டு விளக்குவதாகும்.
- கூட்டு சராசரி என்பது தரவின் எல்லா உறுப்புகளையும் கூட்டி, தரவு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைப்பதாகும்.
- ஒரு குழுவில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளுக்கும் சமமுக்கியத்துவம் அளித்து சராசரி கணக்கிடப்பட்டால் அது எளிய கூட்டு சராசரி எனப்படும். குழு உறுப்புகளுக்கு வேறு வேறு நிறைகளை அளித்து சராசரி கணக்கிடப்பட்டால் அது நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி என்று கூறப்படும்.
- ஏறு வரிசையிலோ, இறங்கு வரிசையிலோ தரவு உறுப்புகளை அமைத்தபின் இடையில் உள்ள உறுப்பின் மதிப்பை இடைநிலையளவு அல்லது இடைநிலை என்று கூறப்படும்.
- தரவு உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு தொடரைப் பல பகுதிகளாகப் பிரித்து கணக்கிட்டுக் கிடைக்கும் மதிப்புகள் பிரிவு மதிப்புகள் என்று கூறப்படும். அவை கால்மானங்கள், பதின்மானங்கள், நூற்றுமானங்கள் என்று அழைக்கப்படும்.
- முகடு என்பது ஒரு தொடரில் மிக அதிகமுறை நிகழும் உறுப்பு ஆகும். ஒரு குழுவில் அதிக நிகழ்வெண்கள் பெறும் உறுப்பு முகடு எனப்படும்.

பயிற்சி

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க

6E9RD9

1. கீழ்க்கண்டவற்றில் மையப்போக்கு அளவை எது ?

   (a) இடைநிலை (b) பதின்மானங்கள்

   (c) கால்மானங்கள் (d) நூற்றுமானங்கள்

2. பெருக்கல் சராசரி மற்ற சராசரியை விட எப்பொழுது சிறந்தது?

   (a) தரவுகள் மிகை மற்றும் குறையாக இருக்கும்போது

   (b) தரவுகள் விகிதம் மற்றும் சதவிகிதத்தில் இருக்கும்போது

   (c) தரவுகள் இரட்டையாக இருக்கும்போது

   (d) தரவுகள் இடைவெளியில் இருக்கும்போது

3. தரவுகள் அனைத்தும் சமமாக இருக்கும்போது A.M., G.M. மற்றும் H.M. இவற்றிற்கிடையேயான உறவு

   (a) A.M. = G.M. = H.M. (b) A.M. < H.M. < G.M.

   (c) A.M. < G.M. < H.M. (d) A.M. > G.M. > H.M.

4. 11, 7, 6, 9, 12, 15, 19 மதிப்புகளின் இடைநிலை

   (a)9 (b)12 (c)15 (d)11

5. ஓர் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட தொடரில் மைய மதிப்பு என்பது

(a) 50 வது நூற்றுமானம் (b) இரண்டாம் கால்மானம்

(c) 5வது பதின்மானம் (d) இரண்டாம் கால்மானம்

6. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் முகடு என்பது

(a) சிறும நிகழ்வெண் (b)பெரும நிகழ்வெண்

(c) நிகழ்வெண் (d) இவற்றில் எதுவுமில்லை

7. பதின்மானத்தில் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை

(a) 5 (b) 8 (c) 9 (d) 10

8. முதல் 11 இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி

(a) 46 (b) 23 (c) 48 (d) 42

9. பரவல் செவ்வகப்படம் என்ற வரைபடத்தின் மூலம் கணக்கிடப்படுவது

(a) சராசரி (b) இடைநிலை (c) முகடு (d)மேற்கூறிய அனைத்தும்

10. எந்த சதவிகித மதிப்பு 5வது மற்றும் 25வது நூற்றுமானங்களுக்கு இடையில் அமையும்

(a)15% (b) 30% (c)75% (d) இவற்றில் எதுவுமில்லை

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

11. திறந்த பிரிவு இடைவெளி கொண்ட பரவலில் ----------- காண இயலாது.

12. சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களின் கூடுதல் ------------

13. இரண்டு முகடுகளைக் கொண்ட பரவல் ------------

14. மூன்றாம் கால்மானம் மற்றும் ------------ நூற்றுமானம் சமமானவை.

15. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்கள் ------------- கொடுக்கப்பட்டால் இடைநிலை அளவு மிகப் பொருத்தமான சராசரியாகும்.

III. குறு வினா (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி)

16. மையப்போக்கு அளவைகள் என்றால் என்ன?

17. மையப்போக்கு அளவைகளில் சிறந்த அளவையின் சிறப்பு இயல்புகள் யாவை?

18. கூட்டு சராசரியின் நிறை, குறைகள் யாவை?

19. நிறையிட்ட கூட்டு சராசரியை விவரிக்க?

20. இடைநிலை அளவை வரையறுக்க? இதன் நிறை, குறைகளை விவரிக்கவும்.

IV. சிறு வினா (ஓரிரு சொற்றொடரில் விடையளி)

21. பத்து குடும்பங்களின் மாத வருமானம் (ரூபாயில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

குடும்பம்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
வருமானம் (ரூபாயில்)	85	70	10	75	500	8	42	250	40	36

கூட்டு சராசரி காண்க

22. 100 மதிப்புகளின் சராசரி 30 எனக் கண்டறியப்பட்டது. 32, 12 என்ற மதிப்பிற்கு பதிலாக 23, 11 என்று தவறுதலாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் திருத்தப்பட்ட சராசரியைக் காண்க.

23. ஒரு சைக்கிள் ஓட்டுபவர் முதல் 3 கி.மீ தூரத்தை 8 கி.மீ / மணி வேகத்திலும், அடுத்த 2 கி.மீ தூரத்தை 3 கி.மீ/மணி என்ற வேகத்திலும், கடைசி 2 கி.மீ தூரத்தை 2 கி.மீ / மணி என்ற வேகத்திலும் கடக்கிறார் எனில் அவரது மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகத்தைக் காண்க.

24. 100 மாணவர்களின் மதிப்பெண் சராசரி 40 பிறகு 53 என்ற மதிப்பெண்ணிற்குப் பதிலாக 83 என்று எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் திருத்தப்பட்ட சராசரியைக் காண்க.

25. சமச்சீரற்ற பரவலில் முகடு மற்றும் சராசரி முறையே 32.1 மற்றும் 35.4 எனில்

26. பின்வரும் விவரங்களுக்கு D_9 காண்க.

x	58	59	60	61	62	63	64	65	66
f	2	3	6	15	10	5	4	3	2

27. ஒரு மருத்துவமனையில் எடுக்கப்பட்ட நோயாளிகளின் எடை விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விவரங்களுக்கு P_{40} காண்க.

எடை (கி.கி.)	40	50	60	70	80	90	100
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	15	26	12	10	8	9	5

V. விரிவான விடையளி:

28. சராசரி காண்

கூலி (₹)	60 – 70	50 – 60	40 – 50	30 – 40	20 – 30
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	20	5	3

29. ஒரு பள்ளியில் பயிலும் மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

மதிப்பெண்	>10	>20	>30	>40	>50	>60	>70	>80	>90
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	70	62	50	38	30	24	17	9	4

30. கீழ்கண்ட நிகழ்வெண் பரவல் ஒரு தொலைபேசி இணைப்பகத்தில் தொடர்ச்சியாக 245 நிமிடங்களில் ஒரு நிமிட இடைவெளியில் பெறப்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புகளைக் குறிக்கிறது.

தொலைபேசி அழைப்புகள்	0	1	2	3	4	5	6	7
எண்ணிக்கை	14	21	25	43	51	40	39	12

சராசரி, இடைவெளி, முகடு காண்.

31. ஒரு குழுவில் உள்ள மாணவர்களின் மாத செலவினம் கீழ்கண்ட வரிசையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விவரங்களுக்கு பெருக்கல் சராசரி மற்றும் இசைச்சராசரி காண்க.

125, 130, 75, 10, 45, 0.5, 0.40, 500, 150, 5

32. கீழ்காணும் அட்டவணையில் உள்ள விவரத்திற்கு முகடு காண்:

கூலி (₹)	< 25	25 – 50	50 – 75	75 – 100	100 – 125	> 125
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	10	30	40	25	20	15

33. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு இடைநிலை, முதல்கால்மானம், 7 வது பதின்மானம், 85 வது நூற்றுமானம் காண்

புள்ளியியல் மதிப்பெண்	10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	மேல் 70
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	12	20	32	30	28	12	4

34. ஒரு கல்லூரியில் பயிலும் 60 மாணவர்களின் உயரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உயரம் (செ.மீ)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
145.0 – 149. 9	2
150.0 – 154.9	5
155.0 – 159.9	9
160.0 – 164.9	15
165.0 – 169.9	16
170.0 – 174.9	7
175.0 – 179.9	5
180.0 – 184.9	1

செவ்வகப்படம் வரைந்து அதன் மூலம் முகட்டின் மதிப்பைக் காண்க. கண்டறிந்த மதிப்பை சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி சரிபார்க்கவும்.

35. கீழ்காணும் அட்டவணைக்கு இடைநிலை மற்றும் கால்மானங்கள் காண்க

அளவு	நிகழ்வெண்	அளவு	நிகழ்வெண்
4	40	12	50
5	48	13	52
6	52	14	41
7	56	15	57
8	60	16	63
9	63	17	52
10	57	18	48
11	55	19	43

36. ஒரு வகுப்பில் பயிலும் 50 மாணவர்களில், 10 மாணவர்கள் தோல்வியுற்றனர் அவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 2.5. மொத்த மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் சராசரி 281 எனில் வெற்றி பெற்ற மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் காண்க.

விடைகள்:

I.1. (a) 2. (b) 3. (a) 4. (d) 5. (d) 6. (b) 7.(c) 8. (a) 9. (c) 10. (d

II. 11. சராசரி 12. பூச்சியம் 13. இரு முகடு 14. 5 ஆவது

15. திறந்த இடைவெளி IV. 21.சராசரி = 111.60 22. சராசரி = 29.90

23. சராசரி வேகம் = 3.4 கி.மீ / மணி 24. திருத்தப்பட்ட சராசரி = 39.7

25. இடைநிலை = 34.3 26. D_9 = 65 27. P_{40} = 50

V. 28. இடைநிலை = 46.75 29. இடைநிலை = 43.75

30. சராசரி = 3.76, இடைநிலை = 4, முகடு = 4

31. G.M. = 57.73, H.M. = 2.058 32. முகடு = Rs. 60

33. இடைநிலை = 40.33, முதல் கால்மானம் = 28.25, 7ஆவது பதின்மானம் = 50.07, 85 ஆவது நூற்றுமானம் = 57.9

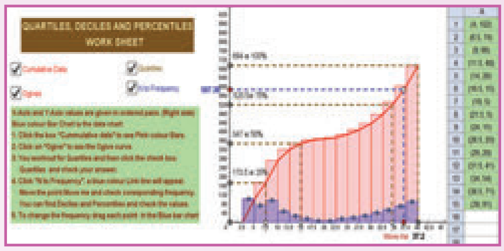
35. இடைநிலை = 11, முதல் கால்மானம = 8, மூன்றாம் கால்மானம் = 15

36. வெற்றி பெற்றவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் = 6.4

இணையச்செயல்பாடு

கால்மானம், பதின்மானம், நூற்றுமானம்

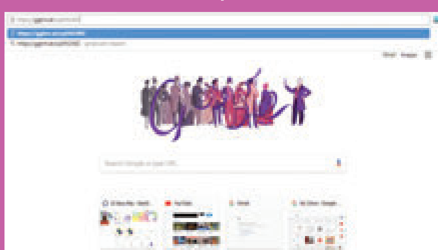
கால்மானம், பதின்மானம், நூற்றுமானம் அறிவோமா !



படிகள்

1. கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க.
2. "11th Standard Statistics" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகத்தில் "Quartiles"க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்
3. கால்மானங்கள் பக்கத்தில் பட்டியலுக்கான நீல வண்ணச் செவ்வகப்படம் தோன்றும். "Cumulative data"–வைச் சொடுக்கினால் குவிவு அலைவெண்களின் செவ்வகப்படம், இளஞ்சிவப்பு வண்ணத்தில் தோன்றும். "Ogive" "–வைச் சொடுக்கினால் ஓகைவ் வளைவு சிவப்பு வண்ணத்தில் தோன்றும். நீங்கள் புத்தகத்தில் உள்ள படி கால்மானங்கள், பதின்மானங்கள் மற்றும் நூற்றுமானங்களைக் கணக்கிடவும்.
4. இப்பொழுது "Quartiles" – ஐச் சொடுக்கி விடைகளைச் சரி பார்க்கவும். "N to frequency" – ஐச் சொடுக்கி வரைபடத்தில் அச்சில் உள்ள "**நீல வண்ணப் புள்ளியை**" நகர்த்தி பதின்மானங்களையும் நூற்றுமானங்களையும் சரி பார்க்கவும்.

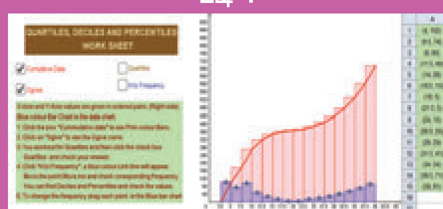
படி 1



படி 2

படி 3

படி 4



* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

உரலி:

https://ggbm.at/uqVhSJWZ

B136_11_STA_TM

6

சிதறல் அளவைகள்

கார்ல் பியார்ஸான்
(27 மார்ச் 1857 – 27 ஏப்ரல் 1936)

கார்ல் பியார்ஸான் இ;ங்கிலாந்தில் பிறந்த கணிதவியலாளரும், உயிரிப்புள்ளியியலாளரும் ஆவார். இவர் கணிதப்புள்ளியியல் என்ற பிரிவு அமைவதற்குக் காரணமாக இருந்தவர் ஆவார். உலக அளவில் முதன் முதலாக புள்ளியியல் துறையை லண்டன் பல்கலைக்கழகத்தில் 1911ஆம் ஆண்டு தோற்றுவித்தார். மேலும் உயிரியளவுகள், வானிலையியல், சமூக டார்வினிசம், இன மேம்பாட்டியல் போன்ற பல துறைகளிலும் அவரது பங்களிப்புகள் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் இருக்கின்றன. குறிப்பாக 1893–1904 ஆண்டுகளில், உயிரியளவுகளில் புள்ளியியல் நுணுக்கங்களை உருவாக்கியுள்ளார். இம்முறைகள் இன்றளவும் புள்ளியியல் பகுப்பாய்வுகளில் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது.

'இரு தானியங்களோ, இரு தலைமுடிகளோ முழுவதும் ஒரே மாதிரியாக இருப்பதில்லை. அதேபோல் முழுவதுமாக இரண்டு ஒத்த கருத்துகள் என்பதே இல்லை எனலாம். வேறுபாடுகள் நிறைந்த பண்புகளே அதிகம் என்பதே உலக நியதி'.

- மைக்கேல் டி மாண்டெயின்

நோக்கங்கள்

- சிதறல் அளவை கருத்துக்ளின் முக்கியத்துவத்தை கூறுதல்.
- சிதறல் அளவையை அளவிடுதல் மற்றும் அதற்கான காரணங்களை அறிதல்.
- வீச்சு மற்றும் திட்டவிலக்கம் பற்றி விவரித்தல்
- கோட்டக் கெழு, தட்டையளவை ஆகியவற்றின் பங்கினை விவரித்தல்.
- விலக்க பெருக்குத் தொகை பற்றி விளக்குதல்.
- கட்டவிளக்கப் படம் வரைந்து விவரித்தல்.

6EIMEH

அறிமுகம்:

மைய அளவைகள் சராசரியை சுற்றி எவ்வாறு அமைந்துள்ளன என்பதை விவரிக்கிறது. ஆனால் பரவலின் மதிப்புகள் மைய அளவைகளிலிருந்து எவ்வாறு சிதறியுள்ளன என்பதை

வெளிப்படுத்துவதில்லை. எனவே தரவுகளைப் பற்றி விவரிக்கும்பொழுது அவை எந்த அளவு மைய அளவைகளைச் சுற்றி அல்லது சிதறி உள்ளன என்பதை விவரிப்பது முக்கியமானதாகிறது.

எடுதுக்காட்டு 6.1

ஒரு தொடர் கிரிக்கெட் போட்டியில் இரண்டு கிரிக்கெட் வீரர்கள் பெற்ற ஓட்டங்களைக் காண்போம்.

வீரர்கள்	I	II	சராசரி
வீரர் 1	0	100	50
வீரர் 2	40	60	50

இரு சராசரிகளைப் பார்க்கும்பொழுது நாம் இரு வீரர்களும் ஒரே மாதிரி செயல்படுகின்றனர் என்ற யு+கத்திற்கு வருகிறோம். ஆனால் 1 வீரர் முதல் இன்னிங்ஸில் 0 ஓட்டத்தையும் இரண்டாவதில் 100 ஓட்டங்களையும் பெற்றுள்ளார். மாறாக 2 வீரர் ஒரே மாதிரியான ஓட்டங்களை சீராக இரண்டு இன்னிங்ஸிலும் பெற்றுள்ளார். எனவே தரவினை தெளிவாகப் புரிந்துகொள்ள சிதறல் அளவை தேவையாகிறது.

6.1 சிறந்த சிதறல் அளவைக்குரிய குணாதிசயங்கள்

விழுமிய சிதறல் அளவையின் எதிர்பார்க்கப்படும் குணாதிசயங்கள் பின்வருமாறு.

(i) இது நன்கு தெளிவாக வரையறுக்கப்படவேண்டும்.

(ii) இது அனைத்து தரவு மதிப்புகளையும் சார்ந்து அமைதல் வேண்டும்.

(iii) இது புரிந்து கொள்வதற்கும் மற்றும் கணக்கீடு செய்வதற்கும் எளிதாக இருக்க வேண்டும்.

(iv) இது கணித விரிவாக்கத்திற்கு உட்படுத்திக்கொள்வதாக இருத்தல் வேண்டும்.

(v) இது மாதிரி கணிப்பு முறையின் ஏற்ற இறக்கங்களால் பாதிக்கப்படாததாக இருக்க வேண்டும்.

(vi) இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படாததாக இருக்க வேண்டும்.

6.2 சிதறல் அளவைகளின் வகைகள்:

வீச்சு, கால்மான விலக்கம், சராசரி விலக்கம் (சராசரி, இடைநிலை) திட்டவிலக்கம் மற்றும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள்.

சிதறல் அளவைகள் இரண்டு வகைகளாக பிரிக்கப்படுகிறது. அவை

(i) தனித்த சிதறல் அளவைகள்

(ii) ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள்.

6.3 தனித்த சிதறல் அளவைகள்:

இவை மதிப்புகளின் அளவுகளின் அலகுகளைக் கொண்டதாகும். உதாரணமாக (i) ஊதியங்களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் ரூபாயிலும் மற்றும் (ii) தொழிலாளர்கள் வேலை செய்ய எடுத்துக்கொள்ளும் நேர மாறுபாடு மணியிலும் கணக்கிடப்படுகிறது. இவ்வகை அளவைகள் வெவ்வேறு அலகுகளில் உள்ளதால் ஒப்பிடலுக்கு உகந்ததல்ல.

6.3.1 வீச்சு:

தனித்த தொகுதி

இது மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச் சிறிய மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. R= L - S

தொடர் தொகுதி:

தொடர் தொகுதியின் வீச்சு என்பது அதிகபட்ச பிரிவின் மேல் எல்லைக்கும், குறைந்த பட்ச பிரிவின் கீழ் எல்லைக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம்

வீச்சுக்கெழு

வீச்சின் ஒப்பீட்டு அளவை வீச்சுக்கெழு எனப்படுகிறது.

வீச்சுக்கெழு= (L- S) / (L+ S)

எடுதுக்காட்டு 6.2

10 மாணவர்களின் உயரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வீச்சு மற்றும் அதன் கெழுவை காண்க. 158, 164, 168, 170, 142, 160, 154, 174, 159, 146,

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஏறுவரிசையில் எழுதுக

142, 146, 154, 158, 159, 160, 164, 168, 170, 174

L=142 S = 174

வீச்சு= L – S = 174 – 142 = 32

வீச்சுக்கெழு = (L - S)/(L + S)

= (174-142) / (174+142) = 32 / 316 = 0.101

எடுதுக்காட்டு 6.3

கீழ்க்கண்ட பரவலிருந்து வீச்சு மற்றும் அதன் வீச்சுக்கெழுவை கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	60-63	63-66	66-69	69-72	72-75
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	18	42	27	8

தீர்வு:

L = அதிகபட்ச பிரிவின் மேல் எல்லை = 75

S = குறைந்தபட்ச பிரிவின் கீழ் எல்லை = 60

வீச்சு = L-S = 75-60 = 15

$$\text{வீச்சுக்கெழு} = \frac{(L-S)}{(L+S)}$$

$$= \frac{15}{(75+60)} = \frac{15}{135} = 0.111$$

நன்மைகள்:

- வீச்சு என்பது ஓர் எளிய சிதறல் அளவை
- இது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. மற்றும் கணக்கிட எளியது.
- தரக்கட்டுப்பாடு, தட்பவெப்பநிலை முன்னறிதல் மற்றும் பங்கு விலை மாறுபாடு ஆகிய இடங்களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

வரம்புகள்:

- இது மற்ற மதிப்புகளைச் சார்ந்ததல்ல. இது இரு விளிம்பு மதிப்புகளை மட்டும் சார்ந்துள்ளது (மிகப் பெரிய மதிப்பு மற்றும் மிகச் சிறிய மதிப்பு).
- இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பெரிதும் பாதிக்கப்படுகின்றது.
- திறந்த – வெளி பிரிவு இடைவெளிகளில் இதைக் கணக்கிட முடியாது.
- இது பிந்தைய கணக்கியல் பயன்பாடுகளுக்கு ஏற்றதன்று.

6.3.2 இடைக்கால்மான வீச்சு மற்றும் கால்மான விலக்கம்

கால்மானங்கள் Q_1, Q_2 and Q_3 ஐந்தாம் பாடப்பகுதியில் விரிவாகப் பார்த்தோம். அவற்றை பயன்படுத்தி இடைக்கால்மான வீச்சினைக் காணலாம்.

இடைக்கால்மான வீச்சு (IQR) = $Q_3 - Q_1$

கால்மான விலக்கம் என்பது முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மான விலக்கங்களின் வித்தியாசத்தில் பாதியாகும்.

$$\text{வீச்சுக்கெழு } Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

இது அரை இடைக்கால்மான வீச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

கால்மான விலக்கக் கெழு:

கால்மான விலக்கத்தின் ஒப்பீட்டு அளவினை கால்மான விலக்கக்கெழு என்கிறோம்:

$$\text{கால்மான விலக்கக்கெழு} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

நன்மைகள்:

- தரவு மதிப்புகளின் விளிம்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படாது (மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய)
- திறந்தவெளி பிரிவு விவரங்கள் சிற்றலைக்கான பொருத்தமான அளவையாகும்.
- கோட்ட அளவு அதிகமுள்ள பரவலுக்கு இது உகந்த அளவையாகும்.

வரம்புகள்:

- அரை இடைக்கால்மான வீச்சு (Q.D) இடைப்பட்ட 50% விவரங்களை மட்டும் உள்ளடக்கி மற்ற விவரங்களைக் கணக்கிடுவதில்லை. எனவே இது ஓர் சிறந்த சிதறல் அளவை அல்ல.
- கணக்கியல் முறையில் பயன்படாது
- இது மாதிரிமுறை ஏற்றத் தாழ்வுகளால் பாதிக்கப்படுகிறது.
- அரை இடைக்கால்மான வீச்சு (Q.D) ஓர் இடம் சார்ந்த அளவை, மேலும் எந்த ஓர் சராசரியுடன் தொடர்புபடுத்த இயலாது.

6.3.3 சராசரி விலக்கம்:

ஒரு மைய அளவையிலிருந்து தொடரின் மதிப்புகள் ஏற்படுத்தும் விலக்கங்களின் சராசரியே சராசரி விலக்கமாகும் (MD) எல்லா விலக்கங்களும் நேரிடை மதிப்புகளாகவே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.

மைய அளவைகள் சராசரி அல்லது இடைநிலையாக இருக்கலாம். மைய அளவை சராசரியாக (இடைநிலை) இருந்தால் சராசரி விலக்கம் சராசரி (இடைநிலை)யிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது.

சராசரி விலக்கம் MD (சராசரியைப் பொறுத்து) $= \frac{\sum|D|}{n}$ $\quad D = (x - \bar{x})$

சராசரி விலக்கம் MD (இடைநிலையைப் பொறுத்து) $= \frac{\sum|D_m|}{n} = D_m = x -$ இடைநிலை

சராசரி விலக்கத்தின் ஒப்பீட்டு அளவை சராசரி விலக்கக்கெழுவாகும் (C.M.D.).

சராசரி விலக்கக்கெழு $= \dfrac{\text{MD. (சராசரி (அ) இடைநிலை)}}{\text{சராசரி (அ) இடைநிலை}}$

எடுதுக்காட்டு 6.4

ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் ஒரு மருத்துவமனையில் அனுமதிக்கப்பட்ட 10 குழந்தைகளின் எடை விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அவ்விவரங்களுக்கு விலக்கசராசரி சராசரியிலிருந்தும், இடைநிலையிலிருந்தும் காண்க. மேலும் அவற்றின் கெழுக்களைக் காண்க.

7, 4, 10, 9, 15, 12, 7, 9, 9, 18

தீர்வு:

$n = 10$; சராசரி: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{100}{10} = 10$

இடைநிலை: ஏறுவரிசை மதிப்புகள்: 4, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 12, 15, 18

இடைநிலை $= \frac{9+9}{2} = \frac{18}{2} = 9$:

எடை (x)	$\|D\| = \|x-\bar{x}\|$	$\|D_m\| = \|x-$ இடைநிலை$\|$
7	3	2
4	6	5
10	0	1
9	1	0
15	5	6
12	2	3
7	3	2
9	1	0
9	1	0
18	8	9
மொத்தம் =**100**	**30**	**28**

கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம் $= \frac{\sum|D|}{n} = \frac{30}{10} = 3$

சராசரி விலக்கக் கெழு = சராசரி விலக்கம் / சராசரி $= \frac{\text{MD (சராசரியைப் பொறுத்து)}}{\bar{x}}$

$= \frac{3}{10} = 0.3$

இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் $= \frac{\sum|Dm|}{n}$

$= \frac{28}{10} = 2.8$

இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் $= \frac{\text{MD (சராசரியைப் பொறுத்து)}}{\text{இடைநிலை}}$

$= \frac{2.8}{9} = 0.311$

6.3.4 திட்ட விலக்கம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கருதுக:

10, 7, 6, 5, 4, 3, 2
10, 10, 10, 9, 9, 9, 2 ,2
10, 4, 4, 3, 2, 2, 2

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று விவரங்களின் வீச்சு ஆகும். கவனமாக பார்க்கும் பொழுது மூன்று விவரங்களும் வெவ்வேறான இம்மாறுபாடு திட்டவிலக்கம் மூலம் கணக்கிடப்படலாம் என கார்ல் பியர்சன் 1893–ல் அறிமுகப்படுத்தினார்.

வரையறை:

கூட்டுசராசரியிலிருந்து விவரங்களுக்கு பெறப்படும் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியின் நேரிடை வர்க்கமூலம் திட்டவிலக்கம் ஆகும். σ திட்டவிலக்கம் என்ற கிரேக்க எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது.

(a) செப்பனிடா விவரம்

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ கொடுக்கப்பட்ட செப்பனிடா விவரங்கள் எனில் திட்டவிலக்கம்

1. உண்மையான சராசரி முறை: திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$, $d = x - \bar{x}$

2. யூக சராசரி முறை: திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$,$d = x$-A

(b) தொகுக்கப்பட்ட விவரம் (Discrete)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \text{ , } d = x\text{-A}$$

இங்கு f = பிரிவு இடைவெளியின் அகலம்

N = பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண்

x = பிரிவு இடைவெளியின் மைய மதிப்பு இங்கு A யூக சராசரி

(c) தொகுக்கப்பட்ட விவரம் (continuous)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \times C, \quad d = \frac{x - A}{c}$$

இங்கு f = பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண்

N = நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்

c = பிரிவு இடைவெளியின் அகலம்

x = பிரிவு இடைவெளியின் மைய மதிப்பு

இங்கு A யூக சராசரி

மாறுபாடு: சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மாறுபாடு ஆகும்.

மாறுபாட்டின் வர்க்க மூலமே திட்ட விலக்கம் ஆகும்.

குறிப்பு:

திட்டவிலக்கத்தை கீழ்க்கண்ட முறையிலும் காணலாம்.

1. $\sigma = \frac{1}{n}\sqrt{n\sum d^2 - \left(\sum d\right)^2}$ (செப்பனிடா விவரம்)

2. $\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum fd^2 - \left(\sum fd\right)^2} \times C$

(தொகுக்கப்பட்ட விவரம்) $d = (x\text{-A})/c$

மாறுபாட்டின் வர்க்க மூலமே திட்ட விலக்கம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.5

7 வெவ்வேறு நாட்களில் ஒரு பள்ளியில் நூலகத்திலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை 7, 9, 12, 15, 5, 4, 11 புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையின் திட்டவிலக்கம் காண்.

தீர்வு:

உண்மையான சராசரி முறை

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\frac{7+9+......+11}{7} = \frac{63}{7} = 9$$

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
7	-2	4
9	0	0
12	3	9
15	6	36
5	-4	16
4	-5	25
11	2	4
		94

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{94}{7}}$$

$$= \sqrt{13.43}$$

$$= 3.66$$

குறிப்பு:

திட்டவிலக்கம் காண இரண்டு வழிமுறைகளைப் பின்பற்றலாம்.

1. நேரடி முறை
2. சுருக்க முறை

நிறைகள்:

- தரவு அனைத்து மதிப்புகளையும் சார்ந்துள்ளது.
- மாதிரி முறை ஏற்றத்தாழ்வுகளால் குறைந்த அளவு பாதிக்கப்படுகிறது.
- பிந்தைய கணிதச் செயல்பாடுகளுக்கு ஏற்றது.

வரம்புகள்:

- ஏனைய சிதறல் அளவைகளைவிட திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுவது கடினமாகும்.
- விளிம்பு மதிப்புகளுக்கு அதிக நிறையைத் தருகின்றது மற்றும் கூட்டு சராசரி அருகில்

உள்ள விவரங்களுக்கு குறைந்த நிறையைத் தருகிறது.

- திறந்தவெளி பிரிவு இடைவெளிகளில் கணக்கிட இயலாது.
- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தரவு தொகுதிகள் வெவ்வேறு அலகுகளில் இருப்பின் அவற்றிற்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டை ஒப்பிட இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 6.6

செப்பனிடா விவரம்:

ஒரு மருத்துவமனையில் அனுமதிக்கப்பட்டுள்ள 10 குழந்தைகளின் எடையளவு பின்வருமாறு 13, 15, 12, 19, 10.5, 11.3, 13, 15, 12, 9 இம்மதிப்புகளுக்கு திட்டவிலக்கம் காண்

தீர்வு:

கூட்டுசராசரி $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$= \frac{13 + 15 + ... + 49}{10}$

$= \frac{129.8}{10}$

$= 12.98$

குறிப்பு

சராசரியின் மதிப்பு தசம எண்ணாக இருந்தால் திட்டவிலக்கம் காண்பது கடினம். இந்நிலையில் யூக சராசரி முறை பயன்படுத்தப்படலாம்..

உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கம்

x	$d = x$-12.98	d^2
13	0.02	0.0004
15	2.02	4.0804
12	–0.98	0.9604
19	6.02	36.2404
10.5	2.48	6.1504
11.3	–1.68	2.8224
13	0.02	0.0004
15	2.02	4.0804
12	–0.98	0.9604
9	–3.98	15.8404
n =10		**71.136**

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{71.136}{10}}$

$= 2.67$

எடுதுக்காட்டு 6.7

முதல் n இயல்எண்களின் திட்டவிலக்கம் காண்.

தீர்வு:

முதல் n இயல் எண்கள் 1, 2, 3 ... n அவற்றின் கூடுதல் மற்றும் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$\sum x_i = 1+2+3+.....+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum x_i^2 = 1^2+2^2+3^2+.....n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{சராசரி } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{(n+1)}{2}$$

$$\frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{திட்டவிலக்கம், } \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)[2(2n+1) - 3(n+1)]}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{12}} = \sqrt{\frac{(n^2-1)}{12}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n^2-1)}{12}}$$

எடுதுக்காட்டு 6.8

ஒரு மாதத்தில் தொடர்ச்சியாக ஏழு நாட்கள் விற்பனை செய்யப்பட்ட மொத்த விலை விற்பனை பின்வருமாறு

நாட்கள்	1	2	3	4	5	6	7
பொருட்களின் விலை ₹ குவிண்டால்	240	260	270	245	255	286	264

மாறுபாடு மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க

தீர்வு:

x இன் மதிப்புகள் பெரிய எண்களாக இருந்தால் மாறுபாடு மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்பது கடினமாகும். இந்நிலையில் யூகசராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி திட்டவிலக்கம் காணலாம்.

இங்கு A, $d = x - A$ சராசரி

இந்த வினாவிற்கு A.M. =255 எனப் பயன்படுத்தலாம்

விவரங்கள் (x)	$d = x - A$	d^2
240	–15	225
260	5	25
270	15	225
245	–10	100
255 A	0	0
286	31	961
264	9	81
	35	**1617**

$$\text{மாறுபாடு} = \sigma^2 = \frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1617}{7} - \left(\frac{35}{7}\right)^2$$

$$= 231 - 5^2$$

$$= 231 - 25$$

$$= 206$$

$$\text{திட்டவிலக்கம் } \sigma = \sqrt{\text{மாறுபாடு}}$$

$$\sigma = \sqrt{206} = 14.35$$

எடுத்துக்காட்டு 6.9

18 விவரங்களின் சராசரி 14 மட்டும் திட்டவிலக்கம் 12 மேலும் ஓர்விவர மதிப்பு 8 கூடுதலாக சேர்க்கப்பட்டால் கிடைக்கும் சரியான சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்.

தீர்வு:

18 விவரங்களின் கூடுதல் $= n \times \bar{x} = 18 \times 14 = 252.$

விவரங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$12^2 = \frac{\sum x^2}{18} - 142$$

$$144+196 = \frac{\sum x^2}{18}$$

$$\frac{\sum x^2}{18} = 340$$

$$\sum x^2 = 340 \times 18 = 6120$$

கூடுதல் விவரம் 8 சேர்க்கப்படின், $n = 19$,

$\Sigma x = 252+8 = 260$

சரியான சராசரி $= \frac{260}{19} = 13.68$

சரியான $\sum x^2 = \sum x^2 + 8^2$

$= 6120+64$

$= 6184$

சரியான மாறுபாடு $\sigma^2 = \frac{6184}{19} - 13.68^2$

$= 325.47 - 187.14$

$= 138.33;$

சரியான திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{138.33}$

$\sigma = 11.76$

எடுதுக்காட்டு 6.10

100 தொழிற்சாலைகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பின்வருமாறு

இலாபம் ரூ. கோடியில்)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
தொழிற்சாலைகளின் எண்ணிக்கை	8	12	20	30	20	10

இலாபத்திற்கான திட்டவிலக்கம் காண்

தீர்வு:

A = 35 C = 10

இலாபம் ரூ(கோடியில்)	மைய மதிப்பு (x)	$d = \frac{x-A}{C}$	f	fd	fd^2
0 – 10	5	-3	8	-24	72
10 – 20	15	-2	12	-24	48
20 – 30	25	-1	20	-20	20
30 – 40	35	0	30	0	0

40 – 50	45	1	20	20	20
50 – 60	55	2	10	20	40
மொத்தம்			**100**	**-28**	**200**

$$\text{திட்டவிலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2} \times C$$

$$= \sqrt{\frac{200}{100} - \left(\frac{-28}{100}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2-(0.078)} \times 10$$

$$= 13.863$$

பயிற்சி:

மேற்கண்ட வினாவிற்கு மற்ற இரு சூத்திரங்களையும் பயன்படுத்தி திட்டவிலக்கம் காணவும்.

6.4 இணைந்த திட்டவிலக்கம்

6.4.1 இணைந்த கூட்டு சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம்

இணைந்த கூட்டு சராசரி ஒவ்வொரு தரவுத் தொகுதியின் எண்ணிக்கை மற்றும் கூட்டுசராசரியை கொண்டு கணக்கிடலாம்.

$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \sigma_1, \sigma_2$ என்பன n_1 மற்றும் n_2 எண்ணிக்கையைக் கொண்ட முதல் மற்றும் இரண்டாம் தரவுத் தொகுதிகளின் கூட்டுசராசரி மற்றும் தி;ட்டவிலக்கம் எனில்

$$\text{இணைந்த கூட்டு சராசரி } \overline{x_{12}} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1+n_2} \quad \text{(இரண்டு தொகுதிகள் எனில்)}$$

$$\overline{x}_{123} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2} + n_3\overline{x_3}}{n_1+n_2+n_3} \quad \text{(மூன்று தொகுதிகள் எனில்)}$$

இணைந்த திட்டவிலக்கம்

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1+n_2}}$$

$$d_1 = \overline{x_{12}} - \overline{x_1}$$

$$d_2 = \overline{x_{12}} - \overline{x_2}$$

எடுதுக்காட்டு 6.11

இரு தொண்டு நிறுவனங்களின் (ஓஇ லு) தொழிலாளர்களுக்கு வழங்கப்பட்ட மாத ஊதியத்தை ஆராய்ந்தபொழுது கிடைக்கப்பெற்ற விவரங்கள் பின்வருமாறு

	நிறுவனம் X	நிறுவனம் Y

தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	550	650
மாத ஊதிய சராசரி	5000	4500
ஊதியத்திற்கிடையேயான மாறுபாடு	900	1600

(i) எந்த நிறுவனம் அதிக மாத ஊதியம் வழங்குகிறது.

(ii) எந்த நிறுவனம் தனிநபர் ஊதியத்தில் அதிக மாறுபாட்டை உடையது?

தீர்வு:

(i) X மற்றும் Y நிறுவனங்களில் வழங்கப்பட்ட மொத்த ஊதியம்

$X: n_1 \times \bar{x}_1 = 550 \times 5000 = ₹\ 27{,}50{,}000$

$Y: n_2 \times \bar{x}_2 = 650 \times 4500 = ₹\ 29{,}25{,}000$

நிறுவனம் Y அதிக தொகையை மாத ஊதியமாக வழங்குகிறது.

(ii) இணைந்த மாறுபாடு காண முதலில் இணைந்த சராசரி காணவேண்டும்.

$$\overline{x_{12}} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{2750000 + 29250000}{550 + 650}$$

$$= \text{Rs. } 4729.166$$

இணைந்த திட்டவிலக்கம்

$$d_1 = \overline{x_{12}} - \overline{x_1} = 4729.166—5000 = -270.834$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{n_1\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right) + n_2\left(\sigma_2^2 + d_2^2\right)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{550(900 + 73{,}351.05) + 650(1600 + 52{,}517.05)}{550 + 650}}$$

$$= \sqrt{\frac{4{,}08{,}38{,}080.55 + 3{,}51{,}76{,}082.50}{1200}} = \sqrt{633445} = 251.68$$

6.5 ஒப்பீட்டு அளவைகள் (Relative Measures)

ஒப்பீட்டு அளவை என்பது எந்த ஓர் அலகையும் சாரா அளவையாகும். வெவ்வேறு அலகுகளைக் கொண்ட இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொகுதிகளின் மாறுபாட்டை ஒப்பிடுவதற்கு இவை பயன்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு ஊட்டச்சத்து நிபுணர் இந்தியா மற்றும் இங்கிலாந்தில் பயிலும்

மாணவர்களின் உடல் எடையை ஒப்பிட விரும்புகிறார் எனில் அவர் இரண்டு நாடுகளிலும் தரவுகளைச் சேகரிக்கிறார். சாதாரணமாக இங்கிலாந்தில் உடல் எடை பவுண்டிலும் இந்தியாவில் கிலோகிராமிலும் கணக்கிடப்படுகிறது. இந்த விவரங்களை தனித்த சிதறல் அளவைகளைக் கொண்டு ஒப்பிடுவதைவிட ஒப்பீட்டு அளவைகளைப் பயன்படுத்தி ஒப்பிடுவது அர்த்தமுடையதாகிறது.

6.5.1 மாறுபாட்டுக்கெழு

திட்டவிலக்கம் ஒரு தனித்த சிதறல் அளவை. இது சேகரிக்கப்பட்ட விவர மதிப்புகளின் அலகுகளாலேயே அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக மாணவர்களின் உயரத்தின் (செ.மீ) திட்டவிலக்கத்தையும் எடையின் (கி.கி) திட்டவிலக்கத்தையும் ஒப்பிட இயலாது. ஏனென்றால் இரண்டும் வெவ்வேறு அலகுகளால் குறிக்கப்படுகின்றன. எனவே, ஒப்பிடும் நோக்கத்திற்காக திட்டவிலக்கத்தை ஒப்பிட்டு சிதறல் அளவையாக மாற்ற வேண்டும். இந்த ஒப்பிட்டு சிதறல் அளவை மாறுபாட்டுக் கெழு என அறியப்படுகிறது.

திட்டவிலக்கத்தை கூட்டுசராசரியால் வகுத்து 100ஆல் பெருக்கி மாறுபாட்டுக் கெழு பெறப்படுகிறது.

$$\text{மாறுபாட்டுக் கெழு } (C.V) = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

இருவேறு தொடர்களை ஒப்பிட மாறுபாட்டுக் கெழு பயன்படுத்தப்படலாம். மாறுபாட்டுக் கெழு அதிகமாகக் கொண்ட தரவுத்தொகுதி மாறுபாட்டுகெழு குறைவாகக் கொண்ட தரவுத் தொகுதியைவிட குறைந்த நிலைத்தன்மை மற்றும் குறைந்த சீரான்மை கொண்டதாக இருக்கும்.

நிறைகள்:

- மாறுபாட்டுக் கெழு அலகுகளைச் சாராத அளவையாகும். திட்டவிலக்கம் அலகுகளைச் சார்ந்த அளவையாகும். எனவே ஒப்பிடும்போது திட்டவிலக்கத்தைப் பயன்படுத்துவதைவிட மாறுபாட்டுக் கெழுவை பயன்படுத்துவதே சிறந்ததாகும்.

குறைகள்:

- சராசரியின் மதிப்பு பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும்போது மாறுபாட்டுக் கெழு முடிவிலியை நெருங்கும். எனவே சராசரியில் ஏற்படும் சிறு மாறுபாடுகூட மிகப்பெரிய மாற்றத்தை ஏற்படுத்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.12

ஒரு தரவுத்தொகுதியின் மாறுபாட்டுக் கெழு மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 50, 4 எனில் சராசரி காண்.

தீர்வு:

$$\text{மாறுபாட்டுக் கெழு} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$50 = \frac{4}{\bar{x}} \times 100$$

$$\bar{x} = \frac{4}{50} \times 100 = 8$$

எடுத்துக்காட்டு 6.13

ஒரு மட்டைப்பந்து விளையாட்டில் இரு மட்டையாளர்கள் A, B யின் 10 இன்னிங்ஸில் ஓட்டங்களின் விவரங்கள் பின்வருமாறு

A: சராசரி ஓட்டம் = 50; திட்டவிலக்கம் = 5

B: சராசரி ஓட்டம் = 75; திட்டவிலக்கம் = 25

எந்த மட்டையாளர் மிகுந்த நிலைப்புத்தன்மை உடையவர்.

தீர்வு:

மாறுபாட்டுக் கெழு (C.V) $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

மட்டையாளர் A யின் C.V $= \frac{5}{50} \times 100 = 10\%$

B இன் மாறுபாட்டுக் கெழு $= \frac{25}{75} \times 100 = 33.33\%$

குறைந்த மாறுபாட்டுக் கெழு உடையவரே நிலைப்புத்தன்மை உடையவர். எந்த மட்டையாளர் குறைந்த மாறுபாட்டுக் கெழுவை பெற்றுள்ளாரோ அவரே மிகுந்த நிலைப்புத்தன்மை உடையவர். எனவே A யின் மாறுபாட்டுக் கெழு மதிப்பு குறைவாக உள்ளதால் அவரே நிலைப்புத்தன்மை உடையவராவார்.

எடுத்துக்காட்டு 6.14

இரு தயாரிப்புகளின் A, B யின் வாராந்திர விற்பனை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தயாரிப்பு A	59	75	27	63	27	28	56
தயாரிப்பு B	150	200	125	310	330	250	225

எந்த தயாரிப்பு விற்பனையில் அதிக நிலைப்புத்தன்மை உடையது?

தீர்வு:

தயாரிப்புகளின் நிலைப்புத்தன்மை காண மாறுபாட்டுக் கெழு கணக்கிட வேண்டும்.

தயாரிப்பு A

விற்பனை (x)	நிகழ்வெண் (f)	**A= 56** $d = x - A$	fd	fd^2
27	2	-29	-58	1682
28	1	-28	-28	784
56 A	1	0	0	0
59	1	3	3	9

63	1	7	7	49
75	1	19	19	361
மொத்தம்	**7**		**-57**	**2885**

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

$$= 56 - \frac{57}{7} = 47.86$$

மாறுபாடு $\sigma^2 = \frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2$

$$= \frac{2885}{7} - \left(\frac{-57}{7}\right)^2$$

$$= 412.14\text{-}66.30 = 345.84$$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{345.84} = 18.59$

மாறுபாட்டுக் கெழு (C.V) $= \frac{\sigma}{x} \times 100$

$$= \frac{18.59}{47.86} \times 100$$

$$= 38.84\ \%$$

தயாரிப்பு B

விற்பனை (x)	நிகழ்வெண் (f)	**A= 225** $d = x - A$	fd^2	fd^2
125	1	–100	–100	10,000
150	1	–75	–75	5625
200	1	–25	–25	625
225	1	0	0	0
250	1	25	25	625
310	1	85	85	7225
330	1	105	105	11,025
மொத்தம்	**7**		**15**	**35,125**

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

$$= 225 + \frac{15}{7}$$

$$= 225 + 2.14 = 227.14$$

மாறுபாடு $\sigma^2 = \frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2$

$= \frac{35125}{7} - \left(\frac{15}{7}\right)^2$

$= 5017.85 - 4.59$

$= 5013.26$

திட்டவிலக்கம் σ $= \sqrt{5013.26} = 70.80$

மாறுபாட்டுக் கெழு (C.V) $B = \frac{70.80}{227.14} \times 100$

$= 31.17\%$

A–இன் மாறுபாட்டுக் கெழு B–இன் மாறுபாட்டுக் கெழுவைவிட அதிகமாக உள்ளதால் விற்பனையின் ஏற்ற தாழ்வுகள் தயாரிப்பு A யில் அதிகமாகும்

6.6 விலக்கப் பெருக்குத்தொகை (Moments)

6.6.1 ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப்பெருக்குத்தொகை (Raw moments):

ஒரு பரவலின் ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வெவ்வேறு அடுக்குகளின் கூட்டுசராசரி ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப்பெருக்குத் தொகையாகும்.

ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகை	தனிதொகுதி **($d=x$ - A)**	தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி **($d=x$ - A)**	தொடர் தொகுதி **($d = (x - A)/c$)**
μ_1'	$\frac{\sum d}{n}$	$\frac{\sum fd}{N}$	$\frac{\sum fd}{N} \times c$
μ_2'	$\frac{\sum d^2}{n}$	$\frac{\sum fd^2}{N}$	$\frac{\sum fd^2}{N} \times c^2$
μ_3'	$\frac{\sum d^3}{n}$	$\frac{\sum fd^3}{N}$	$\frac{\sum fd^3}{N} \times c^3$
μ_4'	$\frac{\sum d^4}{n}$	$\frac{\sum fd^4}{N}$	$\frac{\sum fd^4}{N} \times c^4$

6.6.2 மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

ஒரு பரவலின் கூட்டுசராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வெவ்வேறு அடுக்குகளின் கூட்டுசராசரியை மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை எனலாம்.

ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகை	தனிதொகுதி **(*d*=*x* - *A*)**	தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி **(*d*=*x* - *A*)**	தொடர் தொகுதி **(*d* = (*x* – *A*) /*c*)**
μ_1	$\frac{\sum(x-\bar{x})}{n}=0$	$\frac{\sum f(x-\bar{x})}{N}=0$	$\frac{\sum fd'}{N}\times c$
μ_2	$\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{N}=0$	$\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{N}=\sigma^2$	$\frac{\sum fd'^2}{N}\times c^2$
μ_3	$\frac{\sum(x-\bar{x})^3}{n}$	$\frac{\sum f(x-\bar{x})^3}{N}$	$\frac{\sum fd'^3}{N}\times c^3$
μ_4	$\frac{\sum(x-\bar{x})^4}{n}$	$\frac{\sum f(x-\bar{x})^4}{N}$	$\frac{\sum fd'^4}{N}\times c^4$

பொதுவாக $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன n விவரங்கள் எனில்

$$\mu'_r = \frac{1}{N}\sum f(x-A)^r \text{ (Aஐ பொறுத்து)}$$

$$\mu'_r = \frac{\sum fx^r}{N} \text{ (ஆதியை பொறுத்து)}$$

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum f(x-\bar{x})^r \text{ (சராசரியை பொறுத்து)}$$

குறிப்பு:

ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகை எனவும் μ'_r சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மைய விலக்கப் பெருக்குத்தொகை μ_r எனவும் குறிக்கப்படுகிறது.

6.6.3 ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகை மற்றும் மைய விலக்கப் பெருக்குத்தொகை இவற்றிற்கிடையேயுள்ள உறவு.

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu'_2-(\mu'_1)^2$$

$$\mu_3 = \mu'_3-3\mu'_2\mu'_1+2\mu'^3_1$$

$$\mu_4 = \mu'_4-4\mu'_3\mu'_1+6\mu'_2(\mu'_1)^2-3(\mu_1')^4$$

எடுத்துக்காட்டு 6.15

5 லிருந்து பெறப்பட்ட முதல் இரண்டு விலக்கப் பெருக்குத்தொகையின் மதிப்புகள் முறையே 2 மற்றும் 20 எனில் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்

தீர்வு:

$\mu'_1 = 2, \mu'_2 = 20, \quad A = 5$

$$\bar{x} = \mu'_1 + A$$

$$\bar{x} = 2+5=7$$

$$\sigma^2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

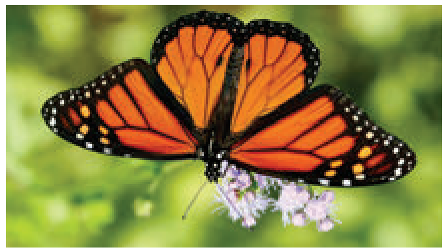
$$\sigma^2 = 20 - 2^2 = 16$$

சராசரி = 7, மாறுபாடு = 16

6.7 தட்டை அளவை மற்றும் கோட்ட அளவை

தரவு விவரங்களை புரிந்து கொள்ள மேலும் இரண்டு அளவைகள் தட்டை அளவை மற்றும் கோட்ட அளவை பயன்படுத்தப்படலாம்.

6.7.1 கோட்டம்

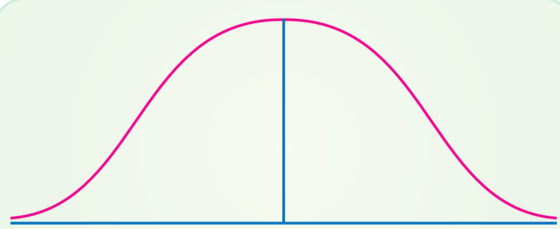


கோட்டம் என்றால் சமச்சீரின்மை என்று பொருள்படும். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து வரையப்படும் வளைவரையின் வடிவத்தைப் பற்றி தெரிந்து கொள்ள கோட்டம் பற்றி நாம் அறிய வேண்டும். தரவுகள் சமச்சீர் அற்றவை எனில் அத்தரவு சமச்சீரற்ற தரவு எனப்படும். அத்தகைய கோட்டம் நேரிடைக் கோட்டமாகவோ, அல்லது எதிரிடைக் கோட்டமாகவோ இருக்கலாம்.

சமச்சீர் தன்மையை கீழ்க்கண்ட படத்தில் நன்கு அறியலாம்.

சமச்சீர் தன்மை நேரிடை மற்றும் எதிரிடைக் கோட்டங்களை குறிக்கும் தரவு விவரங்களை கீழ்க்கண்ட வரைபடங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) சமச்சீர் பரவல்

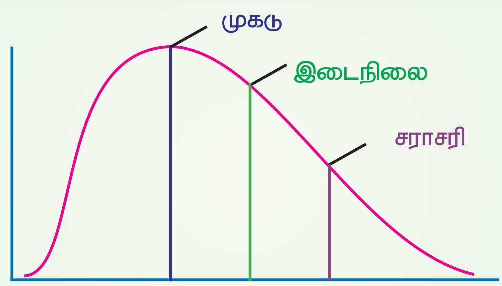


சராசரி = இடைநிலை = முகடு

படம் 6.1

மேற்கண்ட படத்தின் மூலம் சமச்சீர் பரவலின் தரவு விவரங்களின் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவை ஒரே புள்ளியில் பொருந்தியிருக்கும். (கூட்டுச்சராசரி = இடைநிலை முகடு) வளைவரையின் நடுப்புள்ளியின் இருபுறமும் மதிப்புகள் சமமாக பரவியிருக்கும்.

(b) நேரிடைக் கோட்டம்



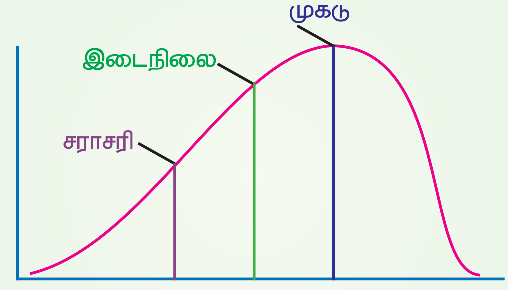
வலப்புறம் (நேரிடை கோட்டம்)

படம் 6.2

நேரிடை கோட்டுப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரியின் பெரும மதிப்பையும் முகடு சிறும மதிப்பையும் பெற்று இவற்றிற்கிடையே இடைநிலை அமைந்திருக்கும். நேரிடை கோட்டப்பரவலில் மதிப்புகள் அதிக அளவில் சிறும மதிப்பை (இடப்புறம்) விட பெரும மதிப்புக்கு (வலப்புறம்) அருகாமையில் பரவி இருக்கும்

(c) எதிரிடைக் கோட்டம்

எதிரிடைக் கோட்டப்பரவலில் கூட்டு சராசரி சிறும மதிப்பையும் முகடு பெரும மதிப்பையும் பெற்று இவற்றிற்கிடையே இடைநிலை அமைந்திருக்கும். எதிரிடைக் கோட்டப்பரவலில் மதிப்புகள் அதிக அளவில் பெரும மதிப்பை (வலப்புறம்) விட சிறும மதிப்புக்கு (இடப்புறம்) அருகாமையில் பரவி இருக்கும்.



இடப்புறம் (எதிரிடை கோட்டம்)
படம்6.3

சமச்சீர் பரவலில் சராசரி மற்றும் இடைநிலைக்கிடையேயுள்ள இடைவெளி ஏறத்தாழ சராசரி மற்றும் முகடுக்கிடையே உள்ள இடைவெளியில் ஒன்றில் மூன்று பங்காக அமையும். இந்த உறவே கோட்டஅளவையின் அளவினைக் காண வழிவகுக்கிறது.

d. முக்கியமான கோட்ட அளவைகள்

(i) கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக்கெழு

(ii) பௌலியின் கோட்டக்கெழு

(iii) விலக்கப்பெருக்குத் தொகையை சார்ந்த கோட்ட அளவை

(i) கார்ல் பியர்சன் கோட்டக்கெழு

கார்ல்பியர்சன் கூற்றுப்படி கோட்டஅளவை = கூட்டு சராசரி − முகடு.

$$\therefore \text{கார்ல்பியர்சன் கோட்டக்கெழு} = \frac{\text{சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

எடுதுக்காட்டு 6.16

கண்டெடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து கூட்டு சராசரி = 7.35, முகடு = 8, மாறுபாடு = 1.69 எனில் கார்ல்பியர்சன் கோட்டக்கெழு காண்.

தீர்வு:

$$\text{கார்ல் பியர்சன் கோட்டக்கெழு} = \frac{\text{சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

$$\text{மாறுபாடு} = 1.69$$

$$\text{திட்டவிலக்கம்} = \sqrt{1.69} = 1.3$$

$$\text{கார்ல் பியர்சன் கோட்டக்கெழு} = \frac{7.35-8}{1.3}$$

$$= \frac{-0.65}{1.3} = -0.5$$

(ii) பௌலியின் கோட்டக்கெழு

கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக்கெழுவை அளக்க தொடரின் மொத்த மதிப்புகளும் தேவை. பேராசிரியர் பௌலி கால்மானங்களைச் சார்ந்த ஒர் சூத்திரத்தை கூறுகிறார். சமச்சீர் பரவலில் கால்மானங்கள் இடைநிலையிலிருந்து சமதூரத்தில் அமைந்துள்ளன. அதாவது $Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_2$, ஆனால் கோட்டப்பரவலில் கால்மானங்கள் இடைநிலையிலிருந்து சமதூரத்தில் இருப்பதில்லை

எனவே,

$$\text{பௌலியின் கோட்டக்கெழு } (SK) = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.17

If $Q_1 = 40$, $Q_2 = 50$, $Q_3 = 60$, எனக்கொண்டு பௌலியின் கோட்டக்கெழு காண்

தீர்வு:

$$\text{பௌலியின் கோட்டக்கெழு} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$$

பௌலியின் கோட்டக்கெழு

$$= \frac{40 + 60 - 2 \times 50}{60 - 40} = \frac{0}{20} = 0$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர் சமச்சீர் தன்மை பெற்றதாகும்.

குறிப்பு

சராசரிக்கும் முகடுக்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம் அல்லது சராசரிக்கும் இடைநிலைக்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம் அதிகமாக இருப்பின் தரவுத் தொகுதி அதிக அளவு சிதறி இருக்கும்.

(iii) விலக்கப்பெருக்குத் தொகையை சார்ந்த கோட்ட அளவை

விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை சார்ந்த கோட்ட அளவையை β_1 என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.18

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு β_1 மதிப்பு காண்க

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 8.76$, $\mu_3 = -2.91$

தீர்வு:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$\beta_1 = \frac{(-2.91)^2}{(8.76)^3} = \frac{8.47}{672.24}$$

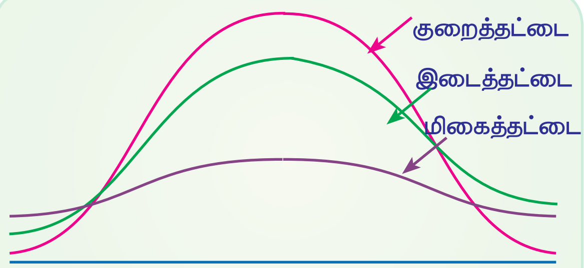
$$= 0.0126$$

6.7.2 தட்டை அளவை

தட்டை அளவையைக் குறிப்பிடும் "**Kurtosis**" என்ற சொல் கிரேக்க மொழியில் இருந்து பெறப்பட்டது. புள்ளியியலில் தட்டையளவு என்பது முகட்டைச் சுற்றியுள்ள விவரங்கள் வளைவரையில் தட்டையாகவோ அல்லது கூர்மையான முனையுடனோ இருப்பதை குறிக்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட தரவு விவரங்களின் தட்டையளவை இயல்நிலை வளைவரையின் கூர்முனை பொறுத்து அளவிடப்படுகிறது.

கீழ்க்கண்ட வரைபடம் மேலே குறிப்பிட்ட மூன்று வடிவ தட்டைநிலையை விளக்குகிறது.

ஒரு வளைவரை இயல்நிலை வளைவரையைவிட கூரிய உச்சியை உடையதாக இருந்தால் அது குறைத்தட்டை (Leptokutic) எனப்படுகிறது. இந்நிலையில் விவரங்கள் முகட்டுக்கு அருகாமையில் குவிந்திருக்கும். மாறாக ஒரு வளைவரை இயல்நிலை வளைவரையைவிட அதிக தட்டையாக இருந்தால் அது மிகைத்தட்டை (Platykurtic) எனப்படுகிறது. மணிவடிவ இயல்நிலை வளைவரையானது இயல்நிலை தட்டை எனப்படுகிறது.



படம் 6.4

ஒரு நிகழ்வெண் வளைவரை இயல்நிலை வளைவரையை விட எந்த அளவு அதிக தட்டையாகவோ அல்லது குறைந்த தட்டையாகவோ உள்ளது என்பதை தட்டை அளவை மூலம் அறியலாம்.

தட்டை அளவைக் கெழு

மிக முக்கியமான தட்டை அளவை என்பது தட்டை அளவைக் கெழு ஆகும்

தட்டை அளவைக் கெழு $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

குறிப்பு:

β_2 ன் மதிப்பு எவ்வளவு அதிகமாக உள்ளதோ அதைப் பொறுத்து வளைவரை கூர்ந்து இருக்கும்.

(i) β_2 = 3 எனில் அந்தப்பரவல் இயல்நிலைபரவல், அதன் வளைவரை இயல்நிலை வளைவரையாகும்.

(ii) β_2 3, எனில் அந்தப் பரவல் கூரிய உச்சியுடையது, வளைவரை குறைத்தட்டையாகும்.

(iii) β_2 எனில் அந்தப் பரவல் அதிகத்தட்டையுடையது வளைவரை, மிகைத்தட்டையாகும்..

எடுத்துக்காட்டு 6.19

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு β2 காண் $\mu_1 = 0\ \mu_2 = 4\ \mu_3 = 0\ \mu_4 = 37.6$

தீர்வு :

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$\beta_2 = \frac{37.2}{4^2} = \frac{37.6}{16} = 2.35<3$$

$\beta_2 < 3,$ வளைவரை தட்டயானதாகும்.

6.8 கட்ட விளக்கப் படம்

கட்ட விளக்கப்படம் என்பது மற்றொரு வரைபட முறை ஆகும். கட்ட விளக்கப்படம் 5 முக்கிய அளவுகளை உள்ளடக்கியது அவையாவன

(i) தரவு விவரங்களின் மிகக் குறைந்த மதிப்பு (சிறுமம்), (ii) முதல் கால்மானம் (Q_1) (iii) இடைநிலை (Q_2) (iv) மூன்றாம் கால்மானம் (Q_3) (v) தரவு விவரங்களின் மிக அதிக மதிப்பு (பெருமம்)

இம்மாதிப்புகள் தரவு விவரங்களின் 5–எண் சுருக்கம் எனப்படும்.

சிறும மதிப்பிலிருந்து Q_1 வரை கிடைமட்டக் கோட்டாலும் (Q_3) யிலிருந்து பெரும மதிப்புவரை கிடைமட்டக் கோட்டாலும் இணைத்து மற்றும் (Q_1), (Q_3) யில் செங்குத்து கோட்டினையும் வரைந்து அவற்றிற்கிடையே (Q_2) இல் ஓர் செங்குத்துக்கோட்டையும் வரையக் கிடைப்பது கட்ட விளக்கப்படம் ஆகும்.

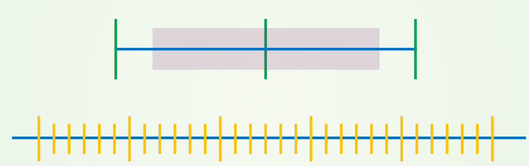


Fig.6.5

கட்ட விளக்கப்படம் வரைவதற்கான விளக்கம்

(i) இடைநிலை கட்டத்தின் மையத்திற்கு அருகில் இருந்தால் தரவு விவரம் ஏறத்தாழ சமச்சீரானதாகும்.

(ii) இடைநிலை கட்டத்தின் மையத்திற்கு இடப்பக்கம் இருந்தால் தரவு விவரம் மிகை கோட்டமாகும்.

(iii) இடைநிலை கட்டத்தின் மையத்திற்கு வலப்புறம் இருந்தால் தரவு விவரம் குறை கோட்டமாகும்.

(iv) கோடுகள் சமஅளவில் இருந்தால் தரவு விவரமானது ஏறத்தாழ சமச்சீரானதாகும்.

(v) வலப்பக்க கோடு இடப்பக்க கோட்டை விட குறைவாக இருந்தால் தரவு விவரம் மிகை கோட்டமாகும்.

(vi) இடப்பக்ககோடு வலப்பக்க கோட்டைவிட நீளமாக இருந்தால் தரவு விவரம் குறை கோட்டமாகும்.

குறிப்புரை:

(i) சிறும மதிப்பிலிருந்து Q_1 மற்றும் Q_3 லிருந்து பெருமமதிப்பிற்கு வரையப்படும் கிடைமட்டக்கோடு விஸ்கர் எனப்படும்.

(ii) கட்ட படம், கட்ட விஸ்கர் படம் என்றும் அழைக்கப்படும்.

(iii) கட்ட விளக்கப்படம் ஒரு பரவலின் சிதறலை விளக்குகிறது. மேலும் பரவலின் வடிவத்திற்கான யூகத்தினை அளிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.20

10 வெவ்வேறான பள்ளிகளில் பயிலும் 11–ம் வகுப்பு மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 89, 47, 164, 296, 30, 215, 138, 78, 48, 39 கட்டவிளக்கப்படம் வரைந்து விளக்குக

தீர்வு:

படி1: ஏறுவரிசையில் எழுதவும்

30,39,47,48,78,89,138,164,215,296

படி2: இடைநிலை காண்க

இடைநிலை $= \dfrac{78+89}{2} = 83.5$

படி 3: Q_1 காண்

30,39,47,48,78

$Q_1 = \dfrac{47+48}{2} = 47.5$

படி 4: Q_3

89,138,164,215,296

$Q_3 = \dfrac{138+164}{2} = \dfrac{302}{2} = 151$

படி 5: சிறும, பெரும மதிப்புகள் காணவும்

சிறும மதிப்பு 30 பெரும மதிப்பு 296

படி 6: சிறும மதிப்பு, Q_1, இடைநிலை Q_3 பெரும மதிப்பு கோட்டில் குறிக்கவும்.

படி 7: Q_1 , Q_3 வழியே கட்டம் வரையவும்

கட்டப்படம்

எடுத்துக்காட்டு 6.21

கட்ட – விஸ்கர் படத்தினைக் கீழ்க்கண்ட விவரத்திற்கு வரையவும்

96, 151, 167, 185, 200, 220, 246, 269, 238, 252, 297, 105, 123, 178, 202

தீர்வு:

படி 1: ஏறுவரிசையில் எழுதவும்

96,105,123,151,167,178,185,200,202,220,238,246,252,269,297.

படி 2: இடைநிலை காணவும்

இடைநிலை 8 வது உறுப்பு = 200

படி 3: Q_1 காண் (200 க் முன் உள்ளவைகளில் இடைநிலை)

96,105,123,151,167,178,185

Q_1 =151

படி 4 : Q_3 காண (200–க் பின் உள்ளவைகளில் இடைநிலை))

202,220,238,246,252,269,297

Q_3 =246

படி 5: சிறும , பெரும மதிப்பு காண் சிறும மதிப்பு = 96, பெரும மதிப்பு = 297

படி 6: நேர்கோட்டினை வரைக

படி 7: : 5 எண்களை குறித்து கட்டம் வரைக

கட்டப் படம்

நினைவில் கொள்க

- வீச்சு என்பது மிகப்பெரிய மதிப்புக்கும் மிகச் சிறிய மதிப்புக்கும் உள்ள வித்தியாசம்
- இடைக்கால்மான வீச்சு (IQR) என்பது Q3 மற்றும் Q1 – க்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம்.
- மாறுபாடு என்பது $x-\bar{x}$ என்ற மதிப்புகளின் வர்க்கங்களின் சராசரியாகும்.
- திட்டவிலக்கம் என்பது மாறுபாட்டின் வர்க்கமூலம் x ன் மற்றும்
- சமச்சீரான முழுமைத் தொகுதியில் எடுக்கப்பட்ட மாதிரியில் சராசரி மற்றும் இடைநிலை ஏறக்குறைய சமமாகும். அவை முகடுக்கு மிக அருகாமையிலும் இருக்கும். (ஒரே ஒரு முகடு)
- சமச்சீரற்ற முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் கோட்டம் எனப்படும். பெரிய மதிப்புகளில் நீளமான முனையை உள்ளடக்கிய பரவல் நேரிடை கோட்டம் அதாவது சராசரி என்பது முகடு (அல்லது) இடைநிலையை விட அதிகமாக இருக்கும். சிறிய மதிப்புகளில் நீளமான முனையை உள்ளடக்கிய பரவல் எதிரிடை கோட்டம். மேலும் சராசரி ஏனைய மைய அளவுகளை விட குறைவாக இருக்கும்
- கட்டவிளக்கப்படம் (கட்ட – விஸ்கர் படம்) என்பது மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய எண்களுடன் கால்மானங்களையும் குறிக்கிறது.

பயிற்சி

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க.

1. தரவுத் தொகுதி சமச்சீராயின் அந்த வளைவரையின் உச்சி புள்ளி

   (a) முகடு (b) இடைநிலை (c) சராசரி (d) இவை அனைத்தும்

2. இடப்பக்க முனை நீண்டு உள்ள வளைவரை --------------

   (a) சமச்சீர் (b) எதிரிடைக் கோட்டம்
   (c) நேரிடைக் கோட்டம் (d) மேற்கூறிய அனைத்தும்

3. சிதறல் அளவையான வீச்சு என்பது கீழக்கண்ட ஒன்றை நிறைவு செய்யவில்லை.

   (a) விளிம்பு மதிப்புகளால் அதிகமாக பாதிக்கப்படுகிறது.
   (b) ஒரு தரவிலிருந்து மற்றொரு தரவிற்கு மிகப்பெரிய மாற்றத்தை ஏற்படுத்
   (c) கணக்கிட கடினம்
   (d) இது தரவு விவரங்களில் இரு மதிப்புகளிலிருந்து கணக்கிடப்படும்.

4. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது உண்மையானது?

   (a) மாறுபாடு தொகுக்கப்பட்ட (அ) தொகுக்கப்படா தரவுகளுக்கு கணக்கிடலாம்
   (b) திட்ட விலக்கம்
   (c) திட்ட விலக்கம் தொகுக்ககப்பட்ட அல்லது தொகுக்கப்படாத தரவுகளுக்கு கணக்கிடலாம். ஆனால் மாறுபாடு தொகுக்கப்படாத தரவிற்கு மட்டும் கணக்கிடலாம்.

6ESIGJ

(d) (a) மற்றும் (b), சரி (c) தவறு.

5. ஒரு பரவலின் மாறுபாட்டின் வர்க்கமூலம்

(a) திட்டவிலக்கம் (b)சராசரி
(c) விச்சு (d) விலக்கம்

6. 50 மதிப்புகளின் திட்டவிலக்கம் 8 ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் 2ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் மதிப்புகளின் திட்டவிலக்கமானது:

(a) 4 (b) 2 (c)16 (d) 8

7. அதிகமான சிதறல் கொண்ட தரவில்

(a) சராசரி மற்றும் இடைநிலைக்கிடையே அதிக வித்தியாசம்

(b) முகடு மதிப்பு அதிகம்

(c) திட்டவிலக்கம் அதிகம்

(d) இடைக்கால்மான வீச்சு குறைவு

8. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது ஒப்பீட்டு அளவை ?

(a) திட்டவிலக்கம் (b) மாறுபாடு
(c) மாறுபாட்டுக்கெழு (d)மேற்கூறிய அனைத்தும்

9. கால்மான விலக்கம் 8 எனில் திட்டவிலக்கத்தின் மதிப்பு:

(a) 12 (b) 16 (c) 24 d)மேற்கூறிய எதுமில்லை

10. சராசரிக்கும் முகடுக்கும் உள்ள வித்தியாசம் 35 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 எனில் கோட்டக்கெழு

(a) 2.5 (b) 1.5 (c) 3.5 (d) 6.5

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக

11. முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மானங்களின் வித்தியாசம் ------------------

12. சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்புகளுக்கும் பெறப்பட்ட நேரிடை விலக்கக்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி ----------------------

13. திட்டவிலக்கத்திற்கு சராசரியின் சதவீதம் --------------------

14. இடைநிலைக்கு மேல் மற்றும் கீழ் அமையும் தரவுகளின் எண்ணிக்கை --------------

15. β_2 = 3 எனில் வளைவரை -------------- பரவல்.

III குறு வினா (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி).

16. சிதறல் என்றால் என்ன? சிதறல் அளவைகள் யாவை?

17. ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள் என்றால் என்ன? அவற்றின் பயன்கள் யாது?

18. சராசரி விலக்கம் வரையறு. இது திட்ட விலக்கத்திலிருந்து எவ்வாறு மாறுபடுகிறது.

19. திட்டவிலக்கம் என்றால் என்ன? அதன் முக்கிய பண்புகளை விவரி

20. கோட்ட அளவைகள் என்றால் என்ன?

21. கட்ட விளக்கப்படத்தில் பயன்படும் அளவைகள் யாவை?

IV சிறு வினா (ஓரிரு சொற்றொடர்களில் விடையளி).

22. சிதறலை விவரிக்கவும். சிதறல் அளவைகள் எவ்வாறு உதவுகிறது?

23. நல்ல சிதறல் அளவையின் பண்புகள் யாவை?

24. தரவு பகுப்பாய்வில் மைய அளவைகளும், சிதறல் அளவைகளும் எவ்வாறு வேறுபடுகின்றன என விவரி.

25. தனித்த மற்றும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகளை வேறுபடுத்திக் காட்டுக. சிதறல் அளவைகளை வகைப்படுத்துக.

26. நிகழ்வெண் பரவலில் பெறப்பட்ட சராசரிக்கு சிதறல் அளவைகள் எவ்வாறு மாற்றாக பயன்படுத்தப்படுகிறது என விவரி.

27. மாறுபாட்டுக் கெழு என்றால் என்ன? வியாபாரத்தில் அதன் முக்கியத்துவம் குறித்து விளக்குக

28. மாறுபாடு, திட்டவிலக்கம் எப்பொழுது சமமாகும். எந்நிலையில் மாறுபாடு திட்டவிலக்கத்தை விட குறைவாக இருக்கும்?

29. ஒரு வியாபாரி மாத விற்பனையை கணிக்க இருவிதமான சூத்திரங்களை பயன்படுத்துகிறார். முதல் சூத்திரத்தின் சராசரி 700 பதிவுகள் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 35 பதிவுகள் இரண்டாவதிற்கான சராசரி 300 பதிவுகள் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 16 பதிவுகள், எனில் எந்த சூத்திரம் ஒப்பிடுகையில் துல்லியம் குறைவானதாக இருக்கும்?

30. ஒரு சிறிய வியாபார நிறுவனத்தில், இரண்டு தட்டச்சர்களை (A, B) நியமிக்கிறது. தட்டச்சர் A சராசரியாக ஒரு நாளைக்கு 30 பக்கங்களும் திட்டவிலக்கம் 6 ஆகவும் தட்டச்சர் B சராசரியாக ஒரு நாளைக்கு 45 பக்கங்களும் திட்டவிலக்கம் 10 ஆகவும் இருப்பின், எந்த தட்டச்சர் நிலைத்தன்மை உடையவர்?

V விரிவான விடை தருக.

31. சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம் காண்க:

வயது வருடங்களில்	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45
நபர்களின் எண்ணிக்கை	7	10	16	32	24	18	10	5	1

32. 50 மற்றும் 100 எண்ணிக்கை கொண்ட இரண்டு மாதிரிகளின் சராசரி 54.1, 50.3 மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 8, 7 எனில் இணைந்த சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்.

33. A மற்றும் Bஎன்ற இரு மாதிரி குளிர்சாதன பெட்டிகளின் ஆயுட்காலம் விவரம் பின்வருமாறு

ஆயுள் (வருடங்களில்)		0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
குளிர்சாதனப்பெட்டி	A	5	16	13	7	5	4
	B	2	7	12	19	9	1

ஒவ்வொரு மாதிரியின் சராசரி காண். எந்த மாதிரி சிறந்ததாகும்?

34. கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக்கெழு காண்

அளவு	06	09	12	15	18
நிகழ்வெண்	7	12	19	10	2

35. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு பொருத்தமான சிதறல் அளவையைக் கணக்கிடுக.

கூலி (ரூ)	35க்கு கீழ்	35-37	38-40	41-43	43க்கு மேல்
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	14	60	95	24	7

36. இரு விதமான சக்கரங்களின் பயன்பாட்டை சோதிக்கையில் கிடைக்கப்பெற்ற விவரங்கள் பின்வருமாறு

100 மைல்களுக்கு மேல்	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
A	8	15	12	18	13	9
B	6	20	32	30	12	0

37. நோயாளிகள் மருத்துவமனையில் அனுமதிக்கப்பட்டிருந்த நாட்களின் எண்ணிக்கையின் திட்டவிலக்கம் காண்.

அனுமதிக்கப்பட்ட நாட்கள்	5	6	7	8	9
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	18	14	9	3	1

38. கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக்கெழு காண்

பிரிவு இடைவெளி	10 -15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
பிரிவு இடைவெளி நிகழ்வெண்	8	12	14	10	6

39. சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட சராசரி விலக்கம் மற்றும் சராசரி விலக்கக்கெழு ஆகியவற்றை காண 100 குழந்தைகளின் உயரம் பின்வருமாறு (அங்குலம்)

உயரம் (செ.மீ)	60	61	62	63	64	65	66	67	68
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	2	0	15	29	25	12	10	4	3

40. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குத் திட்டவிலக்கம் காண்

x	1	2	3	4	5	6	7
நிகழ்வெண்	10	20	30	35	14	10	2

41. கீழே கொடுக்கப்பட்ட 2 தரவு விவரங்களுக்கு வீச்சு கெழு காண்

தரவு **1**	10	20	9	15	10	13	28
தரவு **2**	35	42	50	32	49	39	33

42. 10 நபர்களின் இரத்தத்தில் உள்ள கொழுப்பின் அளவு பின்வருமாறு 240, 260, 290, 245, 255, 288, 272, 263, 277,250. யூக சராசரியைப் பயன்படுத்தித் திட்டவிலக்கம் காண்.

43. மக்கள் இரு குழுக்களாக ஒரு விளையாட்டினை கணினியில் விளையாடுகின்றனர். அந்த விளையாட்டில் இரு குழுக்களும் ஒரு குறிப்பிட்ட விசைக்கட்டையை (Key) எவ்வளவு வேகமாக பயன்படுத்துகின்றனர் என ஆராயும் போது (நேரம் 1/10 நொடிகளில்)

	குறைந்த பட்சம்	I கால்மானம்	இடைநிலை	III கால்மானம்	அதிக பட்சம்
குழு I	0.6	0.8	1.0	1.5	1.9
குழு II	0.4	0.7	1.0	1.3	1.6

இரு கட்ட விளக்கப்படங்கள் வரைந்து ஒப்பிடுக.

44. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு கட்ட – விஸ்கர் படம் வரைக

(i) 3, 5, 10, 11, 12, 16, 17, 17, 19, 20, 22

(ii) –7, –5, –4, –4, –3, –3, –2, –1, 0, 1, 4, 6, 8, 9

விடைகள்

I. 1. d 2. b 3. c 4. d 5. a 6. c 7. a 8. c 9. d 10. c

II. 11. IQR 12. மாறுபாடு, திட்டவிலக்கம் 13. மாறுப்பாட்டுக் கெழு

14. 50% 15. இயல்நிலை (அல்லது) சமச்சீர்

IV. 29. 2ஆம் சூத்திரம் 30. தட்டச்சர் B

V 31. 6.84 32. 51.57, 7.67 33. (i) 5.12, 6.16 (ii) B

34. 3, 0.25 35. QD= 2.1, CQD = 0.055 36. B 37. 1.03 38. 5,0.2513

39. 1.24, 0.0194 40. 1.4 41. 0.55,0.25 42. 14.4

சுய சோதனைக்காக

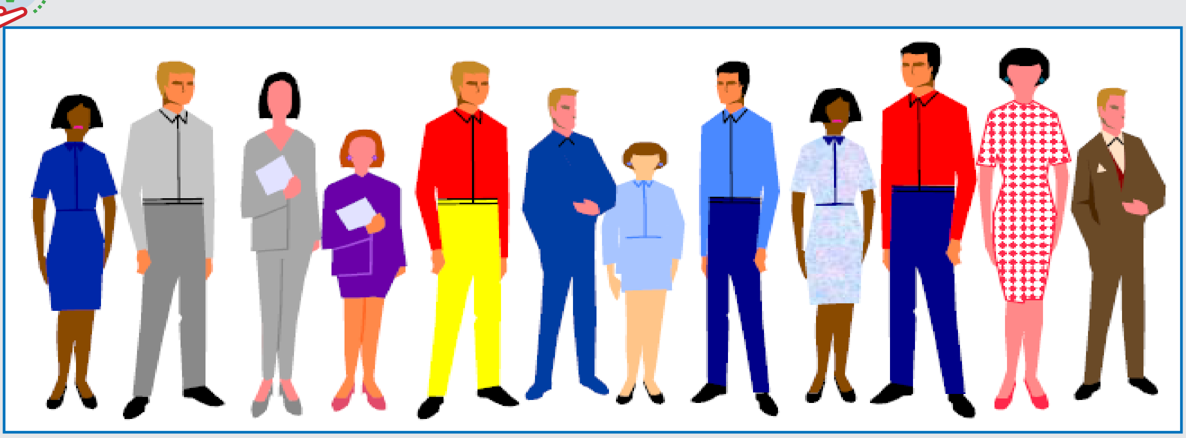
1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் ஒரு வாரத்தில் இரு வருடங்களில் ஏற்பட்ட சாலை விபத்துகளை விளக்குகிறது.

விபத்துகளின் எண்ணிக்கை	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	மொத்தம்
நிகழ்வெண்	5	12	32	27	11	9	4	3	1	104

2. ஒரு மழைக்காலத்தில் மருத்துவமனைகளில் காலராவில் பாதிக்கப்பட்டவர்களின் பதியப்பட்ட விவரங்கள் பின்வருமாறு

வயது (வருடங்களில்)	< 1	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	> 40
பாதிக்கப்பட்டவர்கள் எண்ணிக்கை	15	113	122	91	110	119	132	65	46	15

செயல்பாடு:



மேலே கொடுக்கப்பட்ட படத்திலிருந்து

1. இந்த குழுவிற்கு சராசரி உயரத்தை ஓர் பிரதிநிதியாக எடுக்கலாமா இல்லையெனில்

   எந்த அளவை பொருத்தமானதாகும்.

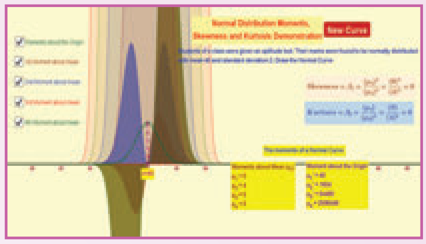
2. உயரத்தின் பரவல் எந்த வடிவில் இருக்கும்? சமச்சீர் தன்மை உடையதா

   இல்லையெனில் எந்த வகையான கோட்டமாக இருக்கும்.

இணையச்செயல்பாடு

சமச்சீர் பரவலில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

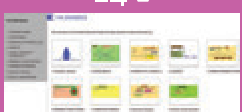
சமச்சீர் பரவலில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை அறிவோமா !



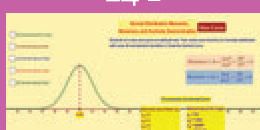
படிகள்

1. கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க. "11th Standard Statistics" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகத்தில் "Moments of Normal Curve" க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்
2. சமச்சீர் பரவல் தோன்றும். "New Curve" – ஐச் சொடுக்கினால் புதிய சமச்சீர் பரவல் தோன்றும். மாற்றங்களை ஆய்வு செய்க.
3. சமச்சீர் பரவல் வளை கோட்டில் கோட்ட அளவை மற்றும் தட்டையளவு எப்பொழுதும் பூஜ்ஜிய மதிப்பைக் கொண்டிருப்பதை, "New Curve" – ஐச் சொடுக்கி கவனிக்கவும்.
4. (ஆதியைப் பொருத்த மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை) "Moments about the origin" – ஐச் சொடுக்கி வரைபடங்களின் வண்ணங்களைக் கவனிக்கவும். கீழ் வலப்பக்கத்தில் உள்ள கணக்கீடுகளை மீளாய்வு செய்க.
5. (சராசரியைப் பொருத்த 2–ஆம் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை) "2nd moment about Mean" சொடுக்கி வரைபடங்களின் வண்ணங்களைக் கவனிக்கவும். மொத்தப் பரப்பும் x–அச்சுக்கு மேல் உள்ளதால் (நிறையானதால்)ஏதாவது மதிப்பு இருக்கும்..
6. சராசரியைப் பொருத்த 1–ஆம், 3–ஆம் மற்றும் 4–ஆம் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகையானது சமச்சீர் பரவல் வளைகோட்டிற்கு எப்பொழுதும் பூஜ்ஜியம். (காரணம் மேலும் கீழும் உள்ள சம பரப்புகளை கூட்டினால் விடை பூஜ்ஜியம். ஏனெனில் மேல் பரப்பு நிறையாகவும்(+ ive) கீழ் பரப்பு குறையாகவும் (– ive) கணக்கிடப்படும்)

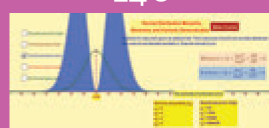
படி 1



படி 2

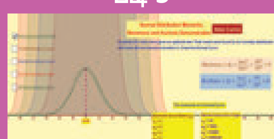


படி 3

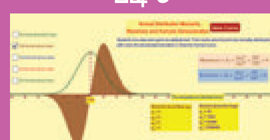


படி 4

படி 5



படி 6



* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

உரலி:

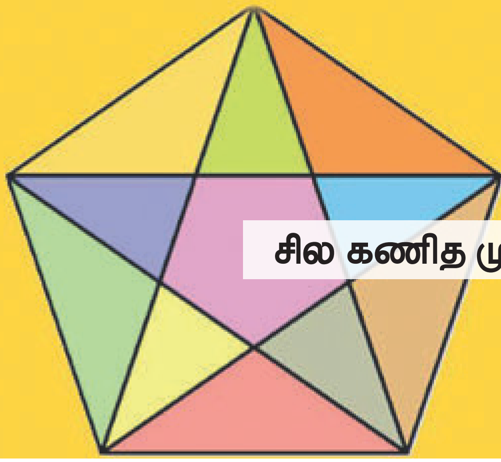
https://ggbm.at/uqVhSJWZ

B136_11_STA_TM

அத்தியாயம்

7

எத்தனை முக்கோணங்கள் உள்ளன?



சில கணித முறைகள்

சீனிவாச ராமானுஜன்

(22 டிசம்பர், 1887 - 26 ஏப்ரல், 1920)

சீனிவாச ராமானுஜன் ஒரு மிகச் சிறந்த இந்திய கணித மேதை ஆவார். அவர் தமிழ்நாட்டிலுள்ள ஈரோட்டில் 1887 ஆம் ஆண்டு டிசம்பர் 22இல் பிறந்தார். அவரது பங்களிப்பான எண்ணியலில் பிரிவுச் சார்புகளின் பண்புகள் என்ற கண்டுபிடிப்பு மகத்தானதாகும்.

1911–ம் ஆண்டு தனது முதல் கணித ஆய்வை இந்திய கணிதவியல் கழகத்தில் வெளியிட்டார். அத்தருணத்திலிருந்து அவரது மேதைமை சிறிது சிறிதாக உலகிற்கு வெளிப்படத் துவங்கியது. 1913ஆம் ஆண்டு, எச்.ஹார்டி என்ற ஆங்கில கணிதவியலாருடன் தொடர்பு ஏற்பட்டது. அதனால் அவருக்கு சென்னைப் பல்கலைக்கழகத்தில் சிறப்பு உதவித் தொகையும், கேம்பிரிட்ஜிலுள்ள டிரினிட்டி கல்லூரியில் கணித ஆய்வுக்கான உதவித்தொகையும் கிடைத்தது.

1914ஆம் ஆண்டு, பல்வேறு மதக்கட்டுப்பாட்டுகளுக்கிடையே ராமானுஜன் இங்கிலாந்து சென்றார். அங்கே ஹார்டியுடன் இணைந்து சில கணித ஆய்வுகளை நிகழ்த்தியுள்ளார். அவற்றுள் முக்கியமானது எண்களின் பிரிவுச் சார்புகள் ஆகும். அவரது ஆய்வுக் கட்டுரைகள் ஆங்கில இதழ்களிலும் மற்ற ஐரோப்பிய இதழ்களிலும் வெளியிடப் பட்டன. 1918ஆம் ஆண்டு லண்டன் ராயல் கழகத்தின் உறுப்பினராகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டார். 1917ஆம் ஆண்டிலிருந்தே காச நோயினால் துன்பப்பட்டுக்கொண்டிருந்தார். ஓரளவு தேறியபின் 1919ஆம் ஆண்டு இந்தியாவிற்குத் திரும்பினார். நோயால் வருந்திய அவர் 1920ஆம் ஆண்டு ஏப்ரல் 26ஆம் நாள் தமிழ்நாட்டிலுள்ள கும்பகோணத்தில் மறைந்தார். அவரது கணித மேதைமை பற்றி அப்போது பலர் அறிந்திருக்கவில்லை. அவர் விட்டுச் சென்ற கணித கண்டுபிடிப்புகள் சிலவற்றை மூன்று கையேடுகளில் எழுதி வைத்திருப்பதை பின்னர் கண்டறிந்துள்ளனர். அவை 'தொலைந்த கையேடுகள்' என்று அழைக்கப்படுகின்றது. அவரது வாழ்நாளில் வெளியிடப்படாமல் இருந்த அவரது கண்டுபிடிப்புகளில் இருந்த கணித கருத்துக்கள், அவரது மறைவுக்குப் பிறகும் ஆய்வு செய்யப்பட்டு வருகின்றன.

"எண்களே எமது நண்பர்கள்".

\- சீனிவாச ராமானுஜன்

நோக்கங்கள்

- வரிசை மாற்றங்கள். சேர்மானங்கள் பற்றி புரிந்து கொள்ளுதல்
- ஈருறுப்புத் தொடர், அடுக்குத் தொடர், மடக்கைத் தொடர் பற்றி அறிதல்
- வகையிடல் பற்றி அறிந்து கொண்டு கணக்குகளின் தீர்வு காணல்
- தொகையிடல் பற்றி அறிந்து கொண்டு கணக்குகளின் தீர்வு காணல்

6F2EI7

அறிமுகம்

பின்வரும் பாடப்பகுதிகளில், மேலும் பல புள்ளியியல் பாடக் கருத்தாக்கங்களும்;, அதைச் சார்ந்த கணக்கீடுகளும் இடம் பெற இருக்கின்றன. எனவே இவற்றைக் கற்பதற்கு முன்பு, அவற்றில் பயன்படும் புதிய கணித கருத்தாக்கங்கள் கணித விதிகள், தீர்வு காண்பதற்கான முறைகள் பற்றி முதலில்நன்குஅறிந்திருக்கவேண்டும்.எனவேபுள்ளியியலில்பயன்படும்சிலகணிதமுறைகளையும், நுண்கணிதம் என்னும் பகுதியையும் இப்பாடப்பகுதியில் அறிமுகப்படுத்துகிறோம்

7.1 எண்ணுதலின் அடிப்படை விதிகள்

சில கணிதத் தீர்வுகளுக்கு, எண்ணுதலின் அடிப்படை விதிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வுகளைக் காணலாம். அவ்விதிகள் எண்ணுதலின் கூட்டல்விதி என்றும் எண்ணுதலின் பெருக்கல்விதி என்றும் இருவகைப்படும்.

எண்ணுதலின் அடிப்படை கூட்டல் விதி:

ஒரு நிகழ்வு m வழிகளிலும், மற்றொரு நிகழ்வு n வழிகளிலும் நடந்தால் அவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று ஒரே நேரத்தில் நடக்கலாம் அல்லது இரண்டும் ஒரே நேரத்தில் நடந்தால் அதை m+n வழிகளில் நடக்கும் என்று கருதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.1

ஒரு பெட்டியில் 5 சிவப்பு நிற பந்துகளும், 6 பச்சை நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒருவர் அப்பெட்டியிலிருந்து ஒரு சிவப்பு பந்தையோ, பச்சை பந்தையோ எடுக்க வேண்டுமெனில் எத்தனை வழிகளில் அவர் எடுக்க முடியும்?

தீர்வு:

பெட்டியில் உள்ள, 5 சிவப்பு நிற பந்துகளை 5 வழிகளிலும், 6 பச்சை நிற பந்துகளை 6 வழிகளிலும் தெரிவு செய்யலாம். எண்ணுதலின் அடிப்படை கூட்டல் விதியின்படி, ஒரு சிவப்பு அல்லது பச்சை நிற பந்தினைத் தெரிவு செய்ய $5 + 6 = 11$ வழிகள் உள்ளன.

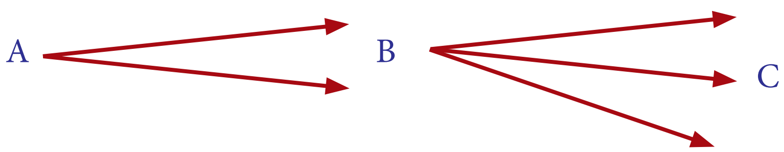
எண்ணுதலின் அடிப்படை பெருக்கல் விதி:

சார்பற்ற இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஒரு நிகழ்ச்சி அ வழிகளிலும் மற்றொரு நிகழ்ச்சி n வழிகளிலும் நடந்தால் இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே நேரத்தில் அ+n வழிகளில் நடக்கும் என கருதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.2

ஒருவர் A என்ற இடத்திலிருந்து C என்ற இடத்திற்கு B வழியாகச் செல்ல வேண்டும். A யிலிருந்து B வரை செல்ல இரு வழிகளும், B இலிருந்து C வரை செல்ல மூன்று வழிகளும் உள்ளன. அவ்வாறெனில் அவர் எத்தனை வழிகளில் A இலிருந்து C க்கு செல்லலாம்?

தீர்வு:



அவர் A இலிருந்து B க்கு 2 வழிகளிலும், B இலிருந்து C க்கு 3 வழிகளிலும் செல்லலாம். எண்ணுதலின் அடிப்படைப் பெருக்கல் விதியின்படி, அவர் ஒரே நேரத்தில் A இலிருந்து C க்குச் செல்ல $2 \times 3 = 6$ வழிகள் உள்ளன.

குறிப்பு

இக்கணக்கின் விடையையும் அதன் கோட்டுப்படத்தையும் கவனிக்க.

எடுத்துக்காட்டு 7.3

ஒரு நிறுவனம், விற்பனை செய்யும் ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் ஒரு குறியீட்டை அளிக்கிறது. அக்குறியீடு ஓர் ஆங்கில எழுத்தையும் அதைத் தொடர்ந்து இரு எண்களையும் கொண்டதாக இருக்கிறது. இம்முறையில் எத்தனை குறியீடுகளை அந்நிறுவனம் உருவாக்கலாம்?

தீர்வு:

குறியீட்டில் 26 ஆங்கில எழுத்துகளும் (A-Z), மற்ற இரு இலக்கங்கள் (0 - 9) ஆக இருக்கும்.

ஆங்கில எழுத்து	எண்	எண்
26 வழிகள்	10 வழிகள்	10 வழிகள்

எழுத்து இருக்கும் இடம் A இலிருந்து Z வரையுள்ள 26 எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும். எனவே 26 வழிகள் உள்ளன. பத்திலக்க எண் இடத்தில் 0 இலிருந்து 9 வரையுள்ள எண்களைக் கொண்டு 10 வழிகளில் குறிக்கலாம். அதேபோல் ஒன்றிலக்க எண் இருக்கும் இடத்திலும், 0 இலிருந்து 9 வரையுள்ள எண்களைக் கொண்டு 10 வழிகளில் குறிக்கலாம். எனவே பொருள்களுக்கான குறியீட்டை, எண்ணுதலின் அடிப்படைப் பெருக்கல் விதியைப் பயன்படுத்தி $26 \times 10 \times 10$ வழிகளில் அதாவது 2600 வழிகளில் உருவாக்கலாம்.]

எடுத்துக்காட்டு 7.4

2, 5, 7, 8, 9 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு, திரும்ப வராத இலக்கங்களால் ஆன நான்கு இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு:

ஆயிரம்	நூறு	பத்து	ஒன்று
5 வழிகள்	4 வழிகள்	3 வழிகள்	2 வழிகள்

ஆயிரமாவது இடத்தைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஐந்து இலக்கங்களைக் கொண்டு 5 வழிகளில் நிரப்பலாம். நிரப்பப்பட்ட எண் திரும்பவும் வராமல் இருக்கும்படி அமைப்பதால், நூறாவது இடத்தை மீதியுள்ள நான்கு இலக்கங்களைக் கொண்டு 4 வழிகளில் நிரப்பலாம்.

அதேபோல், 10ஆவது இடத்தை 3 வழிகளிலும்,

ஒன்றாவது இடத்தை 2 வழிகளிலும் மீதியுள்ள இலக்கங்களைக் கொண்டு நிரப்பலாம்.

இவ்வாறு நான்கு இலக்க எண்களை $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ வழிகளில் அமைக்கலாம்.

வரிசை காரணிப் பெருக்கல் அல்லது இயலெண் தொடர் பெருக்கல் (Factorial):

முதல் n இயல் எண்களின் தொடர் பெருக்கல் பலன், வரிசை காரணிப்பெருக்கல் n அல்லது இயலெண் தொடர்பெருக்கல் n என்று அழைக்கப்படுகிறது. n காரணிப் பெருக்கல் $n\,!$ மற்றும் $\underline{|n}$ எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது.

இதை $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

அதாவது $6! = 6 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 6 \times (5!)$

இதிலிருந்து $n! = n\,(n-1)!$ என எழுதுகிறோம்.

குறிப்பு

$1! = 1$ மற்றும் $0! = 1$.

7.2 வரிசை மாற்றங்கள் (Permutations)

வரிசை மாற்றம் என்பது பொருட்களைப் பல வழிகளில் மாற்றி அமைத்துக் காண்பதாகும். A, B, C என்ற மூன்றில் ஒரே சமயத்தில் இரண்டிரண்டாக அமைத்தலைப் பின்வருமாறு செய்யலாம்.

AB	AC	BC
BA	CA	CB

இங்கு 6 வகையான வரிசை அமைப்புகளைக் காணலாம். இவ்வாறு அமைப்பதில் வரிசையைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். AB என்ற அமைப்பும் BA என்ற அமைப்பும் வேறுவேறான அமைப்புகளாகும்.

மேற்கண்ட வரிசை அமைப்புகளின் எண்ணிக்கையை '3 பொருட்களிலிருந்து எடுக்கும்

2 பொருட்களின் வரிசை மாற்ற எண்ணிக்கை 6 ஆகும்.' என்கிறோம். இதைக் குறியீட்டு முறையில் $3P_2 = 6$ என்று எழுதுகிறோம். எனவே n பொருட்களிலிருந்து, r பொருட்களின் வரிசைமாற்ற எண்ணிக்கை nP_r எனக் குறிப்பிடுகிறோம். nP_r என்பதை விரிவாக்கம் செய்யும் போது $nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots.\,[n-(r-1)]$ என்பதாக எழுதப்படுகிறது. மேலும் இதை இயலெண் தொடர் பெருக்கல் முறையில் குறிப்பிட வேண்டுமாயின் $nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ என்று எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$10\,P_3$ இன் மதிப்பைக் காண இயலெண் தொடர் பெருக்கல் முறையில்

$10\,P_3 = \dfrac{10!}{(10-3)!}$ என்று எழுதப்படுகிறது. அதாவது

$$10\ P_3 = \frac{10!}{(10-3)!}$$

$$10\ P_3 = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times (7!)}{(7!)}$$

$$= 10 \times 9 \times 8$$

$$= 720$$

$10P_3$ இன் மதிப்பைக் காண பின்வரும் முறையிலும் எழுதலாம்.

$$10\ P_3 = 10 \times (10\text{-}1) \times (10\text{-}2)$$

$$= 10 \times 9 \times 8$$

$$= 720$$

$10\ P_3$, இன் மதி;ப்பைக் காண முதலில் 10 இல் தொடங்கி 3 இயல் எண்களை இறங்கு வரிசையில் எழுதிப் பெருக்குக.

எடுத்துக்காட்டு 7.5

ஓர் ஒளிப்படம் எடுக்க ஐந்து மாணவர்களை ஒரே வரிசையில் அமையும்படி எத்தனை வழிகளில் நிற்க வைக்கலாம்?

தீர்வு:

ஐந்து மாணவர்களிலிருந்து, எல்லோரையும் ஒரே வரிசையில் வெவ்வேறு முறையில் நிற்க வைப்பதும் 5 உறுப்புகளிலிருந்து எல்லா 5 உறுப்புகளையும் வரிசை மாற்றத்திற்கு உட்படுத்துவதும் ஒன்றேயாகும். அதாவது இது வரிசை மாற்றங்களின்படி $5P_5 = 5! = 120$ ஆகும்.

பலமுறை வரும் பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்கள் (Permutation of objects not all distinct)

n பொருட்களில். p_1 பொருள் ஒரு வகையாகவும், p_2 பொருள் இரண்டாவது வகையாகவும் p_k பொருள் k ஆவது வகையாகவும் இருக்கும்போது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{n!}{p_1!p_2!....p_k!}$

எடுத்துக்காட்டு 7.6

'STATISTICS' என்ற சொல்லில் எத்தனை வரிசை மாற்ற சொற்களை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட 3S, 3 T, 2 I, 1 A, 1 C என்ற சொல்லில் மொத்தம் 10 எழுத்துக்கள் உள்ளன. அதில் S மூன்று முறையும் T மூன்று முறையும், I இரண்டு முறையும் A ஒரு முறையும், C ஒரு முறையும் வந்துள்ளன. எனவே அச்சொல்லின் வரிசை மாற்ற உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$\frac{10!}{3!2!2!1!1!} = 50400$$

எடுத்துக்காட்டு 7.7

$10\,P_r = 720$ எனில் r இன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு :

$$10\,P_r = 720$$

$$10\,P_r = 10 \times 9 \times 8$$

$$10\,P_r = 10\,P_3$$

$$r = 3$$

7.3 சேர்மானங்கள் (Combinations)

சேர்மானம் என்பது பொருட்களின் வரிசை முறையைக் கருதாமல் தெரிவு செய்யும் (தேர்ந்தெடுக்கும்) முறையாகும். எடுத்துக்காட்டாக A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களில் இரண்டு பொருட்களை ஒரே சமயத்தில் எடுத்தால் அவை AB AC BC இரண்டும் வேறு வேறாகக் கருதப்படுவதில்லை. இரண்டும் ஒன்றாகவே கருதப்படுகிறது. எனவே சேர்மங்களில் வரிசைகளைக் கருதுவதில்லை. இங்கு 3 பொருட்களில் 2 பொருட்களைத் தெரிவு செய்யும்போது கிடைக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். இதை $3C_2 = 3$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

பொதுவில்,

n பொருட்களிலிருந்து C பொருட்களை எடுக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை $3C_2 = 3.$ ஆகும்.

$$nC_r = \frac{np_r}{r!} \quad \text{அல்லது} \quad nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} \text{ எனவும்}$$

வரிசைக் காரணி பெருக்கல் முறையில் எழுதலாம்.

குறிப்பு

1. nC_r என்பதை $\binom{n}{r}$ என்றும் $C\,(n,\ r)$ என்றும் குறிக்கலாம்.
2. $nC_0 = 1,\ nC_1 = n,\ nC_n = 1$

எடுத்துக்காட்டு 7.8

$10C_3$, $8C_4$ ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க

தீர்வு:

$$10C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

[$10\ C_3$: இன் மதிப்பைக் காண, தொகுதியில் 10 இல் தொடங்கி, இறங்குவரிசையில் 3 இயல் எண்களை எழுதி அவற்றின் பெருக்கல் பலனை, பகுதியில் உள்ள 3இன் வரிசைக் காரணிப் பெருக்கலை எழுதி, பின் சுருக்க வேண்டும்].

இப்போது $10C_8$, $10C_2$ ஆகியவற்றை ஒப்பிடுவோம்.

$$10\ C_8 = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1} = \frac{10\times9}{2\times1} = 45$$

$$10\ C_2 = \frac{10\times9}{2\times1} = 45$$

மேற்கண்ட இரண்டிலிருந்தும் $10\ C_8 = 10\ C_2$ என அறிகிறோம்.

இதை $10\ C_8 = 10\ C_{(10\text{-}8)} = 10\ C_2$ என்று எழுதலாம்

n,r இவற்றிற்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் $n\ C$ இல் அதிகமாயிருக்கும்போது மேற்கண்ட முறைப்படி சுருக்கி எளிதாகக் கணக்கிடலாம். சேர்மானத்தில் $n\ C_r = n\ C_{n-r}$ என ஒரு விதியாகக் கூறப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டாக, $200\ C_{198}$, ஐக் கணக்கிட

$$\begin{aligned}200\ C_{198} &= 200\ C_{200\ -\ 198}\\ &= 200\ C_2\\ &= \frac{200\times199}{2\times1}\\ &= 19900.\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.9

கிரிக்கெட் அணிக்காக 13 விளையாட்டு வீரர்களுள் 11 வீரர்களைக் கொண்ட ஒரு குழு தெரிவு செய்யப்பட இருக்கிறது. இதை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

தீர்வு:

13 விளையாட்டு வீரர்களில் 11 வீரர்களை $13C_{11}$ வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். அதாவது

$$13C_{11} = 13C_2 = \frac{13\times12}{2\times1} = 78$$

∴ 78 வழிகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 7.10

6 ஆண்கள், 5 பெண்கள் கொண்ட உறுப்பினர்களிடையே 5 பேர் அடங்கிய ஒரு குழுவாக 2 ஆண்களும், 3 பெண்களும் அதில் இருக்கும்படி எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

தீர்வு:

குழுவில் உள்ள 6 ஆண்களில் 2 பேரை $6C_2$ வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். அதே போல் 5

பெண்களில் 3 பேரை $5C_3$ வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். எனவே ஒரே சமயத்தில் 5 உறுப்பினர் குழுவை (2 ஆண்களும், 3 பெண்களும்) $6C_2 \times 5C_3$ வழிகளில் அமைக்கலாம்.

அது $\frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 150$ வழிகள் ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 7.11

ஐந்து பக்கங்களைக் கொண்ட ஐங்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகளைக் கொண்டு பல்வேறு வழிகளில் சேர்ப்பதால் அமையும் முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

தீர்வு:

ஓர் ஐங்கோணத்தில் 5 முனைப்புள்ளிகள் உள்ளன. ஒரு முக்கோணம் அமைக்க 3 முனைப்புள்ளிகள் தேவை. எனவே 5 புள்ளிகளிலிருந்து 3 புள்ளிகளை சேர்மான முறையில் $5C_3$ முறையில் தெரிவு செய்யலாம். அதாவது

$$5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

10 முக்கோணங்களை அமைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.12

ஒரு வினாத்தாளில் A பிரிவில் 5 வினாக்களும் B பிரிவில் 7 வினாக்களும் உள்ளன. ஒரு மாணவன் இரு பிரிவுகளிலும் குறைந்தபட்சம் 3 வினாக்களைத் தெரிவு செய்து மொத்தம் 8 வினாக்களுக்கு விடைதர வேண்டுமெனில் எத்தனை வழிகளில் வினாக்களைத் தெரிவு செய்யலாம்?

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட 12 வினாக்களுக்குள் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் குறைந்தபட்சம் 3 வினாக்களைத் தெரிவு செய்யும் முறை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிரிவு A 5 வினாக்கள்	பிரிவு B 7 வினாக்கள்	சேர்மானங்கள்	வழிகளின் எண்ணிக்கை
3	5	$5C_3 \times 7C_5$	210
4	4	$5C_4 \times 7C_4$	175
5	3	$5C_5 \times 7C_3$	35
		மொத்த வழிகள்	420

∴ வினாக்களை 420 வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்

எடுத்துக்காட்டு 7.13

$6P_r = 360$ மற்றும் $6C_r = 15$ எனில் r இன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு:

சேர்மானங்களின் விதியின்படி

$$nC_r = \frac{{}^{n}P_r}{r!}$$

$$6C_r = \frac{6p_r}{r!}$$

$$15 = \frac{360}{r!}$$

$$r! = \frac{360}{15} = 24$$

$$r! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$r! = 4!$$

$$\therefore \quad r = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 7.14

$nC_8 = nC_{7,}$ எனில் nC_{15} இன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு:

$$nC_8 = nC_7$$

$$nC_{n-8} = nC_7$$

$$n-8 = 7$$

$$n = 15$$

இப்போது $nC_{15} = 15C_{15} = 1$ ஆகும்.

7.4. ஈருறுப்பு தொடர், அடுக்குத்தொடர், மடக்கைத் தொடர் பற்றிய அறிமுகம்

7.4.1 ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial series)

இயற்கணிதக் கோவை இரண்டு உறுப்புகளைச் சார்ந்திருக்கும்போது அது ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும். ஈருறுப்புக் கோவைகளையும் அவற்றின் விரிவாக்கத்தையும் அவற்றால் உருவாகும் எண் அமைப்பையும் கீழே காண்போம்.

ஈருறுப்புகள் விரிவாக்கங்கள் எண் வடிவங்கள்

$(x+a)^0$	1	1
$(x+a)^1$	$x+a$	1 1
$(x+a)^2$	$x^2+2xa+a^2$	1 2 1
$(x+a)^3$	$x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$	1 3 3 1

$(x+a)^4$	$x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$		1	4	6	4	1
$(x+a)^5$	$x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$	1	5	10	10	5	1

மேற்கண்ட ஈருறுப்புக் கோவைகளின் விரிவாக்கத்தில் கிடைக்கும் ஈருறுப்புக் கெழுக்களால் ஆகிய எண்கள், ஒரு முக்கோண வடிவத்தை உருவாக்குவதைக் காணலாம். இவ்வடிவமைப்பிற்கு பாஸ்கலின் முக்கோண அமைப்பு என்று பெயர். இவ்வமைப்பில் இடம் பெறும் எண் முன்வரிசையில் இடம் பெறும் இரு எண்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாக இருப்பதைக் காணலாம்.

மிகைமுழு எண்களுக்கான ஈருறுப்பு தேற்றம்

n என்பது மிகைமுழு எண் எனில்

$$(x+a)^n = nc_0x^na^0 + nc_1x^n-1_a + nc_2x^{n-2}a^2 + \dots + nc_rx^{n-r}a^r + \dots + nc_n a^n$$

மேற்கண்ட ஈருறுப்புக் கோவை விரிவாக்கத்தில் நாம் அறிவது

(i) $(r+1)^{\text{th}}$ ஆவது உறுப்பு $T_{r+1} = nc_r x^{n-r}a^r$

(ii) . 'x' இன் படிகள் குறைந்து கோண்டே வரும் 'a' இன் படிகள் அதிகரித்துக்கொண்டே வரும். படிகளின் கூடுதல் சமமாக n ஆக இருக்கும்.

(iii) nc_0, nc_1, nc_2, … nc_r, … nc_n என்பவை ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் எனப்படும் அவைc_0, c_1, c_2 … , c_n என்றும் குறிக்கப்படும்.

(iv) $nc_r = nc_{n-r}$ என்பதிலிருந்து கெழுக்கள் சம தொலைவில் இருப்பதையும் ஆரம்பத்திலிருந்து முடிவு வரை சமமாக இருப்பதையும் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.15

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(2x+y)^5$ இன் விரிவாக்கத்தை எழுதுக.

தீர்வு:

$$(x+a)^n = nc_0x^na^0 + nc_1x^n-1_a + nc_2x^{n-2}a^2 + \dots + nc_rx^{n-r}a^r + \dots + nc_n a^n$$

இங்கு $n = 5$, $X = 2x$, $a = y$

$$(2x+y)^5 = 5C_0 (2x)^5 (y)^0 + 5C_1 (2x)^4 (y)^1 + 5C_2 (2x)^3 (y)^2 + 5C_3 (2x)^2 (y)^3 + 5C_4 (2x)^1 (y)4 + 5C_5 (2x)^0 (y)^5$$

$$= (1)2^5x^5 + (5)\, 2^4x^4\, y + (10)\, 2^3x^3\, y^2 + (10)\, 2^2x^2\, y^3 + (5)\, 2^1x^1\, y^4 + (1)\, y^5$$

$$= 32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$$

$$(2x+y)^5 = 32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$$

எடுத்துக்காட்டு 7.16

$(3x+y)^5$ இன் மைய உறுப்புகளைக் காண்க

தீர்வு:

$(3x+y)^5$ இன் விரிவாக்கத்தில் 6 உறுப்புகள் உள்ளன. அவற்றில் மைய உறுப்புகளாக T_3, T_4 ஆகிய இரண்டும் உள்ளன.

T_3 ஐக்கான $r = 2$ இல் T_{r+1}

இங்கு $n = 5$, $x = 3x$, $a = y$

$$T_{r+1} = nC_r\, x^{n-r}\, a^r$$

$$T_{2+1} = 5C_2\, (3x)^{5-2}\, (y)^2$$

$$= 5C_2\, 3^3\, x^3\, y^2$$

$$= 270x^3y^2$$

அதேபோல் T_4 ஐக்கான $r = 3$ என T_{r+1} இல் பிரதியிடுக $T_4 = 90x^2y^3$

விகிதமுறு எண்களைக் கொண்ட படிகளுக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றம்

n என்பது விகிதமுறு எண்ணாக இருந்தால் $|x| < 1$ஆகவும் இருந்தால்

குறிப்பு

(v) $n \in N$,ஆயின் $(1+x)n$ விரிவாக்கம் x இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் காணலாம். n விகிதமுறு எண்ணாக இருந்தால்$|x| < 1$.என்று இருக்கும்போது மட்டும் விரிவாக்கம் செய்ய இயலும்.

(vi) $n \in N$,ஆயின் $(1 + X)n$ இன் விரிவாக்கத்தில் $(1+x)$உறுப்புகள் மட்டும் இருக்கும்.

n விகிதமுறு எண்ணாக இருந்தால், அதன் விரிவாக்கம் எண்ணற்ற முடிவுறா உறுப்புகளைக் கொண்டதாக இருக்கும்.

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

சில முக்கிய விரிவாக்கங்கள்:

$$(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-3)}{3!}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^{-n} = 1 - \frac{n}{1!}x + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$(1-x)^{-n} = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots$$

சில முக்கிய முடிவுறாத் தொடர்கள்:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$
$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$
$$(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3 +\ldots$$
$$(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3 +\ldots$$

எடுத்துக்காட்டு 7.17

ஈருறுப்புத் தொடரைப் பயன்படுத்தி $\sqrt[3]{1002}$ இன் மதிப்பை 3 தசம திருத்த மதிப்பிற்குக் காண்க.

தீர்வு:

$$\sqrt[3]{1002} = \sqrt[3]{1000+2}$$
$$= \sqrt[3]{1000\left(1+\frac{2}{1000}\right)}$$
$$= [(10^3)^{\frac{1}{3}}(1+0.002)^{\frac{1}{3}}]$$
$$= 10[1+0.002]^{\frac{1}{3}}$$
$$= 10[1+\frac{1}{3}[0.002]+\ldots]$$
$$= 10[1+0.00066+\ldots]$$
$$= 10[1+0.00066]$$
$$= [10+0.0066]$$
$$= 10.007$$

7.4.2 அடுக்குத் தொடர் (Exponential series)

x இன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கு $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ என்பது அடுக்குத்தொடர் வரிசை எனப்படும். இதில் e விகிதமுறா எண் இதன் மதிப்பு $e = 2.718282$

மேலும் $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\infty$, $e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots$ ஆகும்.

அடுக்குத் தொடரின் மற்ற விரிவாக்கங்கள்

$$e^{-x}= 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \qquad \frac{e^x-e^{-x}}{2}\ x+\frac{x_3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$\frac{e+e^{-1}}{2} = 1+\frac{1!}{2!}+\frac{1}{4!}+\ldots \qquad \frac{e-e^{-1}}{2} 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots$$

எடுத்துக்காட்டு 7.18

$$\frac{\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots}{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3!}+\ldots}=\frac{e+1}{e-1}$$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$\frac{\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots}{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\ldots} = \frac{\frac{e-e^{-1}}{2}}{\left[\frac{e+e^{-1}}{2}-1\right]}$$

$$= [\frac{e-e^{-1}}{2}] \div \left[\frac{e+e^{-1}-2}{2}\right]$$

$$= \frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}-2}$$

$$= \left[e-\frac{1}{e}\right] \div [e+\frac{1}{e}-2]$$

$$= [\frac{e^2-1}{e}] \div [\frac{e^2-2e+1}{e}]$$

$$= \frac{(e^2-1)}{(e^2-2e+1)}$$

$$= \frac{(e^2-1)}{(e-1)}$$

$$= \frac{(e-1)(e+1)}{(e-1)^2}$$

$$= \frac{e+1}{e-1}$$

7.4.3 மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic series)

$|x| < 1$ எனில், $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ என்ற தொடர் $\log(1+x)$ என்பதை நோக்கிக் குவியும்.

$\log\ (1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ என்ற தொடர் மடக்கைத் தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது. மடக்கைத் தொடரை ஒட்டிய மற்ற தொடர்கள்

(vii) $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$

(viii) $\log(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$

(ix) $\log(1+x)-\log(1-x) = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$

$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$

7.5 நுண்கணிதம் பற்றிய அறிமுகம் (Introduction to Elementary calculus)

புள்ளியியலில் தொடர்ச்சியான வாய்ப்பு மாறிகளைப் (continuous random variables) பற்றியும் அவற்றைப் பயன்படுத்திக் கணக்குகளைச் செய்வதற்கு முற்படுமுன் உயர்நிலை கணிதத்தில் உள்ள நுண்கணிதம் என்ற பகுதியில் உள்ள வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் பற்றிய அடிப்படையறிவு நமக்குத் தேவைப்படுகிறது.

எனவே புள்ளியியலில் பயன்படும் நுண்கணிதப் பகுதிகளில் உள்ள எளிய கருத்துகளையும், விதிகளையும் இப்பாடத்தில் அறிமுகப்படுத்துகிறோம்.

7.5.1 வகையிடல் (Differentiation)

சார்புகள் மற்றும் சார்பு மதிப்புகள் பற்றி முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றிருக்கிறோம். சார்பு மதிப்பு என்பது மிகச் சரியான மதிப்பாகும். ஏதேனும் ஒரு சார்பு $f(x)$ க்கு $x = a$ எனும்போது, $f(a) = k$ என்பதாகும். சார்பு மதிப்பிற்கு மிகவும் நெருக்கமான மதிப்பு எல்லை மதிப்பு எனப்படும். எல்லை மதிப்பு என்பது தோராயமான மதிப்புதான். ஆனால் அது k என்ற சார்பு மதிப்பிற்கு மிகமிக நெருக்கமாகவும் ஏறத்தாழ சார்பு மதிப்பிற்குச் சமமாகவும் இருக்கும்.

சார்பு மதிப்பு 4 எனில் எல்லைமதிப்பு 4.00000001 ஆகவோ 3.99999994 ஆகவோ இருக்கும். இங்கு சார்பு மதிப்பும் எல்லை மதிப்பும் ஏறத்தாழ சமமாக இருப்பதைக் காண்கிறோம். அவற்றிற்கிடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு இல்லை என்பதை அறிகிறோம். எனவே பல சமயங்களில் சில சிக்கலான தீர்வுகளுக்கு எல்லை மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

x ன் மதிப்பு 2i நோக்கிச் செல்லுமாயின், அச்சார்பின் எல்லை மதிப்பு $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = l$ என்றுகுறிக்கப்படும்.எல்லைமதிப்புகளில்ஒருசிறப்பானஎல்லைமதிப்பான $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ என்பது பொருத்தமான மதிப்பாக இருக்குமேயானால், அந்த எல்லை மதிப்பை x ஐப் பொருத்த f என்ற சார்பின் வகைக்கெழு என்கிறோம். அதை $f'(x)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். y என்பது x இன் சார்பு எனில், அது வகைக்கெழு மதிப்பையும் பெற்றிருக்குமானால், x ஐப் பொருத்த y இன் வகைக் கெழுவை $\frac{dy}{dx}$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். இம்முறையில் எல்லை மதிப்புகளின் வகைக்கெழு காண்பது வகையிடல் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

வகையிடலில் சில விதிகள்:

(i) மாறிலியின் வகைக்கெழு, பூச்சியம் ஆகும். அதாவது c என்பது மாறிலி எனில் $f'(c) = 0$

(ii) u என்பது x இன் சார்பு மாறி, k என்பது மாறிலி மற்றும் வகையிடலைக் குறிக்க $'$ (dash) $[k\,u]' = k[u]'$

(iii) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(iv) $(u\,v)' = u'v + u\,v'$

(v) $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

முக்கிய சூத்திரங்கள் :

(i) $(x^n)' = n x^{n-1}$

(ii) $(e^x)' = e^x$

(iii) $(\log x)' = \frac{1}{x}$

எடுத்துக்காட்டு 7.19

மதிப்பிடுக:

(i) $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-25}{x-3}$ (ii) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

தீர்வு:

(vi) $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-25}{x-3} = \frac{5^3-25}{5-3} = \frac{100}{2} = 50$

(vii) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$,இது ஒரு தீர்மானிக்க முடியாத ஒன்றாகும். எனவே கோவையை முதலில் காரணிப்படுத்தி, சுருக்கி, பின் எல்லை மதிப்பினைப் பிரதியிட்டு எல்லை மதிப்பைப் பெறுக.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$= 2+2 = 4$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 7.20

பின்வருவனவற்றை x ஐப் பொருத்து வகையிடுக:

(i) $x^{15}-10$ (ii) x^3+3x^2-6 (iii) x^4e^x (iv) $\frac{x^2-1}{x+3}$

தீர்வு:

(i)

$$y = x^{15}-10$$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^{15-1} - 0$$

$$= 15x^{14}$$

(ii)

$y = x^3+3x^2-6$ என்க.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2+3(2x)-0$$

$$= 3x^2$$

(iii)

$y = x^4e^x$ என்க.

இது கீழ்க்கண்ட விதியின்படி வகையிடல் வேண்டும்

$$[uv]' = u'v + uv'$$

$$= [x^4]'(e^x) + (x^4)[e^x]'$$

$$= 4x^3e^x + x^4e^x$$

$$= (4x^3 + x^4)e^x$$

(iv) $y = \dfrac{x^2-1}{x+3}$ என்க.

இது கீழ்க்கண்ட விதியின்படி வகையிடல் வேண்டும்

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{x^2-1}{x+3}\right]'$$

$$= \frac{(x^2-1)'(x+3) - (x^2-1)(x+3)'}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(2x)(x+3) - (x^2-1)\times 1}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{2x^2+6x-x^2+1}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}$$

குறிப்பு

தொடர் வகையிடல் மூலம் மேலும் பல உயர் வரிசைகளுக்கு வகையிடலாம்.

தொடர் வகையிடல் :

ஒரு முறை வகைப்படுத்திய சார்பை மறுபடியும் அதே மாறியைப் பொருத்து மீண்டும் வகையிடுவதைத் தொடர்வகையிடல் என்கிறோம். அதை $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ or D^2y or Y_2 என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $y = (x^3+4x^2+7)$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} = (3x^2+8x)$ ஆகும்.

மீண்டும் x ஐப் பொறுத்து வகையிட $\dfrac{d^2y}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}(3x^2+8x) = 6x+8$

7.5.2 தொகையிடல் (Integration)

தொகையிடல் என்பது, வகையிடலின் எதிர்மறைச் செயலாகும். மேலும் இதனை எதிர் வகையிடல் எனவும் கூறலாம்.

x^5 இன் வகையீட்டுக் கெழு $5x^4$ எனில் $5x^4$ இன் தொகை x^5 ஆகும். இதைக் குறியீட்டில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4 \Rightarrow \int 5x^4\,dx = x^5$$
$$\frac{d}{dx}(x^7) = 7x^6 \Rightarrow \int x^6\,dx = x^7$$
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Rightarrow \int e^x\,dx = e^x$$
$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

இது போல் பல சார்புகளுக்குத் தொகை காணலாம்.

குறிப்பு

வகைப்படுத்தும்போது மாறிலிகள் பூச்சியமாகின்றன. ஆனால் எதிர்மறைச் செயலான தொகையிடலில், மாறிலியின் மதிப்பு தெரியாவிட்டால் அதைச் சேர்க்க இயலாது. எனவே தொகையிடும் போது கிடைக்கும் மதிப்புடன் உ என்ற மாறிலியைச் சேர்க்கிறோம். எனவே மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளைப் பின்வருமாறு எழுதுவது வழக்கம்.

$$\int 7x^6\,dx = x^7 + c$$
$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

இவ்வாறு கிடைக்கும் தொகைகள் அறுதியற்ற தொகைகள் அல்லது வரையற்ற தொகைகள் (improper integrals or indefinite integrals) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

தொகையிடலில் உள்ள முக்கிய விதிகள்:

(i) $\int k\,dx = kx$

(ii) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(iii) $\int e^x\,dx = e^x$

(iv) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$

(v) $\int (u \pm v)\,dx = \int u dx \pm \int v dx$

எடுத்துக்காட்டு 7.21

x ஐப் பொறுத்து தொகையிடுக.

(i) x^7 (ii) $\frac{1}{x^6}$ (iii) $\sqrt{x}$ (iv) $x^5 - 4x^2 + 3x + 2$

தீர்வு:

(i) $\int x^7\,dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} = \frac{x^8}{8} + c$

(ii) $\int \frac{1}{x^6}\,dx$

$$= \int x^{-6}\,dx$$

$$= \frac{x^{-6+1}}{-6+1} = \frac{x^{-5}}{-5}$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + c$$

(iii) $\int \sqrt{x}\,dx$

$$= \int x^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

(iv) $\int (x^5 - 4x^2 + 3x + 2)\,dx$

$$= \left(\frac{x^6}{6}\right) - 4\left(\frac{x^3}{3}\right) + 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2x + c$$

வரையறுத்த தொகையிடல் (Definite integral)

மேலே எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்கப்பட்ட தொகைகள் வரையற்ற தொகை (improper integrals or indefinite integrals) எனப்படும். வரையறுத்த தொகைகள் என்னும் தொகைகளுக்குக் கீழ் எல்லையும், மேல் எல்லையும் உண்டு.

$\int f(x)\,dx$ என்பது வரையற்ற தொகையாகும். அதையே ஒரு வரையறைக்குள் a, b என்ற எல்லைக்குள் அமைத்தால் அது வரையறுத்த தொகை எனப்படும். அதாவது $\int_a f(x)\,dx = \mathrm{k}$ (ஒரு மாறிலி) என்பது ஒரு வரையறுத்த தொகையாகும். a என்பது கீழ் எல்லை எனவும், b என்பது மேல் எல்லை எனவும் கூறப்படும். வரையறுத்த தொகையின் மதிப்பைக் காண பின்வரும் விதிமுறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$\int f(x)\,dx = F(x)$ எனில்

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

எடுத்துக்காட்டு 7.22

மதிப்பிடுக:

(i) $\int_{1}^{3} x^3\,dx$ (ii) $\int_{-1}^{+1} 5x^4\,dx$ (iii) $\int_{1}^{2} \frac{5}{x}\,dx$

தீர்வு:

(i)
$$\int_{1}^{3} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{4}[3^4 - 1^4]$$
$$= \frac{1}{4}[81 - 1]$$
$$= \frac{1}{4}[80]$$
$$= 20$$

(ii)
$$\int_{-1}^{+1} 5x^4\,dx = 5\int_{-1}^{1} x^4\,dx$$
$$= 5\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$
$$= [x^5]_{-1}^{1}$$
$$= [1^5 - (-1)^5]$$
$$= 1-(-1)$$
$$= 1+1$$
$$= 2$$

(iii)
$$\int_{1}^{2} \frac{5}{x}\,dx$$
$$= 5\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\,dx$$
$$= 5\,[\log x]_1^2$$
$$= 5[log2 - log1]$$
$$= 5log2$$

7.5.3 இரட்டைத் தொகையிடல் (Double integrals)

இரட்டைத் தொகையிடல் என்பது இருவேறு மாறிகளால் ஆன மெய்யெண் சார்பு $f(x,y)$ இன் $R=[a, b] \times [c, d]$ என்ற பரப்பில் நிகழும் தொகையிடல் ஆகும். இங்கு $f(x,y)$ சார்பை முதலில் y க்குத் தொகையிட்டுப் பின் x க்கு தொகையிடப்படும். இரட்டைத் தொகையிடல் $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.

தொகையிடும்போது $f(x,y)$ என்ற சார்பை முதலில் y ஐப் பொருத்து தொகையிடும் போது $f(x)$ என்பது மாறிலியைப் போல் கருதப்படுகிறது. பிறகு x ஐப் பொறுத்து தொகையிட்டு எல்லை மதிப்புகளைப் பிரதியிட இரட்டைத் தொகையிடுதலின் மதிப்பு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.23

மதிப்பிடுக: $\int_0^1 \int_1^2 x^2 y dx dy$, for $0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$

தீர்வு:

முதலில் y ஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்போம். அதன்பின் x ஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்போம். மேற்கண்ட தொகையை $\int_0^1 x^2 \left[\int_1^2 y dy \right] dx$ என்று எழுதுவோம்.

இப்போது அடைப்புக் குறிக்குள் உள்ள தொகையை மட்டும் தொகைப்படுத்தி எல்லைகளைப் பிரதியிட்டுச் சுருக்குவோம்

$$= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} [4 - 1]\, dx$$

பிறகு மறுபடியும் x ஐப் பொறுத்துத் தொகை காண்போம்.

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} [1^3 - 0]$$

$$= \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.24

மதிப்பிடுக: $\int_0^2 \int_0^1 [2y^2 x^2 + 3]\, dy dx$

தீர்வு:

$$= \int_0^2 \int_0^1 [2y^2 x^2 + 3]\, dy dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 (2y^2 x^2 + 3) dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{2x^2}{3} y^3 + 3y \right]_0^1 dx = \int_0^2 \left[2x^2 \left(\frac{1}{3} \right) + 3(1) - 0 \right] dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} \right) + 3x \right]_0^2 = \left[\frac{16}{9} + 6 \right]$$

$$= \frac{31}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.25

மதிப்பிடுக: $\int_0^1 \int_0^1 16abxydx\, dy$

தீர்வு:

$$\int_0^1 \int_0^1 16abxydx\, dy$$

$$= 16ab \int_0^1 \left[\int_0^1 xydx \right] dy$$

$$= 16ab \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_0^1 dy$$

$$= 16ab \int_0^1 \left[\frac{y}{2} \right] dy$$

$$= 8ab \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 \quad = 4ab[1-0]$$

$$= 4ab$$

நினைவில் கொள்க....

- எண்ணுதலின் அடிப்படை பெருக்கல் விதி: சார்பற்ற இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஒரு நிகழ்ச்சி m வழிகளிலும் மற்றொரு நிகழ்ச்சி n வழிகளிலும் நடந்தால் இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே நேரத்தில் $m \times n$ வழிகளில் நடக்கும் என கருதலாம்.

- முதல் n இயல் எண்களின் தொடர் பெருக்கல் பலன், வரிசை காரணிப்பெருக்கல். n அல்லது இயலெண் தொடர்பெருக்கல் n என்று அழைக்கப்படுகிறது. n காரணிப் பெருக்கல் $n!$ மற்றும் $\underline{|n}$ எனவும் குறிக்கப்படுகிறது.

- வரிசை மாற்றங்கள் : n பொருட்களிலிருந்து, r பொருட்களின் வரிசைமாற்ற எண்ணிக்கை nP_r எனக் குறிக்கப்படும். $nP_r = n(n-1)(n-2) - - - - [n-(r-1)] \quad = \frac{n!}{(n-r)!}$

- சேர்மானங்கள் : n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை எடுக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை n ஆகும். $nC_r = \frac{np_r}{r!} \quad = \frac{n!}{(n-r)!r!}$, $nC_r = nC_{n-r}$

- ஈருறுப்புத் தொடர் : n என்பது மிகைமுழு எண் எனில்

  $(x+a)^n = nc_0 x^n a^0 + nc_1 x^n - 1_a + nc_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nc_r x^{n-r} a^r + \ldots + nc_n a^n$

  n என்பது விகிதமுறு எண்ணாகவும், ' $|x| < 1$ ஆகவும் இருந்தால்

  $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots ,$

- அடுக்குத்தொடர் : x இன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும் $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ என்பது அடுக்குத்தொடர் வரிசை எனப்படும். இதில் e= 2.718282

- வகையிடல் : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ என்பது பொருத்தமான மதிப்பாக இருக்குமேயானால், அந்த எல்லை மதிப்பை x ஐப் பொருத்த f என்ற சார்பின் வகைக்கெழு என்றும் அதை $f`(x)$ என்றும் குறிப்பிடுகிறோம். y என்பது x இன் சார்பு எனில், அந்த வகைக்கெழுவை $\frac{dy}{dx}$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

- வகையிடலில் சில விதிகள் :

  1. மாறிலியின் வகைக்கெழு, பூச்சியம் ஆகும். அதாவது c என்பது மாறிலி எனில் $f'(c) = 0$

  2. u என்பது x இன் சார்பு மாறி, k என்பது மாறிலி மற்றும் வகையிடலைக் குறிக்க ' ′ ' குறியை இடுவோம் எனில் $[k\,u]' = k\,[u]'$

  3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

  4. $(u\,v)' = u'v + u\,v'$

  5. $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

- சில முக்கிய சூத்திரங்கள் :

(i) $(x^n)' = n\,x^{n-1}$

(ii) $(e^x)' = e^x$

(iii) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

- தொகையிடல் : தொகையிடல் என்பது வகையிடலின் எதிர்மறைச் செயலாகும். இதனை எதிர்வகையிடல் எனவும் கூறலாம்.

தொகையிடலில் சில விதிகளும், சூத்திரங்களும்:

(i) $\int k\,dx = kx$

(ii) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

(iii) $\int e^x\,dx = e^x$

(iv) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log x$

(v) $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$

- வரையறுத்த தொகைகள் : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

- இரட்டைத் தொகையிடல் : $f(x,y)$ என்ற சார்பில் அமைந்த இரட்டைத் தொகையிடல் $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. தொகையிடும்போது $f(x,y)$ என்ற சார்பை முதலில் y ஐப் பொருத்து தொகையிடும் போது $f(x)$ என்பது மாறிலியைப் போல் கருதப்படுகிறது. பிறகு x ஐப் பொறுத்து தொகையிட்டு எல்லை மதிப்புகளைப் பிரதியிட இரட்டைத் தொகையிடுதலின் மதிப்பு கிடைக்கும்.

பயிற்சி

6FBAJU

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. வரிசைக் காரணிப்பெருக்கல் n இவ்வாறும் எழுதப்படுகிறது

   (a) $n(n-1)!$ (b) $n(n+1)!$ (c) $(n-1)!$ (d) $(n+1)!$

2. $10P_2$ இன் மதிப்பு

(a) 10 (b) 45 (c) 90 (d) 20

3. 'DATE' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் வேறுவேறான நான்கு எழுத்து சொற்களின் எண்ணிக்கை

(a) 4 (b) 8 (c) 24 (d)48

4. $50C_{50}$ இன் மதிப்பு

(a) 50 (b) 25 (c)1 (d)0

5. $20C_{18}$ இன் மதிப்பு

(a) 190 (b) 180 (c) 360 (d) 95

6. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ இன் மதிப்பு

(a) –1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

7. $\log x$ இன் வகைக்கெழு

(a) 1 (b) $\frac{1}{x}$ (c) e^x (d) $\log x$

8. x^9 இன் வகைக்கெழு

(a) x^8 (b) $9x^8$ (c) $8x^9$ (d) $8x^8$

9. x^{11} இன் தொகை

(a) $\frac{1}{12}x^{12}$ (b) x^{12} (c) $11x^{10}$ (d) $10x^{11}$

10. $\int e^x \, dx$ என்பது

(a) $e\,x^2$ (b)e^x (c) e^{-x} (d) xe^x

11. $\int_0^1 x^3 \, dx$ என்பது

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 3

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

12. உறுப்புகளிலிருந்து எல்லா n உறுப்புகளையும் எடுக்கும்போது வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை __________

13. ஒரு வரிசையில் நான்கு மாணவர் நிற்பதற்கான பல்வேறு வழிகள் __________

14. 10 மாணவர்களில் 2 மாணவர்களைத் தேர்வு செய்வதற்கான வழிகள் __________

15. nC_n இன் மதிப்பு __________

16. $21C_3$ இன் மதிப்பு __________

17. $\lim_{x \to 5} \frac{2x+3}{x+5}$ இன் மதிப்பு __________

18. e^x இன் வகைக்கெழு __________

19. $\frac{1}{x}$ இன் தொகை __________

20. $\int 6x^5 \, dx$ இன் தொகை __________

21. $\int_0^1 x^{10} \, dx$ இன் தொகை __________

III . குறுவினா (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி):

22. ஒருவன் 6 கால்சட்டைகளும் 10 மேல்சட்டைகளும் வைத்திருக்கிறான். அவன் அவற்றை எத்தனை வழிகளில் அணிந்து கொள்ள முடியும்?

23. மதிப்பிடுக (i) $4P_4$ (ii) $10P_4$ (iii) $100P_2$

24. 'SWIPE' என்ற சொல்லிலிருந்து எத்தனை நான்கு எழுத்து குறியீடுகளை, எழுத்துக்கள் திரும்ப வராதபடி அமைக்க முடியும்?

25. ஒரு போட்டியில் 10 பேர் கொண்ட குழுவில் எத்தனை வழிகளில் முதல் மற்றும் இரண்டாம் இடம், கலந்து கொண்டவர்களுக்கு வழங்க முடியும்?

26. மதிப்பிடுக $10C_4$, $22C_3$, $100C_{98}$

27. மதிப்பிடுக (i) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x+7}{x+8}$ (ii) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$

28. x^2e^x ஐப் பொறுத்து வகையிடுக

IV. சிறு வினா (ஓரிரு சொற்றொடர்களில் விடையளி):

29. 'PROBABILITY' என்ற சொல்லிலிருந்து எத்தனை வேறுவேறான சொற்களை உருவாக்க இயலும்?

30. ஒரு பையில் 7 நீல நிறப் பந்துகளும், 5 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. அதிலிருந்து 3 நீலம், 2 சிவப்பு நிறப் பந்துகளை எடுப்பதற்கான முறைகளைக் கண்டுபிடி.

31. ஓர் அறுங்கோணத்தில் உள்ள முனைப்புள்ளிகளைக் கொண்டு எத்தனை முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம்?

32. {E,Q,U,A,T,I,O,N} என்ற கணத்திலிருந்து எத்தனை வழிகளில் 3 உயிரெழுத்துக்களையும், 2 மெய்யெழுத்துக்களையும் தெரிவு செய்யலாம்?

33. பின்வருவனவற்றை x ஐப் பொறுத்து வகையிடுக:

(i) $e^x(x^2-5)$ (ii) $\frac{x^2-1}{x+7}$

34. மதிப்பு காண்க $\int (3x^3-2x^2+6x-7)\,dx$

35. மதிப்பு காண்க $\int (\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-e^x+3)\,dx$

36. $\int_0^2 \frac{3}{4}(2-x)\,dx$ இன் மதிப்பு காண்க

37. $\int_{-1}^1 2x\,dx$ இன் மதிப்பு காண்க

38. மதிப்பிடுக: $\int_0^2\int_0^1 [2x+3y]\,dydx$

V. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விரிவான விடை தருக :

39. ஒரு வகுப்பில் 12 சிறுவரும் 10 சிறுமியரும் உள்ளனர். அவர்களுள் 10 பேரை ஒரு போட்டிக்காகத் தெரிவு செய்ய வேண்டியுள்ளது. அதில் குறைந்தபட்சம் 4 சிறுவரும், குறைந்தபட்சம் 4 சிறுமியரும் இருக்க வேண்டுமெனில் அவர்களை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

40. 52 அட்டைகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டில் 4 அட்டைகள் எடுக்கப்படுகிறது. அதில்

(i) 3 அட்டைகள் ஒரே இனமாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) 4 அட்டைகளும் வேறுவேறு இனமாக இருக்க வேண்டும்.

(iii) 2 சிவப்பு அட்டைகளும் 2 கருப்பு அட்டைகளும் இருக்க வேண்டும்.

மேற்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டுக் கிடைக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கைகளைக் காண்க

41. ஒரு தேர்வில் முதல் பிரிவில் 3 வினாக்களும், இரண்டாம் பிரிவில் 3 வினாக்களும் மூன்றாம் பிரிவில் 2 வினாக்களும் கேட்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு பிரிவிலும் குறைந்தபட்சம் ஒரு வினாவைத் தெரிவு செய்து மொத்தம் 5 வினாக்களுக்கு விடை தர வேண்டும். அவ்வாறெனில் தேர்வு எழுதும் மாணவர் எத்தனை வழிகளில் வினாக்களைத் தெரிவு செய்யலாம்?

42. x ஐப் பொருத்து வகைப்படுத்துக

(i) $(x^3-4x^2+2x)(e^x+5)$ (ii) $\frac{x^2-7x}{x^2+8}$

43. x ஐப் பொறுத்துத் தொகையிடுக : (i) $\frac{x^2-5x+6}{x}$ (ii) $2\sqrt{x}+\frac{3}{x^4}$

44. மதிப்பைக் காண்க : (i) $\int_0^2 \frac{3}{4}x(2-x)\,dx$ (ii) $\int_1^2 \frac{12}{x}\,dx$

45. மதிப்பிடுக $\int_0^1 \int_0^1 x^2 \, y dx dy$

46. மதிப்பிடுக $\int_1^2 \int_2^4 6x \, y^2 \, dx dy \, dx dy$

47. மதிப்பிடுக $\int_1^2 \int_1^2 4mnxy dx dy$

48. மதிப்பிடுக $\int_1^2 \int_1^3 (4x - 2y) \, dx dy$

விடைகள்:

I. 1. (a) , 2. (c) , 3. (c) , 4. (c) , 5. (a) , 6. (c) , 7. (b) , 8. (b) , 9. (a) ,

10. (b) , 11. (a)

II. 12. n! 13. 24 , 14. 45, 15.1 , 16. 1330 , 17. $\frac{13}{10}$, 18. e^x ,

19. $\log x$, 20. x^6+c, 21. $\frac{1}{11}$

III. 22. 60, 23. (i) 24 , (ii) 5040 , (iii) 9900 , 24.120 , 25. 90 ,

26. (i) 120 , (ii) 1540 , (iii) 4950 , 27. (i) $\frac{3}{10}$, (ii) 10 , 28. $e^x \; (x^2+2x)$

IV. 29. $\frac{11}{2!2!}$, 30. 350 , 31. 20 , 32. 30 , 33. (i) . $e^x \; (x^2+2x-5)$,

(ii) $\frac{x^2 - 14x + 1}{(x+7)^2}$, 34. $\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}\; x^3 + 3x^2 - 7x + c$ 35. $\log x - \frac{2}{x} - e^x + 3x + c$

36. $\frac{3}{2}$, 37. 0 , 38. 7

V. 39. 497574 , 40. (i) $13C_3$, (ii) $(13C_2)^4$, (iii) $26C_2.26C_2$, 41. 60 ,

42. (i) $e^x \; (x^3 - x^2 - 6\,x + 2) + 5(3x^2 - 8x + 2)$, (ii) $\frac{7x^2 - 16x - 56}{(x^2+8)^2}$

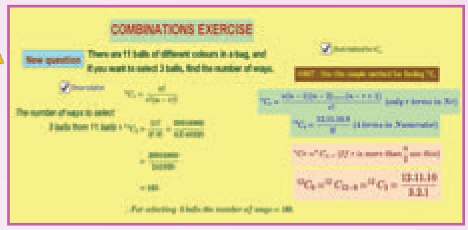
43. (i) $\frac{x^2}{2} - 5x + 6\log x + c$, (ii) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{x} + c$, 44. (i) 1 , (ii) 12 log2

45. $\frac{1}{6}$, 46. 84 , 47. 16 mn , 48. 24

இணையச்செயல்பாடு

கணித எதிர்பார்த்தல்–சேர்மானம்

நிகழ்தகவு அறிவோமா !

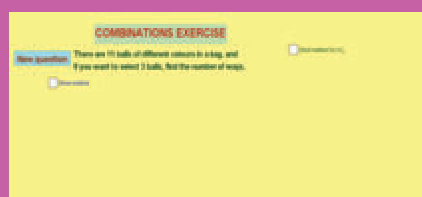


படிகள்

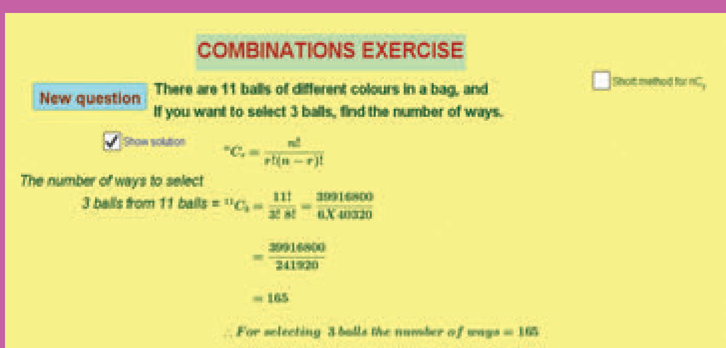
1. கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க.
2. "11th Standard Statistics" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகத்தில் "Problems in Combination" க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்
3. திரையில் ஒரு கணக்கு தோன்றும். அதற்குத் தீர்வு கண்டுபிடித்த பின் "Show Solution" – ஐச் சொடுக்கி விடையைச் சரி பார்க்கவும். "NEW QUESTION" – ஐச் சொடுக்கி புதிய கேள்விக்கு மாற்றலாம்.
4. தீர்வு கண்டுபிடிக்கும் முன் "Short method for ^nC_r" – ஐச் சொடுக்கி மாற்று வழியைக் கற்கவும். இப் பயிற்சி நிகழ்தகவு கணக்குகளுக்கு மிக முக்கியமாகும்.

படி 1

படி 2



படி 3



* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

உரலி:

https://ggbm.at/uqVhSJWZ

B136_11_STA_TM

அத்தியாயம்

8

அடிப்படை நிகழ்தகவு கோட்பாடுகள்

பிளெய்சி பாஸ்கல்

(19 ஜுன் 1623 –
19 ஆகஸ்ட் 1662)

பிளெய்சி பாஸ்கல், பிரான்ஸ் நாட்டில் பிறந்த கணிதவியலார். அவரே நவீன நிகழ்தகவு பற்றிய கருத்துக்களுக்கு அடிப்படையானவர். அவர் குழந்தையிலேயே மேதையாக விளங்கியவர். 1642ஆம் ஆண்டு, இளம் பதின்பருவத்திலேயே கணக்கிடும் கருவிகள் பற்றி ஆய்வுகள் மேற்கொண்டார். பின் மூன்றாண்டுகளுக்குப் பின் 20 கணக்கிடும் கருவிகளை உருவாக்கினார். அவை பாஸ்கலின் கணிப்பான்கள் என்று அழைக்கப்பட்டன. பின் வந்த 10 ஆண்டுகளில், எந்திர கணிப்பான் கண்டுபிடித்த இருவரில் இவரும் ஒருவர்.

பாஸ்கல் தன் 16ஆம் வயதில், வீழலியல் வடிவியல் என்ற துறையில் ஒரு சிறந்த கட்டுரையை வெளியிட்டார். பெர்மாட் என்பவருடன் இணைந்து நிகழ்தகவு கருத்தாக்கங்களை உருவாக்கியுள்ளார். அது பொருளியியல் மற்றும் சமூக அறிவியலில் பெரும் தாக்கங்களை ஏற்படுத்தியுள்ளது. பாஸ்கல் வாழ்ந்த காலத்தில் அவரது கருத்துகள் பெரும்பாலும் பல்வேறு எதிர்ப்புகளைச் சந்தித்த பின்னர் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டன.

'அறிவார்ந்த கற்பனைத் திறன் எப்போதும் தனக்கே உரிய தடுப்பு நிலைகளுடன் நிகழ்தகவின் வரம்புகளுக்குள்ளேயே அமைகிறது'.

\- தாமஸ் ஹக்லி

நோக்கங்கள்:

- வாய்ப்பு மாறி, முயற்சி, நிகழ்ச்சி, கூறுவெளி பற்றி அறிதல்.
- நிகழ்தகவு தேற்றங்களைப் புரிந்து கணக்குகளில் பயன்படுத்துதல்.
- சாரா நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் பெருக்கல் தேற்றத்தை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- நிபந்தனை நிகழ்தகவு பற்றி விவரித்தல்.
- பேயெஸின் தேற்றத்தை கணக்குகளில் பயன்படுத்துதல்.

6FK6LH

அறிமுகம்

ஒவ்வொரு அறிவியல் ஆய்வும் 'நிகழ்ச்சி'யின் விளைவு நடக்கும் அல்லது நடக்காது என்ற இயற்கை நிகழ்வுகளின் பாங்காக அமையும் என்பதைக் காண நடத்தப்படுகிறது. நடைமுறை வாழ்க்கையில் பல நிகழ்ச்சிகள் நிச்சயமற்ற நிலையில் நடக்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக,

- கொடுக்கப்பட்ட ரேடிய அணுவின் சிதைவானது குறிப்பிடப்பட்ட கால அளவில் சிதையலாம், சிதையாமலும் இருக்கலாம்.
- மழைக்காலங்களில் தாவரங்கள் பொதுக்காரணிகளால் பாதிக்கப்படலாம், பாதிக்கப்படாமலும் இருக்கலாம்.
- தங்கத்தின் விலை அதிகரிக்கும் நிகழ்ச்சி ஒரு நாட்டின் பொருளாதார நிலையுடன் தொடர்புடையது.
- புற்று நோயாளிக்கு நோயைக் குணப்படுத்த குறிப்பிட்ட கால அளவில் கொடுக்கப்படும் மருந்து.

மேற்கூறிய நிகழ்வுகளில் ஒரு நிச்சயமற்ற நிலை நிலவுகிறது. ஒரு மாணவனுக்குக் கூட ஒரு குறிப்பிட்ட பாடத்தில் குறிப்பிட்ட பாடப்பகுதியில் ஒரு குறிப்பிட்ட வினா தேர்வில் கேட்கப்படலாம் என்ற நிச்சயமற்ற நிலை உள்ளது. எனினும், மாணவன் தேர்வுக்கு தயாராகும் பொழுது ஒரு வினாவை ஆழமாகப் படிக்கலாம் அல்லது அவ்வினாவை தேர்ந்தெடுக்காமல் விட்டு விடலாம் என்ற ஒரு முடிவெடுக்க கட்டாயப்படுத்தப்படுகிறான். சுருக்கமாகக் கூறின் ஒருவர் நிச்சயமற்ற நிலையை உணர்ந்து, அறிவுப்பூர்வமாக முடிவெடுக்க வேண்டியுள்ளது.

இம்மாதிரியான சூழ்நிலையில், வாய்ப்பு பற்றிய அறிவு அல்லது நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காணுதல் பற்றிய ஆர்வம் முக்கியத்துவம் பெறுவதால் இது கட்டாயமாகிறது. நடைமுறை வாழ்க்கையில் வாய்ப்புகளின் மதிப்புகள் அல்லது நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காணுதல் மிகவும் அவசியமாகிறது. நிகழ்தகவைப் பற்றி வரையறுக்கும் முன்பு மாணவர்கள் பின்வரும் சொற்களைப் பற்றி அறிந்திருக்க வேண்டும்.

8.1 வாய்ப்பு சோதனை, கூறுவெளி, கூறுபுள்ளி, நிகழ்ச்சி

புள்ளியியலில் சோதனை என்பது 'ஒரு விளைவை ஏற்படுத்துவதற்கான முயற்சி'. அது ஆய்வகத்தில் செய்யப்படும் சோதனையாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை

வாய்ப்பு சோதனை: ஒரு சோதனையானது பின்வரும் நிலைகளில் உள்ள போது "வாய்ப்பு சோதனை" எனப்படுகிறது.

(i) முன்கூட்டியே அனைத்து விளைவுகளையும் கணிக்க இயலும்.

(ii) முயற்சியின் விளைவை முன்கூட்டியே கூற இயலாது,

(iii) ஒரே சூழ்நிலையில் எத்தனை முறை வேண்டுமானாலும் மீண்டும் மீண்டும் செய்ய இயலும்·

கூறுவெளி:

வாய்ப்புச்சோதனையின் அனைத்து சாத்தியமான விளைவுகளின் கணமே அச்சோதனையின் கூறுவெளியாகும். (அதனை S (அ) Ω) என்று குறிக்கலாம். S இன் உறுப்புகள் முடிவுற்றிருந்தால் அது முடிவெறு கூறுவெளியாகும். S இன் உறுப்புகள் எண்ணக் கூடியதாக இருந்தால் அது எண்ண இயன்ற கூறுவெளியாகும் அல்லது தனிநிலை கூறுவெளி எனப்படும். இல்லையெனில் அது எண்ண இயலாத கூறுவெளியாகும்.

கூறுபுள்ளி: **வாய்ப்பு சோதனையின் விளைவு கூறுபுள்ளி என்று அழைக்கப்படும். அது S இன் உறுப்பாகும்.**

எடுத்துக்காட்டு 8.1

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் வாய்ப்பு சோதனையை கருதுக "தலை" மற்றும் "பூ" விழுதல் இரண்டு சாத்தியமான விளைவுகளாகும். கூறுவெளி S = {H, T}. அது முடிவுறு கூறுவெளியாகும். அது படம் 8.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

விளைவுகள்

தலை (H) **பூ (T)**

படம் 8.1. நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டுதல்

எடுத்துக்காட்டு 8.2

ஒன்று அல்லது இரண்டு குழந்தைகள் உள்ள அனைத்து குடும்பங்களிலும் ஆய்வு மேற்கொள்ளப்பட்டது.

குழந்தை பிறப்பில் வரிசை முறையில் அமைவதற்கான சாத்தியமான விளைவுகள்:

ஆண் குழந்தை மட்டும், பெண் குழந்தை மட்டும், ஆண் மற்றும் பெண் குழந்தை, பெண் மற்றும் ஆண் குழந்தை, இரண்டும் ஆண் குழந்தைகள், இரண்டும் பெண் குழந்தைகள். கூறுவெளி S = {b,g,bg,gb,bb,gg}. இது முடிவுறு கூறுவெளியாகும். இங்கு, 'b' ஆண் குழந்தையையும் 'g' பெண் குழந்தையையும் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.3

ஒரு நாணயத்தை தலை விழும் வரை சுண்டும் சோதனையை எடுத்துக் கொள்வோம். இச்சோதனையின் கூறுவெளி S= { (H), (T,H), (T,T,H), (T,T,T,H), … } கூறுவெளி எண்ணிடத்தக்கதாகும். முதல் முயற்சியில் தலை விழுந்தால் . S (H) இரண்டாவது முயற்சியில் தலை விழுந்தால் S (T,H) மூன்றாவது முயற்சியில் தலை விழுந்தால் S (T,T,H).

எடுத்துக்காட்டு 8.4

உயிருள்ள அல்லது உயிரற்ற பொருட்களின் ஆயுட்காலம் கணக்கிடப்படும் சோதனையின் கூறுவெளி

$$S = \{x: x \geq 0\},$$

x ஆயுட்காலத்தைக் குறிக்கும். இது எண்ண இயலாத கூறுவெளிக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

நிகழ்ச்சி:

கூறுவெளியின் உட்கணம் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும்.

இப்பாடத்தில் நிகழ்ச்சிகளை ஆங்கில பெரிய எழுத்துகளிலும் (Capital Letters) அதன் உறுப்புகள் ஆங்கில சிறிய எழுத்துகளிலும் (Small Letters) குறிக்கப்படுகிறது.

எ.கா. 8.2 இல் குடும்பங்களில் மூத்த பெண் குழந்தையாக இருக்கும் நிகழ்ச்சியை

$$A = \{g, gb, gg\}$$

குடும்பங்களில் ஒரு குழந்தை ஆண் குழந்தையாக இருக்கும் நிகழ்ச்சியை

$$B = \{b, bg\}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.4 இல் உட்கணம் $A = \{ x: \; 0 < x \leq 5000 \}$ என்பது பொருட்களின் ஆயுட்காலம் அதிகபட்சம் 5000 மணி நேரம் என்ற நிகழ்ச்சியை குறிக்கும்.

8.1.1 ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின், அவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று நடக்கும் சமயத்தில் வேறு எந்த நிகழ்ச்சியும் நடைபெற இயலாது. ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் நடைபெற இயலாது.

குறிப்பாக, நிகழ்ச்சி A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவை வெட்டாக் கணங்களாகும்.,அதாவது , $A \cap B = \varnothing$

எடுத்துக்காட்டு 8.5

ஒரு பகடை உருட்டும் போது $A = \{1, 2, 3\}$ மற்றும் $B = \{4, 5, 6\}$ என்பவை இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் என்க. இங்கு $A \cap B = \varnothing$. எனவே A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

8.2 நிகழ்தகவின் வரையறைகள்:

நிகழ்தகவு என்பது நிச்சயமற்ற நிகழ்வின் அளவீடு, நிகழ்தகவு கணக்கிடுவதற்கு மூன்று வெவ்வேறு வகையான அணுகுமுறைகள் உள்ளன.

8.2.1 கணித நிகழ்தகவு (பாரம்பரிய / முந்தைய அணுகுமுறை)

ஒரு முடிவுறு சமவாய்ப்பு சோதனையின் கூறுவெளி ஞ எனில் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி யு இன் நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{\text{Aக்கு சாதகமான உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{Sஇல் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை}} = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

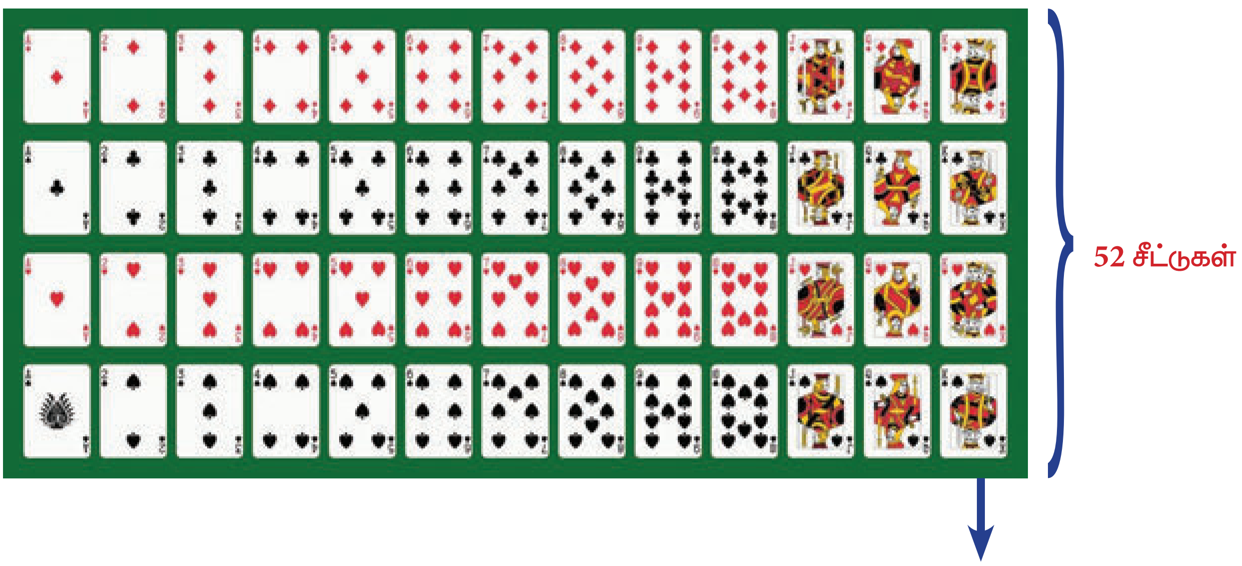
கோட்பாடு அணுகுமுறை அறிமுகப்படுத்தும் வரை மேலே உள்ள வரையறை பயன்படுத்தப்பட்டது. எனவே இது 'நிகழ்தகவின் பாரம்பரிய வரையறை' எனப்படுகிறது. சோதனை செய்யாமலேயே சோதனையைப் பற்றிய முன் அனுபவத்தைக் கொண்டு, கணக்கிடுவதால் இது "முந்தைய நிகழ்தகவு" எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.6

52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு ராஜா சீட்டு கிடைப்பதற்கான வாய்ப்புக் காண்க.

தீர்வு:

சீட்டுக்கட்டில் 52 சீட்டுகள் உள்ளன. [n(s) = 52] அது படம் 8.2 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம். 8.2 சீட்டுக்கட்டு

ராஜா சீட்டு ஒன்றை எடுக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க

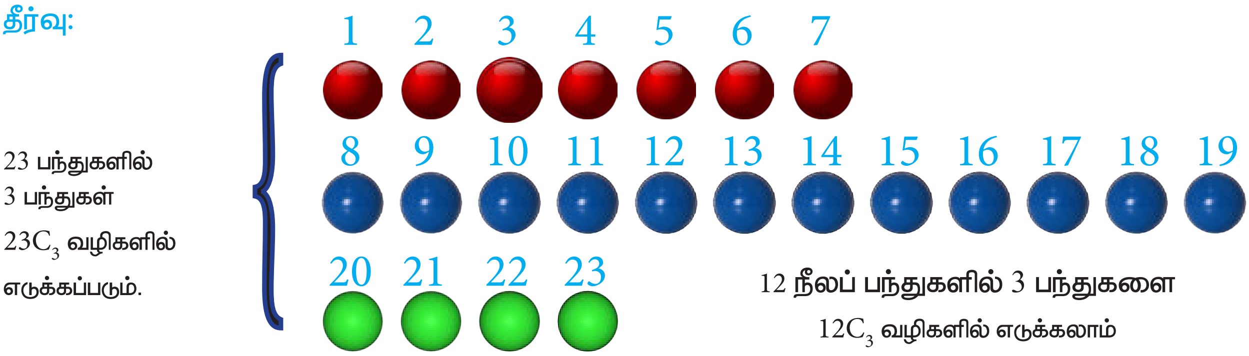
ராஜா சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $n(A) = 4$ சீட்டுகள்

எனவே ராஜா சீட்டு ஒன்றை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52}$

எடுத்துக்காட்டு 8.7

ஒரு பையில் 7 சிவப்பு, 12 நீலம் மற்றும் 4 பச்சைப் பந்துகள் உள்ளன. எடுக்கப்பட்ட 3 பந்துகள் நீல நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க

தீர்வு:



படம் 8.3 23 பந்துகளிலிருந்து 3 பந்துகளை எடுத்தல்

மொத்த பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 7+12+14=23$ பந்துகள்

23 பந்திலிருந்து 3 பந்துகள் தேர்ந்தெடுத்தல் $= n(s)= 23C_3$ வழிகள்

3 நீல நிறப் பந்துகளை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க.

12 பந்துகளிலிருந்து 3 பந்துகளை தேர்ந்தெடுக்கும் $= n(A)=12C_3$ வழிகள்

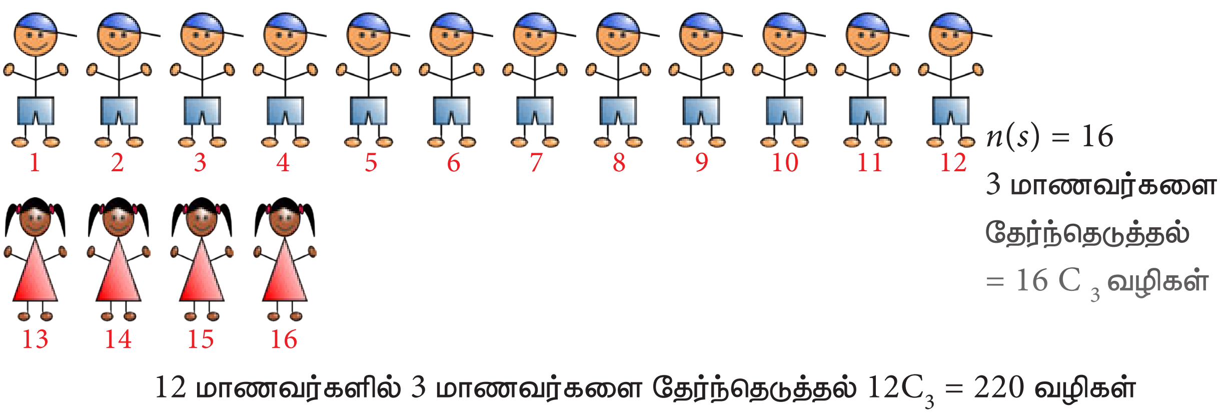
எனவே, $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12C_3}{23C_3} = \frac{220}{1771}$$

$$= 0.1242$$

எடுத்துக்காட்டு 8.8

ஒரு வகுப்பில் 12 மாணவர்களும், 4 மாணவிகளும் உள்ளனர். வகுப்பிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் 3 மாணவர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றனர். அவர்கள் அனைவரும் மாணவர்களாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:



படம் 8.4 3 மாணவர்களை தேர்ந்தெடுத்தல்

மொத்த பந்துகளின் எண்ணிக்கை$= 12+4=16$

16 மாணவர்களிலிருந்து 3 மாணவர்கள் $16\,C_3$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

i.e. $n(s) = 16C_3 = \dfrac{16 \times 15 \times 14}{1 \times 2 \times 3} = 560$

12 மாணவர்களிலிருந்து 3 மாணவர்கள் $12C_3$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்

i.e. $n(A) = 12C3 = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220$

தேவையான நிகழ்தகவு $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{220}{560} = \dfrac{11}{28}$

$= 0.392$

8.2.2 புள்ளியியல் நிகழ்தகவு (சார் நிகழ்வெண் / பிந்தைய அணுகுமுறை)

ஒரு வாய்ப்பு சோதனை முறை திரும்பத் திரும்ப ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் செய்யப்பட்டால், A என்ற நிகழ்ச்சி $n(A)$ முறை நிகழ்ந்தால், நிகழ்ச்சி A நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n(A)}{n}$ என வான்மைஸஸ் (Von Mises) வரையறை செய்கிறார்.

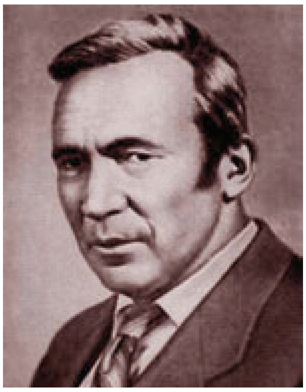
இந்த அணுகுமுறையில் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான அனுபவ ஆதாரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு நிகழ்தகவு கணக்கிடப்படுவதால் அது **சார் நிகழ்வெண் அல்லது பிந்தைய நிகழ்தகவு** எனப்படும்.

குறிப்பு:

சில சோதனைகளைத் திரும்பத் திரும்ப செய்ய இயலாது என்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். அந்நிகழ்வுகளில் சார் நிகழ்வெண் அணுகுமுறையை செயல்படுத்த இயலாது. பாரம்பரிய அணுகுமுறையில் நிகழ்தகவு கணக்கிட, கூறுவெளி முடிவுறு கணமாக இருத்தல் வேண்டும். இந்நிகழ்வு அரிதாகும் ஆதலால் கணித நிகழ்தகவு மற்றும் புள்ளியியல் நிகழ்தகவுகளில் உள்ள வரம்புகளை களைய அடுத்த பகுதியில் நிகழ்தகவு கோட்பாடு அணுகுமுறையை அளிக்கிறோம்

8.3 நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு (Probability theory) :

சோவியத் கணிதவியலாளர் ஆண்ட்ரே நிக்கோலேவிச் கோல்மோகோரவ் (Probability theory, Topology, Intuitionistic logic, Turbulance theory..., Wikipedia) ஆகியவற்றில் குறிப்பிடத்தக்க பங்களிப்பு செய்துள்ளார். 1993 இல் நிகழ்தகவு கோட்பாடு அணுகுமுறையை அறிந்தார். எளிய, ஐயமற்ற கூற்றுகள் கொண்ட அக்கோட்பாட்டை நிரூபணமின்றி அளித்தார். புதிய முடிவுகளை இக்கோட்பாட்டைக் கொண்டு காண இயலும். அவை தேற்றங்களாயின.



A.N. கோல்மோகோரவ்

8.3.1 நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு அணுகுமுறை:

ஒரு வாய்ப்பு சோதனையின் கூறுவெளி S என்க. ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி $A \in S$க்கும் $P(A)$ என்ற எண் உள்ளது எனில் $P(A)$ $A \in S$ என்பது A இன் நிகழ்தகவு என்று அழைக்கப்படும்.

கோட்பாடு-1 : $P(A) \geq 0$

கோட்பாடு-2 : $P(S) = 1$

கோட்பாடு-3 : ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளின் தொடர்முறை $\{A_1, A_2, \ldots\}$ i.e., $A_i \cap A_j = \phi$ எனில் $i \neq j$,

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

முடிவுறு ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுக்கும் கோட்பாடு-3 பொருந்தும். $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்பன S இல் உள்ள ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள், n ஒரு முடிவுறு மிகை முழு எண் எனில்

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

முன் கண்ட இரண்டு நிகழ்தகவு அணுகுமுறைகளும், மேலே கூறிய மூன்று கோட்பாடுகளையும் நிறைவு செய்வதை கவனத்தில் கொள்க.

8.3.2 நிகழ்தகவின் அடிப்படைத் தேற்றங்கள்:

தேற்றம் 8.1: நடக்க இயலாத நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $0 \Rightarrow P(\phi) = 0$.

நிரூபணம்: $A_1 = S$, $A_2 = \phi$ எனில் A_1, A_2 ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$S = A_1 \cup A_2 = S \cup \phi$

கோட்பாடு -3 இன் படி $P(S) = P(S) + P(\phi)$

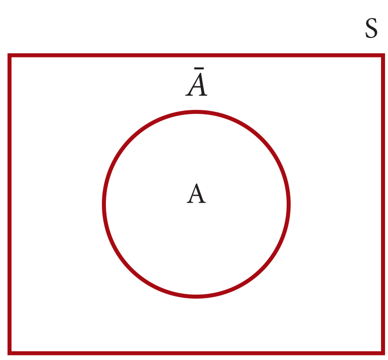
கோட்பாடு 2 இன் படி , $P(S) = 1$,

$1 = 1 + P(\phi)$

$P(\phi) = 0.$

தேற்றம் 8.2: சோதனையில் S ஒரு கூறுவெளி மற்றும் A எவையேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி எனில் $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

நிரூபணம்:



படம் 8.5 வெண்படம்

A மற்றும் $\bar{A}$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனவே,

$$A \cup \bar{A} = S. \text{ கோட்பாடு-3,}$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \text{ (படம் 8.4)}$$

$$P(S) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$1 = P(A) + P(\bar{A}) \quad \text{(கோட்பாடு-2)}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

குறிப்பு

எவையேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி என்பதால் கோட்பாடு 1 இன் படி -1, $P(\bar{A}) \geq 0$.
i.e., $1-P(A) \geq 0$ $P(A) \leq 1$.

எனவே ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்பது எப்பொழுதும் 0 க்கும் 1 க்குமிடையே அமையும், $0 \leq P(A) \leq 1$.

தேற்றம் 8.3: ஒரு சோதனையில் A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் $A \subset B$, $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

நிரூபணம்:

$A \subset B$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$B = A \cup (B-A)$ என எழுதலாம்

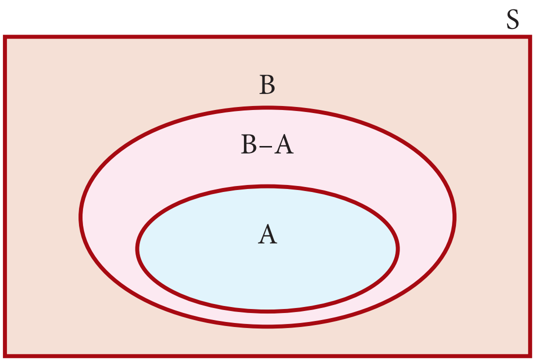
$$A \cap (B-A) = \phi,$$

$$P(B) = P(A \cup (B-A))$$

கோட்பாடு 3 இன் படி,

$$\Rightarrow \quad P(B) = P(A) + P(B-A)$$

எனவே, $$P(B-A) = P(B) - P(A).$$



படம் 8.6 வெண்படம்

கிளைத்தேற்றம்: $A \subset B$ எனில், $P(A) \leq P(B)$.

நிரூபணம்:

கோட்பாடு-1 இன் படி, $P(B-A) \geq 0$ எனில்

$P(B) - P(A) \geq 0$

$P(B) \geq P(A)$

$\Rightarrow \quad P(A) \leq P(B).$

எடுத்துக்காட்டு 8.9

சோதனையில் ஒரு பழுதற்ற நாணயம் சுண்டும் போது கூறுவெளி $S = \{H, T\}$.

தீர்வு :

இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் A_1 மற்றும் A_2 என்பன $A_1 = \{H\}$ மற்றும் $A_2 = \{T\}$ எனில் $S = A_1 \cup A_2$. இங்கு, A_1 , A_2 என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும், ஏனெனில் அவை ஒன்றாக நடக்க இயலாது. கோட்டுபாடு -3 இன் படி

$$P(S) = P(A_1)+P(A_2)$$

S இன் அடிப்படை நிகழ்ச்சிகள் A_1 , A_2 நிகழ்வதற்கு சமவாய்ப்புகள் உள்ளன,

$P(A_1) = P(A_2)$ இதை பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது.

$$1 = P(A_1)+P(A_2) = 2P(A_1)$$

$$P(A_1) = \frac{1}{2} \text{ மேலும் } P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow P(\text{ஒரு தலை கிடைத்தல்}) = \frac{1}{2} = P(\text{ஒரு பூ கிடைத்ல்}).$$

எனவே தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும், பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும் சமம் எனில் நாணயம் பழுதற்றது என்று கூறப்படும்.

மாற்றுமுறை: (பாரம்பரிய முறை)

$$n(A_1) = 1 = n(A_2) \text{ and } n(S) = 2,$$

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{1}{2}.$$

இதே போல் $P(A_2) = \frac{1}{2}$.

குறிப்பு:

ஒரு பழுதற்ற நாணயத்தை சுண்டும்போது, ஒரு தலை கிடைப்பதற்கான விளைவு, பூ கிடைப்பதற்கான விளைவைப்போல் 3 மடங்கு எனில், $P(A_1) = 3P(A_2)$.

$$P(S) = P(A_1)+P(A_2)$$

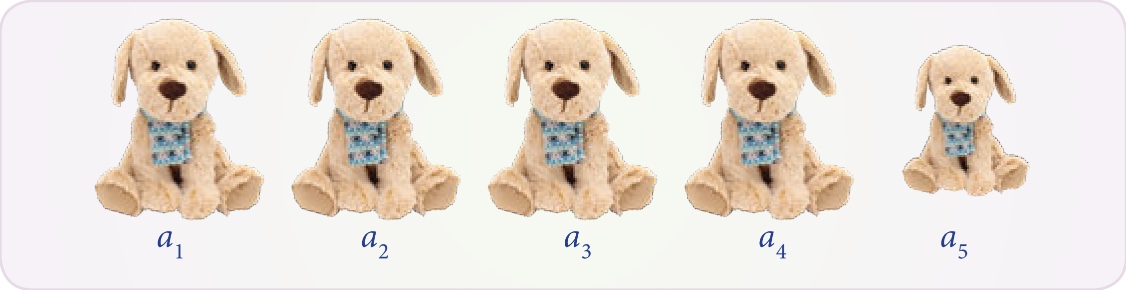
இதை $P(S)$ இல் பிரதியிட, $1 = P(A_1)+P(A_2) = 4P(A_2)$

$$P(A_2) = \frac{1}{4} \text{ எனவே } P(A_1) = \frac{3}{4}.$$

தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும் பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும் வேறுபடுவதால் இது பழுதுள்ள நாணயமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.10

ஒரே மாதிரியான பொம்மைகள் அம்முவிடம் உள்ளன. அவற்றில் ஒன்று குறைவான எடை உடையதாகும். அவளுடைய சகோதரி ஹரிணி ஒரு பொம்மையை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கிறாள். ஹரிணி குறைவான எடை உடைய பொம்மையை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.



படம் 8.7 ஒரே மாதிரியான பொம்மைகளில் ஒன்று எடை குறைவானது

தீர்வு:

படம் 8.7 இலிருந்து கூறுவெளி S = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

A : ஹரிணி குறைவான எடை உடைய பொம்மையை தேர்ந்தெடுத்தல்

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{5}$$

எனவே ஹரிணி குறைவான எடை உடைய பொம்மையை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1/5.

எடுத்துக்காட்டு 8.11

ஒரு பெட்டியில் 3 சிவப்பு மற்றும் 4 நீல நிற கால் உறைகள் (socks) உள்ளன. இரண்டு கால் உறைகளை ஒரே நிறத்தில் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

= 7 காலுறைகள் (3 சிவப்பு + 4 நீலம்) $n = 7$

A_1 : 3 காலுறைகளிலிருந்து 2 தேர்ந்தெடுத்தல்

$n(A_1) = 3C_2$ வழிகள் = 3 வழிகள்

A_2 : 4 காலுறைகளிலிருந்து 2 காலுறைகள் தேர்ந்தெடுத்தல்

$n(A_2) = 4C_2$ வழிகள் = 6 வழிகள்

படம் 8.8 ஒரே நிறமுடைய 2 காலுறைகளை தேர்ந்தெடுத்தல்

தீர்வு :

மொத்த கால் உறைகளின் எண்ணிக்கை = 3 + 4 = 7

இரண்டு கால் உறைகளை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்தால்

2 கால் உறைகளை தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 7C_2 = 21$

A_1 = சிவப்பு நிற கால் உறைகளை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி

$$n(A_1) = 3C_2 = 3$$

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{3}{21}$$

A_2 = நீல நிற கால் உறைகளை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி

$$n(A_2) = 4C_2 = 6$$

$$P(A_2) = \frac{n(A2)}{n(S)} = \frac{6}{21}$$

எனவே ஒரே நிறமுடைய 2 காலுறைகளை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்வினை $A_1 \cup A_2$ எனலாம்.

இவை ஒன்றையொன்றும் விலக்கும் நிகழ்வுகள் ஆகும், எனவே கோட்பாடு 3ன் படி.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

எனவே, $$P(A_1 \cup A_2) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

எனவே ஒரே நிறத்தில் இரண்டு கால் உறைகளை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 3/7.

எடுத்துக்காட்டு 8.12

ஏஞ்சல் என்பவர் 52 சீட்டுகள் கொண்ட கட்டிலிருந்து மூன்று சீட்டுகளை தேர்ந்தெடுக்கிறார். தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சீட்டுகள்

(i) 3 ஸ்பேட் சீட்டுகளாக

(ii) ஒரு ஸ்பேட் மற்றும் இரண்டு கிளாவர் சீட்டுகளாக

(iii) ஒரு ஸ்பேட், ஒரு கிளாவர் மற்றும் ஒரு ஹார்டின் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

3 சீட்டுகள் எடுப்பதற்கான மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை $= n(S) = 52\,C_3 = 22100$

(a) A_1 = 3 ஸ்பேட் சீட்டுகள் எடுத்தல்.

52 சீட்டுகள் கொண்ட கட்டில் 13 ஸ்பேட் சீட்டுகள் இருக்கும், எனவே 3 ஸ்பேட் சீட்டுகளை எடுக்கும் வழிகள் $= n(A_1) = 13\,C_3 = 286$

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{286}{22100}$$

(b) A_2 = 1 ஸ்பேட் மற்றும் 2 கிளாவர் சீட்டுகள் எடுத்தல்

1 ஸ்பேட் சீட்டு எடுக்கும் வழிகள் $= 13C_1 = 13$

2 கிளாவர் சீட்டுகள் எடுக்கும் வழிகள் $= 13C_2 = 78$

ஒரு ஸ்பேட் மற்றும் 2 கிளாவர் சீட்டு எடுக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் நடக்க ,

1 $= n(A_2) = 13 \times 78 = 1014$

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(S)} = \frac{13 \times 78}{22100}$$

$$P(A_2) = \frac{1014}{22100} = \frac{507}{11050}$$

(c) $A_3 = 1$ ஸ்பேட், 1 கிளாவர் மற்றும் 1 ஹார்டின் சீட்டுகள் எடுத்தல்

1 ஸ்பேட், 1 கிளாவர் மற்றும் 1 ஹார்டின் சீட்டுகள் எடுக்கும் வழிகள்

$$n(A_3) = 13C_1 \times 13C_1 \times 13C_1 = 13 \times 13 \times 13$$

$$P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(S)} = \frac{13 \times 13 \times 13}{22100}$$

$$P(A_3) = \frac{2197}{22100}.$$

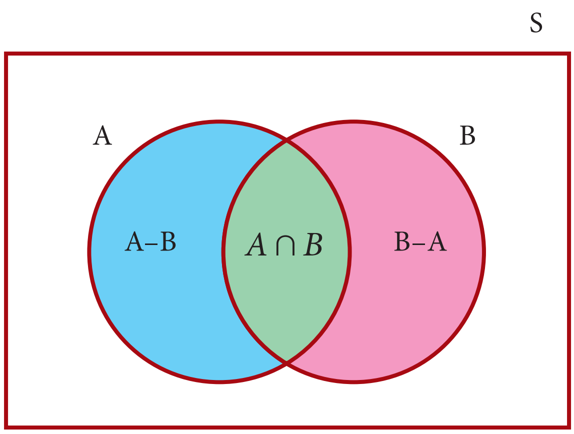
8.4 நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்

தேற்றம் 8.4 : (இரு நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு கூட்டல் தேற்றம்)

ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையில் A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

நிரூபணம் :



படம் 8.9 வெண்படம்

ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிக்கு A மற்றும் B, படம் 8.9 ல் நிழலிட்ட பகுதி $A \cup B$ என்ற நிகழ்ச்சியை குறிக்கிறது.

$$A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$$

நிகழ்ச்சி A மற்றும் $B-(A \cap B)$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

கோட்பாடு 3 பயன்படுத்தி,

$$P(A\cup B) = P(A \cup[B-(A \cap B)])$$

$$= P(A) + P[B-(A\cap B)] \qquad (8.1)$$

$(A\cap B)\subset B$,,

$$B = (A\cap B)\cup(B-(A\cap B))$$

வலதுபக்கம் உள்ள நிகழ்ச்சிகள் வெட்டா கணங்கள் ஆகும்.
எனவே கொள்கை 3–ன் படி

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B-(A\cap B))$$

$$P[B-(A\cap B)] = P(B) - P(A\cap B) \qquad (8.2)$$

சமன்பாடு (8.2) ஐ (8.1) இல் பிரதியிட

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

கிளைத்தேற்றம் : A, B மற்றும் C என்பன ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$$P(A\cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

எடுத்துக்காட்டு 8.13

ஆண்டு விளையாட்டு போட்டியில் 11 ஆம் வகுப்பில் படிக்கின்ற 260 மாணவர்களில், 90 பேர் கபடி போட்டியிலும், 120 பேர் ஹாக்கி போட்டியிலும் மற்றும் 50 பேர் இரண்டு போட்டியிலும் கலந்துகொள்கின்றனர். ஒரு மாணவன் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றான். தேர்ந்தெடுக்கும் மாணவன் (i) கபடி அல்லது ஹாக்கி, (ii) இரண்டு போட்டியிலும் கலந்து கொள்வதற்கான, (iii) ஹாக்கியில் மட்டும், (iv) கபடியில் மட்டும், (v) சரியாக ஒன்றில் மட்டும். கலந்து கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

$n(s)=260$

A : மாணவர்கள் கபடி போட்டியில் கலந்து கொள்ளும் நிகழ்ச்சி A என்க.

B : மாணவர் ஹாக்கியில் கலந்து கொள்ளும் நிகழ்ச்சி B என்க.

$$n(A) = 90; \quad n(B) = 120; \quad n(A\cup B) = 50$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{90}{260}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{120}{260}$$

$$P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{50}{260}$$

(i) மாணவர்கள் கபடி அல்லது ஹாக்கியில் கலந்து கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$\frac{90}{260} + \frac{120}{260} - \frac{50}{260} = \frac{160}{260} = \frac{8}{13}$$

(ii) மாணவர்கள் இரண்டு போட்டியிலும் கலந்துகொள்வதற்கான நிகழ்தகவு.

$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B})$ (டீ மார்கன் விதியின் படி $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$)

$$= 1 - P(A\cup B)$$

$$= 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$$

(iii) மாணவன் ஹாக்கியில் மட்டும் கலந்து கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{120}{260} - \frac{50}{260} = \frac{70}{260} = \frac{7}{26}$$

(iv) மாணவன் கபடியில் மட்டும் கலந்து கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{90}{260} - \frac{50}{260} = \frac{40}{260} = \frac{2}{13}$$

(v) மாணவன் ஒரு விளையாட்டில் மட்டும் கலந்து கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு

$P[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)] = P(A\cap\overline{B}) + P(\overline{A}\cap B)$ [$\because A\cap\overline{B}, \overline{A}\cap B$ நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்குவன]

$$= \frac{70}{260} + \frac{40}{260} = \frac{110}{260} = \frac{11}{26}$$

8.5 நிபந்தனை நிகழ்தகவு

பின்வரும் சூழ்நிலைகளைக் கருதுக.

(i) இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் அடுத்தடுத்து நிகழ்கிறது அல்லது ஒன்றன்பின் ஒன்றாக நிகழ்கிறது எடுத்துக்காட்டு A என்ற நிகழ்ச்சி நடந்து முடிந்தபின் B என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுகிறது.

(ii) இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் A மற்றும் B ஒன்றாக நடைபெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.14

4000 பேர் வசிக்கும் ஒரு கிராமத்தில் 1500 பேர் பெண்கள். அக்கிராமத்தில் வசிப்பவர்களில் 25 வயதுக்கு மேல் உள்ள 1000 பேரில் 400 பேர் பெண்கள். தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒருவர்

பெண்ணாக இருந்து, அவர் 25 வயதுக்கு மேல் இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

25 வயதுக்கு மேற்பட்ட பெண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியில் அதற்கு தொடர்புடைய பின்வரும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறும்.

A: தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒருவர் பெண்ணாக இருத்தல்

B: தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவர் 25 வயதுக்கு மேல் இருத்தல்.

சூழ்நிலை 1 :

B என்ற நிகழ்ச்சி முன்னதாகவே நடைபெற்ற பின்பு A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுகிறது. இந்த நிகழ்ச்சியை $B|A$ என குறிக்கப்படுகிறது இதனை. இதனை“B கொடுக்கப்படின் A' என படிக்க வேண்டும். இதன் பொருள் முதலில் A என்ற நிகழ்ச்சி நடந்த பின்பு, B நடைபெறுகிறது. இங்கு $B|A$ என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்பதை $P(B|A)$ என குறிக்கப்படுகிறது. இந்த நிகழ்தகவு நிபந்தனை நிகழ்தகவு என அழைக்கப்படுகிறது. மாறாக, ஒருவர் தேர்வு செய்யும் போது அவர் 25 வயதுக்கு மேலாக இருந்து அவர் பெண்ணாக இருப்பதற்காக நிகழ்தகவு $P(A|B)$ என குறிக்கப்படுகிறது.

சூழ்நிலை 2:

தேர்ந்தெடுக்கும் நபர் பெண்ணாகவும் 25 வயதுக்கு மேல் உள்ளவராகவும் இருப்பதை $A\cap B$ என குறிக்கப்படுகிறது. இந்த சூழ்நிலையில் நிகழ்தகவு காண்பதற்கு நிகழ்தகவின் மற்றொரு தேற்றமான பெருக்கல் தேற்றம் துணையாக இருக்கிறது. இது நிபந்தனை நிகழ்தகவிலிருந்து தருவிக்கப்படுகிறது.

$$P(A) = P(\text{ஒரு பெண் தேர்ந்தெடுப்பது}) = \frac{1500}{4000}$$

$$P(A\cap B) = P(25 \text{ வயதுக்கு மேல் உள்ள பெண்ணாக தேர்ந்தெடுப்பது}) = \frac{400}{1500}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{400}{1500}\times\frac{4000}{1500} = \frac{160}{225} = \frac{32}{45}.$$

8.5.1 நிபந்தனை நிகழ்தகவு வரையறை

$P(B) > 0$ எனில் நிகழ்ச்சி B முன்பே நிகழ்ந்து விட்டது எனக் கொண்டு Aஇன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

P(B) = 0 எனில், $P(A\cap B) = 0$ ஆகும். இதன் காரணமாக $P(B) = 0$. மேலுள்ள சூத்திரம் பொருளற்றதாகும். எனவே $P(B) > 0$ என இருக்கும்போது மட்டும் நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(A|B)$ கணக்கிட முடியும்.

நிபந்தனை நிகழ்தகவு கணக்கீடு செயலாக்கக்கூடிய அவசியத்தை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு விளக்குகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

ஒரு நகரத்தில் இரட்டைக் குழந்தைகள் உள்ள குடும்பங்களிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு குடும்பம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அதன் கூறுவெளி

S= {(ஆண், ஆண்), (ஆண், பெண்), (பெண், ஆண்), (பெண், பெண்)}.

இதிலிருந்து கீழ்க்கண்டவாறு நிகழ்ச்சிகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

A: 2 ஆண் குழந்தைகள் உள்ள குடும்பம் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவது.

B: 1 ஆண் குழந்தைகள் உள்ள குடும்பம் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவது.

இரட்டை குழந்தைகள் உள்ள அனைத்து குடும்பங்கள் சமவாய்ப்பு என்க.

A = {(ஆண், ஆண்)},

B = {(ஆண், ஆண்), (ஆண், பெண்), (பெண், ஆண்)},

$A \cap B$ = A = {(ஆண், ஆண்)}.

நிகழ்தகவு பாரம்பரிய முறையை பயன்படுத்தி கணக்கிடப்படுகிறது.

$P(B) = \frac{3}{4}$ மற்றும் $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்வு செய்யப்பட்ட ஒரு குடும்பத்தில் ஒரு ஆண் குழந்தை இருக்கிறது என்க. நிபந்தனை நிகழ்தகவின் படி ஒரு குழந்தை பெண்ணாக இருக்க நிகழ்தகவு.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.15

11 லிருந்து 19 வரை உள்ள எண்களில் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு எண் தேர்வு செய்யப்படுகிறது. பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக்கொள்க. $A = \{ 11, 14, 16, 18, 19 \}$ $B = \{ 12, 14, 18, 19 \}$ $C = \{ 13, 15, 18, 19 \}$ எனில்,

(i) P(A/B) (ii) P(A/C) (iii) P(B/C) (iv) P (B/A) காண்க.

தீர்வு:

$$A = \{ 11, 14, 16, 18, 19 \} \quad B = \{ 12, 14, 18, 19 \} \quad C = \{ 13, 15, 18, 19 \}.$$

$$A \cap B = \{ 14, 18, 19 \} \quad A \cap C = \{ 18, 19 \} = B \cap C$$

$$P(A) = \frac{5}{9} \qquad P(B) = \frac{4}{9} = P(C)$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{9} \qquad P(A \cap C) = \frac{2}{9} = P(B \cap C)$$

அதாவது நிகழ்ச்சி A நிகழ்ந்த பின் B நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{4}{9}}$$

$$P(A/B) = \frac{3}{4}.$$

A நிகழ்ந்த பின் C நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}$$

$$P(A/C) = 1/2.$$

இதே போல் B நிகழ்ந்த பின் C நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(B/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}$$

$$P(B/C) = \frac{1}{2}$$

மற்றும் B நிகழ்ந்த பின் A நிகழ்வதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{5}{9}}$$

$$P(B/A) = \frac{3}{5}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.16

ஒரு ஜோடி பகடை உருட்டும் போது விழும் முகங்கள் குறிக்கப்படுகின்றது.

A: முகங்களின் கூடுதல் ஒரு ஒற்றைபடை எண், B: முகங்களின் கூடுதல் 8 யை விட அதிகம்

C: முகங்கள் வேறுபட்டவை எனில், (i) $P(A/C)$ (ii) $P(B/C)$ காண்க.

தீர்வு:

நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான சாதகமான விளைவுகள்

A = { (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6)
(4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5) }

B = { (3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

C = { (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) }

A மற்றும் B ஆகியன C இன் தகு உட்கணங்கள். எனவே $A \cap C = A$ மற்றும் $B \cap C = B$.

இங்கு, $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$$P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{9}$$

$$P(C) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

$A \subset C$ எனில், $A \cap C = A$

$$P(A \cap C) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B \cap C) = P(B) = \frac{5}{9}.$$

முகங்கள் வேறுபட்டவையாக இருக்கும் போது முகங்களின் கூடுதல் ஓர் ஒற்றைபடை எண்ணாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}$$

இதே போல், முகங்கள் வேறுபட்டவையாக இருக்கும் போது, முகங்களின் கூடுதல், கூடுதல் 8 விட அதிகமாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{6}} = \frac{4}{15}$$

8.5.2 கோட்பாடுகள் (Axioms)

பகுதி 8.2 ல் அறிமுகம் செய்யப்பட்ட அதே கோட்பாடுகளை நிபந்தனை நிகழ்தகவு நிறைவு செய்யும்.

சமவாய்ப்பு சோதனையின் கூறுவெளி A மற்றும் B என்பது இச்சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சி எனில்

(i) S இல் ஒரு நிகழ்ச்சி Aக்கு $P(A/B) \geq 0$

(ii) $P(S/B) = 1$

(iii) $A_1, A_2, \ldots$ என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளின் தொடர் முறை எனில்

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

நிபந்தனை நிகழ்தகவின் தொடர்ச்சியாக நிகழ்ச்சிகளின் மற்றொரு பண்பான சார்பாற்றவை பற்றி படிப்போம். மேலும் வரும் பகுதியில் இது பற்றி விவரிக்கப்படும் நிபந்தனை நிகழ்தகவின் விளைவுகள் பெருக்கல் தேற்றத்தை பின்னர் கற்போம்.

8.6 சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்

வாய்ப்பு சோதனையில் எவையேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் A மற்றும் B என்க $P(A/B) = P(A)$, எனில் நிகழ்ச்சி B நிகழ்ச்சி நிகழ்தகவில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்தாது. இந்த நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் என அழைக்கப்படுகிறது.

$$P(A/B) = P(A)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

இதேபோல், $P(B/A) = P(B)$ என்ற தொடர்பு நிகழ்ச்சி A, B சார்பற்றவை என்பதை குறிக்கிறது.

8.6.1 வரையறை:

இரு நிகழ்ச்சிகள் A மற்றும் B ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்ற நிகழ்ச்சி எனில்

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

குறிப்பு

(i) A மற்றும் B சார்பற்றவை எனில், அவை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

(ii) மேலே தரப்பட்ட வரையறையை முடிவுறு எண்ணிக்கைகள் கொண்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கு விரிவுபடுத்தலாம். நிகழ்ச்சிகள் $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ஏற்புடையது எனில்,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n),$$

எனவே $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

எடுத்துக்காட்டு 8.17

பழுதற்ற ஒரு நாணயம் இருமுறை சுண்டப்படுகிறது. A மற்றும் B என்ற நிகழ்ச்சிகள் பின்வருமாறு

A: முதல் முறை சுண்டும்போது தலைவிழுதல், B: இரண்டாம் முறை சுண்டும்போது தலைவிழுதல் எனில், A மற்றும் B சார்பற்றவை என நிறுவுக.

தீர்வு :

இச்சோதனையின் கூறுவெளி

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

A மற்றும் B இன் நிகழ்தகவுகள் $P(A) = \frac{1}{2} = P(B)$.

இரண்டு முறையும் தலை கிடைத்தலை $A \cap B$ என குறிக்கப்படுகிறது. சோதனையின் விளைவு நிகழ்ச்சி HH நிகழ்வதற்கு சாதகமாக உள்ளது.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

ஆகையால் $\therefore P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ காட்டுகிறது. நிகழ்ச்சிகள் A மற்றும் B சார்பற்றவையாகும்

எடுத்துக்காட்டு 8.18

இருபகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன நிகழ்ச்சிகள், A, B மற்றும் C பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

A : முதல் பகடையில் 2 கிடைத்தல்,

B : இரண்டாவது பகடையில் 2 கிடைத்தல்

C : இரண்டு முகங்களின் கூடுதல் ஒரு இரட்டை எண் எனில். என்ற நிகழ்ச்சிகள் ஜோடியாக சார்பற்றவைகள் ஆனால் மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றாக சோந்து இருக்கும்போது சார்பற்றவை அல்ல. என நிறுவுக ?

தீர்வு:

ஒரு ஜோடி பகடை உருட்டுதலின் கூறுவெளி

S = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

$n(S) = 36$

இந்த நிகழ்ச்சிகளின் சாதகமான விளைவுகள் பின்வருமாறு

$A = \{ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \}$

$n(A) = 6$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{ (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2) \}$

$n(B) = 6$

$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$C = \{ (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5),$
$(4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6) \}$

$n(C) = 18$

$$P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \ .$$

$$A \cap B = \{ (2,2) \}$$

$$n(A \cap B) = 1$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$A \cap C = \{ (2,2), (2,4), (2,6) \}$$

$$n(A \cap C) = 3$$

$$P(A \cap C) = \frac{3}{36}$$

$$B \cap C = \{ (2,2), (4,2), (6,2) \}$$

$$n(B \cap C) = 3$$

$$P(B \cap C) = \frac{3}{36}$$

$$A \cap B \cap C = \{ (2,2) \}$$

$$n(A \cap B \cap C) = 1$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}$$

குறிப்பு

A மற்றும் B ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $P(A \cap B) = 0$

இந்த நிகழ்தகவிலிருந்து பின்வரும் முடிவுகள் பெறப்படுகின்றன.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C).$$

$$\frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$$

குறிப்பு

A மற்றும் B ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனில், $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

மேலே உள்ள முடிவுகள் A, B, C என்ற நிகழ்ச்சிகள் ஜோடியாக இருக்கும்போது அவை சார்பற்றவைகள் என்பதைக் காட்டுகிறது. ஆனால் மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றாக சேர்ந்து இருக்கும்போது அவைகள் சார்பற்றவை அல்ல.

8.7 நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம்

தேற்றம் 8.5 (நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம்)

ஒரு சோதனையில் A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு

$$P(A\cap B)=\begin{cases}P(A)P(B\mid A), & if\ P(A)>0\\ P(B)P(A\mid B), & if\ P(B)>0\end{cases}$$

நிரூபணம் :

If $P(B)>0$, ஐ இருபுறமும் $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ஆல் $P(B)$ பெருக்கி கிடைப்பது

$P\ (A\cap B)=\ P(B)\ P(A/B)$

$P(A)>0$ எனில், A மற்றும் B ஐ இடம்மாற்றும் பொழுது $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B/A).$$

∴ தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

குறிப்பு

ஒரு சோதனையில் A மற்றும் B என்ற ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் எனில், $P(A\cap B)$ நிகழ்ந்த பின்பு A இன் நிகழ்தகவு (அல்லது) B நிகழ்ந்த பின்பு B–ன் நிகழ்தகவு என்ற நிபந்தனை நிகழ்தகவை பயன்படுத்தி கணக்கிடப்படுகிறது. நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $P(A\cap B\cap C)$ என்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கு விரிவுபடுத்தி பின்வருமாறு எழுதலாம் A, B மற்றும் C ஐ

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B/A)P(C/A\cap B).$$

எடுத்துக்காட்டு 8.19

ஒரு பெட்டியில் 7 சிவப்பு மற்றும் 3 வெள்ளை கோலிக்குண்டுகள் உள்ளன. மூன்று கோலிக்குண்டுகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக திருப்பிவைக்கா முறையில் எடுக்கப்படுகின்றது. முதல் கோலிக்குண்டு சிவப்பு நிறமாக அமையுமாறு அடுத்தடுத்து வெவ்வேறு நிறங்களில் மூன்று கோலிக்குண்டுகள் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

முதல் கோலிக்குண்டு சிவப்பாக இருந்து அடுத்தடுத்து வெவ்வேறு நிறங்கள் இருக்குமாறு மூன்று கோலிக்குண்டுகள் எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்படும் கோலிக்குண்டுகள் சிவப்பு, வெள்ளை, சிவப்பு என்ற வரிசையில் இருக்குமாறு மட்டும் எடுக்க வேண்டும்.

A மற்றும் C என்பன முதல் மற்றும் மூன்றாவது முறை சிவப்பு கோலிக்குண்டுகள் எடுக்கும் நிகழ்ச்சியையும், B இரண்டாவது முறை வெள்ளை கோலிக்குண்டு எடுக்கும் நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கிறது எனில் தேவையான நிகழ்ச்சி, $A\cap B\cap C$ ஆகும்.

$A \cap B \cap C$ நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு கணக்கிட

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$$

பெட்டியில் உள்ள 7சிவப்பு, 3 வெள்ளை கோலிக்குண்டுகளில் முதல்முறை ஒரு குண்டு எடுக்க

$$P(A) = \frac{7}{10}$$

இப்பொழுது பெட்டியில் 6 சிவப்பு, 3 வெள்ளை கோலிக்குண்டுகள் உள்ளது. அதிலிருந்து யு முன்னரே நிகழ்ந்துவிட்டது எனக்கொண்டு இரண்டாவது முறையில் ஒரு கோலிக்குண்டு எடுக்கப்படுகிறது.

$$P(B/A) = \frac{3}{9}$$

இதுபோன்று மூன்றாவது முறை எடுக்கும்போது பையில் 6 சிவப்பு மற்றும் 2 வெள்ளை குண்டுகள் உள்ளது. அதிலிருந்து A மற்றும் B முன்னரே நடந்துவிட்டது எனக்கொண்டு மூன்றாவதுமுறை கோலிக்குண்டு எடுக்க நிகழ்தகவு.

$$P(C/A \cap B) = \frac{6}{8}.$$

$\therefore \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{7}{40}$ இதுவே தேவையான நிகழ்தகவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.20

நன்கு கலைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுகட்டிலிருந்து மூன்று சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகிறது. மூன்று சீட்டுகள் திருப்பிவைக்காத முறையில் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படும்போது அது ஏஸ் (ACE) இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

A: எடுக்கப்படும் மூன்று கார்டுகளும் ஏஸ் (aces) என்க.

முதல்முறை எடுக்கும்போது, 52 சீட்டுகளில் 4 ஏஸ் (ACE) இருக்கும். முதல்முறை ஒரு ஏஸ் எடுக்கப்பட்ட பிறகு 51 சீட்டுகளில் 3 ஏஸ் சீட்டுகள் இருக்கும். இதேபோல் மூன்றாவதுமுறை 50 சீட்டுகளில் 2 ஏஸ் சீட்டுகள் இருக்கும்.

பேயெஸின் தேற்றத்தின்படி

$$P(A) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50}$$

$$P(A) = \frac{1}{5525}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.21

ஒரு வகுப்பில் 13 மாணவர்கள் மற்றும் 6 மாணவிகள் உள்ளனர். வகுப்பிலிருந்து நான்கு இருபால் மாணவர்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றனர். இதற்கு நிகழ்தகவு காண்க. (i) அனைவரும் மாணவிகள், (ii) முதல் இரண்டு மாணவர்கள் மற்றும் அடுத்தது மாணவிகள்

தீர்வு:

(iii) B: சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்வு செய்யப்பட்டவர்கள் அனைவரும் மாணவிகள்

முதல் மாணவி தேர்ந்தெடுக்கும்போது 19 இருபால் மாணவர்களில் 6 மாணவிகள் உள்ளனர்.

இரண்டாம் மாணவி தேர்ந்தெடுக்கும்போது 18 இருபால் மாணவர்களில் 5 மாணவிகள் உள்ளனர்.

மூன்றாவது மாணவி தேர்ந்தெடுக்கும்போது 17 இருபால் மாணவர்களில் 3 மாணவிகள் உள்ளனர்.

நான்காவது மாணவி தேர்ந்தெடுக்கும்போது 16 இருபால் மாணவர்களில் 3 மாணவிகள் உள்ளனர். தேற்றம் 5 இன் படி, ஒரே சமயத்தில் நான்கு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதால்

$$P(B) = \frac{6}{19} \times \frac{5}{18} \times \frac{4}{17} \times \frac{3}{16}$$

$$P(B) = \frac{5}{1292}.$$

(iv) C: சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்வு செய்யப்பட்டவர்களில் முதல் இரண்டு மாணவர்கள் மற்றும் அடுத்தது மாணவிகள் முதல் மாணவர் தேர்வு செய்யும்போது மொத்தம் 19 இருபால் மாணவர்களில் 13 மாணவர்கள் உள்ளனர்.

இரண்டாவது மாணவர் தேர்வு செய்யும்போது மொத்தம் 18 இருபால் மாணவர்களில் 12 மாணவர்கள் உள்ளனர். மூன்றாவது மாணவி தேர்வு செய்யும்போது மொத்தம் 17 இருபால் மாணவர்களில் 5 மாணவிகள் உள்ளனர். நான்காவது மாணவி தேர்வு செய்யும்போது மொத்தம் 16 இருபால் மாணவர்களில் 5 மாணவிகள் உள்ளனர். ஒரே நேரத்தில் நான்கு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கு தேற்றம் ஒரே நேரத்தில் நான்கு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கு தேற்றம் 8.5ன்படி

$$P(C) = \frac{13}{19} \times \frac{12}{18} \times \frac{6}{17} \times \frac{5}{16} = \frac{65}{1292}$$

8.8 பேயெஸின் தேற்றம் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள்

சில நிலைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தகவல்களில் இருந்து ஒரு நிகழ்ச்சி நடை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு கணக்கிடுதல் கடினமாகும். ஆனால் அதே சோதனையில் மற்றொரு நிகழ்ச்சி A–ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு. $P(A/B)$ மற்றும் $P(A/\bar{B})$ பயன்படுத்தி கணக்கிட முடியும். பின்னர் கூட்டு நிகழ்தகவைப் பயன்படுத்தி $P(A)$ஐ கணக்கிடலாம். இது பேயெஸின் தேற்றத்திற்கு முன்னோடியாக உள்ளது.

தேற்றம் 8.6 (கூட்டு நிகழ்தகவு விதி)

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ என்பது ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

மேலும் $\bigcup_{j=1}^{n} B_j = S$ மற்றும் $P(B_j) > 0$

$j = 1, 2, \ldots, n$, இருப்பின் A என்ற ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)P(B_n).$$

இது 'கூட்டு நிகழ்தகவு விதி' எனப்படும். நடைமுறை வாழ்க்கையில் தீர்மானம் மேற்கொள்ளுதல் ஒரு தொடர் நிகழ்வாகும். இத்தொடர் நிகழ்வில் சில நிகழ்ச்சிகள் கவனிக்கத்தக்க சூழல் எழும் ஒவ்வொருமுறையும் ஒரு புதிய தகவல் கிடைக்கும். அதனைக் கொண்டு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை மாற்றிட வேண்டும்.

இந்த கூடுதல் தகவல்களுடன் மாற்றம் செய்யப்பட்ட நிகழ்தகவு நிகழ்தகவு கோட்பாட்டில் பேயெஸ் தேற்றம் எனப்படுகிறது.

தேற்றம் 8.7 (பேயெஸின்' தேற்றம்)

$B_1, \ldots, B_n$ be n என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் மேலும் $\bigcup_{j=1}^{n} B_j = S$ இங்கு S என்பது கூறுவெளி $P(B_j) > 0$; $j = 1, 2, \ldots, n$, வாய்ப்புச் சோதனையில் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு A $P(A) > 0$, என இருப்பின்

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j)P(B_j)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)P(B_n)}, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

இத்தேற்றம் மத குருவும் தத்துவ ஞானியுமான மதிப்பிற்குரிய தாமஸ்பேயெஸ் (1701-1761), அழைக்கப்படுகிறது. இத்தேற்றமானது அவர் இறந்ததற்கு பின்பு அவர் நண்பர் ரிச்சர்டு பிரைஸ் என்பவரால் 1763 ஆம் ஆண்டில் பேயெஸ் என்ற பெயரில் வெளியிடப்பட்டது

நிரூபணம்:

நிபந்தனை நிகழ்தகவு வரையறையின் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி B_j, $i = 1, 2, \ldots, n$, க்கும்

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A/B_j)P(B_j)}{P(A)} \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n$$

பின்னர் தேற்றம் 8.5இன்படி பொதுமைப்படி,

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j)P(B_j)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)P(B_n)}, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.22

ஒரு பள்ளியில் உடற்கல்வி ஆசிரியர் பணியிடத்திற்கான நேர்முகத் தேர்வுக்கு திரு. அறிவழகன், திரு.இளவரசன், திரு அன்பரசன் ஆகியோர் கலந்து கொண்டனர். திரு அறிவழகன் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான வாய்ப்பு 45% திரு இளவரசன் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான வாய்ப்பு 28% மற்றும் திரு அன்பரசன் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான வாய்ப்பு 27% ஆகும். திரு அறிவழகன் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் கூட்டு உடற்பயிற்சி (Mass Drill-MD) நிகழ்ச்சியை செயல்படுத்த வாய்ப்பு 42% இதேபோன்று இளவரசனுக்கு 40% மற்றும் அன்பரசனுக்கு 48% வாய்ப்பு உள்ளது எனில் பின்வருவனவற்றிற்கு நிகழ்தகவு காண்க.

i) திரு அறிவழகன் உடற்கல்வி ஆசிரியராக நியமிக்கப்பட,

ii) திரு இளவரசன் உடற்கல்வி ஆசிரியராக நியமிக்கப்பட,

iii) திரு அன்பரசன் உடற்கல்வி ஆசிரியராக நியமிக்கப்பட,

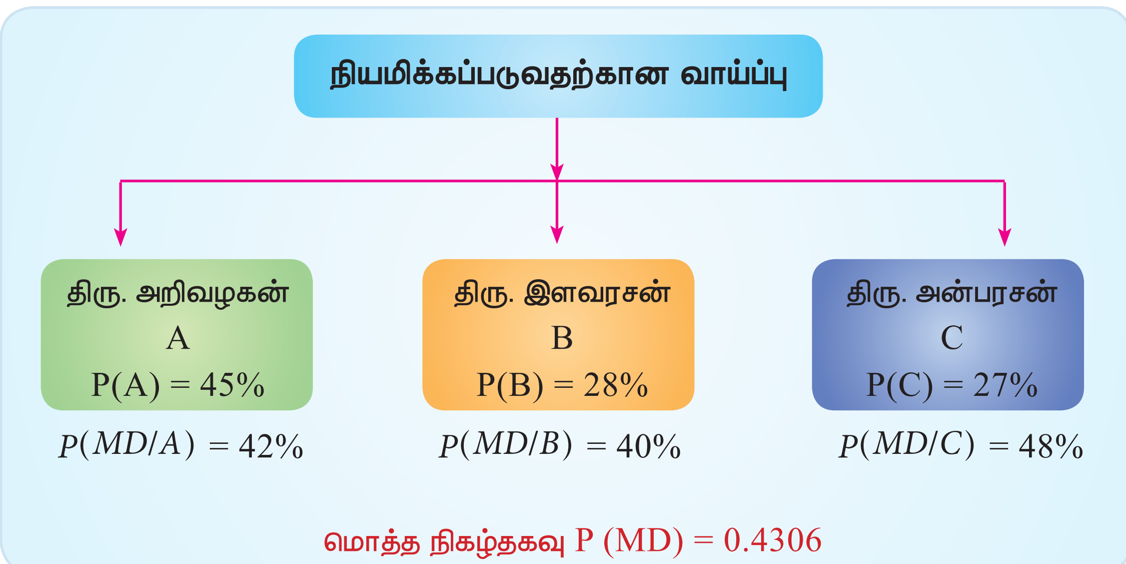
தீர்வு:

பள்ளியில் மாதாந்திர கூட்டு உடற்பயிற்சி நடத்தும் நிகழ்ச்சியை MD என்க

A: திரு அறிவழகனை நியமித்தல்

B: திரு இளவரசனை நியமித்தல்

C: திரு அன்பரசனை நியமித்தல்



படம் 8.10 உடற்கல்வி ஆசிரியரை நியமித்தல்

$P(A) = 0.45 \qquad P(B) = 0.28 \; P(C) = 0.27$

$P(MD/A) = 0.42 \qquad P(MD/B) = 0.40 \qquad P(MD/C) = 0.48$

இதிலிருந்து பள்ளியில் மாதாந்திர கூட்டு உடற்பயிற்சி நிகழ்ச்சி செயல்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவை கணக்கிட கூட்டு நிகழ்தகவை பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$P(MD) = P(MD/A)P(A) + P(MD/B)P(B) + P(MD/C)P(C)$$

$$= (0.42\times0.45) + (0.40\times0.28) + (0.48\times0.27)$$

$$= 0.189 + 0.112 + 0.1296$$

$$\therefore \quad P(MD) = 0.4306.$$

மாதாந்திர கூட்டு உடற்பயிற்சி நிகழ்ச்சி ,

(i) திரு அறிவழகன் உடற்கல்வி ஆசிரியராக நியமிப்பதற்கு நிகழ்தகவு கணக்கிட பேயெஸின் தேற்றம் பயன்படுத்த

$$P(A/MD) = \frac{P(MD/A)P(A)}{P(MD/A)P(A) + P(MD/B)P(B) + P(MD/C)P(C)}$$

$$= \frac{0.42 \times 0.45}{(0.42 \times 0.45) + (0.40 \times 0.28) + (0.48 \times 0.27)}$$

$$= \frac{0.189}{0.4306}$$

$$\therefore \quad P(A/MD) = 0.4389.$$

(ii) திரு. இளவரசன் உடற்கல்வி ஆசிரியராக நியமிப்பதற்கு நிகழ்தகவு கணக்கிட பேயெஸின் தேற்றம் பயன்படுத்த

$$P(B/MD) = \frac{P(MD/B)P(B)}{P(MD/A)P(A) + P(MD/B)P(B) + P(MD/C)P(C)}$$

$$= \frac{0.40 \times 0.28}{(0.42 \times 0.45) + (0.40 \times 0.28) + (0.48 \times 0.27)}$$

$$\therefore \quad P(B/MD) = \frac{0.112}{0.4306}$$

$$= 0.2601.$$

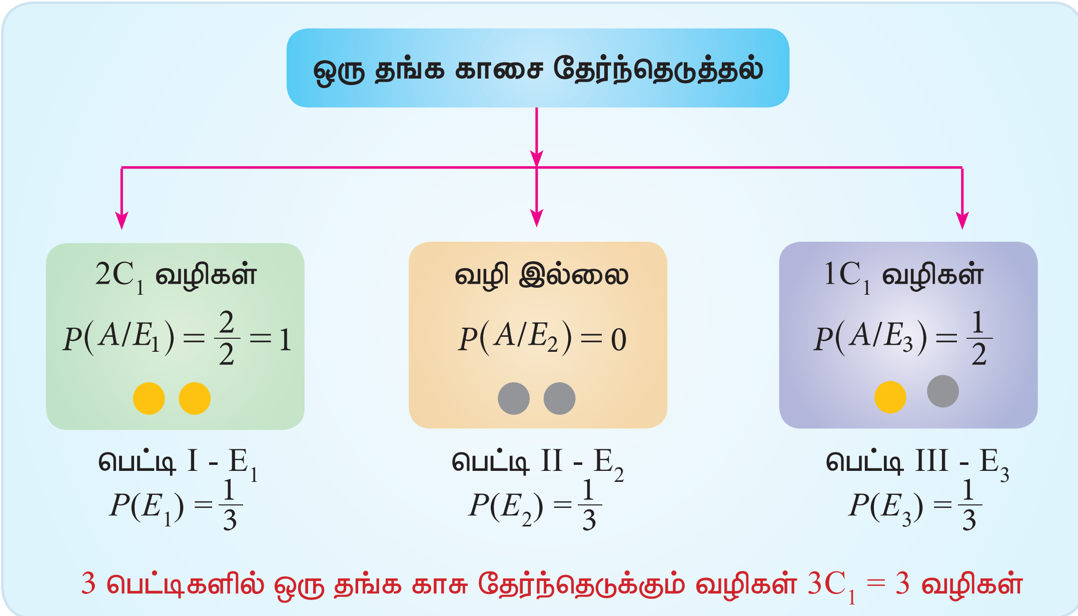
(iii) திரு அன்பரசன் உடற்கல்வி ஆசிரியராக நியமிப்பதற்கு நிகழ்தகவு கணக்கிட பேயெஸின் தேற்றம் பயன்படுத்த

$$\mathrm{P(C|MD)} = \frac{P(MD/C)P(C)}{P(MD/A)P(A) + P(MD/B)P(B) + P(MD/C)P(C)}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.27}{(0.42 \times 0.45) + (0.40 \times 0.28) + (0.28 \times 0.27)}$$

$$= \frac{0.1296}{0.4306}$$

$$\mathrm{P(C|MD)} = 0.3010.$$



எடுத்துக்காட்டு 8.23

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரே மாதிரியான மூன்று I, II மற்றும் III பெட்டிகளில் ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் இரண்டு நாணயங்கள் உள்ளன. பெட்டி I இல், இரண்டு தங்க நாணயங்களும் பெட்டி II இல், இரண்டு தங்க நாணயங்களும் பெட்டி III இல், ஒரு தங்க நாணயமும் ஒரு வெள்ளி நாணயமும் உள்ளன. ஒரு பெட்டியை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்வு செய்து ஒரு நாணயம் எடுக்கப்படுகிறது அது தங்க நாணயமாக இருந்து பெட்டியில் உள்ள மற்றொரு நாணயமும் தங்க நாணயமாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் 8.11இல் மஞ்சள் நிறம் தங்க நாணயத்தையும் மற்றும் சாம்பல் நிறம் வெள்ளி நாணயத்தையும் குறிக்கட்டும்.

E_1, E_2 மற்றும் E_3 என்பன முறையே பெட்டிகள் I, II, III தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்க.

பின்னர் $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

மேலும் A என்பது தங்க நாணயம் எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி என்க

$$P(A/E_1) = P\text{ (பெட்டி 1 இல் ஒரு தங்க நாணயம்)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(A/E_2) = P\text{ (பெட்டிI இல் ஒரு தங்க நாணயம்)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$P(A/E_3) = P\text{ (பெட்டி III இல் ஒரு தங்க நாணயம்)} = \frac{1}{2}$$

இப்பொழுது பெட்டியில் மற்றொரு தங்க நாணயம் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்பது பெட்டி

I இல் இருந்து ஒரு தங்க நாணயம் எடுப்பது போன்றதே = $P(A/E_1)$

பேயெஸின் தேற்றபடி,

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E_i)P(A/E_i)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

நினைவில் கொள்க...

- ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு:

  (i) பாரம்பரிய நிகழ்தகவு: $P(A) = \frac{\text{A க்கு சாதகமான விளைவுகள்}}{\text{மொத்த விளைவுகள்}}$

  (ii) சார் நிகழ்வெண் அணுகுமுறை: $P(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}$

- கோட்பாடுகள் (i) $P(A) \geq 0$

  (ii) $P(S) = 1$

  (iii) $\{A_1, A_2, \ldots\}$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் தொடர் நிகழ்ச்சிகள்

  $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

- நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

- நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்: $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$, A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்வுகள்

  $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

- $A\subset B$ எனில், $P(A) \leq P(B)$, $P(B\text{-}A) = P(B) - P(A)$

- நிபந்தனை நிகழ்தகவு: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, if\ P(B) > 0$

- A மற்றும் B சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்: $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

- நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம் $P(A \cap B) = \begin{cases} P(A/B)\times P(B), if\ P(B) > 0 \\ P(B/A)\times P(A), if\ P(A) > 0 \end{cases}$

- பேயஸின் தேற்றம்: $P\left(B_j/A\right) = \dfrac{P(A/B_j)\times P\left(B_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A/B_j\right)\times P\left(B_j\right)}, j = 1, 2, \ldots n$

பயிற்சி

6FU2N5

I மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. பின்வருவனவற்றில் எது வாய்ப்புச்சோதனைக்கு ?
   (a) விளைவுகள் முன்னதாகவே தீர்மானிக்கக் கூடியது
   (b) விளைவு முன்கூட்டியே தெரியாது
   (c) சோதனை திரும்பத் திரும்ப முடிவுறு
   (d) சோதனை திரும்பத் திரும்ப முடிவுற்ற எண்ணிக்கையில் செய்யப்படுகிறது.

2. கணித நிகழ்தகவு பின்வருமாறு அழைக்கப்படுகிறது
   (a) புள்ளியியல் நிகழ்தகவு (b) பாரம்பரிய நிகழ்தகவு
   (c) அனுபவ நிகழ்தகவு (d)மேல் கூறியவற்றில் எதுவும் இல்லை

3. எண் 4 கிடைக்கும் வரை ஒரு பகடை உருட்டப்படுகிறது எனில் அதன் கூறு வெளி
   (a) ஒரு வெற்றுக்கணம் (b) எண்ண இயன்ற முடிவுறு கணம்
   (c) எண்ண இயன்ற முடிவுறாகணம் (d) எண்ண இயலாத கணம்

4. ஒரு நோயாளிக்கு கடினமான அறுவை சிகிச்சை செய்ய குறைந்த அளவு வயது வரம்பு 12 ஆண்டுகள் எனில் இந்த வயது வரம்பு x (வருடங்கள்), என்பதை பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.
   (a) $\{\underline{x} : 12 \le x < \infty\}$ (b) $\{x : 12 \le x < 24\}$
   (c) $\{x : 0 \le x < 12\}$ (d) மெய்யெண் கோட்டில் ஏதேனும் ஒரு இடைவெளி.

5. A and B என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில் $P(A\cup B)$ என்பது
   (a) $P(A) + P(B)$ (b) $P(A) - P(B)$
   (c) $P(A) + P(B) - \underline{P}(A\cap B)$ (d) $P(A)P(B)$

6. $A=\{1, 2\}$; $B=\{3, 4, 5\}$;$C=\{5, 6\}$ என்பன Sன் நிகழ்ச்சிகள் எனில் S இல் உள்ள கூறு புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை
   (a)1 (b)4 (c) 3 (d) 6

7. ஒரு பகடை வீசும்போது 3 கிடைக்காமல் இருக்க நிகழ்தகவு
   2. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{4}$

8. A_1 மற்றும் A_2 என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் மேலும் $P(A_1)=\frac{4}{9}$ மற்றும் $P(A_2)=\frac{3}{9}$ மற்றும் $P(A_1 \cap A_2)=\frac{2}{9}$ நிகழ்ச்சிகளும் நடைபெறாமல் இருக்க நிகழ்தகவு

(a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{4}{9}$ (c) $\frac{30}{81}$ (d) $\frac{2}{9}$

9. A மற்றும் B என்பன இரண்டு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் மேலும் $P(A) = P(B)$; $P(A \cap B) = a$; எனில் $P(B) =$

(a) $2a$ (b) $\sqrt{a}$ (c) $\frac{a}{2}$ (d) a^2

10. A மற்றும் B இரண்டு ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் மேலும் P(A/B)= 0.3, P(B/A) = 0.2. என்பது P(A) is

(a) $\frac{3}{10}$ (b) $\frac{7}{10}$ (c) $\frac{6}{7}$ (d) $\frac{1}{7}$

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக:

11. கூறுவெளியின் நிகழ்தவு______________

12. ஒருபகடை வீசும் போது இரட்டைஎண் அல்லது ஒற்றையெண் கிடைப்பது______________ நிகழ்ச்சிகளாகும்.

13. ஒரு வாரத்தில் திங்கள் கிழமை வருவதற்கான நிகழ்தகவு ______________

14. A_1 மற்றும் A_2 என்பன சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனில் $P(A_1 \cup A_2) =$______________

15. $A \subset B$, எனில் A என்பது______________நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது.

16. ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 1 எனில் அந்த நிகழ்ச்சி______________ஆகும்.

17. $P(A) = 0$, எனில் A என்பது ______________நிகழ்ச்சி

18. நிகழ்தகவு கோட்பாட்டு அணுகுமுறையை உருவாக்கியவர்______________

19. A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் மேலும் $P(A \cup B) = \frac{10}{15}$, எனில் $P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$______________

20. P(A/B) ஐ பயன்படுத்தி என்ற நிபந்தனை நிகழ்தகவு காணப்படுகிறது எனில் $P(B)$, __________

III குறு வினாக்கள் (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி)

21. E_1 மற்றும் E_2 என்பன இரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் மேலும் $P(E_2) = 0.5$ $P(E_1 \cup E_2) = 0.7$ எனில் $P(E_1)$ காண்க.

22. சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட லீப் ஆண்டில் 53 வெள்ளி கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க

23. ஒரே சமயத்தில் இரண்டு நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன சரியாக இரண்டு தலைகள் கிடைக்க நிகழ்தகவு காண்க.

24. $P(A \cap B) = 0.3$, $P(B)= 0.7$ எனில் $P(A/B)$ இன் மதிப்பு காண்க

25. ஒரு பெட்டியில் 5 சிவப்பு 4 வெள்ளை நிற கோலிகுண்டுகள் உள்ளன. அப்பெட்டியிலிருந்து திரும்பி வைக்காத முறையில் இரண்டு கோலிகுண்டுகள் எடுக்கப்படுகின்ற போது இரண்டாவதாக எடுக்கப்படும் கோலிகுண்டு வெள்ளை நிறமாக உள்ளது எனில் முதலாவதாக எடுக்கப்படும் கோலிகுண்டும் வெள்ளையாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

26. பின்வருவனவற்றை வரையறு:
(i) நிகழ்ச்சி, (ii) வாய்ப்புச் சோதனை (iii) கூறுவெளி, (iv) ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள், (v) யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் (vi) சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் , vii)சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள்

27. கணித நிகழ்தகவு – வரையறு.

28. புள்ளியியல் நிகழ்தகவை வரையறு.

29. நிபந்தனை நிகழ்தகவை வரையறு.

30. இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவு பெருக்கல் தேற்றத்தை எழுதுக.

31. சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கான பெருக்கல் தேற்றத்தை எழுதுக.

IV. சிறு வினா (ஓரிரு சொற்றொடரில் விடையளி):

32. ஒரு லீப் ஆண்டு அல்லாத சாதாரண ஆண்டு சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது 53 ஞாயிற்று கிழமைகள் அல்லது 53 திங்கள் கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவை காண்க

33. இரண்டு பகடைகள் வீசும்போது இரட்டைகள் (இரண்டிலும் ஒரே எண்) கிடைக்க நிகழ்தகவு காண்க.

34. ஒரு பெட்டியில் 5 பச்சை மற்றும் 3 சிவப்பு நிற பந்துகள் உள்ளன. மூன்று பச்சை நிற பந்துகள் திரும்பி வைக்காத முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

35. 30 பொருட்கள் உள்ள ஒரு மாதிரியில் 5 பொருட்கள் குறைபாடு உடையவை. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பொருள் தேர்ந்தெடுக்கும் போது (i) குறைபாடுடையவை (ii) குறைபாடற்றவையாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

36. $P(A) = 0.35,\quad P(B) = 0.73$ மற்றும் $P(A \cap B) = 0.14$, எனில் $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ காண்க

37. நிகழ்தகவின் கோட்பாடுகளை எழுதுக

38. கூட்டு நிகழ்தகவு தேற்றத்தை எழுதுக.

39. பேயெஸின் தேற்றத்தை எழுதுக

40. நன்கு கலைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகள்ள கொண்ட சீட்டு கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது அது (i) ஏஸ் (ii) டைமண்ட் ஆக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க

V விரிவான விடையளி.

41. நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

42. ஒரு கொள்கலனில் 5 சிவப்பு மற்றும் 7 பச்சை நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு கொள்கலனில் 6 சிவப்பு மற்றும் 9 பச்சை நிறபந்துகள் உள்ளன. இரண்டு கொள்கலன்களில் ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது பச்சை நிற பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க

43. ஒரு தொடர்வண்டி பயணச்சீட்டு முன்பதிவு அலுவலகத்தில் இரண்டு எழுத்தர்கள் முன்பதிவு படிவங்களை சரி பார்க்கின்றனர். சராசரியாக முதல் எழுத்தர் (A_1) என்பவர் 55% படிவங்களை சரிபார்க்கின்றார். இரண்டாவது எழுத்தர் (A_2) என்பவர் மீதம் உள்ள படிவங்களை சரிபார்க்கின்றார்.. A_1 என்பவரின் பிழைக்கான விகிதம் 0.03 என்பவருக்கு

ஒரு நாளில் சரிபார்க்கப்பட்ட மொத்த படிவங்களில் இருந்து சமவாய்ப்பு முறைபடி ஒரு படிவம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அது பிழையான படிவம் என காணப்படுகிறது. அது முறையே A_1, A_2 என்பவர்கள் சரிபார்க்கப்பட்டதிலிருந்து கிடைத்தது என்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

44. ஒரு பல்கலைக் கழகத்தில் புள்ளியியல் பாடம் படிக்கும் மாணவர்கள், 30% பேர் A_1, என்ற ஆசிரியரால் எழுதப்பட்ட புத்தகத்தை பயன்படுத்துகின்றனர் 25% மாணவர்கள் A3 என்ற ஆசிரியரால் எழுதப்பட்ட புத்தகத்தை பயன்படுத்துகின்றனர். ஒவ்வொரு புத்தகத்தையும் தனது ஆசிரியர்கள் மூலம் கற்றுக் கொள்ளும் மாணவர்களின் விகிதம் $P(A_1)$ =0.50, $P(A_2)$=0.30, மற்றும் $P(A_3)$=0.20. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மாணவர் தான் பயன்படுத்தும் புத்தகத்தை தனது ஆசிரியர் மூலம் கற்றதாக வெளிப்படுத்துகிறார். மாணவர் பயன்படுத்திய புத்தகம் முறையே A_1, A_2, மற்றும் A_3 என்ற ஆசிரியர்களால் எழுதப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவு காண்க..

45. திருகாணிகள் தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனம் A, B, C மற்றும் D என்ற நான்கு இயந்திரங்கள் மூலம் மொத்த உற்பத்தியில் 20%, 15%, 25% மற்றும் 40% உற்பத்தி செய்கிறது. உற்பத்தியில் முறையே 5%, 4%, 3% மற்றும் 2% திருகாணிகள் குறைபாடுடையது. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு திருகாணி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டடு அது குறைபாடுடையது என காணப்படுகிறது எனில் குறைபாடுடைய திருகாணி கிடைக்க நிகழ்தகவு காண்க.

46. *A, B, C* மாவட்டங்களாகப் பரிக்கப்பட்ட ஒரு நகரத்தில் 20%, 40% மற்றும் 40% பதிவு செய்யப்பட்ட வாக்காளர்கள் உள்ளனர். பதிவு செய்யப்படட்ட வாக்காளர்களில் 50% A, 25 % B மற்றும் 75 % C. A ஜனநாயகவாதிகள் உள்ளனர். ஒரு பதிவு செய்யப்பட்ட வாக்காளர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். வாக்காளர் ஜனநாயகவாதியாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

விடைகள் :

I. 1. (*a*) 2. (*b*) 3. (c) 4. (a) 5. (a) 6. (d) 7. (b) 8. (b) 9. (b) 10. (c)

II. 11. ஒன்று 12. ஒன்றையொன்று விலக்கும் 13. $\frac{1}{7}$ 14. $P(A_1) + P(A_2)$

15. ≤ 16. நிச்சயமான நிகழ்ச்சி 17. நடக்க இயலாத

18. A.N. கோல்மோகோராவ் 19. $\frac{1}{3}$ 20. அதிகமாக

III. 21. 0.2 22. $\frac{2}{7}$ 23. $\frac{1}{2}$ 24. $\frac{3}{7}$ 25. $\frac{4}{9}$

IV. 32. $\frac{2}{7}$ 33. $\frac{1}{6}$ 34. $\frac{5}{28}$ 35. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{6}$ 36. 0.86

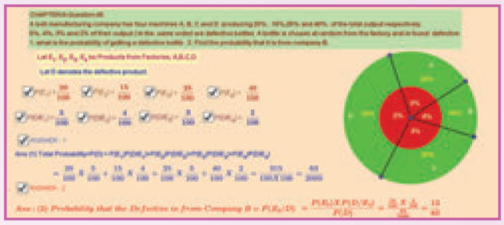
40. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{4}$

V. 42. $\frac{71}{120}$ 43. 0.0647, 0.353 44.0.45, 0.40, 0.15 45. $\frac{63}{2000}$ 46. 50%

இணையச்செயல்பாடு

நிகழ்தகவு– பேயசின் தேற்றம்

பேயசின் தேற்றம் அறிவோமா !



படிகள்

1. கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க.

   "11th Standard Statistics" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகத்தில் "Probability–Bayes theorem" க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்

2. புத்தகத்திலுள்ள பேயஸின் தேற்றம் சார்ந்த கணக்கு படி படியாக எளிய முறையில் விளக்கப்பட்டிருக்கும். வலப்பக்கம் உள்ள படத்தைக் கேள்வியோடு ஒப்பிட்டு குறியீடுகளை எப்படி ஒப்பிடுவது என்று கற்கவும்.

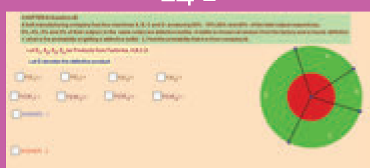
3. பெட்டிகளை ஒவ்வொன்றாகச் சொடுக்கி P(E)–யின் மதிப்புகளை ஆய்வு செய்யவும். P(D/E)நிபந்தனை நிகழ்தகவுகளையும் ஆய்வு செய்யவும்.

   மொத்த நிகழ்தகவு P(D) மற்றும் பேயஸின் தேற்றம் P(E2/D) பயன்படுத்தும் முறையினை ஒப்பிடவும்.

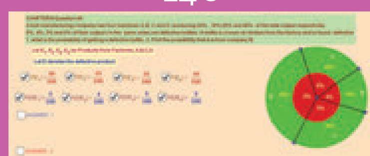
   "Answer–1" மற்றும் "Answer–2" சொடுக்கி விடையை ஒப்பிடவும்.

படி 1

படி 2



படி 3



* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

உரலி:

https://ggbm.at/uqVhSJWZ

B136_11_STA_TM

அத்தியாயம்

9

வாய்ப்பு மாறிகளும் கணித எதிர்பார்ப்பும்

சைமன் டெனிஸ் பாய்சான்
(21 சூன், 1781 – 25 ஏப்ரல், 1840)

சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் என்பவர் பிரான்ஸ் நாட்டைச் சார்ந்த கணிதவியலார். வரையறுத்த தொகையிடல், மின்காந்தவியல், நிகழ்தகவு ஆகியவற்றில் அவரது பங்கு குறிப்பிடத்தக்கது. பாய்சானின் மிகப் பெரிய ஆய்வு நிகழ்தகவு பற்றியதாகும். பாய்சான் பரவல் மிக முக்கிய கண்டுபிடிப்பாகும். அவரது பங்களிப்பான பெரும் எண்களின் பரவல் விதி ஈருறுப்பு பரவலை தோராயமாக்குவதில் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும்.

பாய்சான் பரவல் இப்போது ரேடியோ செயல்கள், போக்குவரத்து, காலம் அல்லது வெளிகளில் இடம்பெறும் நிகழ்ச்சிகளில் அமையும் ராண்டம் நிகழ்வுகள் போன்றவற்றிற்கு அடிப்படையாக விளங்குகிறது.

'பிரபஞ்சத்தில் உள்ள எல்லாமே வாய்ப்புகளை எதிர்நோக்கியே காத்திருக்கிறது'.

- டெமாக்ரிடஸ்

நோக்கங்கள்

- வாய்ப்பு மாறியின் முக்கியத்துவத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- வாய்ப்பு மாறியின் வகைகளை அறிந்து கொள்ளுதல்.
- நிகழ்தகவு சார்புகளின் வகைகளைத் தெரிந்து கொள்ளுதல்.
- குவிவு பரவல் சார்பின் பண்புகளை அறிதல்.
- எதிர்பார்ப்பின் கருத்தினைத் தெரிந்து கொள்ளுதல்.
- எதிர்பார்ப்பின் தேற்றங்களைஆய்வு செய்தல்.
- விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு மற்றும் சிறப்பியல்புச் சார்பினை வேறுபடுத்துதல்.

6G3XPS

அறிமுகம்

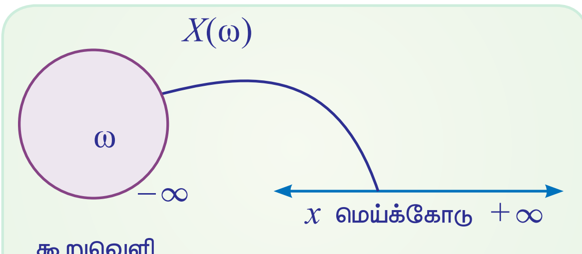
நாம் சென்ற பாடப்பகுதியில் நிகழ்தகவு பற்றி படித்துள்ளோம். நிகழ்தகவு கூறுகளின் தொடர்ச்சியாக வாய்ப்பு மாறி மற்றும் நிகழ்தகவு பரவல்கள் ஆகிய இரு வேறு கருத்துக்களில் கவனம் செலுத்த வேண்டியுள்ளது. நிகழ்தகவு பரவலின் வரையறையைப் பற்றி படிப்பதற்குமுன் வாய்ப்பு மாறியைப்பற்றி தெரிந்து கொள்வது மிகவும் முக்கியம் மற்றும் அவசியமாகிறது. பொதுவாக ஒரு சோதனையானது சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனையின் அடிப்படையில் திரும்ப திரும்ப நடத்தப்பெற்றால் மாறிகளுக்குக் கிடைக்கப் பெறும் மதிப்புகள் சமமாக அமையும். எனினும் சில சமயங்களில் ஒரே மாதிரியான சோதனையில் வெவ்வேறு விளைவுகள் கிடைக்கப்பெறுகின்றன. இதன் விளைவாக மாறிகள்பெறும் மதிப்புகள் தீர்மானிக்க இயலாத நிலையில் சோதனை, வாய்ப்பு சோதனையாகிறது.

நாம் வாய்ப்பு சோதனை, கூறுபுள்ளி, கூறுவெளி மற்றும் நிகழ்ச்சி ஆகியவற்றை முன்பே படித்துள்ளோம். வாய்ப்பு சோதனையில் கூறுவெளியில் உள்ள மதிப்புகளைவிட அவற்றுடன் தொடர்புடைய எண்களுக்கு (x) முக்கியத்துவம் தரப்படுகிறது. இம்மதிப்புகள் ஒவ்வொரு சோதனையின் விளைவுகளுக்கு ஏற்ப மாறுபடும். எனவே இது மாறி எனப்படும். இம்மாதிரியான தருணங்களில் வாய்ப்பு மாறி என்ற தனித்துவமிக்க மாறி தேவையாகிறது. வாய்ப்பு சோதனையின் விளைவுகளுடன் தொடர்புடைய மாறி வாய்ப்பு மாறி எனப்படும்.

9.1 வாய்ப்பு மாறி

வரையறை

S என்பது வாய்ப்பு சோதனையின் கூறுவெளி வாய்ப்பு சோதனையின் விளைவுகள் மெய் எண்களோடு தொடர்புகொள்ளுமாறு அமைக்கப் பெறுவதை வாய்ப்பு மாறி X என்கிறோம். அதாவது **ஒரு மாறியில் பெறப்படும் எண்கள் ஒரு வாய்ப்பு சோதனையின் விளைவுகளால் பெறப்பட்ட எண்களாக இருந்தால் அது வாய்ப்பு மாறி எனப்படும்.** ஒரு வாய்ப்பு சோதனையில் கூறுவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு விளைவிற்கும் (ω) ஒரே ஒரு மெய்யெண் x (வாய்ப்பு மாறி பெறும் மதிப்பு) உடன் தொடர்புடையது. அதாவது $X(\omega) = x$



படம்.9.1

பொதுவாக வாய்ப்பு மாறிகள் $X, Y, Z \ldots$ என்ற பெரிய ஆங்கில எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும். அவைபெறும் மதிப்புகள் $x,\ y,\ q$ என்னும் ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக ஓ ஒரு வாய்ப்பு மாறி எனில் பெறும் மதிப்புகள் $x_1, x_2 \ldots$ என்று குறிக்கப்படுகின்றன

எடுத்துக்காட்டு 9.1

வாய்ப்பு சோதனை: பகடை உருட்டுதல்

கூறுவெளி $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

வாய்ப்பு மாறி X பகடையில் தோன்றும் எண்கள்

வரையறுக்கப்பட்ட விதியின்படி

$X(1) = 1,\ X(2) = 2, X(3) = 3, X(4)=4,\ X(5)=5$ மற்றும் $X(6)=6$

எனவே, வாய்ப்பு மாறி X ஆனது 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

வாய்ப்பு மாறி X ஐ உணர்ந்து கொள்ள இம்மதிப்புகள் உதவுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 9.2

வாய்ப்பு சோதனை : ஒரே நேரத்தில் இரு நாணயங்கள் சுண்டப்படுதல்

கூறுவெளி : $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

வாய்ப்பு மாறி X வரையறை : X தலைகளின் எண்ணிக்கை

கூறுவெளி ω	HH	HT	TH	TT
X (ω)	2	1	1	0

இங்கு வாய்ப்பு மாறி X இன் மதிப்புகள் 0, 1, 2 .

எடுத்துக்காட்டு 9.3

சோதனை : ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் உருட்டப்படுதலின்

கூறுவெளி : 36 புள்ளிகளைக் கொண்டது

கூறுவெளி : $\{(1, 1),(1, 2),(1, 3),\ldots(6, 6)\}$

வரையறுக்கப்பட்ட விதி : (விதி ஒதுக்கீடு) X – பகடையில் தோன்றும் எண்களின் கூடுதல் எனில் $X_{ij} = i + j$

i - முதல் பகடையில் தோன்றும் எண், j – இரண்டாம் பகடையில் தோன்றும் எண் எனில், வாய்ப்பு மாதிரி பெறும் மதிப்புகள் 2, 3, 4 . .... 12.

X ன் வீச்சு $\{2, 3, 4\ldots\ldots 12\}$

9.2 தனித்த வாய்ப்பு மாறி மற்றும் தொடர் வாய்ப்பு மாறி

வாய்ப்பு மாறிகள் அவை பெறும் மதிப்பினைக் கொண்டு தனித்த வாய்ப்பு மாறி அல்லது தொடர் வாய்ப்பு மாறி என இரு வகையாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

9.2.1 தனித்த வாய்ப்பு மாறி

வாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் முடிவுறுவதாகவோ அல்லது எண்ணிடத்தக்க அளவுள்ள தாகவோ இருப்பின் தனித்த வாய்ப்பு மாறி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.4

நாணயம் சுண்டுதல் என்ற சோதனையில் வரையறுக்கப்பட்ட விதி

If X (தலை) $=1$, X (பூ) $= 0$

X பெறும் மதிப்புகள் 0 அல்லது 1 இது தனித்த வாய்ப்பு மாறியாகும்

> **குறிப்பு**
>
> எடுத்துக்காட்டுகள் 9.1, 9.2, மற்றும் 9.3 முடிவுறு எண்ணை வீச்சாகப் பெறும் தனித்த வாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.5

X என்பது தலை விழும் வரை நாணயம் சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை எனில் X ன் மதிப்புகள் 1, 2, 3, .. இங்கு வாய்ப்பு மாறி எண்ணிடத்தக்க, முடிவுறா மதிப்பெண்களைப் பெறும்

9.2.2 தொடர் வாய்ப்பு மாறி:

X என்ற வாய்ப்பு மாறி குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் சாத்தியமான அனைத்து மதிப்புகளையோ அல்லது இணையா இடைவெளிகளின் சேர்ப்பில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளையோ பெற்றிருக்கும் எனில் அம்மாறி ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.6

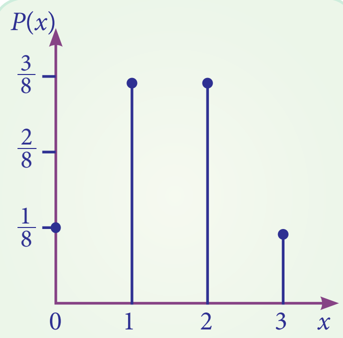
ஒரு பள்ளியில் பயிலும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை X என்க. அவர்களின் உயரம் 120 செ.மீக்கும் 180 செ.மீக்கும் இடையே உள்ளது. $X = \{x/120$ செ.மீ $< x < 180$ செ.மீ $\}$ ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறி.

எடுத்துக்காட்டு 9.7

மின்விளக்கு தொடர்ச்சியாக உழைப்பதற்கான அதிகபட்ச நேரம் 1500 மணிகள் எனில் அதன் தொடர் வாய்ப்பு மாறியை $X = \{x/0 \le x \le 1500\}$ என எழுதலாம்

9.3 நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு மற்றும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

நிகழ்தகவு சார்பு என்பது வாய்ப்பு மாறியுடன் தொடர்புடையது. இச்சார்பு வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை அறிய பயன்படுகிறது. தனித்த மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு என்றும் தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.



படம்.9.2

9.3.1 நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு.

X ஒரு தனித்த வாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் $x_1, x_2 \ldots . x_n$ என்றும் இம்மதிப்புகளின் நிகழ்தகவுகள் $p(x_1), p(x_2) \ldots .. p(x_n)$ எனில்

(i) $p(x_i) \geq 0, \quad \forall$ i (குறை எண் அல்லாத) மற்றும் (ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$ (எல்லா நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 ஆகும்)

இச்சார்பு $p(x)$ தனித்தமாதிரி X ன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு என அழைக்கப்படுகிறது

இவ்விணை $\{x_i, p(x_i); i = 1, 2, 3, ... \}$ X இன் நிகழதகவு திண்மைச் சார்பு.

எடுத்துக்காட்டு 9.8

ஒரு நாணயம் இருமுறை சுண்டப்படுகிறது. X – தலை விழுதலின் எண்ணிக்கை எனில் X இன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு:

நாணயம் இருமுறை சுண்டப்படுவதால் கூறுவெளி $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

X தலைகளின் எண்ணிக்கை $X = 0,1,2$

$P(X = 0) = P$ (தலை விழாமல் இருக்க) $= \frac{1}{4}$

$P(X = 1) = P$ (ஒரு தலை விழுதல்) $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = P$ (இரண்டு தலைகள் விழுதல்) $= \frac{1}{4}$

குறிப்பு

நிகழ்தகவுகள் குறையெண்கள் அல்ல மேலும் கூடுதல் 1 ஆகும்

X இன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு

X	0	1	2
$p(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 9.9

எடுத்துக்காட்டு 9.3 இல் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு பின்வருமாறு

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

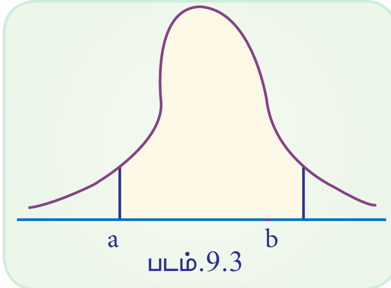
இங்கு நிகழ்தகவுகள் குறையெண்கள் அல்ல மற்றும் எல்லா மதிப்புகளின் கூடுதல் 1 என்பதை நிறைவு செய்வதால் இது நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு ஆகும்

9.3.2 நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆக இருக்க வேண்டுமாயின்

(i) $f(x) \geq 0, \ \forall x$ (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

குறிப்பு:



படம்.9.3

(i) மேற்கண்ட 2 நிபந்தனைகளையும் நிறைவு செய்யும் சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்

(ii) X என்ற வாய்ப்பு மாறி a மற்றும் b இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு
$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

(iii) தனித்த வாய்ப்பு மாறியில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் அதாவது $P(X = x)$ என்பது பூச்சியமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஆனால் தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் ஒரு புள்ளியில் காணும் நிகழ்தகவு எப்பொழுதும் பூச்சியமாகும்,
$P(X - a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

(iv) $P(a < X < b) = p(a \le X < b) = p(a < X \le b) = p(a \le X \le b)$

எடுத்துக்காட்டு 9.10

ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறி X என்பது $f(x) = \begin{cases} Ax^3, & 0 < x < 1 \\ 0\,, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$ என்ற விதிக்குட்பட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் A இன் மதிப்பு காண்

தீர்வு:

$f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 Ax^3\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad A = 4$$

குறிப்பு

தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் மொத்த நிகழ்தகவு = 1 என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் பரவி இருப்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.11

$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9}, & 0 < x < 3 \\ 0\,, & \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பா என சரிபார்க்க.

தீர்வு :

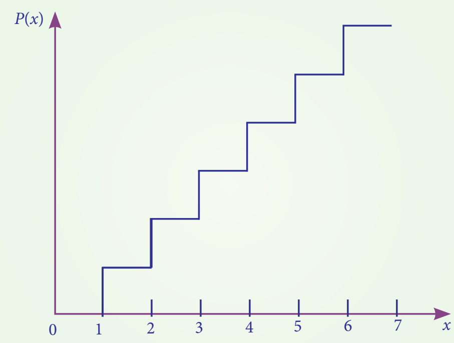
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{2x}{9}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{9}\left[\frac{9}{2}\right] = 1$$

இங்கு மொத்த நிகழ்தகவு 1. எனவே $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

9.4 பரவல் சார்பு மற்றும் பண்புகள்

நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் குறிக்கும். ஆனால், இத்தகைய சூழ்நிலையில் நாம் ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குள் நிகழ்தகவு எடுக்கும் மதிப்புகளைக் காணவிழைகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக ஓர் ஆய்வாளார் நிகழ்தகவு குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குள் எவ்வாறு பரவியிருக்கிறது என்பதைக் காண பரவல்சார்பு அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.



படம்.9.4

$[P\ (X < x)$ (அல்லது) $P\ (X > x)$ (அல்லது) $P\ (a < x < b)]$.

9.4.1 தனித்த பரவல் சார்பு

வரையறை : ஒரு தனித்த வாய்ப்பு மாறி X குவிவு பரவல் சார்பு $F(x) = P(X \leq x), \forall x$ பொதுவாக பரவல் சார்பு என அழைக்கப்படும்.

9.4.2 பண்புகள்:

(i) $0 \leq F(x) \leq 1,\ \forall x$, (குறைவற்ற சார்பு)

(ii) $F(x) \leq F(y),\ \forall x < y$, (ஏறும் சார்பு)

(iii) $\lim\limits_{h \to 0} F(x+h) = F(x),\ \forall x$,
($F(x)$ ஓர் வலப்பக்கத் தொடர்)

(iv) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(v) $F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

குறிப்பு

X தனித்த வாய்ப்பு மாறி எனில்

(i) $F(x) = \sum\limits_{r=-\infty}^{x} P(x = r)$

(ii) $P(X = x) = F(x) - F\ (x-1)$

9.4.3 தொடர் பரவல் சார்பு

(i) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

(ii) $f(x) = F'(x)$

(iii) $P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$

$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$

$= \int_{a}^{b} f(x)dx$

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, பரவல் சார்பினை, வகைப்படுத்தினால் கிடைக்கும். இது போன்றே கொடுக்கப்பட்ட வீச்சினில் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பினைத் தொகையிட்டால் நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு கிடைக்கும்.

பண்புகள்

(i) $F(x)$ ஓர் (குறைவற்ற) ஏறும் சார்பு

(ii) $0<F(x)<1 \qquad -\infty < x < \infty$

(iii) $F(-\infty) = 0,$

(iv) $F(\infty) = 1$

(v) $\underline{a}$ மற்றும் bஇன் மெய் மதிப்புகளுக்கு $a < b,\ p(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

(vi) $f(x) = \frac{d}{dx}(F(x))$ அதாவது $f(x) = F'(x)$

எடுத்துக்காட்டு 9.12

ஒரு வாய்ப்பு மாறி பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலை பெற்றிருக்கிறது.

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	a	$3a$	$5a$	$7a$	$9a$	$11a$	$13a$

(i) 'a' இன் மதிப்பு காண்

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு காண்க

(iii) பின்வருவனவற்றைக் காண்க : (a) $P(X \geq 4)$ (b) $P(X < 5)$ (c) $P(3 \le X \le 6)$

(iv) $P(X = 5)$ $F(x)$ பயன்படுத்திக் காணவும்.

தீர்வு:

(i) $P(X = x)$ என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, எனவே $\sum P(X = x) = 1$

i.e., $P(X = 0) + P(X =1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$

$$a + 3a + 5a + 7a + 9a + 11a + 13a = 1$$

$$49a = 1 => a = \frac{1}{49}$$

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{49}$	$\frac{3}{49}$	$\frac{5}{49}$	$\frac{7}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{11}{49}$	$\frac{13}{49}$
$F(x)$	$\frac{1}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{16}{49}$	$\frac{25}{49}$	$\frac{36}{49}$	$\frac{49}{49}=1$

(iii) (a) $P(X \ge 4)$

$$= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= 9a + 11a + 13a$$

$$= 33a$$

$$= 33 \times \frac{1}{49} = \frac{33}{49}$$

(b) $\quad P(X<5) = 1 - P(X \geq 5) = 1 - [P(X = 5) + P(X = 6)]$

$$= 1 - [11a + 13a]$$

$$= 1 - 24a$$

$$= 1 - \frac{24}{29}$$

$$= \frac{25}{29}$$

(c) $\quad P(3 \leq \times \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$$= 7a + 9a + 11a + 13a$$

$$= 40$$

$$a = \frac{40}{49}$$

(iv) $\quad P(X = 5) = F(5) - F(5 - 1)$

$$= \frac{36}{49} - \frac{25}{49}$$

$$= \frac{11}{49}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.13

தொடர் வாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}; & 0 < x < 2 \\ 0; & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

(i) X இன் குவிவு சார்பு காண்க (ii) $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 1\right)$ இன் மதிப்பு காண்க

(iii) $P(X=1.5)$ ஐ கணக்கிடுக

தீர்வு:

(i)குவிவு பரவல் சார்பு $F(x) = P(X \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{x} \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{if } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$$

குறிப்பு

தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் நிகழ்தகவு 0

(ii) $$P\left(\frac{1}{2} < X \leq 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

நிகழ்தகவு மதிப்பு $f(x)$ ஐ பயன்படுத்தியும் காணலாம்.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{3}{16}$$

(iii) $P\,(X = 1.5) = 0$

9.5 இணைந்த மற்றும் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு

நடைமுறை வாழ்வில் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வாய்ப்பு மாறிகளை ஒரே நேரத்தில் காண இயலும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு தனி நபரின் இரத்த அழுத்தம் மற்றும் கொழுப்பு ஒரே நேரத்தில் கணக்கிடப்படுகிறது. இந்த நிலையில் இருமாறி வாய்ப்பு மாறிகள் தேவைப்படுகின்றன, இது(X, Y) எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. இதில் X மற்றும் Y என்பன தனித்த வாய்ப்பு மாறிகளாகும்

9.5.1 வரையறை (இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச்சார்பு)

(X, Y) என்பது ஒரு தனித்த இருமாறி வாய்ப்பு மாறியாகும். $p\,(x, y)$ ஒரு இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு எனில் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யும்.

$$p\,(x, y) \geq 0 \quad \forall\ x, y$$

$$\sum_{x,y} p(x,y) = 1$$

குறிப்பு

$p\,(x, y) = p\,(X = x, Y = y)$

வரையறை:

இறுதிநிலை நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு $p\,(x, y)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஓர் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு எனில் $\sum_{y} p(x,y)$ என்பது X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு எனப்படும். இதேபோல் $p\,(y) = \sum_{x} p(x,y)$ என்பது Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு எனப்படும்.

ஒரு பையில் 1 முதல் 10 வரையுள்ள எண்கள் கொண்ட சீட்டுகள் உள்ளன. ஒன்றன்பின் ஒன்றாக திரும்ப வைக்கும் முறையில் இரண்டு சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

இங்கு வாய்ப்புமாறி X என்பது முதல் சீட்டில் தோன்றும் எண்ணையும் வாய்ப்பு மாறி Y என்பது இரண்டாவது சீட்டில் தோன்றும் எண்ணையும் குறிக்கும்

9.5.2 இணைந்த மற்றும் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$9.5.1$ இல் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு வரையறைப்படியே இணைந்த நிகழ்தகவு

அடர்த்திச் சார்பு வரையறுக்கப்படும்.

வரையறை:

(X, Y) என்பது ஒரு தொடர் இருமாறி வாய்ப்பு மாறியாகும். $f(x, y)$ சார்பு இருமாறி நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் கீழ்க்காணும் நிபந்தனை நிறைவு செய்யும்

(i) $f(x, y) \geq 0 \quad \forall\ x, y$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$

X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$$

Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$$

எடுத்துக்காட்டு 9.14

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & , \quad 0 < x, y \leq 2 \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases}$$ ஓர் இருமாறி நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என நிறுவுக.

தீர்வு:

f ஓர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2 (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int_0^2\int_0^2 x\,dx\,dy + \int_0^2\int_0^2 y\,dx\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\int_0^2\left[\int_0^2 x\,dx\right]dy + \int_0^2\left[\int_0^2 y\,dy\right]dx\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int_0^2 2\,dy + \int_0^2 2\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(2y)_0^2 + (2x)_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{8}[(4-0)+(4-0)]$$

$$= \frac{1}{8} \times 8 = 1$$

$\therefore\ f(x, y)$ ஓர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.15

X, Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y & , \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0 & , \quad \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$ எனில் x மற்றும் y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு காண்க.

தீர்வு:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$f(x) = \int_{1}^{2} x^2 y\, dy$$

$$= x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = x^2 \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= x^2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} x^2$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

$$f(y) = \int_{0}^{1} x^2 y\, dy$$

$$= y\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y}{3}$$

X இன் இறுதி நிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} x^2 & , \quad 0 \le x \le 1, \\ 0 & , \quad \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$$

Y இன் இறுதி நிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{3} & , \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & , \quad \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.16

X, Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு

$f(x, y) = \begin{cases} 4x - 2y & , \quad 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2 \\ 0 & , \quad elsewhere \end{cases}$ X, Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு காண்.

தீர்வு:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

$$f(x) = \int_{1}^{2} (4x - 2y)dy$$

$$= \left[4xy - \frac{2y^2}{2}\right]_1^2$$

$$= [4x(2-1) - (4-1)] = 4x - 3$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

$$f(y) = \int_{1}^{3} (4x - 2y)dx$$

$$= \left(\frac{4x^2}{2} - 2xy\right)_1^3$$

$$= \left(2x^2 - 2xy\right)_1^3$$

$$= [2(9-1) - 2y(3-1)]$$

$$= 2 \times 8 - 6y + 2y$$

$$= 16 - 4y$$

X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & , \ 1 \le x \le 3 \\ 0 & , \ \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$$

Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = \begin{cases} 16 - 4y & , \ 1 \le y \le 2 \\ 0 & , \ \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$$

9.6 கணித எதிர்பார்ப்பு

நிகழ்தகவு பரவல் ஒரு வாய்ப்பு மாறியில் பெறும் மதிப்புகளையும் அவை பெறும் நிகழ்தகவுகளையும் விளக்குகிறது எனினும், நிகழ்தகவு பரவலை, மையஅளவைகள், சிதறல்கள், சமச்சீர்தன்மை மற்றும் தட்டையளவுகளைக் கொண்டு விவரிப்பது தேவையாகிறது. அவை கருத்து அளவைகள் அல்லது விளக்க அளவைகள் எனப்படுகின்றன. நிகழ்வெண் பரவலைப் போலவே நமக்குக் கிடைக்கப் பெற்ற நிகழ்தகவு பரவலின் பண்புகளை விவரிப்பது அத்தியாவசியமாகிறது. இப்பகுதி கருத்தளவைகள் எவ்வாறு கணக்கிடப்படுகின்றன என்பதைக் கவனமாக எடுத்துரைக்கிறது. கணக்கிடுவதற்காக மூன்று அணுகுமுறைகள் உள்ளன. அவை

(i) நேரடிமுறை, (சராசரி மற்றும் மாறுபாடு)

(ii) விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

(iii) சிறப்பியல்பு சார்பு.

9.6.1 தனித்த வாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்ப்பு

X என்பது ஒரு தனித்த வாய்ப்பு மாறி, மதிப்புகள் $x_1, x_2 \ldots.. x_n$ என்றும் அதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் $p_1, p_2 \ldots.. p_n$ எனில் கணித எதிர்பார்த்தல் $E(X)$ என்பது

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad \text{where } \sum p_i = 1$$

X இன் கணித எதிர்பார்த்தல் $E(X)$ என்பது கூட்டு சராசரி எனப்படும்.

நிரூபணம்:

X இன் ஒரு சார்பு$g(X)$ எனில் $E\ g(X) = \sum g(x)p(X = x)$

பண்புகள்:

(i) $E(c) = c$, c ஓர் மாறிலி

நிரூபணம் : வரையறையின்படி

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$E(c) = \sum c p_i = c \sum p_i = c \times 1 = c$$

(ii) $E(cX) = cE(X)$, c ஓர் மாறிலி

நிரூபணம்:

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$E(X) = \sum c x_i p_i$$

$$= c \sum x_i p_i$$

$$= c\ E(X).$$

(iii) $E(aX+b) = aE(X)+b$

தனித்த வாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாடு

நிகழ்தகவு பரவலில், மாறுபாடு என்பது ஒரு வாய்ப்பு மாறி மற்றும் கூட்டு சராசரியிலிருந்து

பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி எனப்படும். குறியீட்டின்படி

மாறு $(X) = E(X - E(X))^2$

$= E(X^2) - (E(X))^2$

எடுத்துக்காட்டு 9.17

ஒரு பகடை உருட்டப்படுகிறது. ஒரு பகடையில் தோன்றும் எண் எனில், $E(X)$, $E(X^2)$ மற்றும் மாறு(X) காண்க.

தீர்வு:

X பகடையில் தோன்றும் எண்

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ மற்றும் விளைவுகள் அனைத்திற்கும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும்.

நிகழ்தகவு பரவல்

X	1	2	3	4	5	6
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \Sigma x_i p_i$$

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_6 p_6$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \ldots + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = \Sigma x_i^{\,2} p_i$$

$$E(X^2) = x_1^{\,2} p_1 + x_2^{\,2} p_2 + \ldots + x_6^{\,2} p_6$$

$$E(X^2) = \left(1^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{6}\right) + \ldots \left(6^2 \times \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)$$

$$= \frac{1}{6}(91) = \frac{91}{6}$$

மாறு $(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4}$$

$$\text{மாறு}(X) = \frac{35}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.18

வாய்ப்பு மாறி X இன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 5 மற்றும் 4 எனில் $E(X^2)$ காண்க.

தீர்வு:

$$E(X) = 5 \quad \text{மற்றும்} \quad \sigma = 4$$

$$\therefore \quad \text{மாறு}(X) = 16$$

வரையறையின்படி,

$$\text{மாறு}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$16 = E(X^2) - (5)^2$$

$$E(X^2) = 25 + 16 = 41$$

எடுத்துக்காட்டு 9.19

ஒரு நபர் இரு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டுகிறார். இரு தலைகள் விழுந்தால் அவருக்கு ₹ 4உம் ஒரு தலை விழுந்தால் ₹ 2–ம் கிடைக்கிறது. ஆனால் இரண்டுமே பூ விழுந்தால் அவருக்கு ₹ 3 இழப்பாகிறது. அவரின் எதிர்பார்க்கப்படும் இலாபம் காண்?

தீர்வு:

வாய்ப்பு மாறி X என்பது வெற்றி பெற்றால் கிடைக்கும் தொகை

X க்கு வாய்ப்புள்ள மதிப்புகள் 4, 2 மற்றும் -3

$P(X = 4) = \text{P(இரண்டு தலைகள் விழுதல்)} = \frac{1}{4}$

$P(X = 2) = \text{P(ஒரு தலை விழுதல்)} = \frac{1}{2}$

$P(X = 3) = \text{P(இரு பூ விழுதல்)} = \frac{1}{4}$

x இன் நிகழ்தகவு பரவல்

X	4	2	-3
$P(\mathbf{X}=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

$$E(X) = 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{4} = 1.25$$

எடுத்துக்காட்டு 9.20

X என்ற தனித்த வாய்ப்பு மாறி கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவு பரவலைக் கொண்டிருக்கிறது எனில் சராசரி, மாறுபாடு காண்.

X	-3	6	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

தீர்வு:

$$\text{சராசரி} = E(X) = \sum x_i p_i$$

$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

$$= -3 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{11}{2}$$

$$E(X^2) = \sum x_i{}^2 p_i$$

$$= x_1{}^2 p_1 + x_2{}^2 p_2 + x_3{}^2 p_3$$

$$= \left(-3^{2\times}\frac{1}{6}\right) + \left(6^{2\times}\frac{1}{2}\right) + \ldots\left(9^{2\times}\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{2} + 18 + 27$$

$$= \frac{93}{2}$$

$$\text{Van}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{93}{2} - \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$= \frac{93}{2} - \frac{121}{4}$$

$$= \frac{186 - 121}{4}$$

$$= \frac{65}{4}$$

$$\text{சராசரி} = \frac{11}{2},$$

$$\text{மாறுபாடு}(X) = \frac{65}{4}$$

9.6.2 தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்ப்பு

X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$ எனில் X இன் கணித எதிர்பார்ப்பு E (X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \text{ ஐ தொகையிடல் இருக்கும் எனில்}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

குறிப்பு

வாய்ப்பு மாறி ஓ இன் சார்பு $g(X)$ மற்றும் $E[g(X)]$ இருக்கும் எனில்

முடிவுகள் :

(1) $$E(c) = c, \quad c \text{ ஓர் மாறிலி}$$

நிரூபணம் :

வரையறையின்படி,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= c \times 1 = c \qquad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\right)$$

(2) $$E(aX) = a\,E(X)$$

நிரூபணம் :

$$E(aX) = \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$= a\,E(X)$$

எடுத்துக்காட்டு 9.21

X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$$ சராசரியும் மாறுபாடும் காண்க

தீர்வு:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{2} x\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^3/3\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\ [\frac{8}{3} - 0\ ]$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ \left[x^4/4\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{8}\ [16\text{-}0]$$

$$= 2$$

குறிப்பு

கீழ்க்காணும் முடிவுகள் தனித்த மற்றும் தொடர் வாய்ப்பு மாறிகளுக்கு உண்மையாகும்.

(i) $E\ (\ 1/X) \neq 1/\ E(X)$

(ii) $E\ [\log\ (X)] \neq \log E\ (X)$

(iii) $(E\ (X^2) \neq [E(X)]^2$

மாறுபாடு $(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= 2 - (\frac{4}{3})^2$$

$$= 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

இது வரையில் நாம் ஒரு வாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்பதைப் பற்றி தெரிந்து கொண்டோம். ஆனால் ஒரு சில இடங்களில் நாம் X மற்றும் Y யிற்கிடையேயான நேரிய தொடர்பு எடுத்துக்காட்டாக $(aX + \ bY)$ அல்லது $(cX \times \ dY)$ அல்லது அதிகமான வாய்ப்பு மாறிகளுக்கு எதிர்பார்ப்பு காண வேண்டும். இந்த சூழ்நிலையில் பயன்படுத்தப்படும் சில தேற்றங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

9.6.3 சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள்

X , Y என்ற வாய்ப்பு மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவலை X மற்றும் Y வாய்ப்பு மாறிகளின் இறுதி நிலை நிகழ்தகவுப் பரவல்களின் பெருக்குத் தொகையாக எழுத முடியுமானால் இரு வாய்ப்பு மாறிகளும் சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

அதாவது $f\ (x,y) = g(x)\ h(y)$

இங்கு $g(x)$ X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவுப் பரவல்

$h(y)$ Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவுப் பரவல்

9.7 கணித எதிர்பார்ப்பின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் தேற்றம்

9.7.1 கணித எதிர்பார்ப்பின் கூட்டல் தேற்றம்

1. தனித்த வாய்ப்பு மாறி

X மற்றும் Y என்பன வாய்ப்பு மாறிகளாயின்

$$E\,(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

நிரூபணம்

X என்ற வாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் $x_1, x_2 \dots x_n$ என்றும் அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் p_1, $p_2 \dots . p_n$ என்றும் X என்ற வாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் $y_1, y_2 \dots \dots y_m$ அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் $p_1, p_2 \dots . p_m$ எனவும் கொள்வோம்.

வரையறையின்படி,

$$E\,(X) = \sum \; x_i p_i \qquad \text{இங்கு } \sum p_i = 1$$

$$E(Y) = \sum \; y\,jpj \qquad \sum p_j = 1$$

$$E\,(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_i + y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}x_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i + y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ij}y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} \; y_j p_j$$

$$= E(X) + E(Y)$$

2. தொடர் வாய்ப்பு மாறி

X மற்றும் Y என்பன தொடர் வாய்ப்பு மாறிகள் மற்றும் அவற்றின் நிகழ்தகவு பரவல்கள் முறையே $f(x), f(y)$ எனில் $E\,(X + Y) = E(X) + E(Y)$

நிரூபணம்:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \qquad \text{மற்றும்}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy$$

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)f(x, y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy$$

$$= E\,(X) + E\,(Y)$$

$$E\,(aX + b) = a\,E\,(X) \pm b$$

$$E\,(aX \pm b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax \pm b) f(x)\,dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \pm b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= a\,E\,(X) \pm b \times 1 \qquad \text{as} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$= a\,E\,((X) \pm b)$$

குறிப்புரை:

1. **கூற்று:** $E\,(aX+b) = aE(X)+b$ இங்கு a, b மாறிலிகள்

நிரூபணம்: $E(aX+b) = E(aX)+E(b)$ பண்பு 3

$= aE(X)+b$ பண்பு 2

இது போன்றே $E(aX-b) = aE(X)-b$

2. **கூற்று:** $E\left(\frac{ax+b}{c}\right) = \frac{[aE(x)+b]}{c}$

நிரூபணம்: $E\frac{(aX+b)}{c} = \frac{E(aX+b)}{c}$

$= \frac{[aE(x)+b]}{c}$

3. **கூற்று:** $E\,(X - \overline{X}) = 0$

நிரூபணம்: $E\,(X - \overline{X}) = E(X) - E(\overline{X})$ ஏனெனில் $E(X) = \overline{X}$

$= \overline{X} - \overline{X} = 0$ $\overline{X}$ ஒரு மாறிலி

எடுத்துக்காட்டு 9.22

இரு பகடைகள் வீசும்பொழுது, பகடையில் தோன்றும் எண்களின் கூடுதலின் எதிர்பார்ப்பு காண்.

தீர்வு:

வாய்ப்பு மாறிகள் X மற்றும் Y முதல் மற்றும் இரண்டாம் பகடையில் தோன்றும் எண்களைக் குறிக்கும் இரண்டு வாய்ப்பு மாறிகளின் விளைவுகள் $1, 2, 3, 4, 5, 6$ மற்றும் அவை ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும்

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+.....+6\times\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

இதேபோல், ,

$$E(Y) = \frac{7}{2}$$

இரு பகடைகளில் தோன்றும் எண்களின் கூடுதலின் எதிர்பார்ப்பு வாய்ப்பு மாறி $X+Y$ பெறும் மதிப்புகள் $2, 3\ldots12$.

நிகழ்தகவு பரவல்

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X+Y) = 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+\ldots+12\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7$$

$$E(X)+E(Y) = \frac{7}{2}+\frac{7}{2} = 7$$

$$\therefore \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

எடுத்துக்காட்டு 9.23

வாய்ப்பு மாறிகள் X மற்றும் Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு பரவல்

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

வாய்ப்பு மாறி X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

வாய்ப்பு மாறி Yஇன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு சார்பு

$$g(y)=\begin{cases}2y, & 0\le x\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$ எனில் $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

தீர்வு:

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (x+y)4xy\,dxdy$$

$$= 4\left[\int_0^1\int_0^1 x^2y\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 xy^2\,dx\,dy\right]$$

$$= 4\left[\int_0^1\left(\int_0^1 x^2\,dx\right)ydy + \int_0^1\left(\int_0^1 y^2\,dy\right)xdx\right]$$

$$= 4\left[\int_0^1 \frac{1}{3}y\,dy + \int_0^1 \frac{1}{3}x\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left[\int_0^1 y\,dy + \int_0^1 x\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{4}{3} \qquad \ldots (1)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\times 2x\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx$$

$$E(X) = 2\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy = \int_0^1 y\times 2y\,dy$$

$$= 2\int_0^1 y^2\,dy$$

$$E(Y) = 2\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$E(X)+E(Y) = \frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

9.7.2 கணித எதிர்பார்ப்பின் பெருக்கல் தேற்றம்

தனித்த வாய்ப்பு மாறி :

தேற்றம்: X மற்றும் Y என்பன சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில் $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

நிரூபணம்:

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i p_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_i p_i\right)$$

$$= E(X)\,E(Y)$$

X மற்றும் Y சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில் $P_{ij} = p_i p_j$

தொடர் வாய்ப்பு மாறி:

தேற்றம்: X மற்றும் Y என்பன சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில் $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

நிரூபணம்:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy$$

$$= E(X)\,E(Y)$$

எடுத்துக்காட்டு 9.24

இரு நாணயங்கள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக சுண்டப்படுகிறது. முதலில் சுண்டப்படுதல் வாய்ப்பு மாறி X எனவும் இரண்டாவது சுண்டுதல் வாய்ப்பு மாறி Y எனவும் கொண்டால் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச்சார்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

Y \ X	1	0	மொத்தம்
1	0.25	0.25	0.5
0	0.25	0.25	0.5
மொத்தம்	0.5	0.5	1

[தலை விழுந்தால் 1 எனவும் பூ விழுந்தால் 0 எனவும் கொள்க]

$E(XY) = E(X)\,E(Y)$ என நிறுவுக

தீர்வு:

வாய்ப்பு மாறி $X\ Y$ எடுக்கும் மதிப்புகள் 0 மற்றும் 1

$$E(XY) = \Sigma \Sigma xy\, p(x,y)$$

$$= 1 \times 0.25 + 0 \times 0.25 + 0 \times 0.25 + 0 \times 0.25$$

$$= 0.25$$

$$E(X) = \Sigma x\, p_i$$

$$= 1 \times 0.5 + 0 \times 0.5$$

$$= 0.5$$

$$E(Y) = \Sigma y\, p_j$$

$$= 1 \times 0.5 + 0 \times 0.5 = 0.5$$

$$E(X) \times E(Y) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

[X மற்றும் Y சார்பிலா மாறிகளாக இருந்தால் மட்டுமே பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.25

X மற்றும் Y என்பன சார்பிலா இரு வாய்ப்பு மாறிகள், எனில் அவற்றின் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 4ax, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 4by, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$E(XY) = E(X)\, E(Y)$ என நிறுவுக

தீர்வு:

X மற்றும் Y என்பன சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில்

$$f(x,y) = f(x) \times f(Y)$$

$$f(x,y) = 4ax \times 4by$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 16abxy, & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y) dxdy$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} xy \times 16abxydxdy$$

$$= 16ab \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{1} x^2\, dx \right] y^2\, dy$$

$$= 16ab \int_{0}^{1} \frac{1}{3} y^2\, dy$$

$$= 16ab \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16ab}{9} \qquad \ldots 1$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} x \times 4ax\, dx = 4a \int_{0}^{1} x^2\, dx$$

$$= 4a\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4a}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\, dy$$

$$= \int_{0}^{1} y \times 4by\, dy$$

$$=4a \int_{0}^{1} y^2\, dy$$

$$=4b\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{b}$$

$$E(X)\, E(Y) = \frac{4a}{3} \times \frac{4b}{3}$$

$$= \frac{16ab}{9} \qquad \ldots 2$$

(1), (2) லிருந்து

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

9.8 விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

நிகழ்தகவு பரவலின் அளவைகள் காண மற்றொரு முறை விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். நாம் இரு வகையான விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை விவரிக்கலாம்.

(i) ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கப்பெருக்குத்தொகை (ஆதி என்பது 0 வாகவோ மற்ற எண்ணாகவோ (A) இருக்கலாம்.

(ii) மைய விலக்கப்பெருக்குத்தொகை

9.8.1. ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

வரையறை:

X என்பது வாய்ப்பு மாறி, ஒரு மிகை முழுஎண் r ($r = 1, 2, \ldots$) இன் r ஆவது ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கப்பெருக்குத்தொகை ஆனது (ஆதி 0) '0' is $\mu'_r = E(X^r) = \sum x_i^{\,r}\ p_i$

ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட முதல் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை

வரையறையில் $r = 1$ எனில்

$$\mu'_1 = E(X) = \sum x_i\, p_i = \overline{X}$$

இது வாய்ப்பு மாறி X இன் சராசரி ஆகும். அதாவது ஆதியானது பெறப்பட்ட முதல் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை சராசரியாகும். ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட இரண்டாம் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை

வரையறையில் $r = 2$ எனில்

$$\mu'_2 = E(X^2) = \sum x_i^2 p_i$$

இது ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட இரண்டாம் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை எனப்படும்.

9.8.2. மைய விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

வரையறை:

X என்பது வாய்ப்பு மாறி, ஒரு மிகை முழு எண் r, ($r = 1, 2, \ldots$), X இன் r ஆவது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை ஆனது $\mu_r = E\,(X - \overline{X}\,)^r$

முதல் மைய விலக்கப்பெருக்குத்தொகை வரையறையில் r = 1 எனில்

$$\mu_1 = E\ (X - \overline{X}\,) = 0 \ \text{(எப்போதும்)}$$

குறிப்புரை:

சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் கூடுதல் பூஜ்ஜியமாகும்.

இரண்டாம் மையவிலக்கப் பெருக்குத்தொகை வரையறையில் $r = 2$ எனில்

$$\mu_2 = E\,(X - \overline{X}\,)^2$$

$$= E(X^2 - 2X \times \overline{X} + \overline{X}^2)$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(\overline{X}) + E(\overline{X})^2$$

$$= E(X^2) - 2\overline{X}\,\overline{X} + (\overline{X})^2$$

$$= E(X^2) - (\overline{X})^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$ இங்கு $\overline{X}$ மாறிலி மற்றும் $E(X) = \overline{X}$

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட 2ஆவது மைய விலக்கப்பெருக்குத்தொகை வாய்ப்பு மாறி X இன் மாறுபாடு ஆகும்.

மாறுபாடு = மாறு (X) $= \mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$

திட்டவிலக்கம் (S.D) = $\sigma = \sqrt{\text{மாறுபாடு}}$

சில குறிப்பிட்ட முடிவுகள் (மாறுபாடு):

(i) மாறு $(c) = 0$ i.e. மாறிலியின் மாறுபாடு பூஜ்ஜியம்

(ii) c என்பது மாறிலி எனில் மாறு $(cX) = c^2$ மாறு(X)

(iii) X என்பது வாய்ப்பு மாறி மற்றும் c என்பது மாறிலி எனில் மாறு $(X \pm c)$ = மாறு (X)

(iv) a மற்றும் b என்பது மாறிலி எனில் மாறு $(aX \pm b) = a^2$ மாறு (X)

(v) a மற்றும் b என்பது மாறிலி எனில் மாறு $(a \pm bX) = b^2$ மாறு (X).

(vi) X, Y ஆனது சார்பிலா வாய்ப்பு மாறி எனில் மாறு $(X + Y)$ = மாறு (X) + மாறு(Y)

(vii) X, Y ஆனது சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில் மாறு $(aX + bY) = a^2$ மாறு $(X) + a^2$ மாறு(Y)

9.8.3. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு (M.G.F.)

வரையறை:

வாய்ப்பு மாறி X இன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு $M_x(t)$

$$M_x(t) = E(e^{tx}), \quad |t| < 1$$

(i) $M_x(t) = \sum (e^{tx})\, p(x)$ தனித்த வாய்ப்பு மாறி

(ii) $M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$ தொடர் வாய்ப்பு மாறி

வாய்ப்பு மாறி X இன் ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட பெருக்குத்தொகை காண விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு பயன்படுகிறது.

$$E(X^r) = M_x^r(t) \text{ at } t=0 \; M_x^r(t)$$

$M_x^r(t)$ என்பது $M_x(t)$ இன் r ஆவது வகையிடல் ஆகும்

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

ஆதியில் r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை காணல்

$$M_x(t) = E(e^{tX})$$

$$= E\left[1 + \frac{tX}{1!} + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \ldots + \frac{(tX)^r}{r!} + \ldots\right]$$

$$= 1 + \frac{E(tX)}{1!} + \frac{E(tX)^2}{2!} + \frac{E(tX)^3}{3!} + \ldots + \frac{E(tX)^r}{r!} + \ldots$$

$$= 1 + t\frac{E(X)}{1!} + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \ldots + \frac{t^r E(X^r)}{r!} + \ldots$$

$$= 1 + t\mu'_1 + t^2\frac{\mu'_2}{2!} + \ldots + t^r\frac{\mu'_r}{r!} + \ldots$$

$$M_x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r \frac{\mu'_r}{r!}$$

விலக்கப்பெருக்குத்தொகை M_x (t) இல் $\frac{t^r}{r!}$ இன் குணகம் μ_r' ஆகும். M_x (t) விலக்கப்பெருக்குத் தொகையை உருவாக்குவதால், விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு எனப்படுகிறது.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பினைப் பயன்படுத்தி சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டை, முதல் மற்றும் இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையிலிருந்து பெறலாம்.

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

9.8.4. சிறப்பியல்புச் சார்பு

எல்லாப் பரவல்களுக்கும் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு காண இயலாது. இந்நிலையில் சிறப்பியல்புச் சார்பு அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

வரையறை:

X என்ற வாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ எனில் சிறப்பியல்புச் சார்பு $\phi_x(t)$, இங்கு $\phi_x(t) = E(e^{itX})$

பின்னர் $\phi_x(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$, (தொடர் பரவல்)

$\phi_x(t) = \sum_e^{itx} p(x)$, (தனித்த பரவல்) , இங்கு $i = \sqrt{-1}$

நினைவில் கொள்க...

- வாய்ப்பு மாறி என்பது கூறுவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் மெய் மதிப்புகளை எடுக்கும் சார்பாகும்.
- வீச்சைப் பொறுத்து வாய்ப்பு மாறி வகைப்படுத்தப்படுகிறது.
- நிகழ்தகவு சார்பு வீச்சினைக் கொண்டு ஒரு புள்ளியிலோ அல்லது இடைவெளியிலோ நிகழ்தகவைக் காணப் பயன்படுகிறது.
- குவிவு பரவல் சார்பு வீச்சின் உட்கணத்தின் நிகழ்தகவைக் காண உதவுகிறது.
- நிகழ்தகவுப் பரவலின் சுருக்க அளவைகளான சராசரி மற்றும் மாறுபாடு ஆகியவை இருவிதமான வழிகளில் (i) எதிர்பார்ப்பு (ii) விலக்கப்பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு கொண்டு கணக்கிடப்படுகிறது.

6G973I

பயிற்சி

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. $f(x)=\begin{cases}kx^2 & 0\le x\le 3\\ 0 & elsewhere\end{cases}$ ஓர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் K இன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{1}{12}$

2. ஒரு வாய்ப்பு 2மாறியின் நிகழ்தகவு பரவல்

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$\frac{1}{4}$

எனில் $P(1\le X\le 4)$ இன் மதிப்பு

(a) $\frac{10}{21}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{14}$

3. X என்பது தனித்த வாய்ப்பு மாதிரி பெறும் மதிப்புகள் 0, 1, 2 மற்றும் $P(X=0)=\frac{144}{169}$ எனில் $P(X=1)=\frac{1}{169}$, $P(X=2)=K$ எனில், K இன் மதிப்பு

(a) $\frac{145}{169}$ (b) $\frac{24}{169}$ (c) $\frac{2}{169}$ (d) $\frac{143}{169}$

4. $E(X+C)=8$ மற்றும் $E(X-C)=12$ எனில் C இன் மதிப்பு

(a) -2 (b) 4 (c) -4 (d) 2

5. வாய்ப்பு மாறி X இன் மாறுபாடு 4 மற்றும் சராசரி 2 எனில் $E(X^2)$

(a) 8 (b) 6 (c) 4 (d) 2

6. மாறு $(4X+3)$ =

(a) 7 மாறு (X) (b) 16 மாறு (X) (c) 256 மாறு X (d) 0

7. இரண்டாம் மையவிலக்கப் பெருக்குத்தொகை என்பது

(a) சராசரி (b) திட்டவிலக்கம் (c) மாறுபாடு (d) இடைநிலை

8. மாறுபாடு = 20 ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை = 276, X இன் சராசரி

(a) 16 (b)5 (c)4 (d) 2

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

9. ஒரு மாறியில் பெறப்படும் மெய்எண்கள் வாய்ப்பு சோதனையின் விளைவுகளால் பெறப்பட்ட எண்களாக இருந்தால் ______________ என அழைக்கப்படுகிறது.

10. $F(X)$ என்பது ஒரு பரவல் சார்பானால் $F(-\infty)$ என்பது ______________

11. X ஓர் தொடர் வாய்ப்பு மாறி, a, b மாறிலிகள் மற்றும் $a \leq b$ எனில் $P(a \leq X \leq b)$ = ______________

12. தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் ஒரு புள்ளியில் காணும் நிகழ்தகவு ______________

13. ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, $F(X)$ என்பது அதன் குவிவு பரவல்சார்பு எனில் $F'(X)$ = ______________

14. f (x) ஓர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ ______________

15. X என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்த்தல் ______________ என அழைக்கப்படும்

III. குறு வினா (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி):

16. தனித்த மற்றும் தொடர் வாய்ப்பு மாறிக்கும் இடையேயான வேறுபாடு எழுதுக

17. நிகழ்தகவு திண்மைச்சார்பு மற்றும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு வேறுபடுத்தவும்.

18. தனித்த வாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்த்தலை வரையறுக்கவும்

19. விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பை எழுதுக.

20. தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் சிறப்பியல்பு சார்பினை எழுதுக.

21. X இன் நிகழ்தகவு பரவல் பின்வருமாறு

X	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$3a$	$4a$	$6a$	$7a$	$8a$

'a' இன் மதிப்பைக் காண்க

22. $f(x) = 5x^4$, $0<x<1$ என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாகுமா?

23. வாய்ப்பு மாறி X இல் $E(X)=\frac{1}{2}$, $E(X^2)=\frac{1}{2}$ திட்டவிலக்கம் காண்.

III. குறு வினா (ஓரிரு சொற்றொடர்களில் விடையளி):

24. பரவல் சார்பின் பண்புகளை எழுதுக.

25. மூன்று பகடைகள் ஒருமுறை வீசப்படும்பொழுது 6 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு பரவலைக்காண்.

26. ஒரு பெட்டியில் 6 சிவப்பு மற்றும் 4 வெள்ளைப் பந்துகள் உள்ளன. ஒரே நேரத்தில் மூன்று பந்துகள் வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன எனில் வெள்ளைப் பந்துகள் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் காண்.

27. வாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & -2<x<2 \\ 0 & \text{elsewhere (வேறிடங்களில்)}\end{cases}$$

(i) $P(-1<X<2)$ (2) $P(X>1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

28. ஒரு சீரான பகடையை வைத்து ஒரு விளையாட்டு விளையாடப்படுகிறது. ஒருவருக்கு பகடையின் மேல் 2 விழுந்தால் ரூ. 20 இலாபமும் பகடையின் மேல் 4 விழுந்தால் ரூ. 40 இலாபமும் பகடையின் மேல் 6 விழுந்தால் ரூ.30 இழப்பும் அடைகிறார். வேறு எந்த எண் விழுந்தாலும் இலாபமும் இழப்போ கிடையாது. அவர் அடையும் எதிர்பார்ப்பு யாது?

IV. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விரிவான விடை தருக:

29. ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திசார்பு

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3x(2-x)}{4} & 0<x<2 \\ 0 & \text{elsewhere (வேறிடங்களில்)}\end{cases}$$

எனில் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்

30. x என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திசார்பு

$$f(x)=\begin{cases}\frac{k(1-x^2)}{4} & 0<x<1 \\ 0 & \text{elsewhere (வேறிடங்களில்)}\end{cases}$$

K மற்றும் $E(X)$ காண்க.

31. இரண்டு சீரான பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. பகடையில் மேல் எண்களின் கூடுதலின் எதிர்பார்ப்பு காண்

32. X இன் நிகழ்தகவு பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

X	-2	3	1
$P(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(2X+5)$ இன் மதிப்பு காண்

33. மூன்று நாணயங்கள் சுண்டும் பொழுது தலை விழுவதற்கான எண்ணிக்கையின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்

34. ஒரு வாய்ப்பு மாறி பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலை பெற்றிருக்கிறது.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(x)$	a	$3a$	$5a$	$7a$	$9a$	$11a$	$13a$	$15a$	$17a$

(i) a (ii) $P(X<3)$ (iii) $P(X\geq5)$ (iv) $P(3<X<7)$ காண்க.

35. 52 சீட்டுகள் கொண்ட கட்டிலிருந்து இரண்டு சீட்டுகள் ஒன்றன் பின் ஒன்றாக திரும்ப வைக்கப்படும் முறையில் எடுக்கப்பட்டால் ஏஸ் சீட்டுகளின் எண்ணிக்கைக்கு சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்

36. ஒரு நுழைவுத் தேர்வில் ஒரு மாணவன் எல்லா 120 கேள்விகளுக்கும் விடையளிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு கேள்விக்கும் நான்கு விடைகள் உள்ளன. ஒருசரியான விடைக்கு 1 மதிப்பெண் பெறமுடியும். தவறான விடைக்கு 1/2 மதிப்பெண் இழக்க நேரிடும். ஒவ்வொரு கேள்விக்கும் சமவாய்ப்பு முறையில் விடையளித்தால் அம்மாணவன் பெறும் மதிப்பெண்ணின் எதிர்பார்ப்பு என்ன?

37. ஒரு பெட்டியில் 8 பொருட்களுடன் இரண்டு குறைபாடுள்ள பொருட்களும் உள்ளன. இதிலிருந்து மூன்று பொருட்கள் வாய்ப்பு முறையில் திரும்ப வைக்காமல் எடுக்கப்படுகின்றன எனில், குறைபாடுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையின் சராசரி காண்க

38. ஒரு பெட்டியில் 4 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்பு பந்துகளும் உள்ளன. 3 பந்துகளை ஒவ்வொன்றாக எடுக்கும் போது சிவப்பு நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுப் பரவல் காண்க

(i) மாறும்பொழுது (ii) மாறாத பொழுது

39. X, Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு பின்வருமாறு

X \ Y	1	3	9
2	0.1	0.1	0.05
4	0.2	0	0.1
6	0.1	0.15	K

(i) K (ii) $E(X+Y)$ காண்

40. கீழ்க்காணும் X, Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பிற்கு $E(3X)$ மற்றும் $E(4Y)$

X \ Y	1	2	3
−5	0	0.1	0.1

0	0.1	0.2	0.2
5	0.2	0.1	0

விடைகள்:

I. 1. *c*. 2. *c* 3. *b* 4. *a* 5. *a* 6. *b* 7. *c* 8. *a*

II. 9. வாய்ப்பு மாறி 10. 0 11. $F(b) - F(a)$ 12. 0 13. $f(x)$

14. $E(X)$ 15. கூட்டுச்சராசரி

III. 21. $\frac{1}{28}$ 23. $\frac{1}{2}$

IV. 25.

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

26.

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

27. $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ 28. 5

V. 29. $1, \frac{1}{5}$ 30. $\frac{3}{2}$ 31. 7 32. 7

33. $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ 34. $\frac{1}{81}, \frac{1}{9}, \frac{56}{81}, \frac{11}{27}$

35. $\frac{2}{13}, \frac{24}{169}$ 36. -15 37. $\frac{3}{4}$

38. (i)

(ii)

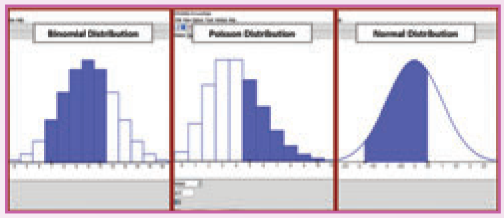
X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

39. 0.2, 8.7 40. 0.5, 2.0

இணையச்செயல்பாடு

கோட்பாட்டுப் பரவல்கள்

கோட்பாட்டுப் பரவல்களை அறிவோமா !



படிகள்

1. கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க. "11th Standard Statistics" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகத்தில் "Probability Calculator" க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்

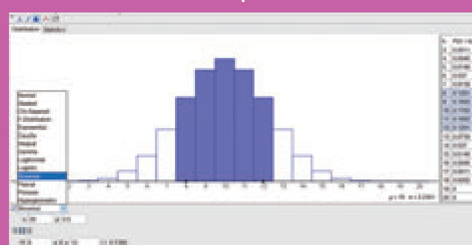
2. இடப்பக்கத்தில் உள்ள பட்டியலில் ஈருறுப்பு பரவல் (Binomial) –ஐத் தேர்வு செய்யவும். வலப்பக்கத்தில் பட்டியலும், மையத்தில் ஈருறுப்பு பரவலுக்கான செவ்வகப்படமும் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும். வலப்பக்கத்தில் உள்ள பட்டியலில் குறிப்பிட்ட தரவுகளைத் தேர்வு செய்தால் அவற்றின் நிகழ்தகவு கிடைக்கும்.

3. மேலும் இடப்பக்கத்தில் உள்ள பட்டியலில் பாய்சான் பரவல் (Poisson), மற்றும் இயல்நிலைப் பரவல்(Normal) ஆகியவற்றைத் தேர்வு செய்து கற்கவும்.

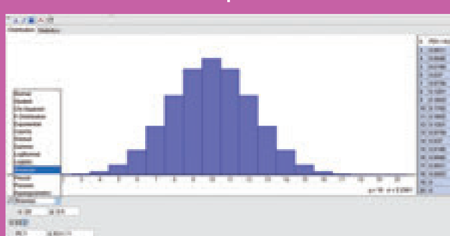
4. மேலும் இடப்பக்கத்தில் கீழே உள்ள மூன்று பட்டியல்களில் இடப்பக்க (அல்லது) மைய (அல்லது) வலப்பக்கத் தரவுகளை தட்டச்சு செய்து தேவையான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

படி 1

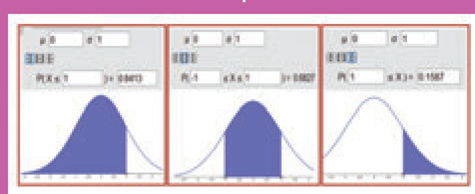
படி 2



படி 3



படி 4



* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

உரலி:

https://ggbm.at/uqVhSJWZ

B136_11_STA_TM

அத்தியாயம்

10

நிகழ்தகவு பரவல்கள்

ஜேக்கப் பெர்னோலி
(6 சனவரி 1655 – 16 ஆகஸ்ட் 1705)

ஜேக்கப் பெர்னோலி ஸ்விட்சர்லாந்தில், பேசல் என்ற ஊரில் பிறந்த கணிதவியலாளர் ஆவார். அவரது பெற்றோர் விருப்பத்திற்கு எதிராக கணிதமும் வானவியலும் கற்று பின்னாட்களில் பெரும் சாதனை புரிந்துள்ளார். 1676ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1682ஆம் ஆண்டுவரை ஐரோப்பா முழுவதும் பயனித்து அக்காலத்தில் உள்ள கணித கண்டுபிடிப்புகள் பலவற்றையும் கற்றறிந்தார்.

அவரது முதல் முக்கிய பங்களிப்பாக, அளவையியலும் இயற்கணிதமும் என்ற தலைப்பில் அறிக்கைக் குறிப்பாக 1685ஆம் ஆண்டு வெளியிட்டார். பிறகு நிகழ்தகவு பற்றியும் 1687ஆம் ஆண்டு வடிவியலில் சிலவற்றையும் வெளியிட்டார். ஜேக்கப் பெர்னோலியின் 1690 ஆம் ஆண்டு வெளியிடப்பட்ட கட்டுரையில் நுண்கணிதத்தின் வரலாறு பற்றியது மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும். அதில் தான் தொகையிடல் பற்றிய சொல் பொருளோடு பயன்படுத்தப்பட்டது. 1683ஆம் ஆண்டு கண்டுபிடித்த என்ற மாறிலி கூட்டுவட்டியுடன் தொடர்புடைய $(1 + 1/n)^{1/n}$ என்ற கோவை சார்ந்ததாகும் என்று கண்டறிந்தார்

'சிறந்த குடிமகனாக விளங்கும் ஒவ்வொருவரும் என்றாவது ஒரு நாள் படிப்பதிலும் எழுதுவதிலும் புள்ளியியல் சார்ந்த எண்ணங்களைப் பயன்படுத்தியே ஆக வேண்டும் என்ற நிலை வந்தே தீரும்'.
– எச்.ஜி.வெல்ஸ்

நோக்கங்கள்:

6GCTRF

- நிகழ்தகவுப் பரவலை அறிந்து கொள்ளுதல்
- தனித்த மற்றும் தொடர் பரவலை வேறுபடுத்துதல்
- ஈருறுப்பு மற்றும் பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்தி மதிப்புகளைக் காணல்
- சீரான மற்றும் இயல்நிலைப் பரவலைப் பயன்படுத்தி மதிப்புகளைக் கணக்கிடுதல்
- பொருத்துதலை வெவ்வேறு பரவல்களுக்கு உபயோகித்தல்

அறிமுகம்:

முந்தைய பாடங்களில், சில வாய்ப்பு மாறிகளுக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் அமைக்கும் முறைகளைக் கற்றோம். அப்பரவல்களில் நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் அவை இடம் பெறும் சோதனைகளைப் பொறுத்தே வாய்ப்பு மாறிகளின் மதிப்புகளைப் பெறமுடியும் என்பதை அறிந்தோம்.

இப்பாடத்தில் இன்னும் பல கருத்தியியல் பரவல்களைப் பற்றி கற்கப் போகிறோம். இப்பரவல்களில், நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை, சில நிபந்தனைகள் மற்றும் அனுமானங்களைக் கொண்டு பெறப்பட்ட சூத்திரத்தின்படி பெறுகிறோம். பல நிகழ்தகவு பரவல்கள் இருப்பினும், மிக முக்கியமான பரவல்கள் பெர்னௌலி, ஈருறுப்பு, பாய்சான், இயல்நிலை மற்றும் சீரான பரவல்கள் ஆகும்.

நடைமுறைச் சூழல்களில், வாய்ப்பு சோதனையின் சூழலை நன்குணர்ந்து, அதற்கு ஏற்ற நிகழ்தகவு பரவலைக் கண்டு தேவையானவற்றைப் பெறவேண்டும். நிகழ்தகவு பரவல்களில் இடம்பெறும் மையபோக்கு சிதறல் அளவைகள் மற்றும் சமச்சீர் தன்மை ஆகியவற்றைப் பற்றியும் கற்கவிருக்கிறோம்.

10.1 தனித்த பரவல்கள்.

10.1.1 பெர்னௌலின் பரவல்:

இது ஜேம்ஸ் பெர்னௌலி (1654–1705) என்ற ஒரு சுவிஸ் கணித வல்லுநரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இப்பரவல் ஒரே ஒரு முயற்சியைக் கொண்டுள்ளது. இம்முயற்சியில் வெற்றி, தோல்வி இரு விளைவுகள் மட்டுமே உள்ளது. வெற்றியின் நிகழ்தகவு p எனில் தோல்வியின் நிகழ்தகவு $q = 1 - p$ என்கிறோம்.

வரையறை:

ஒரு வாய்ப்பு மாறி ஒரு பெர்னௌலி பரவலைக் கொண்டு இருக்கிறது எனில் அதன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பானது.

$$P\,(X = x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

பெர்னௌலின் பரவலின் பண்புகள்:

(i) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 1

(ii) $q = 1 - p$

(iii) பரவலின் முக்கிய அளவைகள்

(iv) (i) சராசரி $= p$ (ii) மாறுபாடு $= pq$ (iii) திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{pq}$

10.1.2 ஈருறுப்பு பரவல்

அறிமுகம்:

ஜேம்ஸ் பெர்னௌலி ஈருறுப்பு பரவலை 1700 ஆம் வருடம் கண்டுபிடித்தார். ஆனால் அவர் இறந்து 8 வருடங்கள் கடந்தபின் 1713–ல் முதல் முறையாக வெளியிடப்பட்டது. சார்பற்ற n பெர்னௌலியின் பரவல்களின் கூடுதலே ஈருறுப்பு பரவல் எனப்படும்.

அதாவது n சார்பற்ற பெர்னௌலி சோதனையில் இருந்து கிடைக்கும் முடிவுகளின் தொகுப்பே ஓர் ஈருறுப்பு பரவலின் விளைவு ஆகும். இங்கு ஒவ்வொரு பெர்னௌலி பரவலில் p என்பது வெற்றியின் நிகழ்தகவு ஆகும். $q=1-p$ என்பது தோல்வியின் நிகழ்தகவு ஆகும்.

வரையறை:

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் வாய்ப்பு மாறி X இன் சார்பற்ற முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை n மற்றும் p என்பது ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் உள்ள வெற்றிக்கான நிலையான நிகழ்தகவு எனில், X ன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு

$$P(X=x)=\begin{cases} nC_x p^x q^{n-x} & for\ x=0,1,2,\dots n \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases} \qquad q=1-p$$

குறிப்பு:

(i) X என்பது ஓர் ஈருறுப்பு வாய்ப்பு மாறி எனில், $X\sim B(n,p)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

(ii) n,p என்பவை இப்பரவலின் பண்பளவைகள் ஆகும்

(iii) $(q+p)^n$ இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் இப்பரவலில் உள்ள நிகழ்தகவுகளின் மதிப்புகள் ஆகும்.

குறிப்பு:

நாணயங்களைச் சுண்டுதல், பகடை உருட்டுதல், திரும்ப வைக்கும் முறையில் சீட்டு கட்டுக்களை எடுத்தல் போன்ற கணக்குகள் ஈருறுப்புப் பரவல் சார்ந்த கணக்குகள் ஆகும்.

ஈருறுப்பு பரவலுக்கான நிபந்தனைகள்:

கீழ்க்கண்ட சோதனைகளின் நிபந்தனைகள்படி நாம் ஒரு ஈருறுப்பு பரவலைப் பெறுகிறோம்.

(i) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை n ஒரு முடிவுறு எண் ஆகும்.

(ii) ஒவ்வொரு முயற்சியும் மற்ற முயற்சிகளோடு சார்ந்ததல்ல.

(iii) ஒவ்வொரு முயற்சியும் மற்ற முயற்சிகளோடு சார்ந்ததல்ல.

(iv) ஒவ்வொரு முயற்சியும் ஒரு வெற்றியிலோ அல்லது ஒரு தோல்வியிலோ முடியும்.

ஈருறுப்பு பரவலின் பண்புகள்:

(i) ஓர் ஈருறுப்பு பரவல், ஒரு தனித்த வாய்ப்பு மாறியின் பரவல் ஆகும். ஏனெனில் X ஆனது $0, 1, 2, \ldots n$ என்ற மதிப்புகளை மட்டும் பெறுகிறது.

(ii) ஈருறுப்பு பரவலின் அளவைகள்

சராசரி $= np$; மாறுபாடு $= npq$; திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{npq}$

கோட்டளவை $= \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$; தட்டையளவை $= \dfrac{1-6pq}{npq}$

(iii) இது ஒன்று அல்லது இரண்டு முகடுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

(iv) $X \sim B(n_1, p)$) மற்றும் $Y \sim B(n_2, p)$ a எனில் X மற்றும் Y $X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$ ஆகும்

(v) `$n$' சார்பற்ற முயற்சிகளைக் கொண்ட ஓர் ஈருறுப்பு பரவல் சோதனை $N$ தடவைகள் திரும்பத் திரும்ப நடத்தப்பட்டால் X வெற்றிகள் கிடைக்க எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் மதிப்பு `x' $N \times nC_x \ p^x \ q^{n-x}$

(vi) $p = 0.5$, எனில் இப்பரவல் ஒரு சமச்சீர் பரவல் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.1

'ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 5 மற்றும் அதன் மாறுபாடு 9' என்ற கூற்றைப் பற்றிக் கருத்து கூறுக.

தீர்வு:

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் n மற்றும் p ஆகும்

சராசரி $np = 5$

மாறுபாடு $npq = 9$

$\therefore$ $\dfrac{\text{மாறுபாட்டின் மதிப்பு}}{\text{சராசரியின் மதிப்பு}} = \dfrac{npq}{np} = \dfrac{9}{5} \therefore q = \dfrac{9}{5} > 1$ சாத்தியமில்லை

$0 \leq q \leq 1$ என்றாகிறது. (1ஐ விட பெரியது)

எடுத்துக்காட்டு 10.2

பிழையற்ற எட்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன எனில் குறைந்தது ஆறு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு:

இதில் $n=8$ $p = P$ (தலை) $= \dfrac{1}{2}$ $q = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

இம்முயற்சி ஈருறுப்பு பரவலின் நிபந்தனையை பூர்த்தி செய்கின்றது.

$$P(X = x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \ldots\, n$$

$$= 8C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} \quad x = 0,1,2,\ldots.8$$

$$= 8c_x \left(\frac{1}{2}\right)^{x+8-x}$$

$$= 8C_x (\frac{1}{2})^8$$

$$\therefore P(X = x) = \frac{8C_x}{256}$$

P (குறைந்தது ஆறு தலைகள் கிடைப்பது)

$$= P\,(x \geq 6)$$

$$= P\,(x = 6) + P\,(x = 7) + P\,(x = 8)$$

$$= \frac{8C_6}{256} + \frac{8C_7}{256} + \frac{8C_8}{256}$$

$$= \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256}$$

$$= \frac{37}{256}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.3

பிழையற்ற பத்து நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. அவற்றில் (i) குறைந்தது 7 தலைகள் (ii) சரியாக 7 தலைகள் (iii) அதிகபட்சம் 7 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

X என்பது சோதனையின் முடிவில் உள்ள தலைகளின் எண்ணிக்கை என்க.

$$P\,(X = x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x},\ x= 0,1,2,\ldots n$$

தரவு $p = P$ (தலை) $= \frac{1}{2}$ $q = 1\ p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ and $n = 10$

$$\therefore X \sim B\,(10, \frac{1}{2})$$

$$= 10C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$$

$$P(X = x) = \frac{10C_x}{1024}$$

(vii) P (குறைந்தது 7 தலைகள்)

$$P(X \geq 7) = P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10)$$

$$= \frac{10C_7}{1024} + \frac{10C_8}{1024} + \frac{10C_9}{1024} \frac{10C_{10}}{1024}$$

$$= \frac{120}{1024} + \frac{45}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{1}{1024}$$

$$= \frac{176}{1024}$$

(viii) P (சரியாக 7 தலைகள்)

$$P(x{=}7) = \frac{10C_7}{1024} = \frac{120}{1024}$$

(ix) P (அதிகபட்சம் 7 தலைகள்)

$$= P(x \leq 7) = 1 - P(x > 7)$$

$$= 1 - \{P(x=8) + P(x=9) + P(x=10)\}$$

$$= 1 - 1 - \left\{\frac{10C_8}{1024} + \frac{10C_9}{1024} + \frac{10C_{10}}{1024}\right\}$$

$$= 1 - \frac{56}{1024}$$

$$= \frac{968}{1024}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.4

வழக்கமான குறியீடுகளின்படி, p ஒரு ஈருறுப்பு பரவல் மாறி, எனில் 9 X, $n = 6$ மற்றும் 9 $P(x=4) = P(x=2)$ p ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:

$$P(X = x) = nC_x \, p^x \, q^{n-x}, \; x = 0,1,2,\ldots n$$

$$X \sim B(6, p) \Rightarrow P(X = x) = 6C_x p^x \, q(6\text{-}x)$$

$$9 \times P(X=4) = P(X=2)$$

$$\Rightarrow \quad 9 \times 6C_4 p^4 q^2 = 6C_2 \, p^2 \, q^4$$

$$\Rightarrow \quad 9\,p^2 = q^2$$

$$\Rightarrow \quad 3p = q \qquad p, q > 0$$

$$3p = 1 - p$$

$$4p = 1$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{4} = 0.25$$

எடுத்துக்காட்டு 10.5

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலில் பண்பளவைகள் $n=5$ மற்றும் $p=\frac{1}{4}$ எனில் அதன் தட்டை அளவை மற்றும் கோட்ட அளவைக் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு $n=5$ மற்றும் $p = \frac{1}{4}$

$$\text{கோட்டளவை} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\sqrt{5\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{\frac{2}{4}}{\sqrt{\frac{15}{16}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}}$$

முடிவு 1 : **இப்பரவல் நேரிடைக் கோட்டம் ஆகும்.**

$$\text{தட்டை அளவை:} = \frac{1-6pq}{npq}$$

$$= \frac{1-6\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{15}{16}}$$

$$= \frac{\frac{-2}{16}}{\frac{15}{16}}$$

$$= \frac{-2}{15}$$

$$= -0.1333$$

முடிவு 2 : **இப்பரவல் குறைதட்டைஅளவை உடையதாகும்.**

எடுத்துக்காட்டு 10.6

ஓர் ஈருறுப்பு பரவல் 7 சார்பற்ற முயற்சிகள் கொண்ட, $P(X=3)=P(X=4)$ எனில், இது சமச்சீர்பரவலா என்பதைச் சோதிக்க.

தீர்வு:

ஓர் ஈருறுப்பு பரவல் சமச்சீர்பரவலாக இருப்பின் $p = q = \frac{1}{2}$

இங்கு : $P(X=3) = P(X=4)$

$X \sim B(n, p)$

$$P(X = x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x},\ x = 0,1,2,\ldots n$$

$$nC_3\, p^3 q^{n-3} = nC_4\, p^4\, q^{n-4}$$

$7C_3\, p^3 q^4 = 7C_4\, p^4 q^3$ இங்கு $7C_3 = 7C_4$

சுருக்கினால்

$$q = p$$

$$1-p = p$$

$$1 = 2p$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட ஈருறுப்பு பரவல் சமச்சீர் பரவலாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.7

ஒரு சீட்டுக்கட்டில் உள்ள 52 சீட்டுகளில் 4 சீட்டுகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக திரும்ப வைக்கும் முறையில் எடுக்கப்படுகின்றது எனில், இராஜாக்களின் எண்ணிக்கையின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

X என்பது ஒரு விளைவில் உள்ள இராஜாக்களின் எண்ணிக்கை குறிக்கிறது என்க

p = ஒரு முயற்சியில் இராஜா கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$p = \frac{4}{52}$$

$$= \frac{1}{13}$$

இது ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் தொடர்ச்சியாக இருக்கிறது.

எனவே இது ஒரு ஈருறுப்பு பரவல் அதில் $n = 4,\ p = \frac{1}{13}$

சராசரி $= np = 4 \times \frac{1}{13} = \frac{4}{13}$

மாறுபாடு $= npq = \frac{4}{13} \times \frac{12}{13} = \frac{48}{169}$

எடுத்துக்காட்டு 10.8

ஒரு தெருவில் 200 குடும்பங்கள் வசிக்கின்றன. அதில் 40 குடும்பங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட நாளிதழை வாங்குகின்றனர். அத்தெருவிலுள்ள குடும்பங்களிலிருந்து 10 குடும்பங்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரி தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது எனில், கீழ்க்கண்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(x) ஒரே ஒரு குடும்பம் மட்டும் அந்நாளிதழை வாங்குதல்.

(xi) எந்த குடும்பமும் வாங்காமல் இருத்தல்

(xii) ஒரு குடும்பத்திற்கு மிகாமல் வாங்குதல்

தீர்வு:

$X \sim B(n, p)$

$P(X = x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$, $x = 0,1,2,\ldots n$

Let X என்பது அந்நாளிதழை வாங்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க.

p = ஒரு குடும்பம் நாளிதழை வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவு

$$p = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$$

$$q = \frac{4}{5}$$

$$n = 10$$

(i) ஒரு குடும்பம் மட்டும் அந்நாளிதழை வாங்குதல்

$$P(X=1) = nC_1\, p^1\, q^{\text{n-1}}$$

$$= 10C_1 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^9$$

$$= 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^9$$

(ii) எந்த குடும்பமும் அந்த நாளிதழை வாங்காமல் இருத்தல்

$$P(X=0) = 10C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

$$= \left(\frac{4}{10}\right)^{10}$$

(iii) ஒரு குடும்பத்திற்கு மிகாமல் அந்த நாளிதழை வாங்குதல் எனில் $X \leq 1$

$$P(X \leq 1) = P[x=0] + P[x=1]$$

$$= 10C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{10} + 10C_1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{9}\right)^9$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{10} + 10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^9$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^9 \left[\left(\frac{4}{5}\right) + 2\right]$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^9 \left(\frac{14}{5}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 10.9

ஒரு சுற்றுலா தலத்தில் 80% பயணிகள் தொடர்ந்து மீண்டும் மீண்டும் பார்வையிடுகிறார்கள் எனில், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 4 பயணிகளில் மீண்டும் மீண்டும் பார்வையிடும் சுற்றுலா பயணிகளின் எண்ணிக்கையின் பரவலைக் காண்க. மேலும் அதன் முகடு காண்க.

தீர்வு:

இது ஓர் ஈருறுப்புப் பரவல் ஆகும்.

$X \sim B(n, p)$

$P(X = x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$, $x = 0,1,2,\ldots n$

இது $n=4$ என்ற ஈருறுப்புப் பரவல்

$p = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ $\quad q = 1-p = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$$P(x = 0) = 4C_0 (\tfrac{4}{5})\ (\tfrac{1}{5})^4 = (\tfrac{1}{625})$$

$$P(x=1) = 4C_1\ (\tfrac{4}{5})(\tfrac{1}{5})^3 = \frac{16}{625}$$

$$P(x=2) = 4C_2\ (\tfrac{4}{5})^2(\tfrac{1}{5})^1 = (\tfrac{96}{625})$$

$$P(x = 3) = 4C_3 (\tfrac{4}{5})^3(\tfrac{1}{5})^1 = (\tfrac{256}{625})$$

$$P(x = 4) = 4C_4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^0 = \left(\frac{256}{625}\right)$$

நிகழ்தகவு பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$X=x$	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$

முகடின் மதிப்பு 3 அல்லது 4 (அதிகபட்ச நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை)

எடுத்துக்காட்டு 10.10

ஒரு கல்லூரியில் 60% மாணவர்கள் ஆடவர்கள். 4 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரி எடுக்கப்படுகிறது. அம்மாதிரியில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஒரு எண்ணாகவோ அல்லது அதைவிட குறைவாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது $\frac{1}{2}$ அல்லது அதைவிட அதிகமாகவோ இருக்கவேண்டும் எனில், அம்மாதிரியில் குறைந்தபட்சம் எவ்வளவு ஆடவர்கள் இருக்கவேண்டும்?

தீர்வு:

இங்கு 60% மாணவர்கள் ஆடவர்களாக இருப்பதால் ஆடவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 60% 4 மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது, முயற்சியின் எண்ணிக்கை n=4 இதில் மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறை சார்பற்றது ஆகும்.

$$X \sim B\,(n, p)$$

$$P\,(X = x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}\,,\ x= 0,1,2,\ldots n$$

தேவையான மாணவர்களின் எண்ணிக்கை X எனில் $P(X\leq x) \geq \frac{1}{2}$

$$x = 0 \quad P(X\leq 0) = 4C_0 (\tfrac{3}{5})^0\ (\tfrac{2}{5})^4 = \frac{16}{625} < \frac{1}{2}$$

$$x=1 \quad P(X\leq 1) = P\,(x = 0)+P\,(x=1)$$

$$= 4C_0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^4 + 4C_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$= \frac{16}{625} + \frac{96}{625} = \frac{112}{625} < \frac{1}{2}$$

$$x=2 \quad P(X\leq 2) = P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)$$

$$= \frac{112}{625} + P(x=2) = \frac{112}{625} + 4C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \frac{112}{625} + \frac{216}{625} = \frac{328}{625} > \frac{1}{2}$$

எனவே மாதிரியில் குறைந்தபட்சம் 2 ஆடவர்கள் இருக்கவேண்டும்.

10.1.3 பாய்சான் பரவல்

அறிமுகம்:

ஓர் ஈருறுப்பு பரவலின் பண்பளவைகள் n மற்றும் p இதில் n இன் சரியான மதிப்பு தெரியாததாகவும் p இன் மதிப்பு மிகக் குறைவானதாகவும் இருப்பின் நிகழ்தகவு காண இயலாது.

n இன் மதிப்பு மிக அதிகமாக இருப்பின் கணக்கிடுவது கடினமானதாக இருக்கும். இம்மாதிரியான சூழ்நிலைகளில் பயன்படுத்தக்கூடிய ஒரு பரவல் பாய்சான் பரவல் ஆகும்.

சிமியான் டென்னிஸ் பாய்சான் என்ற பிரெஞ்சு கணித வல்லுநர் 1837ஆம் ஆண்டு சில நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு ஈருறுப்பு பரவலிலிருந்து ஒரு பரவலை பெற்றார். இப்பரவல் அவரின் பெயராலேயே பாய்சான் பரவல் என அழைக்கப்படுகிறது..

நிபந்தனைகள்:

(iv) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை n மிக மிக அதிகம் அதாவது 'n' மிக மிக அதிகம் அதாவது $n \to \infty$

(v) ஒவ்வொரு முயற்சிகளிலும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மிக மிகக் குறைவு. அதாவது $p \to 0$

(vi) $np = \lambda$ ஒரு முடிவுறு எண்

(vii) நிகழ்வுகள் சார்பற்றவை

வரையறை:

ஒரு வாய்ப்பு மாறி X ஒரு பாய்சான் பரவலைக் கொண்டுள்ளது என்றால் X–ன் மதிப்புகள் மிகை முழு எண்களாக இருக்க வேண்டும். மேலும், அதன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு.

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}; & x = 0, 1, 2, \ldots.. \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

குறிப்பு

(i) λ இன் மதிப்பு தெரியும் எனில், பாய்சான் பரவல் முழுவதும் தெரியும் λ என்பது பாய்சான் பரவலின் பண்பளவை ஆகும்.

(ii) $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots. = 2.71828\ldots$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

பாய்சான் பரவலின் பண்புகள்:

(i) பாய்சான் பரவல் ஒரு தனித்த பரவல், ஏனெனில் X 0, 1, 2,... என்ற மதிப்புகளை மட்டுமே பெறுகிறது.

(ii) p மிக மிகக் குறைந்த மதிப்புடையது, q அதிக மதிப்புடையது மேலும் $p \longrightarrow 0$ $q \longrightarrow 1$ மற்றும் $n \longrightarrow \infty$ மற்றும் np ஒரு முடிவுறு எண்

(iii) சில அளவைகளின் மதிப்புகள் (a)சராசரி = λ = மாறுபாடு (b)திட்டவிலக்கம் = $\sqrt{\lambda}$
(c) கோட்டளவை = $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (iv) தட்டைஅளவை = $\frac{1}{\lambda}$

(iv) இது ஒன்று அல்லது இரண்டு முகடுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

(v) X மற்றும் Y பாய்சான் பரவலைக் கொண்டு இருக்கிறது எனில், $X+Y$ ஒரு பாய்சான் பரவலைச் சார்ந்ததாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

(vi) பாய்சான் பரவல் ஒரு மிகைக் கோட்டளவைப் பரவல் ஆகும்.

(vii) இப்பரவல் மிகைத் தட்டை பரவல் ஆகும்.

குறிப்பு:

p இன் மதிப்பு மிகக் குறைவானால், நிகழ்ச்சி நடப்பது மிக அரிது. இம்மாதிரியான சூழலில் இப்பரவல் பயன்படுகிறது.

சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

(i) ஒரு மாணவன் எல்லா தேர்விலும், எல்லா பாடத்திலும் முதல் தரம் பெறுவதற்கான நிகழ்வு

(ii) ஒரு பிரபலமான தொழிற்சாலையில் இருந்த தயாரிக்கப்படும் பொருளிலிருந்து குறைபாடுடைய பொருளைக் காண்பது.

(iii) ஒரு பிரபலமான தொழிற்சாலையில் இருந்த தயாரிக்கப்படும் பொருளிலிருந்து குறைபாடுடைய பொருளைக் காண்பது.

(iv) ஒரு அச்சிடப்பட்ட பக்கத்தில் உள்ள பிழைகளின் எண்ணிக்கை

(v) ஒரு பரபரப்பான சந்திப்பில் ஒரு நாளில் ஏற்படும் போக்குவரத்து விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை.

(vi) ஒரு காப்பீட்டு நிறுவனத்தில் ஒரு நாளில் பெறப்படும் இழப்பீட்டுத் தொகைக்கான விண்ணப்பங்களின் எண்ணிக்கை.

எடுத்துக்காட்டு 10.11

ஒரு நிறுவனத்தில் தயாரிக்கப்பட்ட விளக்குகளில் 2 % குறைபாடுள்ளவை. 200 விளக்குகள் கொண்ட கூறில் (i) 2 விளக்குகளுக்கும் குறைவாக (ii) 3 விளக்குகளுக்கும் மேலாக, குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. $[e\text{-}4 = 0.0183]$

தீர்வு:

X என்பது குறைபாடுடைய விளக்குகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்.

$X \sim P(\lambda)$

$$\therefore \quad P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots\infty$$

இங்கு $p = P$ (குறைபாடான விளக்கு) $= 2\% = \frac{2}{100} = 0.02$

$$n = 200$$

$$\therefore \quad \lambda = np = 200 \times 0.02 = 4$$

$$\therefore \quad P(X=x) = \frac{e^{-4}4^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots\infty$$

(vii) P (2 விளக்குகளுக்கும் குறைவாக)

$= P(X < 2)$

$= P(x = 0) + P(x = 1)$

$= \dfrac{e^{-4}.4^0}{0!} + \dfrac{e^{-4},4^1}{1!}$

$= e^{-4}(1 + 4)$

$= 0.0183 \text{ x } 5$

$= 0.0915$

(viii) P (குறைபாடுள்ள மின் விளக்குகள் 3க்கும் அதிகமாக இருப்பது)

$= P(X > 3)$

$= 1 - P(X \leq 3)$

$= 1 - \{ P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)\}$

$= 1 - \left\{\dfrac{e^{-4}.4^0}{0!} + \dfrac{e^{-4}.4^1}{1!} + \dfrac{e^{-4}.4^2}{2!}\dfrac{e^{-4}.4^3}{3!}\right\}$

$= 1 - e^{-4}\{1 + 4 + 8 + 10.667\}$

$= 1 - 0.0183 \times 23.667$

$= 0.567$

எடுத்துக்காட்டு 10.12

ஒரு பாய்சான் பரவலில் $3P(X= 2) = P(X = 4)$. 'λ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு பாய்சான் பரவலில் is $P(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x= 0, 1, 2, \ldots\infty$,

$3\,P(X = 2)=P(X = 4)$

$3.\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} = \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^4}{4!}$

$\lambda^2 = \dfrac{3 \times 4!}{2!} =36$

$\therefore \lambda = 6 \text{ as } \lambda > 0$

எடுத்துக்காட்டு 10.13

பாய்சான் மாறியின் பண்பளவை 4 எனில் அதன் கோட்டளவை மற்றும் தட்டைஅளவை காண்க.

தீர்வு:

$$\lambda = 4$$

$$\text{கோட்டளவை} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{தட்டைஅளவை} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.14

1000 பக்கங்கள் உள்ள ஒரு புத்தகத்தில் 400 பிழைகள் உள்ளன எனில் வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு பக்கத்தில் சரியாக 3 பிழைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

X என்பது புத்தகத்தில் உள்ள பிழைகளின் எண்ணிக்கை என்க.

$X \sim P(\lambda)$

$$\therefore P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots\infty$$

சராசரியாக ஒரு பக்கத்தில் உள்ள பிழைகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{400}{1000}$

i.e., $\lambda = \frac{400}{1000} = 0.4$

$$P(X=3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!} = \frac{e^{-0.4}(0.4)^3}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{0.6703 \times 0.064}{6}$$

$$= 0.00715$$

எடுத்துக்காட்டு 10.15

X என்பது பாய்சான் மாறியாக இருப்பின் $P(X=0) = 0.2725$, எனில் $P(X=1)$ மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$X \sim P(\lambda)$

$$\therefore P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots\infty$$

$$P(X=0) = 0.2725$$

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 0.2725$$

$$e^{-\lambda} = 0.2725$$

$\lambda = 1.3$ (e^{-m}) (அட்டவணை மதிப்பிலிருந்து)

$$P(x=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = \frac{e^{-1.3} \times 1.3^1}{1!}$$

$$= 0.2725 \times 1.3$$

$$= 0.3543$$

எடுத்துக்காட்டு 10.16

காப்பு ஊசிக்கு (safety pin) தயாரிக்கும் நிறுவனத்தில் குறைபாடுள்ள ஒரு காப்பு ஊசிக்கு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.04 எனில் (i) 100 காப்பு ஊசி உள்ள ஒரு பெட்டியில் 1 குறைபாடுள்ள காப்பு ஊசிக்கு இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு (ii) இதுபோன்ற 200 பெட்டிகளில் எவ்வளவு பெட்டிகளில் குறைபாடற்ற காப்பு ஊசிகள் உள்ளன.

தீர்வு:

$X \sim P(\lambda)$

$$\therefore \quad P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots\infty$$

$$p = 0.04$$

$$n = 100$$

$$\lambda = np = 4$$

(ix) $P(X=1) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda}{1!} = e^{-4}(4) = 0.0183 \times 4$

$$= 0.0732$$

(x) $P(X=0) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-4} = 0.0183$

குறைபாடற்ற காப்பு ஊசிகள் உள்ள பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

$$= 200 \times 0.0183$$

$$= 3.660$$

$$= 4$$

10.2 தொடர்ச்சியான பரவல்கள்:

10.2.1 செவ்வக அல்லது சீரான பரவல்

வரையறை:

ஒரு வாய்ப்பு மாறி X ஆனது (a, b) என்ற இடைவெளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான, சீரான பரவலைக் கொண்டிருக்க வேண்டும் எனில் அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (p.d.f.).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

சீரான பரவல்களின் பண்புகள்

(i) a,b என்பன சீரான பரவலின் பண்பளவைகள் எனப்படும். மேலும் X ஆனது ஒரு சீரான பரவலைக் கொண்டிருக்கும் எனில் $X \sim U\,(a, b)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

(ii) இப்பரவலானது செவ்வக பரவல் எனவும் அறியப்படுகிறது. ஏனெனில் $Y = f(x)$, x அச்சு, $X = a$ மற்றும் $X = o$ என்ற குத்துக்கோடுகள் ஒரு செவ்வக பரப்பை அமைக்கின்றன.

(iii) $X \sim U\,(-a, a)$ எனில் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பானது $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & -a < x < a \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$

(iv) சீரான பரவல் X ~ U (a, b) ன் அளவுகள்

(i) சராசரி $\mu = \dfrac{a+b}{2}$ (ii) மாறுபாடு $\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

(iii) இடைநிலை அளவு $= \dfrac{a+b}{2}$ (iv) கோட்டளவை $= 0$

(v) தட்டையளவை $= -\dfrac{6}{5}$ (vi) $Q_1 = \dfrac{3a+b}{4}$ (vii) $Q_3 = \dfrac{a+3b}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 10.17

$X \sim U\,(200, 250)$ எனில் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (p.d.f) மற்றும் $P\,(X > 230)$ மதிப்பு காண்க

தீர்வு:

(i) $X \sim U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$a = 200$ மற்றும் $b = 250$ எனில் தேவைப்படும் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{250-200} & 200 < x < 250 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{50} & 200 < x < 250 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

(ii) $$P(x > 230) = \int_{230}^{\infty} f(x)dx = \int_{230}^{250} \frac{1}{50}dx$$

$$= \frac{1}{50}[x]_{230}^{250} = \frac{250-230}{50} = \frac{20}{50} = 0.4$$

எடுத்துக்காட்டு 10.18

சீரான மாறியின் பண்பளவைகள் 50 மற்றும் 100 எனில் அதன் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க..

தீர்வு:

$X \sim U\,(50,100)$

இங்கு a=50 b=100

$$\text{சராசரி} = \text{இடைநிலை} = \frac{a+b}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$$\text{S.D} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{100-50}{\sqrt{12}}$$

$$= \frac{50}{\sqrt{12}} = \frac{50}{3.464}$$

$$= 14.434$$

எடுத்துக்காட்டு 10.19

X என்ற வாய்ப்பு மாறி ஒரு சீரான பரவல் $U\ (a,b)$ ஐ கொண்டுள்ளது என்க. மேலும், $P(20<X<40)=0.2$ மற்றும் சராசரி = 150 எனில், a மற்றும் b யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:

For $X \sim U(a, b)$

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$P(20<X<40)=0.2$$

$$\int_{20}^{40} \frac{1}{b-a} dx \text{ dx} = 0.2$$

$$\frac{1}{b-a}(x)_{20}^{40} = 0.2$$

$$\frac{1}{b-a}(20) = 0.2$$

$$b - a = 100 \qquad \dots (1)$$

$$\text{சராசரி} = 150$$

$$\frac{a+b}{2} = 150$$

$$a+b = 300 \qquad \dots (2)$$

$(1)+(2) \Rightarrow\ 2b = 400$ மற்றும் $b = 200.$

b ஐ (2) இல் பிரதியிட $a + 200 = 300 \ \Rightarrow\ a = 100.$

a=100, b=200

$X \sim U(100,200)$

எடுத்துக்காட்டு 10.20

X என்பது ஒரு சீரான மாறி $U(a,b)$ என்க. மேலும் அதன் முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மானங்கள் 100 மற்றும் 200 எனில் X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க..

தீர்வு :

$$Q_1 = 100$$

$$\frac{3a+b}{4} = 100$$

$$3a+b = 400 \qquad \ldots (1)$$

$$Q_3 = 200$$

$$\frac{a+3b}{4} = 200$$

$$a+3b = 800 \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ தீர்க்க

$$a = 50 \qquad b = 250$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{250-50} = \frac{1}{200}; & 50 < x < 250 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.21

நள்ளிரவிலிருந்து காலை 6.00 மணிவரை ஒவ்வொரு 15 நிமிட இடைவெளியில் மின்சார ரயில்கள் ஒரு ரயில் நிலையத்திற்கு வருகின்றன எனில், அந்நிலையத்திற்கு வரும் ஒரு நபர் குறைந்தது 10 நிமிடங்கள் காத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

X என்பது காத்திருப்பதற்கான வாய்ப்பு மாறி (நிமிடங்கள்) என்க.

கொடுக்கப்பட்டபடி X என்பது சீரான பரவல் $(0, 15)$ ஆகும்.

$$P(X > 10) = \int_{10}^{15} f(x)\,dx = \frac{1}{15}\int_{10}^{15} 1\,dx$$

$$= \frac{1}{15}(x)_{10}^{15} = \frac{1}{15}(15-10) = \frac{1}{3}$$

10.2.2 இயல்நிலை பரவல்

அறிமுகம்

டீ மாய்வர் என்ற ஆங்கில கணித வல்லுநர் 1733–ஆம் வருடம் இயல்நிலை பரவலை, சில நிபந்தனைகளுக்கு உட்படுத்தப்பட்ட ஈருறுப்பு பரவலிலிருந்து பெற்றார். மேலும் இதனை நிகழ்தகவு சார்ந்த விளையாட்டுகளில் பயன்படுத்தினார். இதனை 1774ஆம் வருடம் லேப்லாஸ் (Laplace)

என்பவர் வரலாற்று பிழைகளைக் காணப் பயன்படுத்தினார். மேலும் 1809இல் காஸ் (Gauss) என்பவர் வானவியலில் பிழைகளின் பரவலைக் காண இதனைப் பயன்படுத்தினார். 18 மற்றும் 19ஆம் நூற்றாண்டுகளில் தொடர் முயற்சிக்குப்பின் அனைத்து தொடர் பரவல்களுக்கும் பொதுவான ஒரு விதியைக் கொண்டு பெறப்பட்ட பரவலே இயல்நிலைப் பரவல் எனப்படும்.

குறிப்பு

(v) $n \to \infty$ மேலும் p, q இரண்டும் மிக குறைவானதாக இல்லாமல் இருக்கும்போது $B(X: n, p)$ ஒரு இயல்நிலை பரவலாக மாறும்.

(vi) $\lambda \longrightarrow \infty$ எனும் போது $P(X, \lambda)$ ஒரு இயல்நிலை பரவலாக மாறும்.

(vii) $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ மற்றும் $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனில் $Z \sim N(0, 1)$

அதாவது , $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \quad -\infty \le z \le \infty$

Z இன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாகும். Z என்பது சராசரி 0 மற்றும் மாறுபாடு 1 எனக் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அறியப்படுகிறது. (திட்ட இயல்நிலைப் பரவல்).

(viii) X இன் நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு, x ஐ நாம் Z ஆக மாற்றி Z இன் நிகழ்தகவுகளின் அட்டவணையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

வரையறை

X என்ற ஒரு வாய்ப்பு மாறி μ மற்றும் σ^2 ஆகியவற்றைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட இயல்நிலை பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது எனில், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}^2}$ இங்கு $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ மற்றும் $\sigma > 0$ என குறிக்கப்படுகிறது.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

இங்கு μ என்பது சராசரி மற்றும் σ^2 என்பது மாறுபாடு ஆகும்.

குறிப்பு

(i) $n \to \infty$ மேலும் p மற்றும் q இரண்டும் மிக குறைவானதாக இல்லாமல் இருக்கும்போது $B(X: n, p)$ ஒரு இயல்நிலை பரவலாக மாறும்.

(ii) $\lambda \longrightarrow \infty$ எனும் போது $P(X, \lambda)$ ஒரு இயல்நிலை பரவலாக மாறும்.

(iii) $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ மற்றும் $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனில் $Z \sim N(0, 1)$

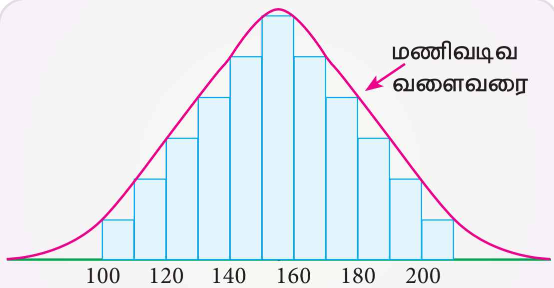
அதாவது $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \quad -\infty \le z \le \infty$

Z இன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாகும். Z என்பது சராசரி 0 மற்றும் மாறுபாடு 1 எனக் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அறியப்படுகிறது. (திட்ட இயல்நிலைப் பரவல்)

(iv) X இன் நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு, X ஐ நாம் Z ஆக மாற்றி Z இன் நிகழ்தகவுகளின் அட்டவணையைப் பயன்படுத்துகிறோம்

இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகள்

(i) இயல்நிலைப் பரவலின் வளைவரையானது மணிவடிவில் உள்ளது. மேலும் $X = \mu$ ஐப் பொறுத்து சமச்சீரானது.



மணிவடிவ வளைவரை
படம்10.1

(ii) சராசரி = இடைநிலை அளவு = முகடு = μ

(iii) $X = \mu$ எனில் முகடு = $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ஒரே ஒரு முகடு உடையது.

(iv) கோட்டளவை $\beta_1 = 0$ மற்றும் தட்டையளவை $\beta_2 = 3$.

(v) இதன் வளைவு மாற்ற புள்ளிகள் $x = \mu \pm \sigma$ எனும் போது கிடைக்கிறது.

(vi) X அச்சானது இவ்வளைவரைக்கு ஒரு தொலைத் தொடுகோடாக இருக்கும்.

(vii) சராசரியைப் பொறுத்து இதன் சராசரி விலக்கம் 0.8σ ஆகும்.

(viii) இதன் கால்மான விலக்கம் 0.6745σ ஆகும்.

(ix) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ மற்றும் $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ மேலும் X மற்றும் Y சார்பற்ற மாறிகள் எனில் $X + Y \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$ ஆகும்.

(x) பரப்பு பண்புகள்:

(a) மொத்த பரப்பு $P(-\infty < X < \infty) = 1$

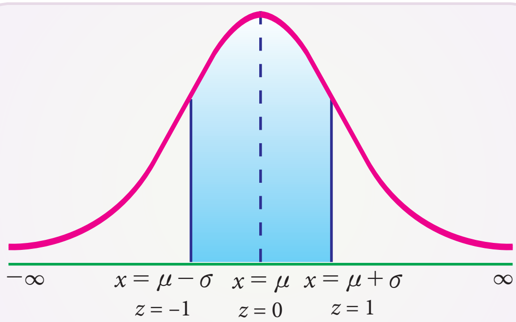
(b) $X = \mu$ ஐ பொறுத்து, $P(-\infty < X < \infty) = P(\mu < X < \infty) = 0.5$

(c) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(-1 < Z < 1)$

$= 2P(0 < Z < 1)$

$= 2(0.3413)$

$= 0.6826$



படம்10.2

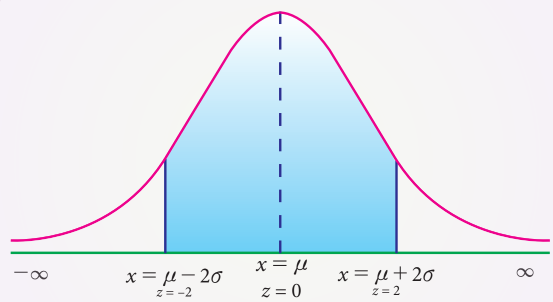
(d) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$

$= P(-2 < Z < 2)$

$= 2\ P\ (0 < Z < 2)$

$= 2\ (0.4772)$

$= 0.9544$



படம்10.3

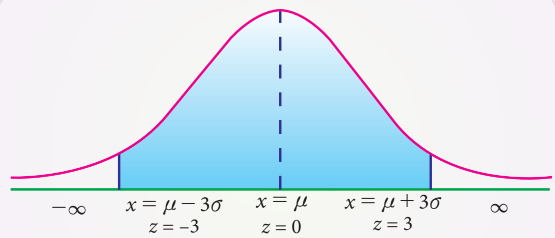
(e) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

$= P\ (-3 < Z < 3)$

$= 2\ P\ (0 < Z < 3)$

$= 2\ (0.49865)$

$= 0.9973$



படம் 10.4

(f) $P(|X - \mu| > 3\sigma = P(|Z| > 3)$

$= 1 - P\ (|Z| < 3)$

$= 1 - P\ (-3 < Z < 3)$

$= 1 - 0.9973$

$= 0.0027$

எடுத்துக்காட்டு 10.22

$z = 0$ மற்றும் ண $z = 1.56$ என்பவற்றிற்கு இடையே உள்ள பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$P\ (0 < Z < 1.56) = 0.4406$

(இயல்நிலை பரவல் பரப்பின் அட்டவணையிலிருந்து)

எடுத்துக்காட்டு 10.23

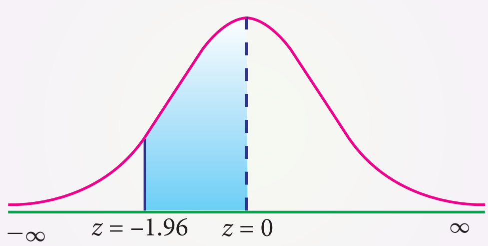
திட்ட இயல்நிலை பரவலின் கீழ், -1.96 லிருந்து 0 வரை உள்ள பரப்பினைக் காண்க.

தீர்வு:

$P(-1.96 < Z < 0) = P\ (0 < Z < 1.96)$ (**சமச்சீர் பண்பின்படி**)

$= 0.4750$

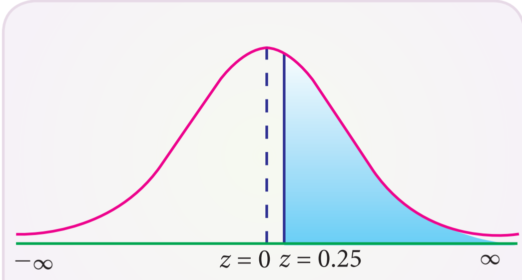
(இயல்நிலை பரவல் பரப்பின் அட்டவணையிலிருந்து)



படம் 10.5

எடுத்துக்காட்டு 10.24

$Z = 0.25$ க்கு வலப்புறம் அமையும் பரப்பு காண்க.



படம் 10.6

தீர்வு:

$P(Z > 0.25) = P(0 < Z < \infty) - P(0 < Z < 0.25)$

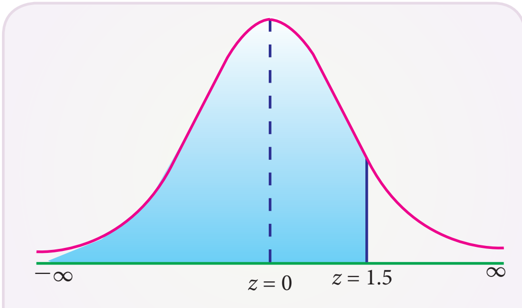
$= 0.5000 - 0.0987$

(இயல்நிலை பரவல் பரப்பின் அட்டவணையிலிருந்து)

$= 0.4013$

எடுத்துக்காட்டு 10.25

$Z = 1.5$ க்கு இடப்புறம் அமையும் பரப்பு காண்க.



படம் 10.7

தீர்வு:

$P(Z < 1.5) = P(-\infty < Z < 0) + P(0 < Z < 1.5)$

$= 0.5000 + 0.4332$

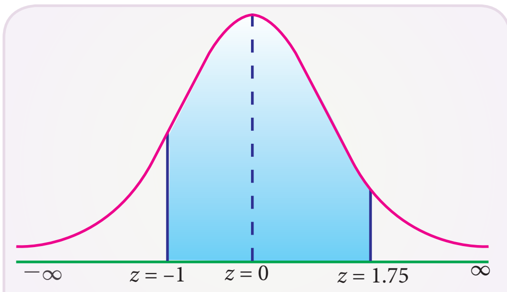
(அட்டவணையிலிருந்து)

$= 0.9332$

எடுத்துக்காட்டு 10.26

$Z = -1$ மற்றும் $Z = 1.75$ க்கும் இடையே உள்ள பரப்பு காண்க

தீர்வு:



படம் 10.8

$P(-1 < Z < 1.75)$

$= P(-1 < Z < 0) + P(0 < Z < 1.75)$

$= P(0 < Z < 1) + P(0 < Z < 1.75)$

சமச்சீர் பண்பின்படி

$= 0.3413 + 0.4599 = 0.8012$

எடுத்துக்காட்டு 10.27

இயல்நிலை பரவலின் சராசரி 40 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 எனில் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பின் அதிகபட்ச மதிப்பை காண்க. மற்றும் வளைவு மாற்று புள்ளியையும் காண்க.

தீர்வு:

$\mu = 40 \qquad \sigma = 10$

அதிகபட்ச மதிப்பு $= f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{10\sqrt{2\pi}}$

வளைவு மாற்று புள்ளி $= \mu \pm \sigma$

$= 40 \pm 10$

$= 30$ மற்றும் 50

எடுத்துக்காட்டு 10.28

எனும் இயல்நிலை மாறியின் சராசரி 50 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 5 எனில் சராசரியைப் பொறுத்து சராசரி விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கத்தைக் காண்க

தீர்வு:

சராசரி $= \mu = 50$, C திட்டவிலக்கம் $\sigma = 5$

சராசரியைப் பொறுத்த சராசரி விலக்கம் $= 0.8\ \sigma$

$= 0.8 \times 5 = 4$

கால்மான விலக்கம் $= 0.6745\sigma$

$= 0.6745 \times 5$

$= 3.3725$

எடுத்துக்காட்டு 10.29

இயல்நிலை மாறியின் சராசரி 60 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 ஆக இருப்பின் அதன் கால்மானங்களைக் காண்க.

தீர்வு:

$\mu = 60, \sigma = 10$

x_1 என்பது x_1 லிருந்து μ வரை உள்ள பரப்பு 25% ஆகும்.

$\therefore \quad P(x_1 < X < \mu) = 25\% = 0.25$

$P(z_1 < Z < 0) = 0.25$ இங்கு $z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma} = \dfrac{x_1 - 60}{10}$

இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து

$P(-0.675 < Z < 0) = 0.25015$

$\therefore \quad z_1 = -0.675$

$\therefore \quad \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma} = -0.675$

$$\frac{x_1 - 60}{10} = -0.675$$

$$X_1 - 60 = -6.75$$

$X_1 = 53.25$ எனில் $Q_1 = 53.25$

x_2 என்ற மதிப்பானது

$\therefore \quad P(\mu < X < x_2) = 0.25$

$P(0 < Z < z_2) = 0.25$, இங்கு $z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{x_2 - 60}{10}$

அட்டவணையிலிருந்து

$$P(0 < Z < 0.675) = 0.25015$$

$$\therefore \quad Z_2 = 0.675$$

$$\frac{x_2 - 60}{10} = 0.675$$

$X_2 = 66.75 \qquad Q_2 = 66.75$

எடுத்துக்காட்டு 10.30

ஒரு தோட்டத்திலுள்ள ரோசா செடிகளின் உயரம், சராசரி 100 செ.மீ கொண்ட ஒரு இயல்நிலை பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது. மேலும் 10% செடிகளின் உயரம் 104 செ.மீ ஐ விட அதிகம் எனவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது எனில் (i) பரவலின் திட்டவிலக்கம் காண்க (ii) தோட்டத்தில் 200 செடிகள் உள்ளது எனில் 105 செ.மீ ஐ விட உயரமான செடிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

தீர்வு:

(xi) பரவலின் திட்டவிலக்கம் காண்பதற்காக

X என்பது இயல் பரவலைக் கொண்டுள்ள ரோசா செடிகளின் உயரத்தை குறிக்கிறது என்க.

$P(100 < x < 104) = 40\ \%$ எனக் கொடுக்கப்பட்ட

$$P(0 < Z < 4/\sigma) = 0.40 \qquad \ldots (1)$$

ஆனால் திட்ட இயல் நிலை பரவலின் வளைவரையின் கீழ் உள்ள பரப்புகளின் அட்டவணையின்படி

$$P(0 < Z < 1.28) = 0.3997 \qquad \ldots (2)$$

$\therefore$ எனவே (1), (2) ன்படி

$$\frac{4}{\sigma} = 1.28$$

$$\sigma = 3.125$$

(xii) 105 செ.மீ ஐ விட உயரமான செடிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்பதற்காக

$$X = 105 \text{ எனில்}$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{105-100}{3.125}$$

$$= \frac{5}{3.125}$$

$$= 1.6$$

$$P(1.6 < Z < \infty) = 0.5\text{-}0.4452 = 0.0548$$

105 செ.மீ ஐ விட உயரமான செடிகளின் எண்ணிக்கை

$$= 200 \times 0.0548 = 10.9600 \backsimeq 11$$

$\therefore$ 11 செடிகளின் உயரம் 105 செ.மீ ஐ விட அதிகமாக உள்ளது.

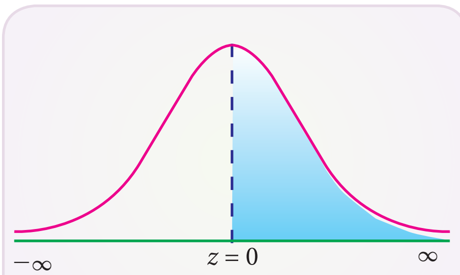
எடுத்துக்காட்டு 10.31

ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களுக்கு திறன் அறியும் தேர்வு நடத்தப்படுகிறது. அவர்களின் மதிப்பெண்கள், சராசரி 60 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 5 உடைய ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக இருக்கிறது எனில், (i) 60க்கு அதிகமான மதிப்பெண்கள் பெறும் (ii) 56–க்கு குறைவாக மதிப்பெண்கள் பெறும் (iii) 45–க்கும் 65–க்கும் இடையே மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் சதவீதத்தை காண்க.

தீர்வு:

$\mu = 60, \ \sigma = 5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

திட்ட இயல்நிலை மாறி $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-60}{5}$



படம் 10.9

(i) P (60க்கு அதிகமான நிகழ்வு)

$$= P(x > 60)$$

$$= P\left(z > \frac{60-60}{5}\right)$$

$$= P(Z > 0)$$

$$= P(0 < Z < \infty)$$

$$= 0.5000$$

60 க்கு அதிகமான மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் சதவீதம்

$$= 0.5000 \text{ x } 100$$

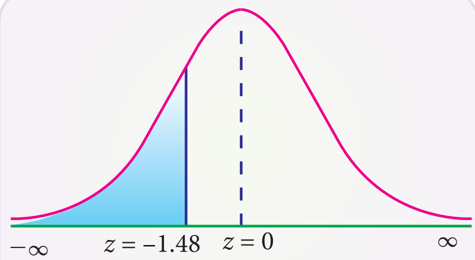
$$= 50\%$$

(ii) P (56 க்கு குறைவான நிகழ்தகவு)

$= P\ (X < 56)$

$= P\left(Z < \dfrac{56-60}{5}\right)$

$= P\ (Z < -0.8)$



படம் 10.10

$= P(-\infty < Z < 0) - P(-0.8 < Z < 0)$

$= 0.5000 - P\ (0 < Z < 0.8)$

$= 0.5000 - 0.2881$

$= 0.2119$

$\therefore$ 50 க்கு குறைவான மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் சதவீதம்

$= 0.2119 \times 100$

$= 21.19\%$

(iii) P (45 க்கும் 65 க்கும் இடையிலான நிகழ்வு)

$= P\ (45 < x < 65)$

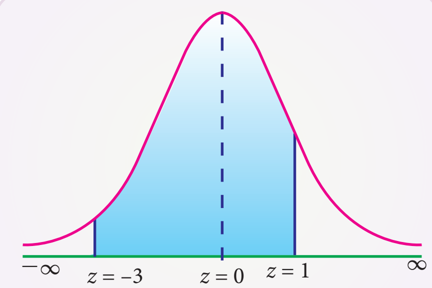
$= P\left(\dfrac{45-60}{5} < z < \dfrac{65-60}{5}\right)$

$= P(-3 < z < 1)$

$= P\ (0 < Z < 3) + P\ (0 < Z < 1)$

$= 0.4986 + 0.3413$

$= 0.8399$



படம் 10.11

45 க்கும் 65 க்கும் இடையில் மதிப்பெண்களைப் பெறும் மாணவர்களின் சதவீதம்

$= 0.8399 \text{ x } 100 = 83.99\%$

எடுத்துக்காட்டு 10.32

X என்பது சராசரி 2 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 உடைய ஒரு இயல்நிலை பரவலைக் கொண்ட மாறி என்க. சராசரியிலிருந்து, X –ன் ஒரு மதிப்பு x_1 வரையுள்ள இடைவெளிக்கான நிகழ்தகவு 0.4115 எனில், அம்மதிப்பு x_1 ஐக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட படி $\mu = 2$, $\sigma = 3, z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{x-2}{3}$

Let $Z_1 = \dfrac{x_1 - 2}{3}$

$P(\mu < x < x_1) = 0.4115$ என்பதால்

$P(0 < Z < z_1) = 0.4115$

$P(0 < Z < 1.35) = 0.4115$ (இயல்நிலை பரவலின் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து)

$\therefore \quad Z_1 = 1.35 \therefore \dfrac{x_1 - 2}{3} = 1.35$ (அல்லது) $x_1 = (1.35) \times 3 + 2 = 6.05$

எடுத்துக்காட்டு 10.33

இரு இயல்நிலை பரவலில், 35–க்கு கீழ் 7% மதிப்புகள் உள்ளன. மேலும் 89% மதிப்புகள் 63–க்கு கீழ் உள்ளன எனில் இப்பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

தீர்வு:

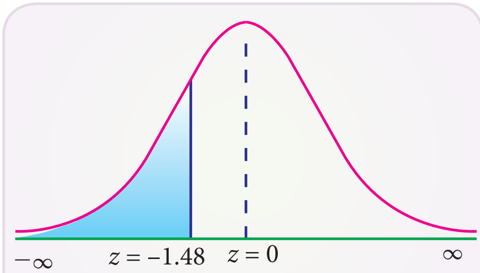
$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$P(x < 35) = 7\% = 0.07$ என்பதால்

$z_1 = \dfrac{35 - \mu}{\sigma}$ எனில்

$P(z_1 < Z < 0)$

$= 0.50 - 0.07 = 0.43$



படம் 10.12

$\therefore \quad z_1 = -1.48$

(இயல்நிலை பரவலின் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து)

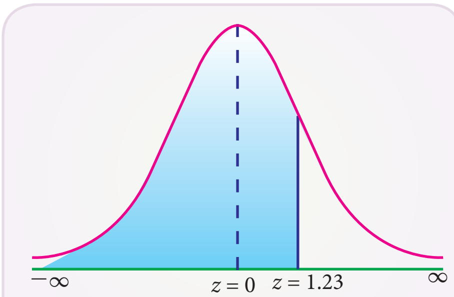
$\dfrac{35 - \mu}{\sigma} = -1.48$

$35 - \mu = -1.48\sigma \quad \ldots (1)$

மேலும் $P(X < 63) = 89\% = 0.89$

$Z_2 =$ எனில் $P(0 < Z < Z_2) = 0.89 - 0.50 = 0.39$

$Z_2 = 1.23$



படம் 10.13

(இயல்நிலை பரவலின் பரப்பு அட்டவணையிலிருந்து)

$\dfrac{63 - \mu}{\sigma} = 1.23$ (அல்லது) $63 - \mu = 1.23\sigma \quad \ldots (2)$

$(2) - (1) \Rightarrow 28 = 2.71\sigma$ (அல்லது) $\sigma = \dfrac{28}{2.71} = 10.33$

(1) லிருந்து $\mu = 35 + 1.48\sigma = 35 + 1.48(10.33)$

$\mu = 50.27$

10.3 ஈருறுப்பு, பாய்ஸான் மற்றும் இயல்நிலை பரவலைப் பொறுத்துதல்

அறிமுகம்

கண்டறியப்பட்ட தரவுகளின் வரிசைகளுக்கு நிகழ்தகவு பரவலை பொறுத்துவது என்பது நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் மாறிக்கு நிகழ்தகவு காண அல்லது மதிப்புகளின் நிகழ்வெண்ணை குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குள் முன்னறியவும் பயன்படுகிறது.

பல நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் இருப்பினும், மாறிகளின் குணங்களைப் பொறுத்து கண்டறியப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கு மிகவும் நெருங்கியதாக அமையும்படியான பரவலை நாம் கவனமாகத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

10.3.1 ஈருறுப்பு பரவலைப் பொறுத்துதல்

ஈருறுப்பு பரவலை பொறுத்துவதற்கு கீழ்க்கண்ட முறைகளை பின்பற்ற வேண்டியுள்ளது:

(xiii) சராசரி $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = np$

(xiv) $p = \frac{\bar{x}}{n}$ என கணக்கிடுக.

(xv) $q = 1 - p$ என கணக்கிடுக.

(xvi) நிகழ்தகவு திண்மை சார்பு : $P(x) = nC_x p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, 2, \ldots n$ ஐ பயன்படுத்துக.

(xvii) $x = 0$ எனக்கொண்டு $P(0) = nC_0 p^0 q^{n-0} = q^n$ ஐ கணக்கிடுக.

(xviii) $X = 0$ க்கான எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்ணை கணக்கிடுக $\mathrm{F}(0) = N \times \mathrm{P}(0)$, இங்கு $N = \sum f_i$

(xix) மற்ற எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்களின் மதிப்பைக் காண்க.

$\mathrm{F}(x+1) = \frac{n-x}{x+1} \times \frac{p}{q} \times F(x)$ என்ற தொடர் விதியை (சூத்திரத்தை) பயன்படுத்தி காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 10.34

ஒரே மாதிரியான மூன்று நாணயங்கள் 100 முறை சுண்டப்பட்டு கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் பெறப்பட்டிருக்கிறது

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3
நிகழ்வெண்	36	40	22	2

இவற்றிற்கு ஓர் ஈருறுப்பு பரவலை பொறுத்தி, எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை மதிப்பிடுக.

தீர்வு :

x	f	fx
0	36	0
1	40	40
2	22	44
3	2	44
மொத்தம்	100	90

(xx) சராசரி $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{90}{100} = 0.9$

(xxi) $p = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{0.9}{3} = 0.3$

$(xxii)$ $q = 1 - p = 1 - 0.3 = 0.7$

$(xxiii)$ $P(x) = nC_x p^x q^{n-x} = 3C_x \; 0.3_x \; 0.7^{3-x}$

$(xxiv)$ $P(0) = 3C_0 \; 0.3^0 \; (0.7)^{3-0} = 0.7^3 = 0.343$

(xxv) $F(0) = N \times P(0) = 100 \times 0.343 = 34.3$

$(xxvi)$ $F(x+1) = \frac{n-x}{x+1} \times \frac{p}{q} \times F(x)$

$\therefore \quad F(1) = F(0+1) = \frac{3-0}{0+1} \times \frac{0.3}{0.7} \times 34.3 = 44.247$

$F(2) = F(1+1) = \frac{3-1}{1+1} \times \frac{0.3}{0.7} \times 44.247 = 19.03$

$F(3) = F(2+1) = \frac{3-2}{2+1} \times \frac{0.3}{0.7} \times 19.03 = 2.727$

தீர்வு:

(i) பொறுத்தப்பட்ட ஈருறுப்பு பரவலின்

$P(X = x) = 3C_x 0.3^x \, 0.7^{(3-x)}, \quad x = 0,1,2,3$

(ii) எதிர்பார்க்கப்பட்ட நிகழ்வெண்கள்

x	0	1	2	3	Total
கண்டறியப்பட்ட நிகழ்வெண்கள் (O_i)	36	40	22	2	100
எதிர்பார்க்கப்பட்ட நிகழ்வெண்கள் (E_i)	34	44	19	3	100

10.3.2 பாய்ஸான் பரவலைப் பொறுத்துதல்

கண்டறியப்பட்ட தரவுகளுக்கு ஒரு பாய்ஸான் பரவலைப் பொறுத்துவதற்கு, கீழ்க்கண்ட முறைகள் பின்பற்றப்படுகிறது:

(i) சராசரியை $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ என்ற விதியின்படி காண்க.

(ii) பாய்ஸான் பரவலின் பண்பளவை $\lambda = \bar{x}$

(iii) நிகழ்தகவு திண்மை சார்பு $P\ (X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$ $x = 0, 1, 2\ldots.$ ஐ பயன்படுத்துக.

(iv) $X = 0$ என பிரதியிட்டு $P(0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!} = e^{-\lambda}$ ஐ கணக்கிடுக.

(v) $x = 0$ விற்கான, எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $F(0) = N \times P(0)$ இங்கு $\sum f_i = N$

(vi) மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களை

$F(x+1) = \frac{\lambda}{x+1} \times F(x)$ for $x = 0, 1, 2\ldots.$ என்ற விதியின்படி கணக்கிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 10.35

கீழ்க்கண்ட அட்டவணை, ஒரு புத்தகத்திலுள்ள ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் உள்ள பிழைகளின் எண்ணிக்கை குறிக்கும் ஒரு பரவல் ஆகும்.

பிழைகளின் எண்ணிக்கை (ஒரு பக்கத்திற்கு)	0	1	2	3	4
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	211	90	19	5	0

இப்பரவலிற்கு பாய்ஸான் பரவலைப் பொறுத்தி எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு:

x	f	fx
0	211	0
1	90	90
2	19	38
3	5	15
4	0	0
மொத்தம்	325	143

(vii) சராசரி $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{143}{325} = 0.44$

(viii) $\lambda = \bar{x} = \ = 0.44$

(ix) $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-0.44}(0.44)^{x}}{x!}$

(x) $P(0) = \frac{e^{0.44} \times 0.44^{0}}{0!} = e^{-0.44} = 0.6440$ (பாய்ஸான் பரவல் அட்டவணையிலிருந்து)

(xi) $F(0) = N \times P(0) = 325 \times 0.6440 = 209.43$

(xii) $F(x+1) = \frac{\lambda}{x+1} F(x)$

$F(1) = F(0+1) = \frac{0.44}{0+1} \times 209.43 = 92.15$

$F(2) = F(1+1) = \frac{0.44}{1+1} \times 92.15 = 20.27$

$F(3) = F(2+1) = \frac{0.44}{2+1} \times 2.972$

$F(4) = F(3+1) = \frac{0.44}{3+1} \times 2.97 = 0.33$

முடிவு:

(1) பொறுத்தப்பட்ட பாய்ஸான் பரவலின் நிகழ்தகவு திண்மை சார்பு $P(X = x) = \frac{e^{-0.44} 0.44^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2....$

(2). உத்தேச நிகழ்வெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பிழைகளின் எண்ணிக்கை x	0	1	2	3	4	கூடுதல்
கண்டறியப்பட்ட நிகழ்வெண்கள் (O_i)	211	90	19	5	0	325
எதிர்பார்க்கப்பட்ட நிகழ்வெண்கள் (E_i)	210	92	20	3	0	325

10.3.3 இயல்நிலை பரவலைப் பொறுத்துதல்

இடைவெளிகளில் கொடுக்கப்பட்ட, கண்டறியப்பட்ட தரவுகளுக்கு, இயல்நிலை பரவலைப் பொறுத்துதலில் கீழ்க்கண்ட படிநிலைகள் உள்ளன.

(i) μ மற்றும் σ ஐ கணக்கிடுக.

(ii) இடைவெளியின் கீழ் எல்லை x_i ஐ கணக்கிடுக.

(iii) $z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ ஐ காண்க.

(iv) Z_i (Zi) $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ ஐ கணக்கிடுக.

(v) $\Delta \phi (Z_i) = \phi (Z_{i+1}) - \phi (Z_i)$ ஐ கணக்கிடுக.

(vi) எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $E_i = = N \Delta \phi(Z_i)$ ஐ கணக்கிடுக.

எடுத்துக்காட்டு 10.36

கீழ்க்கண்ட தரவின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 79.945 மற்றும் 5.545 எனில், எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் பரவலைக் காண்க.

இடைவெளி	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100
அலைவெண்	3	21	150	335	326	135	26	4

தீர்வு:

$\mu = 79.945, \sigma = 5.545$, மற்றும் $N = 1000$

எனவே தரவுக்கு பொருந்தக்கூடிய இயல்நிலை பரவலைக் கொண்ட வளைவரையின் சமன்பாடு

$$f(x) = \frac{1}{5.545\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-79.945}{5.545}\right)^2}$$

எதிர்பார்க்கப்படும் இயல்நிலை பரவலின் அலைவெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு பெறப்படுகிறது:

இடைவெளி	இடைவெளியின் கீழ் எல்லை (X_i)	$z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$	$\phi(Z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$	$\Delta\phi(Z_i) = \phi(Z_{i+1}) - \phi(Z_i)$	எதிர் பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $N\Delta\phi(Z_i)$
< 60	- ∞	- ∞	0	0.001	1
60 - 65	60	-3.59693	0.001	0.0026	$2.6 \approx 3$
65 - 70	65	-2.69522	0.0036	0.0331	$33.1 \approx 33$
70 - 75	70	-1.79351	0.0367	0.15	150
75 - 80	75	-0.89179	0.1867	0.3173	$317.3 \approx 317$
80 - 85	80	0.009919	0.504	0.3146	$314.6 \approx 315$
85 - 90	85	0.911632	0.8186	0.1463	$146.3 \approx 146$
90 - 95	90	1.813345	0.9649	0.0318	$31.8 \approx 32$
95 – 100	95	2.715059	0.9967	0.0032	$3.2 \approx 3$
> 100	100	3.616772	0.9999		

நினைவில் கொள்க...

- ஈருறுப்பு பரவல் ஒரு தனித்த மாறியின் பரவலாகும். அதன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு

$$P(X=x)=\begin{cases} nC_x p^x q^{n-x} & for\ x=0,1,2,...n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$ இங்கு $q=1-p$

n,p என்பவை ஈருறுப்பு பரவலின் பண்பளவைகள் ஆகும். மேலும் அதன்

(i) சராசரி $= np$; (ii) மாறுபாடு $= npq$; (iii) திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{npq}$

(iv) கோட்டளவை $= \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$; (v) தட்டையளவை $= \dfrac{1-6pq}{npq}$

- பாய்சான் பரவல் ஒரு தனித்த மாறியின் பரவலாகும். அதன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\quad x=0,1,2,...\infty,$$

- பாய்சான் பரவலின் பண்பளவை λ ஆகும். மேலும்

(i) சராசரி $= \lambda =$ மாறுபாடு (ii) திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{\lambda}$

(iii) கோட்டளவை $= \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (iv) தட்டையளவை $= \dfrac{1}{\lambda}$

- செவ்வகப் பரவல் அல்லது சீரான பரவல் என்பது தொடர்ச்சியான மாறியைக் கொண்ட பரவலாகும். அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & otherwise\end{cases}$$ செவ்வகப் பரவலின் பண்பளவைகள் a,b ஆகும். அதன்

(i) சராசரி $\mu = \dfrac{a+b}{2}$ (ii) மாறுபாடு $\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

(iii) இடைநிலை அளவு $= \dfrac{a+b}{2}$ (iv) கோட்டளவை $= 0$ (v) தட்டையளவை $= -\dfrac{6}{5}$

- X என்ற தொடர்ச்சியான மாறி, சராசரி μ, மாறுபாட்டளவை σ^2 என்பவற்றைப் பண்பளவைகளாகப் பெற்ற பரவல் இயல்நிலைப் பரவல் எனப்படுகிறது. இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}^2},\quad -\infty<x<\infty,\ -\infty<\mu<\infty,\ \sigma>0$$ ஆகும்.

- இயல்நிலைப் பரவலில் :

(i) சராசரி = இடைநிலை அளவு = முகடு = μ (ii) முகடு $= \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

(iii) கோட்டளவை $\beta_1 = 0$ (iv) தட்டையளவை $\beta_2 = 3$

- இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்பளவுப் பண்புகள்
  (i) $P(-\infty < X < \infty) = 1$
  (ii) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(-1<Z<1) = 0.6826$
  (iii) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(-2<Z<2) = 0.9544$
  (iv) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = P(-3< Z < 3) = 0.9973$

6GI356

பயிற்சி

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. வழக்கமான குறியீடுகளின்படி, ஒரு பெர்னோலி பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு

   (a) $p, \sqrt{pq}$ (b) p, pq (c) np, npq (d) λ

2. ஒரு பகடையை உருட்டுதலில் ஒரு ‘6’ ஐப் பெறுகிற பெர்னோலியின் பரவல்

   (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{p-x}$ (b $\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}$ (c) $\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x}$ (d) இவை ஏதுமில்லை

3. $B(n, p)$ -ன் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு முறையே

   (a) npq, np (b) $np, \sqrt{npq}$ (c) np, npq (d) $\sqrt{npq}, np$

4. $B(n, p)$ இல் n வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவு

   (a) $nC_x p^x q^{n-x}$ (b) 1 (c) p^n (d) q^n

5. $X \sim B(n_1, p)$ ஆனது $Y \sim B(n_2, p)$ யோடு சார்பற்றது எனில் $X + Y$ ஆனது எவ்வகை பரவலைக் கொண்டுள்ளது.

   (a) $B(n_1 + n_2, 2p)$ (b) $B(n_1, p)$ (c) $B(n_1 + n_2, p)$ (d) $B(n_2, p)$

6. ஒரு பாய்ஸான் மாறியின் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு 1 எனில் $P(x < 1)$ என்பது

   (a) e^{-1} (b) $1-2e^{-1}$ (c) $1-\frac{5}{2e^{-1}}$ (d) ஏதுமில்லை

7. எப்போது பாய்ஸான் பரவலானது, ஈருறுப்பு பரவலின் ஒரு எல்லை மதிப்பாக இருக்கும்

   (a) $n \to \infty$; $p \to 0$ மற்றும் $np = \sqrt{m}$ (b) $n \to 0$; $p \to \infty$ மற்றும் $p = 1/m$
   (c) $n \to \infty$; $p \to \infty$ மற்றும் $np = m$ (d) $n \to \infty$; $p \to 0$ மற்றும் $np = m$

8. பாய்ஸான் பரவலானது எவற்றோடு தொடர்புடையது

   (a) அரிதான நிகழ்ச்சிகள் (b) நிச்சயமான நிகழ்ச்சி
   (c) நடவா நிகழ்ச்சி (d) ஏறத்தாழ நிச்சய நிகழ்ச்சி

9. $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^9$ என்பது ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலைக் குறித்தால், அதன் திட்டவிலக்கம்

   (a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) 6 (d) 3

10. ஒரு பாய்ஸான் பரவலில்

(a) சராசரி = மாறுபாடு (b) சராசரி < மாறுபாடு

(c) சராசரி > மாறுபாடு (d) சராசரி $\neq$ மாறுபாடு

11. X ~ U (–5, 5) எனில் – 5 < x < 5 என்ற இடைவெளியில், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$ ஆனது

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{2\times5}$ (c) $\frac{1}{5^2}$ (d) $\frac{1}{2}$

12. எப்போது, இயல்நிலை பரவலானது, ஈருறுப்பு பரவலின் ஓர் எல்லை மதிப்பாக இருக்கும்?

(a) $n \longrightarrow \infty$ மற்றும் $p \longrightarrow 0$

(b) $n \longrightarrow 0$ மற்றும் $p \longrightarrow q$

(c) $n \longrightarrow \infty$ மற்றும் $p \longrightarrow n$

(d) $n \longrightarrow \infty$ மற்றும் pயும் q யும் இரண்டும் சிறிய மதிப்புடையது அல்ல

13. $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ ன் கோட்டளவு மற்றும் தட்டையளவுகள்

(a) 0, 1 (b) 0, 3 (c) 0, 2 (d) 0, 0

14. $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ல் $P(|X - \mu| < 2\sigma)$ இன் மதிப்பு

(a) 0.9544 (b) 0.6826 (c) 0.9973 (d) 0.0027

15. If $X \sim N(6, 1.2)$ மற்றும் $P(0 < Z < 1) = 0.3413$ எனில் $P(4.8 < X < 7.2)$ ஆனது

(a) 0.3413 (b) 0.6587 (c) 0.6826 (d) 0.3174

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

16. ஒரு பெர்னோலி பரவலில் முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை -----------

17. ஒரு ஈருறுப்பு பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு முறையே 8 மற்றும் 4 எனில், $n\,P(X = 1)$ ஆனது ------------

18. ஓர் ஈருறுப்பு பரவலின் முயற்சிகள் ----------

19. $X \sim U(a, b)$ எனில், அதன் மாறுபாடு --------------

20. ------------ ஒரு திட்ட இயல்நிலை பரவலைக் குறிக்கிறது.

III. குறு வினா (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி)

21. பெர்னோலி பரவலின் பண்புகளைக் கூறுக.

22. ஓர் ஈருறுப்பு பரவலுக்கான நிபந்தனைகளைக் கூறுக

23. 'ஓர் ஈருறுப்பு பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 7 மற்றும் 4' என்ற கூற்றைப் பற்றிய உமது கருத்தைக் கூறுக.

24. $(0.68 + 0.32)^{10}$ என்ற ஈருறுப்பு பரவல், இரண்டு வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

25. ஒரு துறைமுகத்தில், 10 கப்பல்களில் சராசரியாக *8* கப்பல்கள் பாதுகாப்பாக கரை ஒரு துறைமுகத்தில், 10 கப்பல்களில் சராசரியாக 8 கப்பல்கள் பாதுகாப்பாக கரை சேருகின்றன எனில், 1600 கப்பல்களில், கரை சேரும் கப்பல்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

26. ஒரு பாய்ஸான் பரவலிற்கு இரு எடுத்துக்காட்டுகள் தருக

27. ஒரு பாய்ஸான் பரவலின் மாறுபாடு 0.5 எனில் P(X=3) ஐ கணக்கிடுக. [e-0.5 = 0.6065]

28. ஒரு பாய்ஸான் பரவலின் குணங்களைக் கூறுக.

29. X ஓ என்பது ஒரு பாய்ஸான் மாறி என்க. மேலும் $P(X=1) = P(X = 2)$ எனில் அதன் சராசரியைக் கணக்கிடு.

30. ஏன் U (a, b) இ ஒரு செவ்வக பரவல் என அழைக்கப்படுகிறது.

31. $X \sim U(-10, 10)$ எனில் X இன் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்க.

32. B (n, p) ஆனது, $N(\mu, \sigma^2)$ வாக மாறுவதற்கான நிபந்தனைகளைக் கூறுக.

33. ஒரு பாய்ஸான் பரவலானது ஒரு இயல் நிலை பரவலாக மாறுவதற்கான நிபந்தனைகளைக் கூறுக.

34. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ என இருக்கும் போது $P(|X - \mu| < 3\sigma)$ ன் மதிப்பைக் காண்க

35. திட்ட இயல் நிலை பரவலைப் பற்றி ஒரு குறிப்பு வரைக.

36. இயல் நிலை பரவலின் பரப்பு சம்பந்தப்பட்ட பண்புகளைக் கூறுக.

IV. சிறு வினா (ஓரிரு சொற்றொடரில் விடையளி):

37. ஒரு தானியங்கி இயந்திரம் தயாரித்த திருகுகளில் 10% குறைபாடு உடையன. அத்தயாரிப்புகளிலிருந்து 20 திருகுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகையில் (i) சரியாக 2 மட்டும் அதிக பட்சம் 3 மட்டும் (iii) குறைந்தது 2 திருகுகள் குறைபாடு உடையவைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

38. 100 கைக்கடிகாரங்கள் உள்ள ஒரு பெட்டியில் 20 குறைபாடுடையன. அதிலிருந்து 10 கைக்கடிகாரங்கள் எடுக்கப்படுகையில் (i) 10 குறைபாடு உடையவையாக (ii) அதிகபட்சம் 3 குறைபாடு உடையவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

39. ஒரு தயாரிப்பாளர் தயாரிக்கும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டியில் 5% குறைபாடு உடையன. 100 பெட்டிகள் கொண்ட தொகுப்பாக தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை விற்றார். மேலும் 4

பெட்டிகளுக்கு மேல் குறைபாடு இருக்காது எனவும் வாக்குறுதி கொடுக்கிறார். அத்தொகுப்பானது அவர் கொடுத்த வாக்குறுதியை பொய்ப்பிப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க [e-5 = 0.0067]

40. பெருமளவு தொழிலாளிகளைக் கொண்டு செயல்படும் ஒரு தொழிற்சாலை, சராசரியாக ஒரு வேலை நேரத்தில் 3 தொழிலாளிகள் வருகைபுரியாமல் இருக்கின்றனர் என்று ஒரு நீண்டகால ஆய்விற்குப் பின் கண்டறிகின்றனர். ஒரு குறிப்பிட்ட வேலை நேரத்தில் (i) சரியாக 2 தொழிலாளிகள் (ii) 4 பேருக்கு அதிகமான தொழிலாளிகள் வருகைபுரியாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

41. ஒரு தொழிற்கல்விக்கான நுழைவுத்தேர்விற்குப் பயிற்சி அளிக்கும் 100 பேராசிரியர்களுக்கு அளிக்கப்படும் ஊதியம், சராசரி ரூ.700 மற்றும் திட்டவிலக்கம் ரூ.50 என உள்ள ஓர் இயல்நிலை பரவலாக இருக்கிறது, எனில் (i) ரூ.700க்கும் ரூ.720க்கும் இடையில் (ii) ரூ.750க்கு அதிகமாக ஊதியம் பெறும் பேராசிரியர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

V. விரிவான விடையளி :

42. ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் கோட்டளவு மற்றும் தட்டையளவு முறையே 1/6 மற்றும் – 11/36 எனில், அந்த ஈருறுப்புப் பரவலைக் காண்க.

43. 4 பகடைகள் ஒன்றாக 200 தடவைகள் உருட்டப்படுகின்றன. கீழ்க்கண்ட தரவிற்கு ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக. மேலும் 4, 5 (அல்லது) 6 என்ற எண்களைப் பெறுவதற்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களையும் காண்க.

4,5,6 பெறுதல்	0	1	2	3	4	மொத்தம்
எண்ணிக்கை	62	85	40	11	2	200

44. தயாராகும் 100 வானொலிகளில் (மகிழுந்தில் பொருந்தக்கூடியது) குறைகளின் எண்ணிக்கை கீழுள்ளவாறு பதிவு செய்யப்படுகிறது.

குறைபாடுகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை	79	18	2	1	0

இதற்கு ஒரு பாய்ஸான் பரவலைப் பொறுத்துக. மேலும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களையும் காண்க

45. 80 பிறப்புகளில் ஒரு பிறப்பு இரட்டையராக இருக்கிறது என எடுத்துக்கொண்டு, ஒரு நாளில் நிகழும் 30 பிறப்புகளில் 2 அல்லது அதற்கு மேலும் இரட்டையராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளை(i)ஈருறுப்பு பரவலைக் கொண்டு (ii) பாய்ஸான் பரவலைக் கொண்டு கண்டு ஒப்பிடுக

46. ஓர் இயல்நிலை பரவலில் 8% மதிப்புகள் 72 ஐவிட குறைவாகவும் 99% மதிப்புகள் 53ஐ விட அதிகமாகவும் இருக்கிறது எனில் அப்பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

47. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி 150 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 எனில் 60% மைய மதிப்புகளை உள்ளடக்கிய எல்லை மதிப்புகளைக் காண்க.

48. 4 நாணயங்கள் ஒன்றாக 64 தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றன. அவற்றில் கண்ட தலைகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுகளின் எண்ணிக்கை கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை	3	15	23	17	6

இப்பரவலுக்கு ஓர் ஈருறுப்பு பரவலைப் பொறுத்தி எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

49. ஒரு மணி நேரத்தில், ஒரு ஏரியில் பிடிக்கப்பட்ட மீன்களின் எண்ணிக்கை (தூண்டில் மூலமாக) சராசரியாக 3 எனில் 7 மணி நேரத்தில் (i) மீன் கிடைக்கவில்லை (ii) 2 மீன்கள் (iii) அதிகபட்சம் 3 மீன்கள் (iv) குறைந்தது 1 மீன் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க

50. கல்வித்துறை ஒரு பயிற்சி வகுப்பினை நடத்துகிறது. அப்பயிற்சிக்குப்பின் நடத்திய தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக உள்ளது. மேலும் சில மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்குத் தொடர்புடைய Z மதிப்புகள் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

ரோஹித் 1.1	பவித்ரா -2.00	டேவிட் 0.0
ரஹீம் 1.70	பிரியா -1.60	ஃபஸினா -0.8

(i) இம்மாணவர்களில் எந்தெந்த மாணவர்கள் சராசரியைவிட அதிகம் பெற்றிருக்கின்றனர்?

(ii) இம்மாணவர்களில் எந்தெந்த மாணவர்கள் சராசரியைவிட குறைவாகப் பெற்றிருக்கின்றனர்?

(iii) இப்பரவலின் சராசரி 150 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 20 எனில் ஒவ்வொரு மாணவனும் பெற்ற மதிப்பெண் யாவை?

விடைகள் :

I. 1. (b) 2. (b) 3. (c) 4. (c) 5. (c) 6. (a) 7. (d) 8. (a) 9. (b)

10. (a) 11. (b) 12. (d) 13. (b) 14. (a) 15. (c)

II. 16. 1 17. $\frac{1}{2^{12}}$ 18. சார்பற்றவை 19. $\frac{(b-a)^2}{12}$ 20. N (0, 1)

III. 24. $10C_2 0.32^2\ 0.68^8$ 25. சராசரி = 1280 திட்டவிலக்கம் = 16 27. 0.0126

29. சராசரி $\lambda = 2$ 31. சராசரி = 0; மாறுபாடு $= \frac{100}{3}$ 34. 0.9973

IV. 37. (i) $0.9^{18} \times 1.90$ (ii) $0.9^{20} \times 7.1317$ (iii) $1\text{-}0.9^{20} \times 3.222$

38. (i) 0.2^{10} (ii) 0.879 39. 0.5595 40. (i) 0.2240 (ii) 0.1847

41. (i) 16 (ii) 16

V. 43. (i) $p(x) = 4C_x\,(0.2575)^x\ (0.7425)^{4\text{-}x}$ (ii) 61, 84, 44,10, 1

44. (i) $p(x) = e^{-0.25}\frac{0.25^x}{x!}$ (ii) 78, 20, 2, 0, 0

45. (i) 0.05395 (ii) 0.05498 46. சராசரி = 100 திட்டவிலக்கம் = 20

47. (141.589, 158.411)

48. $p = 0.53125$

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை	3	14	24	18	5

49. (i) 0.5168513, (ii) 0.1125702, (iii) 0.99530888, (iv) 0.990147

50. (i) ரோஹித், ரஹீம் (ii) பவித்ரா, பிரியா, ஃபாசினா

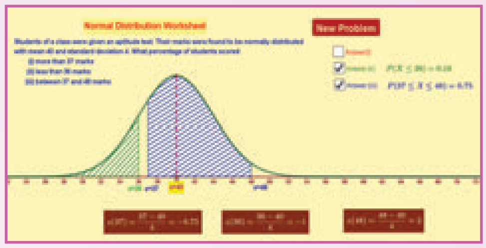
(iii)

மாணவர்	ரோஹித்	பவித்ரா	டேவிட்	ரஹீம்	பிரியா	ஃபாசினா
மதிப்பெண்	172	110	150	184	118	134

இணையச்செயல்பாடு

இயல்நிலை நிகழ்தகவு–பயிற்சி

இயல்நிலை நிகழ்தகவை அறிவோமா ?



படிகள்

1. கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க.

   "11th Standard Statistics" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகத்தில் "Normal Probability Distribution" க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்

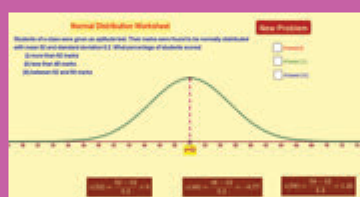
2. இயல்நிலை நிகழ்தகவுக்கான ஒரு கணக்கு தோன்றும். வலப்பக்கத்தில் ஒவ்வொரு பெட்டியாகத் தேர்வு செய்து அதன் விடையைச் சரிபார்க்கவும்.

3. "New Problem" –ஐ சொடுக்கினால் புதிய கணக்கு தோன்றும். மீண்டும் மீண்டும் பயிற்சி செய்து பார்க்கவும்.

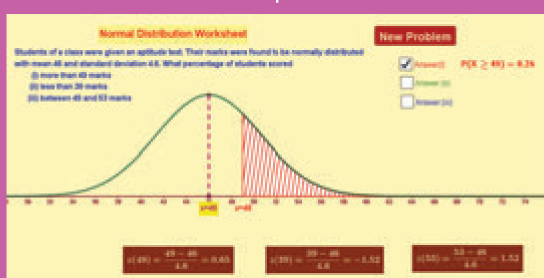
குறிப்பு: X–அச்சு வளைகோட்டை தொடுவது போல் தோற்றமளிக்கும். ஆனால் படத்தைப் பெரிது படுத்தி பார்த்தால்தான் அவை தொடாமல் செல்வது தெரியும்.

படி 1

படி 2



படி 3



* படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

உரலி:

https://ggbm.at/uqVhSJWZ

B136_11_STA_TM

கலைச் சொற்கள்

நிபுணத்துவ அளவீட்டு அறிவியல்	Actuarial Science
கூட்டுச்சராசரி	Arithmetic Mean (AM)
பெருந்தரவுகள்	Big data
ஈருறுப்புப் பரவல்	Binomial Distribution
ஈருறுப்புத் தொடர்	Binomial series
கட்ட விளக்கப்படம்	Boxplot
நுண்கணிதம்	Calculus
அட்டவணையின் நிரல்தலைப்பு	Caption (Column heading)
மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்	Central Moments
சிறப்பியல்புச் சார்பு	Characteristic function
காலம் சார் வகைப்படுத்துதல்	Chronological classification
மாறுபாட்டுக் கெழு	Coefficient of variation (CV)
சேர்மானங்கள்	Combination
கூறுபட்டை விளக்கப்படம்	Component bar diagram
நிபந்தனை நிகழ்கதவு	Conditional probability
தொடர் நிகழ்வெண் பரவல்	Continuous distribution
ஏதுவான மாதிரி கணிப்பு முறை	Convenience sampling
குவிவு நிகழ்வெண் வளைவரை (ஓஜைவ்)	Cumulative frequency curve (Ogive)
குவிவு நிகழ்வெண் பரவல்	Cumulative frequency distribution
பதின்மானங்கள்	Deciles
வரையறுத்த தொகை	Definite integral
வகையிடல்	Differentiation
தனித்த நிகழ்வெண் பரவல்	Discrete distribution
பரவல் சார்பு	Distribution function
கணக்கெடுப்பாளர்	Enumerators
வரிசை காரணிப்பெருக்கல், இயலெண் தொடர்பெருக்கல்	Factorial
நிகழ்வெண் பரவல்	Frequency distribution
நிகழ்வெண் பன்முக வரைபடம்	Frequency polygon
இடம் சார் வகைப்படுத்துதல்	Geographical classification
பெருக்கு சராசரி	Geometric Mean (GM)
பெரும் தரவுகளைக் கையாளும் ஒரு மென்பொருள்	Hadoop
இசைவுச் சராசரி	Harmonic Mean (HM)
பரவல் செவ்வகப் படம்	Histogram
சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்	Independent events
தொகையிடல்	Integration
இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு	Joint probability density function
இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு	Joint probability mass function
நோக்கமுடைய மாதிரி கணிப்பு முறை	Judgement sampling
தட்டை அளவை	Kurtosis
இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு	Marginal probability density function
இறுதிநிலை நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு	Marginal probability mass function
கணித எதிர்பார்த்தல்	Mathematical Expectation
கணித நிகழ்தகவு (முந்தைய அணுகுமுறை)	Mathematical probability
சராசரி விலக்கம்	Mean deviation
அளவீட்டு அளவைகள்	Measurement scales

மையப்போக்கு அளவைகள்	Measures of central tendency
சிதறல் அளவைகள்	Measures of dispersion
இடைநிலை அளவு	Median
முகடு	Mode
விலக்கப் பெருக்கத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு	Moment Generating Function(MGF)
பலகட்ட பட்டை விளக்கப்படம்	Multiple bar diagram
ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்	Mutually exclusive events
இயல்நிலை பரவல்	Normal Distribution
பண்பளவை	Parameter
பெரிட்டோ வரைபடம்	Pareto diagram
விழுக்காடு பட்டை விளக்கப்படம்	Percentage bar diagram
நூற்றுமானங்கள்	Percentiles
வரிசை மாற்றங்கள்	Permutation
உருவ விளக்கப்படம்	Pictogram
வட்ட விளக்கப்படம்	Pie diagram
பாய்சான் பரவல்	Poisson Distribution
முழுமைத் தொகுதி	Population
முதல்நிலை தரவுகள்	Primary data
நகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு	Probability density function (pdf)
நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு	Probability mass function (pmf)
நிகழ்தகவு மாதிரி கணிப்பு முறை	Probability sampling
பண்பு சார் வகைப்படுத்துதல்	Qualitative classification
அளவின் மூலம் வகைப்படுத்துதல்	Quantitative classification
கால்மானங்கள்	Quartiles
வினாவிடை பட்டியல்	Questionnaire
ஒதுக்கீட்டு மாதிரி கணிப்பு முறை	Quota sampling
வாய்ப்பு சோதனை	Random experiment
வாய்ப்பு மாறிகள்	Random variable
விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்	Raw Moments
செவ்வக பரவல், சீரான பரவல்	Rectangular or Uniform Distribution
மாதிரி, கூறு	Sample
மாதிரி கணிப்பு	Sampling
மாதிரி கணிப்புப் பிழை	Sampling Error
இரண்டாம் நிலை தரவுகள்	Secondary data
எளிய பட்டை விளக்கப்படம்	Simple bar diagram
எளிய வாய்ப்பு மாதிரி கணிப்பு முறை	Simple random sampling
கோட்ட அளவை	Skewness
பனிபந்து மாதிரி கணிப்பு முறை	Snowball sampling
திட்ட விலக்கம்	Standard Deviation (SD)
Z என்பது திட்ட இயல்நிலை மாறி	Standard normal variate Z
புள்ளியியல் நிகழ்தகவு (பிந்தைய அணுகுமுறை)	Statistical probability
தண்டு இலை வரைபடம்	Stem and Leaf Plot
படுகை முறை மாதிரி கணிப்பு முறை	Stratified random sampling
அட்டவணையின் நிரைதலைப்பு	Stub (Row heading)
முறை சார்ந்த மாதிரி கணிப்பு முறை	Systematic random sampling
தரவுகளை அட்டவணையிடுதல்	Tabulation of data
விலக்க வர்க்க சராசரி, மாறுபாடுட்டு அளவை	Variance

மடக்கை

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

மடக்கை

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

எதிர் மடக்கை

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1.000	1.002	1.005	1.007	1.009	1.012	1.014	1.016	1.019	1.021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.01	1.023	1.026	1.028	1.030	1.033	1.035	1.038	1.040	1.042	1.045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.02	1.047	1.050	1.052	1.054	1.057	1.059	1.062	1.064	1.067	1.069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.03	1.072	1.074	1.076	1.079	1.081	1.084	1.086	1.089	1.091	1.094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.04	1.096	1.099	1.102	1.104	1.107	1.109	1.112	1.114	1.117	1.119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.05	1.122	1.125	1.127	1.130	1.132	1.135	1.138	1.140	1.143	1.146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.06	1.148	1.151	1.153	1.156	1.159	1.161	1.164	1.167	1.169	1.172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.07	1.175	1.178	1.180	1.183	1.186	1.189	1.191	1.194	1.197	1.199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.08	1.202	1.205	1.208	1.211	1.213	1.216	1.219	1.222	1.225	1.227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.09	1.230	1.233	1.236	1.239	1.242	1.245	1.247	1.250	1.253	1.256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.10	1.259	1.262	1.265	1.268	1.271	1.274	1.276	1.279	1.282	1.285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.11	1.288	1.291	1.294	1.297	1.300	1.303	1.306	1.309	1.312	1.315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.12	1.318	1.321	1.324	1.327	1.330	1.334	1.337	1.340	1.343	1.346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.13	1.349	1.352	1.355	1.358	1.361	1.365	1.368	1.371	1.374	1.377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.14	1.380	1.384	1.387	1.390	1.393	1.396	1.400	1.403	1.406	1.409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.15	1.413	1.416	1.419	1.422	1.426	1.429	1.432	1.435	1.439	1.442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.16	1.445	1.449	1.452	1.455	1.459	1.462	1.466	1.469	1.472	1.476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.17	1.479	1.483	1.486	1.489	1.493	1.496	1.500	1.503	1.507	1.510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.18	1.514	1.517	1.521	1.524	1.528	1.531	1.535	1.538	1.542	1.545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.19	1.549	1.552	1.556	1.560	1.563	1.567	1.570	1.574	1.578	1.581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.20	1.585	1.589	1.592	1.596	1.600	1.603	1.607	1.611	1.614	1.618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.21	1.622	1.626	1.629	1.633	1.637	1.641	1.644	1.648	1.652	1.656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.22	1.660	1.663	1.667	1.671	1.675	1.679	1.683	1.687	1.690	1.694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.23	1.698	1.702	1.706	1.710	1.714	1.718	1.722	1.726	1.730	1.734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.24	1.738	1.742	1.746	1.750	1.754	1.758	1.762	1.766	1.770	1.774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.25	1.778	1.782	1.786	1.791	1.795	1.799	1.803	1.807	1.811	1.816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.26	1.820	1.824	1.828	1.832	1.837	1.841	1.845	1.849	1.854	1.858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.27	1.862	1.866	1.871	1.875	1.879	1.884	1.888	1.892	1.897	1.901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.28	1.905	1.910	1.914	1.919	1.923	1.928	1.932	1.936	1.941	1.945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.29	1.950	1.954	1.959	1.963	1.968	1.972	1.977	1.982	1.986	1.991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.30	1.995	2.000	2.004	2.009	2.014	2.018	2.023	2.028	2.032	2.037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.31	2.042	2.046	2.051	2.056	2.061	2.065	2.070	2.075	2.080	2.084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.32	2.089	2.094	2.099	2.104	2.109	2.113	2.118	2.123	2.128	2.133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.33	2.138	2.143	2.148	2.153	2.158	2.163	2.168	2.173	2.178	2.183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.34	2.188	2.193	2.198	2.203	2.208	2.213	2.218	2.223	2.228	2.234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.35	2.239	2.244	2.249	2.254	2.259	2.265	2.270	2.275	2.280	2.286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.36	2.291	2.296	2.301	2.307	2.312	2.317	2.323	2.328	2.333	2.339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.37	2.344	2.350	2.355	2.360	2.366	2.371	2.377	2.382	2.388	2.393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.38	2.399	2.404	2.410	2.415	2.421	2.427	2.432	2.438	2.443	2.449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.39	2.455	2.460	2.466	2.472	2.477	2.483	2.489	2.495	2.500	2.506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
0.40	2.512	2.518	2.523	2.529	2.535	2.541	2.547	2.553	2.559	2.564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.41	2.570	2.576	2.582	2.588	2.594	2.600	2.606	2.612	2.618	2.624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.42	2.630	2.636	2.642	2.649	2.655	2.661	2.667	2.673	2.679	2.685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
0.43	2.692	2.698	2.704	2.710	2.716	2.723	2.729	2.735	2.742	2.748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.44	2.754	2.761	2.767	2.773	2.780	2.786	2.793	2.799	2.805	2.812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.45	2.818	2.825	2.831	2.838	2.844	2.851	2.858	2.864	2.871	2.877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.46	2.884	2.891	2.897	2.904	2.911	2.917	2.924	2.931	2.938	2.944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.47	2.951	2.958	2.965	2.972	2.979	2.985	2.992	2.999	3.006	3.013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.48	3.020	3.027	3.034	3.041	3.048	3.055	3.062	3.069	3.076	3.083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
0.49	3.090	3.097	3.105	3.112	3.119	3.126	3.133	3.141	3.148	3.155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

எதிர் மடக்கை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	3.162	3.170	3.177	3.184	3.192	3.199	3.206	3.214	3.221	3.228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
0.51	3.236	3.243	3.251	3.258	3.266	3.273	3.281	3.289	3.296	3.304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.52	3.311	3.319	3.327	3.334	3.342	3.350	3.357	3.365	3.373	3.381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.53	3.388	3.396	3.404	3.412	3.420	3.428	3.436	3.443	3.451	3.459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.54	3.467	3.475	3.483	3.491	3.499	3.508	3.516	3.524	3.532	3.540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.55	3.548	3.556	3.565	3.573	3.581	3.589	3.597	3.606	3.614	3.622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
0.56	3.631	3.639	3.648	3.656	3.664	3.673	3.681	3.690	3.698	3.707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.57	3.715	3.724	3.733	3.741	3.750	3.758	3.767	3.776	3.784	3.793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.58	3.802	3.811	3.819	3.828	3.837	3.846	3.855	3.864	3.873	3.882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
0.59	3.890	3.899	3.908	3.917	3.926	3.936	3.945	3.954	3.963	3.972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
0.60	3.981	3.990	3.999	4.009	4.018	4.027	4.036	4.046	4.055	4.064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
0.61	4.074	4.083	4.093	4.102	4.111	4.121	4.130	4.140	4.150	4.159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.62	4.169	4.178	4.188	4.198	4.207	4.217	4.227	4.236	4.246	4.256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.63	4.266	4.276	4.285	4.295	4.305	4.315	4.325	4.335	4.345	4.355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.64	4.365	4.375	4.385	4.395	4.406	4.416	4.426	4.436	4.446	4.457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.65	4.467	4.477	4.487	4.498	4.508	4.519	4.529	4.539	4.550	4.560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.66	4.571	4.581	4.592	4.603	4.613	4.624	4.634	4.645	4.656	4.667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
0.67	4.677	4.688	4.699	4.710	4.721	4.732	4.742	4.753	4.764	4.775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.68	4.786	4.797	4.808	4.819	4.831	4.842	4.853	4.864	4.875	4.887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
0.69	4.898	4.909	4.920	4.932	4.943	4.955	4.966	4.977	4.989	5.000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
0.70	5.012	5.023	5.035	5.047	5.058	5.070	5.082	5.093	5.105	5.117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
0.71	5.129	5.140	5.152	5.164	5.176	5.188	5.200	5.212	5.224	5.236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
0.72	5.248	5.260	5.272	5.284	5.297	5.309	5.321	5.333	5.346	5.358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
0.73	5.370	5.383	5.395	5.408	5.420	5.433	5.445	5.458	5.470	5.483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
0.74	5.495	5.508	5.521	5.534	5.546	5.559	5.572	5.585	5.598	5.610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0.75	5.623	5.636	5.649	5.662	5.675	5.689	5.702	5.715	5.728	5.741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
0.76	5.754	5.768	5.781	5.794	5.808	5.821	5.834	5.848	5.861	5.875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
0.77	5.888	5.902	5.916	5.929	5.943	5.957	5.970	5.984	5.998	6.012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
0.78	6.026	6.039	6.053	6.067	6.081	6.095	6.109	6.124	6.138	6.152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0.79	6.166	6.180	6.194	6.209	6.223	6.237	6.252	6.266	6.281	6.295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
0.80	6.310	6.324	6.339	6.353	6.368	6.383	6.397	6.412	6.427	6.442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
0.81	6.457	6.471	6.486	6.501	6.516	6.531	6.546	6.561	6.577	6.592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.82	6.607	6.622	6.637	6.653	6.668	6.683	6.699	6.714	6.730	6.745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.83	6.761	6.776	6.792	6.808	6.823	6.839	6.855	6.871	6.887	6.902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
0.84	6.918	6.934	6.950	6.966	6.982	6.998	7.015	7.031	7.047	7.063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
0.85	7.079	7.096	7.112	7.129	7.145	7.161	7.178	7.194	7.211	7.228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.86	7.244	7.261	7.278	7.295	7.311	7.328	7.345	7.362	7.379	7.396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.87	7.413	7.430	7.447	7.464	7.482	7.499	7.516	7.534	7.551	7.568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0.88	7.586	7.603	7.621	7.638	7.656	7.674	7.691	7.709	7.727	7.745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
0.89	7.762	7.780	7.798	7.816	7.834	7.852	7.870	7.889	7.907	7.925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
0.90	7.943	7.962	7.980	7.998	8.017	8.035	8.054	8.072	8.091	8.110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
0.91	8.128	8.147	8.166	8.185	8.204	8.222	8.241	8.260	8.279	8.299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
0.92	8.318	8.337	8.356	8.375	8.395	8.414	8.433	8.453	8.472	8.492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
0.93	8.511	8.531	8.551	8.570	8.590	8.610	8.630	8.650	8.670	8.690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.94	8.710	8.730	8.750	8.770	8.790	8.810	8.831	8.851	8.872	8.892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.95	8.913	8.933	8.954	8.974	8.995	9.016	9.036	9.057	9.078	9.099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
0.96	9.120	9.141	9.162	9.183	9.204	9.226	9.247	9.268	9.290	9.311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0.97	9.333	9.354	9.376	9.397	9.419	9.441	9.462	9.484	9.506	9.528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
0.98	9.550	9.572	9.594	9.616	9.638	9.661	9.683	9.705	9.727	9.750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
0.99	9.772	9.795	9.817	9.840	9.863	9.886	9.908	9.931	9.954	9.977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

இயல் நிலைப் பரவல்

அட்டவணை மதிப்புகள் z மதிப்புகளுக்கு இடது புறமுள்ள பரப்பைக் குறிக்கின்றன

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

இயல் நிலைப் பரவல்

அட்டவணை மதிப்புகள் z மதிப்புகளுக்கு இடது புறமுள்ள பரப்பைக் குறிக்கின்றன

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

அடுக்குறி சார்பு எண்கள்

e^{-m} இன் மதிப்புகள் (பாய்சான் பரவலுக்கு $0 < m < 1$)

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
0.1	0.9048	.8957	.8860	.8781	.8694	.8607	.8521	.8437	.8353	.8270
0.2	0.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
0.3	0.7408	.7334	.7261	.7189	.7178	.7047	.6977	.6907	.6839	.6771
0.4	0.6703	.6636	.6570	.6505	.6440	.6376	.6313	.6250	.6188	.6125
0.5	0.6065	.6005	.5945	.5883	.5827	.5770	.5712	.5655	.5599	.5543
0.6	.5488	.5434	.5379	.5326	.5278	.5220	.5160	.5117	.5066	.5016
0.7	0.4966	.4916	.4868	.4810	.4771	.4724	.4670	.4630	.4584	.4538
0.8	0.4493	.4449	.4404	.4360	.4317	.4274	.4232	.4190	.4148	.4107
0.9	0.4066	.4025	.3985	.3946	.3606	.3867	.3829	.3791	.3753	.5716

(m = 1, 2, 3, ... 10)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^{-m}	.36788	.13534	.04979	.07832	.00698	.00279	.00092	.000395	.000123	.000045

குறிப்பு: m–ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு அடுக்குக் குறி விதியைப் பயன்படுத்தலாம்.

எ.கா.: $e^{-2.35} = (e^{-2.0})(e^{-0.35}) = (.13534)(.7047) = 0.095374$

சீரற்ற எண்கள்

4652	3819	8431	2150	2352	2472	0043	3488
9031	7617	1220	4129	7148	1943	4890	1749
2030	2327	7353	6007	9410	9179	2722	3445
0641	1489	0828	0385	8488	0422	7209	4950
8479	6062	5593	6322	9439	4996	1322	4918
9917	3490	5533	2577	4348	0971	2580	1943
6376	9899	9259	5117	1336	0146	0680	4052
7287	0983	3236	3252	0277	8001	6058	4501
0592	4912	3457	8773	5146	2519	3931	6794
6499	9118	3711	8838	0691	1425	7768	9544
0769	1109	7909	4528	8772	1876	2113	4781
8678	4873	2061	1835	0954	5026	2967	6560
0178	7794	6488	7364	4094	1649	2284	7753
3392	0963	6364	5762	0322	2592	3452	9002
0264	6009	1311	5873	5926	8597	9051	8995
4089	7732	8163	2798	1984	1292	0041	2500
9376	7365	7987	1937	2251	3411	6737	0367
3039	3780	2137	7641	4030	1604	2517	9211
8971	8653	1855	5285	5631	2649	6696	5475
0375	4153	5199	5765	2067	6627	3100	5716
9092	4773	0002	7000	7800	2292	2933	6125
2464	1038	3163	3569	715	2029	2538	7080
3027	6215	3125	5856	9543	3660	0255	5544
5754	9247	1164	3283	1865	5274	5471	1346
4358	3716	6949	8502	1573	5763	5046	7135
7178	8324	8379	7365	4577	4864	0629	5100
5035	5939	3665	2160	6700	7249	1738	2721
3318	0220	3611	9887	4608	8664	2185	7290
9058	1735	7435	6822	6622	8286	8901	5534
7886	5182	7595	0305	4903	3306	8088	3899
3354	8454	7386	1333	5345	6565	3159	3991
3415	7671	0846	7100	1790	9449	6285	2525
3918	5872	7898	6125	2268	1898	0755	6034
6138	9045	6950	8843	6533	0917	6673	5721
3828	1704	2835	4677	4637	7329	3156	3291
1349	0417	9311	9787	1284	0769	8422	1077
4234	0248	7760	6504	2754	4044	0842	9080
6880	3201	7044	3657	5263	0374	7563	6599
0714	5008	5076	1134	5342	1608	5179	0967
3448	6421	3304	0583	12650	0662	7257	0766
5711	7343	7539	3684	9397	5335	4031	1486
2588	3301	0553	2427	3598	2580	7017	9176
8581	4253	7404	5264	5411	3431	3092	8573
8475	6322	3949	9675	6533	1133	8776	2216
0272	5624	8549	5552	7469	2799	2882	9620
7383	7795	7939	2652	4456	6993	2950	8573

புள்ளியியல்
மேல்நிலை முதலாமாண்டு
வல்லுநர்கள், மேலாய்வாளர்கள் மற்றும் நூலாசிரியர்கள்

பாடப்பொருள் வல்லுநர்கள்

Dr. ஜி. கோபால்
பேராசிரியர் மற்றும் துறைத்தலைவர், (ஓய்வு)
புள்ளியியல் துறை, சென்னை பல்கலைக்கழகம் , சென்னை.

Dr. ஜி. ஸ்டீபன் வின்சென்ட்
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறைத்தலைவர், (ஓய்வு)
புள்ளியியல் துறை, செயின்ட் ஜோசப் கல்லூரி, திருச்சி.

Dr. ஆர். இராவணன்
முதல்வர், திரு எ. கோவிந்தசாமி அரசு கலைக் கல்லூரி,
திண்டிவனம்.

Dr. கே. செந்தாமரைக் கண்ணன்
பேராசிரியர் மற்றும் தலைவர், புள்ளியியல் துறை,
மனோன்மணியம் சுந்தரனார் பல்கலைக்கழகம், திருநெல்வேலி.

Dr. ஏ. லோகநாதன்
பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
மனோன்மணியம் சுந்தரனார் பல்கலைக்கழகம், திருநெல்வேலி.

Dr. ஆர். விஜயராகவன்
பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
பாரதியார் பல்கலைக் கழகம், கோயம்புத்தூர்.

Dr. ஆர். கண்ணன்
பேராசிரியர் மற்றும் தலைவர், புள்ளியியல் துறை,
அண்ணாமலைப் பல்கலைக் கழகம், சிதம்பரம்.

Dr. என். விஸ்வநாதன்
இணைப் பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

Dr. ஆர்.கே. ராதா
துணைப் பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

மேலாய்வாளர்கள்

Dr. எம்.ஆர். சீனிவாசன்
பேராசிரியர் மற்றும் தலைவர், புள்ளியியல் துறை,
சென்னை பல்கலைக்கழகம் , சென்னை.

Dr. பி. தனவந்தன்
பேராசிரியர் மற்றும் தலைவர், புள்ளியியல் துறை,
பாண்டிச்சேரி பல்கலைக்கழகம், பாண்டிச்சேரி.

திருமதி. எம். சுசிலா
இணை இயக்குநர், பொருளியல் மற்றும் புள்ளியியல் துறை,
தமிழ் நாடு அரசு, சென்னை.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக் குழு

தலைமை ஒருங்கிணைப்பாளர்

வடிவமைப்பு – ஆக்கம்
சீனிவாசன் நடராஜன்

வடிவமைப்பு
JOY கிராபிக்ஸ், சென்னை.

In-House – QC
கோபு ராசுவேல்
மனோகர் இராதாகிருஷ்ணன்
ஜெரால்ட்
ரகுபதி

அட்டை வடிவமைப்பு
கதிர் ஆறுமுகம்

ஒருங்கிணைப்பு
ரமேஷ் முனிசாமி

தட்டச்சு
இ.எஸ்.ஆர். ராணி சுப்புலக்ஷ்மி
DIET–வானரமுட்டி, தூத்துகுடி மாவட்டம்.

மணிகண்டன் சென்னை.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. ஜி. ஞானசுந்தரம்
தலைமை ஆசிரியர், (ஓய்வு)
எஸ். எஸ்.வி. மேல்நிலைப்பள்ளி, பார்க் டவுன், சென்னை.

திரு. பி. ரெங்கராஜன்
முதுகலை ஆசிரியர், (ஓய்வு)
தியாகராஜர் மேல்நிலைப்பள்ளி, மதுரை.

திரு. எஸ். ஜான் கென்னடி
முதுகலை ஆசிரியர்,
செயின்ட் சேவியர்ஸ் மேல்நிலைப்பள்ளி, புரதகுடி, திருச்சி.

திருமதி. அல். நாகம்மை
முதுகலை ஆசிரியை,
சேவா சங்கம் பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி, திருச்சி.

திருமதி. இராம லக்ஷ்மி
முதுகலை ஆசிரியை,
சுகுனி பாய் சனாதன தர்மா பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி, சென்னை.

திருமதி. மாலா பாஸ்கரன்
முதுகலை ஆசிரியை,
அரசு பெண்கள் மேல்நிலைப்பள்ளி, நந்திவரம், காஞ்சிபுரம்.

திரு. எம். பூபாலன்
முதுகலை ஆசிரியர்,
ஜமீன்தார் மேல்நிலைப்பள்ளி, தொரையூர், திருச்சி.

திரு. ஆவுடையப்பன்
முதுகலை ஆசிரியர்,
அரசு பெண்கள் மேல்நிலைப்பள்ளி, அசோக் பில்லர், சென்னை.

திரு. ஜி.கே. கணேசன்
முதுகலை ஆசிரியர்,
கே.கே. நாயுடு மேல்நிலைப்பள்ளி, கோயம்புத்தூர்.

திரு. நாக மாதேஸ்வரன்
முதுகலை ஆசிரியர்,
மாநிலப் பெண்கள் மேல்நிலைப்பள்ளி, எழும்பூர், சென்னை.

திருமதி. சோபனா ராணி
முதுகலை ஆசிரியை,
கணேஷ் பாய் கலாடா ஜெயின் பெண்கள் மேல்நிலைப்பள்ளி, சென்னை.

திருமதி. சித்ரா
முதுகலை ஆசிரியை,
தாராபூர் & லோகநாதன் பெண்கள் மேல்நிலைப்பள்ளி, சென்னை.

ICT ஒருங்கிணைப்பாளர்

திரு. டி. வாசுராஜ்
பட்டதாரி ஆசிரியர், ஊ.ஒ.ந.நி. பள்ளி, கொசப்பூர்,
திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

பாடநூல் ஒருங்கிணைப்பாளர்

திரு. மு. ரமேஷ்
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அ. ஆ. மேல்நிலைப்பள்ளி, ஆலங்காயம், வேலூர் மாவட்டம்.

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்