(46) રેખાઓ $x\cos\beta + y\sin\beta = \frac{5\pi}{2}$ અને $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{\pi}{2}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $-\alpha-\beta$ (B) $\alpha+\beta$ (C) $|\alpha+\beta|$ (D) $|\beta-\alpha|$

ઉકેલ : રેખા $x\cos\beta + y\sin\beta = \frac{5\pi}{2}$ નો ઢાળ $m_1 = -\cot\beta$

રેખા $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{\pi}{2}$ નો ઢાળ $m_2 = -\cot\alpha$

જો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય તો,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-\cot\beta + \cot\alpha}{1+\cot\alpha\cot\beta}\right|$$

$$= \left|\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$\tan\theta = \pm\tan(\beta-\alpha)$$

$\therefore \quad \theta = \pm(\beta-\alpha)$ આથી, $\theta = |\beta-\alpha|$ **જવાબ : (D)**

(47) જો આપેલ બિંદુના પ્રચલ યામ $(\tan\theta - \sin\theta, \tan\theta + \sin\theta)$ હોય, તો આપેલા બિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 - y^2 = 16xy$ (B) $\left(x^2 - y^2\right)^2 = 16xy$

(C) $\left(x^2 - y^2\right)^2 = 12xy$ (D) $x^2 - y^2 = 12xy$

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ બિંદુ (x, y) છે.

$\therefore \quad (x, y) = (\tan\theta - \sin\theta, \tan\theta + \sin\theta)$

$\therefore \quad x = \tan\theta - \sin\theta,\ y = \tan\theta + \sin\theta$

તેથી $\quad \tan\theta = \frac{x+y}{2},\ \sin\theta = \frac{y-x}{2}$

$\cot\theta = \frac{2}{x+y},\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{y-x}$

હવે, $\quad \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{y-x}\right)^2 - \left(\frac{2}{x+y}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \quad 4(x+y)^2 - 4(y-x)^2 = (y-x)^2(x+y)^2$$

$$\therefore \quad 4\left[x^2 + 2xy + y^2 - y^2 + 2xy - x^2\right] = \left(x^2 - y^2\right)^2$$

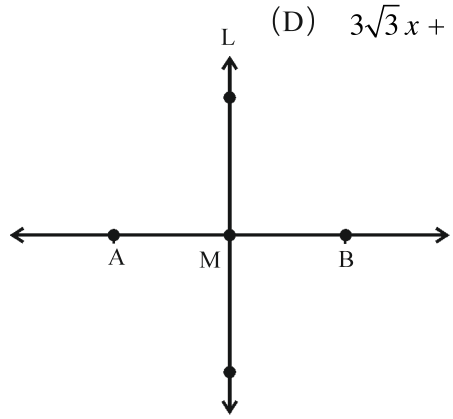
$\therefore \quad 16xy = \left(x^2 - y^2\right)^2$ **જવાબ : (B)**

(48) જો કોઈ રેખાને સાપેક્ષ બિંદુ $\left(3\sqrt{3}, 5\right)$ નું પ્રતિબિંબ $\left(5\sqrt{3}, 7\right)$ હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ ....

(A) $3\sqrt{3}x + y + 18 = 0$ (B) $\sqrt{3}x + y + 18 = 0$

(C) $\sqrt{3}x + y - 18 = 0$ (D) $3\sqrt{3}x + y - 18 = 0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.19

ધારો કે $A\left(3\sqrt{3}, 5\right)$ નું પ્રતિબિંબ $B\left(5\sqrt{3}, 7\right)$ છે તથા $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ M છે.

$\therefore$ Mના યામ $= \left(\frac{3\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = \left(4\sqrt{3}, 6\right)$

હવે, $\overline{AB}$ નો ઢાળ $= \frac{7-5}{5\sqrt{3}-3\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\overline{AB}$ ને લંબરેખા L હોય તો L નો ઢાળ $= -\sqrt{3}$. તે બિંદુ $M\left(4\sqrt{3}, 6\right)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $y - 6 = -\sqrt{3}\left(x - 4\sqrt{3}\right)$

$\therefore$ $y - 6 = -\sqrt{3}x + 12$

$\therefore$ $\sqrt{3}x + y - 18 = 0$ **જવાબ : (C)**

(49) ΔABC માં $(-3, -2)$, $(5, 0)$ અને $\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણના અંતઃકેન્દ્રના યામ ....

(A) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (C) $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (D) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

ઉકેલ : ધારો કે $A(-3, -2)$, $B(5, 0)$ અને $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ છે.

$$\therefore\ a = BC = \sqrt{\left(5+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{13}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{17}$$

$$b = CA = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}+3\right)^2 + \left(\frac{13}{3}+2\right)^2} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{17}$$

$$c = AB = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

જો ΔABC નું અંતઃકેન્દ્ર I હોય તો,

Iના યામ $= \left(\dfrac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \dfrac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$

$$= \left(\frac{\frac{5}{3}\sqrt{17}\,(-3) + \frac{5}{3}\sqrt{17}\,(5) + 2\sqrt{17}\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{5}{3}\sqrt{17} + \frac{5}{3}\sqrt{17} + 2\sqrt{17}}, \frac{\frac{5}{3}\sqrt{17}\,(-2) + \frac{5}{3}\sqrt{17}\,(0) + 2\sqrt{17}\left(\frac{13}{3}\right)}{\frac{5}{3}\sqrt{17} + \frac{5}{3}\sqrt{17} + 2\sqrt{17}}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{5}{3}(-3) + \frac{5}{3}(5) - \frac{2}{3}}{\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + 2}, \frac{\frac{5}{3}(-2) + \frac{5}{3}(0) + 2\left(\frac{13}{3}\right)}{\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + 2}\right) = \left(\frac{-15+25-2}{5+5+6}, \frac{-10+26}{5+5+6}\right) = \left(\frac{8}{16}, \frac{16}{16}\right)$$

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્રના યામ $= \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ **જવાબ : (B)**

(50) જેનો Y અંતઃખંડ તેના X અંતઃખંડ કરતાં 8 જેટલો વધારે હોય તેવી $(5, -3)$માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

(A) $\frac{x}{10} + \frac{y}{2} = -1$ અને $\frac{x}{4} + \frac{y}{-12} = \frac{3}{2}$ (B) $\frac{x}{-10} + \frac{y}{-2} = 1$ અને $\frac{x}{-4} - \frac{y}{12} = -1$

(C) $\frac{x}{10} + \frac{y}{2} = -1$ અને $\frac{x}{4} + \frac{y}{12} = 1$ (D) $\frac{x}{10} + \frac{y}{-3} = \frac{3}{2}$ અને $\frac{x}{4} + \frac{2y}{12} = \frac{3}{4}$

ઉકેલ : ધારો કે X અંતઃખંડ a અને Y અંતઃખંડ b છે.

$\therefore$ $b = a + 8$ થશે.

તેથી, માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a+8} = 1$ થશે. વળી તે $(5, -3)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $\frac{5}{a} - \frac{3}{a+8} = 1$

$\therefore$ $5a + 40 - 3a = a^2 + 8a$

$\therefore$ $a^2 + 6a - 40 = 0$

$\therefore$ $(a+10)(a-4) = 0$

$\therefore$ $a = -10$ અથવા $a = 4$

$\therefore$ જો $a = -10$ તો $b = -2$. તેથી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{-10} + \frac{y}{-2} = 1$

$\therefore$ $\frac{x}{10} + \frac{y}{2} = -1$

$\therefore$ જો $a = 4$ તો $b = 12$. તેથી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{4} + \frac{y}{12} = 1$. **જવાબ : (C)**

(51) $A(-4, 6)$, $B(2, -2)$ અને બિંદુ C એ રેખા $2x-y+1=0$ પરનું બિંદુ હોય, તો ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ ....

(A) $2x+y+3=0$ (B) $2x-y-3=0$ (C) $2x-y+3=0$ (D) $2x+y-3=0$

ઉકેલ : અહીં $A(-4, 6)$, $B(2, -2)$ છે તથા બિંદુ C એ રેખા $2x-y+1=0$ પર હોવાથી $C(x, 2x+1)$ લઈએ.

$\therefore$ ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રના યામ (α, β) હોય, તો

$\alpha = \frac{-4+2+x}{3}$, $\beta = \frac{6-2+2x+1}{3}$

$\therefore$ $x = 3\alpha + 2$, $2x = 3\beta - 5$

$\therefore$ $2(3\alpha + 2) = 3\beta - 5$

$\therefore$ $6\alpha - 3\beta + 9 = 0$

$\therefore$ $2\alpha - \beta + 3 = 0$

વ્યાપક રીતે, મધ્યકેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ $2x-y+3=0$. **જવાબ : (C)**

(52) $A(a, 0)$, $B(0, 0)$, $C(0, c)$ શિરોબિંદુવાળા ΔABC ની મધ્યગાઓ $\overline{CD}$ અને $\overline{BE}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો ......

(A) $c^2 = 4a^2$ (B) $c^2 = 2a^2$ (C) $a^2 = 4c^2$ (D) $a^2 = 2c^2$

ઉકેલ : $\overline{CD}$ અને $\overline{BE}$ મધ્યગાઓ છે.

$\therefore$ D એ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ થશે અને E એ $\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ થશે.

$\therefore$ D ના યામ $= \left(\frac{a}{2}, 0\right)$, E ના યામ $= \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{CD}} \perp \overline{\mathrm{BE}}$. આથી, ($\overline{\mathrm{CD}}$ નો ઢાળ) ($\overline{\mathrm{BE}}$ નો ઢાળ) $= -1$

$$\therefore \left(\frac{c-0}{0-\frac{a}{2}}\right)\left(\frac{0-\frac{c}{2}}{0-\frac{a}{2}}\right) = -1$$

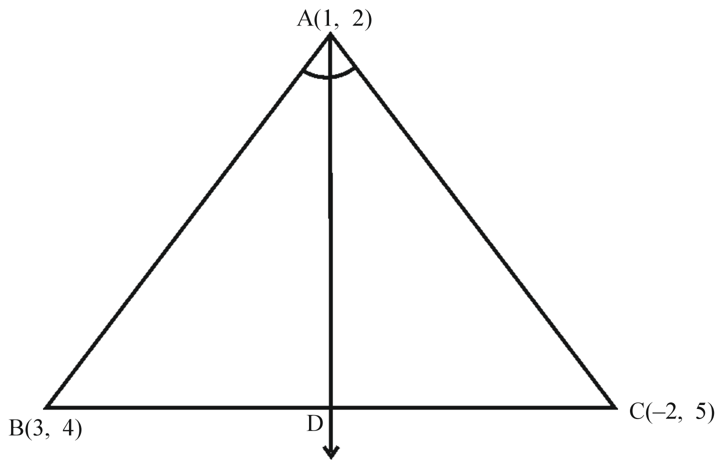
$$\therefore \frac{\frac{-c^2}{2}}{\frac{a^2}{4}} = -1. \quad \text{આથી,} \quad \frac{-2c^2}{a^2} = -1$$

$\therefore 2c^2 = a^2$ **જવાબ : (D)**

(53) $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ અને $C(-2, 5)$ એ ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ છે. $\angle A$ નો દ્વિભાજક $\overline{BC}$ ને જે બિંદુઓમાં છેદે તે બિંદુના યામ ....

(A) $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ (B) $\left(1, \frac{22}{5}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right)$ (D) $\left(\frac{22}{5}, \frac{2}{5}\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.20

અહીં, $AB^2 = (1-3)^2 + (2-4)^2 = 4+4 = 8.$ આથી, $AB = 2\sqrt{2}$

$AC^2 = (1+2)^2 + (2-5)^2 = 9+9 = 18.$ આથી, $AC = 3\sqrt{2}$

$\therefore$ D એ $\overline{BC}$ નું B તરફથી $BD : DC = AB : AC = 2:3$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ D ના યામ $= \left(\dfrac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \dfrac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$

$= \left(\dfrac{\frac{2}{3}(-2)+3}{\frac{2}{3}+1}, \dfrac{\frac{2}{3}(5)+4}{\frac{2}{3}+1}\right) = \left(1, \frac{22}{5}\right)$ **જવાબ : (B)**

(54) પરસ્પર લંબ ન હોય તેવી રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો $\alpha =$ ...... $(b_1 \neq 0, b_2 \neq 0)$

(A) $tan^{-1}\left(\dfrac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

(B) $tan^{-1}\left|\dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 - b_1b_2}\right|$

(C) $tan^{-1}\left(\left|\dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right|\right)$

(D) $tan^{-1}\left(\left|\dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right|\right)$

ઉકેલ : અહીં રેખા $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ નો ઢાળ $m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$.

રેખા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ નો ઢાળ $m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$.

જો બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણાનું માપ α હોય તો,

$\therefore$ $tan\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$

$$= \frac{\left|-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right|}{\left|1+\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)\right|}$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \left|\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right|$$

$$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\left|\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right|\right)$$

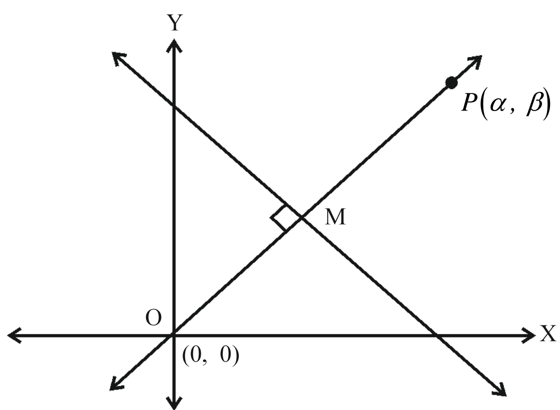
જવાબ : (D)

(55) રેખા $ax+by+c=0$ ને સાપેક્ષ ઊગમબિંદુનું પ્રતિબિંબ ......

(A) $\left(\frac{2ac}{a^2+b^2}, \frac{2bc}{a^2+b^2}\right)$ (B) $\left(\frac{-2ac}{a^2+b^2}, \frac{2bc}{a^2+b^2}\right)$

(C) $\left(\frac{-2ac}{a^2+b^2}, \frac{-2bc}{a^2+b^2}\right)$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.21

ધારો કે $O(0,0)$ નું પ્રતિબિંબ $P(\alpha, \beta)$ છે.

વળી M એ $\overline{OP}$ નું મધ્યબિંદુ છે. તેથી $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ થશે.

M એ રેખા $ax+by+c=0$ પરનું બિંદુ છે.

$$\therefore \quad a\left(\frac{\alpha}{2}\right)+b\left(\frac{\beta}{2}\right)+c=0$$

$$\therefore \quad a\alpha + b\beta + 2c = 0 \qquad (1)$$

આપેલ રેખા $ax+by+c=0$ નો ઢાળ $m_1 = -\frac{a}{b}$

$\overline{OP}$ નો ઢાળ $m_2 = \frac{\beta-0}{\alpha-0} = \frac{\beta}{\alpha}$

$$\therefore \quad m_1m_2 = -1$$

$\therefore \quad \left(-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = -1$

$\therefore \quad -\frac{a\beta}{\alpha b} = -1$ આથી $\alpha = \frac{a}{b}\beta$ (2)

(1) અને (2) પરથી $a\left(\frac{a\beta}{b}\right) + b\beta + 2c = 0$

$\therefore \quad a^2\beta + b^2\beta = -2bc.$ આથી $\beta = \frac{-2bc}{a^2+b^2}$ તથા $\alpha = \frac{-2ac}{a^2+b^2}$

રેખા $ax+by+c=0$ ને સાપેક્ષ ઊગમબિંદુનું પ્રતિબિંબ $\left(\frac{-2ac}{a^2+b^2}, \frac{-2bc}{a^2+b^2}\right)$ **જવાબ : (C)**

(56) રેખાઓ $p\left(p^2+1\right) x - y + q = 0$ અને $\left(p^2+1\right)^2 x + \left(p^2+1\right) y + 2q = 0$ એક સામાન્ય રેખાને લંબ હોય, તો......

[AIEEE : 2009]

(A) p ની કોઈ પણ કિંમત માટે નહિ. (B) p ની એક જ કિંમત માટે

(C) p ની બે જ કિંમતો માટે (D) p ની બેથી વધુ કિંમતો માટે

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓ સામાન્ય રેખાને લંબ છે.

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સમાંતર છે.

$\therefore \quad m_1 = m_2$ (સમતલીય હોવાથી)

$\therefore \quad p\left(p^2+1\right) = -\frac{\left(p^2+1\right)^2}{p^2+1}$

$\therefore \quad p\left(p^2+1\right) = -\left(p^2+1\right)$

$\therefore \quad p = -1$ $\left[\left(p^2+1\right) \neq 0\right]$ **જવાબ : (B)**

(57) રેખા $L: \frac{x}{5} + \frac{y}{b} = 1$ $(13, 32)$ માંથી પસાર થાય છે. રેખા K નું સમીકરણ $\frac{x}{c} + \frac{y}{3} = 1$ છે અને તે L ને સમાંતર છે, તો L અને K વચ્ચેનું અંતર = ... [AIEEE : 2010]

(A) $\frac{23}{\sqrt{15}}$ (B) $\sqrt{17}$ (C) $\frac{17}{\sqrt{15}}$ (D) $\frac{23}{\sqrt{17}}$

ઉકેલ : હવે રેખા $L: \frac{x}{5} + \frac{y}{b} = 1$ એ $(13, 32)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \quad \frac{13}{5} + \frac{32}{b} = 1$ આથી, $\frac{32}{b} = 1 - \frac{13}{5} = -\frac{8}{5}$

$\therefore \quad b = \frac{32 \times 5}{-8} = -20$

$\therefore$ રેખા Lનું સમીકરણ $\frac{x}{5} + \frac{y}{-20} = 1$ બને છે એટલે કે $4x - y = 20$. (1)

રેખા L એ રેખા Kને સમાંતર છે, એટલે કે $\frac{x}{c} + \frac{y}{3} = 1$ને સમાંતર છે.

તેમના ઢાળ સમાન છે.

$\therefore$ $4 = -\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{3}}$ આથી, $4 = \frac{-3}{c}$

$\therefore$ $c = \frac{-3}{4}$

$\therefore$ રેખા K એ $\frac{x}{-\frac{3}{4}} + \frac{y}{3} = 1$ આથી, $-4x + y = 3$

$4x - y + 3 = 0$ તથા $4x - y - 20 = 0$ વચ્ચેનું અંતર $\frac{|23|}{\sqrt{16+1}} = \frac{23}{\sqrt{17}}$. **જવાબ : (D)**

(58) રેખા $L(3, -2)$ માંથી પસાર થાય છે. તે રેખા $\sqrt{3}x + y = 1$ ની સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે. જો L એ X-અક્ષને છેદે તો રેખા Lનું સમીકરણ ...... [IIT : 2011]

(A) $y + \sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3} = 0$ (B) $y - \sqrt{3}x + 2 + 3\sqrt{3} = 0$

(C) $\sqrt{3}y - x + 3 + 2\sqrt{3} = 0$ (D) $\sqrt{3}y + x - 3 + 2\sqrt{3} = 0$

ઉકેલ : $(3, -2)$ માંથી પસાર થતી રેખા $y + 2 = m(x - 3)$ (1)

એ રેખા $\sqrt{3}\,x + y = 1$ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે. આ રેખાનો ઢાળ $= -\sqrt{3}$

$\therefore$ $\tan\frac{\pi}{3} = \left|\frac{m + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}m}\right|$ આથી, $\sqrt{3} = \pm\frac{m + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}m}$

$\therefore$ $m = \sqrt{3}$ અથવા 0.

અહીં રેખા X-અક્ષને છેદે છે, આથી, $m \neq 0$. આથી $m = \sqrt{3}$.

(1) માં મૂકતાં, જરૂરી રેખાનું સમીકરણ

$y + 2 = \sqrt{3}(x - 3)$ આથી, $y - \sqrt{3}\,x + 2 + 3\sqrt{3} = 0$ **જવાબ : (B)**

(59) રેખાઓ $x + y = |a|$ અને $ax - y = 1$ એકબીજાને પ્રથમ ચરણમાં છેદે છે. aની બધી જ શક્ય કિંમતોના ગણનો અંતરાલ = ... [AIEEE : 2010]

(A) $(0, \infty)$ (B) $(1, \infty)$ (C) $(-1, \infty)$ (D) $(-1, 1)$

ઉકેલ : ધારો કે $a > 0$.

રેખાઓ $x + y = a$ અને $ax - y = 1$ આપેલ છે.

જેનો સરવાળો કરતાં, $(a+1)\,x = a + 1$ આથી, $x = 1$. $(a \neq -1,\ a > 0)$

આથી, $1+y=a$ આથી, $y=a-1$

અહીં, $(1, a-1)$ એ પ્રથમ ચરણમાં છે. આથી, $a-1>0$. આથી, $a>1$

$\therefore \quad a \in (1, \infty)$

ધારો કે $a<0$. તેથી, રેખાઓ $x+y=-a$ અને $ax-y=1$ આપેલ છે. $(a \neq -1)$

જેનો સરવાળો કરતાં, $(1+a)\,x = 1-a$ આથી, $x=\frac{1-a}{1+a}$

આથી, $y=-a-\frac{1-a}{1+a} = \frac{-a-a^2-1+a}{1+a} = -\frac{a^2+1}{1+a}$

આથી, $\left(\frac{1-a}{1+a}, -\frac{a^2+1}{1+a}\right)$ એ પ્રથમ ચરણમાં આવશે.

$\therefore \quad \frac{1-a}{1+a}>0$ તથા $a+1<0$

$\therefore \quad \frac{a-1}{a+1}<0$ તથા $a+1<0$

$\therefore\ a-1>0 \Rightarrow a>1$

$\therefore\ a+1<0.$ તેથી $a<-1.$ વળી, $a-1>0 \Rightarrow a>1$ જે શક્ય નથી.

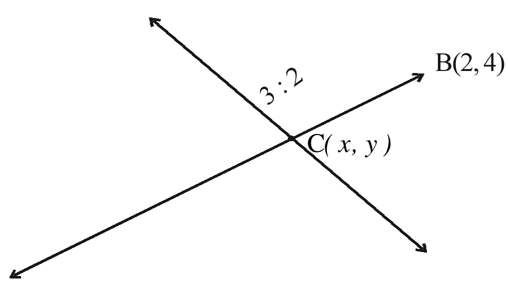
$a \in (1, \infty)$

નોંધ : $a=-1$ હોય તો $x+y=1$, $-x-y=1$ સમાંતર થાય. **જવાબ : (B)**

(60) રેખા $2x+y=k$ એક એવા બિંદુમાંથી પસાર થાય છે, જે $A(1,1)$ અને $B(2,4)$ને જોડતાં રેખાખંડનું A તરફથી $3:2$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તો k = ... [AIEEE : 2012]

(A) $\frac{29}{5}$ (B) 5 (C) 6 (D) $\frac{11}{5}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.22

જો $C(x, y)$ એ $\overline{AB}$નું $3:2$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો $(x, y)=\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)$

$x = \frac{3(2)+2(1)}{3+2}=\frac{8}{5}$, $y=\frac{3(4)+2(1)}{3+2} = \frac{14}{5}$

હવે $C\left(\frac{8}{5}, \frac{14}{5}\right)$ એ $2x + y = k$ પર છે.

$\therefore \frac{16}{5} + \frac{14}{5} = k.$ આથી, $k = \frac{30}{5} = 6$ **જવાબ : (C)**

(61) બિંદુ $(4, 3)$ માંથી પસાર થતી અને જેના અક્ષો પરના અંતઃખંડોનો સરવાળો -1 હોય, તેવી રેખાનું સમીકરણ = ... [AIEEE : 2004]

(A) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = -1$ (B) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = -1$

(C) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ અને $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$ (D) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$

ઉકેલ : a અને b એ અક્ષો પરના અંતઃખંડો છે. રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ છે. (1)

હવે, રેખા (1) એ $(4, 3)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1$ (2)

પરંતુ $a + b = -1$ (3)

(3) પરથી $b = -1 - a$ ને (2) માં મૂકતાં, $\frac{4}{a} + \frac{3}{-1-a} = 1$ (4)

$\therefore -4 - 4a + 3a = -a - a^2$

$\therefore a^2 = 4$. આથી $a = \pm 2$

જો $a = 2$, તો $b = -1 - 2 = -3$. જો $a = -2$, તો $b = -1 + 2 = 1$

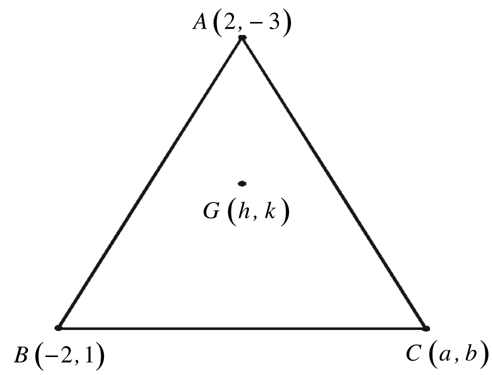
$\therefore$ રેખા એ $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$ એટલે કે $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ અને $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$. **જવાબ : (D)**

નોંધ : (4, 3) ફક્ત વિકલ્પ (D) નું જ સમાધાન કરે છે.

(62) જો $A(2, -3)$ અને $B(-2, 1)$ એ ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુ હોય અને ત્રીજું શિરોબિંદુ રેખા $2x + 3y = 9$ પર આવેલ હોય, તો ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ = ... [AIEEE : 2011]

(A) $x - y = 1$ (B) $2x + 3y = 1$ (C) $2x + 3y = 3$ (D) $2x - 3y = 1$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.23

ધારો કે ત્રીજું શિરોબિંદુ C$(a,\ b)$ છે તથા મધ્યકેન્દ્ર $G(h,k)$ છે.

હવે, $h = \frac{2-2+a}{3}$ અને $k = \frac{-3+1+b}{3}$

$\therefore \quad a = 3h$ અને $b = 3k + 2$ (1)

અહીં $C(a,b)$એ $2x+3y=9$ પર આવેલ છે.

$\therefore \quad 2a + 3b = 9$

$2(3h) + 3(3k+2) = 9$ ((1) પરથી)

$\therefore \quad 2h + 3k + 2 = 3$

$\therefore \quad 2h + 3k - 1 = 0$

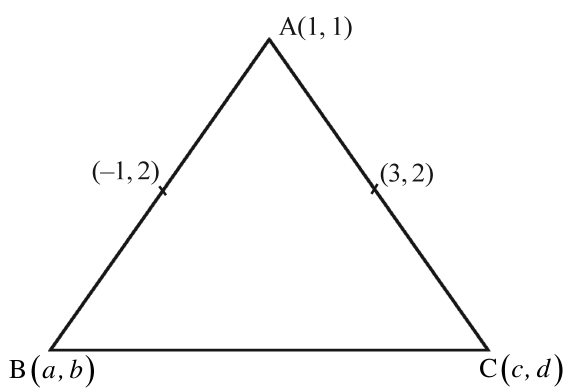
આથી $G(h,k)$નો બિંદુગણ એ $2x+3y-1=0$ છે. **જવાબ : (B)**

(63) જો ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ $(1,1)$ અને શિરોબિંદુમાંથી પસાર થતી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ $(-1,2)$ અને $(3,2)$ હોય, તો ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર = ...

(A) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (B) $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (D) $\left(1, \frac{7}{3}\right)$

[AIEEE : 2005]

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.24

અહીં, $a+1 = 2(-1), b+1 = 2(2)$ આથી, $a = -3,\ b = 3.$

$\therefore \quad B$ એ $(-3, 3)$ છે.

હવે, $c+1 = 6,\ d+1 = 4$ આથી, $c = 5,\ d = 3$

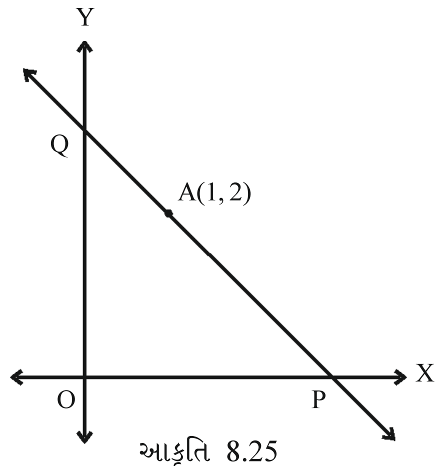
$\therefore \quad C$ એ $(5, 3)$ છે.

$\therefore$ મધ્યકેન્દ્ર એ $\left(\frac{1-3+5}{3}, \frac{1+3+3}{3}\right)$ એટલે કે, $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. **જવાબ : (D)**

(64) બિંદુ $(1, 2)$માંથી રેખા એ રીતે દોરવામાં આવે છે કે જેથી અક્ષોને P અને Q માં મળે તથા ત્રિકોણ OPQ બનાવે, જ્યાં O એ ઊગમબિંદુ છે. જો ત્રિકોણ OPQ નું ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ હોય, તો રેખા PQ નો ઢાળ = ... [AIEEE : 2012]

(A) $-\frac{1}{4}$ (B) -4 (C) -2 (D) $-\frac{1}{2}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.25

$A(1, 2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $y-2=m(x-1)$.

આ રેખા X-અક્ષને મળે ત્યાં $y=0$ થાય.

$$\therefore \quad -2=m(x-1)$$

$$\therefore \quad OP=1-\frac{2}{m}$$

આ રેખા Y-અક્ષને મળે ત્યાં $x=0$.

$y-2=-m$. આથી, $OQ=2-m$.

(ΔOPQ) નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{1}{2}(OP)(OQ)$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{m}\right)(2-m)=\frac{1}{2}\left(2-m-\frac{4}{m}+2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(4-\left(m+\frac{4}{m}\right)\right)$$

આથી (ΔOPQ) નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{4m-m^2-4}{2m}$

$f(m)=\frac{4m-m^2-4}{2m}$ લો. આથી, $f'(m)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{m^2}$

$\therefore$ (ΔOPQ) નું ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ બને તે માટે,

$f'(m)=0$. આથી $\frac{-1}{2}+\frac{2}{m^2}=0$. આથી $m^2=4$

$m=\pm 2$. તેથી, $m=-2$. $(m=2$ તો $OP=0)$

(નોંધ : $f''(m)=\frac{-4}{m^3}$ આથી $m=-2$ માટે $f''(m)>0$. $f(m)$ ન્યૂનતમ ક્ષેત્રફળ છે.) **જવાબ : (C)**

(65) જો x_1, x_2, x_3 અને y_1, y_2, y_3 એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં સમાન ગુણોત્તર ધરાવતા હોય, તો બિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) એ ...... [IIT : 1999]

(A) રેખા પર

(B) ઉપવલય પર

(C) વર્તુળ પર

(D) ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ

ઉકેલ : $x_2 = x_1 r,\ x_3 = x_1 r^2$ અને $y_2 = y_1 r,\ y_3 = y_1 r^2$.

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 r & y_1 r & 1 \\ x_1 r^2 & y_1 r^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} x_1 y_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 \\ r^2 & r^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

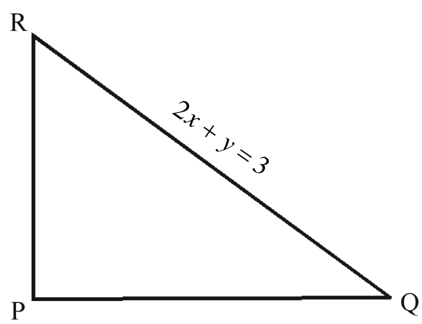
$\therefore$ બિંદુઓ એક રેખા પર છે એટલે કે તે સમરેખ છે. **જવાબ : (A)**

(66) જો સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણ PQR નો $P(2,1)$ આગળ કાટખૂણો હોય તથા જો રેખા $\overleftrightarrow{QR}$ નું સમીકરણ $2x+y=3$ હોય, તો રેખાઓ $\overleftrightarrow{PQ}$ અને $\overleftrightarrow{PR}$ નું સંયુક્ત સમીકરણ ...... [IIT : 1999]

(A) $3x^2-3y^2+8xy+20x+10y+25=0$ (B) $3x^2-3y^2+8xy-20x-10y+25=0$

(C) $3x^2-3y^2+8xy+10x+15y+20=0$ (D) $3x^2-3y^2-8xy-10x-15y-20=0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.26

અહીં $2x+y=3$ માટે $m=-2,\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ t=tan\alpha=1$

$m_1 = \frac{m-t}{1+mt} = \frac{-2-1}{1-2} = 3$

$\overleftrightarrow{PQ}$ અને $\overleftrightarrow{PR}$ પરસ્પર લંબ હોવાથી $m_2 = \frac{-1}{3}$

$\therefore\ y-1=3(x-2)$ અને $y-1=-\left(\frac{1}{3}\right)(x-2)$

$\therefore$ રેખાઓનું સંયુક્ત સમીકરણ $(y-3x+5)(3y+x-5) = 0$

$\therefore\ 3x^2-3y^2+8xy-20x-10y+25=0$ **જવાબ : (B)**

(67) જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ $PQRS$ નાં શિરોબિંદુઓ $P(1, 2), Q(4, 6), R(5, 7)$ અને $S(a, b)$ હોય, તો ......

[IIT : 1998]

(A) $a = 2, b = 4$ (B) $a = 3, b = 4$ (C) $a = 2, b = 3$ (D) $a = 2, b = 5$

ઉકેલ : વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.

$\therefore \left(\frac{1+5}{2}, \frac{7+2}{2}\right) = \left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+6}{2}\right)$

$\therefore$ $a = 2$ અને $b = 3$

જવાબ : (C)

(68) વક્ર $f(x) = x^2 + bx - b$ ના બિંદુ $(1, 1)$ આગળના સ્પર્શક તથા અક્ષો વડે પ્રથમ ચરણમાં ત્રિકોણ બને છે. જો તેનું ક્ષેત્રફળ 2 હોય, તો b = ...

[IIT : 2001]

(A) –1 (B) 3 (C) –3 (D) 1

ઉકેલ : $f(x) = x^2 + bx - b$

$\therefore$ $f'(x) = 2x + b$ આથી $(f'(x))_{(1,1)} = 2(1) + b = 2 + b$

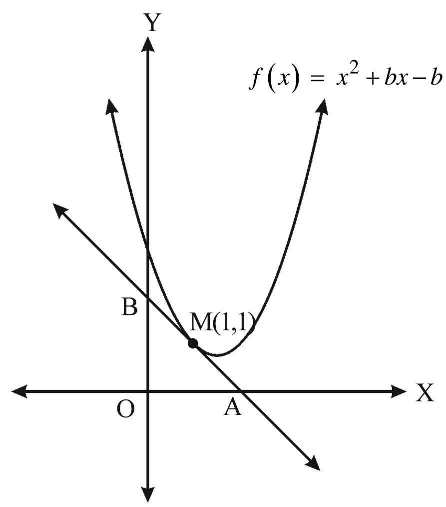
આમ, $(1, 1)$ આગળનો સ્પર્શકનો ઢાળ $2 + b$ મળે છે.

$\therefore$ $(1, 1)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ એ $y - 1 = (2 + b)(x - 1)$.

$\therefore$ $x - \frac{y}{2+b} = 1 - \frac{1}{2+b} = \frac{1+b}{2+b}$

$\therefore$ $\frac{x}{\frac{(1+b)}{2+b}} - \frac{y}{(2+b)\frac{(1+b)}{2+b}} = 1$

$\therefore$ $\frac{x}{\frac{(1+b)}{2+b}} - \frac{y}{1+b} = 1$



આકૃતિ 8.27

તે અક્ષો પરના અંતઃખંડોના સ્વરૂપમાં છે.

$OA = \frac{1+b}{2+b}$, $OB = -(1+b)$

$\therefore$ ત્રિકોણ OAB નું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2}\left(\frac{1+b}{2+b}\right)(-1)(1+b) = 2$ (આપેલ છે.)

$\therefore$ $(1+b)^2 = -4(2+b)$

$\therefore$ $1 + b^2 + 2b = -8 - 4b$

$\therefore$ $b^2 + 6b + 9 = 0$ $(b + 3)^2 = 0$

$\therefore$ $b = -3$.

જવાબ : (C)

(69) શિરોબિંદુઓ $\left(1, \sqrt{3}\right), (0, 0)$ અને $(2, 0)$ વડે બનતા ત્રિકોણનું અંતઃ કેન્દ્ર ...... [AIEEE : 2002]

(A) $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (D) $\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ઉકેલ : ધારો કે $A\left(1, \sqrt{3}\right), B(0, 0), C(2, 0)$ એ આપેલ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

હવે, $AB = \sqrt{(0-1)^2 + \left(0-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4+0} = 2$

અને $CA = \sqrt{(2-1)^2 + \left(0-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

આથી ΔABC એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્ર અને મધ્યકેન્દ્ર એક જ છે.

પણ ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર $\left(\frac{1+0+2}{3}, \frac{\sqrt{3}+0+0}{3}\right)$ છે.

આથી અંતઃકેન્દ્ર પણ $\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ થાય. **જવાબ : (D)**

(70) $(4, 0), (-1, -1), (3, 5)$ શિરોબિંદુ વડે બનતો ત્રિકોણ ...... [AIEEE : 2002]

(A) સમદ્વિબાજુ અને કાટકોણ (B) સમદ્વિબાજુ પણ કાટકોણ નહિ.

(C) કાટકોણ પણ સમદ્વિબાજુ નહિ. (D) કાટકોણ નહિ અને સમદ્વિબાજુ નહિ.

ઉકેલ : ધારો કે $A(4, 0), B(-1, -1)$ અને $C(3, 5)$ એ આપેલ બિંદુઓ છે.

તો $AB = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$,

$BC = \sqrt{(3+1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

અને $CA = \sqrt{(4-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$AB = CA$ પરથી ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ છે.

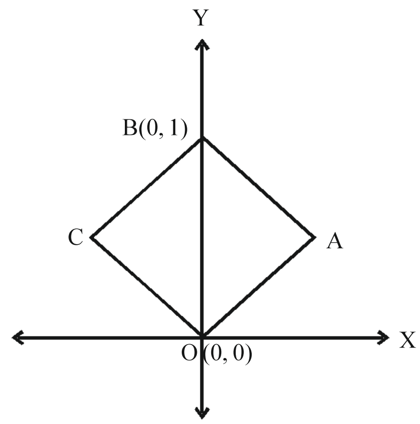
અને $BC^2 = AB^2 + CA^2$

આથી, ત્રિકોણ કાટકોણ છે. **જવાબ : (A)**

(71) રેખાઓ $y = mx, y = mx + 1, y = nx$ અને $y = nx + 1$ વડે રચાતા સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = ...
[IIT : 2001]

(A) $\frac{|m+n|}{(m-n)^2}$ (B) $\frac{2}{|m+n|}$ (C) $\frac{1}{(m+n)}$ (D) $\frac{1}{|m-n|}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.27

સમીકરણો ઉકેલતાં, ચાર શિરોબિંદુઓ નીચે પ્રમાણે મળે છે :

$O(0,0),\ A\left(\frac{1}{m-n}, \frac{m}{m-n}\right),\ B(0,1),\ C\left(\frac{1}{n-m}, \frac{n}{n-m}\right)$

$OABC \quad = 2(OAB$ નું ક્ષેત્રફળ$)$

$= 2(\frac{1}{2}$ આધાર $\times$ ઉંચાઈ$)$

$= (1-0)\left|\frac{1}{m-n}\right| = \frac{1}{|m-n|}$

(બે શિરોબિંદુઓ O અને B Y-અક્ષ પર છે અને આથી $\Delta = \frac{1}{2}$ પાયો $\times$ ઊંચાઈ, જ્યાં ઊંચાઈ એ A નો x-યામ છે.)

જવાબ : (D)

(72) રેખાઓ $3x+4y=9$ અને $y=mx+1$ ના છેદબિંદુના x-યામની પૂર્ણાંક કિંમતો m ની કેટલી પૂર્ણાંક કિંમતો માટે મળે ?

(A) 2 (B) 0 (C) 4 (D) 1 [IIT : 2001]

ઉકેલ : છેદબિંદુનો x-યામ.

$x = \frac{5}{3+4m} = \frac{5}{1}$ અથવા $\frac{5}{-1}$ અથવા $\frac{5}{5}$ અથવા $\frac{5}{-5}$ કારણ કે x એ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore\ 3+4m = 1,\ -1,\ 5$ અથવા -5

$\therefore\ 4m = -2\ \ -4,\ \ 2,\ -8$

$\therefore\ m = -\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, -2$ એ 4 કિંમતો છે.

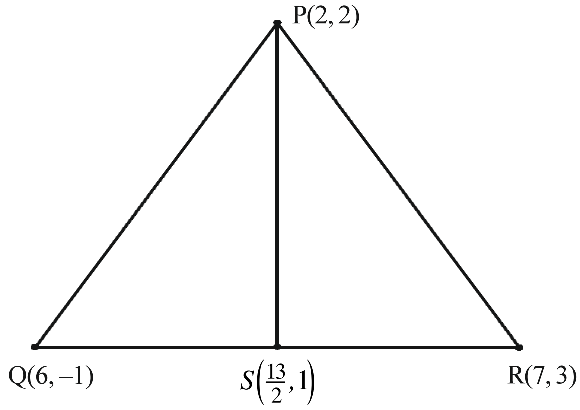
પરંતુ m ની પૂર્ણાંક કિંમતો માત્ર 2 (બે) એટલે –1 અને –2 છે.

જવાબ : (A)

(73) ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $P(2,2)$, $Q(6,-1)$ અને $R(7,3)$ છે અને મધ્યગા $\overline{PS}$ છે, તો $(1,-1)$ માંથી પસાર થતી અને $\overleftrightarrow{PS}$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ ...... [IIT : 2000]

(A) $2x-9y-7=0$ (B) $2x-9y-11=0$ (C) $2x+9y-11=0$ (D) $2x+9y+7=0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.28

$\overleftrightarrow{PS}$ નો ઢાળ $= \frac{1-2}{\frac{13}{2}-2} = -\frac{2}{9}$

$\therefore$ $(1, -1)$ માંથી પસાર થતી અને $\overleftrightarrow{PS}$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ

$y+1 = -\frac{2}{9}(x-1)$ એટલે કે $2x+9y+7=0$. **જવાબ : (D)**

(74) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી આપેલ રેખાઓને લંબરેખા સમાંતર રેખાઓ $4x+2y=9$ અને $2x+y+6=0$ ને P અને Q બિંદુમાં અનુક્રમે મળે છે, તો બિંદુ O હવે $\overline{PQ}$ ને ...... ગુણોત્તરમાં છેદે. [IIT : 2002]

(A) 1 : 2 (B) 3 : 4 (C) 2 : 1 (D) 4 : 3

ઉકેલ : $4x+2y=9$ નું $p-\alpha$ સ્વરૂપ $\frac{4x}{\sqrt{20}} + \frac{2y}{\sqrt{20}} = \frac{9}{\sqrt{20}}$, છે. અહીં $p = \frac{9}{\sqrt{20}}$

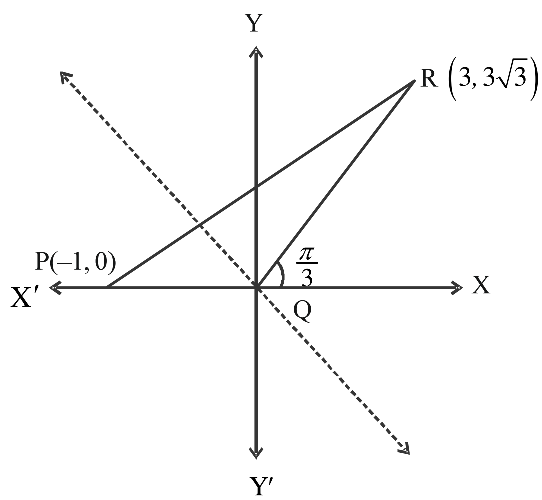
તેમજ $2x+y+6=0$ નું $p-\alpha$ સ્વરૂપ $-\frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ થાય. આથી $p' = \frac{6}{\sqrt{25}}$.

$\therefore$ $\frac{PO}{QO} = \frac{\frac{9}{\sqrt{20}}}{\frac{6}{\sqrt{5}}} = \frac{3}{4}$ **જવાબ : (B)**

(75) જો $P(-1, 0)$, $Q(0, 0)$ અને $R(3, 3\sqrt{3})$ એ ત્રણ બિંદુઓ હોય, તો ખૂણા PQR ના દ્વિભાજકને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ = ... [IIT : 2002]

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}x + y = 0$ (B) $x + \sqrt{3}y = 0$ (C) $\sqrt{3}x + y = 0$ (D) $x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.29

$\overleftrightarrow{QR}$ નો ઢાળ $= \frac{3\sqrt{3}-0}{3-0} = \sqrt{3}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{QR}$ એ X-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો કોણ બનાવશે.

$\therefore$ $m\angle RQP = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $\angle RQP$ નો દ્વિભાજક $\overleftrightarrow{QR}$ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

આથી તે X-અક્ષ સાથે $\frac{2\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

તથા $\angle PQR$ નો દ્વિભાજક $(0, 0)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ તેને સમાતી રેખાનું સમીકરણ એ $y-0 = tan\,\frac{2\pi}{3}(x-0)$

$\therefore$ $y = -\sqrt{3}x$ આથી, $\sqrt{3}x + y = 0$. **જવાબ : (C)**

(76) જો (a_1, b_1) અને (a_2, b_2)થી સમાન અંતરે આપેલ બિંદુગણ $(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c=0$ હોય, તો $c =$ ...... [AIEEE : 2003]

(A) $a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2$ (B) $\frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2\right)$

(C) $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2}$ (D) $\frac{1}{2}\left(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2\right)$

ઉકેલ : ધારો કે $P(x, y)$ કોઈ બિંદુ છે.

$A(a_1, b_1)$ અને $B(a_2, b_2)$એ આપેલ બિંદુઓ છે.

$PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$

$\therefore$ $(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2$

$\therefore$ $a_1^2 + b_1^2 - 2a_1x - 2b_1y = a_2^2 + b_2^2 - 2a_2x - 2b_2y$

$\therefore$ $2(a_1-a_2)x + 2(b_1-b_2)y + a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2 = 0$

$\therefore$ $(a_1-a_2)x + (b_1-b_2)y + \frac{1}{2}\left(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2\right) = 0$

$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c=0$ એ માંગેલ બિંદુગણ છે.

$\therefore$ $c = \frac{1}{2}\left(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2\right)$ **જવાબ : (D)**

(77) જો $0 < \theta < \alpha < \frac{\pi}{4}$ એક ખૂણાનું માપ છે. જો $P = (cos\theta, sin\theta)$ અને $Q = (cos(\alpha-\theta), sin(\alpha-\theta))$, તો Q એ P માંથી ...... રીતે મેળવી શકાય. [IIT : 2002]

(A) α માપના ખૂણે ઊગમબિંદુ સાપેક્ષ સમઘડી દિશામાં ઘૂમાવીને

(B) α માપના ખૂણે ઊગમબિંદુ સાપેક્ષ વિષમઘડી દિશામાં ઘૂમાવીને

(C) $tan\,\alpha$ ઢાળ સાથે રેખાનું ઊગમબિંદુથી પ્રતિબિંબ

(D) $tan\,\frac{}{2}$ ઢાળ સાથે ઊગમબિંદુને સાપેક્ષ રેખાનું પ્રતિબિંબ

ઉકેલ : α ખૂણે સમઘડી દિશામાં ઘૂમાવતા $P(cos\theta,\ sin\theta)$એ $\left(cos(\alpha-\theta),\ sin(\alpha-\theta)\right)$ બનશે. વિષમઘડી દિશામાં P એ $\left(cos(\alpha+\theta),\ sin(\alpha+\theta)\right)$ થશે.

$$\text{હવે } \overleftrightarrow{PQ} \text{ નો ઢાળ } = \frac{sin\theta - sin(\alpha-\theta)}{cos\theta - cos(\alpha-\theta)}$$

$$= \frac{2cos\frac{\alpha}{2}\ sin\frac{2\theta-\alpha}{2}}{-2sin\frac{\alpha}{2}\ sin\frac{2\theta-\alpha}{2}} = -cot\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ}$ એ $tan\frac{\alpha}{2}$ ઢાળવાળી રેખાને લંબ છે.

આથી Q એ P ના પ્રતિબિંબ પરથી મેળવી શકાય જ્યાં P એ $tan\frac{\alpha}{2}$ ઢાળવાળી રેખા પર છે. **જવાબ : (D)**

(78) જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $(a\,cost,\ a\,sint)$, $(b\,sint,\ -b\,cost)$ અને $(1,\ 0)$ હોય, તો તેના મધ્યકેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ મેળવો. (જ્યાં t એ પ્રચલ છે.) [AIEEE : 2003]

(A) $(3x+1)^2+(3y)^2=a^2-b^2$ (B) $(3x-1)^2+(3y)^2=a^2-b^2$

(C) $(3x-1)^2+(3y)^2=a^2+b^2$ (D) $(3x+1)^2+(3y)^2=a^2+b^2$

ઉકેલ : જો (α,β) એ મધ્યકેન્દ્ર હોય, તો

$\alpha = \frac{a\,cost + b\,sint + 1}{3}$ અને $\beta = \frac{a\,sint - b\,cost}{3}$

$\therefore$ $a\,cost + b\,sint = 3\alpha - 1$ અને $a\,sint - b\,cost = 3\beta$

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં, $a^2+b^2=(3\alpha-1)^2+(3\beta)^2$

આથી (α,β)નું બિંદુગણ એ $(3x-1)^2+(3y)^2=a^2+b^2$. **જવાબ : (C)**

(79) જો શૂન્યેતર સંખ્યાઓ $a,\ b,\ c$ એ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો રેખા $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{1}{c}=0$ એ હંમેશા એક નિશ્ચિત બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. એ બિંદુ ...... [AIEEE-2005]

(A) $(-1,-2)$ (B) $(-1,2)$ (C) $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ (D) $(1,-2)$

ઉકેલ : $a,\ b,\ c$ એ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

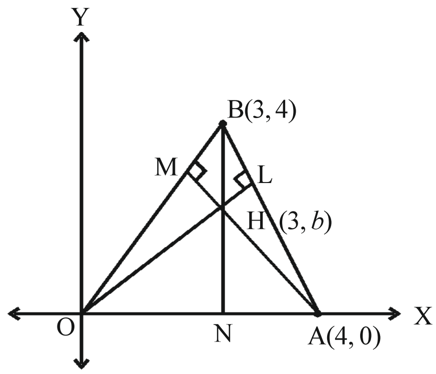
$\therefore$ $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$

$\therefore$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{1}{c}=0$ રેખા $(1,-2)$માંથી પસાર થાય છે. **જવાબ : (D)**

(80) જેનાં શિરોબિંદુઓ $(0, 0), (3, 4)$ અને $(4, 0)$ હોય તેવા ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર ...... [I.I.T.-2003]

(A) $\left(3, \frac{7}{3}\right)$ (B) $\left(3, \frac{5}{4}\right)$ (C) $(5, -2)$ (D) $\left(3, \frac{3}{4}\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.30

$\overleftrightarrow{OB}$ નો ઢાળ $= \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AM}$ નો ઢાળ $= \frac{-3}{4}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AM}$ નું સમીકરણ $y - 0 = \frac{-3}{4}(x-4)$ થાય.

$\therefore$ $3x + 4y - 12 = 0$ (1)

એ જ રીતે, $\overleftrightarrow{OL}$ નું સમીકરણ $x - 4y = 0$ (2)

(1) અને (2) ને ઉકેલતાં, લંબકેન્દ્ર એ $\left(3, \frac{3}{4}\right)$ છે.

બીજી રીત :

$\overline{BN}$ વેધ હોય તો તેનું સમીકરણ $x = 3$ છે.

$\therefore$ લંબકેન્દ્રનો x યામ $= 3$

$(\overleftrightarrow{OH}$ નો ઢાળ$)$ $(\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ$) = -1$

$\therefore \left(\frac{b}{3}\right)(-4) = -1$

$\therefore b = \frac{3}{4}$

$\therefore$ લંબકેન્દ્ર $\left(3, \frac{3}{4}\right)$ છે. **જવાબ : (D)**

(81) ત્રણ રેખાઓ $2x + 11y - 5 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$ અને $24x + 7y - 20 = 0$. [AIEEE : 2002]

(A) ત્રિકોણ બનાવે. (B) એ માત્ર સંપાતી છે.

(C) કોઈ એક રેખા બાકીની બે રેખાથી બનતા બીજા ખૂણાનો દ્વિભાજક થાય. (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $24x + 7y - 20 = 0$ અને $4x - 3y - 2 = 0$થી બનતા ખૂણાના દ્વિભાજકો એ

$$\frac{24x+7y-20}{\sqrt{576+49}} = \pm \frac{4x-3y-2}{\sqrt{16+9}}$$

$$\therefore \frac{24x+7y-20}{25} = \pm \frac{4x-3y-2}{5}$$

ધન નિશાની લેતાં, $\frac{24x+7y-20}{25} = \frac{4x-3y-2}{5}$

$\therefore$ $24x + 7y - 20 = 5(4x - 3y - 2)$

$\therefore$ $24x + 7y - 20 = 20x - 15y - 10$

$\therefore$ $4x + 22y - 10 = 0$

$\therefore$ $2x + 11y - 5 = 0$

આ આપેલ ત્રીજી રેખા છે. **જવાબ : (C)**

(82) જો આપેલ રેખાઓ $x^2 - 2cxy - 7y^2 = 0$ ના ઢાળનો સરવાળો એ તેના ગુણાકારથી 4 ગણો હોય, તો c ની કિંમત ...... [AIEEE : 2004]

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) –2

ઉકેલ : $x^2 - 2cxy - 7y^2 = 0$

$7\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2c\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0$

અહીં, $m_1 + m_2 = \frac{2c}{-7}$ અને $m_1 m_2 = \frac{1}{-7}$

વળી, $m_1 + m_2 = 4\, m_1 m_2$

$\therefore \quad \frac{-2c}{7} = \frac{-4}{7}$

$\therefore \quad c = 2.$ **જવાબ : (C)**

(83) જો $6x^2 - xy + 4cy^2 = 0$ ની કોઈ એક રેખા $3x + 4y = 0$ છે. c = ... [AIEEE : 2004]

(A) 1 (B) –1 (C) 3 (D) –3

ઉકેલ : $6x^2 - xy + 4cy^2 = 0$

$\therefore \quad 6 - \frac{y}{x} + 4c\,\frac{y^2}{x^2} = 0$ (1)

અને $3x + 4y = 0$ એ બે પૈકીની એક રેખા છે.

આથી, $\frac{y}{x} = \frac{-3}{4}$ સમીકરણ (1) નું એક બીજ થાય.

(1) માં $\frac{y}{x} = \frac{-3}{4}$ મૂકતાં, $6 + \frac{3}{4} + 4c\left(\frac{9}{16}\right) = 0$

$\therefore \quad 24 + 3 + 9c = 0$

$\therefore \quad c = -3$ **જવાબ : (D)**

(84) રેખાઓ $ax + 2by + 3b = 0$ અને $bx - 2ay - 3a = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને X-અક્ષને સમાંતર રેખા કે જ્યાં $(a, b) \neq (0, 0)$ એ ...... [AIEEE : 2005]

(A) X-અક્ષની નીચે તથા $\frac{2}{3}$ અંતરે હોય. (B) X-અક્ષ નીચે તથા $\frac{3}{2}$ અંતરે

(C) X-અક્ષ ઉપર તથા $\frac{2}{3}$ અંતરે (D) X-અક્ષ ઉપર તથા $\frac{3}{2}$ અંતરે

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા $(ax + 2by + 3b) + k\,(bx - 2ay - 3a) = 0$ (1)

જો x નો સહગુણક 0 હોય, તો આ રેખા X-અક્ષને સમાંતર થશે.

$\therefore \quad a + kb = 0$. આથી, $k = -\frac{a}{b}$.

(1) માં મૂકતાં, $(ax + 2by + 3b) - \frac{a}{b}(bx - 2ay - 3a) = 0$

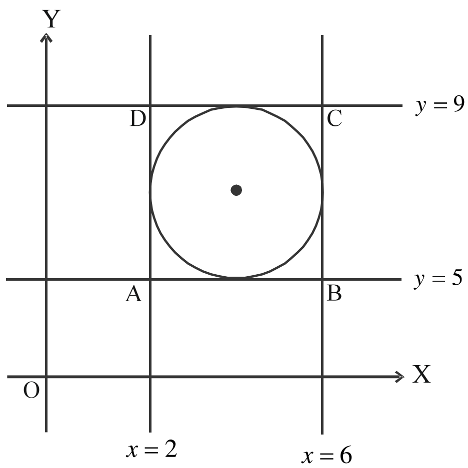
$\therefore \quad 2(b^2 + a^2)y + 3(b^2 + a^2) = 0$ એટલે કે $y = -\frac{3}{2}$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$

આ રેખા X-અક્ષથી નીચેના ભાગમાં $\frac{3}{2}$ અંતરે છે. **જવાબ : (B)**

(85) બે રેખાઓની જોડ $y^2 - 14y + 45 = 0$ અને $x^2 - 8x + 12 = 0$ વડે ચોરસ બને છે. તે ચોરસનાં અંતઃવૃત્તનું કેન્દ્ર ...... [IIT : 2003]

(A) $(7, 4)$ (B) $(4, 7)$ (C) $(3, 7)$ (D) $\left(\frac{3}{8}, 4\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.31

$y^2 - 14y + 45 = 0$

$\therefore (y-9)(y-5) = 0.$ બે રેખાઓ $y = 9$ અને $y = 5$ મળે.

તેવી જ રીતે $x^2 - 8x + 12 = 0$ એ રેખાઓ $x = 2$ અને $x = 6$ની જોડ છે.

આથી, ચોરસ ABCDના અંતઃવૃત્તનું કેન્દ્ર $= \left(\frac{2+6}{2}, \frac{5+9}{2}\right)$ એટલે કે $(4, 7)$ થાય.

જવાબ : (B)

(86) જો $my^2 + (1 - m^2)xy - mx^2 = 0$ ની કોઈ એક રેખા એ રેખાઓ $xy = 0$ ના ખૂણાની દ્વિભાજક હોય, તો $m =$ ...... [AIEEE : 2007]

(A) 2 (B) 1 (C) 2 (D) $-\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $x = 0$ તથા $y = 0$ વચ્ચેના ખૂણાની દ્વિભાજક રેખાઓ $y = \pm x$ હોય એટલે કે $y^2 - x^2 = 0$

$\therefore \quad m = 1.$ **જવાબ : (B)**

(87) $L_1 : x - y = 1$, $L_2 : x + y = 1$, $L_3 : 2x + 2y = 5$, $L_4 : 2x - 2y = 7$ રેખાઓનાં સમીકરણ માટે સાચુ વિધાન .... (Online May 26, 2012)

(A) $L_1 \parallel L_4$, $L_2 \parallel L_3$, L_1 અને L_4 છેદે છે. (B) $L_1 \perp L_2$, $L_1 \parallel L_3$, L_1 અને L_2 છેદે છે.

(C) $L_1 \perp L_2$, $L_2 \parallel L_3$, L_1 અને L_4 છેદે છે. (D) $L_1 \perp L_2$, $L_1 \perp L_3$, L_2 અને L_4 છેદે છે.

ઉકેલ : અહીં રેખાઓ, $L_1 : x - y = 1$, $L_2 : x + y = 1$, $L_3 : 2x + 2y = 5$, $L_4 : 2x - 2y = 7$

$L_1 \perp L_2$ (તેમના ઢાળનો ગુણાકાર -1 છે.)

$L_1 \perp L_3$ (તેમના ઢાળનો ગુણાકાર -1 છે.)

હવે, $L_2 : x + y = 1$

$L_4 : 2x - 2y = 7$

$\therefore \; 2x - 2(1 - x) = 7$

$\therefore \; 2x - 2 + 2x = 7$

$\therefore \; x = \frac{9}{4}$ અને $y = \frac{-5}{4}$

તેથી, L_2 અને L_4 છેદે છે. **Ans. : (D)**

(88) રેખા $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ના અક્ષો વચ્ચે અંતરાયેલા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ...... છે. (જ્યાં p અચળ છે.) (AIEEE : 2002)

(A) $x^2 + y^2 = \frac{4}{p^2}$ (B) $x^2 + y^2 = 4p^2$ (C) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{2}{p^2}$ (D) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$

ઉકેલ : રેખા $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ એ X અક્ષને $A\left(\frac{p}{\cos\alpha}, 0\right)$ અને Y અક્ષને $B\left(0, \frac{p}{\sin\alpha}\right)$ માં છેદે છે.

ધારો કે $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ $M(x_1, y_1)$ હોય, તો $(x_1, y_1) = \left(\frac{p}{2\cos\alpha}, \frac{p}{2\sin\alpha}\right)$

$\therefore \; \cos\alpha = \frac{p}{2x_1}, \; \sin\alpha = \frac{p}{2y_1}$

હવે, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ પરથી, $\frac{p^2}{4x_1^2} + \frac{p^2}{4y_1^2} = 1$

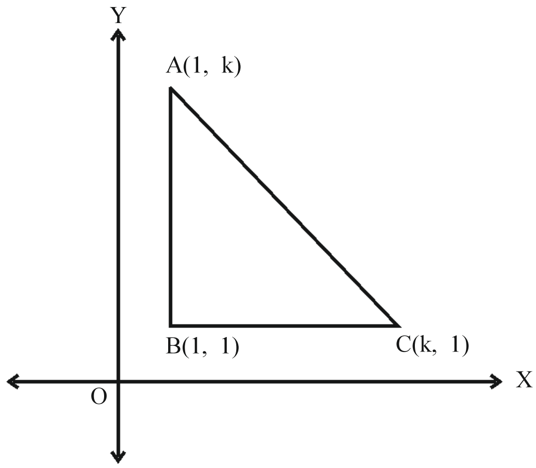
$\therefore \; \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2} = \frac{4}{p^2}$

$\therefore$ માંગેલ $\overline{AB}$ ના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$ **ઉકેલ : (D)**

(89) $A(1, k)$, $B(1,1)$ અને $C(k,1)$ એ $\overline{AC}$ કર્ણવાળા કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય અને જો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 2 ચો. એકમ હોય તો $k \in$ .... (AIEEE : 2007)

(A) $\{0, 2\}$ (B) $\{-1, 3\}$ (C) $\{-3, -2\}$ (D) $\{1, 3\}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.32

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ 2 ચોરસ એકમ છે.

$\therefore \quad \frac{1}{2} \times AB \times BC = 2$

$\therefore \quad \frac{1}{2} \times |k-1||k-1| = 2$

$\therefore \quad (k-1)^2 = 4$

$\therefore \quad |k-1| = \pm 2$

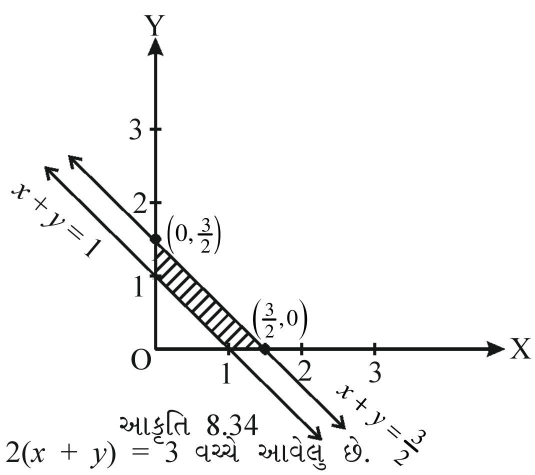
$\therefore \quad k = 3, -1$

$\therefore \quad k \in \{-1, 3\}$ ઉકેલ : **(B)**

(90) બિંદુ (1, a) રેખાઓ $x + y = 1$ અને $2(x + y) = 3$ ની વચ્ચે આવેલું છે. તો a કયા અંતરાલમાં આવેલું હશે ? (Online May 12, 2012)

(A) $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ (B) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (C) $(-\infty, 0)$ (D) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.34

(1, a) એ $x + y = 1$ અને $2(x + y) = 3$ વચ્ચે આવેલુ છે.

$x = 1$ એ $2(x + y) = 3$ માં મૂકો

આપણને y નો વિસ્તાર મળશે.

તેથી, $2(1 + y) = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

તેથી, 'a' એ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ અંતરાલમાં મળશે. **Sol. : (D)**

એક કરતાં વધુ વિકલ્પો સાચા હોય તેવા પ્રશ્નો

(91) રેખાયુગ્મ $3a^2x^2 + 7xy + (4a - 5)\, y^2 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓની જોડ પરસ્પર લંબ હોય, તો a = ...

(A) $-2-\sqrt{19}$ (B) $-2+\sqrt{19}$ (C) $\frac{-2+\sqrt{19}}{3}$ (D) $\frac{-2-\sqrt{19}}{3}$

ઉકેલ : જો રેખાયુગ્મ $3a^2x^2 + 7xy + (4a-5)\, y^2 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓની જોડ પરસ્પર લંબ હોય, તો

x^2 નો સહગુણક + y^2 નો સહગુણક = 0

$\therefore\ 3a^2 + 4a - 5 = 0$

$\therefore\ a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-5)}}{2 \times 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{2 \times 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$ **ઉકેલ : (C), (D)**

(92) ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 31 એકમ હોય તથા તેના બે શિરોબિંદુ (3, 4) અને (–4, 6) હોય તો ત્રીજા શિરોબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $2x + 7y + 28 = 0$ (B) $2x + 7y - 28 = 0$

(C) $2x + 7y - 96 = 0$ (D) $2x + 7y + 96 = 0$

ઉકેલ : ધારો કે $A(3, 4)$, $B(-4, 6)$ અને $C(x, y)$ છે.

$$\therefore\quad D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$$

હવે, ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ 31 એકમ છે.

$\therefore\quad 31 = \frac{1}{2}|D|$

$\therefore\quad |-2x - 7y + 34| = 62$

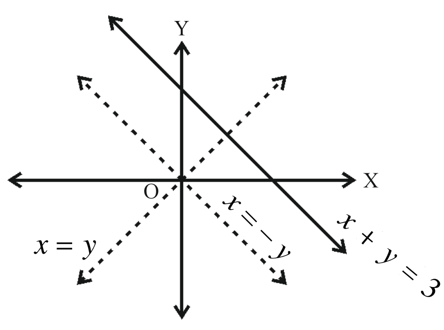
$\therefore\quad -2x - 7y + 34 = 62$ અથવા $-2x - 7y + 34 = -62$

$\therefore\quad 2x + 7y + 28 = 0$ અથવા $2x + 7y - 96 = 0$ **ઉકેલ : (A), (C)**

(93) એક બિંદુ રેખા $x + y = 3$ પર એ રીતે છે, કે જેથી તે રેખાઓ $|x| = |y|$ થી સમાન અંતરે છે. તેના યામ ......

(A) $(0, 3)$ (B) $(3, 0)$ (C) $(-3, 0)$ (D) $(0, -3)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.33

$|x| = |y|$ પરથી, $x - y = 0$ અને $x + y = 0$

આ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાના દ્વિભાજક એ $\frac{x-y}{\sqrt{2}} = \pm \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

આથી, $y = 0$ અને $x = 0$

$y = 0$ સાથે ઉકેલતાં, $x + y = 3$ પરથી $(3, 0)$ મળે.

$x = 0$ સાથે ઉકેલતાં, $x + y = 3$ પરથી $(0, 3)$ મળે. **જવાબ : (A), (B)**

(94) જો $S_1, S_2 \ldots$ એ એવા ચોરસ છે કે દરેક $n > 1$ માટે S_n ની બાજુની લંબાઈ એ S_{n+1} ના વિકર્ણની લંબાઈ બરાબર થાય છે. જો S_1ની બાજુની લંબાઈ 10 હોય, તો n ની કઈ કિંમત માટે S_n નું ક્ષેત્રફળ 1 સેમીથી ઓછું થાય ?

[IIT : 1999]

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

ઉકેલ : જો ચોરસની બાજુ a હોય, તો વિકર્ણની લંબાઈ $d = a\sqrt{2}$

આપેલ શરત પરથી $a_n = \sqrt{2} \cdot a_{n+1}$

$$\therefore \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2}} = \frac{a_{n-1}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{a_{n-2}}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \ldots = \frac{a_1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}.$$

nના સ્થાને $n-1$ લેતાં,

$$a_n = \frac{a_1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}} = \frac{10}{(2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

S_n નું ક્ષેત્રફળ < 1. આથી, $a_n^2 < 1$.

આથી, $\frac{100}{2^{n-1}} < 1$. આથી, $200 < 2^n$

$\therefore \quad 2^7 = 128 < 200,\ 2^8 = 256 > 200$

$\therefore \quad n = 8, 9, 10$ **જવાબ : (B), (C), (D)**

●