બિંદુ, રેખા

- **અંતર સૂત્ર :** $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2) \in R^2$ માટે A અને B વચ્ચેનું અંતર

  $AB = d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- **ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર :** ત્રિકોણની બાજુઓના લંબદ્વિભાજકોના સંગમબિંદુને ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર કહે છે.
  ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર ત્રિકોણનાં ત્રણેય શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે હોય છે.
  જો P એ ΔABC નું પરિકેન્દ્ર હોય તો $AP = BP = CP$. કાટકોણ ત્રિકોણમાં **કર્ણનું મધ્યબિંદુ** ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર છે.
- **ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર :** ત્રિકોણની ત્રણેય મધ્યગાઓનાં સંગમબિંદુને ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર કહે છે.
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ તથા $C(x_3, y_3)$ શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર $G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
- **ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર :** ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓના અંતઃદ્વિભાજકોના સંગમબિંદુને ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર કહે છે.
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ તથા $C(x_3, y_3)$ એ ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ છે તથા $BC = a, CA = b$ તથા $AB = c$, તો ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર $I = \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$
- **ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર :** ત્રિકોણના ત્રણેય વેધોના સંગમબિંદુને ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર H કહે છે.
  G એ $\overline{HP}$ નું H તરફથી $2:1$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.
- **રેખાખંડનું વિભાજન :** ધારો કે A અને B સમતલનાં કોઈ બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, બે ભિન્ન બિંદુઓ અનન્ય રેખા નિશ્ચિત કરે છે. આમ, A અને B થી અનન્ય રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ નિશ્ચિત થાય છે. જો $P \in \overleftrightarrow{AB}, P \neq A, P \neq B,$ તો $A-P-B$ અથવા $P-A-B$ અથવા $A-B-P$ હોઈ શકે. અહીં આપણે જોઈશું કે $P \in \overline{AB}$ (એટલે કે $A-P-B$) અથવા $P \notin \overline{AB}$ (એટલે કે $P-A-B$ અથવા $A-B-P$) પૈકી કોઈ એક માહિતી અને ગુણોત્તર $\frac{AP}{PB}$ નું મૂલ્ય જાણતા હોઈએ, તો આપણે P ના યામ નિશ્ચિત કરી શકીએ.
- **અંતઃવિભાજન :** જો $A-P-B$, તો P બિંદુ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તેમ કહેવાય. અહીં $A-P-B$ હોવાથી આ વિભાજનને $\overline{AB}$ નું અંતઃવિભાજન કહે છે.
- **બર્હિવિભાજન :** જો $P-A-B$ અથવા $A-B-P$ હોય, તો P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $-\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તેમ કહેવાય. અહીં $P-A-B$ અથવા $A-B-P$ હોવાથી આ વિભાજનને $\overline{AB}$ નું બર્હિવિભાજન કહે છે.
  આમ, P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે $(\lambda \neq 0, -1)$ તે માટે
  (i) $A-P-B$ તો, $\lambda > 0$ અને બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું અંતઃવિભાજન કરે છે.
  (ii) $P-A-B$ તો, $-1 < \lambda < 0$ અને બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું બર્હિવિભાજન કરે છે.
  (iii) $A-B-P$ તો, $\lambda < -1$ અને બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું બર્હિવિભાજન કરે છે.

- **રેખાખંડનું વિભાજન કરતા બિંદુના યામ :**

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ને જોડતા $\overline{AB}$ ના વિભાજન કરતા બિંદુના યામ $\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)$ થાય જ્યાં $\lambda \in R - \{0, -1\}$.

$\lambda = \frac{m}{n}$ લઈએ, તો વિભાજન બિંદુના યામ $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ લઈ શકાય. (જ્યાં $m+n \neq 0$, $m \neq 0$)

- **R^2 નાં ત્રણ ભિન્ન બિંદુઓ સમરેખ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત :**

R^2 નાં ત્રણ ભિન્ન બિંદુઓ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ સમરેખ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત

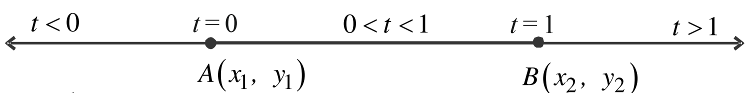
$\Delta = 0$ અર્થાત્ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- **રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો :** જો $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2) \in R^2$ ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો

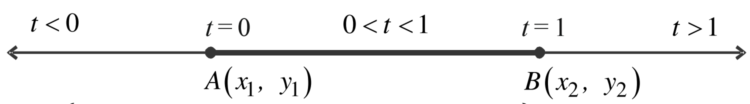
$x = tx_2 + (1-t)x_1, \quad y = ty_2 + (1-t)y_1, \ t \in R$ ને $\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો કહે છે અને t ને પ્રચલ કહે છે.

- $\overleftrightarrow{AB}$ ના કેટલાક ઉપગણો :

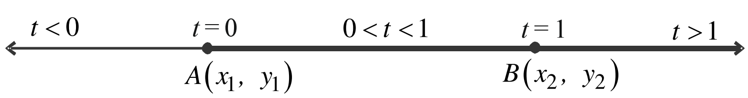
(1) $\overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; \ t \in R\right\}$



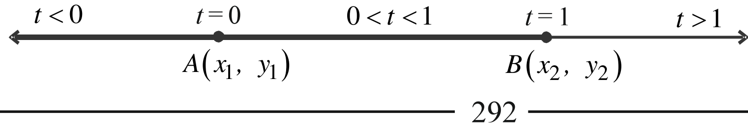
(2) $\overline{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; \ t \in [0, 1]\right\}$



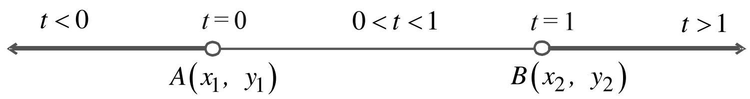
(3) $\overrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; \ t \geq 0\right\}$



(4) $\overrightarrow{BA} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; \ t \leq 1\right\}$



(5) $\overleftrightarrow{AB} - \overline{AB} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} \;;\; t \in R - [0, 1] \right\}$



- **રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ :**

  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ એ R^2 નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે.

  $\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ નું કાર્તેઝિય સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ છે.

  X-અક્ષને લંબ રેખાનું સમીકરણ $x = a$, છે, જ્યાં a અચળ છે.

  Y-અક્ષને લંબ રેખાનું સમીકરણ $y = b$ છે, જ્યાં b અચળ છે.

- **રેખાનો ઢાળ :**

  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ એ R^2 નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે, જ્યાં $x_1 \neq x_2$. તેથી તેમને જોડતી $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ ન હોય, તથા $\overline{AB}$ નો ઢાળ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

- X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાથી વિરુદ્ધ દિશામાં જે ખૂણો બનાવે, તેનું માપ θ હોય, તો $tan\,\theta$ ને રેખાનો ઢાળ કહે છે. તેને સંકેતમાં m વડે દર્શાવાય છે.

  $$\therefore \quad m = tan\,\theta \qquad\qquad 0 < \theta < \pi, \;\; \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

- જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, તો $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ ધન હોય છે.

- જો $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, તો $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ ઋણ હોય છે.

- જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ હોય તો $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

- જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ Y-અક્ષને લંબ હોય તો ઢાળ શૂન્ય છે.

- બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $m_1 = m_2$ છે.

- બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $m_1 \cdot m_2 = -1$ છે.

- **બે છેદતી રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો :**

  જો રેખાઓ પરસ્પર લંબ ન હોય, તો તેમના છેદબિંદુ આગળ એકરૂપ અભિકોણોની બે જોડ રચાય છે. આમાંની એક એકરૂપ ગુરુકોણની જોડ તથા બીજી એકરૂપ લઘુકોણની જોડ છે. આ **લઘુકોણના રેડિયન માપને બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહે છે.**

  (1) એક રેખા X-અક્ષને લંબ હોય તથા બીજી રેખાનો ઢાળ m હોય, તો તે બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$ જ્યાં θ એ બીજી રેખાએ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે બનાવેલ ખૂણાનું માપ છે.

  (2) એક પણ રેખા X-અક્ષને લંબ ન હોય, તેવી બે પરસ્પર છેદતી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય,

તો $\tan\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ દ્વારા α મળે. જ્યાં $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. અહીં m_1 અને m_2 રેખાઓના ઢાળ છે.

- **રેખા $ax+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0,\ (a,b,c\in R)$નો ઢાળ :**

ધારો કે રેખા સમક્ષિતિજ કે શિરોલંબ નથી. તેથી $a\neq 0,\ b\neq 0$.

$\therefore$ રેખા $ax+by+c=0$ નો ઢાળ $=-\frac{a}{b}$.

જો $a=0$, તો રેખા સમક્ષિતિજ હોય, તેથી રેખાનો ઢાળ $m=0$.

જો $b=0$, તો રેખા શિરોલંબ રેખા હોય તેથી રેખાનો ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત થાય.

જો $c=0$ તો રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

- **રેખાના અક્ષો પરના અંતઃખંડ :**

***X*-અંતઃખંડ :** જો રેખા X-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $(a, 0)$માં છેદે તો રેખાનો X-અંતઃખંડ a છે તેમ કહેવાય. (જ્યાં $a\neq 0$)

Y-અક્ષને લંબરેખાનો ***X***-અંતઃખંડ ન મળે.

***Y*-અંતઃખંડ :** જો રેખા Y-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $(0, b)$માં છેદે તો રેખાનો Y-અંતઃખંડ b છે તેમ કહેવાય. (જ્યાં $b\neq 0$)

X-અક્ષને લંબરેખાનો Y-અંતઃખંડ ન મળે.

- $ax+by+c=0,\ a\neq 0,\ b\neq 0$ **રેખાના અંતઃખંડ :**

X-અંતઃખંડ $=-\frac{c}{a}$, Y-અંતઃખંડ $=-\frac{c}{b}$.

નોંધ : જો રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય તો બંને અંતઃખંડ શૂન્ય થાય છે.

- **રેખાની બહારના બિંદુથી રેખાનું લંબઅંતર :**

બિંદુ $P(x_1, y_1)$થી રેખા $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$નું લંબઅંતર, $p=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- **બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર :**

બે સમાંતર રેખાઓ $ax+by+c=0$ અને $ax+by+c'=0$, $a^2+b^2\neq 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર,

$p=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (જ્યાં $c\neq c'$)

- જો $a_1x+b_1y+c_1=0$ અને $a_2x+b_2y+c_2=0$, $\left(a_i^2+b_i^2\neq 0,\ i=1, 2\right)$ એ અનન્ય બિંદુમાં છેદતી રેખાઓ હોય, તો $l(a_1x+b_1y+c_1)+m(a_2x+b_2y+c_2)=0$ તેમનાં છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈક રેખા દર્શાવે છે, જ્યાં $l^2+m^2\neq 0, l,\ m\in R$.

- **બે રેખાઓ સંપાતી, સમાંતર, લંબ કે છેદક બને તે માટેની શરત :**

રેખાઓ $l_1 : a_1x+b_1y+c_1=0,\ l_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$.

(1) જો $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ હોય, તો l_1 અને l_2 સંપાતી રેખાઓ છે.

(2) જો $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ હોય, તો $l_1 \parallel l_2$.

(3) જો $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ હોય તો $l_1 \perp l_2$.

(4) જો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ હોય, તો રેખાઓ l_1 અને l_2 પરસ્પર છેદે છે તથા છેદબિંદુના યામ $\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$ છે.

- **બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનાં દ્વિભાજકનું સમીકરણ :**

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ રેખા છેદતી હોય તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાના દ્વિભાજકોનું સમીકરણ

  $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ છે.

- **સંગામી રેખાઓ :**

  જો બેથી વધુ ભિન્ન રેખાઓ અનન્ય બિંદુમાં છેદે, તો તેમને **સંગામી રેખાઓ** કહે છે તથા તેમના સામાન્ય છેદબિંદુને તેમનું સંગમબિંદુ કહે છે.

  રેખાઓ સંગામી બને તે માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત.

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

  $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2, 3$

  $a_3x + b_3y + c_3 = 0$

  $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો :

(1) જો $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ દ્વારા બનતી રેખાઓ પૈકીની બે રેખાઓ કાટખૂણે હોય, તો $a^2 + d^2 + ac + bd =$ ......

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) $ab + cd$

ઉકેલ : હવે $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ (1)

એ રેખાઓ $y = m_1x$, $y = m_2x$ અને $y = m_3x$ દર્શાવે કે, જેથી $m_1m_2 = -1$ થાય. (2)

(1) ને x^3 વડે ભાગતાં, $d\left(\frac{y}{x}\right)^3 + c\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b\left(\frac{y}{x}\right) + a = 0$ (3)

$\therefore$ બીજોનો ગુણાકાર $m_1m_2m_3 = -\frac{a}{d}$

$\therefore$ $(-1)\, m_3 = -\frac{a}{d}$ આથી $m_3 = \frac{a}{d}$ ((2) પરથી)

પરંતુ m_3 એ સમીકરણ (3)નું બીજ છે.

$\therefore$ $d\left(\frac{a}{d}\right)^3 + c\left(\frac{a}{d}\right)^2 + b\left(\frac{a}{d}\right) + a = 0$

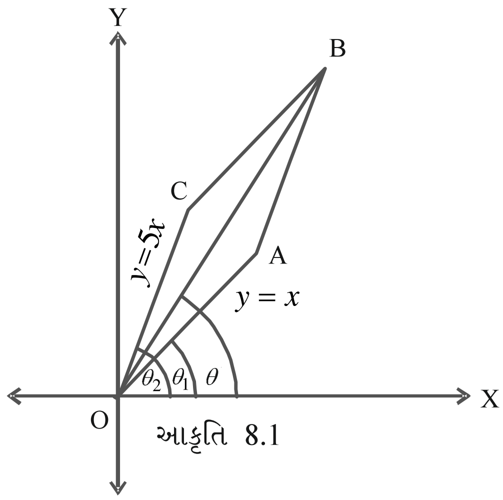
$\therefore$ $a^2 + ca + bd + d^2 = 0$

$\therefore$ $a^2 + d^2 + ac + bd = 0$ **જવાબ : (A)**

(2) ઊગમબિંદુ શિરોબિંદુ હોય તેવા પ્રથમ ચરણમાં આવેલા સમબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાજુઓનાં સમીકરણ $y^2 - 6xy + 5x^2 = 0$ દ્વારા દર્શાવેલ હોય, તો તેના વિકર્ણના સૌથી મોટા ઢાળની કિંમત ...... હોય.

(A) $\frac{2+\sqrt{13}}{3}$ (B) $\frac{2-\sqrt{13}}{3}$ (C) $\frac{2\pm\sqrt{13}}{5}$ (D) $\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.1

$$y^2 - 6xy + 5x^2 = (y-x)(y-5x) = 0$$

$\therefore$ આપેલ પાસપાસેની બાજુઓ $y = 5x$ તથા $y = x$ છે.

$\therefore$ આકૃતિમાં $\theta_1 - \theta = \theta - \theta_2$

$\therefore$ $2\theta = \theta_1 + \theta_2$

$\therefore$ $tan2\theta = tan(\theta_1 + \theta_2)$

$\therefore$ $\frac{2tan\theta}{1-tan^2\theta} = \frac{tan\theta_1 + tan\theta_2}{1 - tan\theta_1\, tan\theta_2}$

$= \frac{1+5}{1-5}$ $(tan\theta_1 = m_1 = 1, tan\theta_2 = m_2 = 5)$

$\frac{2tan\theta}{1-tan^2\theta} = \frac{6}{-4} = \frac{-3}{2}$

$\therefore$ $4tan\theta = -3 + 3tan^2\theta$

$\therefore$ $3tan^2\theta - 4tan\theta - 3 = 0$

$\therefore$ $tan\theta = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(3)(-3)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$

$\therefore$ $tan\theta = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$ ($P(\theta)$ પ્રથમ ચરણમાં છે.)

બીજી વિકર્ણનો ઢાળ તો ઋણ થશે. **જવાબ : (A)**

(3) બિંદુ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ને જોડતાં રેખાખંડનું બિંદુ $P(x_1 + t(x_2 - x_1),\ y_1 + t(y_2 - y_1))$ અંતઃવિભાજન કરે, તો ......

(A) $t < 0$ (B) $0 < t < 1$ (C) $t > 1$ (D) $t = 1$

ઉકેલ : $P(x_1 + t(x_2 - x_1),\ y_1 + t(y_2 - y_1)) = P(tx_2 + (1-t)\,x_1, ty_2 + (1-t)\,y_1)$

$P \in \overleftrightarrow{AB}$

પરંતુ બિંદુ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ને જોડતાં રેખાખંડનું બિંદુ P અંતઃવિભાજન કરે છે.

$\therefore \quad P \in \overline{AB}$

$\therefore \quad 0 < t < 1$ **જવાબ : (B)**

(4) રેખાઓ $x + y = 0$, $x - y = 0$ તથા $x - 7 = 0$ વડે બનતા ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર ...... છે.

(A) $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ (B) $(0, 7)$ (C) $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ (D) $(7, 0)$

ઉકેલ : $x + y = 0$ અને $x - y = 0$ પરસ્પર લંબ છે.

રેખાઓ $x + y = 0$, $x - y = 0$ તથા $x - 7 = 0$ વડે બનતો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

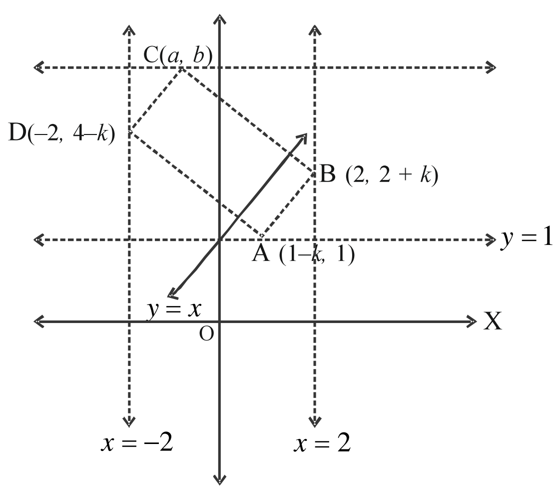
$x + y = 0$, $x - y = 0$ તથા $x - 7 = 0$ ને ઉકેલતાં ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $O(0, 0)$, $A(7, 7)$ અને $B(7, -7)$ મળે અને $m\angle AOB = \frac{\pi}{2}$.

પરિકેન્દ્ર $=$ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ $= (7, 0)$ **જવાબ : (D)**

(5) એક લંબચોરસ $ABCD$ કે જેની બાજુ AB એ રેખા $y = x$ને સમાંતર છે અને શિરોબિંદુ A એ રેખા $y = 1$ પર, શિરોબિંદુ B એ રેખા $x = 2$ પર અને શિરોબિંદુ D એ રેખા $x = -2$ પર આવેલા છે, તો બિંદુ Cના બિંદુગણનું સમીકરણ ...... થાય.

(A) $y = 5$ (B) Y-અક્ષ (C) $x = 5$ (D) X-અક્ષ

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.2

અહીં $\overleftrightarrow{AB}$ એ $y = x$ ને સમાંતર છે. તેથી ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $x - y + k = 0$ છે.

બિંદુ A એ રેખા $y = 1$ પર આવેલ છે અને બિંદુ B એ રેખા $x = 2$ પર આવેલ છે.

$A(1 - k, 1)$, $B(2, 2 + k)$ મળે.

$\overleftrightarrow{AD}$ એ $\overleftrightarrow{AB} : x - y + k = 0$ ને લંબ છે. તેથી $\overleftrightarrow{AD}$ નો ઢાળ $= -1$ થશે.

$\therefore \quad \overleftrightarrow{AD}$ નું સમીકરણ $y - 1 = -1(x - 1 + k)$ એટલે કે $y = -x + 2 - k$ થાય.

પરંતુ Dનો x-યામ $= -2$. આથી $y = 4 - k$

Dના યામ $= (-2, 4-k)$ મળે.

ધારો કે Cના યામ (a, b) છે.

$\overline{AC}$નું મધ્યબિંદુ $=$ $\overline{BD}$નું મધ્યબિંદુ

$\therefore$ $a + 1 - k = 2 - 2$ અને $b + 1 = 2 + k + 4 - k$

$\therefore$ $a = k - 1$ અને $b = 5$

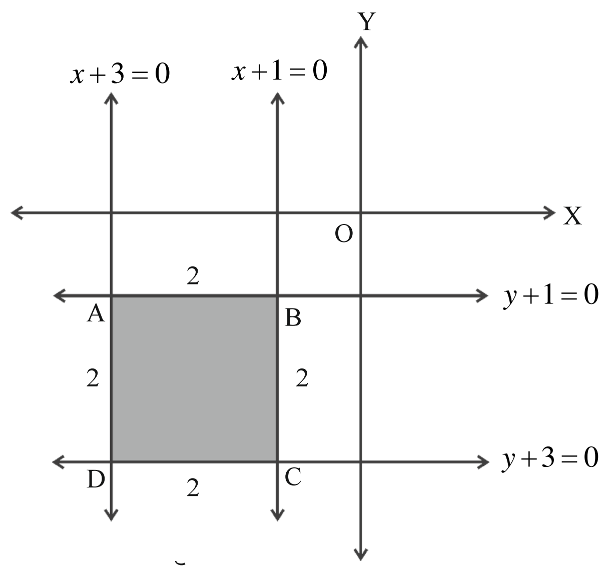
$\therefore$ માંગેલ બિંદુગણ રેખા $y = 5$ દર્શાવે છે.

જવાબ : (A)

(6) રેખાઓની જોડ $xy + x + y + 1 = 0$ અને $xy + 3x + 3y + 9 = 0$ વડે રચાતો ચતુષ્કોણ ...... છે.

(A) લંબચોરસ (B) ચોરસ (C) સમાંતરબાજુ (D) સમબાજુ ચતુષ્કોણ

ઉકેલ :



$xy + x + y + 1 = 0$

$\therefore$ $(x+1)(y+1) = 0$

$\therefore$ $x + 1 = 0$ અથવા $y + 1 = 0$

હવે, $xy + 3x + 3y + 9 = 0$

$\therefore$ $(x+3)(y+3) = 0$

$\therefore$ $x + 3 = 0$ અથવા $y + 3 = 0$

ચતુષ્કોણની બાજુઓ $x + 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $y + 1 = 0$, $y + 3 = 0$ છે.

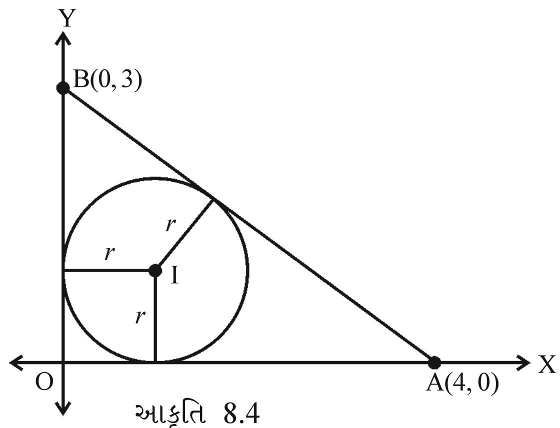
$\therefore$ $AB = BC = CD = DA = 2$ તથા બાજુઓ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore$ $\square ABCD$ ચોરસ છે. **જવાબ : (B)**

(7) રેખાઓ $x = 0$, $y = 0$ તથા $3x + 4y - 12 = 0$ વડે રચાતા ત્રિકોણના અંતઃકેન્દ્રના યામ

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (C) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (D) $(1, 1)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.4

ધારો કે $x=0$, $y=0$ અને $3x+4y=12$ દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર I છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે અંતઃકેન્દ્ર Iના યામ (r, r) થશે.

હવે, કેન્દ્ર (r, r)નું રેખા $3x+4y-12=0$ થી લંબઅંતર ત્રિજ્યા r જેટલું થશે.

$\therefore \quad r=\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{9+16}}$

$\therefore \quad 7r-12=5r$ અથવા $7r-12=-5r$

$\therefore \quad 2r=12$ અથવા $7r+5r=12$

$\therefore \quad r=6$ અથવા $r=1$

પરંતુ $r=6$ શક્ય નથી. $\quad$ ((r, r) ત્રિકોણની અંદર હોય.)

$\therefore \quad r=1$

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્રના યામ $=(1, 1)$ $\quad$ **જવાબ : (D)**

બીજી રીત : $OB=a=3,\ OA=b=4,\ AB=c=5$

$A(x_1, y_1)=(4, 0),\ B(x_2, y_2)=(0, 3),\ O(x_3, y_3)=(0, 0)$

$$I=\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)=\left(\tfrac{12}{12}, \tfrac{12}{12}\right)=(1, 1)$$

ત્રીજી રીત : અંતઃકેન્દ્ર (r, r) છે.

$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{6}{6}=1$ આથી કેન્દ્ર $(1, 1)$ છે.

ચોથી રીત : $x=0$ તથા $y=0$ પરસ્પર લંબ હોવાથી કાટકોણ ત્રિકોણ રચશે.

આકૃતિ પરથી કાટકોણ ત્રિકોણની અંદર આવેલા વર્તુળની અંતઃત્રિજ્યા $r=\frac{OA+OB-AB}{2}$ થાય.

જ્યાં $OA=3,\ OB=4,\ AB=5$ છે.

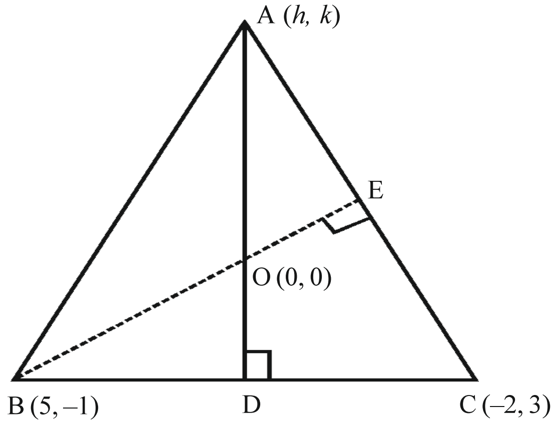
$\therefore\ r=\frac{3+4-5}{2}=1$

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્રના યામ $=(1, 1)$ મળે.

(8) જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $(5, -1)$ અને $(-2, 3)$ હોય તથા લંબકેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય, તો ત્રીજા શિરોબિંદુના યામ ......

(A) $(4, 7)$ (B) $(-4, -7)$ (C) $(2, -3)$ (D) $(5, -1)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.5

ધારો કે $A(h, k)$ ત્રીજું શિરોબિંદુ છે. $\overline{OA} \perp \overline{BC}$

$\therefore \left(\frac{k-0}{h-0}\right)\left(\frac{4}{-7}\right) = -1$ (ઢાળનો ગુણાકાર)

$\therefore 7h = 4k$ (1)

અને $\overline{OB} \perp \overline{AC}$ પણ છે. આથી, $\left(\frac{k-3}{h+2}\right)\left(\frac{-1}{5}\right) = -1$

$\therefore 5h - k + 13 = 0$ (2)

(1), (2) ને ઉકેલતાં $h = -4,\ k = -7$

$\therefore$ ત્રીજા શિરોબિંદુના યામ $A(-4, -7)$ થાય. **જવાબ : (B)**

(9) એક ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર $H\left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ અને પરિકેન્દ્ર $P\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ હોય, તો તેના મધ્યકેન્દ્ર G ના યામ : ......

(A) $(13 + 2\sqrt{7}, 11)$ (B) $(13, 11 + 2\sqrt{5})$

(C) $\left(\frac{13+2\sqrt{7}}{6}, \frac{11+2\sqrt{5}}{6}\right)$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં, પરિકેન્દ્ર $P\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, લંબકેન્દ્ર $H\left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ તથા ધારો કે મધ્યકેન્દ્ર $G(x, y)$ છે, તો

મધ્યકેન્દ્ર G એ $\overline{PH}$ નું P તરફથી $1:2$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ G ના યામ $= \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{13}{2}\right) + \frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{13+2\sqrt{7}}{6}, \frac{11+2\sqrt{5}}{6}\right)$$ **જવાબ : (C)**

(10) રેખા $x+2y=15$ ની દિશામાં બિંદુ $(1, 2)$થી રેખા $3x-y-5=0$ નું અંતર = ...

(A) $2\sqrt{5}$ (B) $4\sqrt{5}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ (D) $\frac{4\sqrt{5}}{7}$

ઉકેલ : $x+2y-15=0$ ની દિશામાં આવેલી રેખા એટલે કે તેને સમાંતર રેખાનું વ્યાપક સમીકરણ $x+2y+k=0$ છે. વળી તે $(1, 2)$ માંથી પસાર થાય છે. $1 + 4 + k = 0$ તેથી $k = -5$.

$\therefore$ તેનું સમીકરણ $x+2y-5=0$ મળે.

હવે $3x-y-5=0$ અને $x+2y-5=0$ ના છેદબિંદુના યામ = $\left(\frac{15}{7}, \frac{10}{7}\right)$

$\therefore$ માંગેલ અંતર = બિંદુ $\left(\frac{15}{7}, \frac{10}{7}\right)$થી $(1, 2)$ વચ્ચેનું અંતર

$$= \sqrt{\left(\frac{15}{7}-1\right)^2 + \left(\frac{10}{7}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{49}+\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{80}}{7} = \frac{4\sqrt{5}}{7}$$

જવાબ : (D)

(11) ત્રણ રેખાઓ કે જેને $y^3-4x^2y=0$ વડે દર્શાવી છે, તે ......

(A) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ બનાવે (B) સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવે (C) કાટકોણ ત્રિકોણ બનાવે (D) ત્રિકોણ ન બનાવે.

ઉકેલ : $y^3-4x^2y=0 \Rightarrow y\left(y^2-4x^2\right)=0$

$\therefore$ $y(y-2x)(y+2x)=0$

$\therefore$ $y=0, y-2x=0, y+2x=0$

$\therefore$ $y=0, y=2x, y=-2x$ $(0, 0)$ આગળ સંગામી છે.

નોંધ : ત્રિઘાત સમપરિમાણ સમીકરણ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રણ રેખાઓ દર્શાવે છે.

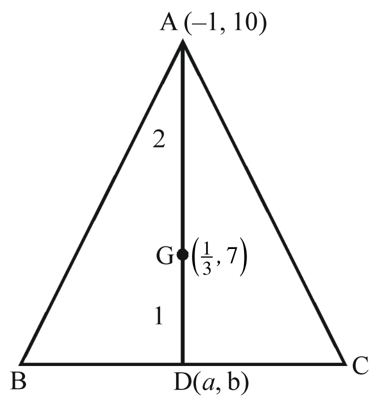
$\therefore$ ત્રિકોણ ન બનાવે.

જવાબ : (D)

(12) ત્રિકોણ ABCમાં $A(-1, 10)$, ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર $P(-3, 5)$ અને લંબકેન્દ્ર $H(7, 11)$ હોય, તો $\overline{BC}$ના મધ્યબિંદુના યામ ...... થાય.

(A) $\left(7, \frac{11}{2}\right)$ (B) $\left(1, \frac{11}{2}\right)$ (C) $\left(5, \frac{11}{2}\right)$ (D) $\left(-3, \frac{11}{2}\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.6

અહીં પરિકેન્દ્ર Pના યામ $(-3, 5)$ તથા લંબકેન્દ્ર Hના યામ $(7, 11)$

ધારો કે મધ્યકેન્દ્ર Gના યામ = (x, y) છે.

હવે, ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર G એ $\overline{PH}$નું P તરફથી $1:2$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ Gના યામ $= \left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

$= \left(\dfrac{(1)(7) + 2(-3)}{1+2}, \dfrac{(1)(11) + 2(5)}{1+2}\right) = \left(\frac{1}{3}, 7\right)$

આકૃતિ પરથી $AG : GD = 2:1$ તથા $D(a, b)$ લઈએ.

$\therefore$ G એ $\overline{AD}$ નું A તરફથી $2:1$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ Gના યામ $= \left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

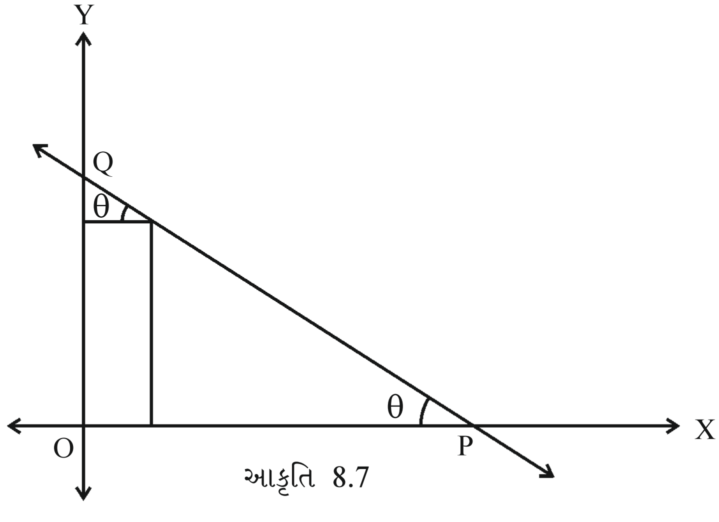
$\left(\frac{1}{3}, 7\right) = \left(\dfrac{2a + 1(-1)}{2+1}, \dfrac{2(b) + 1(10)}{2+1}\right)$

$\therefore$ $2a - 1 = 1,\ 2b + 10 = 21$ આથી, $a = 1,\ b = \frac{11}{2}$. માટે $D\left(1, \frac{11}{2}\right)$ **જવાબ : (B)**

(13) (2, 8) માંથી પસાર થતી ઋણ ઢાળવાળી રેખા $\overleftrightarrow{PQ}$ એ ધન યામાક્ષોને P અને Qમાં છેદે છે. રેખા $\overleftrightarrow{PQ}$ બદલાતી હોય તો OP + OQનું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(A) 10 (B) 18 (C) 2 (D) 8

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.7

$m\angle OPQ = \theta$

$OP = 2 + 8\cot\theta,\quad OQ = 8 + 2\tan\theta$

$\therefore$ $OP + OQ = 10 + (8\cot\theta + 2\tan\theta)$

$\geq 10 + 8$ (સમાંતર મધ્યક $\geq$ સમગુણોત્તર મધ્યક)

નોંધ : અહીં $\overleftrightarrow{PQ}$નો ઢાળ ઋણ છે તેથી $\tan\theta > 0$ and $\cot\theta > 0$. **Ans. : (C)**

(14) $m(2x + 3y + 6) + n(3x + 2y + 9) = 0$ એ રેખાઓની સંહતિ દર્શાવે, તો બિંદુ $P(2, 3)$થી ન્યૂનતમ અંતરે આવેલી આ સંહતિની રેખાનું સમીકરણ = ...

(A) $5x + 3y - 15 = 0$ (B) $5x - 3y + 15 = 0$ (C) $5x + 3y + 15 = 0$ (D) $5x - 3y - 15 = 0$

ઉકેલ : અહીં રેખાઓ $2x+3y+6=0$ અને $3x+2y+9=0$ ને ઉકેલતાં $(-3, 0)$ મળે.

$\therefore$ આ બંને રેખાઓનું છેદબિંદુ $(-3, 0)$ મળે.

$\therefore$ $(2, 3)$ અને $(-3, 0)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ,

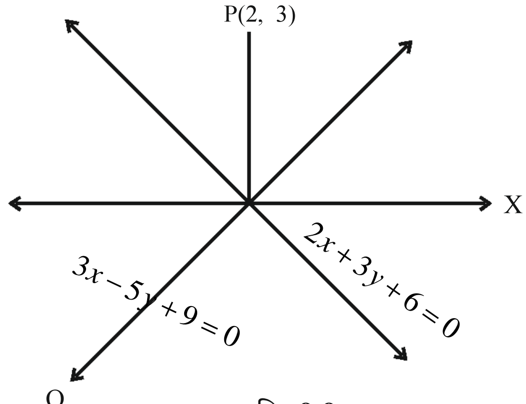
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $3x-5y+9=0$

$\therefore$ $P(2, 3)$થી ન્યૂનતમ અંતરે આવેલી રેખા એ $3x-5y+9=0$ ને લંબ અને $(-3, 0)$માંથી પસાર થતી રેખા દર્શાવે છે.

$\therefore$ $3x-5y+9=0$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ, $5x+3y+k=0$ છે. વળી તે $(-3, 0)$માંથી પસાર થાય તો $k=15$ મળે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $5x+3y+15=0$.



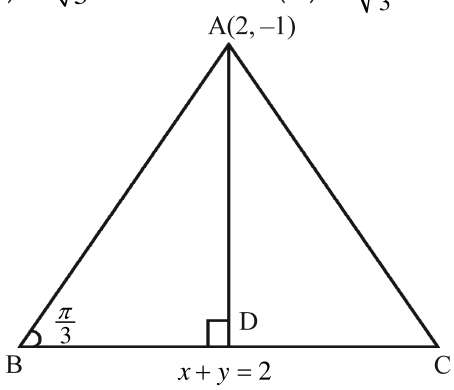
આકૃતિ 8.8

જવાબ : **(C)**

(15) સમબાજુ ત્રિકોણના આધારનું સમીકરણ $x+y=2$ અને શિરોબિંદુ $(2, -1$ છે, તો ત્રિકોણની બાજુનું માપ = ...

(A) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.9

અહીં ત્રિકોણ એ સમબાજુ છે.

$\therefore$ વેધ મધ્યગા પર સંપાતી છે.

અને $m\angle ABC = \frac{\pi}{3}$

હવે $AD = \frac{|2-1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\angle ADB$ એ કાટકોણ છે.

$\frac{AD}{AB} = sin\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

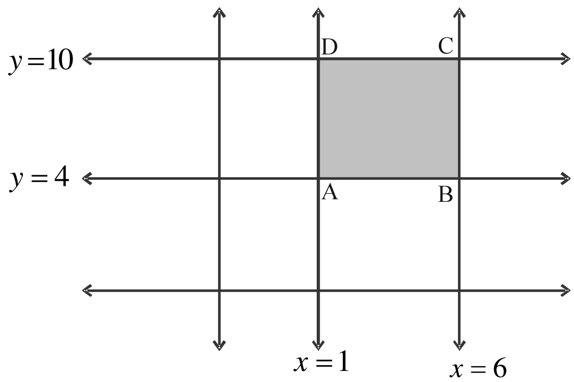
$\therefore \quad AB = AD\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

આથી સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈ $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ **જવાબ : (C)**

(16) $x^2 - 7x + 6 = 0$ અને $y^2 - 14y + 40 = 0$ વડે બનતા લંબચોરસનો વિકર્ણ ......

(A) $5x - 6y = 0$ (B) $5x + 6y = 0$ (C) $6x - 5y - 14 = 0$ (D) $6x - 5y + 14 = 0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.10

$x^2 - 7x + 6 = 0$ આથી, $(x-6)(x-1) = 0$

$\therefore \quad x - 6 = 0$ અને $x - 1 = 0$ (1)

$y^2 - 14y + 40 = 0$ આથી, $(y-4)(y-10) = 0$

$\therefore \quad y - 4 = 0$ અને $y - 10 = 0$ (2)

(1) અને (2) ઉકેલતાં, જોડ પરથી, શિરોબિંદુઓ $A(1, 4)$, $B(6, 4)$, $C(6, 10)$ અને $D(1, 10)$ મળે.

વિકર્ણ $\overleftrightarrow{AC}$ નું સમીકરણ,

$y - 4 = \frac{10-4}{6-1}(x-1)$ આથી, $5y - 20 = 6x - 6$

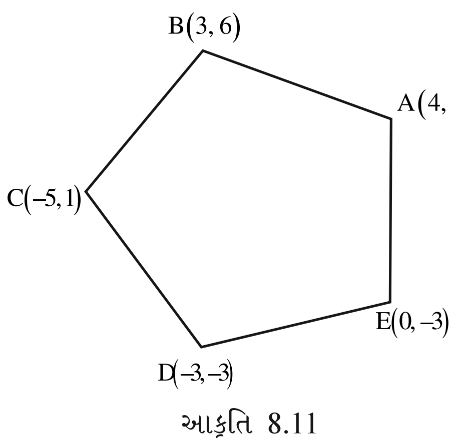
$\therefore \quad 6x - 5y + 14 = 0$

$\overleftrightarrow{BD} : y - 4 = \frac{-6}{5}(x - 6)$ એટલે કે $6x + 5y - 56 = 0$ **જવાબ : (D)**

(17) જેનાં શિરોબિંદુઓ $(4, 1), (3, 6), (-5, 1), (-3, -3)$ અને $(0, -3)$ હોય તેવા પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ = ...

(A) 56.5 ચોરસ એકમ (B) 30 ચોરસ એકમ (C) 93 ચોરસ એકમ (D) 46.5 ચોરસ એકમ

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.11

પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}\left|\left\{\begin{Vmatrix}4 & 1\\3 & 6\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}3 & 6\\-5 & 1\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}-5 & 1\\-3 & -3\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}-3 & -3\\0 & -3\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}0 & -3\\4 & 1\end{Vmatrix}\right\}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left\{(24-3)+(3+30)+(15+3)+(9-0)+(0+12)\right\}\right.$$

$$= \left|\frac{1}{2}(21+33+18+9+12)\right| = \left|\frac{1}{2}(93)\right| = 46.5$$

$\therefore$ પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ = 46.5 ચોરસ એકમ **જવાબ : (D)**

(18) બિંદુઓ $P(2,3), Q(3,5), R(7,7)$ અને $S(4,5)$ એ રીતે છે કે,

(A) P, Q, R અને S એ સમરેખ (B) $PQRS$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે

(C) S એ ΔPQR ની પર છે. (D) S એ ΔPQR ની અંદરના ભાગમાં છે.

ઉકેલ : ΔPQR નું મધ્યકેન્દ્ર $= \left(\frac{2+3+7}{3}, \frac{3+5+7}{3}\right) = (4,5) = S$

આથી S એ ΔPQR ના અંદરના ભાગમાં છે. **જવાબ : (D)**

(19) રેખાઓ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો $tan\alpha$ = ...

(A) $\left|\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right|$ (B) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ (C) $\left|\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right|$ (D) $\left|\frac{2ab}{a^2-b^2}\right|$

ઉકેલ : રેખા $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ નો ઢાળ $m_1 = \frac{-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{-b}{a}$ તથા $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ નો ઢાળ $m_2 = -\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{b}} = \frac{b}{a}$

$$tan\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-\frac{b}{a}-\frac{b}{a}}{1+\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)}\right| = \left|\frac{2ab}{a^2-b^2}\right|$$ **જવાબ : (D)**

(20) $x+y=0$ અને $y=[\pi]$ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ = ...

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

ઉકેલ : $x+y=0$ નો ઢાળ $m_1 = \frac{-1}{1} = -1$ અને $y=[\pi]=3$ નો ઢાળ $m_2 = 0$.

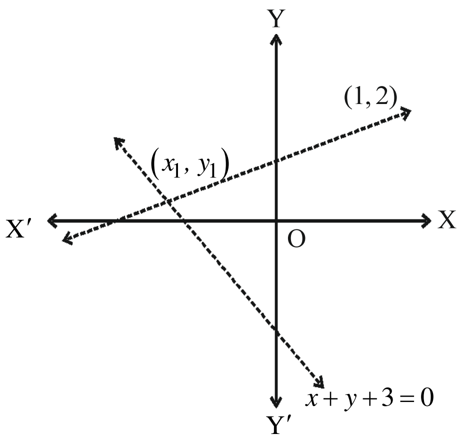
$\therefore$ બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-1-0}{1+(-1)0}\right| = 1.$$ આથી $\alpha = \frac{\pi}{4}$. **જવાબ : (A)**

(21) બિંદુ $(1,2)$માંથી દોરવામાં આવેલ રેખાનું, રેખા $x+y+3=0$ સાથેનું છેદબિંદુ એ (1, 2 થી $3\sqrt{2}$ અંતરે હોય, તો રેખાનો ઢાળ = ...

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.12

$(1, 2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{x - x_1}{cos\theta} = \frac{y - y_1}{sin\theta} = r, \text{ જ્યાં } r = 3\sqrt{2} \quad (0 < \theta < 2\pi) \text{ એટલે કે } \frac{x - 1}{cos\theta} = \frac{y - 2}{sin\theta} = 3\sqrt{2}.$$

$(1, 2)$ થી r અંતરે કોઈ બિંદુ તેના પર હોય, તો

$\left(1 + 3\sqrt{2}\, cos\theta,\ 2 + 3\sqrt{2}\, sin\theta\right)$ બિંદુ $x + y + 3 = 0$ પર હશે.

$\therefore \quad 1 + 3\sqrt{2}\, cos\theta + 2 + 3\sqrt{2}\, sin\theta + 3 = 0$

$\therefore \quad cos\theta + sin\theta = -\sqrt{2}$

$\quad cos^2\theta + sin^2\theta + 2sin\theta\, cos\theta = 2$

$\therefore \quad sin2\theta = 1.$ આથી, $2\theta = \frac{\pi}{2}$ અથવા $\frac{5\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{5\pi}{4}$

$cos\,\theta + sin\,\theta = -\sqrt{2}$ હોવાથી $\theta = \frac{5\pi}{4}$

$(1, 2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ $= tan\theta = tan\,\frac{5\pi}{4} = 1$ **જવાબ : (C)**

બીજી રીત :

$cos\,\theta + sin\,\theta = -\sqrt{2}$

$1 + tan\theta = -\sqrt{2}\, sec\theta$

$1 + 2tan\theta + tan^2\theta = 2(1 + tan^2\theta)$

$tan^2\theta - 2tan\theta + 1 = 0$

$\left(tan\theta - 1\right)^2 = 0$

$tan\theta = 1 = m$

ત્રીજી રીત :

$cos\theta + sin\theta = -\sqrt{2}$

$cos\theta \bullet \frac{1}{\sqrt{2}} + sin\theta\,\frac{1}{\sqrt{2}} = -1$

$cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = cos\pi$

$\theta = -\frac{\pi}{4} = (2n + 1)\,\pi$

$\theta - \frac{\pi}{4} = -\pi \quad (-\pi < \theta \le \pi)$

$\theta = -\frac{3\pi}{4}$ આથી $m = tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$

(22) જો રેખાઓ $xsec\theta + ycosec\theta = a$ અને $xcos\theta - ysin\theta = acos\ 2\theta$ પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલ લંબ રેખાખંડોની લંબાઈ p અને p' હોય, તો $4p^2 + p'^2$ ની કિંમત = ...

(A) a^2 (B) $3a^2$ (C) $2a^2$ (D) $4a^2$

ઉકેલ : $p = \dfrac{|0+0-a|}{\sqrt{sec^2\theta + cosec^2\theta}} = |asin\theta\ cos\theta|$

$p' = \dfrac{|0-0-acos\ 2\theta|}{\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta}} = |acos\ 2\theta|$

એટલે કે $p = |asin\theta \cos\theta| = \left|\frac{a}{2} sin\ 2\theta\right|$. આથી $2p = |asin\ 2\theta|$.

વર્ગ કરીને અને ઉમેરતાં, $4p^2 + (p')^2 = a^2$. **જવાબ : (A)**

(23) રેખાઓ $x + (a-1)y + 1 = 0$ અને $2x + a^2y - 1 = 0$ એ પરસ્પર લંબ છે, તો

(A) $|a| = 2$ (B) $0 < a < 1$ (C) $-1 < a < 0$ (D) $a = -1$

ઉકેલ : રેખાઓના ઢાળ $-\frac{1}{a-1}$ અને $-\frac{2}{a^2}$ છે.

આ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore \left(-\frac{1}{a-1}\right)\left(-\frac{2}{a^2}\right) = -1$

$\therefore 2 = -(a-1)\,a^2 = -a^3 + a^2$

$\therefore a^3 - a^2 + 2 = 0$

$\therefore (a+1)(a^2 - 2a + 2) = 0$

કોઈ પણ $a \in R$ માટે $a^2 - 2a + 2 \neq 0$

$\therefore a = -1$ **જવાબ : (D)**

નોંધ : $a = 0, 1$ શક્ય નથી તે જુઓ.

(24) ત્રિકોણની બાજુઓ $x + y - 6 = 0$, $7x + y - 6 = 0$ અને $x - 7y = 6$ છે.
તેના અંતઃકેન્દ્રના યામ = ...

(A) $\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ (B) $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{7}\right)$ (C) $(-1, 5)$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : આપેલ દરેક રેખાઓ પર $\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ માંથી દોરેલ લંબની લંબાઈ = $\frac{12}{5\sqrt{2}}$

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્ર $= \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$. **જવાબ : (A)**

(25) જો $a+b+c=0$, તો તમામ રેખાઓ $ax+by+c=0$ $\left(a^2+b^2 \neq 0 \ a, b, c \in \mathrm{R}\right)$ નિશ્ચિત બિંદુ ...... માંથી પસાર થાય છે.

(A) $(1, 1)$ (B) $(1, 0)$ (C) $(0, 0)$ (D) $(0, 1)$

ઉકેલ : રેખાનું સમીકરણ $ax+by+c=0$ છે.

$ax+by+c=0$ માં $c=-a-b$ મૂકતાં, $ax+by-a-b=0$

$\therefore \quad a(x-1)+b(y-1)=0$, જ્યાં $a^2+b^2 \neq 0$

$\therefore \quad ax+by+c=0$ નિશ્ચિત બિંદુ $(1, 1)$ માંથી પસાર થાય છે. **જવાબ : (A)**

નોંધ : $ax+by+c = \ a \cdot 1+b \cdot 1+c=0$ એ $C(1, 1)$ માંથી પસાર થાય છે, જે નિશ્ચિત બિંદુ છે.

(26) $\left(a^2-a-2\right) x+(a+1) y+a=0$ રેખા X–અક્ષને સમાંતર છે, તો a = ...

(A) –1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

ઉકેલ : $\left(a^2-a-2\right) x+(a+1) y+a=0$ રેખા X–અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore \quad x$ નો સહગુણક $= 0$, $a+1 \neq 0$ yનો સહગુણક $= a+1 \neq 0$

$\therefore \quad a^2-a-2=0 \qquad a+1 \neq 0$

$\therefore \quad (a-2)(a+1)=0$

$\therefore \quad a=2$ **જવાબ : (B)**

(27) જો બિંદુ $(1, 2)$ અને $(3, 4)$ એ રેખા $3x-5y+a=0$ ની એક બાજુએ હોય, તો ......

(A) $7<a<11$ (B) $a<0$ (C) $a=0$ (D) $a \in R-[7, 11]$

ઉકેલ : અહીં બિંદુઓ $(1, 2)$ અને $(3, 4)$ એ રેખા $3x-5y+a=0$ ની એક જ બાજુએ છે.

$\therefore \quad 3-10+a$ અને $9-20+a$ સમચિહ્ન હોવા જોઈએ.

એટલે કે $a-7$ અને $a-11$ ને સમચિહ્ન હોવા જોઈએ.

$\therefore \quad a-7>0$ અને $a-11>0$ અથવા $a-7<0$ અને $a-11<0$

એટલે કે $a>7$, $a>11$ અથવા $a<7$, $a<11$

એટલે કે $a>11$ અથવા $a<7$. **જવાબ : (D)**

(28) રેખાઓ $5x+12y-1=0$ અને $10x+24y+k=0$ વચ્ચેનું અંતર 2 છે, તો k ની કિંમત = ...

(A) –54 (B) 50 (C) –54, 50 (D) 53

ઉકેલ : $5x+12y-1=0$ તથા $5x+12y+\frac{k}{2}=0$ સમાંતર રેખાઓ છે.

તેમની વચ્ચેનું અંતર $= \frac{\left|\frac{k}{2}+1\right|}{\sqrt{25+144}}=2$. આથી $|k+2|=52$ આથી $k=50, -54$ **જવાબ : (A), (B), (C)**

(29) જો રેખાઓ $x+2ay+a=0,\ x+3by+b=0$ અને $x+4cy+c=0$ એ સંગામી હોય, તો a, b, c ......માં હોય. $(a+c\neq 0),\ (a\neq 0),\ (c\neq 0)$

(A) સમાંતર શ્રેણી (B) સમગુણોત્તર શ્રેણી (C) સ્વરિત શ્રેણી (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં આપેલ રેખાઓ સંગામી છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2a & a \\ 1 & 3b & b \\ 1 & 4c & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -bc + 2a(b-c) + a(4c-3b) = 0$$

$$\therefore -bc + 2ac + (-ab) = 0$$

$$\therefore 2ac = b(a+c)$$

$$\therefore b = \frac{2ac}{a+c}$$

$\therefore$ a, b, c એ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. **જવાબ : (C)**

(30) જે રેખા X-અક્ષને સમાંતર હોય અને વક્ર $y=\sqrt{x}$ ને $\frac{\pi}{4}$ના માપના ખૂણે છેદે છે તેનું સમીકરણ ......

(A) $x=\frac{1}{4}$ (B) $y=\frac{1}{4}$ (C) $y=\frac{1}{2}$ (D) $y=1$

ઉકેલ : X-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ $y=k$ છે. ($k>0$ કારણ કે $\sqrt{x}>0$)

તે $y=\sqrt{x}$ ને છેદે છે. $y=k$ હોવાથી, $x=k^2$

છેદબિંદુના યામ (k^2, k).

હવે, $y=\sqrt{x}$. આથી, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(k^2, k) આગળ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2k} = tan\frac{\pi}{4} = 1.$ આથી, $k=\frac{1}{2}$. [રેખા વક્રને $\frac{\pi}{4}$માપના ખૂણે છેદે છે.]

$\therefore$ માંગેલ રેખા $y=\frac{1}{2}$ છે. **જવાબ : (C)**

(31) જો સમબાજુ ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુ A$(-a, 0)$ અને B$(a, 0)$, $a>0$, હોય અને ત્રીજુ શિરોબિંદુ C x-અક્ષ પર આવેલું હોય તો ΔABCનાં પરિવૃતનું સમીકરણ .... [Online April 22, 2013]

(A) $3x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}ay = 3a^2$ (B) $3x^2 + 3y^2 - 2ay = 3a^2$

(C) $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ (D) $x^2 + y^2 - \sqrt{3}ay = a^2$

ઉકેલ : ધારો કે Cના યામ (x, y) છે.

હવે, $CA^2 = CB^2 = AB^2$

$\Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2 = (2a)^2$

$\Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = 4a^2$ ...(i)

અને $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 4a^2$ ...(ii)

(i) અને (ii), પરથી, $x = 0$ અને $y = \pm\sqrt{3}a$

(x, y) એ x-અક્ષની ઉપર હોય તો અને $a > 0$

તેથી $y = \sqrt{3}a$

$\therefore$ C $(0, \sqrt{3}a)$.

પરિવૃતનું સમીકરણ

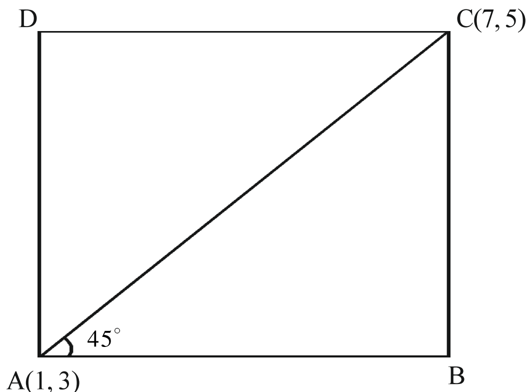
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ **જવાબ : (A)**

(32) $A(1, 3)$ અને $C(7, 5)$ એ ચોરસની બે સામસામેનાં શિરોબિંદુઓ છે, તો A માંથી પસાર થતી બાજુનું સમીકરણ એ ......

(A) $x+2y-7=0$ અથવા $2x-y+1=0$ (B) $x-2y+5=0$

(C) $2x+y-5=0$ (D) એક પણ નહિ.

જવાબ :



આકૃતિ 8.13

ધારો કે A માંથી પસાર થતી બાજુને સમાવતી રેખાનો ઢાળ m છે.

$\overleftrightarrow{AC}$ નો ઢાળ $= \frac{5-3}{7-1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{1}{3}}{1+\frac{m}{3}}\right|$ આથી, $1 = \left|\frac{3m-1}{m+3}\right|$

$\therefore 3m-1 = m+3$ અથવા $3m-1 = -m-3$

$\therefore 2m = 4$ અથવા $4m = -2$

$\therefore m = 2$ અથવા $m = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD}$ નું સમીકરણ $y-3 = 2(x-1)$ આથી, $2x-y+1=0$

$\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $y-3 = -\frac{1}{2}(x-1)$ આથી, $x+2y-7=0$ **જવાબ : (A)**

(33) જો રેખાઓ $x\sec\theta + y\operatorname{cosec}\theta = 2a$ અને $x\cos\theta + y\sin\theta = a\cos2\theta$ પર $(0, 0)$ માંથી દોરેલ લંબ અનુક્રમે p, p' હોય તો $\left(\frac{p}{p'} + \frac{p'}{p}\right)^2 = ...$

(A) $4\cos^2 4\theta$ (B) $4\operatorname{cosec}^2 4\theta$ (C) $4\sin^2 4\theta$ (D) $4\cot^2 4\theta$

ઉકેલ : અહીં, $p = \frac{|0+0-2a|}{\sqrt{sec^2\theta + cosec^2\theta}} = |2a sin\theta \, cos\theta| = |a sin\, 2\theta|$

અને $p' = \frac{|0+0-a cos\, 2\theta|}{\sqrt{\cos^2\theta + sin^2\theta}} = |a \, cos\, 2\theta|$

$\left(\frac{p}{p'} + \frac{p'}{p}\right)^2 = (tan\, 2\theta + cot\, 2\theta)^2 = tan^2 2\theta + cot^2 2\theta + 2$

$= \frac{sin^2 2\theta}{cos^2 2\theta} + \frac{cos^2 2\theta}{sin^2 2\theta} + 2 = \frac{1}{sin^2 2\theta cos^2 2\theta} = \frac{4}{sin^2 4\theta} = 4 cosec^2 4\theta$

જવાબ : **(B)**

(34) આપેલ કિંમતો પૈકી αની ...... કિંમત માટે રેખા $x cos\alpha + y sin\alpha = p$ (જ્યાં $p \neq 0$) નો ઢાળ $\sqrt{3}$ થાય.

(A) $-\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $-\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

ઉકેલ : $x cos\alpha + y sin\alpha = p$ નો ઢાળ $= -\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = \sqrt{3}$

$\therefore \; tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \; tan\alpha = tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = tan\left(\pi - \left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\therefore \; \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

જવાબ : **(D)**

(35) ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર કયા બિંદુ પર કરવાથી બિંદુ $(6, -1)$ના યામો બદલાઈને $(8, -4)$ થાય ?

(A) $(2, -3)$ (B) $(-3, 2)$ (C) $(3, -2)$ (D) $(-2, 3)$

ઉકેલ : ધારો કે ઊગમબિંદુ $O(0, 0)$ નું સ્થાનાંતર $O'(h, k)$ બિંદુ પર કરવાથી બિંદુ $(6, -1$ ના યામો બદલાઈને $(8, -4)$ થાય છે.

અહીં, $(x, y) = (6, -1)$, $(x', y') = (8, -4)$

હવે, $x = x' + h$, $y = y' + k$

$\therefore \; 6 = 8 + h$ અને $-1 = -4 + k$

$\therefore \; h = -2$ અને $k = 3$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ $(h, k) = (-2, 3)$

જવાબ : **(D)**

(36) ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર $(-2, 3)$ બિંદુ આગળ કરતાં ...... બિંદુના નવા યામ $(3, -2)$ થાય.

(A) $(-1, 1)$ (B) $(1, 1)$ (C) $(1, -1)$ (D) $(-1, -1)$

ઉકેલ : અહીં, $(h, k) = (-2, 3)$, $(x', y') = (3, -2)$

હવે, $x = x' + h$, $y = y' + k$

$\therefore \; x = 3 - 2 = 1, \; y = -2 + 3 = 1$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુના યામ $(1, 1)$ છે.

જવાબ : **(B)**

(37) Y-અક્ષની સાથે $\frac{\pi}{6}$ માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાનો ઢાળ = ...

(A) $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\pm \sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$

ઉકેલ : રેખા Y-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{6}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે. તેથી માંગેલ રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{3}$ કે $\frac{2\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનો ઢાળ $tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ અથવા $tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ મળે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનો ઢાળ $= \pm\sqrt{3}$ **જવાબ : (B), (C), (D)**

(38) રેખાઓ $\{(x, 0) \mid x \in R\}$ તથા $\{(0, y) \mid y \in R\}$ વચ્ચેનો ખૂણો ...... છે.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) 3

ઉકેલ : $\{(x, 0) \mid x \in R\}$ = X-અક્ષ,

$\{(0, y) \mid y \in R\}$ = Y-અક્ષ.

રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ = X-અક્ષ તથા Y-અક્ષ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ = $\frac{\pi}{2}$. **જવાબ : (A)**

(39) રેખાઓ $x = y$ તથા $y = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે.

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : અહીં રેખા $x = y$ એટલે કે $x - y = 0$ નો ઢાળ $m_1 = 1$ રેખા. $y = 0$ નો ઢાળ $m_2 = 0$.

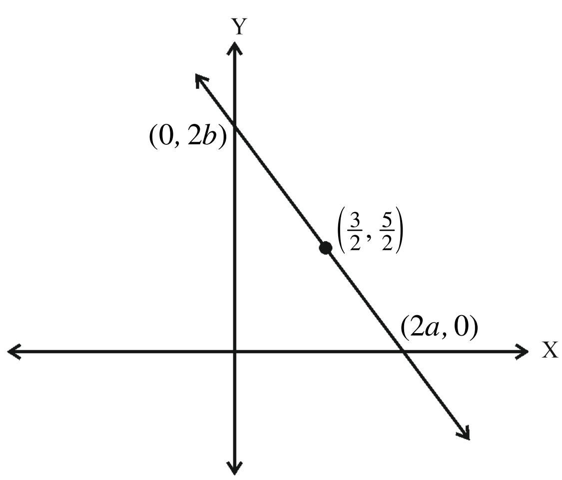
$\therefore$ $tan\alpha = 1$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ **જવાબ : (D)**

(40) રેખાના અક્ષો વચ્ચે અંતરાયેલ રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ ...... થાય.

(A) $3x + 5y - 15 = 0$ (B) $5x + 3y - 15 = 0$ (C) $3x + 5y + 15 = 0$ (D) $5x + 3y + 15 = 0$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.14

રેખાના અક્ષો વચ્ચે અંતરાયેલ રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (a, b) હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$ છે.

$\therefore \; bx + ay - 2ab = 0$

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y - 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ છે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $5x + 3y - 15 = 0$ છે. **જવાબ : (B)**

(41) $4x - 7y + 10 = 0,\; x + y = 5,\; 7x + 4y = 15$ વડે બનતા ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર શોધો.

(A) $(-1, -2)$ (B) $(-1, 2)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(1, -2)$

ઉકેલ : ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં સમીકરણ અનુક્રમે,

$4x - 7y + 10 = 0,\; x + y = 5$ અને $7x + 4y = 15$ છે.

અહીં, રેખાઓ $4x - 7y + 10 = 0$ તથા $7x + 4y - 15 = 0$ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore$ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

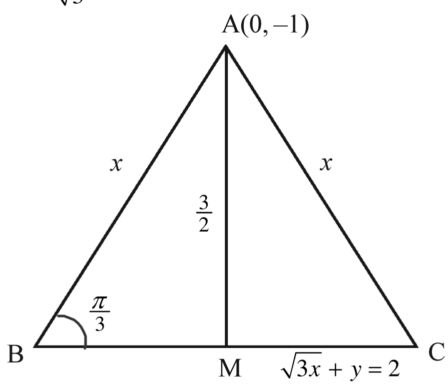
$\therefore$ $7x + 4y - 15 = 0$ તથા $4x - 7y + 10 = 0$ નું છેદબિંદુ લંબકેન્દ્ર થાય.

$4x - 7y + 10 = 0$ અને $7x + 4y - 15 = 0$ ને ઉકેલતાં, લંબકેન્દ્ર $= (1, 2)$. **જવાબ : (C)**

(42) સમભુજ ત્રિકોણની એકબાજુને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $\sqrt{3}x + y = 2$ તથા $(0, -1)$ એક શિરોબિંદુ હોય તો આ ત્રિકોણની બાજુનું માપ ......

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.15

$(0, -1)$ એ $\sqrt{3}x + y = 2$ પર નથી તે સ્પષ્ટ છે.

$(0, -1)$ માંથી $\sqrt{3}x + y = 2$ પરના લંબનું માપ $= \frac{\left|\sqrt{3}(0) + (-1) - 2\right|}{\sqrt{3 + 1}} = \frac{3}{2}$

ધારો કે બાજુનું માપ x છે.

$\therefore \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2$

$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{9}{4} = x^2$

$\therefore x^2 = 3$

$\therefore x = \sqrt{3}.$

બીજી રીત :

$x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

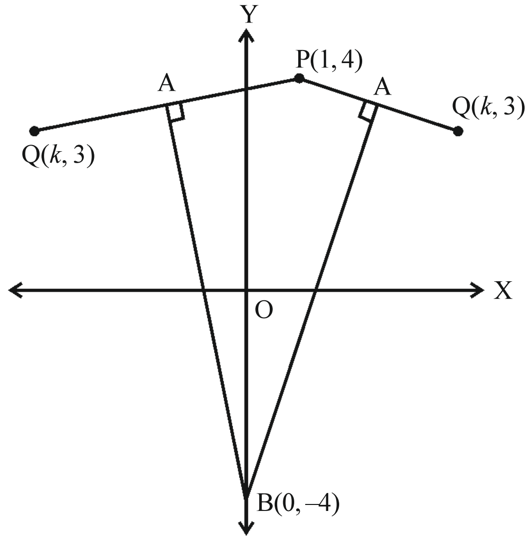
$\therefore \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore x = \sqrt{3}$ **જવાબ : (C)**

(43) $P(1, 4)$ અને $Q(k, 3)$ ને જોડતાં $\overline{PQ}$ ના લંબ દ્વિભાજકનો Y-અંતઃખંડ -4 છે, તો k ની શક્ય કિંમત = ...

(A) -4 (B) 1 (C) 2 (D) -2

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.16

ધારો કે $\overline{AB}$ એ $\overline{PQ}$ નો લંબદ્વિભાજક છે.

હવે $\overline{PQ}$ નો ઢાળ $= \frac{3-4}{k-1} = \frac{-1}{k-1}$

$\therefore$ $\overline{AB}$ નો ઢાળ $= k-1$

હવે R એ $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ હોય,

તો તે $\left(\frac{k+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right)$ એટલે કે, $\left(\frac{k+1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ બને.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $y - \frac{7}{2} = (k-1)\left(x - \frac{k+1}{2}\right)$

હવે $(0, -4)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર છે.

$\therefore$ $-4 - \frac{7}{2} = (k-1)\left(0 - \frac{k+1}{2}\right)$

$\therefore$ $\frac{-15}{2} = -\frac{k^2-1}{2}$ આથી, $k^2 - 1 = 15$

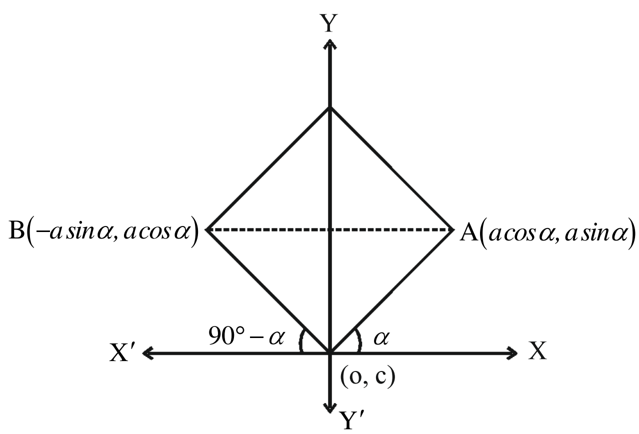
$\therefore$ $k^2 = 16$ આથી, $k = \pm 4$ **જવાબ : (A)**

(44) a બાજુવાળો ચોરસ X-અક્ષ ઉપરના અર્ધતલમાં છે અને એક શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ પર છે. X-અક્ષની ધન દિશા સાથેના ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી બાજુને સમાવતી રેખા α માપનો $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ ખૂણો બનાવે છે, તો ઊગમબિંદુમાંથી પસાર ન થતા વિકર્ણનું સમીકરણ ...... છે.

(A) $y(\cos\alpha + \sin\alpha) + x(\sin\alpha - \cos\alpha) = a$ (B) $y(\cos\alpha + \sin\alpha) + x(\sin\alpha + \cos\alpha) = a$

(C) $y(\cos\alpha + \sin\alpha) + x(\cos\alpha - \sin\alpha) = a$ (D) $y(\cos\alpha - \sin\alpha) - x(\sin\alpha - \cos\alpha) = a$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.17

આકૃતિમાં A અને Bના યામ દર્શાવેલ છે.

$\therefore$ વિકર્ણ $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ એ

$$y - a\sin\alpha = \frac{a\cos\alpha - a\sin\alpha}{-a\sin\alpha - a\cos\alpha}\left(x - a\cos\alpha\right)$$

$\therefore \quad y - a\sin\alpha = -\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}\left(x - a\cos\alpha\right)$

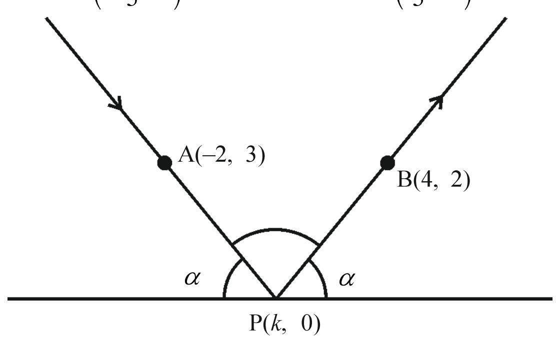
$\therefore \quad \left(y - a\sin\alpha\right)\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right) = -\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right)x + a\cos\alpha\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right)$

$\therefore \quad x\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right) + y\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right) = a$ **જવાબ : (C)**

(45) $(-2, 3)$ માંથી પસાર થતું કિરણ X-અક્ષ પરના બિંદુએથી પરાવર્તિત થઈ $(4, 2)$ માંથી પસાર થાય તો તે X-અક્ષ પરના બિંદુના યામ ......

(A) $\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$ (B) $\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ (D) $\left(\frac{8}{5}, 0\right)$

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.18

ધારો કે $A(-2, 3)$ અને $B(4, 2)$ તથા X અક્ષ પરનું બિંદુ $P(k, 0)$ છે.

જો $\overline{PB}$, X અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે તો, $\overline{PB}$ નો ઢાળ $= \tan\alpha$ થશે.

$\therefore \quad \tan\alpha = \overleftrightarrow{PB}$ નો ઢાળ $= \frac{2-0}{4-k}$ (1)

તેથી સ્પષ્ટ છે કે $\overline{AP}$ એ X અક્ષ સાથે બનાવેલા ખૂણાનું માપ $\pi - \alpha$ હોવાથી $\overline{AP}$ નો ઢાળ $= \tan\left(\pi - \alpha\right)$ થશે.

$\therefore \quad \tan\left(\pi - \alpha\right) = \overline{AP}$ નો ઢાળ $= \frac{3-0}{-2-k} = \frac{-3}{k+2}$

$\therefore \quad -\tan\alpha = \frac{-3}{k+2}$ (2)

$\therefore$ (1) અને (2) પરથી,

$\frac{-2}{4-k} = \frac{-3}{k+2}$

$\therefore \quad 2k + 4 = 12 - 3k$

$\therefore \quad 5k = 8$ આથી, $k = \frac{8}{5}$

$\therefore$ માંગેલ X-અક્ષ પરનું બિંદુ $P\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ મળે. **જવાબ : (D)**