गणित

कक्षा - 10

सत्र 2019–20

DIKSHA एप कैसे डाउनलोड करें?

विकल्प 1 : अपने मोबाइल ब्राउज़र पर diksha.gov.in/app टाइप करें।
विकल्प 2 : Google Play Store में DIKSHA NCTE ढूंढ़े एवं डाउनलोड बटन पर tap करें।

मोबाइल पर QR कोड का उपयोग कर डिजिटल विषय वस्तु कैसे प्राप्त करें ?

DIKSHA App को लॉच करे → App की समस्त अनुमति को स्वीकार करें → उपयोगकर्ता Profile का चयन करें।

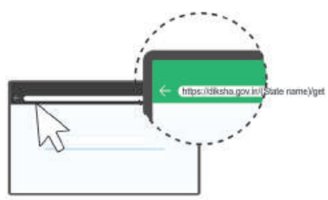
1 पाठ्यपुस्तक में QR Code को Scan करने के लिए मोबाइल में QR Code tap करें।

2 मोबाईल को QR Code पर केन्द्रित करें।

3 सफल Scan के पश्चात् QR Code से लिंक की गई सूची उपलब्ध होगी।

डेस्कटॉप पर QR Code का उपयोग कर डिजिटल विषय–वस्तु तक कैसे पहुँचे ?

1 QR Code के नीचे 6 अंक का Alpha Numeric Code दिया गया है।



2 ब्राउज़र में diksha. gov.in/cg टाईप करें।

3 सर्च बार पर 6 डिजिट का QR CODE टाईप करें।

4 प्राप्त विषय–वस्तु की सूची से चाही गई विषय–वस्तु पर क्लिक करें।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् छत्तीसगढ़, रायपुर

निःशुल्क वितरण हेतु

प्रकाशन वर्ष : 2019

FV7C7Q

© संचालक, एस.सी.ई.आर.टी. छत्तीसगढ़, रायपुर

मार्गदर्शन : प्रो. हृदयकांत दीवान, अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बैंगलोर

सहयोग : विद्या भवन सोसायटी उदयपुर, अजीम प्रेमजी फाउण्डेशन

कार्यक्रम समन्वयक : डॉ. विद्यावती चन्द्राकर, सहायक प्राध्यापक, एस.सी.ई.आर.टी. छत्तीसगढ़, रायपुर

विषय–समन्वयक : डॉ. सुधीर श्रीवास्तव, सहायक प्राध्यापक, एस.सी.ई.आर.टी. छत्तीसगढ़, रायपुर

लेखन समूह : डॉ. सुधीर श्रीवास्तव, टी.के. गजपाल, नंदलाल शाह, डॉ. राघवेन्द्र कुमार गौराहा, हारेन्द्र सिंह भुवाल, सिरीश कुमार नन्दे, खान वकारूज्जमां खां, आरती माने, डॉ. रीतू श्रीवास्तव, तान्या सक्सेना, नेहा कश्यप, अनुपमा, रामकुमार साहू, बृजलाल पटेल, कमलेश, अरधेन्दु शेखर

आवरण पृष्ठ एवं ले–आउट डिजाइनिंग : रेखराज चौरागड़े

टंकण : हारेन्द्र सिंह भुवाल, आरती माने, डॉ. रीतू श्रीवास्तव, रितेश दुबे, प्रसून सरकार, शंकर सिंह राठौर, पार्थसारथी भट्टाचार्य

चित्रांकन : प्रशान्त सोनी, विद्या भवन शिक्षा संदर्भ केन्द्र, उदयपुर

प्रकाशक

छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक निगम, रायपुर

मुद्रक

मुद्रित पुस्तकों की संख्या – ....

शिक्षकों के लिए दो शब्द...

पिछले साल आपने नवीं कक्षा में गणित की नई पाठ्यपुस्तक को पढ़ाया है। आपने उसकी विशेषताओं को अनुभव किया होगा। इस दौरान आपने बच्चों के आत्मविश्वास में अंतर देखा होगा। अब वे पहले से बेहतर तरीके से सवाल हल कर पा रहे होंगे। आपने यह ध्यान दिया होगा कि भले ही सभी विद्यार्थी सभी सवालों को हल न कर पाते रहे हों पर उनके सवाल पढ़ने, पढ़कर समझने की इच्छा और कोशिश करने के तरीकों में अंतर आया है। हम यह भी उम्मीद करते हैं कि अब वे गणित के विषय में समूह चर्चा में ज्यादा भाग लेते होंगे, एक दूसरे को ज्यादा सुनते होंगे एवं बेहतर ढंग से एक दूसरे की मदद करते होंगे।

हमें यह भी विश्वास है कि विद्यार्थियों के समूह कार्य के समय उनके कार्य का अवलोकन करते हुए आपने इस बात को अच्छी तरह समझा होगा कि वे क्या कर पा रहे हैं, क्या नहीं कर पा रहे हैं। इससे आपको उन क्षेत्रों को पहचानने में मदद मिली होगी जो विद्यार्थियों को मुश्किल लगती हैं और जहाँ उन्हें मदद और प्रोत्साहन की जरूरत पड़ती है।

दसवीं कक्षा में भी इन्हीं गतिविधियों पर खास जोर दिया गया है, जहाँ विद्यार्थी समूह चर्चा करेंगे, किताब पढ़कर समझेंगे, करके देखेंगे, सवाल हल करेंगे, खुद नए सवाल बनाएँगे।

गणित के तार्किक ढाँचे को समझना एवं कथनों को गणितीय ढंग से सिद्ध करना, गणित सीखने–सिखाने का एक अहम् पहलू है। इस किताब में गणितीय कथनों को जाँचने के तरीके पर जोर दिया गया है ताकि विद्यार्थी गणितीय कथनों को ऐसे ही मान लेने के बजाए उन्हें पहले सिद्ध करें, उसमें निहित तर्क को समझें, साथ ही जाँचने और सिद्ध करने में अंतर भी जान सकें। अतः आप कक्षा में विद्यार्थियों को नए कथन लिखने उन्हें स्वयं सिद्ध करने का ढंग ढूँढ़ने या पहले किए गए प्रमेयों को पढ़कर समझने एवं समझाने के अवसर दें।

माध्यमिक स्तर पर यह अपेक्षित है कि विद्यार्थी गणित की भाषा को पढ़ सके, उसके चिह्नों एवं प्रतीकों का सहजता से उपयोग करते हुए ढेर सारे नए गणितीय कथन लिख सके। इस किताब में ऐसे अवसर हैं जहाँ विद्यार्थी गणितीय कथनों को पढ़कर उससे निष्कर्ष निकालते हुए उस पर आधारित प्रश्नों का उत्तर खोजेंगे। इस बात को ध्यान में रखते हुए बहुत से नए प्रतीकों से अवगत कराया गया है और साथ ही व्यापकीकरण पर खास जोर दिया गया है। इसके पर्याप्त अभ्यास की आवश्यकता है।

कक्षा 10 में अवधारणात्मक और प्रक्रियात्मक ज्ञान को जोड़ने का प्रयत्न किया गया है। खास तौर से ज्यामितीय रचनाएँ, अनुपात–समानुपात, बैंकिंग–कराधान और निर्देशांक ज्यामिति आदि पाठों में लगातार अंकों के उपयोग तथा गणना करने की प्रक्रियाओं को ज्यादा से ज्यादा अर्थपूर्ण और उपयोगी बनाने का प्रयास किया गया है ताकि विद्यार्थी केवल सवाल हल करने की प्रक्रिया में न उलझकर सवालों में छिपी अवधारणाओं को सरलता और सहजता से सीख सकें और अन्तर्निहित कर उनका उपयोग जीवन में कर सकें।

आप इस किताब में ऐसे बहुत से अवसर पाएँगे जहाँ विद्यार्थी केवल सूत्रों को याद करके प्रश्नों का उत्तर नहीं निकालेंगे बल्कि सोचेंगे, विश्लेषण करेंगे, नया रास्ता ढूंढ़ेंगे। क्षेत्रमिति में ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन की समझ बनाने के लिए जाल (Net) का उपयोग किया गया है जिससे विद्यार्थियों को स्वयं सूत्र खोजने में मदद मिलेगी। साथ ही इस पाठ में नवीं कक्षा से जोड़ते हुए घन और घनाभ के जाल को भी सम्मिलित किया है। आप कक्षा में विद्यार्थियों को विभिन्न ठोस आकृतियों के Net Diagrams को Visualize करने और बनाने के लिए प्रोत्साहित करें।

गणित में सम्पूर्ण समझ विकसित करने के लिए जरूरी है कि विद्यार्थी अलग–अलग पाठों में अवधारणाओं के बीच संबंध देख पाएँ, ताकि उनकी समझ एक विशेष अवधारणा तक सीमित न रहकर विस्तृत एवं व्यापक हो सके। इसमें आपको उनकी मदद करनी होगी तथा कक्षा में संवाद व चर्चा में भागीदारी को बढ़ाने का प्रयास करना होगा।

आप इन पाठों में इन सभी प्रयत्नों को देख पाएँगे जैसे दो चरों के रैखिक समीकरण में आलेख बनाने का उपयोग या समरूपता जाँचते समय अनुपात–समानुपात के उपयोग को रेखांकित किया गया है और भी ऐसे मौके है जिन्हें आप देख पाएँगे, कुछ नए आप और बना पाएँगे।

स्कूल शिक्षा विभाग एवं राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, छ.ग. द्वारा शिक्षकों एवं विद्यार्थियों में दक्षता संवर्धन हेतु अतिरिक्त पाठ्य संसाधन उपलब्ध कराने की दृष्टि से Energized Text Books एक अभिनव प्रयास है, जिसे ऑन लाईन एवं ऑफ लाईन (डाउनलोड करने के उपरांत) उपयोग किया जा सकता है। ETBs का प्रमुख उद्देश्य पाठ्यवस्तु के अतिरिक्त ऑडियो–वीडियो, एनीमेशन फॉरमेट में अधिगम सामग्री, संबंधित अभ्यास, प्रश्न एवं शिक्षकों के लिए संदर्भ सामग्री प्रदान करना है।

उम्मीद है आपको और बच्चों को इस किताब को पढ़ने, दी गई गतिविधियों और सवालों को करने में मजा आएगा। आप अपने अनुभव हमसे बाँटते रहे, किताब के सवाल बदलते रहें। यह उनकी जीवंतता को बनाए रखने के लिए जरूरी है, अतः आप जो भी नए सवाल बनाकर करवाएँ, उन्हें हमें भी भेजें, ताकि वे पाठ्यपुस्तक के अगले संस्करण में शामिल हो सकें। आपके सुझाव व प्रश्न पाठ्यपुस्तक को बेहतर बनाने में मदद करेंगे।

संचालक
राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
छत्तीसगढ़, रायपुर

पाठ्यक्रम

बाह्य मूल्यांकन – 75 अंक, कक्षा – 10 ,विषय – गणित, आंतरिक मूल्यांकन – 25 अंक

इकाई–1 बीजगणित

अध्याय – 1 बहुपद

बहुपदों का भाग, शेषफल प्रमेय, गुणनखण्ड प्रमेय, बहुपदों का गुणनखण्डन करना, ax^2+bx+c के रूप में बहुपद के मध्यपद को तोड़कर गुणनखण्डन करना, द्विघाती बहुपद के मान व शून्यक ,द्विघाती बहुपद के गुणांक व शून्यक में संबंध।

अध्याय – 2 दो चरों का रैखिक समीकरण

कथनों से समीकरण बनाना, युगपद् समीकरण का हल–आलेखी विधि, विलोपन एवं प्रतिस्थापन विधि, अवलोकन से समीकरण निकाय के हलों के प्रकार ज्ञात करना, चरों के अज्ञात गुणांक का मान पता करना, समीकरण से कथन बनाना।

अध्याय – 3 एक चर का द्विघात समीकरण

द्विघात समीकरण,द्विघात समीकरण के मूल,मूलों की जाँच,द्विघात समीकरण के हल करने के तरीके–गुणनखण्डन करके,पूर्ण वर्ग बनाकर, सूत्र से हल करना। द्विघात समीकरण के विभेदक(विविक्तकर), मूलों की प्रकृति, द्विघात समीकरण के अचर गुणांक पता करना, द्विघात समीकरण के मूल एवं गुणांकों में संबंध, मूल ज्ञात होने पर द्विघात समीकरण बनाना।

अध्याय – 4 समान्तर श्रेढ़ी

समान्तर श्रेढ़ी,समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद (व्यापक पद),दो राशियों का समान्तर माध्य,दो राशियों के बीच समान्तर श्रेढ़ी का निर्माण,समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग।

अध्याय – 5 अनुपात एवं समानुपात

अनुपात,अनुपात का व्यावहारिक उपयोग,दो या अधिक भागों में बाँटना,किसी भी दिए अनुपात में किसी राशि को बाँटना,समानुपात,चतुर्थानुपाती,मध्यानुपाती,तृतीयानुपाती,सतत् अनुपात, K–नियम,व्युत्क्रमानुपात

इकाई–2 निर्देशांक ज्यामिति

अध्याय – 6 निर्देशांक ज्यामिति

कार्तीय निर्देशांक का परिचय,निर्देशांक समतल पर किसी बिन्दु का प्रदर्शन,दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना,अंतराल की ढाल(प्रवणता),रेखा की प्रवणता,अक्षों पर रेखा का अन्तःखण्ड,रेखा का समीकरण के रूप में।

अध्याय – 7 आलेख

किन्हीं दो राशियों के बीच के संबंध को आलेख पर देखना,दो राशियों के मध्य संबंध को आलेख पर दर्शाना,विभिन्न परिस्थितियों में बने आलेखों को पढ़ना व निष्कर्ष निकालना।

इकाई–3 वाणिज्य गणित

अध्याय – 8 बैंकिंग एवं कराधान

बैंकिंग,आवर्ती जमा खाता पर ब्याज की गणना,सावधि जमा खाता पर ब्याज की गणना। आयकर क्या है? आयकर की गणना करना।

इकाई–4 त्रिकोणमिति

अध्याय – 9 त्रिकोणमिति समीकरण एवं सर्वसमिकाएँ

त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच संबंध,सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को किसी भी एक त्रिकोणमितीय अनुपात में व्यक्त करना। त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ,समीकरण व उनके हल,पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात।

अध्याय – 10 ऊँचाई एवं दूरी

उन्नयन कोण,अवनमन कोण, ऊँचाई एवं दूरी पर आधारित प्रश्न

इकाई–5 ज्यामिति

अध्याय – 11 ज्यामितीय आकृतियों में समरूपता

स्केलिंग, विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों(आयत,वर्ग,वृत्त,त्रिभुज) में समरूपता की जाँच,समरूपता पर आधारित प्रमेय(प्रमेय 1 से 8 तक)

अध्याय – 12 वृत्त एवं स्पर्श रेखाएँ

जीवा, चाप,वृत्तखंड,त्रिज्यखंड,सर्वांगसम वृत्त,वृत्त के केन्द्र से जीवा पर लंब, वृत्त पर आधारित प्रमेय(प्रमेय 1से10तक),वृत्त की स्पर्शरेखा एवं छेदक रेखा तथा उन पर आधारित प्रमेय(प्रमेय 11 से 14तक)

अध्याय – 13 ज्यामितीय रचनाएँ

समरूप बहुभुज की रचना,समरूप चतुर्भुज की रचना,अंतर्गत वृत्त की रचना,परिगत वृत्त की रचना।

इकाई–6 गणितीय कथनों की जाँच

अध्याय – 14 गणितीय कथनों की जाँच

गणितीय कथनों को सिद्ध करने के आधार(परिभाषा,पूर्व ज्ञात प्रमेय,अभिगृहीत),निगमनिक तर्कण द्वारा सिद्ध करना, कथनों को सिद्ध करने में गणितीय भाषा का उपयोग,गणितीय कथनों को सिद्ध करने के तरीके।

इकाई–7 क्षेत्रमिति

अध्याय – 15 ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

घन एवं घनाभ का पृष्ठीय जाल,घन एवं घनाभ के विकर्ण(पृष्ठीय एवं आकाशीय),बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन ,शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन,गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन।

इकाई–8 सांख्यिकी

अध्याय – 16 आँकड़ों का विश्लेषण

आलेखों द्वारा प्रदर्शित आँकड़ों का विश्लेषण,अंकगणितीय औसत,माध्यिका,बहुलक और इनके उपयोग की समझ,अंतर्वेशन एवं बहिर्वेशन।

विषय-सूची

इकाई	इकाई का नाम	अध्याय	पृष्ठ क्र.
1.	**बीजगणित** (Algebra)	1. बहुपद (Polynomials)	01–28
		2. दो चरों का रैखिक समीकरण (Linear Equations in Two Variables)	29–66
		3. एक चर का द्विघात समीकरण (Quadratic Equations in One Variable)	67–100
		4. समांतर श्रेढ़ी (Arithmetic Progression)	101–128
	DRVH9C	5. अनुपात एवं समानुपात (Ratio and Proportion)	129–148
2.	**निर्देशांक ज्यामिति** (Co-Ordinate Geometry)	6. निर्देशांक ज्यामिति (Co-Ordinate Geometry)	149–172
		7. आलेख (Graph)	173–188
3.	**वाणिज्य गणित** (Commercial Mathematics)	8. बैंकिंग एवं कराधान (Banking and Taxation)	189–204
4.	**त्रिकोणमिति** (Trigonometry)	9. त्रिकोणमितीय समीकरण एवं सर्वसमिकाएँ (Trigonometric Equations and Identities)	205–226
		10. ऊँचाई एवं दूरी: त्रिकोणमितीय अनुप्रयोग (Height and Distance:Trigonometrical Applications)	227–240
5.	**ज्यामिति** (Geometry)	11. ज्यामितीय आकृतियों में समरूपता (Similarity in Geometrical Shapes)	241–268
		12. वृत्त एवं स्पर्श रेखाएँ (Circle and Tangents)	269–308
		13. ज्यामितीय रचनाएँ (Geometrical Constructions)	309–328
6.	**गणितीय कथनों की जाँच** (Proof of Mathematical statements)	14. गणितीय कथनों की जाँच (Proof of Mathematical Statements)	329–346
7.	**क्षेत्रमिति** (Mensuration)	15. ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन (Surface Area And Volume of Solids)	347–372
8.	**सांख्यिकी** (Statistics)	16. आँकड़ों का विश्लेषण (Data Analysis)	373–406

अध्याय 01

बहुपद
[POLYNOMIALS]

E49QPH

परिचय (Introduction)

व्यंजकों $2x+3$, $3x^2+7x-2$, $x^2-\frac{1}{2}x+3$, $y^3-\sqrt{2}y^2+3y-7$ में प्रत्येक में अक्षर संख्या (चर) की घात पूर्ण संख्या है। इस प्रकार के व्यंजक बहुपद होते हैं। बहुपदों पर संक्रियाएँ जोड़ना, घटाना और गुणा करना आपने कक्षा 9 में सीखा है। बहुपदों के जोड़ने, घटाने और गुणा करने के उन तरीकों को एक बार फिर देखते हैं।

1. $x+3$ व $x+4$ को जोड़िए।

हलः– $(x+3)$ व $(x+4)$ का जोड़ अर्थात $(x+3)+(x+4)$

$= x+3+x+4$

$= (x+x)+(3+4)$

$= 2x+7$

2. बहुपद $2x^2+3x+5$ में x^2+x-2 को घटाइए।

हलः– $2x^2+3x+5$ में x^2+x-2 को घटाना अर्थात $(2x^2+3x+5)-(x^2+x-2)$

$= 2x^2+3x+5-x^2-x+2$

$= (2x^2-x^2)+(3x-x)+(5+2)$

$= x^2+2x+7$

3. $(x+5)$ में $(x-7)$ का गुणा कीजिए।

हलः– $(x+5)$ को $(x-7)$ से गुणा अर्थात $(x+5)(x-7)$

$= x(x-7)+5(x-7)$

$= x^2 - 2x - 35$

करके देखें

1. बहुपदों $2x - 7$ व $5x + 9$ को जोड़िए।
2. बहुपद $3x^2 + 2x - 3$ में से $x^2 + 3x - 4$ को घटाइए।
3. बहुपदों $x^2 + 2x - 3$ व $x^2 + x - 2$ को गुणा कीजिए।

क्या बहुपदों का भाग भी कर सकते हैं?

ध्यान दें कि जोड़ने व घटाने में एक घात वाले पद साथ रखे जाते हैं। गुणा में पदों की घातें जुड़ जाती हैं। अतः बहुपदों में जोड़ना, घटाना व गुणा सब हमने किया है और देखा है कि यह कैसे होता है। क्या जिस तरह बहुपदों का जोड़ना, घटाना और गुणा होता है, हम बहुपदों का भाग भी कर सकते हैं?

भाग करते समय पदों व उनकी घात का हिसाब कैसे रखेंगे? यह सब सोचने से पहले यह देखें कि आखिर बहुपदों के भाग की आवश्यकता कब होती है?

नीचे की परिस्थितियों को देखें।

1. एक कार 4 घंटे में x किमी. दूरी तय करती है। कार की चाल ज्ञात कीजिए।

हलः— कार द्वारा तय की गई कुल दूरी = x किमी.

तथा इस दूरी को तय करने में लगा समय = 4 घंटे

$$\because \quad \text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\therefore \quad \text{चाल} = \frac{x}{4} \text{ किमी./घंटे}$$

यह भाग सरल है क्योंकि एक पद वाले बहुपद का एक पद वाले स्थिरांक बहुपद से भाग है।

2. यदि किसी आयत का क्षेत्रफल $40x^2$ वर्गमीटर है तथा उसकी एक भुजा की लंबाई $10x$ मीटर है तब आयत की चौड़ाई क्या होगी?

हलः— आयत का क्षेत्रफल = $40x^2$ वर्गमीटर

आयत की लंबाई = $10x$ मीटर

$\because$ आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

$40x^2 = 10x \times$ चौड़ाई

$$\therefore \quad \text{चौड़ाई} = \frac{40x^2}{10x}$$

$$= \frac{4 \times 10 \times x \times x}{10x}$$

$= 4x$ मीटर

यहाँ भाजक व भाज्य दोनों एक पदीय हैं और इससे भागफल भी एक पदीय ही है।

अब हम एक द्विपदीय बहुपद को एकपदीय बहुपद से भाग करते हैं।

3.बहुपद $18x^2 + 9x$ को $3x$ से भाग दीजिए।

हलः– $18x^2 + 9x$ को $3x$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं–

$$\frac{18x^2}{3x} + \frac{9x}{3x}$$

$$= 6x + 3$$

करके देखें

1. $2x^3 + 12x + 6$ को $2x$ से भाग दीजिए।
2. एक बस 5 घंटे में y किमी. दूरी तय करती है। बस की चाल ज्ञात कीजिए।
3. एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल $65x^2$ वर्गमीटर है तथा उस बगीचे की चौड़ाई $5x$ मीटर है। तब बगीचे की लंबाई ज्ञात कीजिए।
4. $4x^2 + 4$ वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले समकोण त्रिभुज की आधार भुजा की लंबाई $2x$ इकाई है। तब त्रिभुज के शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

ऊपर के उदाहरण में भाग की जो प्रक्रिया हमने की है इसका उपयोग हम व्यावहारिक संदर्भों के प्रश्नों को हल करने में भी करते हैं। इसके कुछ उदाहरण देखते हैं –

उदाहरणः–1. $8x$ इकाई लंबाई का एक रेखाखण्ड AB है जिसे दो बराबर भागों में बाँटना है तब आप यह कैसे बताएँगे कि इसके प्रत्येक भाग की लंबाई कितनी है?

हलः– माना दिए गए रेखाखण्ड AB पर C कोई बिन्दु है जो AB को दो बराबर भागों में बाँटता है।

इसे हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं–

$AB = AC + BC$

अब चूँकि C, रेखाखण्ड AB को दो बराबर भागों में बाँटता है।

अतः $AC = BC$

$\therefore AB = AC + AC$

$$8x = 2AC$$

या $AC = \frac{8x}{2}$

$$AC = \frac{2 \times 4x}{2}$$

$$AC = 4x$$

अर्थात रेखाखण्ड के दोनों बराबर भागों की लंबाई $4x$ इकाई है।

अधिक पद वाले बहुपदों में भाग

कई पद वाले बहुपद को एकपदीय बहुपद से भाग करने में हम हर पद को अलग–अलग कर सकते हैं।

बहुपद $18x^2 + 9x$ को गुणनखण्डन करते हुए $3x$ से भाग दीजिए।

$18x^2 + 9x$ को $3x$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं–

$$\frac{18x^2 + 9x}{3x}$$

$$= \frac{9 \times 2 \times x \times x + 9 \times x}{3x}$$

$$= \frac{9x(2x+1)}{3x}$$

$$= 3(2x+1)$$

$$= 6x + 3$$

एक और देखें ;

बहुपद $4x^4 + 12x^3 + 8x^2$ का गुणनखण्डन करके $4x^2$ से भाग दीजिए।

$4x^4 + 12x^3 + 8x^2$ को $4x^2$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं–

$$\frac{4x^4 + 12x^3 + 8x^2}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2 \times x^2 + 3x \times 4x^2 + 2 \times 4x^2}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2(x^2 + 3x + 2)}{4x^2}$$

$$= x^2 + 3x + 2$$

गुणनखण्डन करके बहुपदों का भाग करना

अब हम गुणनखण्डन करते हुए बहुपदों का भाग करना सीखेंगे।

यदि बहुपद $2x^2+5x-3$ को बहुपद $(x-2)$ से भाग करना हो तब क्या हम ऊपर के उदाहरणों के तरीकों को अपना सकते हैं?

$2x^2+5x-3$ को $(x-2)$ से भाग देने का अर्थ है कि इसे हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं – $\dfrac{2x^2+5x-3}{x-2}$

लेकिन यहाँ अंश एवं हर के बहुपदों में कोई समान गुणनखण्ड हम नहीं पहचान पा रहे हैं और हम इसका भागफल नहीं पता कर पा रहे हैं। ऐसी परिस्थितियों में हम भाग की दीर्घ भाजन विधि का उपयोग कर सकते हैं।

अंकगणित में आप जानते हैं कि 25 को 4 से भाग करने का अर्थ है–

$\dfrac{25}{4}$ अर्थात

भाज्य

$$
\text{भाजक } 4 \left| \begin{array}{r} 25 \\ \underline{-24} \\ 1 \end{array} \right| 6 \text{ भागफल}
$$

शेषफल

यहाँ $25=4\times6+1$

अर्थात भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

इसी तरह भाजक से भाज्य को भाग करने हमें भागफल व शेषफल मिलेगा। अगर भाग पूरा–पूरा हो जाए तो शेषफल शून्य भी हो सकता है।

उदाहरणः–2. बहुपद $2x^2+5x-3$ को बहुपद $x-2$ से भाग कीजिए।

हलः– यहाँ बहुपद $2x^2+5x-3$ भाज्य और $(x-2)$ भाजक है।

भाज्य

$$
\begin{array}{c} \text{भाजक} \\ (x-2) \end{array} \left| \begin{array}{r} 2x^2+5x-3 \\ \underline{-(2x^2-4x)} \\ 9x-3 \\ \underline{-(9x-18)} \\ 15 \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{भागफल} \\ (2x+9) \end{array}
$$

शेषफल

यहाँ हमें भागफल $2x+9$ और शेषफल 15 मिला।

यानी यहाँ बहुपद को भाग देने के लिए निम्नलिखित चरणों में काम करते हैं–

चरण :–1. भाज्य एवं भाजक को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखेंगे।

चरण :–2. भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग देंगे।

यहाँ $\frac{2x^2}{x} = 2x$

यह भागफल का पहला पद होगा।

चरण :–3. इस भागफल से भाजक का गुणा करेंगे और गुणनफल को भाज्य में घटाएँगे –

$(x-2)2x = 2x^2 - 4x$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x - 3 \\ -2x^2 + 4x \\ \hline 9x - 3 \end{array}$$

चरण :–4. घटाने पर प्राप्त परिणाम के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग करेंगे।

अर्थात $\frac{9x}{x} = 9$ यह भागफल का दूसरा पद होगा।

चरण :–5. पुनः इस भागफल से भाजक का गुणा करेंगे।

अर्थात $9 \times (x-2) = 9x - 18$

अब $9x - 3$ में से $9x - 18$ को घटाएँगे

$$\begin{array}{r} 9x - 3 \\ -(9x - 18) \end{array} \quad \text{या} \quad \begin{array}{r} 9x - 3 \\ -9x + 18 \\ \hline 15 \end{array}$$

यह प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए या शेषफल के चर की घात भाजक के चर की घात से कम न हो जाए। इस उदाहरण में शेषफल 15 है जिसमें चर की घात, भाजक $(x-2)$ के चर की घात से कम है।

इस भाग का संक्षिप्त प्रतिरूपण है।

$(2x^2 + 5x - 3) = (x-2)(2x+9) + 15$

अर्थात भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

उदाहरणः–3. बहुपद $5x - 11 - 12x^2 + 2x^3$ को बहुपद $x - 5$ से भाग दीजिए।

हलः– यहाँ भाज्य $5x - 11 - 12x^2 + 2x^3$ व भाजक $x - 5$ है।

भाजक में x की घात अवरोही क्रम में है तथा भाज्य को हमें x की घातों के अवरोही क्रम में लिखना होगा।

घातों के अवरोही क्रम में लिखने पर भाज्य $2x^3-12x^2+5x-11$ होगा।

अब

$$(x-5)\ \Big|\ 2x^3-12x^2+5x-11\ \Big|\ 2x^2-2x-5$$

$$-(2x^3-10x^2)$$

i gy s $2x^3$ के लिए भागफल में $2x^2$ लेंगे

$$-2x^2+5x-11$$

$$-(-2x^2+10x)$$

अब -$2x^2$ के लिए -$2x$ लेंगे

$$-5x-11$$

$$-(-5x+25)$$

और -$5x$ के लिए -5 लेंगे

$$-36$$

अब भाग नहीं कर सकते। यह शेषफल है।

यहाँ भागफल $=2x^2-2x-5$

शेषफल $=-36$

उदाहरण:–4. बहुपद $2x^3-3x^2-x+3$ को बहुपद $2x^2-4x+3$ से भाग दीजिए।

हल:– यहाँ $2x^3-3x^2-x+3$ भाज्य और $2x^2-4x+3$ भाजक है।

अब

$$2x^2-4x+3\ \Big|\ 2x^3-3x^2-x+3\ \Big|\ x+\frac{1}{2}$$

$$-(2x^3-4x^2+3x)$$

$$x^2-4x+3$$

$$-\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right)$$

$$-2x+\left(3-\frac{3}{2}\right)$$

$$-2x+\frac{3}{2}$$

शेषफल की घात भाज्य एवं भाजक की घात से कम होती है।

यहाँ भागफल $=x+\frac{1}{2}$ तथा शेषफल $=-2x+\frac{3}{2}$

उदाहरण:–5. बहुपद $2x^3+4x-3$ को बहुपद $x-2$ से भाग कीजिए।

हल:– यहाँ भाज्य $2x^3+4x-3$ है जिसे हम $2x^3+0.x^2+4x-3$ लिख सकते हैं व भाजक $x-2$ है।

अब

$$
\begin{array}{r|l|l}
(x-2) & 2x^3+0.x^2+4x-3 & 2x^2+4x+12 \\
& 2x^3-4x^2 & \\
& (-)\quad(+) & \\ \hline
& 4x^2+4x-3 & \\
& 4x^2-8x & \\
& (-)\quad(+) & \\ \hline
& 12x-3 & \\
& 12x-24 & \\
& (-)\quad(+) & \\ \hline
& 21 &
\end{array}
$$

भागफल एवं शेषफल भी बहुपद होते हैं।

भागफल $= 2x^2+4x+12$

शेषफल $= 21$

उदाहरण:–6. यदि भाजक $=3x+1$, भागफल $=2x-1$, शेषफल 4 हो तब भाज्य ज्ञात कीजिए।

हल:– $\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$=(3x+1)\times(2x-1)+4$

$=3x(2x-1)+1(2x-1)+4$

$=6x^2-3x+2x-1+4$

भाज्य $=6x^2-x+3$

उदाहरण:–7. सिद्ध कीजिए कि बहुपद $2x^3+x^2-5x+2$ को $x+2$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है।

हल:–

$$
\begin{array}{r|l|l}
(x+2) & 2x^3+x^2-5x+2 & 2x^2-3x+1 \\
& 2x^3+4x^2 & \\
& (-)\quad(-) & \\ \hline
& -3x^2-5x+2 & \\
& -3x^2-6x & \\
& (+)\quad(+) & \\ \hline
& x+2 & \\
& x+2 & \\
& (-)\quad(-) & \\ \hline
& 0 &
\end{array}
$$

स्पष्टत: शेषफल शून्य है ।

करके देखें :

बहुपद $x^2+2xy+y^2$ को गुणनखण्ड के रूप में लिखिए तथा $x+y$ से भाग दीजिए।

उदाहरणः–8. बहुपद $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ को बहुपद $a-b$ से भाग दीजिए।

हलः– यहाँ भाज्य $=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ तथा भाजक $=a-b$

$$
\begin{array}{r|r|l}
a-b & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 & a^2-2ab+b^2 \\
 & a^3-a^2b \\
 & (-)\ (+) \\
\hline
 & -2a^2b+3ab^2-b^3 \\
 & -2a^2b+2ab^2 \\
 & (+)\ (-) \\
\hline
 & ab^2-b^3 \\
 & ab^2-b^3 \\
 & (-)\ (+) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

प्रश्नावली 1

1. बहुपद x^2-x+1 को $x+1$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
2. बहुपद $6x^2-5x+1$ को $2x-1$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
3. बहुपद $2y^3+4y^2+3y+1$ को $y+1$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
4. बहुपद $x^5+5x+3x^2+5x^3+3$ को $4x+x^2+2$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
5. बहुपद $x^2-2xy+y^2$ को $x-y$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
6. cgqn a को बहुपद $a-b$ से भाग दीजिए।
7. यदि भाजक $=3x^2-2x+2$, भागफल $=x+1$, शेषफल $=3$ है तब भाज्य बताइए।
8. यदि भाजक $=4x-7$, भागफल $=x+1$, शेषफल $=0$ है तब भाज्य बताइए।
9. सिद्ध कीजिए कि बहुपद $4x^3+3x^2+2x-9$ को $x-1$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है।
10. जाँच कीजिए कि बहुपद x^2-5x+3 को $x-3$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है अथवा नहीं ?
11. यदि किसी आयत का क्षेत्रफल $45x^2+30x$ वर्गमीटर तथा उसकी चौड़ाई $15x$ मीटर है तब लंबाई क्या होगी ?
12. $28x$ इकाई लंबाई का एक रेखाखण्ड AB है जिसे दो बराबर भागों में बाँटना है तब प्रत्येक भाग की लंबाई क्या होगी ?

E4ILRJ

शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem)

अब भाग के विभिन्न उदाहरणों का एक बार फिर अवलोकन करें। क्या आपको इनमें कोई खास बात दिखाई पड़ती है?

हम कह सकते हैं कि "यदि किसी बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f(a)$ होता है।" यही शेषफल प्रमेय है। $f(a)$ का अर्थ है $f(x)$ का मान जब $x=a$ हो।

उपपत्तिः $\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

अब $f(x)=(x-a)q(x)+r$

$x=a$ के लिए $f(x)$ का मान निम्नलिखित होगा–

$$f(a)=(a-a).q(a)+r$$

$$f(a)=0.q(a)+r$$

$$f(a)=0+r$$

या $f(a)=r$

चूँकि हमने r को शेषफल कहा है इसलिए यहाँ शेषफल $=f(a)$ हुआ।

हमने $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग किया और पाया कि शेषफल $f(a)$ है।

इसलिए हम कह सकते हैं कि यदि किसी बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f(a)$ होता है।

करके देखें

यदि $f(x)$ का भाजक $x+a$ हो तब शेषफल ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x)=2x-a$ (ii) $f(x)=x^2-a^2$ (iii) $f(x)=x^2-2x+1$

अब हम शेषफल प्रमेय का उपयोग करते हुए भाज्य और भाजक के मालूम होने पर बिना भाग किए ही शेषफल ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरणः–9. भाज्य $p(x)=3x^4-x^3+30x-1$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए–

(a) $x+1$ (b) $2x-1$

हलः– (a) भाज्य $p(x)=3x^4-x^3+30x-1$

तथा भाजक $g(x)=x+1$ है

तब शेषफल = ?

शेषफल प्रमेय से हमने जाना कि शेषफल $r = p(a)$ होता है जब भाग $x - a$ से करें।

$\because$ यहाँ भाजक $x+1$ है इसलिए $r = p(-1)$ होगा।

$p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

शेषफल $= p(-1)$

$= 3(-1)^4 - (-1)^3 + 30(-1) - 1$

$= 3 + 1 - 30 - 1$

शेषफल $= -27$

जब भाजक $x - a$ हो तब शेषफल $r = f(a)$ लेकिन जब भाजक $x + a$ हो तब शेषफल $r = f(-a)$ होता है।

(b) भाज्य $p(x) = 3x^4 - x^3 + 30x - 1$

तथा भाजक $g(x) = 2x - 1$

तब शेषफल $= p(a)$

यहाँ $2x - 1$ को $2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ लिखेंगे अब a के स्थान पर $\frac{1}{2}$ दिख रहा है।

अतः शेषफल $= p\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 30 \times \frac{1}{2} - 1$$

$$= 3 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + 15 - 1$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{1}{8} + 14$$

$$= \frac{3-2}{16} + 14$$

$$= \frac{1}{16} + 14$$

शेषफल $= 14\frac{1}{16}$

उदाहरणः–10. यदि $p(x) = 2x^2 - 3x + 6$ को $g(x) = x - 2$ से भाग करना हो तो शेषफल प्रमेय की सहायता से शेषफल ज्ञात कीजिए।

हलः– यहाँ भाज्य $p(x) = 2x^2 - 3x + 6$

तथा भाजक $g(x) = x - 2$

तब शेषफल प्रमेय से,

शेषफल $r = p(2)$

$$= 2(2)^2 - 3(2) + 6$$

$$r = 8$$

उदाहरणः–11. जब किसी बहुपद $f(x)$ को $x^2 - 4$ से भाग दिया जाता है तब शेषफल $5x+6$ होता है। यदि इसी बहुपद को $x-2$ से भाग दिया जाए तब शेषफल क्या होगा?

हलः– यहाँ भाज्य $= f(x)$ है और भाजक $x^2 - 4$ व $x - 2$ है। जब $f(x)$ को $x^2 - 4$ से भाग दिया जाता है तब शेषफल $5x+6$ प्राप्त होता है। इसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं–

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$$f(x) = (x^2 - 4) \times q(x) + (5x + 6)$$

अब हमें मालूम है कि भाज्य और भाजक पता हो तब हम शेषफल प्रमेय की सहायता से शेषफल ज्ञात कर सकते हैं। चूँकि $f(x)$ का एक और भाजक $x - 2$ है।

अतः शेषफल प्रमेय से,

शेषफल $= f(2)$

$$= (2^2 - 4) \times q(2) + (5 \times 2 + 6)$$

$$= (4 - 4) \times q(2) + 10 + 6$$

$$= 0 \times q(2) + 16$$

शेषफल $= 16$

अतः जब $f(x)$ को $x - 2$ से भाग दिया जाएगा तो शेषफल 16 प्राप्त होगा।

सोचें और चर्चा करें

1. उपरोक्त उदाहरण में दूसरे भाजक $x - 2$ के स्थान पर $(x + 2)$ होने पर भी क्या शेषफल ज्ञात किया जा सकता है? यदि हाँ तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

2. उपरोक्त उदाहरण के दोनों भाजकों में क्या कोई खास संबंध दिखाई पड़ता है? साथियों की मदद से उस संबंध को पता करें। यदि दोनों भाजकों में कोई संबंध न हो तब भी क्या शेषफल ज्ञात किया जा सकता है? एक उदाहरण लेकर परिणाम जानने की कोशिश करें।

गुणनखण्ड प्रमेय (The Factor Theorem)

जब किसी भाज्य बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग कर रहे हों और शेषफल शून्य हो जाता हो तब इसके क्या मायने होते हैं? शेषफल के शून्य हो जाने से क्या भाज्य और भाजक में कोई नया संबंध दिखाई पड़ता है?

शेषफल के शून्य हो जाने पर भाज्य और भाजक के संबंध को हम पहले अंकगणित के एक उदाहरण से समझने का प्रयास करते हैं, फिर बहुपदों में इस संबंध को पता करेंगे।

25 को भाज्य और 5 को भाजक के रूप में लेकर देखते हैं कि भागफल और शेषफल क्या होंगे ?

भाज्य

भाजक $5\,\Big|\begin{array}{r} 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}\Big|\,5$ भागफल

शेषफल

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$$25 = 5 \times 5 + 0$$

$$25 = 5 \times 5$$

इस संबंध को देखकर यह कह सकते हैं कि भाजक 5, भाज्य 25 का एक गुणनखण्ड है।

करके देखें

15 को 3 से भाग करके उपरोक्त रूप में लिखकर देखिए कि क्या इसमें भी इसी प्रकार का संबंध मिलता है?

क्या बहुपदों के भाग में भी इसी प्रकार के संबंध दिखाई पड़ते है आइए इन संबंधों को निम्नलिखित उदाहरण में देखते हैं।

उदाहरणः—12. यदि बहुपद $x^2 - 16$ को बहुपद $x - 4$ से भाग दिया जाए तो भागफल और शेषफल क्या होंगे?

हलः—

भाज्य

भाजक $(x-4)\,\Bigg|\begin{array}{r} x^2 - 0.x - 16 \\ -(x^2 - 4x) \\ \hline 4x - 16 \\ -(4x - 16) \\ \hline 0 \end{array}\Bigg|\,x+4$ भागफल

शेषफल

स्पष्टतः भागफल $x+4$ और शेषफल 0 है।

अब इसे निम्नलिखित रूप में लिख लेते हैं–

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$$x^2-16=(x-4)(x+4)+0$$

उपरोक्त उदाहरण में हम देख सकते हैं कि $(x-4)$ व $(x+4)$ का गुणनफल x^2-16 आ रहा है। इसका अर्थ है कि यहाँ भाजक $(x-4)$, x^2-16 का एक गुणनखण्ड है। लेकिन ऐसा हम तभी कह सकते हैं जब शेषफल शून्य हो।

पता करें कि क्या $(x+4)$ को x^2-16 का एक गुणनखण्ड कह सकते हैं?

अब हम यह कह सकते हैं कि जब किसी भाजक से किसी भाज्य को भाग देने पर शेषफल शून्य प्राप्त हो तब वह भाजक, उस भाज्य का एक गुणनखण्ड होता है। इस कथन को गुणनखण्ड प्रमेय का सरल रूप कह सकते हैं। देखा जाए तो गुणनखण्ड प्रमेय, शेषफल प्रमेय का ही विस्तारित रूप है।

गुणनखण्ड प्रमेय की उपपत्ति :

यही कथन प्रमेय के रूप में निम्नलिखित ढंग से लिखा जाता है। अब इसे हम प्रमेय के रूप में लिखकर सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि $x=a$, बहुपद $f(x)$ का एक ऐसा शून्यक है जिसके लिए शेषफल $f(a)=0$ तब $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है। अथवा

यदि बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग देने पर शेषफल $f(a)=0$ हो, तब $(x-a)$ $f(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है।

उपपत्ति : भाज्य, भाजक, भागफल एवं शेषफल के संबंध को निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है–

अर्थात $f(x)=g(x).q(x)+r(x)$

शेषफल प्रमेय से हमें मालूम है कि यदि $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f(a)$ होता है।

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

अर्थात $f(x)=(x-a).q(x)+f(a)$

अब यदि शेषफल $f(a)=0$

तब $f(x)=(x-a).q(x)$

स्पष्टतः $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड हुआ।

बहुपद $f(x)$ का मान x के जिस मान के लिए शून्य होता है वह मान ही शून्यक होता है।

इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है यानी यदि कोई भाजक, किसी भाज्य का एक गुणनखण्ड है, तब शेषफल शून्य होता है।

विलोम : यदि $(x-a)$ बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है तब शेषफल शून्य होता है।

उपपत्ति : चूँकि $(x-a)$ बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है

अर्थात $x=a$, $f(x)$ का एक शून्यक है।

$f(x)=(x-a).q(x)$ में

$x=a$ रखने पर

$f(a)=(a-a).q(a)$

$f(a)=0$

स्पष्टतः $(x-a)$, बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड हो तब शेषफल $f(a)$ शून्य होता है।

1. यदि किसी बहुपद के दो गुणनखण्ड $(x-a),(x-b)$ हों तब $f(x)=(x-a)(x-b).q(x)$

2. यदि किसी बहुपद के तीन गुणनखण्ड $(x-a),(x-b),(x-c)$ हों तब $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c).q(x)$

कोई भाजक, भाज्य बहुपद का गुणनखण्ड है अथवा नहीं यह हम भाग किए बिना ही गुणनखण्ड प्रमेय की मदद से बता सकते हैं। आगे दिए गए उदाहरणों में आप गुणनखण्ड प्रमेय की उपयोगिता को समझ सकेंगे।

उदाहरणः—13. क्या $(x-2)$, बहुपद $p(x)=x^3-3x^2+4x-4$ का एक गुणनखण्ड है?

हलः— यदि $(x-2)$, बहुपद $p(x)=x^3-3x^2+4x-4$ का एक गुणनखण्ड है तब $x=2$ रखने पर शेषफल शून्य होना चाहिए।

$p(x)$ में $x=2$ रखने पर

$$p(2)=(2)^3-3(2)^2+4(2)-4$$
$$=8-3\times4+8-4$$
$$=8-12+4$$
$$=12-12$$
$$p(2)=0$$

स्पष्टतः $p(2)=0$ अतः $(x-2)$; $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरणः–14 क्या $(x-a)$ बहुपद $p(x)=x^3-ax^2+5x-5a$ का एक गुणनखण्ड है?

हलः– बहुपद $p(x)=x^3-ax^2+5x-5a$ में $x=a$ रखने पर $p(a)=0$ हो जाए तब हम $(x-a)$ को $p(x)$ का गुणनखण्ड कह सकते हैं।

$x=a$ रखने पर

$$p(a)=a^3-a.a^2+5a-5a$$
$$=a^3-a^3+0$$
$$p(a)=0$$

स्पष्टतः $p(a)=0$ अतः $(x-a)$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरणः–15. यदि $(x-1), p(x)=x^2+x+k$ का एक गुणनखण्ड है तब k का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– चूँकि $(x-1)$, x^2+x+k का एक गुणनखण्ड है। तब गुणनखण्ड प्रमेय के विलोम से कह सकते हैं कि $x=1$ पर शेषफल $p(1)$ शून्य होगा।

अतः $p(1)=0$

$$1^2+1+k=0$$
$$1+1+k=0$$
$$2+k=0$$
$$k=-2$$

प्रश्नावली 2

1. यदि $p(x)=x^3+3x^2-5x+8$ को निम्नलिखित से भाग करें तो शेषफल प्रमेय की मदद से शेषफल ज्ञात कीजिए –

   (i) $x+1$ (ii) $2x-1$ (iii) $x+2$ (iv) $x-4$ (v) $x+\frac{1}{3}$

2. निम्नलिखित में जाँचिए कि क्या $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है?

   (i) $g(x)=x-3$; $p(x)=x^3-4x^2+x+6$

   (ii) $g(x)=x+1$; $p(x)=2x^3+x^2-2x+1$

   (iii) $g(x)=x-2$; $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$

   (iv) $g(x)=x-1$; $p(x)=x^3+5x^2-5x+1$

   (v) $g(x)=x+4$; $p(x)=x^2+2x-1$

3. निम्नलिखित में a का मान ज्ञात कीजिए जबकि $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो–

(i) $g(x)=x+1$; $p(x)=x^2+ax+2$

(ii) $g(x)=x-1$; $p(x)=ax^2-5x+3$

(iii) $g(x)=x+2$; $p(x)=2x^2+6x+a$

(iv) यदि $g(t), p(t)$ का एक गुणनखण्ड हो तो t का मान ज्ञात कीजिए–

$g(t)=t-3$; $p(t)=t^2+2at-2a+3$

(v) यदि $g(y), p(y)$ का एक गुणनखण्ड हो तो y का मान ज्ञात कीजिए–

$g(y)=y+5$; $p(y)=y^2-2y+a$

4. जब किसी बहुपद $f(x)$ को x^2-9 से भाग दिया जाता है तब $3x+2$ शेषफल है। जब इसी बहुपद को $(x-3)$ से भाग दिया जाए तब शेषफल क्या होगा?

5. जब किसी बहुपद $f(x)$ को x^2-16 से भाग दिया जाता है तब शेषफल $5x+3$ है। जब इसी बहुपद को $(x+4)$ से भाग दिया जाए तब शेषफल क्या होगा?

बहुपदों का गुणनखण्डन (Factoring Polynomials)

अभी तक हमने देखा कि किसी बहुपद को किसी अन्य बहुपद से भाग दिया जाता है तब शेषफल शून्य होने पर हम यह कह पाते हैं कि वह भाजक बहुपद, भाज्य बहुपद का गुणनखण्ड है। इससे हम बहुपद के गुणनखण्ड नहीं ढूँढ सकते तो हम उन बहुपदों तक कैसे पहुँचे जो किसी बहुपद के गुणनखण्ड हैं? हम बहुपदों के प्रकार के आधार पर उनके गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं। हम यहाँ एकघातीय व द्विघातीय बहुपदों के गुणनखण्डन की चर्चा करेंगे।

किसी संख्या का गुणनखण्डन करने का अर्थ उसे ऐसे अभाज्य गुणनखण्डों में तोड़ना होता है, जिनका गुणा करने पर पुनः वही संख्या प्राप्त हो।

6 के गुणनखण्ड 2×3 के बारे में विचार करते हैं।

6 को यहाँ 2 व 3 के अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखा गया है जिनका गुणनफल 6 है।

इसी प्रकार 12 को भी लिख सकते हैं –

$12=2\times2\times3$

इसी प्रकार जब हम किसी बहुपद के गुणनखण्डन की बात करते हैं तो उसका आशय होता है कि बहुपद को ऐसे सरल बहुपदों के रूप में तोड़कर लिखना जिन्हें गुणा करने पर फिर वही बहुपद मिल जाए।

बहुपदों के गुणनखण्डन करने के कुछ तरीके हैं जैसे हम कभी उभयनिष्ठ बहुपद पहचान कर गुणनखण्डन करते हैं तो कभी निम्नलिखित सर्वसमिकाओं के उपयोग से –

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,आदि, ।

उभयनिष्ठ निकालकर गुणनखण्ड प्राप्त करना

उभयनिष्ठ बहुपद निकालकर गुणनखण्ड ज्ञात करना तभी संभव हो पाता है जबकि बहुपद के सभी पदों में वह बहुपद मौजूद हो। आगे के कुछ उदाहरणों में इसे समझा जा सकता है।

उदाहरणः–16. $12x + 4x^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– $12x + 4x^2 = 4 \times 3 \times x + 4 \times x \times x$ (यहाँ बहुपद $4x$ दोनों पदों में है)

$= 4x(3+x)$

उदाहरणः–17. $ab + ac + a^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– $ab + ac + a^2 = a(b+c+a)$ (a तीनों पदों में है)

$= a(a+b+c)$

उदाहरणः–18. $2x^3 + 4x$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– $2x^3 + 4x = 2 \times x \times x^2 + 2 \times 2 \times x$

$= 2x(x^2 + 2)$

सर्वसमिकाओं के उपयोग से गुणनखण्डन करना

क्या आप $x^2 - 4$, $x^2 + 6x + 9$, $x^2 + 5x + 6$ के गुणनखण्डन में उभयनिष्ठ बहुपद पहचान कर गुणनखण्ड पता कर सकते हैं?

आइए कुछ बहुपद $x^2 - 4$, $x^2 + 6x + 9$, तथा $x^2 + 5x + 6$ को देखें। इनमें से प्रत्येक बहुपद के पदों को देखने से हमें पता चल रहा है कि इनके सभी पदों में कोई भी पद एक जैसे नहीं है। इस प्रकार के बहुपदों का उभयनिष्ठ बहुपद निकालकर गुणनखण्डन नहीं हो सकता। तो क्या करें? आइए देखें

$x^2 - 4$ का गुणनखण्ड निम्नलिखित होगा–

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$ $\because$ सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$= (x+2)(x-2)$

क्या $x^2 + 6x + 9$ को किसी सर्वसमिका के रूप में लिख सकते हैं?

हाँ $x^2 + 6x + 9$ को $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सर्वसमिका के रूप में लिख सकते हैं।

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times 3x + 3^2$

$$= (x+3)^2$$
$$= (x+3)(x+3)$$

करके देखें

1. $x^2 - 16$ का गुणनखण्डन कीजिए।
2. $4x^2 - 20x + 25$ का गुणनखण्डन कीजिए।

$ax^2 + bx + c$ के रूप में बहुपद के मध्यपद को तोड़कर गुणनखण्ड ज्ञात करना

पुनः हम $x^2 + 5x + 6$ के गुणनखण्डन पर विचार करते हैं। क्या किसी सर्वसमिका के रूप में इसे लिखकर इसका गुणनखण्डन कर सकते हैं?

आप देखेंगे कि इस बहुपद को हम किसी भी ज्ञात सर्वसमिका के रूप में नहीं दर्शा पा रहे हैं।

इस प्रकार के बहुपदों के गुणनखण्डन करने के लिए हमें उनके मध्यपद को दो ऐसे भागों में तोड़ने की जरूरत होती है जिनका योग तो मध्य पद के बराबर हो लेकिन उनका गुणनफल बहुपद के प्रथम व अंतिम पद के गुणनफल के बराबर हो।

अब हम $x^2 + 5x + 6$ का गुणनखण्डन करके देखते हैं।

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + 2\times 3$$
$$= x^2 + 2x + 3x + 2\times 3$$
$$= (x^2 + 2x) + (3x + 2\times 3)$$
$$= x(x+2) + 3(x+2)$$
$$= (x+2)(x+3)$$

इस तरीके को सीखने के लिए हम निम्नलिखित व्यंजक का उपयोग करते हैं :

$$(x+\alpha)(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$
$$= 1.x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

$(x+\alpha)$ व $(x+\beta)$ के गुणनफल के रूप में प्राप्त व्यंजक को $ax^2 + bx + c$ के रूप में लिख सकते हैं। तब हम देखते हैं कि यहाँ $a = 1$, $b = \alpha + \beta$ व $c = \alpha\beta$ है।

$ax^2 + bx + c$ के रूप के किसी बहुपद का गुणनखण्ड प्राप्त करने के के लिए प्रथम पद x^2 के गुणांक a व अंतिम पद c का गुणा करते हैं तथा प्राप्त गुणनफल के दो ऐसे गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं जिनका योग मध्यपद x के गुणांक b के बराबर हो।

आइए इसे निम्नलिखित उदाहरण से समझते हैं –

उदाहरण:–19. बहुपद x^2+3x+2 का गुणनखण्डन कीजिए।

हल:– बहुपद x^2+3x+2 की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=1,\ b=3,\ c=2$

अब चूँकि $a\times c=1\times 2=2$

2 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित है:

1×2	$(-1)\times(-2)$

अब इन गुणनखण्डों का योग देखते हैं $1+2=3$ लेकिन $(-1)+(-2)=-3$ यानी 1×2 ही 2 का ऐसा गुणनखण्ड है जिसका योग 3 है जो कि b के बराबर है।

अतः $x^2+3x+2=x^2+(1+2)x+1\times 2$

$$=x^2+1.x+2.x+1\times 2$$

$$=(x^2+1.x)+(2.x+1\times 2)$$

$$=x(x+1)+2(x+1)$$

$$=(x+1)(x+2)$$ अभीष्ट गुणनखण्ड है।

उदाहरण:–20. बहुपद $6x^2-5x-6$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल:– बहुपद $6x^2-5x-6$ की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=6,\ b=-5,\ c=-6$

अब चूँकि $a\times c=6\times(-6)=-36$

–36 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

-1×36	$1\times(-36)$
-2×18	$2\times(-18)$
-3×12	$3\times(-12)$
-4×9	$4\times(-9)$
-6×6	$6\times(-6)$

स्पष्टतः $ac=-36$ के उपरोक्त गुणनखण्डों में $4\times(-9)$ में 4 व –9 का योग –5 है जो मध्यपद b के बराबर है।

अतः $6x^2-5x-6=6x^2+(4-9)x-6$

$$=6x^2+4x-9x-6$$

$$=(6x^2+4x)-1(9x+6)$$

$$=2x(3x+2)-3(3x+2)$$

$$=(3x+2)(2x-3)$$ अभीष्ट गुणनखण्ड है।

उदाहरणः–21. बहुपद $14x^2+19x-3$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– बहुपद $14x^2+19x-3$ की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=14$, $b=19$, $c=-3$

अब चूँकि $a\times c=14\times(-3)=-42$

–42 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

-1×42	$1\times(-42)$
-2×21	$2\times(-21)$
-3×14	$3\times(-14)$
-6×7	$6\times(-7)$

स्पष्टतः $a\times c=-42$ के उपरोक्त गुणनखण्डों में -2×21 में –2 व 21 का योग $-2+21=19$ है जो मध्यपद b के बराबर है।

अतः $14x^2+19x-3=14x^2+(-2+21)x-3$

$$=14x^2-2x+21x-3$$

$$=(14x^2-2x)+(21x-3)$$

$$=2x(7x-1)+3(7x-1)$$

$$=(7x-1)(2x+3)$$ अभीष्ट गुणनखण्ड

उदाहरणः–22. बहुपद $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हलः– बहुपद $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}$ की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=4\sqrt{3}$, $b=5$, $c=-2\sqrt{3}$

अतः $a\times c=4\sqrt{3}\times\left(-2\sqrt{3}\right)=-8\times3=-24$

–24 के संभावित गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

-1×24	$1\times(-24)$
-2×12	$2\times(-12)$
-3×8	$3\times(-8)$
-6×4	$6\times(-4)$

स्पष्टतः $a\times c=-24$ के उपरोक्त गुणनखण्डों में -3×8 में -3 व 8 का योग $-3+8=5$ है जो मध्यपद b के बराबर है।

अतः
$$\begin{aligned}4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}&=4\sqrt{3}x^2+(-3+8)x-2\sqrt{3}\\&=4\sqrt{3}x^2-3x+8x-2\sqrt{3}\\&=\left(4\sqrt{3}x^2-3x\right)+\left(8x-2\sqrt{3}\right)\\&=\left(4\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}\sqrt{3}x\right)+2\left(4x-\sqrt{3}\right)\\&=\sqrt{3}x\left(4x-\sqrt{3}\right)+2\left(4x-\sqrt{3}\right)\\&=\left(4x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}x+2\right)\end{aligned}$$
अभीष्ट गुणनखण्ड

सोचे एवं चर्चा करें

क्या यह संभव है कि किसी द्विघातीय बहुपद के दो से अधिक गुणनखण्ड हों? इस अध्याय के उदाहरणों का अवलोकन करें एवं साथियों के साथ मिलकर द्विघाती बहुपद बनाकर उसके गुणनखण्ड कर जाँचिए कि क्या इनके दो से अधिक गुणनखण्ड प्राप्त हो रहे हैं?

प्रश्नावली 3

निम्नलिखित बहुपदों के मध्य पद तोड़कर गुणनखण्डन कीजिए –

(1)	x^2-3x-4	(2)	x^2+2x+1	(3)	x^2+x-12
(4)	$x^2-8x+15$	(5)	$t^2-4t-21$	(6)	$-y^2+35y+156$
(7)	$7x^2-2x-5$	(8)	$12x^2-24x+12$	(9)	$6x^2-7x-3$
(10)	$14y^2+19y-3$	(11)	$\sqrt{3}y^2+9y+6\sqrt{3}$	(12)	$144x^2+24x+1$

द्विघातीय बहुपद के मान व शून्यक (Values and Zeroes of Quadratic Polynomials)

E4SHT7

माना कोई बहुपद $p(x)=x^2-6x+9$ है। इसमें $x=1$ रखते हैं।

तब $p(1)=(1)^2-6(1)+9$

$=1-6+9$

$=4$

$x=1$ रखने पर $p(1)$ का मान 4 प्राप्त होता है। यह $x=1$ के लिए बहुपद का मान है। ऐसे ही हम $p(-1)$, $p(2)$ आदि के मान ज्ञात कर सकते हैं।

हम देखते हैं कि जब $x=3$ रखते हैं

तब $p(3)=3^2-6(3)+9$

$=9-18+9$

$=0$

यहाँ $x=3$ के लिए बहुपद का मान 0 है। अतः 3 को हम इस बहुपद का शून्यक कहेंगे। निम्नलिखित उदाहरण में बहुपद का शून्यक ज्ञात करेंगे।

उदाहरणः–23. बहुपद x^2-3x-4 का शून्यक ज्ञात कीजिए।

हलः– माना $p(x)=x^2-3x-4$

यहाँ हमें x का ऐसा मान ज्ञात करना है जिसके लिए बहुपद का मान शून्य हो।

यदि $x=1$

तब $p(1)=(1)^2-3(1)-4$

$=1-3-4$

$=-6$

यदि $x=-1$

तब $p(-1)=(-1)^2-3(-1)-4$

$=1+3-4$

$=0$

$x = -1$ रखने पर बहुपद का मान शून्य हो जाता है अर्थात –1 इस बहुपद का शून्यक है। क्या और भी कुछ मान संभव है जिसके लिए बहुपद शून्य हो? यह जानने के लिए हमें x के और भी मान रखने होंगे। लेकिन यदि बहुपद के गुणनखण्डों का उपयोग करें तो हम बहुपद के सभी शून्यक सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

बहुपद $x^2 - 3x - 4$ के गुणनखण्ड ज्ञात करेंगे।

$$x^2 - 3x - 4 = x^2 - 4x + x - 4$$
$$= (x^2 - 4x) + 1(x - 4)$$
$$= x(x - 4) + 1(x - 4)$$
$$= (x - 4)(x + 1)$$

इस बहुपद का शून्यक x का वह मान होगा जिसके लिए बहुपद शून्य हो जाए

अर्थात $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 4)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 4) = 0$ या $(x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 4 = 0$ या $x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 4$ या $x = -1$

यहाँ हम देख सकते हैं कि x के दो मानों –1 व 4 के लिए बहुपद का मान शून्य है। अतः –1 व 4 इस बहुपद के शून्यक हैं।

उपरोक्त उदाहरण में –1 व 4 दिए गए बहुपद के शून्यक हैं जबकि $(x - 4)$ व $(x + 1)$ बहुपद के गुणनखण्ड हैं। आपने देखा कि बहुपद के गुणनखण्डों को शून्य के बराबर रखने पर बहुपद के शून्यक प्राप्त हो गए। यानी गुणनखण्ड मालूम हो तो शून्यक प्राप्त कर सकते हैं। क्या शून्यक मालूम होने पर गुणनखण्ड जान सकेंगे?

करके देखें

1. $x^2 - 9$ के गुणनखण्ड व शून्यक ज्ञात कीजिए।
2. किसी बहुपद के शून्यक 4 व –1 है गुणनखण्ड क्या होंगे?

किसी द्विघातीय बहुपद के गुणांक व उसके शून्यक में संबंध

बहुपद $x^2 - 5x + 6$ के शून्यक 3 व 2 हैं, तब इसके गुणनखण्ड $(x - 3)$ व $(x - 2)$ हैं।

अर्थात $x^2 - 5x + 6 = 1.(x - 3)(x - 2)$

अब बहुपद $4x^2 - 4x + 1$ के गुणनखण्ड व शून्यक पर विचार करते हैं –

$$4x^2-4x+1=4x^2-2x-2x+1$$
$$=\left(4x^2-2x\right)-1\left(2x-1\right)$$
$$=2x\left(2x-1\right)-1\left(2x-1\right)$$
$$=\left(2x-1\right)\left(2x-1\right)$$
$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\times 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

अर्थात $4x^2-4x+1$ का गुणनखण्ड $4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ है। स्पष्टतः इस बहुपद के $\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ शून्यक हैं।

क्या x^2-5x+6 व $4x^2-4x+1$ के गुणनखण्ड में कोई खास बात (पैटर्न) दिखाई पड़ रही है? x^2-5x+6 में x^2 का गुणांक 1 उसके एक गुणनखण्ड के रूप में लिखा है। इसी प्रकार $4x^2-4x+1$ में x^2 का गुणांक 4 उसके एक गुणनखण्ड के रूप में लिखा है। यानी हम बहुपद ax^2+bx+c को जिसके शून्यक α व β हैं तथा a,b,c वास्तविक संख्याएँ जहाँ $a\neq 0$ निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं –

$ax^2+bx+c=k\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)$; $k=a$

जहाँ k एक वास्तविक संख्या है और $k\neq 0$

पुनः $ax^2+bx+c=kx^2-k\left(\alpha+\beta\right)x+k\alpha\beta$ (गुणा करने पर)

इस समीकरण के दोनों पक्षों के x^2, x के गुणांकों एवं अचर पदों की तुलना करने पर

$a=k$; $b=-k\left(\alpha+\beta\right)$; $c=k\alpha\beta$

$\frac{b}{-k}=\alpha+\beta$; $\frac{c}{k}=\alpha\beta$

$\frac{b}{-a}=\alpha+\beta$

अर्थात $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ एवं $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ (अंश और हर में –1 का गुणा करने पर)

हम कह सकते हैं कि द्विघातीय बहुपद ax^2+bx+c में

$$\text{शून्यकों का योगफल } \alpha+\beta = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

तथा शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

बहुपद के शून्यकों एवं गुणांकों के संबंध को कुछ उदाहरणों से समझते हैं

उदाहरणः–24. बहुपद $6x^2+13x+7$ के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः– बहुपद $6x^2+13x+7$ की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=6$, $b=13$, $c=7$

$\because$ शून्यकों का योगफल $= \dfrac{-b}{a}$

$\therefore$ शून्यकों का योगफल $= \dfrac{-13}{6}$

$\because$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{c}{a}$

$\therefore$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{7}{6}$

उदाहरणः–25. बहुपद $4x^2+4\sqrt{3}x+3$ के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः– बहुपद $4x^2+4\sqrt{3}x+3$ की तुलना ax^2+bx+c से करने पर

$a=4$, $b=4\sqrt{3}$, $c=3$

$\because$ शून्यकों का योगफल $= \dfrac{-b}{a}$

$\therefore$ शून्यकों का योगफल $= \dfrac{-(4\sqrt{3})}{4}$

$= -\sqrt{3}$

$\because$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{c}{a}$

$\therefore$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{3}{4}$

सोचें एवं चर्चा करें :

1. क्या शून्यक ज्ञात होने पर बहुपद ज्ञात कर सकते हैं? कोई दो मान लेकर बहुपद बनाइए।

प्रश्नावली 4

1. नीचे ax^2+bx+c रूप के कुछ द्विघातीय बहुपदों के शून्यक दिए गए हैं, तब बहुपदों के गुणनखण्ड लिखिए –

(i) $(3,4)$ (ii) $(-2,-3)$ (iii) $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$

(iv) $(15,17)$ (v) $(-18,12)$

E52DUU

2. निम्नलिखित बहुपदों के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए –

(i) $x^2+10x+24$ (ii) $2x^2-7x-9$ (iii) $x^2+11x+30$

(iv) $-5x^2+3x+4$ (v) x^2+x-12

हमने सीखा

1. बहुपदों की भाग की प्रक्रिया अंकगणित के भाग की प्रक्रिया से थोड़ी अलग होती है। इसमें चर की घात का ध्यान रखना होता है।
2. बहुपदों का भाग करने के लिए भाज्य एवं भाजक को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखते हैं।
3. बहुपदों का भाग करने के लिए दीर्घ भाजन विधि का भी उपयोग करते हैं।
4. दीर्घ भाजन विधि में भाग की प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए या शेषफल के चर की घात भाजक के चर की घात से कम न हो जाए।
5. बहुपदों के भाग की प्रक्रिया में भागफल एवं शेषफल भी बहुपद होते हैं।
6. यदि किसी बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $f(a)$ होता है। यह शेषफल प्रमेय है।
7. गुणनखण्ड प्रमेयः– यदि $x=a$, बहुपद $f(x)$ का एक ऐसा शून्यक है जिसके लिए शेषफल $f(a)=0$ तब $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है।
8. द्विघातीय बहुपदों के दो शून्यक होते हैं।

mÙkj ekyk k&1

1- Hkkx Qy $=x-2$, शेषफल $=3$

2. भागफल $=3x-1$, शेषफल $=0$

3. भागफल $=2y^2+2y+1$, शेषफल $=0$

4. भागफल $=x^3-4x^2+19x-65$, शेषफल $=227x+133$

5. भागफल $=x-y$, शेषफल $=0$

6. भागफल $=1$, शेषफल $=b$

7. $3x^3+x^2+5$ 8. $4x^2-3x-7$

10. शेषफल शून्य नहीं है। 11. $(3x+2)$ मीटर

12. $14x$ मीटर

उत्तरमाला–2

1. (i) 15 (ii) $\frac{51}{8}$ (iii) 22 (iv) 100 (v) $\frac{269}{27}$

2. (i) $(x-3)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड है ।
   (ii) $(x+1)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड नहीं है ।
   (iii) $(x-2)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड है ।
   (iv) $(x-1)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड नहीं है ।
   (v) $(x+4)$ दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड नहीं है ।

3. (i) $a=3$ (ii) $a=2$ (iii) $a=4$
   (iv) $a=-3$ (v) $a=-35$

4. शेषफल $=11$ 5. शेषफल $=-17$

उत्तरमाला–3

(1)	$(x-4)(x+1)$	(2)	$(x+1)(x+1)$
(3)	$(x+4)(x-3)$	(4)	$(x-5)(x-3)$
(5)	$(t-7)(t+3)$	(6)	$-(y-39)(y+4)$
(7)	$(7x+5)(x-1)$	(8)	$12(x-1)(x-1)$
(9)	$(2x-3)(3x+1)$	(10)	$(2y+3)(7y-1)$
(11)	$(y+2\sqrt{3})(\sqrt{3}y+3)$	(12)	$(12x+1)^2$

उत्तरमाला–4

1 .(i) $(x-3)(x-4)$ (ii) $(x+2)(x+3)$
   (iii) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ (iv) $(x-15)(x-17)$
   (v) $(x+18)(x-12)$

2. (i) $-10, 24$ (ii) $\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}$ (iii) $-11, 30$
   (iv) $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}$ (v) $-1, -12$

अध्याय 02

दो चरों का रैखिक समीकरण

[LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES]

E5B9HH

रीमा ने सलमा से पूछा किसी खंभे का एक चौथाई भाग नीले रंग में, एक तिहाई भाग लाल रंग में तथा खंभे का शेष 10 मीटर भाग काले रंग से रंगा हुआ है, खंभे की कुल लंबाई कितनी होगी?

सलमा ने कहा कि पिछली कक्षा में हमने एक चर के रैखिक समीकरण में सीखा है कि इस तरह की परिस्थिति में एक चर (अज्ञात) का मान ज्ञात करने के लिए एक चर का समीकरण बनाया जाता है और फिर उसे हल करके चर (अज्ञात) का मान ज्ञात कर लिया जाता है।

रीमा – अच्छा! तो, यहाँ हम खंभे की लंबाई कैसे जानेंगे?

सलमा – यदि खंभे की कुल लंबाई को x मीटर मान लें,

तब, खंभे के नीले भाग की लंबाई $= \frac{x}{4}$ मीटर

खंभे के लाल भाग की लंबाई $= \frac{x}{3}$ मीटर

खंभे का काला भाग = 10 मीटर

अतः खंभे की कुल लंबाई = नीले भाग की लंबाई + लाल भाग की लंबाई + काले भाग की लंबाई

$$x = \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 10$$

$$x = \frac{3x + 4x + 120}{12}$$

$$12x = 7x + 120$$

$$12x - 7x = 120$$

$$5x = 120$$

$$x = \frac{120}{5}$$

$$x = 24 \text{ मीटर}$$

अर्थात् खंभे की कुल लंबाई 24 मीटर है।

क्या आप बता सकते हैं कि खंभे के नीले व लाल भाग की लंबाई कितनी होगी?

सलमा और रीमा ने बातों–बातों में कुछ और प्रश्नों को हल किया।

उदाहरणः–1. सलमा – मेरे अंक तुम्हारे अंक से दो अधिक हैं और दोनों के अंकों का योग 14 हैं तो हम दोनों के कितने–कितने अंक होंगे?

हलः– रीमा – माना मेरे अंक $= x$

तुम्हारे अंक $x + 2$ होंगे।

$\because$ दोनों के अंकों का योग 14 है

$\therefore$ $x + x + 2 = 14$

$\Rightarrow$ $2x + 2 = 14$

$\Rightarrow$ $2x = 14 - 2$

$\Rightarrow$ $2x = 12$

$\Rightarrow$ $x = \frac{12}{2}$

$\Rightarrow$ $x = 6$

यानी मेरे अंक 6 और तुम्हारे अंक 8 होंगे।

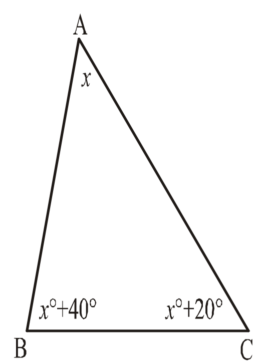
ऐसे ही उन्होंने कई सवाल किए। कुछ सवाल और उनके हल हम यहाँ दे रहे हैं।

उदाहरणः–2. नीचे दिए गए त्रिभुज के प्रत्येक अंतःकोण की माप क्या होगी?

हलः– $\because$ त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180° होता है।

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$x° + (x + 40)° + (x + 20)° = 180°$



$\Rightarrow$ $3x° + 60° = 180°$

$\Rightarrow$ $3x° = 180° - 60°$

$\Rightarrow$ $3x° = 120°$

$\Rightarrow$ $x° = \frac{120°}{3}$

$\Rightarrow$ $x° = 40°$

$\therefore$ दिए गए त्रिभुज के प्रत्येक अंतःकोण की माप निम्नलिखित है–

$\angle A = x° = 40°$,

$\angle B = x° + 20° = 40° + 20° = 60°$

$\angle C = x° + 40° = 40° + 40° = 80°$

करके देखें

1. एक थैले में 50 पैसे के सिक्के हैं। इन सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए यदि थैले में 30 रुपये हैं।
2. एक समकोण त्रिभुज के एक कोण का माप 60^0 है तो दूसरे कोण का माप ज्ञात कीजिए।
3. पिता की आयु पुत्र की आयु की दुगुनी है तो दोनों की वर्तमान आयु क्या होगी?

समीकरण बनाना

सलमा और रीमा ने कुछ ऐसे सवालों पर भी चर्चा की।

मेरे बैग में 50 पैसे और 1 रुपये के सिक्के हैं। बैग में कुल 100 सिक्के हैं, तो 50 पैसे और 1 रूपये के कितने–कितने सिक्के हैं?

यहाँ पर दो अलग–अलग प्रकार के सिक्के हैं और उनकी संख्या अलग–अलग है।हमें दोनों ही पता नहीं है अतः दोनों की संख्या को अज्ञात द्वारा दर्शाना होगा। अतः हम 50 पैसे के सिक्कों की संख्या को x तथा 1 रुपये के सिक्कों की संख्या को y मानेंगे।

हम जानते हैं कि बैग में कुल सिक्कों की संख्या 100 है यानी

$$x + y = 100$$

लेकिन हम अभी यह नहीं बता सकते हैं कि दोनों प्रकार के सिक्कों की संख्या कितनी–कितनी होगी?

इसी प्रकार के कुछ और उदाहरण देखें जिनमें समीकरण तो बनता है लेकिन उसके हल का पता नहीं चल पाता।

उदाहरणः–3. कुछ हिरणों और कुछ सारस पक्षी के पैरों की कुल संख्या 180 है।

हलः– माना हिरणों की संख्या $= x$

सारस पक्षियों की संख्या $= y$

चूँकि एक हिरण के 4 पैर होते हैं

अतः हिरणों के पैरों की संख्या $= 4x$

चूँकि एक सारस पक्षी के 2 पैर होते हैं

अतः सारस पक्षियों के पैरों की संख्या $= 2y$

कथन के अनुसार

हिरणों के पैरों की संख्या + सारस पक्षियों के पैरों की संख्या = 180

अर्थात् $4x + 2y = 180$

उदाहरणः–4. एक कॉपी और दो पेंसिलों की कीमत 45 रुपये हैं।

हलः– माना 1 कॉपी की कीमत $= x$ रुपये

1 पेंसिल की कीमत $= y$ रुपये

तब एक कॉपी की कीमत + दो पेंसिलों की कीमत $= 45$

$$x + 2y = 45$$

करके देखें

अब आप निम्नलिखित कथनों के समीकरण बनाकर हल पता करने की कोशिश करें–

1. किन्हीं दो संख्याओं का योग 8 है।
2. शशांक और उसके पिता की आयु का अंतर 30 वर्ष है।
3. एक थैले में 1 रुपये व 5 रुपये के 100 सिक्के रखे हैं।
4. एक दुकान में 3 पेन व 4 कॉपियों का मूल्य 105 रुपये हैं।
5. किसी स्थान पर कुछ मुर्गियाँ व कुछ गायें हैं, जिनके पैरों की संख्या 60 है।

युगपद् समीकरण

ऊपर के उदाहरणों में हमने परिस्थितियों से समीकरण तो बना लिए लेकिन उनके हल नहीं बता पाए।

अब हम निम्नलिखित परिस्थितियों पर चर्चा करते हैं–

एक पिता ने अपने दो पुत्रों सौरभ और संतोष में 8 रुपये बाँटे। क्या हम यह जान पाएँगे कि सौरभ और संतोष को कितने–कितने रुपये मिले?

यदि सौरभ को x व संतोष को y रुपये मिले हों तब इसका समीकरण निम्नलिखित होगा–

$x + y = 8$ ....(1)

इस समीकरण के आधार पर हम कह सकते हैं कि जब सौरभ को 1 रुपये तब संतोष को 7 रुपये, जब सौरभ को 2 रुपये तब संतोष को 6 रुपये और इसी प्रकार आगे सोचने पर हम देखते हैं कि जब सौरभ को 7 रुपये तो संतोष को 1 रुपये मिले होंगे। सौरभ व संतोष को 8 रुपये को बाँटने के संभव तरीकों को नीचे दी गई सारणी के रूप में लिख सकते हैं–

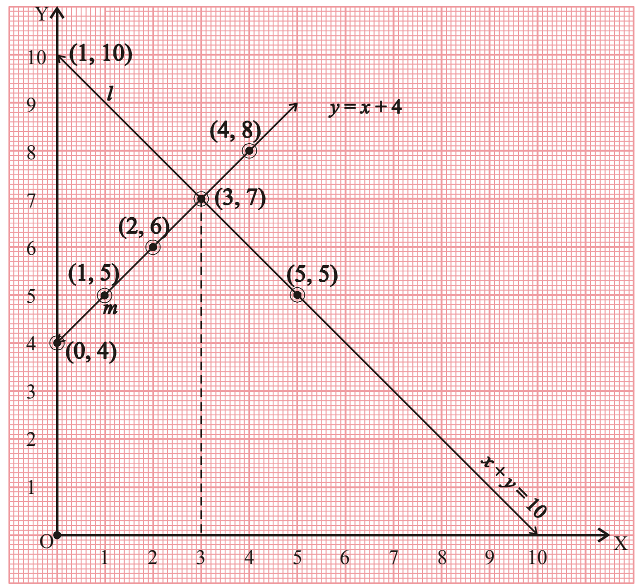
रुपये							
सौरभ	1	2	3	4	5	6	7
संतोष	7	6	5	4	3	2	1

आपने देखा कि हम यह बता नहीं पाए कि वास्तव में सौरभ व संतोष को कितने रुपये मिले? लेकिन अब यदि हमें पता हो कि पिता ने सौरभ को संतोष के तीन गुने रुपये दिये हों तब इसे निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिखेंगे–

$x = 3y$ ....(2)

समीकरण (1) में $x = 3y$ रखने पर हमें एक चर का निम्नलिखित समीकरण मिलता है–

$$3y + y = 8$$
$$4y = 8$$
$$y = \frac{8}{4}$$
$$y = 2$$



आलेख–2

y का मान समीकरण (2) में रखने पर–

$x = 3y$

तब $x = 3 \times 2$

$x = 6$

यानी संतोष को 2 रुपये और सौरभ को संतोष का 3 गुना 6 रुपये मिले।

इसी प्रकार उदाहरण–3 में हिरणों एवं सारस पक्षियों के पैरों की संख्या 180 होने पर हमारा समीकरण बना था– $4x + 2y = 180$ ....(1)

और अब हिरणों की आँखों की संख्या + सारस के आँखों की संख्या = 120

अतः $2x + 2y = 120$......................(2) (हिरण की 2 आँखें और सारस की 2 आँखें)

समीकरण (2) से

$2y = 120 - 2x$

इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow \quad 4x + 120 - 2x = 180$

$\Rightarrow \quad 2x = 60$

$\Rightarrow \quad x = \frac{60}{2}$

$\Rightarrow \quad x = 30$

x अर्थात् हिरणों की संख्या 30 है। x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow \quad 4(30) + 2y = 180$

$$\Rightarrow \quad 120 + 2y = 180$$

$$\Rightarrow \quad 2y = 180–120$$

$$\Rightarrow \quad 2y = 60$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{60}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = 30$$

y अर्थात् सारस पक्षियों की संख्या भी 30 है।

उपरोक्त उदाहरणों में हमने देखा कि परिस्थितियों को लेकर दो चरों का जब एक ही समीकरण बना तब हम प्रश्न का जवाब देने में अनुमान लगाए लेकिन जैसे ही दूसरी परिस्थिति पर दूसरा समीकरण बना तब हम सटीक और निश्चित जवाब दे पाए।

सोचें एवं चर्चा करें

क्या निम्नलिखित परिस्थितियों से बने समीकरणों से जवाब मिल सकते हैं? यदि नहीं तो क्यों नहीं?

1. किसी समान्तर चतुर्भुज में आसन्न कोणों के युग्म में से एक कोण का माप दूसरे कोण का $\frac{4}{5}$ गुना है। कोणों के माप पता करें।
2. एक वृक्ष पर बैठे हुए मैना और कोयलों की संख्या 15 है। यदि उनके पैरों की संख्याओं का योग 36 है तब मैना व कोयलों की संख्या बताइए।
3. एक टोकरी में सेब और आम की कुल संख्या 39 है। यदि दूसरी टोकरी में कुछ आम और कुछ संतरे हैं तब दूसरी टोकरी में कितने आम रखे हैं?

समीकरणों के हल

अलग–अलग संदर्भों में बने समीकरणों से जवाब कैसे जानें? समीकरणों से जवाब जानने हेतु उन्हें हल किया जाता है। समीकरणों को हल करने के अलग–अलग तरीके हैं। हम यहाँ कुछ तरीकों को जानेंगे।

आलेखी विधि

आपने निर्देशांक ज्यामिति या ग्राफ में दो चरों वाले समीकरणों को ग्राफ में प्रदर्शित करना सीख लिया है। हम अलग–अलग संदर्भों से बने समीकरणों को भी ग्राफ पर दर्शा सकते हैं और उनके हल के बारे में जान सकते हैं।

अब हम हिरण और सारस के पैरों के संबंध पर बने समीकरण और उनकी आँखों के संबंध पर बने समीकरण को ग्राफ पर दर्शाकर देखते हैं कि उनके हल कैसे प्राप्त हो रहे हैं?

पैरों के समीकरण $4x + 2y = 180$ के लिए हम सारणी बनाते हैं।

$2y = 180 – 4x$

$$y = \frac{180 - 4x}{2}$$

$y = 90 - 2x$ ....(3)

समीकरण (3) में $x = 10, 20, 30.....$ इत्यादि रखने पर y के संगत मानों की सारणी बनाते हैं–

सारणी–1

x	10	20	30	40
y	70	50	30	10

इसी प्रकार आँखों के समीकरण $2x + 2y = 120$ के लिए

$2y = 120 - 2x$

$$y = \frac{120 - 2x}{2}$$

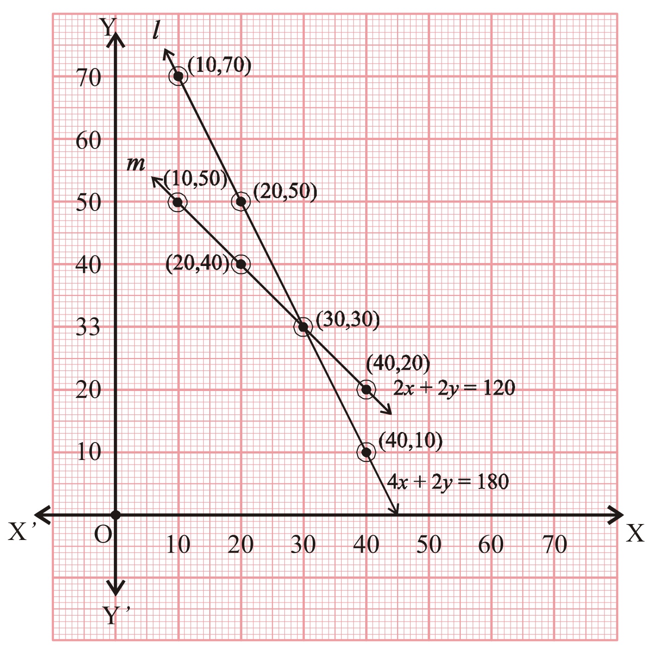
$y = 60 - x$ ....(4)

समीकरण (4) में $x = 10,20,30,40,.........$ इत्यादि रखने पर y के संगत मानों की सारणी नीचे दी गई है–

सारणी–2

x	10	20	30	40
y	50	40	30	20

अब दोनों सारणियों की सहायता से आलेख खींच लेते हैं ।



आलेख–1

आप देखते हैं कि ग्राफ में प्रदर्शित रेखाओं का कटान बिन्दु (30, 30) है। यही हिरण और सारस पक्षियों की संख्या भी है जो हमारे द्वारा पूर्व में निकाली गई है।

करके देखें

आप $x + y = 8$ व $x = 3y$ को ग्राफ पर दर्शाकर हल निकालें।

निम्नलिखित सवाल को भी इसी तरीके से हल किया गया है–

उदाहरणः–5. कक्षा दसवीं के 10 विद्यार्थियों ने एक विज्ञान क्विज में भाग लिया। क्विज में भाग लेने वाले विद्यार्थियों में लड़कियों की संख्या, लड़कों से 4 अधिक थी तब लड़के एवं लड़कियों की संख्या क्या रही होगी?

हलः– माना विज्ञान क्विज में भाग लेने वाले लड़कों की संख्या x व लड़कियों की संख्या y थी।

तब कुल विद्यार्थियों की संख्या = लड़कों की संख्या + लड़कियों की संख्या

$$10 = x + y$$

या $$x + y = 10 \quad ....(1)$$

चूँकि लड़कियों की संख्या, लड़कों से 4 अधिक थी अतः निम्नलिखित समीकरण और बनेगा।

$$y = x + 4 \quad ....(2)$$

अब हम हम समीकरण (1) व (2) का आलेख खींचने के लिए x और y के संगत मानों की सारणी बनाएँगे और सारणी की मदद से आलेख खीचेंगे।

समीकरण (1) में $x = 1, 2, 3,......$ इत्यादि रखने पर y के संगत मान मिलेंगे जो सारणी में प्रदर्शित हैं–

सारणी–1

($x + y = 10$ के लिए)

x	1	2	3	4	5	6
y	9	8	7	6	5	4

इसी प्रकार समीकरण (2) में $x = 1,2,3,.....$ इत्यादि रखने पर y के संगत मानों को सारणी में लिखेंगे।

सारणी–2

($y = x + 4$ के लिए)

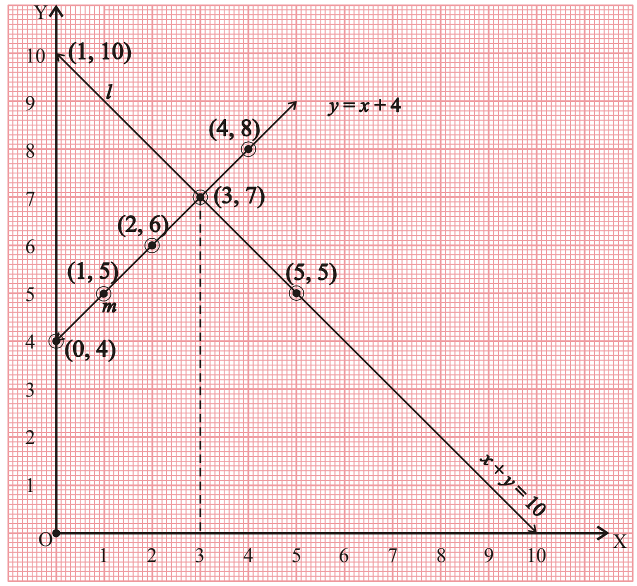
x	1	2	3	4	5	6
y	5	6	7	8	9	10

ग्राफ पेपर पर सारणी–1 व 2 से प्राप्त मानों को प्रदर्शित करते हैं तो दो सरल रेखाएँ l व m प्राप्त होती हैं।

ग्राफ पेपर पर आप देखते हैं कि ये दोनों रेखाएँ l व m एक–दूसरे को बिन्दु (3, 7) पर काट रही हैं, यानी प्रतिच्छेद कर रही हैं।

यह बिन्दु दोनों समीकरणों से प्रदर्शित सरल रेखाओं पर स्थित है।

इस बिन्दु (3, 7) में $x = 3$, $y = 7$ है जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। यही प्रश्न का हल भी है।



आलेख–2

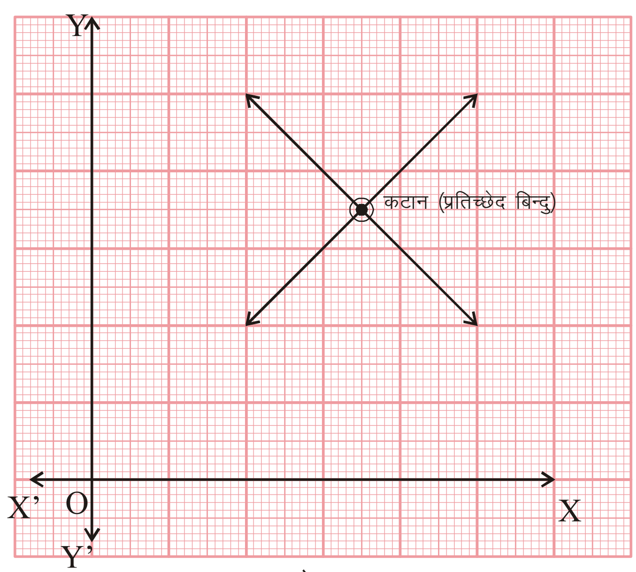
यानी लड़कों की संख्या 3 और लड़कियों की संख्या 7 है।

समीकरणों के द्वारा प्रदर्शित सरल रेखाओं का कटान (प्रतिच्छेद) बिन्दु ही उन समीकरणों के हल होते हैं।

क्या प्रत्येक परिस्थिति में हम एक दूसरे को काटती हुई सरल रेखाएँ प्राप्त कर सकते हैं बल्कि अलग–अलग परिस्थितियों में बने समीकरणों के लिए आलेख पर प्राप्त सरल रेखाएँ अलग–अलग रूपों में दिखती हैं। आइए इन्हें समझें।

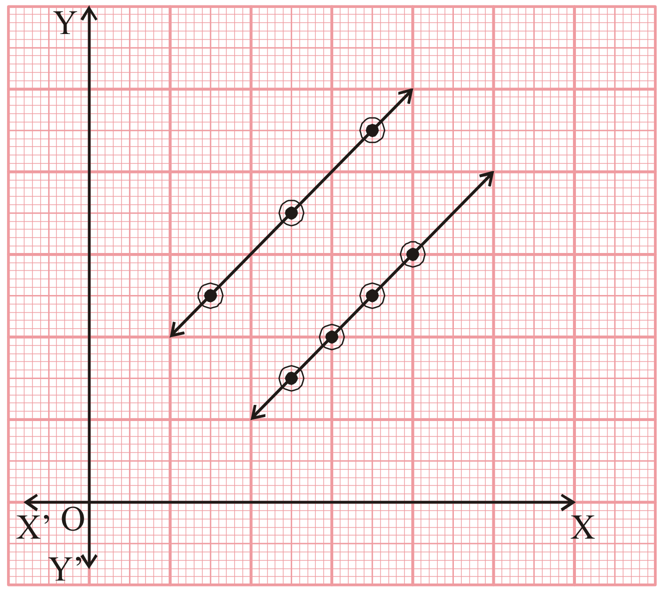
(1) जब समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ एक दूसरे को किसी बिन्दु पर काटती हों तब समीकरण का अद्वितीय हल प्राप्त होता है। कटान बिन्दु के मान ही समीकरणों के हल होते हैं।

(2) जब समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ समान्तर हों तब समीकरण का कोई भी हल नहीं होता। क्योंकि कोई भी बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं होता।



आलेख–3

(3) जब समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ संपाती हों अर्थात् एक–दूसरे पर स्थित हों तब समीकरण के अनंततः अनेक हल होते हैं। क्योंकि इस स्थिति में अनेक बिन्दु दोनों रेखाओं में उभयनिष्ठ होते हैं।



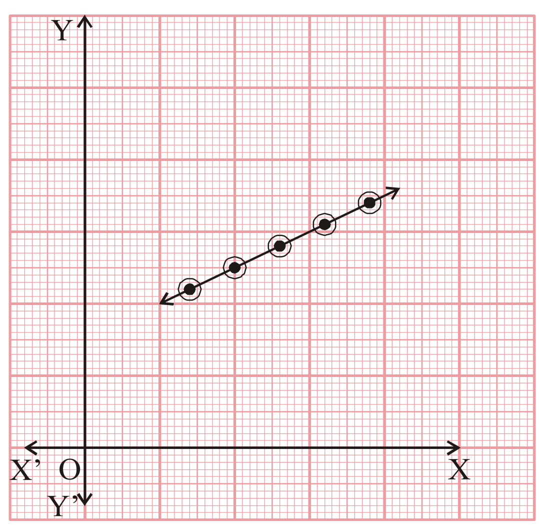
आलेख–4

समीकरणों द्वारा प्रदर्शित सरल रेखाओं की विशेषताएँ व्यावहारिक जीवन से संबंधित समस्याओं को समझने में मददगार साबित होती हैं।

समस्याओं के हल में उपर्युक्त परिस्थितियाँ किस प्रकार सहायक होती हैं इसे हम कुछ उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरणः–6. कविता ने 1 पेंसिल और 2 रबर, 4 रुपये में खरीदी तथा सविता ने 2 पेंसिल और 4 रबर, 16 रुपये में खरीदी तब क्या हम यह पता लगा सकते हैं, कि 1 पेंसिल व 1 रबर की कीमत कविता और सविता के लिए कितनी रही होगी?

हलः– माना कि 1 पेंसिल की कीमत x रुपये व 1 रबर की कीमत y रुपये है चूँकि कविता ने 1 पेंसिल व 2 रबर की कुल कीमत 4 रुपये चुकायी तब इसे निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिख सकेंगे–



आलेख–5

$1 \times x + 2 \times y = 4$

$x + 2y = 4$ ....(1)

इसी प्रकार सविता ने 2 पेंसिल व 4 रबर खरीदने के लिए कुल कीमत 16 रुपये चुकायी तब इसे भी निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिख सकते हैं–

$2 \times x + 4 \times y = 16$

$2x + 4y = 16$ ....(2)

समीकरण (1) से

$x + 2y = 4$

या $2y = 4 - x$

$y = \frac{4-x}{2}$ ....(3)

समीकरण (3) में $x = 0, 1, 2, 3, 4, ...$ रखने पर y के संगत मान प्राप्त होंगे इन्हें सारणी में लिखेंगे–

सारणी–1

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	1.5	1	0.5	0	–0.5	-1

अब समीकरण (2) से

$\Rightarrow \quad 2x + 4y = 16$

$\Rightarrow \quad 2(x + 2y) = 16$

$\Rightarrow \quad x + 2y = 8$

$\Rightarrow \quad 2y = 8 - x$

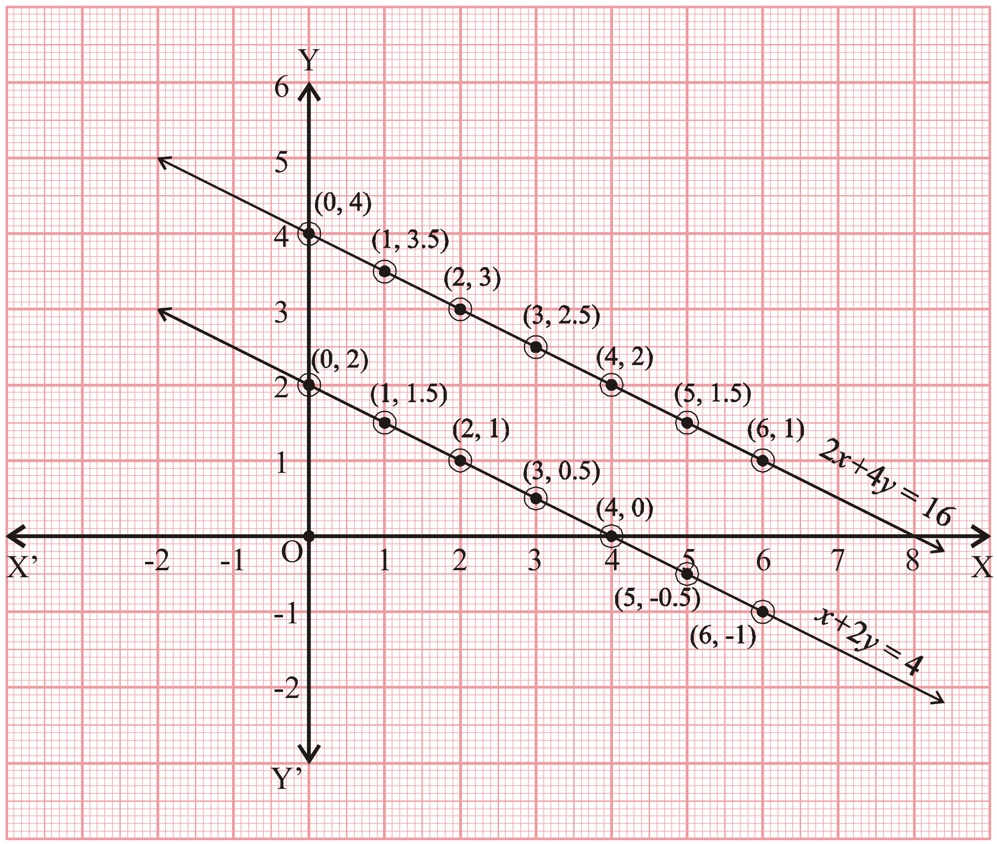
$\Rightarrow \quad y = \frac{8-x}{2}$

समीकरण (4) में $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ रखने पर y के क्रमशः संगत मान $y = 4, 3.5, 3, 2.5, 2, 1.5, 1$ प्राप्त होंगे इन्हें सारणी में लिखेंगे–

सारणी–2

x	0	1	2	3	4	5	6
y	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1

समीकरण (1) व (2) के लिए प्राप्त सारणी से निम्नलिखित आलेख प्राप्त करेंगे–



आलेख–6

समीकरणों से दो समान्तर रेखाएँ मिल रही हैं तब 1 पेंसिल व 1 रबर की कीमत क्या होगी?

यहाँ दोनों रेखाओं में कोई प्रतिच्छेद बिन्दु नहीं है अतः समीकरणों का अद्वितीय हल नहीं होगा। कविता व सविता द्वारा खरीदे गए पेंसिल व रबर की कीमत अलग–अलग होगी।

उदाहरणः–7. एक व्यक्ति ने तीन कुर्सियों तथा दो मेजों को 1200 रुपये में खरीदा तथा छः कुर्सियों और चार मेजों की कीमत 2400 रुपये चुकायी तब एक कुर्सी व एक मेज की कीमत ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि एक कुर्सी की कीमत x रुपये

तथा एक मेज की कीमत y रुपये है।

तब तीन कुर्सियों व दो मेजों की कीमत $3x + 2y$

प्रश्नानुसार $3x + 2y = 1200$ ....(1)

इसी प्रकार 6 कुर्सियों व 4 मेजों की कीमत 2400 रुपये है।

$\Rightarrow \quad 6x + 4y = 2400$

$$\Rightarrow \quad 2(3x + 2y) = 2400$$

$$\Rightarrow \quad (3x + 2y) = \frac{2400}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 2y = 1200 \quad ....(2)$$

दोनों समीकरण एक जैसे हैं। यदि इन समीकरणों का ग्राफीय निरूपण किया जाए तो संपाती रेखाएँ प्राप्त होती हैं।

समीकरण (1) व (2) दोनों में ही–

यदि $x = 100$ तब $y = \dfrac{1200 - 3x}{2} = \dfrac{1200 - 3(100)}{2}$

$$y = \frac{900}{2} = 450$$

$x = 200$ तब $y = \dfrac{1200 - 3(200)}{2} = \dfrac{1200 - 600}{2}$

$$y = \frac{600}{2} = 300$$

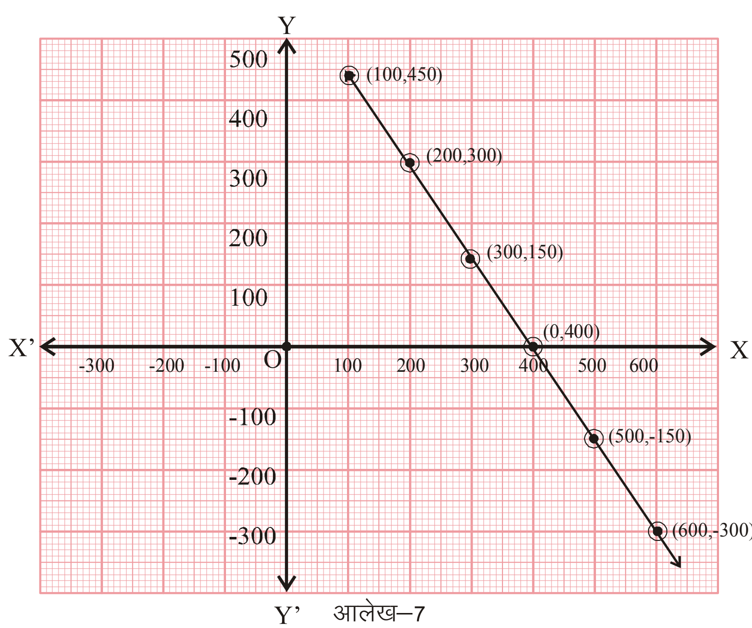
इसी प्रकार x के मानों के संगत y के और मान प्राप्त करते हैं और इन मानों को निम्नलिखित सारणी के रूप में लिखते हैं–

x	100	200	300	400	500	600
y	450	300	150	0	–150	–300

यह सारणी दोनों समीकरणों के लिए है, अतः इस सारणी से आलेख खींचने पर प्राप्त दोनों रेखाएँ संपाती होंगी।

स्पष्टतः x व y के जो मान दोनों समीकरणों में हैं उन मानों को समीकरण निकाय के हल कहेंगे। चूँकि x व y के अनंत मान हैं अतः दिए गए समीकरण निकाय के हल भी अनंततः अनेक होंगे।

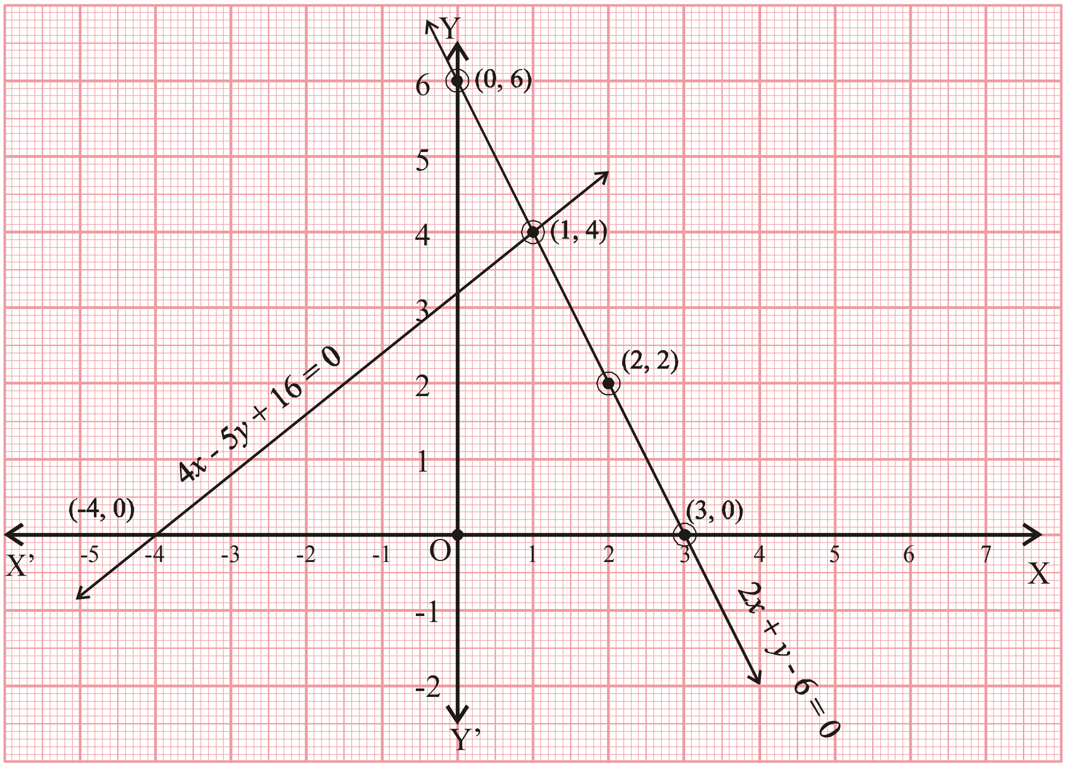
इन समीकरणों में x व y कुर्सी व मेज की कीमत को दर्शाते हैं अतः कुर्सी व मेज की कीमतों के लिए यह बात लागू होगी कि उनकी अनेक संभावित कीमतें हो सकती हैं।



आलेख–7

उदाहरणः–8. दिए गए आलेख चित्र में समीकरण निकाय के लिए x और y के मान ज्ञात कीजिए।

हलः–



आलेख–8

आलेख से स्पष्ट है कि समीकरणों को प्रदर्शित करने वाली दोनों रेखाएँ एक–दूसरे को बिन्दु (1, 4) पर प्रतिच्छेद कर रही हैं अतः समीकरण निकाय के लिए $x = 1, y = 4$ होंगे।

प्रश्नावली–1

1. निम्नलिखित कथनों को समीकरण के रूप में लिखिए–

   (i) एक विद्यालय के क्रिकेट कोच ने 3 बल्ले और 6 गेंदें 3900 रुपये में खरीदी। वहीं से उन्होंने 1 बल्ला और 2 गेंदें 1300 रुपये में खरीदी।

   (ii) दो संख्याओं का योग 16 तथा उनका अंतर 8 है।

   (iii) एक फल की दुकान पर 2 किग्रा. सेब तथा 1 किग्रा. अंगूर का मूल्य 160 रुपये था। उसी दुकान पर 4 किग्रा. सेब व 2 किग्रा. अंगूर का मूल्य 300 रुपये था।

(iv) नरेश ने अपनी पुत्री से कहा कि 7 साल पहले मेरी आयु ,तुम्हारी आयु से 7 गुनी थी और अब से 3 साल बाद मेरी आयु तुम्हारी आयु की 3 गुनी हो जायेगी।

(v) एक व्यक्ति घर से कार्यालय तक जाने के लिए 90 किमी. दूरी तय करता है इसके लिए वह ट्रेन और टैक्सी का उपयोग करता है। व्यक्ति द्वारा टैक्सी से तय की गई दूरी ट्रेन से तय की गई दूरी की दुगुनी है।

2. निम्नलिखित समीकरणों के आलेख चित्रों को देखकर उनके हल के बारे में पता करें।

(अ) समीकरण

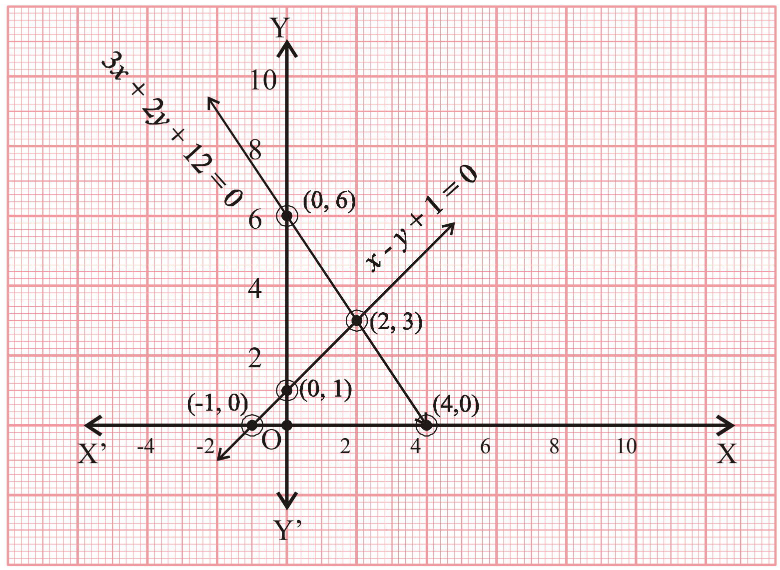
$3x + 2y - 12 = 0$

$x - y + 1 = 0$ में

.... हल है।

तब, x व y के मान होंगे–

..........................., ...



आलेख–9

(ब) समीकरण

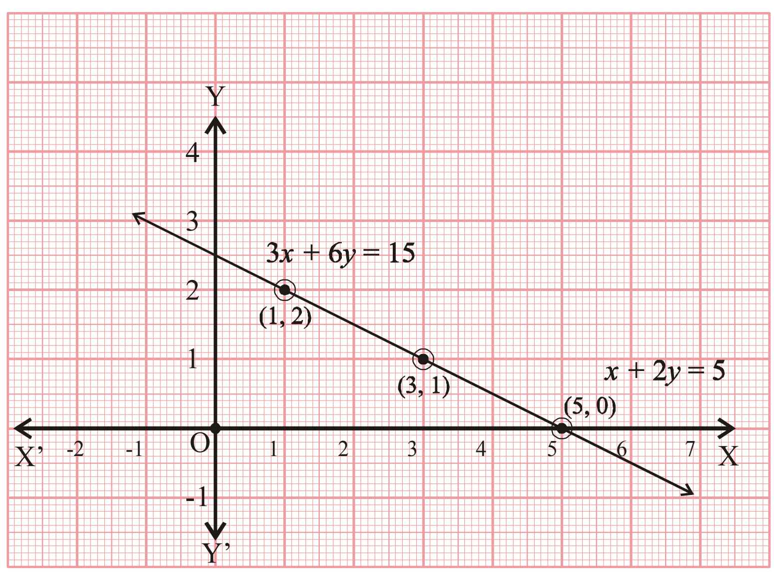
$3x + 6y = 15$

$x + 2y = 5$ में

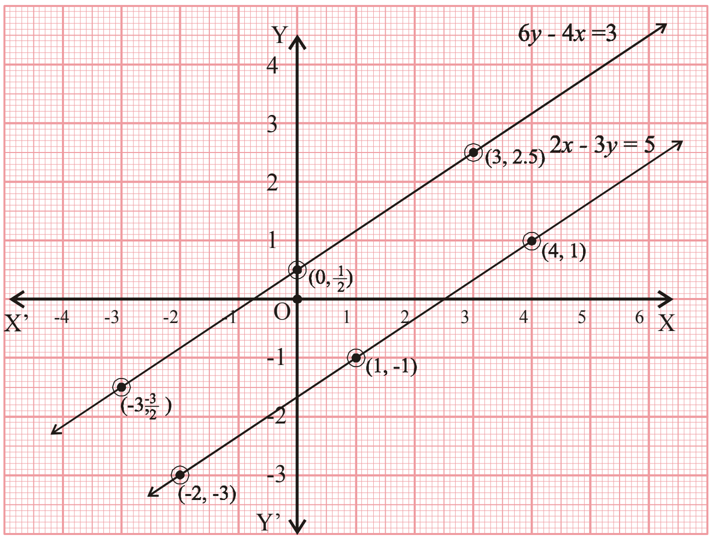
.... हल है।

तब, x व y के मान होंगे–

..........................., ...



आलेख–10



आलेख–11

(स) समीकरण

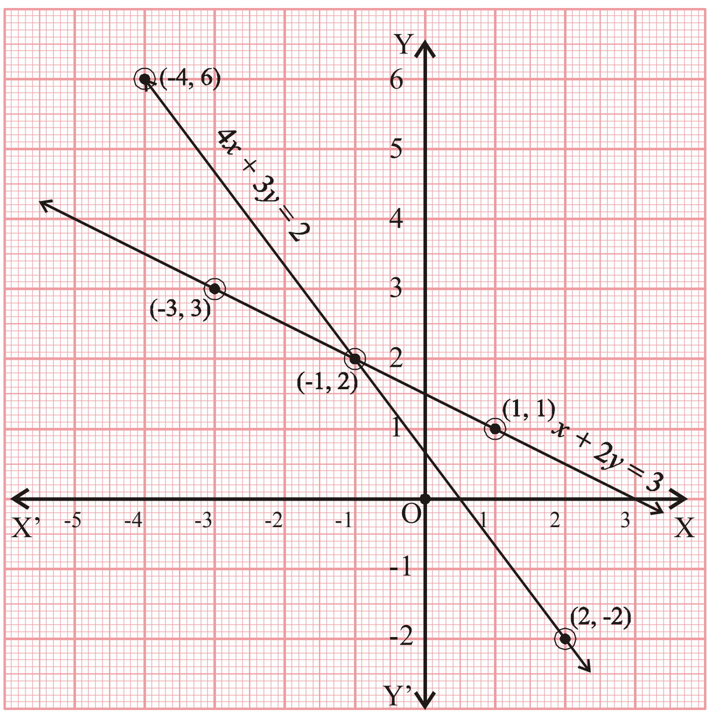
$-4x + 6y = 3$

$2x - 3y = 5$ में

.... हल है।

तब, x व y के मान होंगे–

..........................., ...



आलेख–12

(द) समीकरण

$x + 2y = 3$

$4x + 3y = 2$ में

.... हल है।

तब, x व y के मान होंगे–

..........................., ...

बीजीय विधियाँ :–

1. प्रतिस्थापन विधि

हमने दो चरों के रैखिक समीकरणों का हल आलेखों की सहायता से प्राप्त करना सीख लिया। अब हम दो चरों के रैखिक समीकरण को हल करने के कुछ और तरीकों पर चर्चा करेंगे। एक तरीका तो ये है जिसमें हम एक चर का मान दूसरे समीकरण में रखकर

उसे एक चर के रैखिक समीकरण में बदल लेते हैं और फिर उसका हल प्राप्त करते हैं। आगे के उदाहरण में इसे देख सकते हैं–

उदाहरणः–9. एक छोटी गुफा में कुछ खरगोश और कुछ पक्षी हैं जिनके कुल 35 सिर तथा 98 पैर हैं। तब पक्षियों व खरगोशों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः– माना खरगोशों की संख्या = x

तथा पक्षियों की संख्या = y

खरगोशों के सिरों की संख्या + पक्षियों के सिरों की संख्या = 35

$\therefore \quad x + y = 35 \quad ....(1)$

खरगोश के पैरों की संख्या + पक्षियों के पैरों की संख्या = 98

$\therefore \quad 4x + 2y = 98$

$2(2x + y) = 98$

$$2x + y = \frac{98}{2}$$

$2x + y = 49$

$y = 49 - 2x \quad ....(2)$

समीकरण (1) में $y = 49 - 2x$ रखने पर,

$x + 49 - 2x = 35$

$\Rightarrow \quad -x + 49 = 35$

$\Rightarrow \quad -x = 35 - 49$

$\Rightarrow \quad -x = -14$

$\Rightarrow \quad x = 14$

अब समीकरण (2) में $x = 14$ रखने पर

$\Rightarrow \quad y = 49 - 2x$

$\Rightarrow \quad y = 49 - 2(14)$

$\Rightarrow \quad y = 49 - 28$

$\Rightarrow \quad y = 21$

स्पष्टतः खरगोशों की संख्या 14 और पक्षियों की संख्या 21 है।

2. विलोपन विधि

समीकरणों को हल करने के एक अन्य तरीके में कभी समीकरणों को जोड़कर तो कभी घटाकर उसे एक चर के समीकरणों के रूप में बदलने से हमें हल मिल जाता है। आइए, इसके कुछ उदाहरण देखें–

उदाहरणः–10. ऋचा और नैना के पास कुछ टॉफियाँ हैं। जब ऋचा, नैना को 30 टॉफियाँ देती है तब नैना के पास ऋचा से दुगुनी टॉफियाँ हो जाती हैं, परंतु जब नैना अपनी टॉफियों में से 10 टॉफियाँ ऋचा को देती हैं तब ऋचा के पास नैना से 3 गुनी टॉफियाँ हो जाती हैं। बताइए उन दोनों के पास कितनी टॉफियाँ हैं?

हलः– माना कि ऋचा के पास टॉफियों की संख्या $= x$

नैना के पास टॉफियों की संख्या $= y$

जब ऋचा 30 टॉफियाँ नैना को देती है

तब ऋचा के पास टॉफियों की संख्या $= x - 30$

तथा नैना के पास टॉफियों की संख्या $= y + 30$

तब प्रश्नानुसार $2(x - 30) = y + 30$

$\Rightarrow 2x - 60 = y + 30$

$\Rightarrow 2x - y = 30 + 60$

$\Rightarrow 2x - y = 90$ ....(1)

परंतु जब नैना ऋचा को 10 टॉफियाँ देती है,

तब ऋचा के पास टॉफियों की संख्या $= x + 10$

नैना के पास टॉफियों की संख्या $= y - 10$

तब प्रश्नानुसार $x + 10 = 3(y - 10)$

$\Rightarrow x + 10 = 3y - 30$

$\Rightarrow x - 3y = -30 - 10$

$\Rightarrow x - 3y = -40$ ....(2)

अब

$2x - y = 90$ ....(1)

$x - 3y = -40$ ....(2)

क्या समीकरण (1) व (2) में x या y के गुणांक समान हैं?

नहीं... x या y के गुणांक समान नहीं हैं तब क्या समीकरण (1) में (2) को घटाने पर या जोड़ने पर x या y निरस्त हो पाते हैं? x या y के गुणांक समान कर दिए जाएँ तो संभव है कि समीकरण (1) में (2) को घटाने या जोड़ने पर x या y निरस्त हो गए।

हम गुणांक समान करने के लिए समीकरण (2) के दोनों पक्षों में समीकरण (1)के x के गुणांक 2 से गुणा करते हैं।

$2(x-3y) = -40 \times 2$

$2x - 6y = -80$ ....(3)

समीकरण (1) में समीकरण (3) को घटाने पर

$\Rightarrow \quad 2x - y - (2x - 6y) = 90 - (-80)$

$\Rightarrow \quad 2x - y - 2x + 6y = 90 + 80$

$\Rightarrow \quad 5y = 170$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{170}{5}$

$\Rightarrow \quad y = 34$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$2x - 34 = 90$

$\Rightarrow \quad 2x = 90 + 34$

$\Rightarrow \quad 2x = 124$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{124}{2}$

$\Rightarrow \quad x = 62$

स्पष्टतः ऋचा के पास 62 तथा नैना के पास 34 टॉफियाँ हैं।

उदाहरणः–11. एक कक्षा के विद्यार्थी पंक्तियों में खड़े हैं। जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी कम कर दिए जाते हैं तब 4 पंक्तियाँ अधिक बनती हैं लेकिन जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी और खड़े कर दिए जाते हैं तब 2 पंक्तियाँ कम हो जाती हैं। कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः– माना पंक्तियों की संख्या $= x$

तथा प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= y$

तब कुल विद्यार्थियों की संख्या = पंक्तियों की संख्या × प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या

$= xy$

जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी कम कर दिए जाते हैं

तब प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= y - 4$

और पंक्तियों की संख्या $= (x + 4)$

$\therefore$ कुल विद्यार्थियों की संख्या $= (x + 4)(y - 4)$

$\Rightarrow \quad xy = xy - 4x + 4y - 16$

$\Rightarrow \quad xy - xy = -4x + 4y - 16$

$\Rightarrow \quad 0 = 4(-x + y - 4)$

$\Rightarrow \quad -x + y - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad -x + y = -4 \quad$ ....(1)

परंतु जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी और खड़े कर दिए जाते हैं

तब प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= y + 4$

पंक्तियों की संख्या $= x - 2$

$\therefore$ कुल विद्यार्थियों की संख्या $= (x-2)(y+4)$

$$\Rightarrow \quad xy = (x-2)(y+4)$$
$$\Rightarrow \quad xy = xy + 4x - 2y - 8$$
$$\Rightarrow \quad xy - xy = 4x - 2y - 8$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 4x - 2y - 8$$
$$\Rightarrow \quad 2(2x - y - 4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x - y - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x - y = 4 \quad \text{..............(2)}$$

समीकरण निकाय

$$-x + y = 4 \quad \text{................(1)}$$
$$2x - y = 4 \quad \text{................(2)}$$

$\because$ समीकरण निकाय में y के गुणांक समान हैं तथा चिह्न असमान हैं इसलिए समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर y निरस्त हो जाएगा।

$$-x + y + 2x - y = 4 + 4$$
$$\Rightarrow \quad x = 8$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow \quad -8 + y = 4$$
$$\Rightarrow \quad y = 4 + 8$$
$$\Rightarrow \quad y = 12$$

कुल विद्यार्थियों की संख्या $= xy = 8 \times 12 = 96$

अभी तक चर्चा किए सभी तरीकों में से जो भी आपको सुविधाजनक लगे, उसका इस्तेमाल सवालों का हल पता करने में कर सकते हैं।

उदाहरणः–12. दस साल पहले सुनील व विनय की आयु का योग उनके पिता की आयु के एक तिहाई थी। यदि सुनील, विनय से दो साल छोटा है तथा दोनों की आयु का योग उनके पिता की आयु से 14 साल कम है। सुनील, विनय व उनके पिता की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि विनय की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

सुनील की वर्तमान आयु $= x - 2$ वर्ष

और उनके पिता की वर्तमान आयु $= y$ वर्ष

दस साल पहले,

विनय की आयु $= x - 10$ वर्ष

सुनील की आयु = $(x-2-10)$ वर्ष

पिता की आयु = $y-10$ वर्ष

$$\therefore \quad (x-10)+(x-2-10)=\frac{1}{3}\times(y-10)$$

$$\Rightarrow \quad x-10+x-2-10 = \frac{1}{3}(y-10)$$

$$\Rightarrow \quad 2x-22 = \frac{1}{3}(y-10)$$

$$\Rightarrow \quad 3(2x-22) = y-10$$

$$\Rightarrow \quad 6x-66 = y-10$$

$$\Rightarrow \quad 6x-y = -10+66$$

$$\Rightarrow \quad 6x-y = 56 \qquad \text{.....................(1)}$$

सुनील व विनय की वर्तमान आयु का योग उनके पिता की आयु से 14 साल कम है।

$$\therefore \quad x+x-2 = y-14$$

$$\Rightarrow \quad 2x-2 = y-14$$

$$\Rightarrow \quad 2x-y = -14+2$$

$$\Rightarrow \quad 2x-y = -12 \qquad \text{...................(2)}$$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर

$$6x-y-(2x-y) = 56-(-12)$$

$$\Rightarrow \quad 6x-y-2x+y = 68$$

$$\Rightarrow \quad 4x = 68$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{68}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = 17$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$6\times17-y = 56$$

$$102-y = 56$$

$$y = 102-56$$

$$y = 46$$

$\therefore$ विनय की वर्तमान आयु $x = 17$ वर्ष

सुनील की वर्तमान आयु $x - 2 = 17 - 2 = 15$ वर्ष

पिता की वर्तमान आयु $y = 46$ वर्ष

नीचे कुछ विविध तरह के सवाल हैं जिनमें इन तरीकों का इस्तेमाल किया गया है।

उदाहरणः–13. दो अंकों वाली एक संख्या का 7 गुना, अंकों को पलटने पर बनने वाली संख्या के 4 गुने के बराबर है तथा संख्या के अंकों का योग 3 है।तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः– माना दो अंकों वाली संख्या का इकाई का अंक y व दहाई का अंक x है। तब वह संख्या $= 10x + y$ होगी।

$\therefore$ प्रश्नानुसार $7(10x + y) = 4(10y + x)$

$\Rightarrow 70x + 7y = 40y + 4x$

$\Rightarrow 70x - 4x - 40y + 7y = 0$

$\Rightarrow 66x - 33y = 0$

$\Rightarrow 33(2x - y) = 0$

$\Rightarrow 2x - y = 0$ ....(1)

तथा $x + y = 3$ ....(2)

समीकरण (1) और (2) जोड़ने पर

$2x - y + x + y = 0 + 3$

$\Rightarrow 3x = 3$

$\Rightarrow x = \frac{3}{3}$

$\Rightarrow x = 1$

समीकरण (2) में x का मान रखने पर

$\Rightarrow x + y = 3$

$\Rightarrow 1 + y = 3$

$\Rightarrow y = 3-1$

$\Rightarrow y = 2$

अतः वह संख्या 12 है।

उदाहरणः–14. निम्नलिखित समीकरण में चरों के मान ज्ञात कीजिए।

$2x - 5y = -8$;

$x - 4y = -7$

हलः– समीकरण $2x - 5y = -8$ ....(1)

$x - 4y = -7$ ....(2)

समीकरण (2) से $x = -7 + 4y$ ....(3)

x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow \quad 2(-7 + 4y) - 5y = -8$

$\Rightarrow \quad -14 + 8y - 5y = -8$

$\Rightarrow \quad 3y = -8 + 14$

$\Rightarrow \quad 3y = 6$

$\Rightarrow \quad y = \frac{6}{3} = 2$

y के इस मान को समीकरण (3) में रखने पर

$\Rightarrow \quad x = -7 + 4y$

$\Rightarrow \quad x = -7 + 4(2)$

$\Rightarrow \quad x = -7 + 8$

$\Rightarrow \quad x = 1$

अतः $x = 1, y = 2$

उदाहरणः–15. निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए–

$41x - 17y = 99$;

$17x - 41y = 75$.

हलः– समीकरण $41x - 17y = 99$ ....(1)

$17x - 41y = 75$ ....(2)

समीकरण (1) में समीकरण (2) को जोड़ने पर

$41x - 17y + 17x - 41y = 99 + 75$

$\Rightarrow \quad 58x - 58y = 174$

$\Rightarrow \quad 58(x - y) = 174$

$\Rightarrow \quad x - y = \frac{174}{58}$

$\Rightarrow \quad x - y = 3$ ....(3)

समीकरण (1) में (2) को घटाने पर

$41x - 17y - (17x - 41y) = 99 - 75$

$\Rightarrow \quad 41x - 17y - 17x + 41y = 24$

$\Rightarrow \quad 24x + 24y = 24$

$\Rightarrow \quad x + y = \frac{24}{24}$

$\Rightarrow \quad x + y = 1$ ....(4)

अब समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad x - y + x + y = 3 + 1$

$\Rightarrow \quad 2x = 4$

$\Rightarrow \quad x = \frac{4}{2}$

$\Rightarrow \quad x = 2$

जब समीकरण निकाय के अलग–अलग चरों के गुणांक समान हो तो पहले दोनों समीकरणों को जोड़कर तथा दूसरी बार समीकरणों को घटाकर दो नये समीकरण प्राप्त किये जाते हैं।

समीकरण (3) में $x = 2$ रखने पर

$\Rightarrow \quad x - y = 3$

$\Rightarrow \quad 2 - y = 3$

$\Rightarrow \quad 2 - 3 = y$

$\Rightarrow \quad y = -1$

यहाँ $x = 2; \ y = -1$

उदाहरणः–16. एक त्रिभुज ABC में $\angle A = x°, \angle B = 3x°$ और $\angle C = y°$ है। यदि $3y° - 5x° = 30°$ हो तब सिद्ध कीजिए कि यह एक समकोण त्रिभुज है।

हलः– ΔABC के तीनों कोणों के मान क्रमशः $\angle A = x°, \angle B = 3x°$ व $\angle C = y°$ है।

$\because$ त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180° होता है।

$\therefore \quad \angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\angle A, \angle B, \angle C$ के मान रखने पर

$x° + 3x° + y° = 180°$

$4x° + y° = 180°$

$y° = 180° - 4x°$ ....(1)

दिया है $3y° - 5x° = 30°$ ....(2)

समीकरण (1) से y का मान (2) में रखने पर

$\Rightarrow \quad 3\,[180° - 4x°] - 5x° = 30°$

$\Rightarrow \quad 3 \times 180° - 3 \times 4x° - 5x° = 30°$

$\Rightarrow \quad 540° - 12x° - 5x° = 30°$

$\Rightarrow \quad -17x° = 30° - 540°$

$$\Rightarrow \quad -17x^\circ = -510^\circ$$

$$\Rightarrow \quad x^\circ = \frac{510^\circ}{17^\circ}$$

$$x^\circ = 30^\circ$$

x के मान को (1) में रखने पर

$$y^\circ = 180^\circ - 4(30^\circ)$$

$$\Rightarrow \quad y^\circ = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\Rightarrow \quad y^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \quad \angle A = x^\circ = 30^\circ$$

$$\angle B = 3x^\circ = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$$

$$\angle C = y^\circ = 60^\circ$$

स्पष्टतः ΔABC के तीनों कोणों में एक कोण का मान 90° तथा शेष दोनों कोण न्यूनकोण हैं जिनकी माप 30° व 60° हैं।

अतः दिया गया ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरणः—17. एक नाव नदी की धारा के बहाव की दिशा में 44 किमी. तथा बहाव की विपरीत दिशा में 30 किमी. की दूरी 10 घण्टे में तय करती है। यही नाव धारा के बहाव की दिशा में 55 किमी. तथा बहाव की विपरीत दिशा में 40 किमी. की दूरी 13 घण्टे में तय करती है। धारा के बहाव की दिशा एवं विपरीत दिशा में नाव की चाल ज्ञात कीजिए।

हलः— माना धारा के बहाव की दिशा में नाव की चाल $= x$ किमी./घण्टा

तथा धारा के बहाव की विपरीत दिशा में नाव की चाल $= y$ किमी./घण्टा

बहाव की दिशा में 44 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

$$= \frac{44}{x} \text{ घण्टे}$$

बहाव की विपरीत दिशा में 30 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{30}{y}$ घण्टे

$\therefore$ प्रश्नानुसार

धारा के बहाव की दिशा व उसके विपरीत दिशा में दूरी तय करने में लगा समय = 10 घण्टे

$\therefore \quad \frac{44}{x}+\frac{30}{y} = 10$ ....(1)

चूँकि बहाव की दिशा में 55 किमी. तथा विपरीत दिशा में 40 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय = 13 घण्टे

$\therefore \quad \frac{55}{x}+\frac{40}{y} = 13$ ....(2)

अब समीकरण (1) और (2) में $\frac{1}{x} = u$, और $\frac{1}{y} = v$ रखने पर हमें निम्न दो समीकरण (3) व (4) मिलते हैं।

$\left\{\because चाल = \frac{दूरी}{समय}\right\}$

$44u + 30v = 10$

$22u + 15v = 5$ ....(3)

तथा $55u + 40v = 13$ ....(4)

समीकरण (3) में 55 व समीकरण (4) में 22 का गुणा करके घटाने पर

$1210u + 825v = 275$

$-1210u - 880v = -286$

$-55v = -11$

$v = \frac{-11}{-55}$

$v = \frac{1}{5} \qquad \therefore \quad y = 5$

v का मान समीकरण (3) में रखने पर

$22u + 15\times\frac{1}{5} = 5$

$22u + 3 = 5$

$22u = 5 - 3$

$u = \frac{2}{22}$

$u = \frac{1}{11} \qquad \therefore \quad x = 11$

$\Rightarrow \quad x = 11 \qquad \Rightarrow \quad y = 5$

अतः धारा के बहाव की दिशा में नाव की चाल = 11 किमी./घंटा एवं धारा के बहाव की विपरीत दिशा में नाव की चाल = 5 किमी./घंटा

सोचें व चर्चा करें

दिए गए समीकरण निकाय

$2x + 5y = 1$

$2x + 3y = 3$ को विभिन्न समूहों में बँटकर अलग–अलग विधियों से हल करें प्राप्त मानों पर चर्चा करें कि क्या प्रत्येक विधि से प्राप्त मान समान हैं?

प्रश्नावली–2

1. जाँचिए कि (अ) व (ब) में कौन दिए गए समीकरणों के हल हैं?

   (अ) $x = 2, y = 5$ (ब) $x = -1, y = 3$

   (i) $x + y = 7$ (ii) $2x + 5y = 13$

   (iii) $2x - 3y = -11$ (iv) $5x + 3y = 4$

2. जाँचिए कि (अ) व (ब) में कौन दिए गए समीकरणों के हल हैं?

   (अ) $x = 3, y = -1$ (ब) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$

   (i) $2x + 5y = 1;$ $2x + 3y = 3.$

   (ii) $x + y = 5xy;$ $3x + 2y = 13xy.$

   (iii) $2x - \frac{3}{y} = 9;$ $3x + \frac{7}{y} = 2$

   (iv) $2x + 5y = \frac{8}{3};$ $3x - 2y = \frac{5}{6}$

3. निम्न समीकरणों को किसी भी विधि से हल कीजिए–

   (i) $x - y = -1;$ $3x - 2y = 12.$

   (ii) $x - 2y = 5;$ $2x - 4y = 6$

   (iii) $x + y = 6;$ $x = y + 2.$

   (iv) $5x - 8y = -1$ $3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0$

(v) $3x - 4y - 1 = 0;$ (vi) $x + 2y = 8;$

$2x - \frac{8}{3}y + 5 = 0$ $2x + 4y = 16$

4. निम्नलिखित समीकरण निकायों को दिए गए चरों के लिए हल कीजिए–

(i) $x + y = 7;$ (ii) $2x + y = 8;$

$x - y = -1.$ $x - 2y = -1$

(iii) $4x + 3y = 5;$ (iv) $\sqrt{7}x + \sqrt{11}y = 0;$

$2x - y = 2$ $\sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 0$

5. 15 किग्रा. चाय व 17 किग्रा. कॉफी का मूल्य 183 रुपये तथा 25 किग्रा. चाय व 13 किग्रा. कॉफी का मूल्य 213 रुपये है। 7 किग्रा. चाय और 1 किग्रा. कॉफी का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. एक व्यक्ति के पास कुछ कबूतर व कुछ गायें हैं जिनकी आँखों की कुल संख्या 120 तथा पैरों की कुल संख्या 180 है। बताइए व्यक्ति के पास कितनी गायें व कबूतर हैं?

7. एक थैले में 50 पैसे और 25 पैसे के कुल 94 सिक्के हैं। यदि थैले में कुल 29.75 रुपये हैं, तब बताइए कि थैले में 25 पैसे और 50 पैसे के सिक्कों की संख्या कितनी है?

8. दो संख्याओं का योग 25 तथा उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{1}{4}$ है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए । [संकेत– $(x-y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$]

9. दो संख्याओं का अंतर 14 तथा उनके वर्गों का अंतर 448 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

[संकेत– $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$]

10. दो संख्याओं का गुणनफल 45 तथा उनका योग 14 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

11. पाँच वर्ष पूर्व मेरी आयु मेरे पुत्र की आयु की तिगुनी थी। दस वर्ष पश्चात् मेरी आयु, मेरे पुत्र की आयु की दुगुनी हो जायेगी। मेरी व मेरे पुत्र की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

12. दो स्थानों A और B की दूरी 70 किमी. है। दो कारें A व B से चलना प्रारंभ करती हैं। यदि वे एक दिशा में चलती हैं तब 7 घंटे बाद एक–दूसरे से मिलती हैं और यदि वे एक–दूसरे की ओर चलती हैं तब 1 घंटे बाद मिलती हैं। कारों की चाल ज्ञात कीजिए।

13. एक विद्यालय के दो कमरों A और B में कुछ विद्यार्थी बैठे हैं। जब A से 10 विद्यार्थी B में भेज दिए जाते हैं तो दोनों कमरों में विद्यार्थियों की संख्या समान हो जाती है और जब 20 विद्यार्थी B से A में भेज दिए जाते हैं तब A के विद्यार्थियों की संख्या B से दुगुनी हो जाती है। प्रत्येक कमरे के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

14. जब किसी आयत की लंबाई में 5 इकाई की कमी तथा चौड़ाई में 2 इकाई की वृद्धि कर दी जाती है तब उसका क्षेत्रफल 80 वर्ग इकाई कम हो जाता है। जब उसकी लंबाई में 10 इकाई की वृद्धि और चौड़ाई में 5 इकाई की कमी कर दी जाती है तो आयत का क्षेत्रफल 50 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

अवलोकन से समीकरण निकाय के हल के प्रकार का पता लगाना

क्या किसी समीकरण निकाय के अवलोकन से ही आप उसके हल के बारे में बता पाएँगे कि उसके हल हैं अथवा नहीं।

हाँ, यह संभव है लेकिन इसके लिए हमें समीकरण निकाय के चरों एवं अचर पदों के गुणांकों के बीच के संबंधों को जानने की आवश्यकता होगी।

निम्नलिखित समीकरण निकाय को देखिए–

$$2x + 3y = 7 \quad ....(1)$$

$$6x + 9y = 11 \quad ....(2)$$

समीकरण (1) में x का गुणांक 2, y का गुणांक 3 व अचर पद 7 है। अब यदि 2, 3 व 7 को क्रमशः a_1, b_1 व c_1 लिखा जाए तथा समीकरण (2) के x, y के गुणांक व अचर पद को क्रमशः a_2, b_2 व c_2 लिखा जाए तब दिए गए समीकरण निकाय को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है–

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

ऐसे ही हम अन्य समीकरण निकायों को भी लिख सकते हैं।

समीकरणों के समान चरों के गुणांकों व उनके अचर पदों के अनुपातों के बीच के संबंधों को तालिका में दर्शाया गया है जिनसे हम समीकरण निकाय के हल के बारे में जान पाते हैं।

क्र.	समान चरों के अनुपातों में संबंध (प्रतिबंध या शर्त)	समीकरण निकाय के हल	ज्यामितीय अर्थ
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	अद्वितीय हल प्राप्त होता है	समीकरण निकाय दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ प्रदर्शित करता है।
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	कोई भी हल प्राप्त नहीं होता है।	समीकरण निकाय दो समान्तर रेखाएँ प्रदर्शित करता है।
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	अनंततः अनेक हल प्राप्त होते हैं।	समीकरण निकाय संपाती रेखाएँ प्रदर्शित करता है।

आइए इन संबंधों के आधार पर समीकरण के हल के बारे में पता करते हैं–

उदाहरणः–18. दिए गए समीकरणों का हल किस प्रकार का है? पता करें।

$3x + 5y = 12$ ....(1)

$4x + 2y = 5$ ....(2)

हलः– समीकरण $3x + 5y = 12$ में $a_1 = 3,\ b_1 = 5, c_1 = 12$

$4x + 2y = 5$ $a_2 = 4, b_2 = 2, c_2 = 5$

$\because$ यहाँ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ $\therefore$ समीकरण का अद्वितीय हल है।

उदाहरणः–19. समीकरण $5x + 3y = 12$

एवं $15x + 9y = 15$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण $5x + 3y = 12$ में $a_1 = 5,\ b_1 = 3, c_1 = 12$

एवं समीकरण $5x + 9y = 15$ में $a_2 = 15, b_2 = 9, c_2 = 15$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{15}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{9}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{15}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{5}$$

हम देखते हैं कि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ समीकरण का कोई भी हल नहीं है।

उदाहरणः–20. समीकरण $15x - 3y = 14$

एवं $60x - 12y = 56$ का हल ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $15x - 3y = 14$ में $a_1 = 15,\ b_1 = -3, c_1 = 14$

एवं $60x - 12y = 56$ में $a_2 = 60, b_2 = -12, c_2 = 56$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$

स्पष्टतः $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ समीकरण के अनंततः अनेक हल हैं।

करके देखें

निम्न तालिका को पूरा कीजिए–

क्र.	समीकरण निकाय	x के गुणांकों का अनुपात	y के गुणांकों का अनुपात	अचर पदों का अनुपात	अनुपातों में प्राप्त संबंध	समीकरण निकाय का हल	समी. निकाय का ज्यामितीय अर्थ
1.	$2x-3y=1$ $2x-4y=-4$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{2} = 1$	$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$	$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	अद्वितीय हल	दो प्रतिच्छेदी रेखाएं
2.	$x+2y=5$ $2x-3y=-4$	....	....	....	....	....	....
3.	$4x-5y=3$ $5x-4y=5$	....	....	....	....	....	....
4.	$2x+3y=5$ $-4x-6y=8$	....	....	....	....	....	....
5.	$3x-4y=1$ $6x-8y=-15$	....	....	....	....	....	....
6.	$x+y=4$ $2x+2y=8$	....	....	....	....	....	....
7.	$5x-6y=4$ $10x-12y=8$	....	....	....	....	....	....

E5K5Y5

चरों के अज्ञात गुणांक का मान पता करना–

आपने अब तक विभिन्न परिस्थितियों से निर्मित समीकरण निकाय को हल करके उनके चरों के मान प्राप्त करने के तरीकों को देखा जिसमें चरों के गुणांक हमें ज्ञात होते थे पर यदि समीकरण निकाय के किसी एक चर का गुणांक अज्ञात हो अर्थात् समीकरण निकाय निम्नलिखित रूप में हो–

$$2x + 3y - 5 = 0;$$

$$kx - 6y - 8 = 0.$$

तब भी हम समीकरण निकाय को हल करके उनके चरों x, y और k का मान ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरणः–21. k के किस मान के लिये दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल होगा–

$$x - ky = 2, \; 3x + 2y = -5$$

हलः– दिया गया समीकरण निकाय

$$x - ky - 2 = 0, \; 3x + 2y + 5 = 0$$

यहाँ $a_1 = 1, \quad b_1 = -k, \quad c_1 = -2$

$a_2 = 3, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = 5$

समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है–

अतः $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{-k}{2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2}{-3} \neq k$

$\Rightarrow \quad k \neq -\dfrac{2}{3}$

k के $\frac{-2}{3}$ के मान अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक मानों के लिए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल होगा।

उदाहरणः—22. k का मान ज्ञात कीजिए जब दिए गए समीकरण निकाय के अनंततः अनेक हल होंगे।

$$(k-3)\,x + 3y = k; \qquad kx + ky = 12$$

हलः— समीकरण निकाय

$(k–3) + 3y = k; \qquad kx + ky = 12$ में

$a_1 = k–3, \qquad b_1 = 3, \qquad c_1 = k$

$a_2 = k \qquad b_2 = k \qquad c_2 = 12$

चूँकि समीकरण निकाय के अनंत अनेक हल हैं

अतः $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ से

$$\frac{k-3}{k} = \frac{3}{k} = \frac{+k}{+12}$$

$\Rightarrow \quad \frac{k-3}{k} = \frac{3}{k}$ ....(1) $\quad \frac{3}{k} = \frac{k}{12}$ ......(2) $\quad \frac{k-3}{k} = \frac{k}{12}$ ......(3)

$\Rightarrow \quad k - 3 = 3 \qquad \Rightarrow k^2 = 36 \qquad \Rightarrow \quad k^2 = 12k - 36$

$\Rightarrow \quad k = 3 + 3 \qquad \Rightarrow k = \sqrt{36} \qquad \Rightarrow \quad k^2 - 12k + 36 = 0$

$\Rightarrow \quad k = 6 \qquad \Rightarrow k = \pm\ 6 \qquad \Rightarrow \quad k - 6k - 6k + 36 = 0$

$\Rightarrow \quad k(k-6) - 6(k-6) = 0$

$\Rightarrow \quad (k-6)\,(k-6) = 0$

$k = 6$

k का वही मान सत्य होगा जो सभी समीकरणों को संतुष्ट करता है । यहाँ 6 ही तीनों समीकरणों को संतुष्ट करता है इसलिए k का मान 6 होगा ।

E5U1ZS

प्रश्नावली–3

1. दर्शाइए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है–

   $3x + 5y = 12$

   $5x + 3y = 4$

2. दर्शाइए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय के अनंततः अनेक हल हैं–

   $2x - 3y = 5;$

   $6x - 9y = 15$

3. k के मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण निकायों का कोई भी हल न हो–

   (i) $8x + 5y = 9;$ $kx + 10y = 15$

   (ii) $kx + 3y = 3;$ $12x + ky = 6$

   (iii) $kx - 5y = 2;$ $6x + 2y = 7$

4. निम्नलिखित समीकरण निकायों के एक अद्वितीय हल के लिए k का मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $kx + 2y = 5;$ $3x + y = 1$

   (ii) $x - 2y = 3;$ $3x + ky = 1$

   (iii) $kx + 3y = k - 3;$ $12x + ky = k$

   (iv) $4x - 5y = k;$ $2x - 3y = 12$

5. निम्नलिखित समीकरण निकायों के लिए k का मान ज्ञात कीजिए जबकि समीकरण निकायों के अनंततः अनेक हल हों।

   (i) $2x + 3y = 7;$

   $(k - 1)\, x + (k + 2)\, y = 3k$

   (ii) $kx + 2y - 4 = 0;$ $5x - 3y + 6 = 0$

   (iii) $3x + ky = 7;$ $2x - 5y = 1$

   (iv) $kx - 5y = 2;$ $2x - 3y = 12$

6. यदि $x = 2; y = 4$ है तो समीकरण $7x - 4y = p$ में p का मान ज्ञात कीजिए।

7. k का मान ज्ञात कीजिए यदि एक सरल रेखा $2x - ky = 9$ बिन्दु $(1,-1)$ से गुजरती है।

8. जाँचिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय अद्वितीय हल रखता है या कोई हल नहीं रखता अथवा अनंततः अनेक हल रखता है। यदि अद्वितीय हल रखता हो तब चरों के मान ज्ञात कीजिए–

   $4x + 7y = 18$

   $2x + y = 4$

समीकरण से कथन बनाना

अभी तक हमने विभिन्न परिस्थितियों पर आधारित कथनों को समीकरण निकाय के रूप में लिखकर उनके चरों के मान प्राप्त किये, क्या हम किसी समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिख सकते हैं?

आइए, निम्नलिखित समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिखकर देखते हैं–

$x + y = 45$ ....(1)

$x - y = 13$ ....(2)

यदि हम x को एक संख्या तथा y को दूसरी संख्या मान लें तो समीकरण (1) और (2) को कथन के रूप में निम्न तरीके से लिख सकते हैं।

दो संख्याओं का योग 45 है तथा उनका अंतर 13 है। तब संख्याएँ ज्ञात कीजिए। या x एक किताब का और y एक कॉपी का रूपये में मूल्य है । एक किताब और एक कॉपी के मूल्यों का योग 45 है और उनके मूल्यों का अंतर 13 है।

क्या इसी प्रश्न से और कथन बनाएँ जा सकते हैं? ऐसे दो कथन और बनाइए।

उदाहरणः–23. समीकरण निकाय $\frac{x-1}{y} = \frac{1}{2}$ ....(1)

$\frac{x}{y+3} = \frac{3}{2}$ ....(2)

को कथन के रूप में लिखिए।

हलः– यदि $\frac{x}{y}$ एक भिन्न है जिससे अंश x तथा हर y है। तब उपरोक्त समीकरणों को कथन के रूप में लिखा सकता है ।

''किसी भिन्न के अंश में 1 घटाने पर वह भिन्न $\frac{1}{2}$ के बराबर हो जाता है तथा यदि उसके हर में 3 जोड़ दिया जाए तो भिन्न $\frac{3}{2}$ के बराबर हो जाता है।''

समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिखने के कई संभव तरीके हो सकते हैं। उपरोक्त समीकरणों को आप अन्य परिस्थितियों में भी कथन के रूप में लिख सकते हैं।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिखिए।

(i) $x + y = 60$
$x = 3y$

(ii) $x + y = 5$
$xy = 6$

हमने सीखा

1. एक घात वाले दो चरों से बने समीकरणों के आलेख सदैव सरल रेखा होती है। इसीलिए एक घात वाले दो चरों के समीकरण को रैखिक समीकरण कहते हैं।
2. जब दो चरों के रैखिक समीकरणों का आलेख दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ होती हैं तब समीकरणों का एक अद्वितीय हल होता है।
3. जब दो चरों के रैखिक समीकरणों का आलेख दो समांतर रेखाएँ होती हैं तब समीकरणों का कोई भी हल नहीं होता है।
4. जब दो चरों के रैखिक समीकरणों का आलेख संपाती रेखाएँ होती हैं तब समीकरणों के अनंततः अनेक हल होते हैं।
5. दो चरों के रैखिक समीकरण निकाय को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है–

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

उपरोक्त निकाय में यदि,

(i) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ हों तो रेखाएँ समान्तर होती हैं व समीकरण निकाय का कोई भी हल नहीं होता है।

(ii) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ हो तो रेखाएँ प्रतिच्छेदी होती हैं व समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल होता है।

(iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ हो रेखाएँ संपाती होती हैं व समीकरण निकाय के अनंततः अनेक हल होते हैं। वास्तव में दिए गए दोनों समीकरण एक जैसे ही होते हैं।

उत्तरमाला–1

1. (i) $3x + 6y = 3900$, $x + 2y = 1300$ (ii) $x + y = 16$, $x - y = 8$

(iii) $2x + y = 160$, $4x + 2y = 300$ (iv) $x - 7y + 42 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$

(v) $x + y = 90$, $x = 2y$

2. (अ) $x = 2, y = 3$ (ब) अनेक हल

(स) कोई भी हल नहीं (द) $x = -1, y = 2$

उत्तरमाला–2

1. (i) (अ) (ii) (ब) (iii) (अ), (ब)

(iv) (ब)

2. (i) (अ) (ii) (ब) (iii) (अ)

(iv) (ब)

3. (i) $x = 14,\ y = 15$ एक अद्वितीय हल।

(ii) कोई हल नहीं समांतर रेखाएँ

(iii) $x = 4, y = 2$ एक अद्वितीय हल

(iv) अनंततः अनेक हल, संपाती रेखाएँ।

(v) कोई हल नहीं, समांतर रेखाएँ।

(vi) अनंततः अनेक हल, संपाती रेखाएँ।

4. (i) $x = 3,$ $y = 4$ (ii) $x = 3, y = 2$

(iii) $x = 1.1, y = 0.2$ (iv) $x = 0,\ y = 0$

5. 43.80 रूपये

6. गायों की संख्या = 30, कबूतरों की संख्या = 30

7. 25 पैसे के सिक्कों की संख्या = 69, 50 पैसे के सिक्कों की संख्या = 25

8. संख्याएँ = 20, 5

9. संख्याएँ = 23, 9

10. संख्याएँ = 9, 5

11. मेरी आयु = 50 वर्ष, पुत्र की आयु = 20 वर्ष

12. 40 किमी./घण्टा, 30 किमी./घण्टा

13. 100, 40

14. 40 इकाई, 30 इकाई

उत्तरमाला–3

3.	(i) $k = 16$	(ii) $k = -6$	(iii) $k = -15$	
4.	(i) $k \neq 6$	(ii) $k \neq -6$	(iii) $k \neq \pm 6$	
	(iv) $k \neq \frac{10}{3}$			
5.	(i) $k = 7$	(ii) $k = \frac{-10}{3}$		
	(iii) k का कोई मान नहीं	(iv) $k = 24$		
6.	$p = -2$	7. $k = 7$		
8.	अद्वितीय हल रखता है, $x = 1, y = 2$			

अध्याय

03

एक चर का द्विघात समीकरण

[QUADRATIC EQUATION]

E63X2F

परिचय (Introduction)

एक व्यक्ति अपनी जमीन के किसी भाग में 800 वर्गमीटर क्षेत्रफल का एक ऐसा आयताकार बगीचा बनाना चाहता है, जिसकी लंबाई उसकी चौड़ाई से दुगुनी हो। व्यक्ति को बगीचे की लंबाई और चौड़ाई कितनी रखनी चाहिए?

यदि बगीचे की चौड़ाई को x मीटर मान लिया जाए तब उसकी लंबाई $2x$ मीटर होगी।

चूँकि बगीचा आयताकार है,

अतः बगीचे का क्षेत्रफल = बगीचे की लंबाई $\times$बगीचे की चौड़ाई

$$800 = 2x.x$$

या $$\frac{800}{2} = x^2$$

या $$x^2 = 400$$

या $$x^2 = 20^2$$

या $$x^2 - 20^2 = 0 \qquad \text{...........} \ (i)$$

x के जिन मानों के लिए (i) के दोनों पक्ष बराबर होंगे। वे मान ही बगीचे की चौड़ाई को दर्शाएँगे।

चौड़ाई पता होने पर बगीचे की लंबाई भी मालूम हो जायेगी।

सवाल को बीजीय रूप में लिखना

हमने उपर देखा कि $x^2 - 20^2 = 0$ से x का मान पता कर सकते हैं। यह समीकरण दरअसल दिए गए सवाल में दिखाई गई परिस्थिति का बीजीय निरूपण है।

आइए हम कुछ और परिस्थितियों की चर्चा करें और उनके बीजीय रूप का अवलोकन करें।

नरेश को अपने घर के सामने 500 वर्गमीटर क्षेत्रफल वाली एक समकोण त्रिभुजाकार क्यारी बनवानी है, जिसमें वह आधार भुजा की लंबाई, शीर्षलंब की लंबाई से 30 मीटर अधिक रखना चाहता है।

क्यारी का आकार क्या होना चाहिए यह जानने के लिए हम शीर्षलंब की लंबाई को x मीटर मानें तब आधार भुजा की लंबाई $x+30$ मीटर होनी चाहिए।

चूँकि समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ $\times$शीर्षलंब की लंबाई $\times$आधार भुजा की लंबाई

$$\Rightarrow \quad 500=\frac{1}{2}\times x(x+30)$$

$$\Rightarrow \quad 500\times 2=x^2+30x$$

$$\Rightarrow \quad x^2+30x-1000=0 \quad \text{.............} \quad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) प्रश्न का बीजीय रूप है। x के जिन मानों के लिए (ii) के दोनों पक्ष बराबर होंगे वे मान ही त्रिभुजाकार क्यारी के शीर्षलंब की माप होंगे।

द्विघात समीकरण : ऊपर के दोनों बीजीय निरूपण में x की अधिकतम घात 2 है इस द्विघातीय बहुपद को शामिल करते हुए एक बीजीय समीकरण मिलता है जिससे हम हल ढूँढ सकते हैं।ऐसे ही कुछ उदाहरण हम आगे देखेंगे।

अब हम निम्नलिखित कथन पर विचार करते हैं –

दो क्रमागत संख्याओं का गुणनफल शून्य है।

यदि पहली संख्या x हो,तब दूसरी संख्या $x+1$ होगी।

$$\therefore \quad x(x+1)=0$$

$$x^2+x=0 \quad \text{...............} \quad \text{(iii)}$$

समीकरण (i), (ii), (iii) में आप देख रहे हैं कि इनमें से प्रत्येक में केवल एक चर है और उसकी अधिकतम घात दो है। प्रत्येक समीकरण में ऐसा एक पद अनिवार्य रूप से उपस्थित है जिसकी घात दो है। ये सभी एक चर के द्विघात समीकरण हैं।

आप जानते हैं कि बहुपद ax^2+bx+c घात 2 का एक चर का बहुपद है (जहाँ a,b,c वास्तविक संख्याएँ और $a\neq 0$) इसे द्विघातीय बहुपद कहते हैं। इस द्विघातीय बहुपद को शून्य के बराबर रखने पर यह एक समीकरण बन जाता है।

अर्थात $ax^2+bx+c=0$

चूँकि समीकरण में एक ही चर है तथा चर की अधिकतम घात दो है अतः इसे एक चर का द्विघात समीकरण कहा जाता है। यह द्विघात समीकरण या वर्ग समीकरण का मानक या व्यापक रूप है।

कुछ और द्विघात समीकरण नीचे दिए गए हैं –

(i) $x^2-2x=0$	(ii) $(x+1)(x+2)=0$	(iii) $x^2=0$
(iv) $x^2-9=0$	(v) $z^2+3=0$	(vi) $x^2-\sqrt{5}x+6=0$
(vii) $3y^2+6y+6=0$	(viii) $(x-2)^2=0$	(ix) $3m-2m^2+5=0$

$x^2-5\sqrt{x}+3=0$ द्विघात (वर्ग) समीकरण नहीं है क्योंकि समीकरण का बायाँ भाग बहुपद नहीं हैं।

करके देखें

निम्नलिखित में से एक चर का द्विघात (वर्ग) समीकरण चुनिए –

(i)	$x^2-3x=0$	(ii)	$-3x^2-2^2=0$	(iii)	$x+2=0$
(iv)	$x^2+y=9$	(v)	$x^2+9=0$	(vi)	$x+5y=0$
(vii)	$(x-1)(x+2)=0$	(viii)	$x^2+2\sqrt{x}-1=0$	(ix)	$(x-3)^2=0$
(x)	$x(x-5)=0$	(xi)	$x^2+\sqrt{5}x+3=0$	(xi)	$y^2-z^2+3=0$
(xiii)	$x^2-3\sqrt{x}+2=0$	(xiv)	$x^2-\sqrt{3}x+2=0$	(xv)	$(x+1)(x+5)=0$

प्रश्नावली 1

1. निम्नलिखित में से वर्ग समीकरण चुनिए –

(i)	$x^2+3x-2=0$	(ii)	$x^2+\frac{1}{x}=1$
(iii)	$9x^2-100x-20=0$	(iv)	$x^2-3\sqrt{x}+2=0$
(v)	$x-\frac{2}{x}=-x$	(vi)	$\sqrt{5}x^2-3x+\frac{1}{2}=0$
(vii)	$x^2-10x=0$	(viii)	$x+y=10$
(ix)	$x+5=7$	(x)	$x(x-8)=0$

द्विघात समीकरण के मूल (Roots of Quadratic Equation)

$p(x)=x^2-3x+2$ एक द्विघातीय बहुपद है। इस बहुपद के शून्यक x के वे मान होंगे जिनके लिए $p(x)$ शून्य होगा। शून्यक ज्ञात करने के लिए पहले x^2-3x+2 के गुणनखण्ड प्राप्त कर लेते हैं।

$$x^2-3x+2=x^2-2x-x+2$$
$$=(x^2-2x)-1(x-2)$$
$$=x(x-2)-1(x-2)$$
$$=(x-2)(x-1)$$

बहुपद x^2-3x+2 का मान शून्य होगा यदि $(x-2)(x-1)=0$

$\Rightarrow$ $(x-2)=0$ या $(x-1)=0$

$\Rightarrow \quad x-2=0$ या $x-1=0$

$\therefore x=2$ या $x=1$

अर्थात् x^2-3x+2 के शून्यक 2 व 1 हैं।

अब वर्ग समीकरण $x^2-3x+2=0$ में x के ऐसे मान पता करते हैं जिनके लिए समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हों। हम इन मानों को मूल कहते हैं।

$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-2)(x-1)=0$$

$\Rightarrow \quad (x-2)=0$ या $(x-1)=0$

$\Rightarrow \quad x-2=0$ या $x-1=0$

$\therefore x=2$ या $x=1$

यहाँ हम पाते हैं कि समीकरण $x=2,1$ के लिए संतुष्ट हो रहा है। x के यही मान बहुपद x^2-3x+2 के शून्यक भी हैं अतः हम कह सकते हैं कि द्विघातीय बहुपद के शून्यक उस बहुपद से बनाए गए समीकरण के मूल होते हैं।

कैसे पता करें कि दिए गए मान द्विघातीय समीकरण के मूल हैं अथवा नहीं?

कोई मान किसी वर्ग समीकरण का मूल है अथवा नहीं यह जानना बहुत आसान होता है। जिन मानों को वर्ग समीकरण में रखने पर समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हों वे मान समीकरण के मूल होते हैं।

आइए, कुछ उदाहरणों से मूल जाँचने के तरीके सीखते हैं।

उदाहरणः–1. जाँचिए कि $x=1$ तथा $x=-1$ वर्ग समीकरण $x^2-x+1=0$ के मूल हैं अथवा नहीं?

हलः– दिए गए समीकरण $x^2-x+1=0$ में बायाँ पक्ष x^2-x+1 व दायाँ पक्ष 0 है । बायें पक्ष में $x=1$ रखने पर,

$$=1^2-1+1$$
$$=1$$

स्पष्टतः बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

अतः $x=1$, दिए गए वर्ग समीकरण का मूल नहीं है।

इसी प्रकार $x=-1$ रखने पर

$$=(-1)^2-(-1)+1$$
$$=1+1+1$$
$$=3$$

स्पष्टतः बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

अतः $x=-1$ वर्ग समीकरण $x^2-x+1=0$ का मूल नहीं है।

उदाहरणः–2. जाँचिए कि $x=2, x=3$ वर्ग समीकरण $x^2-5x+6=0$ के मूल हैं अथवा नहीं?

हलः– दिए गए समीकरण $x^2-5x+6=0$ में बायाँ पक्ष x^2-5x+6 व दायाँ पक्ष 0 है । बायें पक्ष में $x=2$ रखने पर

$$x^2-5x+6$$
$$=(2)^2-5(2)+6$$
$$=4-10+6$$
$$=0$$

स्पष्टतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

इसी प्रकार $x=3$ रखने पर

$$=(3)^2-5(3)+6$$
$$=9-15+6$$
$$=0$$

स्पष्टतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अतः $x=2, x=3$ समीकरण $x^2-5x+6=0$ के मूल हैं।

करके देखें

जाँचिए कि x के दिए गए मान समीकरण के मूल हैं अथवा नहीं

(i) $x^2+6x+5=0$; $x=-5, x=-1$

(ii) $9x^2-3x-2=0$; $x=\frac{2}{3}, x=-\frac{1}{3}$

(iii) $x^2+x+1=0$; $x=0, x=1$

द्विघात समीकरण को हल करने के तरीके

अब तक हमने देखा कि वर्ग समीकरण कैसे बनते हैं। अब हम उनके हल करने के तरीकों पर चर्चा करेंगे।

$x^2-7x=0$ एक वर्ग समीकरण है।

क्या हम यहाँ x के मान पता कर सकते हैं ?

$\because \quad x^2-7x=0$

$\Rightarrow \quad x(x-7)=0$

$\Rightarrow \quad x=0$ या $x-7=0$

तब $\quad x=0$ या $x=7$

चूँकि x के मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं अतः ये इस समीकरण $x^2-7x=0$ के हल होंगे।

इसी प्रकार $(x+1)(x-2)=0$ को हल करके देखते हैं –

$\Rightarrow \quad x+1=0$ या $x-2=0$

$\therefore \quad x=-1$ या $x=2$

चूँकि x के मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

अतः $x=-1$ व $x=2$ समीकरण $(x+1)(x-2)=0$ के मूल होंगे।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए –

(i) $x^2-11x=0$ (ii) $(x-1)^2=0$ (iii) $(x+3)^2=0$

(iv) $(x-2)(x+3)=0$ (v) $x(x-1)=0$

गुणनखंडन करके द्विघात समीकरण को हल करना –

अब हम पाठ के शुरू में विभिन्न परिस्थितियों से बने समीकरणों (i), (ii) तथा (iii) को हल करके उनके चर के मान प्राप्त करेंगे।

समीकरण (i): $x^2-20^2=0$ को हल करने के लिए इसकी तुलना सर्वसमिका $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ से करने पर –

$$x^2-20^2=(x-20)(x+20)$$

$\therefore \quad (x-20)(x+20)=0$

$\Rightarrow \quad (x-20)=0$ या $(x+20)=0$

$\Rightarrow \quad x-20=0$ या $x+20=0$

$\Rightarrow \quad x=20$ या $x=-20$

चूँकि लंबाई और चौड़ाई ऋणात्मक नहीं हो सकती इसलिए x का मान –20 नहीं हो सकता। इस सन्दर्भ में x को आयताकार बगीचे की चौड़ाई माना गया था।

$\therefore$ आयताकार बगीचे की चौड़ाई = 20 मीटर

तथा लंबाई $2x=2\times 20=40$ मीटर होगी।

समीकरण (ii): $x^2+30x-1000=0$ में हमें समकोण त्रिभुजाकार क्यारी के शीर्षलंब व आधार भुजा की लंबाई की माप ज्ञात करनी है।

चूँकि समीकरण (ii) का बायाँ भाग एक द्विघातीय बहुपद है, इसका गुणनखंडन करेंगे।

$x^2+50x-20x-1000=0$

$\Rightarrow \quad x(x+50)-20(x+50)=0$

$\Rightarrow \quad (x+50)(x-20)=0 \qquad (\because 50x-20x=30x)$

$\Rightarrow \quad (x+50)=0$ या $(x-20)=0$

$\Rightarrow \quad x+50=0$ या $x-20=0$

$\Rightarrow \quad x=-50$ या $x=20$

अतः समकोण त्रिभुजाकार क्यारी के शीर्षलंब की लंबाई = 20 मीटर तथा आधार भुजा की लंबाई $x+30=20+30=50$ मीटर होनी चाहिए।

इसी तरह से समीकरण (iii) का गुणनखंडन करके संख्याएँ प्राप्त की जा सकती हैं।

नीचे दिए गए उदाहरणों में हम द्विघात समीकरणों का गुणनखंडन कर हल प्राप्त करेंगे।

उदाहरणः—3. गुणनखंडन करके निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए —

(i) $8x^2-22x-21=0$ (ii) $x^2+2\sqrt{2}x-6=0$

(iii) $\sqrt{3}x^2+10x+7\sqrt{3}=0$ (iv) $\dfrac{x+3}{x-2}-\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{17}{4}\ ,x\neq 0$

हलः— (i) $8x^2-22x-21=0$

$\Rightarrow \quad 8x^2-28x+6x-21=0$

$\Rightarrow \quad 4x(2x-7)+3(2x-7)=0$

$\Rightarrow \quad (2x-7)(4x+3)=0$

$\Rightarrow \quad (2x-7)=0$ या $(4x+3)=0$

$\Rightarrow \quad 2x-7=0$ या $4x+3=0$

$\Rightarrow \quad 2x=7$ या $4x=-3$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{7}{2}$ या $x=-\dfrac{3}{4}$

अतः $x=\dfrac{7}{2},-\dfrac{3}{4}$ समीकरण के दो मूल हैं।

हलः— (ii) $x^2+2\sqrt{2}x-6=0$

$\Rightarrow \quad x^2+3\sqrt{2}x-\sqrt{2}x-6=0$

$\Rightarrow \quad x\left(x+3\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(x+3\sqrt{2}\right)=0$

$\Rightarrow \quad \left(x+3\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=0$

$\Rightarrow \quad \left(x+3\sqrt{2}\right)=0$ या $\left(x-\sqrt{2}\right)=0$

$\Rightarrow \quad x+3\sqrt{2}=0$ या $x-\sqrt{2}=0$

$\Rightarrow \quad x=-3\sqrt{2}$ या $x=\sqrt{2}$

अतः $x=-3\sqrt{2},\sqrt{2}$ समीकरण के दो मूल हैं।

हलः– (iii) $\sqrt{3}x^2+10x+7\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x^2+3x+7x+7\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x\left(x+\sqrt{3}\right)+7\left(x+\sqrt{3}\right)=0$

$\Rightarrow \quad \left(x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}x+7\right)=0$

$\Rightarrow \quad \left(x+\sqrt{3}\right)=0$ या $\left(\sqrt{3}x+7\right)=0$

$\Rightarrow \quad x+\sqrt{3}=0$ या $\sqrt{3}x+7=0$

$\Rightarrow \quad x=-\sqrt{3}$ या $x=-\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

अतः $x=-\sqrt{3},-\dfrac{7}{\sqrt{3}}$ समीकरण के दो मूल हैं।

हलः– (iv) $\dfrac{x+3}{x-2}-\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{17}{4}$ $\quad ,x\neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{x(x+3)-(1-x)(x-2)}{x(x-2)}=\frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+3x-\left(x-x^2-2+2x\right)}{x^2-2x}=\frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+3x-x+x^2+2-2x}{x^2-2x}=\frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x^2+2}{x^2-2x}=\frac{17}{4}$$

$\Rightarrow \quad 4\left(2x^2+2\right)=17\left(x^2-2x\right)$

$\Rightarrow \quad 8x^2+8=17x^2-34x$

$\Rightarrow \quad 17x^2-8x^2-34x-8=0$

$\Rightarrow \quad 9x^2-34x-8=0$

$\Rightarrow \quad 9x^2-36x+2x-8=0$

$\Rightarrow \quad 9x(x-4)+2(x-4)=0$

$\Rightarrow \quad (x-4)(9x+2)=0$

$\Rightarrow \quad (x-4)=0$ या $(9x+2)=0$

$\Rightarrow \quad x-4=0$ या $9x+2=0$

$\Rightarrow \quad x=4$ या $x=\frac{-2}{9}$

अतः $x=4,\frac{-2}{9}$ समीकरण के दो मूल हैं।

प्रश्नावली 2

1. जाँचिए कि दिए गए मान समीकरण के मूल हैं अथवा नहीं –

(i) $2x^2+x-6=0;\quad x=2, x=-\frac{3}{2}$

(ii) $x^2-4x+4=0;\quad x=2, x=-3$

(iii) $6x^2-6x-12=0;\quad x=-3, x=4$

(iv) $4x^2-9x=0;\quad x=0, x=\frac{9}{4}$

(v) $x^2-3\sqrt{3}x+6=0;\quad x=\sqrt{3}, x=-2\sqrt{3}$

2. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए –

(i) $(x-4)(x-2)=0$ (ii) $(2x+3)(3x-7)=0$

(iii) $(x-7)^2=0$ (iv) $x^2-11x=0$

(v) $(x+12)^2=0$ (vi) $x(x+1)=0$

3. क्या $\sqrt{2}$ समीकरण $x^2+2x-4=0$ का एक मूल है?

4. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों का गुणनखंडन करके उनके मूल ज्ञात कीजिए –

(i) $9x^2-3x-2=0$ (ii) $4x^2+5x=0$

(iii) $3x^2-11x+10=0$ (iv) $5x^2+3x-2=0$

(v) $6x^2+7x+2=0$ (vi) $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}=0$

(vii) $10x-\frac{1}{x}=3$ (viii) $x^2-4\sqrt{2}x+6=0$

(ix) $abx^2+(b^2-ac)x-bc=0$

(x) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{5}{6};\quad x\neq 1,-1$

द्विघात समीकरण के अनुप्रयोग

हमारे जीवन में अनेक ऐसी परिस्थितियाँ होती हैं, जिन पर आधारित कथनों को हम वर्ग समीकरण के रूप में लिख कर उनका समाधान ढूँढते हैं। अब हम ऐसी ही कुछ परिस्थितियों के लिए कथनों को वर्ग समीकरण के रूप में लिखकर उनको हल करेंगे।

उदाहरणः–4. यदि एक संख्या और उसके व्युत्क्रम का योग $2\frac{1}{30}$ है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि वह संख्या x है, तब x का व्युत्क्रम $\frac{1}{x}$ होगा।

$$\therefore \quad x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x}=\frac{61}{30}$$

$$\Rightarrow \quad 30\left(x^2+1\right)=61x$$

$$\Rightarrow \quad 30x^2-61x+30=0$$

$$\Rightarrow \quad 30x^2-36x-25x+30=0$$

$$\Rightarrow \quad 6x(5x-6)-5(5x-6)=0$$

$$\Rightarrow \quad (5x-6)(6x-5)=0$$

$$\Rightarrow \quad 5x-6=0 \quad \text{या} \quad 6x-5=0$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{6}{5} \quad \text{या} \quad x=\frac{5}{6}$$

अतः वे संख्याएँ $x=\frac{6}{5}$ तथा $x=\frac{5}{6}$ होंगी।

उदाहरणः–5. एक शतरंज के बोर्ड के 64 वर्गाकार खानों में प्रत्येक खाने का क्षेत्रफल 6.25 वर्ग सेमी. है। इस बोर्ड के चारों तरफ 2 सेमी. चौड़ाई के बार्डर बने हैं। शतरंज के बोर्ड की एक भुजा की माप ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि शतरंज के बोर्ड की बॉर्डर सहित माप x सेमी. है,

तब बॉर्डर की माप =2+2 =4 सेमी.

बॉर्डर के बिना शतरंज के बोर्ड का क्षेत्रफल $=(x-4)^2$

शतरंज के बोर्ड में 64 वर्गाकार खाने हैं,

जिनमें से प्रत्येक का क्षेत्रफल 6.25 वर्गसेमी. है।

$$\therefore \quad (x-4)^2=64\times 6.25$$

$$\Rightarrow \quad x^2-8x+16=400$$

$$\Rightarrow \quad x^2-8x+16-400=0$$

$\Rightarrow \quad x^2-8x-384=0$

$\Rightarrow \quad x^2-24x+16x-384=0$

$\Rightarrow \quad x(x-24)+16(x-24)=0$

$\Rightarrow \quad (x-24)(x+16)=0$

$\Rightarrow \quad x-24=0$ या $x+16=0$

$\Rightarrow \quad x=24$ या $x=-16$

शतरंज बोर्ड की माप ऋणात्मक नहीं हो सकती,
अतः शतरंज के बोर्ड की एक भुजा की माप 24 सेमी. होगी।

उदाहरणः—6. कक्षा 10 की टेस्ट परीक्षा में मोहन के गणित और विज्ञान विषयों में प्राप्ताकों का योग 28 है। यदि उसका गणित का प्राप्तांक पहले से 3 अधिक और विज्ञान का प्राप्तांक पहले से 4 कम हो जाए तो उसके दोनों विषयों के प्राप्ताकों का गुणनफल 180 हो जाता है। गणित और विज्ञान विषयों में मोहन के प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

हलः— यदि मोहन को गणित में x अंक मिले हों, तब उसके विज्ञान विषय के अंक $=28-x$ होंगे।

जब मोहन को गणित में पहले से 3 अंक अधिक मिले.

तब उसके गणित के अंक $=x+3$

और विज्ञान में पहले से 4 अंक कम मिले तब उसके विज्ञान के अंक $=28-x-4$

$\because$ उसके गणित और विज्ञान के इन अंकों का गुणनफल = 180 (दिया है।)

$\therefore \quad (x+3)(28-x-4)=180$

$\Rightarrow \quad (x+3)(24-x)=180$

$\Rightarrow \quad -x^2-3x+24x+72=180$

$\Rightarrow \quad -x^2+21x+72-180=0$

$\Rightarrow \quad -x^2+21x-108=0$

$\Rightarrow \quad x^2-12x-9x+108=0$

$\Rightarrow \quad x(x-12)-9(x-12)=0$

$\Rightarrow \quad (x-12)(x-9)=0$

$\Rightarrow \quad x-12=0$ या $x-9=0$

$\Rightarrow \quad x=12$ या $x=9$

जब $x=12 \Rightarrow 28-x=28-12=16$

जब $x=9 \Rightarrow 28-x=28-9=19$

इसलिए जब मोहन को गणित में 12 अंक मिले हों तब विज्ञान में उसके प्राप्तांक 16 होंगे। या उसे गणित में 9 अंक मिले हों तब उसके विज्ञान के प्राप्तांक 19 होंगे।

उदाहरणः–7. एक व्यक्ति की वर्तमान आयु, उसके पुत्र की वर्तमान आयु के वर्ग के बराबर है। यदि 1 वर्ष पहले उस व्यक्ति की आयु उसके पुत्र की आयु की 8 गुनी थी तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि पुत्र की वर्तमान आयु = x वर्ष

तब व्यक्ति की वर्तमान आयु $= x^2$ वर्ष

1 वर्ष पहले पुत्र की आयु = $x-1$ वर्ष

तथा 1 वर्ष पहले व्यक्ति की आयु = x^2-1 वर्ष

$\because$ 1 वर्ष पहले व्यक्ति की आयु, पुत्र की आयु की 8 गुनी थी,

$\therefore \quad x^2-1=8(x-1)$

$\Rightarrow \quad x^2-1=8x-8$

$\Rightarrow \quad x^2-8x+7=0$

$\Rightarrow \quad x^2-7x-x+7=0$

$\Rightarrow \quad x(x-7)-1(x-7)=0$

$\Rightarrow \quad (x-7)(x-1)=0$

$\Rightarrow \quad x-7=0$ या $x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=7$ या $x=1$

$x=1$ के लिए पिता व पुत्र की आयु 1 वर्ष है, जो कि संभव नहीं है।

अतः $x=7$ लेने पर

पुत्र की वर्तमान आयु $x=7$ वर्ष एवं

पिता की वर्तमान आयु $x^2=7^2=49$ वर्ष

उदाहरणः–8. एक आयताकार खेत का परिमाप 82 मीटर है तथा उसका क्षेत्रफल 400 वर्गमीटर है। खेत की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि आयताकार खेत की चौड़ाई x मीटर है।

आयताकार खेत का परिमाप = 82 मीटर

$\Rightarrow$ 2(लंबाई+चौड़ाई) = 82 मीटर

$\Rightarrow$ (लंबाई+चौड़ाई) = 41 मीटर

$\Rightarrow$ लंबाई + x = 41 मीटर

$\Rightarrow$ लंबाई = $41-x$ मीटर

$\because$ आयताकार खेत का क्षेत्रफल = 400 वर्ग मीटर

$\Rightarrow$ लंबाई $\times$ चौड़ाई = 400 वर्ग मीटर

$\Rightarrow$ $(41-x)x = 400$

$\Rightarrow$ $41x - x^2 = 400$

$\Rightarrow$ $-x^2 + 41x - 400 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 41x + 400 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 25x - 16x + 400 = 0$

$\Rightarrow$ $x(x-25) - 16(x-25) = 0$

$\Rightarrow$ $(x-25)(x-16) = 0$

$\Rightarrow$ $x - 25 = 0$ या $x - 16 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 25$ या $x = 16$

अतः आयताकार खेत की चौड़ाई 16 मीटर और लंबाई 25 मीटर होगी। x के दोनों मानों में एक लंबाई और दूसरी चौड़ाई को व्यक्त करेगा।

उदाहरणः–9. कुछ विद्यार्थियों ने पिकनिक में जाने की योजना बनाई। उन्होंने भोजन पर व्यय के लिए 500 रुपये इकट्ठे किये, लेकिन उनमें से 5 विद्यार्थी पिकनिक में नहीं जा पाए, जिससे प्रत्येक विद्यार्थी को भोजन पर व्यय के लिए 5 रुपये अधिक देने पड़े। बताइए कि पिकनिक पर कितने विद्यार्थी गए?

हलः– माना कि पिकनिक की योजना बनाने वाले विद्यार्थियों की संख्या x है।

$\because$ x विद्यार्थियों द्वारा भोजन व्यय हेतु दी गई राशि = 500 रुपये

$\therefore$ एक विद्यार्थी द्वारा भोजन व्यय हेतु दी गई राशि = $\frac{500}{x}$ रुपये

परंतु 5 विद्यार्थियों की संख्या कम हो गई,

तब पिकनिक में जाने वाले विद्यार्थियों की संख्या = $x-5$

अब $x-5$ विद्यार्थियों द्वारा भोजन पर व्यय हेतु दी गई राशि = 500 रुपये

अतः एक विद्यार्थी द्वारा भोजन व्यय हेतु दी गई राशि = $\frac{500}{x-5}$ रुपये

प्रश्न के अनुसार, 5 विद्यार्थियों के पिकनिक में नहीं जाने से प्रत्येक विद्यार्थी को भोजन व्यय के लिए 5 रुपये अधिक देने पड़े।

$\therefore$ $\frac{500}{x-5} - \frac{500}{x} = 5$

$\Rightarrow$ $\frac{500x - 500(x-5)}{x(x-5)} = 5$

$\Rightarrow$ $\frac{500\{x-(x-5)\}}{x(x-5)} = 5$

$$\Rightarrow \quad \frac{500(x-x+5)}{x(x-5)}=5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{500\times 5}{5}=x^2-5x$$

$$\Rightarrow \quad x^2-5x-500=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-25x+20x-500=0$$

$$\Rightarrow \quad x(x-25)+20(x-25)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-25)(x+20)=0$$

$\Rightarrow \quad x-25=0$ या $x+20=0$

$\Rightarrow \quad x=25$ या $x=-20$

$\because$ विद्यार्थियों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती,अतः $x=25$ होगा।

$\therefore$ पिकनिक पर जाने वाले विद्यार्थियों की संख्या $x-5=25-5=20$ होगी।

उदाहरणः–10. एक व्यक्ति ने 80 रुपये में कुछ किताबें खरीदीं। यदि उसे इतने ही रुपयों में खरीदी हुई किताबों से 4 किताबें ज्यादा मिली होती, तो प्रत्येक किताब की कीमत पहले से एक रुपये कम हो जाती। बताइए उसने कितनी किताबें खरीदी?

हलः– माना कि खरीदी गई किताबों की संख्या x है,

$\because$ x किताबों की कीमत = 80 रुपये

$\therefore$ 1 किताब की कीमत = $\frac{80}{x}$ रुपये

यदि उसे 4 किताबें और मिली होतीं तब किताबों की संख्या $x+4$ हो जाती

$\because$ $x+4$ किताबों की कीमत = 80 रुपये

$\therefore$ 1 किताब की कीमत = $\frac{80}{x+4}$ रुपये

प्रश्न के अनुसार $\frac{80}{x+4}$ रुपये, $\frac{80}{x}$ रुपये से 1 रुपये कम है–

$$\therefore \quad \frac{80}{x}-1=\frac{80}{x+4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{80}{x}-\frac{80}{x+4}=1$$

$$\Rightarrow \quad 80\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right]=1$$

$\Rightarrow \quad 80\left[\dfrac{x+4-x}{x(x+4)}\right]=1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{80\times 4}{(x^2+4x)}=1$

$\Rightarrow \quad 320=x^2+4x$

$\Rightarrow \quad x^2+4x-320=0$

$\Rightarrow \quad x^2+20x-16x-320=0$

$\Rightarrow \quad x(x+20)-16(x+20)=0$

$\Rightarrow \quad (x+20)(x-16)=0$

$\Rightarrow \quad (x+20)=0$ या $(x-16)=0$

$\Rightarrow \quad x=-20$ (अग्राह्य) या $x=16$

अतः किताबों की संख्या = 16

द्विघात (वर्ग) समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाकर हल करना

अब तक हमने द्विघात (वर्ग) समीकरणों को गुणनखंड विधि से हल करना सीखा है। यहाँ हम एक अन्य विधि की चर्चा करेंगे। इस विधि में समीकरण को $(x-a)^2$ या $(x+a)^2$ के रूप में परिवर्तित करते हैं। ऐसा करने के लिए हमें समीकरण के दोनों पक्षों में कुछ विशेष पदों को जोड़ने की आवश्यकता होती है।

निम्नलिखित उदाहरणों में इस विधि का उपयोग किया गया है–

उदाहरण :–11. वर्ग समीकरण $x^2+6x=0$ को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए ।

हल:– $\quad x^2+6x=0$

$\Rightarrow \quad x^2+2x\times 3=0$

समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए $2x$ के गुणांक 3 के वर्ग को दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad x^2+2x\times 3+3^2=3^2$

$\Rightarrow \quad x^2+2\times x\times 3+3^2=9$

$\Rightarrow \quad (x+3)^2=9$ (सर्वसमिका $x^2+2xa+a^2=(x+a)^2$ के द्वारा)

$\Rightarrow \quad x+3=\pm\sqrt{9}$

$\Rightarrow \quad x+3=\pm 3$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$\Rightarrow \quad x+3=+3$ $\Rightarrow \quad x=3-3$ $\Rightarrow \quad x=0$	$x+3=-3$ $x=-3-3$ $x=-6$

हम देख सकते हैं कि x^2+6x में उभयनिष्ठ होने से हम समीकरण को $x(x+6)=0$ लिख सकते हैं। इसमें स्पष्ट है $x=0$ अथवा $x=-6$ अतः कोई भी तरीका उपयोग करें सवाल का हल नहीं बदलेगा।

उदाहरणः–12. वर्ग समीकरण $x^2-6x+5=0$ को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए ।

हलः– $x^2-6x+5=0$

$\Rightarrow \quad x^2-2x\times3+5=0$

$\Rightarrow \quad x^2-2x\times3=-5$

समीकरण के दोनों पक्षों में $2x$ के गुणांक 3 का वर्ग जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad x^2-2x\times3+3^2=-5+3^2$

$\Rightarrow \quad (x-3)^2=-5+9 \qquad \left[\because x^2-2xa+a^2=(x-a)^2\right]$

$\Rightarrow \quad (x-3)^2=4$

$\Rightarrow \quad x-3=\pm\sqrt{4}$

$\Rightarrow \quad x-3=\pm2$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$\Rightarrow \quad x-3=+2$ $\Rightarrow \quad x=2+3$ $\Rightarrow \quad x=5$	$x-3=-2$ $x=-2+3$ $x=1$

इसमें बहुपद x^2-6x+5 के मध्य पद को तोड़कर हम देखते हैं कि $(x-5)(x-1)=0$ समीकरण है अतः $x=5$ व $x=1$ मूल हैं। किन्तु यहाँ उभयनिष्ठ नहीं मिलता।

उदाहरणः–13. वर्ग समीकरण $x^2-\frac{5}{2}x-3=0$ को हल कीजिए।

हलः– $x^2-\frac{5}{2}x-3=0$

$\Rightarrow \quad x^2-\frac{5}{2}x=3$

$\Rightarrow \quad x^2-2x\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=3$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x \times \frac{5}{4} = 3$

$2x$ के गुणांक $\frac{5}{4}$ का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x \times \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 3 + \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} + 3$

$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25+48}{16}$

$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{73}{16}$

$\Rightarrow \quad x - \frac{5}{4} = \pm\sqrt{\frac{73}{16}}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{73}{16}}$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{73}{16}}$	$x = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{73}{16}}$
$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{73}}{4}$	$x = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{73}}{4}$
$\Rightarrow \quad x = \frac{5+\sqrt{73}}{4}$	$x = \frac{5-\sqrt{73}}{4}$

क्या इस समीकरण का हल बहुपद में से उभयनिष्ठ बहुपद ढूँढकर अथवा मध्यपद को तोड़कर निकाल सकते हैं?

उदाहरणः–14. वर्ग समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ को हल कीजिए।

हलः– $\quad 2x^2 - 7x + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x^2 - 7x = -3$

समीकरण के दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर

$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \left[\because \frac{7}{2} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = 2 \times \frac{7}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x \times \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

($2x$ के गुणांक $\frac{7}{4}$ का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर)

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16} \qquad \left[\because x^2 - 2xa + a^2 = (x-a)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-24 + 49}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{7}{4} = \pm\sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$\Rightarrow \quad x - \frac{7}{4} = +\frac{5}{4}$	$x - \frac{7}{4} = -\frac{5}{4}$
$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} + \frac{7}{4}$	$x = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4}$
$\Rightarrow \quad x = \frac{12}{4}$	$x = \frac{2}{4}$
$\Rightarrow \quad x = 3$	$x = \frac{1}{2}$

क्या इसे मध्य पद को तोड़कर हल कर सकते हैं? करके देखें।

करके देखें

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए–

(i) $x^2 - \frac{3}{4}x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

(iii) $9x^2 - 15x + 6 = 0$

उदाहरणः—15. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}}$ को हल कीजिए।

हलः— माना कि $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}}$

$\Rightarrow \quad x=\sqrt{6+x}$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$\Rightarrow \quad x^2=\left(\sqrt{6+x}\right)^2$

$\Rightarrow \quad x^2=6+x$

$\Rightarrow \quad x^2-x-6=0$

$\Rightarrow \quad x^2-3x+2x-6=0$

$\Rightarrow \quad x(x-3)+2(x-3)=0$

$\Rightarrow \quad (x-3)(x+2)=0$

$\Rightarrow \quad (x-3)=0$ या $(x+2)=0$

$\Rightarrow \quad x=3$ या $x=-2$

अतः $x=3,-2$

प्रश्नावली – 3

1. निम्नलिखित समीकरणों को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए—

   (i) $2x^2+x-4=0$ (ii) $3x^2+11x+10=0$

   (iii) $5x^2-6x-2=0$ (iv) $x^2-4\sqrt{2}x+6=0$

   (v) $3x^2+2x-1=0$ (vi) $x^2-4x+3=0$

2. $\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7\ldots\ldots\ldots}}}}$ को हल कीजिए।
3. दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग 85 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 20 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. दो संख्याओं का योग 48 तथा उनका गुणनफल 432 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 165 वर्ग मीटर है। यदि समकोण त्रिभुज के शीर्षलंब की लंबाई उसकी आधार भुजा से 7 मीटर अधिक हो तो शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।
7. फलों की आयताकार क्यारी का परिमाप 76 मीटर तथा क्षेत्रफल 357 वर्गमीटर है। क्यारी की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
8. एक आयताकार पार्क का क्षेत्रफल 100 वर्गमीटर है। पार्क की लंबाई उसकी चौड़ाई से 15 मीटर अधिक है। पार्क के चारों ओर तार की जाली का घेरा लगवाया जाना है। यदि एक वर्गमीटर तार की जाली की कीमत 5 रुपये है, तब पार्क के चारों ओर तार की जाली लगाने की लागत ज्ञात कीजिए।

9. एक व्यक्ति और उसके पुत्र की वर्तमान आयु का योग 45 वर्ष है। 5 वर्ष पूर्व दोनों की आयु का गुणनफल उस व्यक्ति की आयु का 4 गुना था। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
10. नीलमणि की 5 वर्ष पूर्व की आयु तथा 8 वर्ष पूर्व की आयु का गुणनफल 40 है। नीलमणि की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
11. कुछ विद्यार्थियों ने पिकनिक में जाने की योजना बनाई। उन्होंने भोजन पर व्यय के लिए 480 रुपये इकट्ठे किये, लेकिन उनमें से 8 विद्यार्थी पिकनिक में नहीं जा पाए, जिससे प्रत्येक विद्यार्थी को भोजन पर व्यय के लिए 10 रुपये अधिक देने पड़े। बताइए कि पिकनिक पर कितने विद्यार्थी गए?
12. कक्षा 10 की टेस्ट परीक्षा में कमल के अंग्रेजी और गणित विषयों के प्राप्तांकों का योग 40 है। यदि गणित विषय में उसके प्राप्तांक पहले की तुलना में 3 अधिक और अंग्रेजी विषय में प्राप्तांक पहले की तुलना में 4 कम हो जाए तो उसके दोनों विषयों के प्राप्तांकों का गुणनफल 360 हो जाता है। गणित और अंग्रेजी में कमल के प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

भारतीय गणितज्ञ श्रीधराचार्य

श्रीधराचार्य एक चर वाले द्विघातीय (वर्ग) समीकरण को हल करने वाले प्रथम भारतीय गणितज्ञ थे। इन्होंने अंकगणित, ज्यामिति, वर्गमूल तथा घनमूल इत्यादि क्षेत्रों में भी कार्य किया था। ब्रह्मगुप्त (628 ई.) एवं भास्कराचार्य (1150 ई.) के बीच के काल में श्रीधराचार्य (750 ई.) सर्वमान्य गणितज्ञ थे। श्रीधराचार्य के बारे में कहा गया है कि उत्तर में हिमालय से दक्षिण के मलयपर्वत तक और पूर्व तथा पश्चिमी समुद्र की सीमा तक श्रीधराचार्य की तुलना का कोई गणितज्ञ नहीं रहा है। इन्होने वर्ग समीकरण के लिए
निम्न सूत्र दिया :–

चतुराहत वर्ग समै रूपैः पक्ष द्वयं गुणयेत्।
अव्यक्त वर्ग रूपैर्युक्तौ पक्षौततो मूलम्।।

– पाटी गणित एवं गणित के इतिहास से
लेखक – वेणुगोपाल एवं डॉ. हेरर

E6CT43

वर्ग समीकरण हल करने का सूत्र :–

द्विघात (वर्ग) समीकरण का मानक रूप $ax^2+bx+c=0$ होता है, जहाँ a,b,c वास्तविक संख्याएँ और $a\neq 0$

x^2 के गुणांक से समीकरण में भाग करने पर

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$\Rightarrow \quad x^2 + 2.\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$ ($2x$ के गुणांक का वर्ग करके दोनों पक्षों में जोड़ने पर)

$\Rightarrow \quad x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$

$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}$

$\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ (वर्गमूल लेने पर)

$\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

सोचें एवं चर्चा करें

$3x^2 + 7x + 1 = 0$ को किस–किस विधि से हल किया जा सकता है? क्या सबसे हल एक जैसे आएगा? पूर्ण वर्ग विधि व मध्य पद तोड़ने की विधि क्यों आसान नहीं है?

आइए अब वर्ग समीकरण हल करते हैं

उदाहरणः–16. वर्ग समीकरण $(x-1)(2x-1) = -2$ को हल कीजिए।

हलः– $(x-1)(2x-1) = -2$

$\Rightarrow \quad 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$

समीकरण की तुलना मानक समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 2, b = -3, c = 1$

सूत्र $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ में मान रखने पर

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times1}}{2(2)}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}$$

$$x=\frac{3\pm1}{4}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x=\frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}$ $x=1$	$x=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}$ $x=\frac{1}{2}$

अतः $x=1,\frac{1}{2}$ समीकरण के मूल हैं।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिएः–

(*i*) $3x^2-2x+2=0$ (*ii*) $x^2-2x+1=0$

द्विघात (वर्ग) समीकरण के विभेदक (विविक्तकर) (Discriminant of Quadratic Equation)

द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ में $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ होता है। सूत्र में b^2-4ac को ही द्विघात (वर्ग) समीकरण का विभेदक (विविक्तकर) कहा जाता है। इसे $D=b^2-4ac$ लिखा जाता है। इसे विभेदक इसलिए कहते हैं कि यह द्विघातीय समीकरण के दोनों हलों के बीच विभेद करता है। यह शून्य हो तो दोनों हल बराबर होते हैं।

आइए कुछ द्विघात समीकरणों के विभेदक ज्ञात करना सीखते हैं–

उदाहरणः–17. वर्ग समीकरण $4x^2-4x+1=0$ का विभेदक ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $4x^2-4x+1=0$ की तुलना मानक वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

यहाँ $a=4, b=-4, c=1$

विभेदक $D=b^2-4ac$

$D=(-4)^2-4\times4\times1$

$D=16-16$

$D=0$

उदाहरणः–18. वर्ग समीकरण $2x^2+5x+5=0$ का विभेदक ज्ञात कीजिए।

हलः– $2x^2+5x+5=0$ की तुलना मानक वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

यहाँ $a=2, b=5, c=5$

$\because$ $D=b^2-4ac$

$D=5^2-4\times2\times5$

$D=25-40$

$D=-15$

उदाहरणः–19. वर्ग समीकरण $3x^2-2\sqrt{8}x+2=0$ का विभेदक ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $3x^2-2\sqrt{8}x+2=0$ की तुलना मानक वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ से करने पर $a=3, b=-2\sqrt{8}, c=2$

$\because$ $D=b^2-4ac$

$D=\left(-2\sqrt{8}\right)^2-4\times3\times2$

$D=4\times8-24$

$D=32-24$

$D=8$

करके देखें

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों के विभेदक ज्ञात कीजिए–

(i) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ (ii) $16x^2+24x+9=0$

(iii) $9x^2-10x+15=0$ (iv) $x^2+16x+64=0$

वर्ग समीकरण के मूलों की प्रकृति (Nature of Roots of Quadratic Equation):–

ऊपर के उदाहरणों में हमने विभिन्न वर्ग समीकरणों के विभेदक सूत्र $D = b^2 - 4ac$ की सहायता से प्राप्त किए। उदाहरणों में D के मान क्रमशः 0, –15, 8 प्राप्त हुए। D के ये मान शून्य, ऋणात्मक एवं धनात्मक संख्या के रूप में प्राप्त हुए हैं। इसका अर्थ है कि विभेदक शून्य, ऋणात्मक या धनात्मक हो सकते हैं। क्या ऐसा होने से वर्ग समीकरण के मूलों के बारे में कोई खास जानकारी मिलती है? आइए इसका पता लगाते हैं।

$\because$ $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a,b,c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ के मूल ज्ञात करने का सूत्र निम्न है–

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

यहाँ $b^2 - 4ac = D$ है,

अर्थात

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

> $D = b^2 - 4ac$ मूलों की प्रकृति में विभेद (अन्तर) करता है। इसलिए इसे विभेदक या विविक्तकर कहा जाता है।

अब निम्न तीन स्थितियों की चर्चा करते हैं:–

स्थिति–1 यदि $D = 0$ तब

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x = \frac{-b+0}{2a} = \frac{-b}{2a}$	$x = \frac{-b-0}{2a} = \frac{-b}{2a}$

यहाँ x के दोनों मान अर्थात मूल वास्तविक संख्याएँ हैं और समान भी हैं।

निष्कर्ष :– यदि D=0 हो तब वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक व समान होते हैं।

स्थिति–2 यदि $D =$ कोई धनात्मक संख्या हो, तब

माना $D = 49$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{49}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm 7}{2a}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x = \frac{-b + 7}{2a}$	$x = \frac{-b - 7}{2a}$

यहाँ x के दोनों मान अर्थात मूल वास्तविक संख्याएँ हैं और असमान हैं।

निष्कर्ष :– यदि D>0 अर्थात धनात्मक हो तब वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक व असमान होते हैं।

स्थिति–3 यदि $D =$ कोई ऋणात्मक संख्या हो , तब

जैसे $D = -81$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-81}}{2a}$$

ऋणात्मक संख्याओं का वर्गमूल अधिकल्पित या काल्पनिक होता है।

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x = \frac{-b + \sqrt{-81}}{2a}$	$x = \frac{-b - \sqrt{-81}}{2a}$

यहाँ x के दोनों मान अर्थात मूल असमान हैं लेकिन ऋणात्मक संख्या के वर्गमूल होने के कारण काल्पनिक हैं।

निष्कर्ष :– यदि D<0 अर्थात ऋणात्मक हो तब वर्ग काल्पनिक एवं असमान होते हैं।

मूलों की प्रकृति पहचानना

अब हम कुछ उदाहरणों से वर्ग समीकरण के मूलों की प्रकृति की पहचान करना सीखेंगे–

उदाहरणः–20. $x^2 - 4x + 4 = 0$ के मूलों की प्रकृति बताइए।

हलः– $x^2 - 4x + 4 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 1, b = -4, c = 4$

विभेदक $D = b^2 - 4ac$ में मान रखने पर

$$D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$D = 16 - 16$$

$$D = 0$$

$\because$ दिए गए वर्ग समीकरण का विभेदक शून्य है, अतः इस समीकरण के दोनों मूल समान हैं।

उदाहरणः–21. वर्ग समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ के मूलों की प्रकृति बताइए।

हलः– वर्ग समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 1, b = -5, c = 6$

विभेदक $D = b^2 - 4ac$ में मान रखने पर

$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$

$D = 25 - 24$

$D = 1$

$D > 0$ (धनात्मक)

चूँकि दिए गए वर्ग समीकरण का विभेदक धनात्मक है अतः इस समीकरण के दोनों मूल वास्तविक एवं असमान होंगे।

उदाहरणः–22. वर्ग समीकरण $4x^2 - x + 1 = 0$ के मूलों की प्रकृति बताइए।

हलः– वर्ग समीकरण $4x^2 - x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर–

$a = 4, b = -1, c = 1$

विभेदक $D = b^2 - 4ac$ में मान रखने पर

$D = (-1)^2 - 4 \times 4 \times 1$

$D = 1 - 16$

$D = -15$ (ऋणात्मक)

चूँकि दिए गए वर्ग समीकरण का विभेदक ऋणात्मक है अतः इस समीकरण के दोनों मूल काल्पनिक एवं असमान होंगे।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए–

(i) $x^2 + x + 2 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 1 = 0$

(iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$ (iv) $2y^2 - 2\sqrt{6}y + 3 = 0$

द्विघात समीकरण के अचर गुणांक पता करना

मूलों की प्रकृति के आधार पर किसी द्विघात समीकरण में चर के अचर गुणांक का मान ज्ञात कर सकते हैं। इसे निम्नलिखित उदाहरण से समझते हैं–

उदाहरणः–23. द्विघात समीकरण $9x^2 + 3kx + 4 = 0$ में k का मान ज्ञात कीजिए। यदि वर्ग समीकरण के मूल समान हैं।

हलः– द्विघात समीकरण $9x^2 + 3kx + 4 = 0$ की तुलना द्विघात(वर्ग) समीकरण के मानक रूप

$ax^2+bx+c=0$ से करने पर $a=9, b=3k, c=4$

$D=b^2-4ac$ में मान रखने पर

$D=(3k)^2-4\times 9\times 4$

$D=9k^2-144$

मूल समान होने पर $D=0$ होता है।

अर्थात $9k^2-144=0$

$9k^2=144$

$k^2=\frac{144}{9}$

$k^2=16$

$k=\pm 4$

यदि मूल असमान व वास्तविक हों तो k के मान के बारे में हम क्या कह सकते हैं?

करके देखें

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों में k का मान ज्ञात कीजिए जिससे वर्ग समीकरण के मूल वास्तविक एवं समान हों :–

(i) $16x^2+kx+9=0$ (ii) $3x^2-2\sqrt{8}x+k=0$

(iii) यदि इन दोनों सवालों में मूल काल्पनिक हों तो k के बारे में हम क्या कह सकते हैं?

प्रश्नावली – 4

1. निम्नलिखित समीकरणों के विभेदक ज्ञात कीजिए–

(i) $x^2-4x+2=0$ (ii) $(x-1)(2x-1)=0$

(iii) $\sqrt{3}x^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{3}=0$ (iv) $x^2-4x+a=0$

(v) $x^2+px+qx=0$

2. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए–

(i) $x^2-4x+4=0$ (ii) $2x^2+2x+2=0$

(iii) $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ (iv) $x^2+2\sqrt{5}x-1=0$

(v) $\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$

3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक व समान हों–

(i) $2x^2-10x+k=0$ (ii) $kx^2-5x+k=0$

(iii) $2x^2+kx+\frac{9}{8}=0$ (iv) $9x^2-kx+16=0$

(vi) $kx^2+4x+1=0$

4. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों को सूत्र की सहायता से हल कीजिए –

(i) $9x^2+7x-2=0$ (ii) $6x^2+x-2=0$

(iii) $6x^2+7x-10=0$ (iv) $2x^2-9x+7=0$

(v) $x^2-7x-5=0$ (vi) $4-11x=3x^2$

(vii) $9x^2-4=0$ (viii) $\sqrt{3}x^2-10x-8\sqrt{3}=0$

(ix) $2x^2+x-6=0$ (x) $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$

E6LP5Q

द्विघात समीकरण के मूल एवं गुणांकों में संबंध –

द्विघातीय बहुपद में हमने बहुपद के शून्यक एवं गुणांकों में संबंध देखा था, वही संबंध द्विघातीय समीकरणों के मूलों एवं गुणांकों में भी होता है।

माना समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α एवं β हैं ,जहाँ $a\neq 0; a,b,c$ वास्तविक संख्या है। तब $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ या $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ वर्ग समीकरण होगा।........................(1) वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है–

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \text{ ....(2)}$$

हम देखते हैं कि समीकरण (1) व (2) दोनों ही एक ही समीकरण के दो रूप हैं अतः इनकी तुलना करने पर हम पातें हैं ,

मूलों का योगफल $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

तथा मूलों का गुणनफल $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

उदाहरणः–24. $x^2-5x-24=0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $x^2-5x-24=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

$$a=1, b=-5, c=-24$$

$\because$ मूलों का योगफल $=\frac{-b}{a}$

$\therefore$ मूलों का योगफल $= \frac{-(-5)}{1}$

$= \frac{5}{1}$

$= 5$

$\because$ मूलों का गुणनफल $= \frac{c}{a}$

$\therefore$ मूलों का गुणनफल $= \frac{-24}{1}$

$= -24$

उदाहरणः—25. $3x^2 + 2x + 7 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः— समीकरण $3x^2 + 2x + 7 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 3, b = 2, c = 7$

$\because$ मूलों का योगफल $= \frac{-b}{a}$

$\therefore$ मूलों का योगफल $= \frac{-2}{3}$

$\because$ मूलों का गुणनफल $= \frac{c}{a}$

$\therefore$ मूलों का गुणनफल $= \frac{7}{3}$

सोचें एवं चर्चा करें

मूल ज्ञात होने पर क्या वर्ग समीकरण बनाया जा सकता है? "बहुपद" अध्याय की अवधारणाओं एवं मूल व गुणांकों के संबंधों के आधार पर वर्ग समीकरण के बनाए जा सकने की संभावनाओं की चर्चा अपने साथियों से करें।

मूल ज्ञात होने पर द्विघात समीकरण बनानाः—

हमने इस अध्याय में अब तक द्विघात समीकरण दिए होने पर उसके मूल ज्ञात करना सीखा है। यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल पता हों तब क्या यह संभव है कि हम उस द्विघात समीकरण को ज्ञात कर सकें।

हाँ, हम द्विघात समीकरण के मूलों के योगफल एवं गुणनफल की सहायता से द्विघात समीकरण को ज्ञात कर सकते हैं अर्थात मूल दिए होने पर हम द्विघात समीकरण भी बना सकते हैं।

यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल α एवं β हों तब वह द्विघात समीकरण निम्नलिखित होगा –

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

अर्थात् x^2-(मूलों का योग)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

उदाहरणः–26. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल 3 व –8 हैं।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

$\Rightarrow$ x^2-(मूलों का योग)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

$$\Rightarrow \quad x^2-[3+(-8)]x+3\times(-8)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-(-5)x+(-24)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+5x-24=0$$

उदाहरणः–27. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{4}{3}$ व $\frac{7}{3}$ हों।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

$\Rightarrow$ x^2-(मूलों का योग)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

$$\Rightarrow \quad x^2-\left(\frac{4}{3}+\frac{7}{3}\right)x+\frac{4}{3}\times\frac{7}{3}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-\frac{11}{3}x+\frac{28}{9}=0$$

$$\Rightarrow \quad 9x^2-33x+28=0$$

उदाहरणः–28. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\left(2+\sqrt{7}\right)$ व $\left(2-\sqrt{7}\right)$ हैं।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

$\Rightarrow$ x^2-(मूलों का योग)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

$$\Rightarrow \quad x^2-\left[2+\sqrt{7}+2-\sqrt{7}\right]x+\left(2+\sqrt{7}\right)\left(2-\sqrt{7}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-4x+4-7=0 \qquad \because (2)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=4-7$$

$$\Rightarrow \quad x^2-4x-3=0$$

उदाहरणः–29. यदि किसी वर्ग समीकरण के मूलों का योगफल = – 8 तथा गुणनफल = 4 हों तो वर्ग समीकरण बनाइए।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

$\Rightarrow$ x^2-(मूलों का योग)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

$$\Rightarrow \quad x^2-(-8)x+4=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+8x+4=0$$

करके देखें

वर्ग (द्विघात) समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्नलिखित हैं –

(i) $2, 3$ (ii) $-5, -3$ (iii) $\sqrt{5}, \sqrt{3}$

प्रश्नावली – 5

E6VK7D

1. वर्ग समीकरण बनाइए जिनके मूलों के योगफल व गुणनफल निम्नलिखित हैं –

(i) मूलों का योगफल $= -4$ मूलों का गुणनफल $= -12$

(ii) मूलों का योगफल $= 6$ मूलों का गुणनफल $= -9$

(iii) मूलों का योगफल $= 2\sqrt{7}$ मूलों का गुणनफल $= 8$

(iv) मूलों का योगफल $= \frac{4}{9}$ मूलों का गुणनफल $= 1$

2. वर्ग समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्नलिखित हैं–

(i) $7, 4$ (ii) $-5, -11$ (iii) $-2, 4$ (iv) $12, -24$

(v) $\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}$ (vi) $4, 4$ (vii) $\frac{-1}{3}, \frac{2}{5}$ (viii) $8, 3$

(ix) $\sqrt{3}-7, \sqrt{3}+7$ (x) $6+\sqrt{5}, 6-\sqrt{5}$

3. निम्नलिखित वर्ग (द्विघात) समीकरणों के मूलों के योगफल व गुणनफल ज्ञात कीजिए –

(i) $3x^2 + 7x + 1 = 0$ (ii) $2x^2 - 2x + 3 = 0$

(iii) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ (iv) $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

(v) $x^2 + 6x - 6 = 0$

हमने सीखा

1. cgqn ax^2+bx+c, घात 2 का एक चर का बहुपद है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ और $a \neq 0$ है। इसे द्विघातीय बहुपद कहते हैं। इस द्विघातीय बहुपद को शून्य के बराबर रखने पर यह समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ बन जाता है। चूँकि समीकरण में एक ही चर है और चर की अधिकतम घात 2 है अतः इसे एक चर का द्विघात समीकरण कहते हैं।
2. द्विघात समीकरण को वर्ग समीकरण भी कहते हैं।
3. चर x में किसी द्विघात समीकरण का मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ है जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ तथा $a \neq 0$ है।

4. $ax^2+bx+c=0$ के रूप के द्विघात समीकरण के दो ही मूल होते हैं।

5. , d pj x में द्विघात समीकरण के मूल गुणनखंडन से तथा द्विघात समीकरण के सूत्र $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ में a,b,c के मान रखकर भी x के मान प्राप्त किए जा सकते हैं।

6. किसी द्विघात समीकरण के मूल α व β हों तब वह द्विघात समीकरण चर x में $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ होता है।
(यहाँ कोई भी चर y, z आदि ले सकते हैं।)

7. यदि वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α व β हों तो उनके मूलों एवं गुणांकों में निम्नलिखित संबंध होता है –

मूलों का योगफल $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

तथा मूलों का गुणनफल $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ होता है।

8. द्विघात समीकरण के सूत्र में $D=b^2-4ac$ विभेदक है जिससे हम मूलों की प्रकृति के बारे में जान पाते हैं।

9. जब $D = b^2 - 4ac > 0$ अर्थात D का मान धनात्मक हो तो वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक व असमान होते हैं।

10. जब $D = b^2 - 4ac = 0$ अर्थात D का मान 0 हो तो वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक और समान होते हैं।

11. जब $D = b^2 - 4ac < 0$ अर्थात D का मान ऋणात्मक हो तो वर्ग समीकरण के दोनों मूल काल्पनिक और असमान होते हैं।

उत्तरमाला – 1

1. (i), (iii), (v), (vi), (vii), (x) वर्ग समीकरण हैं।

उत्तरमाला – 2

1. (i) $x=2, x=-\frac{3}{2}$ समीकरण के मूल नहीं हैं।

(ii) $x=2$ समीकरण का मूल है परन्तु $x=-3$ समीकरण का मूल नहीं हैं।

(iii) $x=-3, x=4$ समीकरण के मूल नहीं हैं।

(iv) $x=0, x=\frac{9}{4}$ समीकरण के मूल हैं।

(v) $x=\sqrt{3}$ समीकरण का मूल है परन्तु $x=-2\sqrt{3}$ समीकरण का मूल नहीं हैं।

2. (i) $x=4, x=2$ (ii) $x=-\frac{3}{2}, x=\frac{7}{3}$ (iii) $x=7, x=7$

(iv) $x=0, x=11$ (v) $x=-12, x=-12$ (vi) $x=0, x=-1$

3. $x=\sqrt{2}$ समीकरण का एक मूल नहीं है।

4. (i) $x=\frac{2}{3}, x=-\frac{1}{3}$ (ii) $x=0, x=-\frac{5}{4}$ (iii) $x=\frac{5}{3}, x=2$

(iv) $x=\frac{2}{5}, x=-1$ (v) $x=-\frac{2}{3}, x=-\frac{1}{2}$ (vi) $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}, x=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(vii) $x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{5}$ (viii) $x=3\sqrt{2}, x=\sqrt{2}$

(ix) $x=-\frac{b}{a}, x=\frac{c}{b}$ (x) $x=5, x=-\frac{1}{5}$

उत्तरमाला – 3

1. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-5}{3}, -2$ (iii) $\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}$

(iv) $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$ (v) $\frac{1}{3}, -1$ (vi) $3, 1$

2. $\frac{1+\sqrt{29}}{2}, \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

3. क्रमागत प्राकृत संख्याएँ 6,7

4. क्रमागत प्राकृत संख्याए 4,5

5. संख्याएँ 36,12

6. आधार भुजा की लंबाई = 15 मीटर, शीर्षलंब की लंबाई = 22 मीटर

7. 21मीटर, 17मीटर

8. 250 रुपये,

9. 36 वर्ष, 9 वर्ष

10. 13 वर्ष

11. 16 विद्यार्थी

12. 12, 28 या 21, 19

उत्तरमाला – 4

1. (i) 8 (ii) 1 (iii) 32 (iv) $16-4a$ (v) p^2-4q

2. (*i*) वास्तविक और समान मूल (*ii*) मूल वास्तविक नहीं

(*iii*) वास्तविक और समान मूल (*iv*) मूल वास्तविक तथा असमान

(*v*) मूल वास्तविक नहीं

3. (*i*) $k=\frac{25}{2}$ (*ii*) $k=\pm\frac{5}{2}$ (*iii*) $k=\pm 3$

(*iv*) $k=\pm 24$ (*vi*) $k=4$

4. (*i*) $\frac{2}{9},-1$ (*ii*) $\frac{1}{2},-\frac{2}{3}$ (*iii*) $-2,\frac{5}{6}$ (*iv*) $\frac{7}{2},1$

(*v*) $\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{69}\right),\frac{1}{2}\left(7-\sqrt{69}\right)$ (*vi*) $-4,\frac{1}{3}$ (*vii*) $\frac{2}{3},\frac{-2}{3}$

(*viii*) $\frac{12}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{3}}$ (*ix*) $-2,\frac{3}{2}$ (*x*) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

उत्तरमाला – 5

1. (i) $x^2+4x-12=0$ (ii) $x^2-6x-9=0$

(iii) $x^2-2\sqrt{7}x+8=0$ (iv) $9x^2-4x+9=0$

2. (i) $x^2-11x+28=0$ (ii) $x^2-16x+55=0$

(iii) $x^2-2x-8=0$ (iv) $x^2+12x-288=0$

(v) $x^2-\frac{1}{5}x-\frac{12}{25}=0$ (vi) $x^2-8x+16=0$

(vii) $15x^2-x-2=0$ (viii) $x^2-11x+24=0$

(ix) $x^2-2\sqrt{3}x-46=0$ (x) $x^2-12x+31=0$

3. (i) $\frac{-7}{3},\frac{1}{3}$ (ii) $1,\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{5}{3},\frac{-2}{3}$

(iv) $\sqrt{6},\frac{3}{2}$ (v) $-6,-6$

अध्याय 04

समान्तर श्रेढ़ी

[ARITHMETIC PROGRESSION]

E75G91

संख्याओं के पैटर्न

नीचे दी गई संख्याओं को देखिए–

2, 4, 6, 8, 10, ...

क्या आपको इसमें कुछ निश्चित क्रम अथवा पैटर्न दिखाई देता है?

सलमा – इसमें प्रत्येक संख्या अपने से बाद की संख्या से 2 कम है।

मोहन – इसमें प्रत्येक संख्या 2 की क्रमवार गुणज है। 2 को 1 से गुणा करने पर 2, 2 को 2 से गुणा करने पर 4, 2 को 3 से गुणा करने पर 6 और इसी तरह आगे ....

जॉन – इसमें पहली संख्या 2 को दो गुना करने पर दूसरी संख्या 4, दूसरी संख्या 4 का डेढ़ गुना करने पर तीसरी संख्या 6 मिलती है।

आप देख सकते हैं कि जॉन के पैटर्न में प्रत्येक संख्या के लिए अलग–अलग नियम होगा जबकि सलमा और मोहन के पैटर्न में एक ही नियम से सभी संख्याएँ बनेंगी।

अब आप नीचे दी गई संख्याओं को देखिए–

6, 11, 16, 21, ...

आप कह सकते हैं कि इसमें पहली संख्या को छोड़कर प्रत्येक संख्या अपनी पिछली संख्या में 5 जोड़ने पर मिलती है।

क्या इनमें कोई और भी पैटर्न मिल सकता है? (चर्चा करें)।

नीचे संख्याओं के कुछ और उदाहरण दिए जा रहे हैं–

1. –5, –7, –9, –11, –13, ...
2. 4, 9, 14, 19, ...
3. 3, 7, 11, 15, ...

श्रेढ़ी क्या है?

इनमें आप देख सकते हैं कि प्रत्येक श्रृंखला की संख्याएँ अपने से पिछली संख्या से एक निश्चित मात्रा में घटती या बढ़ती है, पहली श्रृंखला में संख्या दो–दो से कम हो रही है जबकि

दूसरी में 5 से और तीसरी में 4 से बढ़ रही है। ऐसी संख्या श्रृंखलाएँ जिनमें क्रमिक संख्याओं के बीच एक निश्चित संबंध हो श्रेढ़ी कहलाती है।

करके देखें

नीचे दी गई सख्याओं की प्रत्येक श्रेढ़ी में क्या पैटर्न है? पहचान कीजिए–

(1) 4, 10, 16, 22, ...

(2) 0, 3, 6, 9, ...

(3) –1, –3, –5, –7, ...

समांतर श्रेढ़ी

आपने देखा कि ऊपर दी गई श्रेढ़ी में पहले पद के बाद प्रत्येक पद, अपने पिछले पद में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त किया जाता है। संख्याओं की ऐसी श्रृंखला समांतर श्रेढ़ी (Arithmetic Progression या A.P.) कहलाती है और यह निश्चित संख्या समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर (common difference) कहलाती है। सार्व अंतर धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

आइए इस समांतर श्रेढ़ी पर विचार करें–

8, 13, 18, 23, ...

इस श्रेढ़ी का प्रथम पद 8 और दूसरा पद 13 है, तीसरा पद 18 और चौथा पद 23 है। प्रत्येक पद में 5 जोड़ने पर अगला पद मिलता है, इसलिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर 5 है।

उदाहरणः–1. समांतर श्रेढ़ी –7, –11, –15, –19, ... के लिए प्रथम पद, चौथा पद और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

हलः– प्रथम पद = –7, चौथा पद = –19

सार्व अंतर = द्वितीय पद–प्रथम पद

$= -11 - (-7)$

$= -4$

करके देखें

1. नीचे दी हुई संख्याओं की श्रृंखला में से समांतर श्रेढ़ी छाँटिए

(i) 9, 16, 23, 30, -----------------

(ii) 11, 15, 18, 20, -----------------

(iii) 4, 13, 19, 28, -----------------

(iv) 0, -3, -6, -9, -----------------

(v) 2, 2, 2, 2, -----------------

(vi) $9\frac{1}{7}, \frac{7}{7}, \frac{9}{7}, \frac{13}{7}, ...$

2. दी हुई समांतर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद और सार्व अंतर लिखिए–

(i) 9, 12, 15, 18, -----------------

(ii) 2, 8, 14, 20, ------------------

(iii) 3, -2, -7, -12, ----------------

(iv) -5, 2, 9, 16, -----------------

(v) 0.4, 0.9, 1.4, 1.9, --------------

(vi) 5, 5, 5, 5, ---------------------

(vii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$,...........

आगे के पद ज्ञात करना

नीचे एक समांतर श्रेढ़ी दी गई है–

3, 10, 17, ...

क्या हम इसके आगे के पद पता कर सकते हैं? सोचें इस समांतर श्रेढ़ी का अगला यानी चौथा पद कैसे ज्ञात करें।

अजीता – तीसरे पद यानी 17 में 7 सार्व अंतर जोड़ने पर 24 मिलता है, यही इस श्रेढ़ी का चौथा पद है।

अब आप इस श्रेढ़ी के अगले चार पद यानी पाँचवे, छठे, सातवें, आठवें पद लिखिए–

पाँचवाँ पद		सातवाँ पद	
छठवाँ पद		आठवाँ पद	

करके देखें

1. नीचे दी गई समांतर श्रेढ़ियों के अगले तीन पद ज्ञात कीजिए।

(i) 5, 11, 17, 23, -----------------

(ii) -11, -8, -5, -2, -----------------

(iii) $\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{10}{9}, \frac{13}{9}$,.......................

(iv) 0, 9, 18, 27, -----------------

समांतर श्रेढ़ी को व्यापक रूप में व्यक्त करना

हमने यहाँ कई समांतर श्रेढ़ियाँ देखीं। प्रत्येक में प्रथम पद और एक सार्व अंतर है। यदि हम समांतर श्रेढ़ी के पहले पद या प्रथम पद को a और सार्व अंतर को d से व्यक्त करें, तो हम आगे के सभी पद a और d के आधार पर बता सकते हैं। समांतर श्रेढ़ी का दूसरा पद, पहले पद में सार्व अंतर d जोड़ने पर मिलेगा यानी दूसरा पद a+d होगा। इसी तरह दूसरे पद a+d में d जोड़ने पर तीसरा पद a+d+d प्राप्त होगा। आप समांतर श्रेढ़ी को इस तरह लिख सकते हैं–

$a, a + d, a + d + d, a + d + d + d, ...$

या

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$

इसे समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप कहते हैं। पदों की संख्या परिमित होने पर इसे परिमित समांतर श्रेढ़ी कहते हैं और पदों की संख्या अपरिमित होने पर यह अपरिमित समांतर श्रेढ़ी कहलाती है।

आप देख सकते हैं कि उदाहरण (1) में दी गई समांतर श्रेढ़ी 7, 11, 15, 19, ... में पदों की संख्या अपरिमित है, इसलिए यह अपरिमित समांतर श्रेढ़ी है।

करके देखें

1. एक अपरिमित समांतर श्रेढ़ी बनाइए, जिसका प्रथम पद 5 और सार्व अंतर 3 हो।
2. 5 पदों वाली दो परिमित समांतर श्रेढ़ियाँ बनाइए।
3. 10 पदों वाली किसी परिमित समांतर श्रेढ़ी की सबसे बड़ी सदस्य संख्या कौनसी होगी यदि $a=11$ और $d=6$?

नोट :– सार्व अंतर का हमेशा प्राकृत संख्या होना आवश्यक नहीं है। सार्व अंतर कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।

उदाहरणः–2. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a=10$, सार्व अंतर $d=-3$ हो, तो श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद लिखिए।

हलः–

प्रथम पद $a=10$

सार्व अंतर $d= -3$

द्वितीय पद $= a+d$

$= 10 + (-3)$

$= 7$

तृतीय पद $= a+2d$

$= 10+2(-3)$

$= 10-6$

$= 4$

अतः श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद 10, 7, 4 है।

समांतर श्रेढ़ी के पहले पद या प्रथम पद को a_1 से, द्वितीय पद को a_2 से, तृतीय पद को a_3 से,.............., n वें पद को a_n से तथा सार्व अंतर (common difference) को d से व्यक्त करें, तो समांतर श्रेढ़ी को $a_1,a_2,a_3,......a_n$ से व्यक्त कर सकते हैं

इस स्थिति में सार्व अंतर $d=a_2-a_1=a_3-a_2=.....a_n-a_{n-1}$ ।

उदाहरणः–3. संख्याओं की निम्नलिखित श्रृंखलाओं में से कौन–कौन सी समांतर श्रेढ़ी में है? समांतर श्रेढ़ी के अगले दो पद लिखिए।

(i) 9, 27, 81, ...

(ii) $4, 4+\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}, 4+3\sqrt{3}, ...$

(iii) 1, -1, -3, -5, ...

(iv) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ...

हलः–

(i) $a_1=9,\ a_2=27,\ a_3=81$

$a_2-a_1 = 27 - 9 = 18$

$a_3-a_2 = 81-27 =54$

चूँकि, $a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

(ii) $a_1 = 4, a_2 = 4+\sqrt{3},\ a_3 = 4+2\sqrt{3},\ a_4 = 4+3\sqrt{3},$

$$a_2 - a_1 = 4+\sqrt{3}-4 = \sqrt{3}$$

$$a_3 - a_2 = 4+2\sqrt{3}-(4+\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$a_4 - a_3 = 4+3\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

चूँकि प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ (जहाँ k=1,2,3......) समान ही है, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका सार्व अंतर $d = \sqrt{3}$ है। इस श्रेढ़ी के अगले दो पद

$(4+3\sqrt{3})+(\sqrt{3}) = 4+4\sqrt{3}$ और

$(4+4\sqrt{3})+(\sqrt{3}) = 4+5\sqrt{3}$ हैं।

(iii) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -3, a_4 = -5$

$$a_2 - a_1 = -1-1 = -2$$

$a_3 - a_2 = -3-(-1) = -2$

$a_4 - a_3 = -5-(-3) = -2$

चूँकि प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ (जहाँ k=1,2,3......) समान ही है, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका सार्व अंतर d=–2 है। इस श्रेढ़ी के अगले दो पद

$-5+(-2) = -7$ और $-7+(-2) = -9$ हैं।

(iv) $a_1 = 0.2, a_2 = 0.22, a_3 = 0.222, a_4 = 0.2222$

$a_2 - a_1 = 0.22 - 0.2 = 0.02$

$a_3 - a_2 = 0.222 - 0.22 = 0.002$

चूँकि $a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$ इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

समांतर श्रेढ़ी का **n** वाँ पद

मान लीजिए कि $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots$ एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद a है और सार्व अंतर d है, तब

प्रथम पद $a_1 = a$

द्वितीय पद $a_2 = a + d = a + (2-1)d$

तृतीय पद $a_3 = a + 2d = a + (3-1)d$

चौथा पद $a_4 = a + 3d = a + (4-1)d$

पाँचवाँ पद $a_5 = a + 4d = a + (5-1)d$

उपर्युक्त पैटर्न को देखकर आप कह सकते हैं कि

n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$

यदि किसी समांतर श्रेढ़ी में m पद हैं, तो a_m इसके अंतिम पद को व्यक्त करता है। अंतिम पद को l से भी व्यक्त किया जाता है।

आइए, इसे कुछ उदाहरणों से समझें–

उदाहरणः–4. समांतर श्रेढ़ी 4,7,10,13 .... का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए–

हलः–

यहाँ $a = 4,\ d = 7-4 = 3$ और $n = 10$

$\therefore a_{10} = a + (10-1)d$ [$\because$ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$]

$= 4 + 9 \times 3$

$= 4 + 27$

$= 31$

उदाहरणः—5. समांतर श्रेढ़ी 2,6,10,......... में m पद हैं। अंतिम पद ज्ञात कीजिए।

हलः— यहाँ प्रथम पद a=2, सार्व अंतर d=6-2=4 और पदों की संख्या m है। इसलिए अंतिम पद m होगा। अतः n=m

m वाँ पद $a_m=a+(m-1)d$ $\quad [\because$ n वाँ पद $a_n = a+(n-1)d]$

$a_m=2+(m-1)4$

$= 2+4m-4$

$=4m-2$

करके देखें

1. समांतर श्रेढ़ी 3,5,7,................ में 15 पद हैं। अंतिम पद ज्ञात कीजिए।
2. समांतर श्रेढ़ी –9,–5,–1,............ का अंतिम पद 67 है तो श्रेढ़ी में कितने पद हैं?
3. समांतर श्रेढ़ी 10, 15, 20, ... का m वाँ और p वाँ पद ज्ञात कीजिए।

आइए, ऐसे कुछ और उदाहरणों को समझें–

उदाहरणः—6. क्या समांतर श्रेढ़ी 5,11,17,23,.............. का कोई पद 301 है? कारण सहित लिखिए।

हलः—

यहाँ a=5, $\quad$ d=11-5=6,

माना n वाँ पद 301 है अर्थात् $a_n=301$

हमें n का मान ज्ञात करना है।

$\therefore a_n = a+(n-1)d$

$301 = 5 + (n-1)6$

$301=5+6n-6$

$301 = 6n-1$

$6n = 302$

$$n = \frac{302}{6}$$

$$n = \frac{151}{3}$$

चूँकि n पदों की संख्या है, अतः एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए। इसलिए 301 दी गई समांतर श्रेढ़ी का कोई पद नहीं है।

उदाहरणः–7. एक समांतर श्रेढ़ी में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः–

माना समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है।

तीसरा पद $= 12$

$a_3 = 12$

या, $a + (3-1)\,d = 12$

या, $a + 2d = 12$ .... (1)

और अंतिम पचासवाँ पद $= 106$

50 वाँ पद $= 106$

$a_{50} = 106$

$a + (50-1)\,d = 106$

$a + 49d = 106$ .... (2)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} a & + 49d = & 106 \\ a & + 2d = & 12 \\ - & - & - \\ \hline & 47d = & 94 \end{array}$$

$d = \frac{94}{47}$

$d = 2$ ....(3)

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर

$a + 2\,(2) = 12$

$a + 4 = 12$

$a = 12 - 4$

$a = 8$ ....(4)

समांतर श्रेढ़ी का 29 वाँ पद $= a + (29-1)d$

$= 8 + (28)(2)$

$= 8 + 56$

$= 64$

इसलिए समांतर श्रेढ़ी का 29वाँ पद 64 है।

करके देखें

1. एक समांतर श्रेढ़ी में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इस श्रेढ़ी का 21 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. एक समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 10 और सार्व अंतर –3 है। 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

समांतर श्रेढ़ियाँ कई तरह के सवाल हल करने में भी मदद कर सकती हैं। आइए, इसे भी कुछ उदाहरणों से समझें–

उदाहरणः–8. दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं?

हलः–

5 से विभाज्य होने वाली दो अंकों की संख्याओं की श्रृंखला निम्नानुसार है–

10, 15, 20, ..., 95

यह एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद $a=10$, सार्व अंतर $d=5$ और n वाँ पद $a_n=95$

चूँकि n वाँ पद $a_n = a+(n-1)d$

$$95 = 10 + (n–1) \times 5$$

$$95 = 10 + 5n – 5$$

$$95 = 5+5n$$

$$5n = 95 – 5$$

$$n = \frac{90}{5}$$

$$n = 18$$

इसलिए 5 से विभाज्य दो अंकों वाली 18 संख्याएँ हैं।

उदाहरणः–9. ज्योति ने 1997 में 5000 रुपये के मासिक वेतन वाले पद पर कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष 200 रुपये की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन 7000 रुपये हो गया?

हलः–

वर्ष 1997, 1998, 1999, 2000, ... में मासिक वेतन (रुपये में) है

5000, 5200, 5400, 5600 ....

यह एक समांतर श्रेढ़ी है, क्योंकि किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर 200 है, इसलिए सार्व अंतर $d=200$ और प्रथम पद $a=5000$

माना n वर्षों में ज्योति का वेतन 7000 रुपये हो गया।

तब

$$
\begin{aligned}
a_n &= 7000\\
a + (n-1)d &= 7000\\
5000 + (n-1)\,200 &= 7000\\
(n-1)\,200 &= 7000 - 5000\\
(n-1)\,200 &= 2000\\
n - 1 &= \frac{2000}{200}\\
n - 1 &= 10\\
n &= 11
\end{aligned}
$$

इसलिए ग्यारहवें वर्ष में अर्थात् 2007 में ज्योति का वेतन 7000 रुपये हो गया।

अभी तक आपने ऐसे उदाहरण हल किए जिनमें संख्याओं से बनी श्रृंखलाएँ समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं। अब कुछ ऐसे उदाहरण हल करेंगे जिनमें अक्षर संख्याओं (जैसे p,q,r इत्यादि) से बनी श्रृंखलाएँ समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं।

उदाहरणः–10. एक समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद q और q वाँ पद p है, तो श्रेढ़ी का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः–

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है।

यहाँ,समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद = q

$\therefore a+(p-1)d = q$ ....(1)

समांतर श्रेढ़ी का q वाँ पद = p

$\therefore a+(q-1)d = p$ ....(2)

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर

$$
\begin{aligned}
a + (p-1)d &= q\\
a + (q-1)d &= p\\
\text{घटाने पर} \quad - \quad - \quad & \quad -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[(p-1)-(q-1)]d &= q - p\\
[p-1-q+1]d &= q - p\\
(p-q)\,d &= q - p\\
d &= \frac{-(p-q)}{(p-q)}\\
d &= -1 \qquad .....(3)
\end{aligned}
$$

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$a + (p-1)(-1) = q$$
$$a = q + (p-1)$$
$$a = q + p - 1 \quad .....(4)$$

श्रेढ़ी का m वाँ पद $a_m = a + (m-1)d$

$$= (p+q-1) + (m-1)(-1)$$
$$= p + q - 1 - m + 1$$
$$= p + q - m$$

इसलिए श्रेढ़ी का m वाँ पद $= p + q - m$

प्रश्नावली 1

1. सही विकल्प चुनकर कारण सहित लिखिए–

(i) दी गई समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद और सार्व अंतर है–

$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, ...$

(a) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}, -1$ (c) $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-3}{2}, -1$

(ii) किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद –2 और सार्व अंतर –2 है तो चौथा पद होगा–

(a) 0 (b) –2 (c) –4 (d) –8

(iii) समांतर श्रेढ़ी 7,13,19,.... का 15 वाँ पद होगा–

(a) 91 (b) 97 (c) 112 (d) 90

(iv) किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 4 और सार्व अंतर –4 है तो n वाँ पद होगा–

(a) $8 - 2n$ (b) $4 - 2n$ (c) $8 - 4n$ (d) $8 - 8n$

(v) समांतर श्रेढ़ी 3, 8, 13, 18.... का कौन–सा पद 78 है?

(a) 15 वाँ (b) 16 वाँ (c) 17 वाँ (d) 18 वाँ

2. निम्नलिखित श्रेढ़ियों में कौन–सी समांतर श्रेढ़ी है कारण भी बताइए–

(a) $a, a^2, a^3, a^4, ...$

(b) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, ...$

(c) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, ...$

(d) $0, -4, -8, -12, ...$

(e) $16, 18\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}, 23, ...$

3. समांतर श्रेढ़ी 9,5,1,–3,............. का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

4. समांतर श्रेढ़ी 100, 70, 40,........ का 40वाँ पद ज्ञात कीजिए।

5. समांतर श्रेढ़ी $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, ...$ का n वाँ पद ज्ञात कीजिए।

6. समांतर श्रेढ़ी 950, 900, 850, ... का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।

7. समांतर श्रेढ़ी 8,15,22, ... का अंतिम पद 218 है। पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

8. 27, 24, 21, ... का कौन–सा पद शून्य है?

9. यदि दो समांतर श्रेढ़ियों का सार्व अंतर समान है और इनके 99 वें पदों का अंतर 99 है, तो इनके 999 वें पदों का अंतर क्या होगा? कारण भी बताइए।

10. फूलों की एक क्यारी की पहली पंक्ति में 23 पौधे हैं, दूसरी पंक्ति में 21 पौधे हैं, तीसरी पंक्ति में 19 पौधे हैं, इत्यादि। इस क्यारी की अंतिम पंक्ति में 5 पौधे हैं। क्यारी में कुल कितनी पंक्तियाँ हैं?

11. संजय ने वर्ष के प्रथम सप्ताह में 5 रुपये की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत 1.75 रुपये बढ़ाता गया। यदि n वें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत 20.75 रुपये हो जाती है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

12. क्या समांतर श्रेढ़ी $18, 15\frac{1}{2}, 13, ...$ का एक पद –47 है? यदि हाँ तो कौनसा पद है?

13. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का 11 वाँ पद 38 और 16 वाँ पद 73 है, तो इस श्रेढ़ी का 31 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

14. किसी समांतर श्रेढ़ी का 12 वाँ पद उसके 5 वें पद से 14 अधिक है और दोनों पदों का योग 36 है, तो इस श्रेढ़ी का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।

15. समांतर श्रेढ़ी 3,15,27,39, ... का कौनसा पद उसके 54 वें पद से 132 अधिक होगा?

16. किसी समांतर श्रेढ़ी के चौथे और आठवें पदों का योग 24 है तथा छठे और दसवें पदों का योग 44 है। इस समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

17. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं?

18. समांतर श्रेढ़ी 3,8,13, ..., 253 में अंतिम से 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

19. एक समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ और q वाँ पद $\frac{1}{p}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी के (pq) वें पद का मान 1 है।

20. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद q, q वाँ पद p हो तो सिद्ध कीजिए कि $(p+q)$ वाँ पद शून्य है।

21. यदि a,b,c किसी समांतर श्रेढ़ी के क्रमशः p वें, q वें और r वें पद हैं, तो सिद्ध कीजिए कि–

$$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$$

22. n के किस मान के लिए, समांतर श्रेढ़ियों 63,65,67,...... और 3,10,17.... के n वें पद बराबर होंगे?

समांतर माध्य

मान लीजिए तीन राशियाँ a, A, b समांतर श्रेढ़ी में है, तो बीच की राशि A को दो राशियों a और b का समांतर माध्य (Arithmetic Mean) कहते हैं।

चूँकि a, A, b समांतर श्रेढ़ी में हैं, इसलिए

$$A-a = b-A$$

$$A+A = b+a$$

$$2A = a+b$$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

इसलिए आप कह सकते हैं कि दो राशियों का समांतर माध्य, उन दोनों राशियों के योगफल का आधा होता है। आइए एक उदाहरण से इसे समझें।

उदाहरणः–11. $\sqrt{2}+1$ और $\sqrt{2}-1$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः–

समांतर माध्य $= \frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2}$

$= \frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{2}$

दो राशियों a और b के बीच समांतर श्रेढ़ी का निर्माण

हम चाहें तो किन्हीं भी दो राशियों के बीच नयी संख्याएँ डालकर समांतर श्रेढ़ी बना सकते हैं। इसके लिए हमें बीच में पदों की संख्या के हिसाब से सार्व अंतर d लेना होगा। मान लीजिए दो राशियों a और b के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ प्रविष्ट करने हैं। तब $a, A_1, A_2, A_3, ...A_n, b$ समांतर श्रेढ़ी में होंगे और इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, अंतिम पद b और पदों की संख्या (n+2) होगी।

मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है,

तो अंतिम पद $b = a + (\overline{n+2} - 1)d$ [$\because$ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$]

$$b = a + (n+1)d$$

$$b - a = (n+1)d$$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

इसलिए $A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$

$$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$$

$$A_3 = a + 3d = a + 3\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$$

उपर्युक्त पैटर्न को देखकर कह सकते हैं कि

n वाँ पद $A_n = a + nd = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

आइए, इसे कुछ उदाहरणों से समझें।

उदाहरण:–12. 11 और –5 के बीच 3 पदों का निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।

हल:–

माना 11 और –5 के बीच 3 पद A_1, A_2, A_3 हैं। इसलिए 11, A_1, A_2, A_3, -5 समांतर श्रेढ़ी में हैं। इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a=11, 5 वाँ पद = -5 है। मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है।

5 वाँ पद $= a + 4d$ [$\because$ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$]

$$-5 = 11 + 4d$$
$$-5-11 = 4d$$
$$4d = -16$$
$$d = \frac{-16}{4}$$
$$d = -4$$

अतः
$$A_1 = a + d$$
$$= 11 + (-4)$$
$$= 7$$
$$A_2 = a + 2d$$
$$= 11 + 2(-4)$$
$$= 11 - 8$$
$$= 3$$
$$A_3 = a + 3d$$
$$= 11 + 3(-4)$$
$$= 11 - 12$$
$$= -1$$

इसलिए 11 और –5 के बीच तीन पद 7,3,–1 हैं और जिनसे निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ी बनती है–

11, 7, 3, –1, –5

उदाहरणः–13. 2 और 41 के बीच n पद हैं। 2 और 41 के बीच के चौथे व (n-1) वें पदों का अनुपात 2:5 है। तो n का मान बताइए।

हलः–

मान लीजिए 2 और 41 के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ हैं तब $2, A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, 41 समांतर श्रेढ़ी में हैं, जिसका प्रथम पद a=2 और (n+2) वाँ पद 41 है।

मान लीजिए श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है। तब

(n+2) वाँ पद = 41

$$2 + (\overline{n+2} - 1)d = 41 \qquad [\because \text{n वाँ पद } a_n = a + (n-1)d]$$
$$2 + (n + 1)d = 41$$
$$(n+1)d = 41-2$$
$$d = \frac{39}{n+1}$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{\text{श्रेढ़ी का चौथा पद} A_4}{\text{श्रेढ़ी का nवाँ पद} A_{n-1}} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{a+4d}{a+(n-1)d} = \frac{2}{5}$$

$$5a+20d = 2a+2(n-1)d$$

$$5a-2a = 2(n-1)d-20d$$

$$3a = (2n-2)d-20d$$

$$3a = (2n-2-20)d$$

$$3a = (2n-22)d$$

$$3(2) = (2n\text{-}22)\left(\frac{39}{n+1}\right)$$

(a और d का मान रखने पर)

$$6(n+1) = 39(2n\text{-}22)$$

$$6n+6 = 78n\text{-}858$$

$$6+858 = 78n\text{-}6n$$

$$864 = 72n$$

$$n = \frac{864}{72}$$

$$n = 12$$

प्रश्नावली 2

1. $\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।
2. x^2+3xy और $y^2\text{-}3xy$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।
3. दो संख्याओं का समांतर माध्य 7 और गुणनफल 45 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. दो संख्याओं का समांतर माध्य 6 और उनके वर्गों का योग 90 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. –4 और 10 के बीच 6 पद निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।
6. 11 और –7 के बीच 5 पद निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।

7. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के p वें व q वें पदों का माध्य, r वें व s वें पदों के माध्य के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $p+q = r+s$

8. 7 और 49 के बीच n पद हैं। यदि पाँचवें और (n-1) वें पदों का अनुपात 5:4 हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

समांतर श्रेढ़ी का योग

समांतर श्रेढ़ी 5,7,9,11,13,........... के प्रथम तीन पदों का योग S_3 से व्यक्त करें तो

$S_3 = 5+7+9=21$

इस समांतर श्रेढ़ी के पहले चार पदों का योग पता करने के लिए आप इसके पहले चार पद यानी 5, 7, 9 और 11 का योग करेंगे। इस तरह से पहले चार पदों का योग 32 प्राप्त होगा। परन्तु यदि आपको इस श्रेढ़ी के पहले 90 पदों का योग पता करना हो तो श्रेढ़ी के पहले 90 पदों को जोड़ना पड़ेगा। यह बहुत लंबा होगा। किन्तु आप इस श्रेढ़ी के प्रथम पद a, सार्व अंतर d और पदों की संख्या n पता करके पहले n पदों का योग ज्ञात कर सकते है–

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, इसलिए

$$a, a+d, a+2d, ...$$

समांतर श्रेढी है।

माना समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योग S_3 है, तो

$S_3 = a+(a+d)+(a+2d)$ .....(1)

पदों का योग विपरीत क्रम में लिखने पर

$S_3 = (a+2d)+(a+d)+a$ .....(2)

समीकरण (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$2S_3 = [a+(a+2d)]+[(a+d)+(a+d)]+[(a+2d)+a]$$

$$2S_3 = [2a+2d]+[2a+2d]+[2a+2d]$$

$$2S_3 = 3[2a+2d]$$

$$S_3 = \frac{3}{2}[2a+(3-1)d] \quad .....(3)$$

माना समांतर श्रेढ़ी के प्रथम चार पदों का योग S_4 है, तो

$S_4 = a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)$ .....(4)

पदों का योग विपरीत क्रम में लिखने पर

$S_4 =(a+3d)+(a+2d)+(a+d)+a$ .....(5)

समीकरण (4) और (5) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$2S_4 = [a+(a+3d)]+[(a+d)+(a+2d)]+[(a+2d)+(a+d)]+[(a+3d)+a]$$

$$2S_4 = [2a+3d]+[2a+3d]+[2a+3d]+[2a+3d]$$

$$2S_4 = 4[2a+3d]$$

$$S_4 = \frac{4}{2}[2a+(4-1)d] \quad .....(6)$$

इसी तरह से

$$S_5 = \frac{5}{2}[2a+(5-1)d] \quad .....(7)$$

$$S_6 = \frac{6}{2}[2a+(6-1)d] \quad .....(8)$$

उपर्युक्त समीकरणों (3), (6), (7), (8)के पैटर्न को देखकर आप कह सकते हैं कि समांतर श्रेढ़ी जिसका प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, के प्रथम n पदों का योग S_n हो तो

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

निगमन द्वारा श्रेढ़ी का योग निकालना

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, इसलिए

a, a+d, a+2d, ...

समांतर श्रेढ़ी है।

समांतर श्रेढ़ी का n वाँ पद a+(n-1)d है। माना S_n इस समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग है। इसलिए

$$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+ ....+[a+(n-2)d] +[a+(n-1)d] \quad .....(1)$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर आप प्राप्त करेंगे

$$S_n = [a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+ ....+(a+d)+a \quad .....(2)$$

समीकरण (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$S_n + S_n = [a+\overline{a+(n-1)d}]+[(a+d)+\overline{a+(n-2)d}]+$$

$$[(a+2d)+\overline{a+(n-3)d}]+......................................$$

$$..........+[\overline{a+(n-2)d}+(a+d)]+[\overline{a+(n-1)d}+a]$$

$$2S_n = \{2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+..........\ ....+[2a+(n-1)d]$$

उपर्युक्त समीकरण के दाहिने पक्ष में पदों की संख्या n है (क्यों?)

$$2S_n = n[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

इसलिए किसी समांतर श्रेढ़ी के पहले n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

इसे इस तरह से भी लिख सकते हैं–

$$S_n = \frac{n}{2}[a+a+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[a+a_n]$$

यदि किसी समांतर श्रेढ़ी में केवल n ही पद हों, तो n वाँ पद a_n ही अंतिम पद होगा यानी $a_n = l$, यहाँ अंतिम पद के लिए अक्षर l उपयोग करेंगे।

इस परिस्थिति में समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

करके देखें

1. क्या किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों के योग S_n और प्रथम (n-1) पदों के योग S_{n-1} का अंतर, श्रेढ़ी के n वें पद के बराबर होता है?
2. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग $S_n=4n-n^2$ है तो क्या इसके प्रथम पद का मान ज्ञात कर सकते हैं? क्या यह S_1 है? इस श्रेढ़ी के प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी तरह से तीसरे, चौथे, पन्द्रहवें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

उदाहरणः–14. समांतर श्रेढ़ी 5,1,–3,......... के 17 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः–

यहाँ प्रथम पद a=5, सार्व अंतर d=–4 पदों की संख्या n=17 है।

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}[2(5)+(17-1)(-4)]$$

$$= \frac{17}{2}[10+(16)(-4)]$$

$$= \frac{17}{2}(10-64)$$

$$= \frac{17}{2}(-54)$$

$$= -459$$

इसलिए दी हुई समांतर श्रेढ़ी के 17 पदों का योग –459 है।

उदाहरणः–15. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है, तो 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः–

यहाँ a=10, n=14, S_{14}=1050

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[2(10)+(14-1)d]$$

$$1050 = 7(20+13d)$$

$$1050 = 140 + 91d$$

$$91d = 1050 - 140$$

$$91d = 910$$

$$d = \frac{910}{91}$$

$d = 10$

इसलिए 20 वाँ पद $a_{20}=10+(20-1)(10)$

[$\because$ n वाँ पद $a_n=a+(n-1)d$]

$a_{20}=10+190=200$

इसलिए 20 वाँ पद 200 है।

उदाहरणः—16. 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः—

100 और 200 के बीच की विषम संख्याएँ हैं

101, 103, 105, ...199

संख्याओं की उपर्युक्त श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है। (क्यों?)

इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a=101, अंतिम पद l=199, सार्व अंतर d=2

मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी के पदों की संख्या n है, तब

$$\text{n वाँ पद} = 199$$

$$a+(n-1)d = 199$$

$$101+(n-1)(2) = 199$$

$$2n-2 = 199-101$$

$$2n-2 = 98$$

$$2n = 98+2$$

$$n=\frac{100}{2}$$

$$n = 50$$

इसलिए 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$S_{50} = \frac{50}{2}(101+199)$$

$$= 25\ (300)$$

$$= 7500$$

इसलिए 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल 7500 है।

उदाहरणः—17. समांतर श्रेढ़ी 17,15,13,.......... के कितने पदों का योगफल 72 होगा?

हलः—

यहाँ प्रथम पद a=17 , सार्व अंतर d=15-17=-2

मान लीजिए n पदों का योगफल 72 है, तब $S_n=72$

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$72 = \frac{n}{2}[2(17)+(n-1)(-2)]$$

$$72 = \frac{n}{2}(34-2n+2)$$

$$72\times2 = n(36-2n)$$

$$144 = 36n-2n^2$$

$$2n^2-36n+144 = 0$$

$$n^2-18n+72 = 0$$

$$n^2-6n-12n+72 = 0$$

$$n(n-6)-12(n-6) = 0$$

$$(n-6)(n-12) = 0$$

$$n=6, n=12 ,$$

n के ये दोनों मान संभव हैं और स्वीकार किए जा सकते हैं, अतः पदों की संख्या या तो 6 है या 12

टिप्पणीः–

(i) इस स्थिति में पहले 6 पदों का योग = पहले 12 पदों का योग =72

(ii) इस दोहरे उत्तर का कारण यह है कि सातवें से बारहवें पदों का योग शून्य है।

उदाहरणः–18. विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए विद्यालय परिसर के अंदर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोचा। यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक वर्ग (Section) अपनी कक्षा के बराबर पेड़ लगाएगा। उदाहरण के लिए कक्षा I का एक वर्ग 1 पेड़ लगाएगा, कक्षा II का एक वर्ग 2 पेड़ लगाएगा इत्यादि और ऐसा कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा। प्रत्येक कक्षा के तीन वर्ग हैं। इस विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी?

हलः–

चूँकि प्रत्येक कक्षा के तीन वर्ग हैं, अतः कक्षा I, कक्षा II, कक्षा III, ... कक्षा XII, द्वारा लगाए गए पेड़ों की संख्या क्रमशः होगी–

$1\times3, 2\times3, 3\times3, \ldots\ldots\ldots\ldots 12\times3$

या

3, 6, 9, ..., 36

यह एक समांतर श्रेढ़ी है, (क्यों?)

इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a=3, सार्व अंतर d=6-3=3, पदों की संख्या n=12, अंतिम पद l=36

इसलिए विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या, समांतर श्रेढ़ी के सभी पदों के योगफल के बराबर होगी अर्थात्

विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(3+36)$$

$$= 6 \times 39$$

$$= 234$$

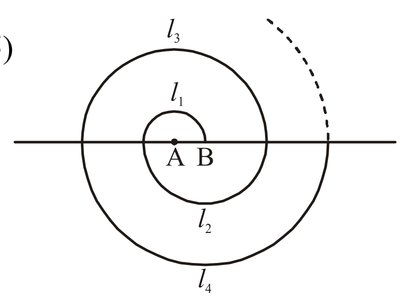
इसलिए विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा कुल 234 पेड़ लगाए गए।

उदाहरणः—19. केंद्र A से प्रारंभ करते हुए, बारी—बारी से केंद्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं 0.5 सेमी.,1.0 सेमी., 1.5 सेमी., 2.0 सेमी., ... वाले उत्तरोत्तर अर्द्धवृत्तों को खींचकर एक सर्पिल (Spiral) आकृति बनाई गई है, (देखिए आकृति) तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई कितनी है? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हलः—

हम जानते हैं कि r त्रिज्या वाले अर्द्धवृत्त की लंबाई πr होती है।

इसलिए तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने सर्पिल की कुल लंबाई



$$= \pi(0.5) + \pi(1.0) + \pi(1.5) + \pi(2.0) + ... + \pi(6.5)$$

$$= \pi(0.5)[1+2+3+........+13]$$

$$= \pi(0.5)[\frac{13}{2}\{2(1)+(13-1)\cdot 1\}]$$

$$= \pi(0.5)[\frac{13}{2}(2+12)]$$

$$= \pi(0.5)(\frac{13}{2}\times 14)$$

$$= \pi(0.5)(91)$$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{5}{10}\times 91$$

= 143 सेमी.

$\because$ 1+2+3+.....+13 एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद 1, सार्व अंतर 1 और पदों की संख्या 13 है और

n पदों का योग $= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

इसलिए तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई 143 सेमी. है।

EIIPPK

प्रश्नावली 3

1. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों का योग ज्ञात कीजिए–

   (i) 9, 12, 15, ... 16 पदों तक

   (ii) 8, 3, –2, ... 22 पदों तक

   (iii) 0.6, 1.7, 2.8, ...100 पदों तक

   (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, ...11 पदों तक

   (v) $\frac{n^2+1}{n}, n, \frac{n^2-1}{n}$, ... 20 पदों तक

   (vi) $\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \left(1-\frac{3}{n}\right)$, ... n पदों तक

2. 1046.5 योग प्राप्त करने के लिए समांतर श्रेढ़ी 7, $10\frac{1}{2}$, 14, ... के कितने पद लेने होंगे।
3. समांतर श्रेढ़ी 24, 21, 18, ... के कितने पद लिए जाएँ, ताकि उनका योग 78 हो।
4. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1, अंतिम पद 11 और योग 36 है, तो पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।
5. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 17 और अंतिम पद 350 है। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं? इस श्रेढ़ी का योग ज्ञात कीजिए।
6. 1 और 100 के बीच सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जो 3 के गुणज हों।
7. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।
8. उस समांतर श्रेढ़ी के पहले 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका दूसरा पद 14 और तीसरा पद 18 है।
9. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।
10. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम, द्वितीय और अंतिम पद क्रमशः a,b, और 2a हों, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी का योगफल $\frac{3ab}{2(b-a)}$ होगा।
11. एक समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योग $n^2 + 4n$ है। श्रेढ़ी का 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।
12. संख्याओं की उस श्रृंखला के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद $a_n = 3 + 2n$ से दिया जाता है।

13. किसी समांतर श्रेढ़ी के pवें, qवें, rवें पदों का योगफल क्रमशः a,b,c हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$

14. तीन समान्तर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफल क्रमशः S_1, S_2, S_3 हैं, यदि प्रत्येक श्रेढ़ी का प्रथम पद 1 तथा सार्व अंतर क्रमशः 1, 2, 3 हो तो सिद्ध कीजिए कि $S_1 + S_3 = 2S_2$

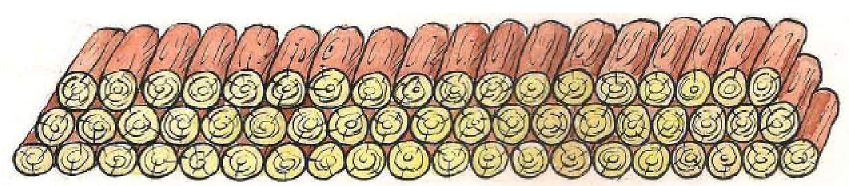
15. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के n, 2n, 3n पदों के योग क्रमशः S_1, S_2, S_3 हों, तो सिद्ध कीजिए कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$

16. टेलीविजन बनाने वाली एक कंपनी तीसरे वर्ष में 600 टेलीविजन तथा सातवें वर्ष में 700 टेलीविजन बनाती है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष बनने वाले टेलीविजनों में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए–
    (i) प्रथम वर्ष में बनाये गये टेलीविजनों की संख्या
    (ii) 9वें वर्ष में बनाये गये टेलीविजनों की संख्या
    (iii) प्रथम 7 वर्षों में बनाये गये कुल टेलीविजनों की संख्या

17. एक निर्माण कार्य ठेके में कराया जा रहा है, जिसे एक निश्चित तिथि तक पूरा करना है। निश्चित तिथि से विलंब होने पर जुर्माने का प्रावधान इस तरह है : पहले दिन के लिए 200 रु., दूसरे दिन के लिए 250 रु., तीसरे दिन के लिए 300 रु. इत्यादि, अर्थात् पहले दिन का जुर्माना 200 रु. है और इसके बाद प्रत्येक दिन का जुर्माना 50 रु. बढ़ जाएगा। ठेकेदार ने कार्य में 30 दिन का विलंब किया तो उसे कुल कितना जुर्माना देना होगा और 30 वें दिन के लिए कितना जुर्माना होगा?

18. विद्यालय में विद्यार्थियों के समग्र शैक्षिक प्रदर्शन पर 7 नकद पुरस्कार देने के लिए 700 रु. की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले वाले पुरस्कार से 10 रु. कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार की राशि कितनी है?

19. 200 लट्ठों (logs) को इस तरह जमाया गया कि सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे ऊपर की पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे ऊपर की पंक्ति में 18 लट्ठे रखे गए हैं। यह क्रम सभी लट्ठों के रखे जाने तक चला।



ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं और सबसे ऊपर की पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?

20. एक आलू दौड़ (potato race) प्रतियोगिता में प्रारंभिक स्थान पर एक बाल्टी रखी है। इस बाल्टी से 5 मीटर की दूरी पर पहला आलू रखा है तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3 मीटर की दूरी पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं। (देखिए आकृति)

प्रत्येक प्रतियोगी बालिका बाल्टी से चलना प्रारंभ करती है, निकटतम आलू को उठाती है और उसे लेकर वापस दौड़कर बाल्टी में डालती है। ऐसा वह तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रत्येक प्रतियोगी बालिका को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?

(संकेत : पहले और दूसरे आलुओं को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी = $2 \times 5 + 2(5 + 3)$ है।)

हमने सीखा

1. संख्याओं की ऐसी श्रृंखला समांतर श्रेढ़ी कहलाती है, जिसमें प्रथम पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद, अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या d जोड़कर प्राप्त होता है। इस निश्चित संख्या d को इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर कहते हैं। यदि प्रथम पद a है, तो समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप है–
   $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$
2. संख्याओं की एक दी गई श्रृंखला a_1, a_2, a_3 ....समांतर श्रेढ़ी होती है, यदि अंतरों $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3$, ..., से एक ही (बराबर) मान प्राप्त हो, अर्थात् $a_{k+1} - a_k$ का मान एक ही हो, जहाँ $k = 1, 2, 3, ...$
3. समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d हो, तो इस समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद होगा $a_n = a + (n-1) d$
   इस nवें पद को ही समांतर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General Term) कहते हैं।
4. यदि a, A, b समांतर श्रेढ़ी में हैं, तब $A = \frac{a+b}{2}$ और A, a तथा b का समांतर माध्य कहलाता है।
5. दो राशियों a और b के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ इस प्रकार लें कि $a, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, b$ समांतर श्रेढ़ी में हो तो श्रेढ़ी का प्रथम पद a, अंतिम पद b और पदों की संख्या (n+2) होगी।

6. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग S_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है :–

(i) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

(ii) $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

जहाँ समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, सार्व अंतर d, पदों की संख्या n और अंतिम पद l है।

उत्तरमाला–1

(1) (i) (b) (ii) (d) (iii) (a) (iv) (c) (v) (b)

(2) (b) ,(d)
(3) –27
(4) –1070
(5) $\frac{3n-2}{9}$

(6) $1000 - 50m$
(7) 31
(8) 10वाँ पद

(9) 99
(10) 10
(11) 10

(12) हाँ, 27वाँ पद
(13) 178
(14) 2m+1

(15) 65वाँ पद
(16) –13, –8, –3
(17) 300

(18) 208
(22) 13

उत्तरमाला–2

(1) 0
(2) $\frac{x^2 + y^2}{2}$
(3) 5 और 9

(4) 3,9
(5) –2, 0, 2, 4, 6, 8
(6) 8,5,2,–1,–4

(8) n = 5

उत्तरमाला–3

(1) (i) 504 (ii) –979 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

(v) $\frac{10(2n^2 - 17)}{n}$ (vi) $\frac{1}{2}(n-1)$

(2) 23
(3) 4 या 13
(4) $n = 6, d = 2$

(5) 38, 6973
(6) 1683
(7) 625

(8) 5610 (9) n^2 (11) 33

(12) 672 (16) (i) 550 (ii) 750 (iii) 4375

(17) 27750 रु. (18) पुरस्कारों की राशि (रु. में), 130,120,110,100,90,80,70

(19) 16 पंक्तियाँ, 5 लट्ठों को सबसे ऊपरी पंक्ति में रखते हैं।

संकेत : $S = 200, a = 20, d = -1$, सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में रखने पर n के दो मान 16 और 25 प्राप्त होते हैं। अब $a_{25} = a + 24d = -4$ अर्थात् 25वीं पंक्ति में लट्ठों की संख्या ऋणात्मक है, जो संभव नहीं है। अतः $n = 25$ स्वीकार नहीं कर सकते। $n = 16$ के लिए $a_{16} = a + 15d = 5$, अतः 16 पंक्तियाँ हैं और सबसे ऊपर वाली पंक्ति में 5 लट्ठे रखे हैं।

(20) 370 मीटर

अध्याय 05

अनुपात एवं समानुपात
[RATIO AND PROPORTION]

EISKR8

अनुपात (Ratio)

हमें अपने दैनिक जीवन में कई जगहों पर तुलना करने की आवश्यकता पड़ती है। यह तुलना बहुत बार अनुपात लेकर ही स्पष्ट हो पाती है। उदाहरण के लिए अगर हमें कबड्डी खेलने वाली तीन टीमों A,B,और C के वर्ष भर के प्रदर्शनों की तुलना करनी है तब यह हम कैसे कर पाएँगे?

इनमें से टीम A ने अब तक कुल 5 मैच खेले हैं, जिसमें से 3 मैच जीते हैं। टीम B ने अब तक 12 मैच खेलकर 5 मैच जीते हैं तथा टीम C ने 18 मैच खेलकर 13 मैच जीते हैं।

अब यह जानने के लिए कि इन टीमों में किसका प्रदर्शन सबसे अच्छा रहा है इनत तीनों के द्वारा जीते हुए मैचों की संख्या तथा खेले गए कुल मैचों की संख्या के अनुपात के रूप मे लिखते हैं–

टीम A का प्रदर्शन(अनुपात में) $= 3:5$

$$= \frac{3}{5}$$

टीम B का प्रदर्शन(अनुपात में) $= 5:12$

$$= \frac{5}{12}$$

टीम C का प्रदर्शन(अनुपात में) $= 13:18$

$$= \frac{13}{18}$$

लेकिन इनके प्रदर्शन के अनुपातों को देखकर यह बता पाना संभव नहीं है कि किसका प्रदर्शन अच्छा है क्योंकि प्रत्येक टीम के द्वारा खेले गए मैचों और जीते हुए मैचों की संख्या अलग–अलग है जिसके कारण इनके हर असमान हैं अतः हर को समान करने पर

$$\text{टीम A का प्रदर्शन} = \frac{3 \times 36}{5 \times 36} = \frac{108}{180}$$

$$\text{टीम B का प्रदर्शन} = \frac{5\times15}{12\times15} = \frac{75}{180}$$

$$\text{टीम C का प्रदर्शन} = \frac{13\times10}{18\times10} = \frac{130}{180}$$

अब हम इन अनुपातों को देखकर यह कह सकते हैं कि टीम C का प्रदर्शन सबसे अच्छा रहा।

करके देखें

1. निम्नलिखित में से किस भूखण्ड का तुलनात्मक क्षेत्रफल सबसे अधिक है–
 (i) 5 वर्ग मीटर में से 5 वर्ग सेमी का (ii) 30 वर्गसेमी. में से 3 वर्ग सेमी.का
 (iii)10 वर्ग मीटर में से 9 वर्ग सेमी का

अनुपात का व्यावहारिक उपयोग

दिए गए तथ्यों के आधार पर जानकारी पता करना

अक्सर हम वास्तविक तथ्यों के आधार पर कुछ निष्कर्ष निकालते हैं। जैसे हमें पता है कि पृथ्वी का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल लगभग 510 मिलियन वर्ग किमी. है, जिसमें लगभग 360 मिलियन वर्ग किमी जल–भाग और लगभग 150 मिलियन वर्ग किमी. थल–भाग है। अब हम इन तथ्यों के आधार पर बता सकते हैं कि पृथ्वी पर जल भाग और थल भाग किस अनुपात में है तथा यह भी कि पृथ्वी का कितना प्रतिशत भाग जल से ढँका है और कितना प्रतिशत भाग थल है। आइए यह पता करते हैं–

दिए गए तथ्य–

(i) पृथ्वी का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 510 मिलियन वर्ग किमी

(ii) पृथ्वी का जल भाग = 360 मिलियन वर्ग किमी

(iii) पृथ्वी का थल भाग = 150 मिलियन वर्ग किमी

(A) पृथ्वी पर जल भाग व थल भाग का अनुपात = 360 : 150

$$= \frac{360}{150}$$

$$= \frac{12}{5} \text{ या } 12:5$$

अर्थात् पृथ्वी पर जल भाग व थल भाग का अनुपात 12 : 5 है।

(B) पृथ्वी पर जल भाग का कुल पृथ्वी से अनुपात = 360 : 510

$$= \frac{360}{510} = \frac{12}{17} = 12:17$$

(प्रतिशत में) $= \frac{360}{510} \times 100\%$

$= 70{\cdot}58\%$

अब आप इसी तरह पता करें कि सम्पूर्ण पृथ्वी का कितना प्रतिशत भाग थल है ?

ऊपर हमने तीन अलग–अलग टीमों के प्रदर्शन की तुलना की। अलग–अलग वर्षों में एक ही टीम के प्रदर्शन की तुलना भी की जा सकती है। आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं –

उदाहरणः–1 छत्तीसगढ़ राज्य की हॉकी टीम का राष्ट्रीय स्तर पर खेले गए मैचों में प्रदर्शन निम्नानुसार है–

1. वर्ष 2016 में 12 मैच खेलकर 10 मैच जीते।
2. वर्ष 2015 में 10 मैच खेलकर 7 मैच जीते।
3. वर्ष 2014 में 11 मैच खेलकर 8 मैच जीते।

इन तीन वर्षों में टीम का प्रदर्शन किस वर्ष सबसे अच्छा रहा? कारण सहित बताइए।

हलः– छत्तीसगढ़ हॉकी टीम की राष्ट्रीय स्तर पर खेले गए मैचों में प्रदर्शन के आधार पर निष्कर्ष निकालने के लिए इन प्रदर्शनों को अनुपात में लिखते हुए प्रतिशत में बदलते हैं–

1. वर्ष 2016 में प्रदर्शन (अनुपात में) $= 10:12$

(प्रतिशत में) $= \frac{10}{12} \times 100\%$

$= 83.34\%$

2. वर्ष 2015 में प्रदर्शन (अनुपात में) $= 7:10$

(प्रतिशत में) $= \frac{7}{10} \times 100\%$

$= 70\%$

3. वर्ष 2014 में प्रदर्शन (अनुपात में) $= 8:11$

(प्रतिशत में) $= \frac{8}{11} \times 100\%$

$= 72.73\%$

टीम का वर्ष 2016, 2015 व 2014 में प्रदर्शन क्रमशः 83.34%, 70% व 72.73% है। अतः हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि पिछले दो वर्षों की तुलना में वर्ष 2016 में हॉकी टीम का प्रदर्शन ज्यादा अच्छा रहा।

उदाहरणः–2 माह अगस्त 2016 में महानदी के जलस्तर के बढ़ने की औसत दर 5 इंच प्रति घण्टा थी जबकि माह सितम्बर में यह 3 फीट प्रति दिवस थी । ज्ञात कीजिए कि किस माह में जलस्तर बढ़ने की औसत दर अधिक है?

हलः– माह अगस्त में जलस्तर बढ़ने की दर $= 5$ इंच प्रति घण्टा

माह सितम्बर में जलस्तर बढ़ने की दर $= 3$ फीट प्रति दिवस

$= 36$ इंच प्रति 12 घण्टा

$= \frac{36 \text{ इंच}}{12 \text{ घण्टा}}$

$= \frac{3 \text{ इंच}}{1 \text{ घण्टा}}$

$= 3$ इंच प्रति घण्टा

अर्थात माह अगस्त में जलस्तर बढ़ने की दर 5 इंच प्रति घण्टा है जो माह सितम्बर में जलस्तर बढ़ने की दर से अधिक है।

उदाहरणः–3 दो समूह एक कार्य को क्रमशः 14 दिन व 21 दिन में पूरा कर सकते हैं। यदि वे इस कार्य को एक साथ करते हैं तो कितने दिनों में कार्य पूरा हो जाएगा?

हलः– पहले समूह द्वारा 14 दिनों में किया गया कार्य $= 1$

$\therefore$ पहले समूह द्वारा 1 दिन में में किया गया कार्य $= \frac{1}{14}$

दूसरे समूह द्वारा 21 दिनों में किया गया कार्य = 1

दूसरे समूह द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{21}$

दोनों समूहों द्वारा मिलकर 1 दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{14} + \frac{1}{21} = \frac{5}{42}$

अर्थात् दोनों समूह मिलकर $\frac{5}{42}$ कार्य पूरा करते हैं $= 1$ दिन में

अतः दोनों समूह मिलकर कार्य पूरा करते हैं $= \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ दिनों में

प्रश्नावली–1

1. एक क्रिकेट मैच में बल्लेबाज धीरेन्द्र 25 गेंद में 19 रन बनाकर आउट हो जाता है,महेन्द्र 20 गेंद खेलकर 14 रन बनाकर पेवेलियन लौटता है तथा रविन्द्र 15 गेंद में 9 रन बनाता है। इनमें से किसने सबसे अधिक रन बनाए?
2. 100 मीटर की दौड़ में राम 12 किमी.प्रति घण्टा की गति से दौड़ते हुए, श्याम को 5 मीटर पीछे छोड़ दौड़ जीत लेता है। श्याम की गति कितनी थी?
3. पृथ्वी पर खारा(समुद्रीय) पानी तकरीबन 38214 मिलियन घन किमी. है और साफ पानी (Fresh water) तकरीबन 1386 मिलियन घन किमी. है। बताइए पृथ्वी पर साफ पानी और

खारा पानी किस अनुपात में हैं ? पृथ्वी पर कुल कितना प्रतिशत साफ पानी है? और कितना प्रतिशत पानी खारा है ?

4. गायत्री एक खेत के धान की फसल को 12 दिन में काट लेती है। यदि उसी फसल को महेश 9 दिन में काट सकता है। तो बताइए दोनों मिलकर उस फसल को कितने दिन में काट लेंगे।
5. किसी काम को अरूण व अश्वनी क्रमशः 20 दिनों व 25 दिनों में पूरा कर सकते हैं। बताइए अरूण की कार्यक्षमता, अश्विनी से कितने प्रतिशत अधिक है?
6. संजय और शिवा मिलकर किसी काम को 16 दिनों में पूरा कर लेते हैं। यदि संजय उस काम को अकेले 24 दिनों में पूरा कर लेता है। तो बताइए कि शिवा अकेले उस काम को कितने दिनों में पूरा करेगा?

दो या अधिक भागों में बाँटना

प्रायः हमें किसी राशि को दो या दो से अधिक भागों में बाँटने की आवश्यकता पड़ती है। दो से ज्यादा हिस्सों में बाँटते समय तीन परिस्थितियाँ आ सकती है–पहली या तो सभी को बराबर भाग मिले। इसमें हम आसानी से पता कर सकते हैं कि प्रत्येक को कितना मिलेगा। दूसरी स्थिति यह होगी कि एक को दूसरे से अधिक मिले और तीसरे को दूसरे से अधिक मिले। और तीसरी स्थिति जब एक राशि को किसी खास अनुपात में बाँटा जाए जैसे तीन व्यक्तियों को कोई राशि $a : b : c$ के अनुपात में बाँटना हो।

अनुपात में बाँटने का एक उदाहरण देखें :–

तीन मित्रों लता, सोनू व पुरेन्द्र ने क्रमशः 3 लाख, 5 लाख तथा 7 लाख मिलाकर 15 लाख रूपये की लागत से कपड़ा व्यापार शुरू किया। वर्ष के अंत में उन्हें 2,25,000 रूपये का लाभ हुआ। इस लाभ में से तीनों को कितना–कितना हिस्सा मिलना चाहिए? क्या तीनों में बँटवारा बराबर–बराबर होगा? यदि नहीं तो वे लाभ का वितरण किस तरह करेंगे? आइए देखें–

चूँकि व्यवसाय में तीनों के द्वारा दी गई राशि अलग–अलग है। अतः वे तीनों लागत के अनुपात में ही लाभ को बाँटना चाहेंगे। तीनों के लागत का अनुपात $3 : 5 : 7$ है।

अतः उन्हें प्राप्त कुल लाभ का 3k, 5k व 7k हिस्सा मिलेगा।

अर्थात $3k + 5k + 7k = 225000$

$$15k = 225000$$

$$k = \frac{225000}{15}$$

$$k = 15000$$

अतः व्यवसाय में हुए लाभ में लता का हिस्सा 3k अर्थात 45000 रूपये

सोनू का हिस्सा 5k अर्थात 75000 रूपये

तथा पुरेन्द्र का हिस्सा 7k अर्थात 105000 रूपये है।

सोचें एवं चर्चा करें

निम्नलिखित तीनों स्थितियों में बाँटने की प्रक्रिया क्या होगी–

(i) जब सभी को बराबर मिले ?

(ii) जब एक को दूसरे से 10 अधिक मिले ?

(iii) जब एक को किसी खास अनुपात में मिले ?

उदाहरणः–4 75 सेमी. लंबे एक रेखाखण्ड को 3 : 5 : 7 के अनुपात में तीन भाग करने पर प्रत्येक भाग की लंबाई कितनी होगी?

हलः– 75 सेमी. लंबे रेखाखण्ड को 3 : 5 : 7 के अनुपात में बाँटने पर प्रत्येक भाग की लंबाई क्रमशः 3k, 5k व 7k होगी।

अतः $3k + 5k + 7k = 75$

$$15k = 75$$

$$k = \frac{75}{15}$$

$$k = 5$$

अतः रेखाखण्ड के एक भाग की लंबाई 3k अर्थात 15 सेमी.

दूसरे भाग की लंबाई 5k अर्थात 25 सेमी.

तीसरे भाग की लंबाई 7k अर्थात 35 सेमी.है।

करके देखें

1. 651 रूपये को अमित, अनिल व अंकिता में इस प्रकार बाँटिए कि अमित को प्राप्त 1 रूपये पर अनिल को 5 रूपये तथा अंकिता को 25 रूपये मिले।
2. ऋचा को अपने गुल्लक में 10 रूपये, 5 रूपये, 2 रूपये व 1 रूपये के सिक्के 2:3:5:7 के अनुपात में मिले। उसने अपनी माँ का बताया कि उसके पास कुल 520 रूपये हो गए हैं। क्या आप बता सकते हैं कि ऋचा को गुल्लक से 10 रूपये, 5 रूपये, 2रूपये व 1 रूपये के कितने–कितने सिक्के मिले?

उदाहरणः–5 तीन छात्रों A, B व C में 11 : 13 : 17 के अनुपात में कुछ रूपए बाँटे गए। यदि छात्र A को 451 रूपए मिले तो बताइए छात्र B व छात्र C को कितने–कितने रूपए मिले ? तथा कुल कितने रूपए बाँटे गए ?

हलः– तीन छात्रों A, B, C में माना $11k$, $13k$ व $17k$ रूपए बाँटे गए। यदि छात्र A को 451 रूपए मिले हैं।

तो छात्र A का हिस्सा 11k = 451 अर्थात् $k = \frac{451}{11} = 41$

k का मान 41 प्राप्त हो गया है। अतः हम छात्र B व छात्र C का हिस्सा भी अब ज्ञात कर सकते हैं।

अतः छात्र B का हिस्सा = 13k = 13 × 41 = 533 रूपए

तथा छात्र C का हिस्सा = 17k = 17 × 41 = 697 रूपए

छात्र A, B व C तीनों के बाँटे गए कुल रूपए = 451 + 533 + 697

= 1681.

उदाहरणः–6 क्या 63 हजार रूपए को तीन छात्रों A, B व C में 5 : 7 : 9 के अनुपात में बाँट कर 500 रूपये के नोटों में वितरित कर सकते हैं ? यदि हाँ तो बताइए प्रत्येक को कितने–कितने रूपए मिलेंगे ?

हलः– छात्र A, B व C को 63 हजार रूपए बाँटने से प्रत्येक को क्रमशः $5k$, $7k$ व $9k$ रूपए मिलेंगे।

अर्थात् $5k + 7k + 5k = 63$ हजार

21k = 63 हजार या $k = \frac{63}{21}$ हजार = 3 हजार

अतः छात्र A को $5k = 5 \times 3$ हजार = 15 हजार रूपए मिलेंगे

छात्र B को $7k = 7 \times 3$ हजार = 21 हजार रूपए मिलेंगे

छात्र C को $9k = 9 \times 3$ हजार = 27 हजार रूपए मिलेंगे

अतः यह राशि 500 रूपये के नोट में वितरित की जा सकती है।

उदाहरणः–7 किसी व्यवसाय की साझेदारी में व्यापारी A व B की पूँजियों में 3 : 2 का तथा व्यापारी A व C की पूँजियों में 2 : 1 का अनुपात है। व्यापार में A, B व C को कुल 1,78,100 रूपये का फायदा होता है। A, B व C को कितना–कितना हिस्सा मिलेगा?

हलः– चूँकि व्यापारी A व B की लागत पूँजियों का अनुपात 3 : 2 और A और C की राशि का अनुपात 2 : 1 है इसलिए इनका पारस्परिक अनुपात निकालने के लिए A के साथ संबंध को समतुल्य बनाना होगा इसके लिए हम व्यापारी B व A की लागत पूँजियों का अनुपात देखते हैं यह अनुपात 2 : 3 अर्थात 4 : 6 है। व्यापारी A व C की लागत पूँजियों का अनुपात 2: 1= 6 : 3

अतः व्यापारी B, A व C की लागत पूँजियों का अनुपात B : A : C= 4 : 6 : 3

उनके व्यवसाय में लागत पूँजियों के अनुपात 4 : 6 : 3 में ही फायदा बँटेगा।

अतः उन्हें 4k, 6k व 3k रूपये मिलेंगे।

इसलिए 4k + 6k + 3k = 178100

13k = 178100

$$k = \frac{178100}{13}$$

$$k = 13700$$

अतः A को प्राप्त लाभ 6k अर्थात 82200 रूपये

B को प्राप्त लाभ 4k अर्थात 54800 रूपये

C को प्राप्त लाभ 3k अर्थात 41100 रूपये

करके देखें

1. सीता के पास 8200 रूपये हैं जिसमें 100 रूपये के नोटों के दुगुने नोट, 500 रूपये के तथा 100 रूपये के नोटों से तिगुने नोट एक हजार रूपये के हैं। क्या आप बता सकते हैं कि सीता के पास 1000 रूपये के कितने नोट हैं?
2. 2890 रूपये को A,B व C में इस प्रकार बाँटिए कि $A : B = 1 : 2$ तथा $B : C = 3 : 4$ हो।

किसी भी दिए अनुपात में किसी राशि को बाँटना

एक राशि x को तीन भागों में इस तरह बाँटिए कि उन भागों में a : b : c का अनुपात हो। यहाँ राशि x का मान व प्रकार कुछ भी हो सकता है और अनुपातों a, b, c का मान भी कोई भी प्राकृत संख्या हो सकती है।

हमें राशि x को a : b : c के अनुपात में बाँटना है। अतः इसे हम इस तरह लिख सकते हैं–

$$ak + bk + ck = x$$
$$(a + b + c)k = x$$

$$k = \frac{x}{(a+b+c)}$$

इसलिए x का पहला भाग ak अर्थात $\frac{ax}{(a+b+c)}$

x का दूसरा भाग bk अर्थात $\frac{bx}{(a+b+c)}$

x का तीसरा भाग ck अर्थात $\frac{cx}{(a+b+c)}$

हमने देखा कि को बाँटने पर प्राप्त तीन भाग क्रमशः $\frac{ax}{(a+b+c)}, \frac{bx}{(a+b+c)}$ व $\frac{cx}{(a+b+c)}$ हैं

उदाहरण :– 8 पानी और दूध का एक मिश्रण 40 लीटर है। इसमें 10% पानी है। बेचने वाले ने इस मिश्रण में और पानी मिला दिया। नए मिश्रण में 20% पानी है। कितना पानी और मिलाया गया?

हलः– मिश्रण में पानी = 40 लीटर का 10% = 4 लीटर

तथा दूध = 40- 4 = 36 लीटर

माना इस मिश्रण में x लीटर पानी और मिला दिया गया।

तब नए मिश्रण में पानी = (4+x) लीटर व दूध = 36 लीटर

इस नए मिश्रण में पानी 20% तथा दूध 80% होगा अर्थात्

पानी और दूध का अनुपात = 20 : 80 = 1 : 4

अतः $$\frac{4+x}{36} = \frac{1}{4}$$

$$16 + 4x = 36$$

$$x = 5$$

अर्थात् मिश्रण में 5 लीटर पानी और मिलाया गया है।

प्रश्नावली –2

1. किसी क्रिकेट मैच में तीन खिलाड़ियों A, B व C के रनों की संख्या का अनुपात A : B= B : C = 1: 2 के अनुपात में है। यदि तीनों खिलाड़ियों के कुल रनों की संख्या 364 हो तो प्रत्येक खिलाड़ी के रनों की संख्या ज्ञात कीजिए।
2. तीन कर्मचारियों A ,B व C के वेतन का अनुपात 2 : 3 : 5 है। यदि उनके वेतन में क्रमशः 15%, 10% व 20% की वृद्धि कर दी जाती है तब उनके वेतन का अनुपात क्या होगा?
3. किसी व्यवसाय में तीन व्यक्ति A , B व C को 70,000 रूपये का मुनाफा मिलता है उन्हें इस मुनाफे को A : B = 4 : 2 व B : C = 10 : 5 के अनुपात में बाँटना है। बताइए कि प्रत्येक को कितने रूपये मिले? A को C का कितना गुना रूपया मिलेगा?
4. एक थैले में 1 रूपये, 2 रूपये व 5 रूपये के कुछ सिक्के 1 : 2 : 5 के अनुपात में हैं यदि थैले में कुल 1590 रूपये हैं तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
5. दूध और पानी के 100 लीटर मिश्रण में 10% पानी है। इस मिश्रण में कितना लीटर शुद्ध दूध मिलाया जाए कि नए बने मिश्रण में केवल 5% पानी हो?

EJ2GSV

समानुपात (Proportion)

नवमीं की वार्षिक परीक्षा में मारिया के विभिन्न विषयों में अंक इस प्रकार है–हिन्दी में $\frac{78}{100}$, अंग्रेजी में $\frac{35}{50}$, संस्कृत में $\frac{30}{50}$, गणित में $\frac{70}{100}$, विज्ञान में $\frac{90}{100}$ और सामाजिक विज्ञान में $\frac{72}{100}$।

आप विभिन्न विषयों में मारिया के प्रदर्शन के बारे में क्या कह सकते हैं ?

अंकों में तुलना करने के लिए सबसे पहले तो कुल अंकों के आधार को समान होना चाहिए। यानि अंग्रेजी में यदि 50 में 35 है तो 100 में से 70 होंगे। यानी $\frac{35}{50}=\frac{70}{100}$ भी लिख सकते हैं।

इसी तरह संस्कृत के अंकों को $\frac{30}{50}=\frac{2\times 30}{2\times 50}=\frac{60}{100}$ ऐसे भी लिख सकते हैं। अब आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

वास्तव में $\frac{35}{50}$ और $\frac{70}{100}$ या $\frac{30}{50}$ और $\frac{60}{100}$ तुल्य अनुपात है। यानी ऐसे अनुपात जिनका मान समान है,

अर्थात् $$\frac{35}{50}=\frac{70}{100} \quad \text{या} \quad \frac{30}{50}=\frac{60}{100}$$

दो तुल्य अनुपातों के इस संबंध को समानुपात (Proporation) कहते हैं।

यदि $a:b$ और $c:d$ समान हो तो उन्हें ऐसे लिखा जा सकता है $a:b=c:d$, इसे ऐसे भी दर्शा सकते हैं– $a:b::c:d$.

यहाँ ': :' समानुपात का चिन्ह है। और राशियाँ a, b,c और d समानुपात के पद है। प्रथम पद a और चौथा पद d है, इन दोनों पदों को चरम पद (Extreme terms) कहते हैं। इसी तरह दूसरा पद b और तीसरा पद c को मध्य पद (Mean tems) कहते हैं।

अतः यदि a, b, c, d समानुपातिक हैं, तो

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\text{या} \quad ad=bc$$

यानी किसी समानुपात के मध्य पदों का गुणनफल उसके चरम पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

हमें यदि इन चारों राशियों में से कोई तीन राशियाँ पता हों तो, हम ऊपर लिखे संबंध से चौथी राशि का मान ज्ञात कर सकते हैं। आइए देखें कैसे–

उदाहरणः–9 7, 3, 21 की चतुर्थानुपाती राशि पता करें।

हल– हमें यहाँ पहले तीन पद दिए हैं– 7, 3 और 21 माना कि चौथा पद x है तो,

$$7 : 3 : : 21 : x$$

$\Rightarrow$ $$\frac{7}{3} = \frac{21}{x}$$

$\Rightarrow$ $$7 \times x = 3 \times 21$$

$\Rightarrow$ $$\mathrm{x} = \frac{3 \times 21}{7}$$

$\therefore$ $$x = 9$$

अतः चौथा पद 9 है।

उदाहरणः–10 संख्याओं 54, 71, 75 और 99 प्रत्येक में से क्या घटाया जाए कि शेषफल समानुपाती हो ?

हल– माना दी गई संख्याओं में से y घटाया जाए।

तब $$(54 - y) : (71 - y) : : (75 - y)\ (99 - y)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{(54 - y)}{(71 - y)} = \frac{(75 - y)}{(99 - y)}$$

$\Rightarrow$ $$(54 - y)\ (99 - y) = (75 - y)\ (71 - y)$$

$\Rightarrow$ $$5346 - 153x + y^2 = 5325 - 146x + y^2$$

$\Rightarrow$ $$153x - 146x = 5346 - 5325$$

$\Rightarrow$ $$7x = 21$$

$\Rightarrow$ $$x = \frac{21}{7}$$

$\Rightarrow$ $$\mathrm{x} = 3$$

अतः यदि प्रत्येक संख्या से 3 घटाएँ तो मिलने वाली संख्याएँ समानुपात में होंगी।

इसे जाँच कर देखें।

EJBCUI

सतत् समानुपात (Continued proportion)

कई ऐसी राशियाँ जिनमें पहली और दूसरी राशि में वही अनुपात होता है जो दूसरी और तीसरी राशि में और यह तीसरी और चौथी राशि के अनुपात के भी बराबर होता है।

यानी यदि a, b, c, d, e ..... राशियाँ इस प्रकार हो कि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}$........... तो यह राशियाँ सतत् अनुपात (Continued proportion) में है।

चूंकि $a : b : c$ तो b को a और c का मध्यानुपाती कहेंगे, यानी $a : b :: b : c$

या $$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = ac$$

$\Rightarrow$ $$b = \pm\sqrt{ac}$$

अतः इस तरह हम मध्य राशि का मान निकाल सकते हैं।

उदाहरणः–11 6 और 54 का मध्यानुपाती पता करें।

हल– माना 6 और 54 का मध्यानुपाती x है, तो

अतः $$6 : x :: x : 54$$

$\Rightarrow$ $$x \times x = 6 \times 54$$

$\Rightarrow$ $$x^2 = 6 \times 6 \times 3 \times 3$$

$\Rightarrow$ $$x = \sqrt{6\times6\times3\times3}$$

$\Rightarrow$ $$x = 6 \times 3 = 18$$

अतः 18, 6 और 54 का मध्यानुपाती है।

उदाहरणः–12 $8xy$ और $4x^2y$ का तृतीयानुपाती पता करें।

हल– माना m, $8xy$ और $4x^2y$ का तृतीयानुपाती है तो

$$8xy : 4x^2y : m \Rightarrow 8xy : 4x^2y :: 4x^2y : \text{m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8xy}{4x^2y} = \frac{4x^2y}{m} \Rightarrow 8xy \times m = 4x^2y \times 4x^2y$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{4x^2y \times 4x^2y}{8xy} \Rightarrow m = 2x^3y$$

अतः तृतीयानुपात $2x^3y$ है।

उदाहरणः–13 यदि $a : b : : c : d$ हो, तो सिद्ध करें कि–

$$\frac{d^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{ac}{bd}$$

हल– माना $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ है

तो $a = bk, \quad c = dk$ होगा

L.H.S. $= \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}$

$$= \frac{(bk)^2 - (dk)^2}{b^2 - d^2}$$

$$= \frac{k^2(b^2 - d^2)}{(b^2 - d^2)}$$

$= k^2$ ....(1)

R. H. S. $= \frac{ac}{bd}$

$$= \frac{bk \cdot dk}{bd}$$

$$= \frac{k^2(bd)}{bd}$$

$= k^2$ ....(2)

(1) और (2) से हम कह सकते हैं कि

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{ac}{bd}$$

L.H.S. = R.H.S.

EJK8W6

व्युत्क्रमानुपात

हम देखते हैं कि एक निश्चित राशि से खरीदी गई वस्तुओं की मात्रा कीमत बढ़ने पर कम हो जाती है। वहीं कीमत घटने पर यह मात्रा अधिक हो जाती है। बस, टैक्सी, साईकिल आदि की स्पीड(चाल) बढ़ाने अथवा घटाने पर उसी दूरी को तय करने में लगा समय घट या बढ़ जाता है। किसी कार्य को पूर्ण करने में लगा समय कार्य करने में लगे व्यक्तियों की संख्या घटाने या बढ़ाने के साथ क्रमशः बढ़ या घट जाता है। यह सब व्युत्क्रमानुपाती संबंध हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

व्युत्क्रमानुपाती संबंध के ऐसे ही कुछ और उदाहरण खोजकर लिखिए।

व्युत्क्रमानुपाती संबंध बहुत सी जगह उपयोग में आते हैं। हम उदाहरण से समझते हैं :–

उदाहरणः–14 12 मजदूर एक दीवार को 9 दिन में प्रतिदिन 8 घण्टा काम करके बना सकते हैं। उसी दीवार को 24 मजदूर प्रतिदिन 6 घण्टे काम करके कितने दिन में बना लेंगे ?

हल–मजदूरों की संख्या व कार्य पूर्ण करने में लगा समय एक दूसरे के व्युक्रमानुपाती होता है। दीवार बनाने में 12 मजदूरों को 9 दिन $\times$ 8 घण्टे $=$ 72 घण्टे समय लगता है।

यदि मजदूरों की संख्या बढ़ाकर 24 कर दे तथा कार्य करने का समय घटाकर प्रतिदिन 6 घण्टे कर दें और माना x दिन में दीवार पूर्ण हो जाती है; तो 24 मजदूर को 6 घण्टे $\times x$ दिन $=$ $6x$ घण्टे लगेंगे।

चूँकि दोनों परिस्थितियों में काम पूरा हुआ अतः यह समय की गणना व मज़दूरों की संख्या के व्युत्क्रमानुपाती है जिसे हम निम्न व्युत्क्रमानुपाती सम्बन्ध के रूप में लिख सकते हैं–

मज़दूरों की संख्या : मज़दूरों की संख्या : : समय (घण्टों में) : समय (घण्टों में)

$$12 : 24 :: 6x : 72$$

$$\Rightarrow \quad \frac{12}{24} = \frac{6x}{72}$$

$\Rightarrow \quad 72 \times 12 = 6x \times 24$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{72 \times 12}{24 \times 6}$$

$$x = 6$$

अतः प्रतिदिन कार्य करने का समय 8 घण्टा से घटाकर 6 घण्टा करने व मजदूरों की संख्या 12 से बढ़ाकर 24 करने पर दीवार बनाने में 6 दिन का समय लगेगा।

उदाहरणः–15 200 सी.एफ.एल. बल्ब को 6 दिन तक 4 घण्टे प्रतिदिन जलाए जाने पर विद्युत् व्यय 40 रू. आता है। बताइए 48 रू. के व्यय पर 15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से कितने CFL बल्ब जलाए जा सकते हैं ?

हलः– माना 48 रू. के कुल व्यय पर 15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से x सी.एफ.एल. बल्ब जलाए जा सकते हैं।

पहली स्थिति में–

दिया है कि एक बल्ब 4 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से 6 दिन जलता है।

एक बल्ब के जलने का कुल समय $6 \times 4 = 24$ घण्टे

तो 200 बल्ब के जलने का कुल समय 200×24 घण्टे

इसी तरह दूसरी स्थिति में

15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से x बल्ब के जलने का कुल समय

$x \times 15 \times 3 = 45x$ घण्टे

यहां जैसे–जैसे बल्ब जलने का समय बढ़ेगा विद्युत व्यय भी बढेगा यानि वह समानुपाती हैं।

200 बल्ब जलने का कुल समय	:	कुल विद्युत व्यय	: :	x बल्ब जलने का कुल समय	:	कुल व्यय
200×24	:	40	: :	$45x$	:	48

$$\frac{200 \times 24}{40} = \frac{45x}{48}$$

$$x = \frac{200 \times 24 \times 48}{45 \times 40} = 128$$

अतः 48 रू. के विद्युत् खर्च पर 15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से $x = 128$ बल्ब जलाए जा सकते हैं।

उदाहरणः–16 यदि 15 व्यक्ति किसी काम को 40 दिन में करते हैं। बताइए उस काम के चौथाई हिस्से को कितने व्यक्ति 15 दिन में कर लेंगे?

हलः– यदि 15 व्यक्ति 1 काम को करते हैं = 40 दिनों में

तो 15 व्यक्ति $\frac{1}{4}$ काम को करते हैं– $40 \times \frac{1}{4} = 10$ दिनों में

मान लें $\frac{1}{4}$ काम को x व्यक्ति 15 दिनों में पूरा कर लेंगे।

हम जानते हैं कि व्यक्तियों की संख्या दिनों की संख्या के व्यकुत्क्रमानुपाती है।

तो इसे निम्न तरीके से लिखा जा सकता हैः–

व्यक्तिों की संख्या   दिनों की संख्या

15 व्यक्ति : x व्यक्ति   : :   15 दिन : 10 दिन

$$\frac{15}{x} = \frac{15}{10}$$

$$x = 10$$

अतः 10 व्यक्ति इस कार्य के चौथाई भाग को 15 दिन में कर लेंगे।

उदाहरणः–17   दो नल A और B एक टंकी को क्रमशः 30 मिनट और 40 मिनट में भर सकते हैं। तीसरा नल C उस टंकी को 60 मिनट में खाली कर सकता है। यदि तीनों नल एक साथ खोल दिए जाएँ तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा?

हलः– चूँकि नल A द्वारा 30 मिनट में टंकी का भरा गया भाग = 1

इसलिए 1 मिनट में टंकी का भरा गया भाग $= \frac{1}{30}$

चूँकि नल B द्वारा 40 मिनट में टंकी का भरा गया भाग = 1

इसलिए 1 मिनट में नल द्वारा टंकी का भरा गया भाग $= \frac{1}{40}$

चूँकि नल C द्वारा 60 मिनट में खाली किया गया भाग = 1

इसलिए 1 मिनट में नल द्वारा टंकी का खाली किया गया भाग $= \frac{1}{60}$

तीनों नलों को एक साथ चालू करने पर दो नलों से टंकी में पानी जाएगा लेकिन तीसरे नल से टंकी से पानी निकलता जाएगा ।

अतः 1 मिनट में टंकी का भरा गया भाग $= \frac{1}{30} + \frac{1}{40} - \frac{1}{60}$

$$= \frac{4+3-2}{120}$$

$$= \frac{5}{120}$$

चूँकि $\frac{5}{120}$ भाग भरने में लगा समय = 1 मिनट

इसलिए पूरा 1 भाग अर्थात टंकी को भरने में लगा समय $= \frac{1}{\frac{5}{120}}$

$$= \frac{120}{5}$$

= 24 मिनट

उदाहरणः—18 एक पम्प एक टंकी को 2 घण्टे में भरता है। टंकी में रिसाव होने के कारण टंकी भरने में 3 घण्टे लग जाते हैं यदि टंकी पूरी भरी हो तो रिसाव के कारण खाली होने में कितना समय लगेगा?

हलः— पंप द्वारा 2 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग = 1

इसलिए पंप द्वारा 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग = $\frac{1}{2}$

माना रिसाव के कारण x घण्टे में टंकी का खाली हुआ भाग = 1

तब रिसाव के कारण 1 घण्टे में टंकी का खाली हुआ भाग = $\frac{1}{x}$

चूँकि रिसाव के बावजूद पंप द्वारा 3 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग = 1

इसलिए रिसाव के बावजूद 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग = $\frac{1}{3}$

रिसाव के बावजूद 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग

= पंप द्वारा 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग

− रिसाव के कारण 1 घण्टे में टंकी का खाली हुआ भाग

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x-2}{2x}$$

$$2x = 3x - 6$$

$$x = 6$$

अतः रिसाव के कारण टंकी 6 घण्टे में खाली हो जाएगी।

करके देखें

1. तीन व्यक्ति A, B तथा C किसी काम को क्रमशः 12 दिन, 15 दिन तथा 10 दिन में समाप्त कर सकते हैं। यदि उस काम को तीनों मिलकर करें तो काम पूरा होने में कितने दिन लगेंगे।

प्रश्नावली– 3

1. यदि 29 पुस्तकों का मूल्य 783 रूपए है तो 2214 रू. में कितनी पुस्तकें मिलेगी ?
2. यदि $14 : 35 : : 16 : x$ हो, तो x का मान पता करें।
3. $2xy, x^2, y^2$ का चतुर्थानुपाती पता करें।
4. संख्याएँ 10, 18, 22, 38 में से हर एक संख्या में क्या जोड़ा जाए कि ये संख्याएँ समानुपाती हो जाए?
5. यदि a और c का मध्यानुपाती b हो तो, सिद्ध करें कि

   $$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a+c}{b}.$$
6. वे संख्याएँ पता करें जिनका मध्यानुपाती 24 और तृतीयानुपाती 192 हो।
7. यदि $(1+x) : (3+x) : (6+x)$ हो, तो x का मान पता करें।
8. दो संख्या 3:5 के अनुपात में है यदि प्रत्येक में से 9 घटाया जाए तो वे 12:23 के अनुपात में हो जाती हैं। बताइए पहली संख्या क्या है?
9. किसी काम को 45 मजदूर प्रतिदिन 6 घण्टा काम करते हुए 24 दिनों में पूर्ण कर लेते हैं। बताइए कितने मजदूर उस काम को 8 घण्टा प्रतिदिन करते हुए 15 दिन में पूर्ण कर लेंगे?
10. किसी काम 25 व्यक्ति 6 घण्टे प्रतिदिन करके 9 दिन में पूर्ण करते हैं तो बताइए 15 व्यक्ति 9 घण्टा प्रतिदिन काम करके उस काम को कितने दिन में पूर्ण कर लेंगे ?
11. यदि 30 आदमी किसी काम को 6 घण्टे प्रतिदिन करके 15 दिन में पूर्ण करते हैं। उसी काम को 20 आदमी कितने घण्टे प्रतिदिन काम करके 15 दिन में ही पूर्ण कर लेंगे ?
12. एक कार सरायपाली से 75 किमी प्रति घण्टा की औसत चाल से चलकर रायपुर 4घण्टे में पहुँचती है। मार्ग में बाधा व ट्रैफिक बढ़ जाने के कारण कार की औसत चाल 15 किमी प्रति घण्टा कम हो जाती है। कार को रायपुर पहुँचने में कितना समय लगेगा ?
13. यदि 10 बल्बों को 60 दिन तक 4 घण्टे प्रतिदिन जलाने में 80 रू. का विद्युत् व्यय आता है तो कितने बल्ब 16 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन जलाए जाने पर 40 रू. का विद्युत् व्यय आएगा?
14. किसी काम को 48 मजदूर 8 घण्टे प्रतिदिन काम करके 25 दिन में पूर्ण करते हैं। 30 आदमी इस काम से दुगुने काम को 10 घण्टे प्रतिदिन करके कितने दिन में पूर्ण कर लेंगे?

15. A और B मिलकर किसी काम को 24 दिन में, B और C मिलकर उसी काम को 18 दिन में तथा A और C मिलकर उसी काम को 12 दिन में करते हैं। बताइए A अकेले उस काम को कितने दिन में पूरा कर लेगा?
16. किसी काम को पूरा करने में 15 व्यक्तियों को 16 दिन लगते हैं। कितने व्यक्ति उस काम के चौथाई भाग को 15 दिन में पूरा कर सकते हैं?
17. किसी कैम्प में 120 सैनिकों के लिए 60 दिन की खाद्य सामग्री पर्याप्त थी। यदि 40 दिन बाद 40 सैनिक अन्यत्र चले गए तो शेष खाद्य सामग्री बचे हुए सैनिकों के लिए कितने दिन चलेगी?
18. यदि 11 मकड़ियाँ 11 दिनों में 11 जालें बनाती हैं तो बताइए 1 मकड़ी 1 जाल बनाने में कितने दिन लगेगी।
19. दो नल एक टंकी को पूरा भरने में 6 घण्टे का समय लेते हैं। यदि एक नल को खोलने पर 10 घण्टे में पूरा भर लेता है। तो बताइए केवल दूसरा नल खोलने पर टंकी भरने में कितना समय लगेगा।

EJU4XT

हमने सीखा

1. दैनिक जीवन में प्रायः कई बार तुलना करने की आवश्यकता पड़ती है। यह तुलना बहुत बार अनुपात से स्पष्ट हो पाती है। अर्थात दो राशियों की तुलना अनुपात से बेहतर तरीके से कर सकते हैं।
2. खिलाड़ियों के प्रदर्शन की तुलना करनी हो अथवा बाजार में कोई वस्तु खरीदनी हो तो हम तुलना के आधार पर ही उनकी श्रेष्ठता का निर्धारण कर पाते हैं।
3. तुलना समान प्रकार की राशियों में ही की जाती है अर्थात अनुपात दो सजातीय राशियों की तुलना होती है।
4. कभी–कभी हमें दो अनुपातों की तुलना करने की जरूरत पड़ती है। दो अनुपातों की तुलना समानुपात कहलाती है।
5. किसी राशि को दो या दो से अधिक भागों में बाँटने में अनुपात का उपयोग किया जाता है।
6. दैनिक जीवन में हम ऐसी कई परिस्थितियाँ देखते हैं जहाँ एक राशि के बढ़ने या घटने से दूसरी राशि घट या बढ़ जाती है। ये राशियाँ व्युत्क्रम अनुपात में होती हैं।

उत्तरमाला–1

1. धीरेन्द्र
2. 11.4 किमी / घंटा
3. 7:193, 3.5%, 96.5%
4. $5\frac{1}{7}$ दिन
5. 1% अधिक है
6. 48 दिन

उत्तरमाला–2

1. 52,104,208
2. 23:33:60
3. 40,000रू.,20,000रू.,10,000रू., चार गुना
4. 53,106,265
5. 4 लीटर

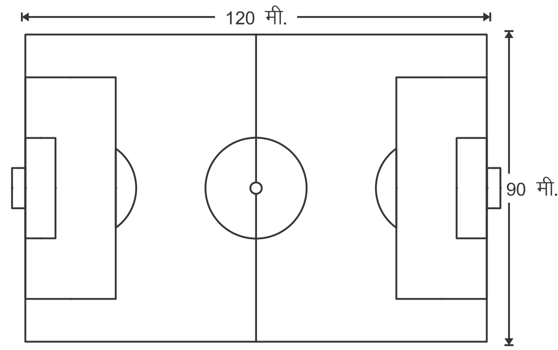
उत्तरमाला–3

1. 82
2. 40
3. $\frac{xy}{2}$
4. 2
6. 12 व 48
7. 3
8. 27
9. 54 मजदूर
10. 10 दिन
11. 9 घण्टे प्रतिदिन
12. 5 घण्टे
13. 25 बल्ब
14. 64 दिन
15. $28\frac{4}{5}$ दिन
16. 4व्यक्ति
17. 30 दिन
18. 11 दिन
19. 15 घण्टे

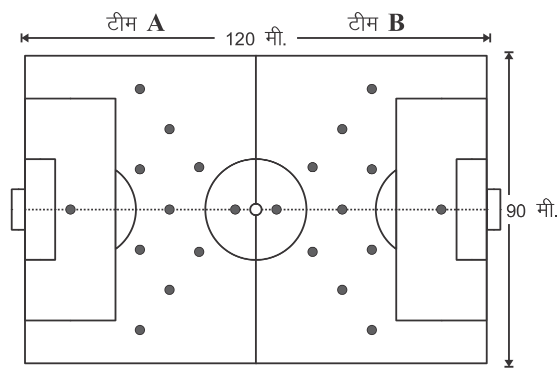
अध्याय 06

निर्देशांक ज्यामिति
[COORDINATE GEOMETRY]

EK3ZZG



चित्र–(i)



चित्र–(ii)

आपने फुटबॉल का मैदान देखा ही होगा शायद खेला भी हो। यह तो हमें पता है कि खेल शुरू होने के पहले फुटबॉल को मैदान के ठीक बीच रखते हैं। दोनों टीमों के खिलाड़ी मैदान में आमने–सामने रहते हैं एक टीम एक तरफ तथा दूसरी टीम दूसरी तरफ। मैदान में दोनों तरफ गोल पोस्ट होते हैं जैसा कि आप चित्र (i) में देख रहे हैं। यह बीच में रखे फुटबॉल से बराबर–बराबर दूरी पर होते हैं।

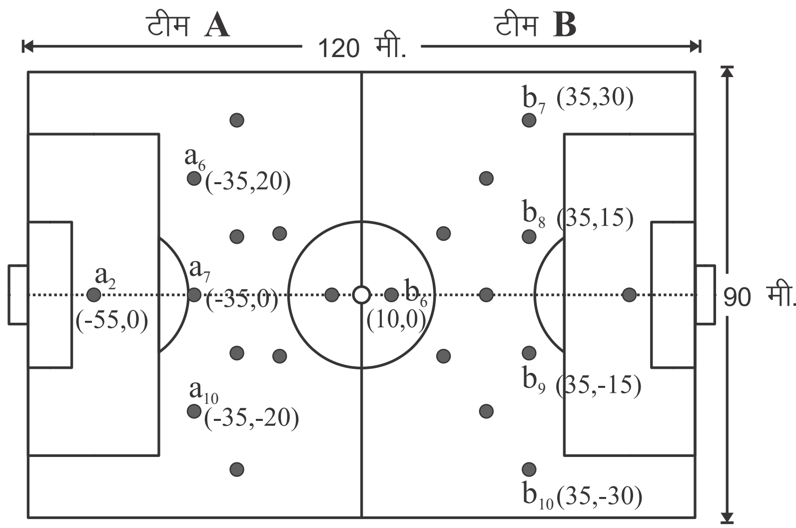
फुटबॉल के मैदान की मानक लंबाई 120 मीटर तथा मानक चौड़ाई 90 मीटर होती है। हालांकि खेल तो कितने भी बड़े मैदान पर हो सकता है। मैदान में खिलाड़ी अपनी–अपनी तरफ अपनी भूमिका अनुसार फैले रहते हैं हालांकि खेलते समय वे मैदान में हर जगह जा सकते हैं। दिए गए चित्र (ii) में हम दोनों टीमों के खिलाड़ियों की शुरूआती स्थिति को देखते हैं चित्र के बायें भाग में टीम A है तथा दायें भाग में टीम B है।

फुटबॉल मैदान के ठीक मध्य बिंदु पर है। मैदान पर मध्य रेखा जो दोनों टीमों को अलग–अलग करती है, खींची रहती है। अब इसके लंबवत एक खड़ी रेखा खींची हो तो, फुटबॉल का मैदान चार भागों में बँट जाएगा। हमने ऐसा करके चित्र (iii) बनाया है। चित्र में मैदान के बायीं ओर टीम A के खिलाड़ी और दायीं ओर टीम B के खिलाड़ी हैं। बायीं ओर टीम A के खिलाड़ी की शुरूआती स्थिति को $a_1, a_2, a_3.....\ a_{11}$ तथा दायीं ओर टीम B के खिलाड़ियों की शुरू में स्थिति को $b_1, b_2, b_3.......b_{11}$ से दर्शाया गया है।

आप देख सकते हैं कि दोनों गोलकीपर सबसे पीछे गोलपोस्ट के पास हैं उसके बाद फुलबैक हैं जो गोल पोस्ट से लगभग 20-25 मीटर आगे है। फिर मिड फील्डर हैं जो 40-45 मीटर आगे हैं। ठीक मध्य रेखा के पास दोनों तरफ के फार्वर्ड अपनी–अपनी ओर स्थित हैं।

हम बायीं ओर यानी टीम A की दिशा को ऋणात्मक दिशा व दायीं ओर टीम B की दिशा को धनात्मक दिशा मानेंगे। उनकी स्थिति को इंगित करने के लिए हम मध्य बिन्दु से गुजर रही रेखाओं से उनकी दूरी का इस्तेमाल करेंगे।

गोलकीपर दोनों तरफ मध्य बिंदु से 55 मीटर दूर है किन्तु आड़ी रेखा पर स्थित हैं अतः इन्हें (55, 0) व (–55, 0) से निरूपित करेंगे। इसी तरह टीम A के फुल बैक, आड़ी रेखा के ऊपर के भाग में मध्य बिंदु (मध्य रेखा के) से –35 और टीम B के +35 रेखा पर डटे हैं। टीम A ने 3 फुल बैक रखे हैं और टीम B के 4 फुल बैक हैं। ये सभी बीच की रेखा से ऊपर की ओर, जिसे हम (+) मानेंगे और नीचे की ओर, जिसे हम (–) मानेंगे, पर हैं।



चित्र–(iii)

टीम A के तीन फुल बैक (–35, 20), (–35, 0) और (–35, –20) पर स्थित हैं इसी तरह टीम B के चार फुल बैक (+35, 30), (+35, +15), (+35, –15) और (+35, –30) पर स्थित हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

अब आप भी अपने दोस्तों के साथ मिलकर मैदान में फैले हुए दोनों टीमों के बाकी खिलाड़ियों की स्थिति पता कर उनके बिंदु लिखिए। (चित्र–ii)

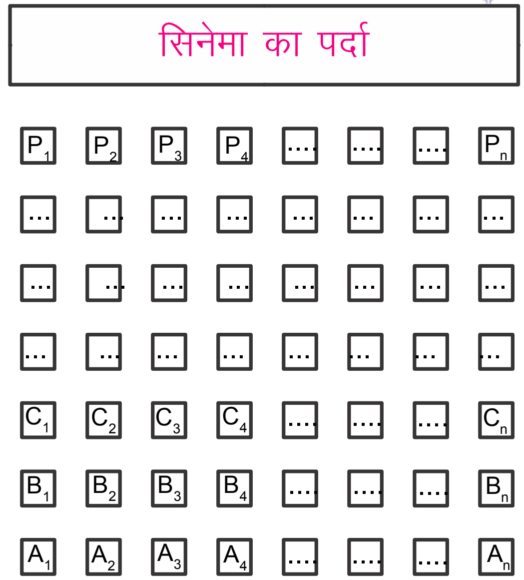
करके देखें

1. वॉलीबाल के मैदान के नेट को मध्य रेखा मानकर इसके मध्य ठीक बीचो–बीच एक लंबवत रेखा खींचिए तथा इसके कटान मध्य बिंदु से सभी खिलाड़ियों की स्थिति पता कीजिए।

2. क्रिकेट के मैदान में बल्लेबाज की स्थिति को मध्य बिंदु पर एक आड़ी रेखा के लंबवत एक रेखा खींचकर खिलाड़ियों की स्थिति को दर्शाइए व उन बिंदुओं को लिखिए।

आइए एक और उदाहरण से किसी तल पर रखी वस्तुओं की स्थिति का पता लगाते हैं आप कभी अपने शहर या कस्बे के सिनेमाघर में कोई फिल्म देखने गए होंगे। क्या आपको याद है कि आपने अपनी सीट कैसे ढूँढ़ी थी? कुछ सिनेमाघरों में कुर्सी की पंक्तियों को A,B,C,D.... आदि

नाम देकर प्रत्येक पंक्ति की कुर्सियों को क्रमांक 1,2,3,4 दे दिया जाता है। इस तरह सभी कुर्सियों को कोई न कोई नाम जैसे – A_1, A_2, B_4, C_{19}, D_{40} मिल जाता है।

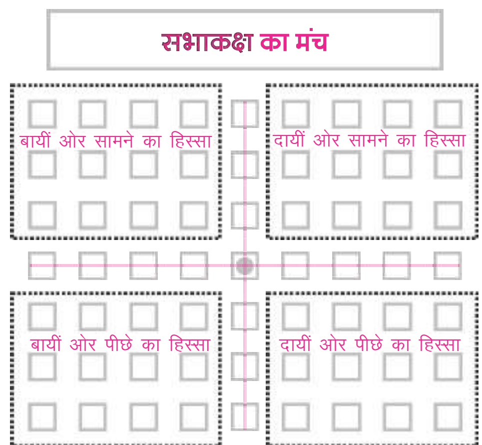


चित्र–(iv)

मान लें किसी बड़े सभाकक्ष में आड़ी और खड़ी अनेक कतारों में कुर्सियाँ रखी हुई हैं। आप सभाकक्ष के ठीक बीच वाली कुर्सी पर बैठे हैं। आपके मित्रों के बैठने की जगह कहाँ–कहाँ है, यह आपको पता है।

यह उन्हें कैसे बताएँगे?

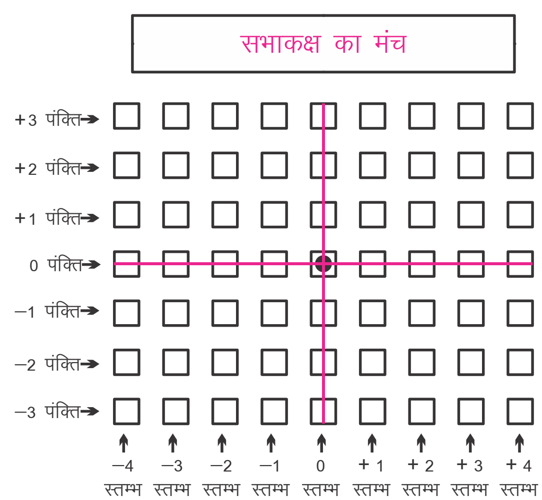
आप जिस कुर्सी पर बैठे हैं उसके नीचे एक आड़ी पट्टी है जो सभाकक्ष के बायें से दायें किनारे तक गई है। यह पट्टी सभाकक्ष के फर्श को दो हिस्सों में बाँटती है। आपके सामने का हिस्सा और आपके पीछे का हिस्सा। इससे आप सभाकक्ष की कुर्सियों के बारे में बता सकते हैं कि उनकी स्थिति कहाँ पर है जैसे आपके सामने की कुर्सियाँ, पीछे की कुर्सियाँ और पट्टी के ऊपर रखी कुर्सियाँ।



चित्र–(v)

यदि ऐसी ही एक और पट्टी आपकी कुर्सी के नीचे से गुजरती हो जो पहली पट्टी के लंबवत हो और सभाकक्ष के सामने से पीछे तक जाती हो, तो यह पट्टी भी सभाकक्ष को दो हिस्सों में बाँटेगी। आपके दायीं ओर का हिस्सा और आपके बायीं ओर का हिस्सा। इसी तरह कुर्सियों के बारे बताने के लिए भी आपके पास कुछ नई बात होगी जैसे आपके दायीं ओर की कुर्सियाँ, आपके बायीं ओर की कुर्सियाँ और इस खड़ी पट्टी के ऊपर रखी कुर्सियाँ।

अब आप देखेंगे कि सभाकक्ष का समतल (फर्श) चार हिस्सों में बँट गया है। इसके साथ–साथ कुर्सियाँ भी चार हिस्सों में बँट गई हैं। कुर्सियों के संदर्भ में यह बात ध्यान में रखनी होगी कि आड़ी और खड़ी पट्टियों पर भी कुर्सियाँ रखी हुई हैं जो चारों हिस्सों को अलग करती हैं और उनमें शामिल नहीं हैं।



चित्र–(vi)

पिछली कक्षाओं में आपने संख्या रेखा का उपयोग किया है। यहाँ भी उसकी सहायता लेंगे। मानलें आपकी कुर्सी के नीचे से जाने वाली आड़ी और खड़ी पट्टियाँ दो संख्या रेखाएँ हैं जो एक दूसरे के लंबवत हैं और एक दूसरे को वहाँ काटती हैं जहाँ

आपकी कुर्सी रखी है यानी सभा कक्ष के ठीक बीच में। आपकी कुर्सी ही वह जगह है जहाँ दोनों संख्या रेखाओं का शून्य है। तो अब इस आड़ी पट्टी पर आपके दायीं ओर रखी कुर्सियों को क्रमशः +1, +2, +3, +4 आदि पर रखी गई कुर्सियाँ तथा बायीं ओर रखी कुर्सियों को क्रमशः –1, –2, –3, –4 आदि पर रखी गई कुर्सियाँ कह सकते हैं। इसी तरह खड़ी पट्टी पर आपके सामने और पीछे की कुर्सियों को क्रमशः +1, +2, +3, +4 और –1, –2, –3, –4 की कुर्सियाँ कह सकते हैं।

क्या हम सभाकक्ष में रखी कुर्सियों की कतारों को भी नाम दे सकते हैं?

यदि हम कुर्सियों की खड़ी कतारों को **स्तम्भ** तथा आड़ी कतारों को **पंक्ति** कहें तो आप कह सकेंगे कि आपकी कुर्सी के नीचे से जाने वाली खड़ी पट्टी एक स्तम्भ है जो आड़ी संख्या रेखा के शून्य से गुजरती है। आपके दायीं ओर के सभी स्तम्भ आड़ी संख्या रेखा के क्रमशः +1, +2, +3, +4 आदि से गुजरते हैं। इन्हें हम +1 स्तम्भ, +2 स्तम्भ, +3 स्तम्भ कहेंगे। इसी तरह बायीं ओर के स्तम्भों को क्रमशः –1 स्तम्भ, –2 स्तम्भ, –3 स्तम्भ कहेंगे।

आपकी कुर्सी के नीचे से जाने वाली खड़ी पट्टी को क्या कहेंगे?

स्पष्ट है इसे आप 0 स्तम्भ (शून्य स्तम्भ) कहेंगे।

ठीक इसी तरह आड़ी पट्टी शून्य पंक्ति और इसके ऊपर की पंक्तियाँ +1 पंक्ति, +2 पंक्ति, +3 पंक्ति तथा नीचे की पंक्तियाँ –1 पंक्ति, –2 पंक्ति, –3 पंक्ति कहलाएँगी।

आपके मित्र A,B,C,D और E सभी आपके पास हॉल के बीच में ही खड़े हैं और उन्हें अपने लिए निर्धारित कुर्सियों पर जाना है। उनके स्थान चित्र (vii) में दिखाए गए हैं। आइए उन्हें उनकी जगह बताएँ।

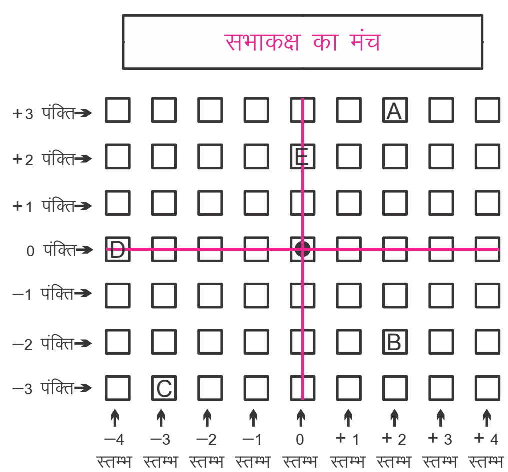
A का स्थान – स्तंभ 2, पंक्ति 3 पर रखी कुर्सी

B का स्थान – स्तंभ 2, पंक्ति –2 पर रखी कुर्सी

C का स्थान – स्तंभ –3, पंक्ति –3 पर रखी कुर्सी

D का स्थान – स्तंभ –4, पंक्ति 0 पर रखी कुर्सी

E का स्थान – स्तंभ 0, पंक्ति 2 पर रखी कुर्सी



चित्र–(vii)

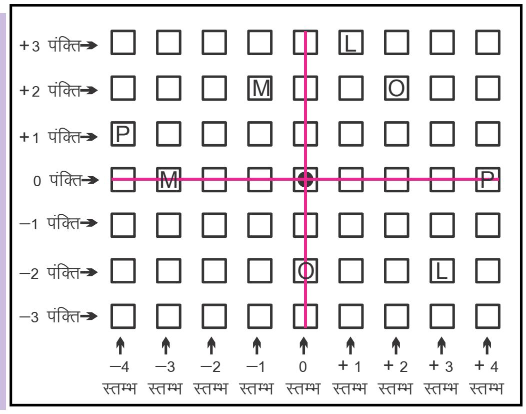
सोचें और चर्चा करें

आपकी कुर्सी किस जगह पर है?

करके देखें

1. एक बगीचे में आड़ी और खड़ी कतारों में पौधे लगे हुए हैं। उन्हें स्तम्भों और पंक्तियों में दर्शाया गया है। L, M, O, P क्रमशः नीबू, आम, संतरे और पपीते के पौधों को प्रदर्शित करते हों, तो उनके स्थान स्तंभ और पंक्ति के रूप में लिखें।

पौधे	स्तम्भ और पंक्ति
नींबू	(+1 स्तम्भ, +3 पंक्ति), ...
..	
आम	................................., ...
....	
संतरा	................................., ...
....	
पपीता	................................., ...
....	



फुटबॉल के मैदान के चित्र (iii) को देखकर नीचे दी गई तालिका पूरी कीजिए –

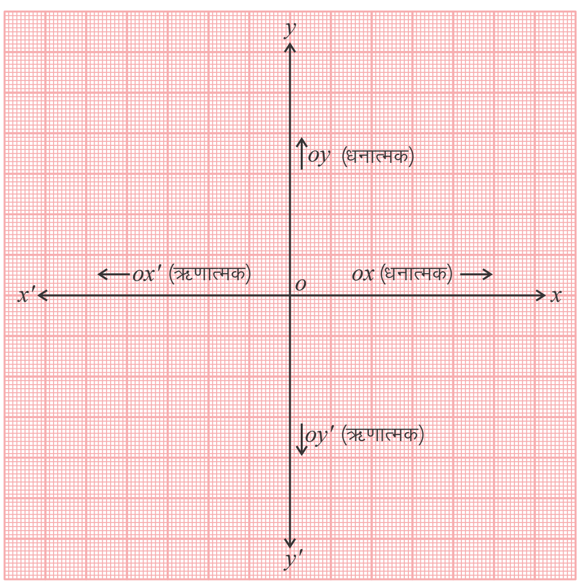
खिलाड़ी	फुटबॉल से खिलाड़ी की दूरी		खिलाड़ी की स्थिति
	कितने बाएँ/दाएँ चले ?	कितने इकाई ऊपर/नीचे चले ?	
a_2			
a_6			
a_7			
a_{10}			
b_6			
b_7			
b_8			
b_9			
b_{10}			

ऊपर के उदाहरणों में आपने यह देखा कि एक तल पर रखी हुई किसी वस्तु की स्थिति दो परस्पर लंब रेखाओं की सहायता से बताई जा सकती है। इस विचारधारा से गणित की एक महत्वपूर्ण शाखा **निर्देशांक ज्यामिति** (Coordinate Geometry) की उत्पत्ति हुई। इस अध्याय में निर्देशांक ज्यामिति की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं से हम आपको परिचित कराएँगे।

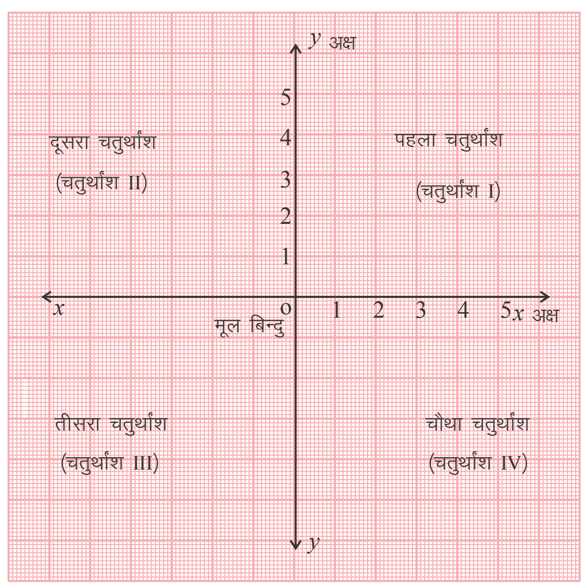
प्रारंभ में फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ **रेने दकार्ते** ने इस पर अध्ययन किया, उन्होंने एक तल में एक बिंदु की स्थिति का निर्धारण करने की समस्या का हल प्राप्त कर लिया। उनकी विधि अक्षांश और देशांतर की विचारधारा का ही एक विकसित रूप थी। एक तल पर स्थित किसी बिंदु की स्थिति का निर्धारण करने में प्रयुक्त पद्धति को दकार्ते के सम्मान में **कार्तीय पद्धति (Cartesian System)** भी कहा जाता है।

दकार्ते ने एक तल पर परस्पर लंबवत दो रेखाओं को खींचने और इन रेखाओं के सापेक्ष तल पर बिंदुओं का स्थान निर्धारण करने का विचार प्रस्तुत किया। लंब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं। इस अध्याय में हमने एक क्षैतिज (आड़ी) और दूसरी उर्ध्वाधर (खड़ी) रेखा का उपयोग किया है। दोनों रेखाएँ एक दूसरे को जिस बिंदु पर काटती हैं उसे **मूलबिंदु** (Origin) कहा जाता है। इसे O से प्रदर्शित किया जाता है। क्षैतिज रेखा X'X को x- अक्ष और उर्ध्वाधर रेखा YY' को y- अक्ष कहा जाता है। चूँकि OX और OY दिशाओं में धनात्मक संख्याएँ स्थित हैं इसलिए OX और OY को क्रमशः x- अक्ष और y- अक्ष की धनात्मक दिशाएँ कहा जाता है। इसी प्रकार, OX' और OY' को क्रमशः x- अक्ष और y- अक्ष की ऋणात्मक दिशाएँ कहा जाता है।

ये दोनों अक्ष तल को चार बराबर भागों में विभाजित करते हैं। इन चार भागों को **चतुर्थांश (quadrants)** कहा जाता है। इन्हें OX से वामावर्त दिशा में क्रमशः I, II, III और IV चतुर्थांश कहा जाता है। इस प्रकार, इस तल में दोनों अक्ष और चारों चतुर्थांश सम्मिलित हैं। इस तल को कार्तीय तल (Cartesian plane) या निर्देशांक तल (Coordinate plane) या xy तल (xy-plane) कहते हैं। अक्षों को निर्देशांक अक्ष (Coordinate axes) कहा जाता है।



आलेख–01



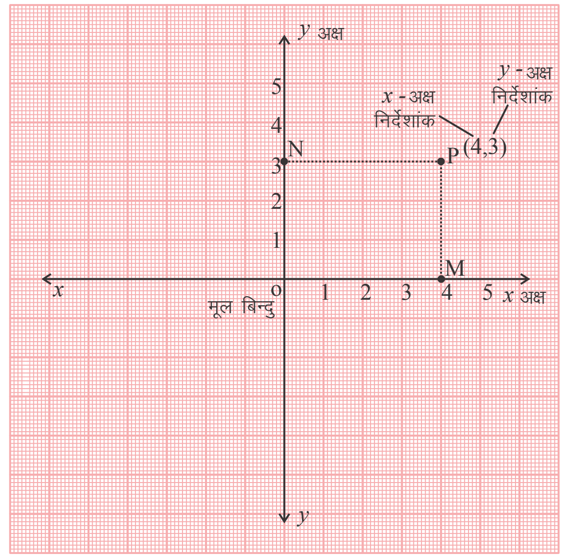
आलेख–02

निर्देशांक समतल में किसी बिंदु की स्थिति का पता लगाना :–

हम निर्देशांक समतल पर किसी बिंदु का पता कैसे करेंगे, आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं।

एक ग्राफ पेपर पर x और y अक्ष खींचिए। पहले चतुर्थांश में कहीं पर एक बिंदु P लीजिए। P से x और y अक्ष पर क्रमशः लम्ब PM और PN डालिए।

यहाँ y अक्ष से बिंदु P की लंबवत दूरी PN 4 इकाई है। (इसे x अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है।) और x अक्ष से बिंदु P की लंबवत दूरी PM 3 इकाई है। (इसे y अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है।) इन दूरियों की सहायता से बिंदु P का निर्धारण करेंगे। किसी बिंदु का निर्धारण करने के लिए हम निम्नलिखित परंपराओं का ध्यान रखते हैं :



आलेख–03

1. किसी बिंदु का x-निर्देशांक y- अक्ष से इस बिंदु की लंबवत दूरी है जिसे x- अक्ष पर मापा जाता है। यह दूरी x- अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और x- अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है। बिंदु P के लिए यह +4 है। x-निर्देशांक को **भुज (abscissa)** कहा जाता है।

2. किसी बिंदु का y-निर्देशांक x- अक्ष से इस बिंदु की लंबवत दूरी है जिसे y- अक्ष पर मापा जाता है। यह दूरी y- अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और y- अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है। बिंदु P के लिए यह +3 है। y-निर्देशांक को **कोटि (ordinate)** कहा जाता है।

3. निर्देशांक तल में किसी बिंदु के निर्देशांक लिखते समय पहले x-निर्देशांक लिखते हैं और उसके बाद y-निर्देशांक लिखते हैं। निर्देशांकों को कोष्ठक के अंदर लिखा जाता है।

   अतः बिंदु P के निर्देशांक (4,3) हैं।

उदाहरणः–1. बिंदु A (4,5) को निर्देशांक समतल में प्रदर्शित कीजिए।

हलः– चूँकि x-निर्देशांक +4 है अर्थात बिंदु की y-अक्ष से लंबवत दूरी +4 है। इसलिए पहले हम x-अक्ष की धनात्मक दिशा अर्थात OX दिशा में +4 इकाई बढ़ेंगे। चूँकि y-निर्देशांक +5 है, अर्थात बिंदु की x-अक्ष से लंबवत दूरी +5 है। इसलिए अब हम y-अक्ष की धनात्मक दिशा अर्थात OY दिशा में +5 इकाई बढ़ेंगे। इस तरह हमें बिंदु A (4,5) प्राप्त हुआ।

उदाहरणः–2. बिंदु B (-4,5) को दर्शाइए।

हलः– बिंदु B का x-निर्देशांक –4 है, तो हमें किस दिशा में बढ़ना होगा?

चूँकि बिंदु B का x-निर्देशांक ऋणात्मक है इसलिए हम x-अक्ष में OX' की दिशा में आगे बढ़ेंगे। आगे के चरण आप स्वयं करें और निर्देशांक समतल में बिंदु B (-4,5) को दर्शाइए।

करके देखें

1. नीचे कुछ बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं। ये किस–किस चतुर्थांश में स्थित हैं? प्रत्येक को निर्देशांक समतल पर प्रदर्शित कीजिए–

   (i) (5,7)   (ii) (-2,5)   (iii) (2,-2)   (iv) (-4,-5)

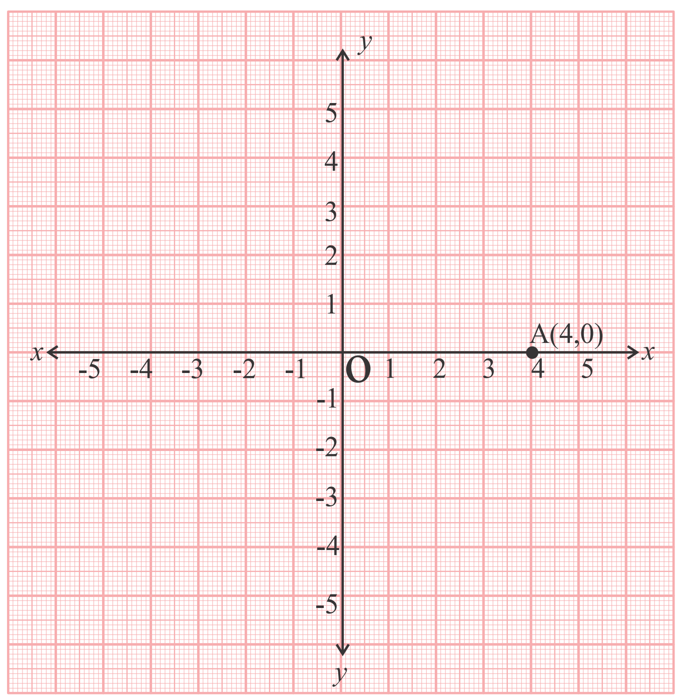
2. कोई भी 5 और निर्देशांक जोड़े लिखें। उन्हें उनके चर्तुथांशों पर उपयुक्त स्थान पर प्रदर्शित करें।

अक्षों पर बिंदु :

यदि कोई बिंदु x-अक्ष पर हो तो उसके निर्देशांक क्या होंगे? हम जानते हैं कि किसी बिंदु तक पहुँचने के लिए हमें दो दूरियाँ चलनी होती हैं। पहला x-अक्ष के अनुदिश (y-अक्ष के लंबवत), दूसरा y-अक्ष के समांतर (x-अक्ष के लंबवत) अब यदि कोई बिंदु x-अक्ष पर ही स्थित हो तो हमें मूल बिंदु से उस बिंदु तक केवल एक दूरी चलनी होगी। चूँकि y-अक्ष के समांतर चली गई दूरी शून्य होगी। इसलिए उस बिंदु का y-निर्देशांक शून्य होगा। अतः x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(x,0)$ या $(-x,0)$ होंगे। जैसे x-अक्ष पर स्थित बिंदु A के निर्देशांक (4,0) हैं।

इसी तरह y-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(0,y)$ या $(0,-y)$ होंगे।

स्पष्ट है कि मूलबिंदु O के निर्देशांक (0,0) होंगे।



आलेख–04

उदाहरणः–3. निर्देशांक समतल पर बिंदु P(3,0) को दर्शाइए।

हलः– चूँकि बिंदु P का y-निर्देशांक 0 है, इसलिए x-अक्ष से इस बिंदु की लंबवत् दूरी शून्य है। अतः यह बिंदु x-अक्ष पर होगा। बिंदु P का x-निर्देशांक 3 है, इसलिए यह बिंदु OX की दिशा में मूलबिंदु से 3 इकाई की दूरी पर होगा।

करके देखें

1. बिंदुओं B (0,4), C (-4,0) और D (0,-2) को निर्देशांक समतल पर दर्शाइए।
2. तीन ऐसे अलग–अलग बिन्दुओं के निर्देशांक लिखें जो x-अक्ष पर हैं।
3. इसी तरह y-अक्ष पर स्थित तीन अलग–अलग बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए।

प्रश्नावली – 01

1. नीचे कुछ बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं उन्हें निर्देशांक समतल पर प्रदर्शित कर बताइए कि बिंदु किस चतुर्थांश में हैं ?

   (i) (3,4) (ii) (-5,6) (iii) (-2,-1) (iv) (2.5, -7)

2. निम्नलिखित बिंदुओं के निर्देशांक के आधार पर बताइए कि बिंदु किस अक्ष पर स्थित है?

   (i) (0,5) (ii) (-6,0) (iii) (-3,0) (iv) (0, -3.5)

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) बिंदु P (-4,-7) __________ चतुर्थांश में स्थित है।

   (ii) x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु का y-निर्देशांक ________ होता है।

   (iii) निर्देशांक समतल पर दोनों अक्ष परस्पर _______ होते हैं।

   (iv) y-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु का x-निर्देशांक ________ होता है।

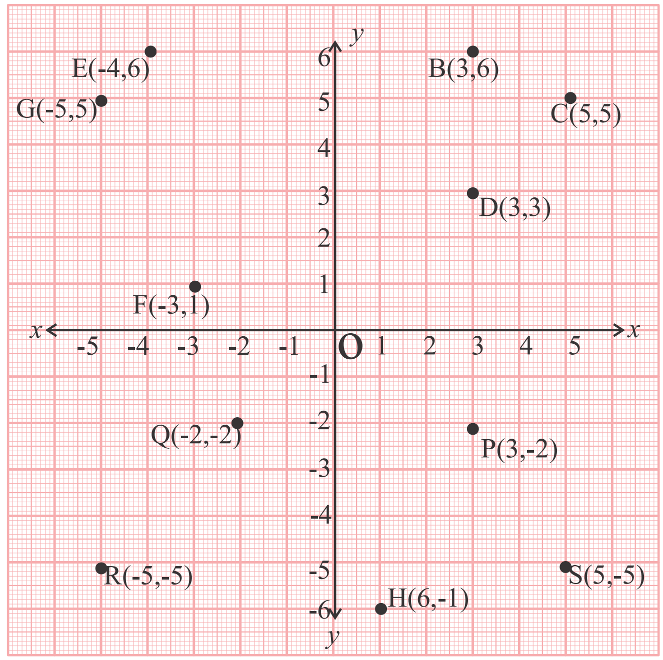
   (v) मूल बिंदु के निर्देशांक ________ होते हैं।

4. आलेख–05 में प्रदर्शित बिंदुओं की स्थितियों का अवलोकन कर निम्नलिखित निर्देशों के अनुसार कार्य कीजिए–

a) ऐसे बिंदुओं को लिखिए जिनके x-निर्देशांक समान हैं।

b) ऐसे बिंदुओं को लिखिए जिनके y-निर्देशांक समान हैं।

c) ऐसे बिंदुओं को लिखिए जिनके x-निर्देशांक और y-निर्देशांक समान हैं।



आलेख–05

बिंदुओं के बीच की दूरी

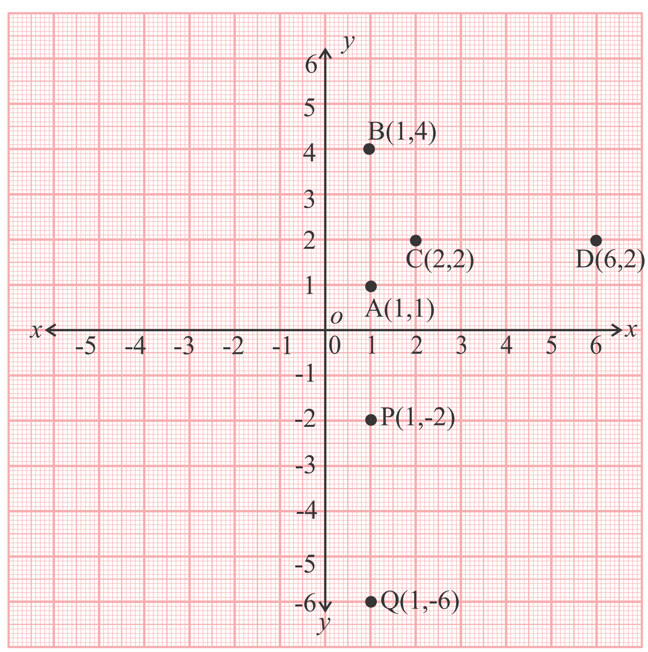
दिए गए आलेख में चार बिंदुओं A, B, C और D को प्रदर्शित किया गया है। क्या आप बता सकते हैं कि A, B और C, D बिंदुओं के बीच की दूरियाँ कितनी–कितनी हैं?

क्या बिंदु A और बिंदु B के बीच की दूरी AB , बिंदु C और बिंदु D के बीच की दूरी CD से कम है या दोनों दूरियाँ बराबर हैं? हम उन दोनों बिंदुओं के बीच की दूरी कैसे ज्ञात करेंगे जिनके निर्देशांक दिए गए हों?

उन दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना आसान है जो क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर अक्षों पर या उनके समांतर किसी रेखा पर स्थित जैसे हों। जैसे – A (1,1) व B (1,4)। इसी तरह C (2,2) और D (6,2) हैं।

इनमें पहले दोनों बिंदुओं के y-निर्देशांकों का अंतर लेने पर दूरी AB तथा बाद के दो बिंदुओं के x-निर्देशांकों का अंतर लेने पर दूरी CD क्रमशः प्राप्त कर सकते हैं।

दूरी AB = 4–1 = 3 इकाई



आलेख–06

(चूँकि AB = $y_2 - y_1$, क्योंकि x_2 और x_1 बराबर हैं।)

दूरी CD = 6–2 = 4 इकाई

(चूँकि CD = $x_2 - x_1$, क्योंकि y_1 और y_2 बराबर हैं।)

इसी तरह P (1,–2) और Q (1,–6) के बीच की दूरी

PQ = $y_2 - y_1$ क्योंकि x_2 और x_1 बराबर हैं।

PQ = –6 – (–2) = –4

दूरी धनात्मक ली जाती है। अतः PQ = 4 इकाई

करके देखें

इन बिंदुओं के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए ।

(i) (5,8) और (5,-3)

(ii) (2,3) और (2,7)

किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच की दूरी –

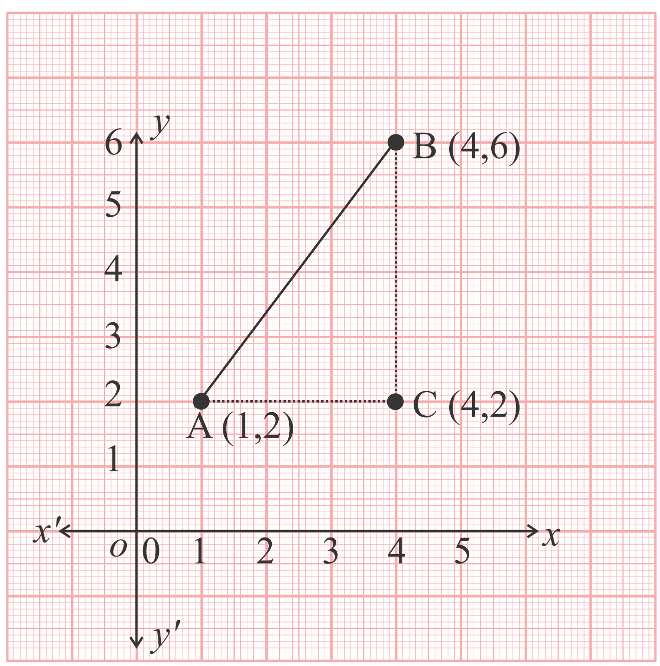
पिछले उदाहरण में ऐसी परिस्थिति में किन्हीं दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात की गई जिसमें रेखा अंतराल AB, CD अथवा PQ या तो उर्ध्वाधर हैं या क्षैतिज।

यदि ऐसे दो बिंदु हों जो उर्ध्वाधर या क्षैतिज रेखा अथवा उनके समांतर रेखा पर न हों यानी ऐसा रेखा अंतराल हो जो न तो उर्ध्वाधर हो न ही क्षैतिज तो उनके बीच की दूरी कैसे ज्ञात करेंगे? आइए एक उदाहरण देखें –

उदाहरणः–4. बिंदुओं A (1,2) और B (4,6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल :– बिंदु A से x-अक्ष के समांतर रेखा खींचिए। इसी तरह बिंदु B से y-अक्ष के समांतर रेखा खींचिए। ये दोनों रेखाएँ बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती हैं।

दूरी AC= 4–1= 3 इकाई



आलेख–07

और दूरी BC= 6–2 = 4 इकाई।

त्रिभुज ABC में बौधायन– पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 3^2 + 4^2$

$= 9 + 16$

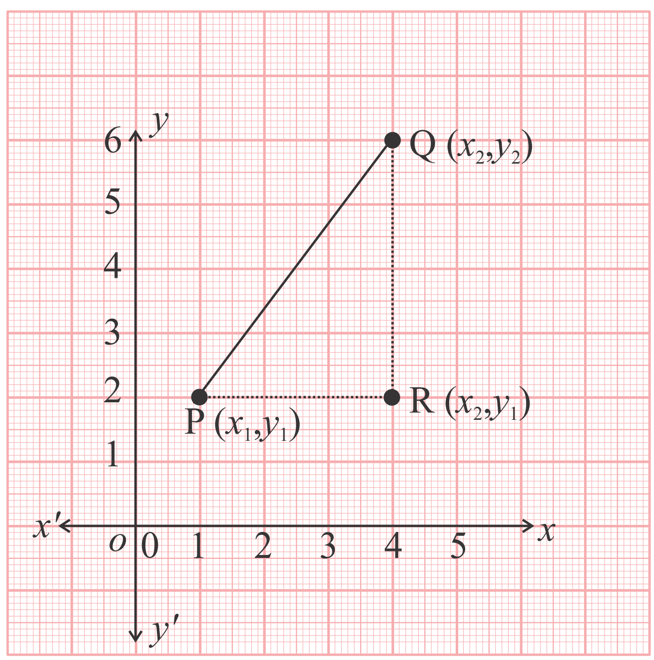
$= 25$

दूरी AB = 5 इकाई।

व्यापक परिस्थिति में दूरी

निर्देशांक समतल में किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए हमें ऐसा तरीका चाहिए जो हर तरह की दूरियों पर लागू हो। हम Q और P के बीच दूरी निकालेंगे।

मान लीजिए कि बिंदु P के निर्देशांक (x_1,y_1) और Q के निर्देशांक (x_2,y_2) हैं।



आलेख–08

समकोण त्रिभुज PRQ में,

दूरी PR= $x_2 - x_1$

दूरी QR= $y_2 - y_1$

समकोण त्रिभुज PRQ में बौधायन–पाइथागोरस प्रमेय से

$PQ^2 = PR^2 + QR^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

चूँकि $(x_1 - x_2)^2$ और $(x_2 - x_1)^2$ बराबर हैं इसलिए हम बिंदु P से बिंदु Q की दूरी ज्ञात करें या बिंदु Q से बिंदु P की दूरी ज्ञात करें, परिणाम में अंतर नहीं पड़ेगा।

अर्थात दूरी PQ = दूरी QP

यह निर्देशांक समतल पर किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच दूरी पता करने के लिए उपयोग किया जा सकता है।

उदाहरणः–5. बिंदुओं P(2,-3) और Q(5,-7) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः– यहाँ $x_1=2, y_1=-3$ और $x_2=5, y_2=-7$

$$\because PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

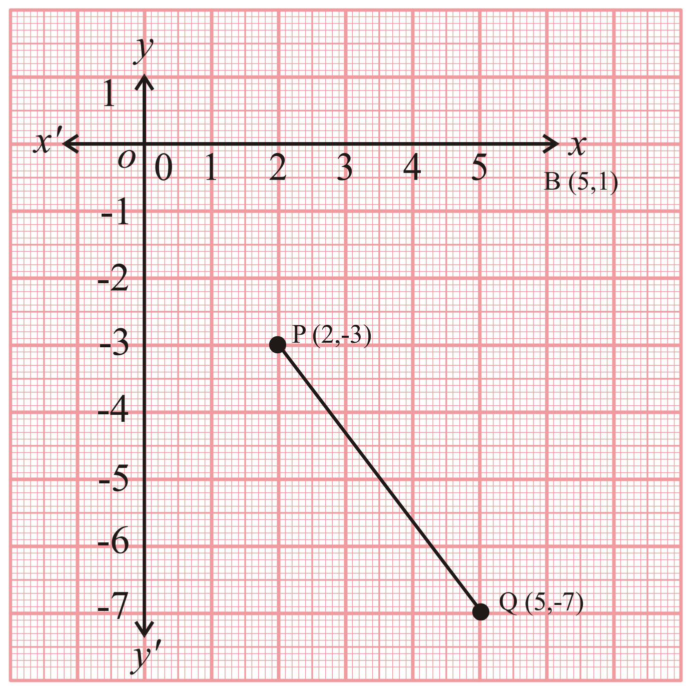
$$= \sqrt{(5-2)^2 + \{-7-(-3)\}^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$\therefore PQ = 5$ इकाई



आलेख–09

उदाहरणः–6. y-अक्ष पर एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं A(6, 5) और B(–4, 3) से समदूरस्थ हो।

हल :– आप जानते हैं कि y-अक्ष पर स्थित कोई भी बिंदु $(0, y)$ के रूप का होता है। अतः मान लीजिए कि बिंदु $P(0, y)$ बिंदुओं A और B से समदूरस्थ है। तब,

$$PA = PB$$

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

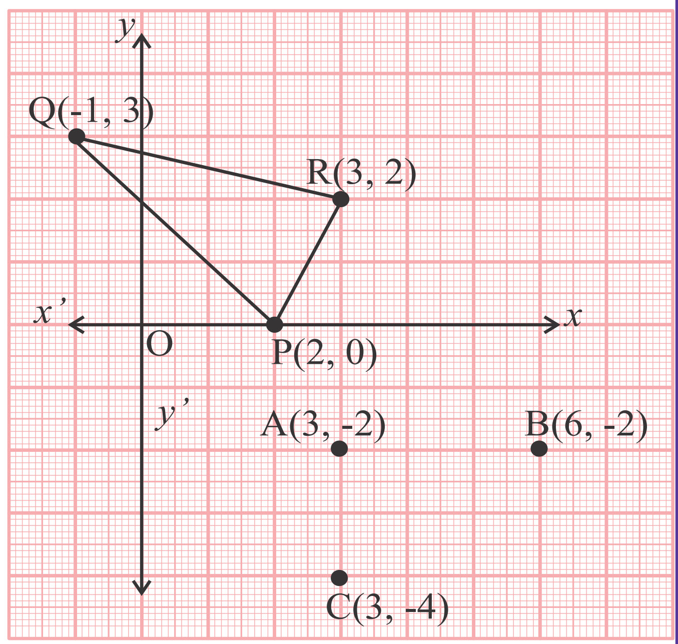
$$4y = 36$$

$$y = 9$$

अतः अभीष्ट बिंदु (0, 9) है।

प्रश्नावली – 02

1. fn, x, vkys[k&10 esa fcanq P की Q व R से दूरी ज्ञात कीजिए।
2. आलेख–10 को देखकर AC, AB व BC का मान ज्ञात कीजिए।
3. बिंदु (3, 4) की मूल बिंदु से दूरी ज्ञात कीजिए।
4. यदि PA = PB हो तथा बिंदु A, B के निर्देशांक क्रमशः (2, 0) व (-2, 4) हों और P, y–अक्ष पर स्थित हो तब P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. y–अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (5,-2) व (3,4) से समदूरस्थ है।
6. x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, ताकि बिंदु (x, y) बिंदुओं (7, 1) और (3, 5) से समदूरस्थ हो।

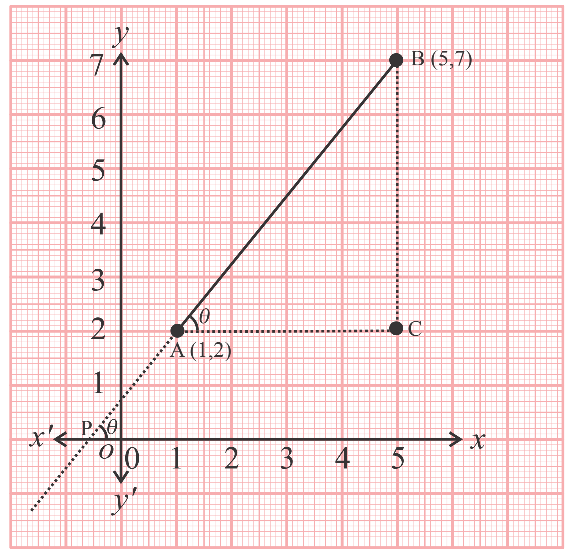


आलेख–10

ढाल या प्रवणता

अंतराल की ढाल या प्रवणता (SLOPE OF THE INTERVAL)

किसी रेखा या उसके किसी अंतराल की ढाल यह बताती है कि रेखा कितनी तेजी से चढ़ती या उतरती है। रेखा के किसी अंतराल AB की ढाल का मान y-निर्देशांक के B बिंदु से A बिंदु तक परिवर्तित होने तथा x-निर्देशांक के B बिंदु से A बिंदु तक परिवर्तित होने के बीच का अनुपात है। (ढाल को प्रवणता भी कहा जाता है, हम ढाल के लिए 'प्रवणता' शब्द का उपयोग करेंगे।)



आलेख–11

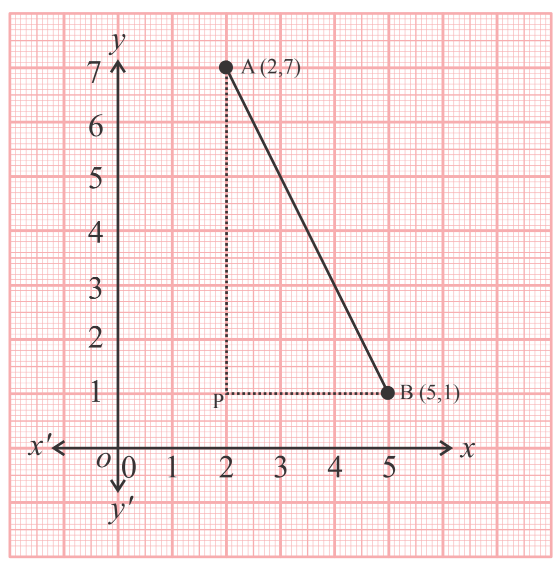
यदि बिंदु A के निर्देशांक (1, 2) और बिंदु B के निर्देशांक (5, 7) हैं। तब

$$\text{अंतराल AB की ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{7 - 2}{5 - 1}$$

$$= \frac{5}{4}$$

इस आकृति को हम ध्यानपूर्वक देखें तो हमें एक समकोण त्रिभुज नजर आता है जिसका समकोण बिंदु C पर है। यदि हम रेखाखंड AB का विस्तार करें तो वह किसी बिंदु P पर x-अक्ष को प्रतिच्छेद करेगा। यह रेखा x-अक्ष पर जो कोण बनाएगी वही कोण त्रिभुज ABC के बिंदु A पर बन रहा है (माना यह कोण θ है।)



आलेख–12

$$\text{अंतराल AB की प्रवणता} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{BC}{AC}$$

$$= \tan\theta$$

$$\text{प्रवणता} = \frac{BC}{AC} = \tan\theta$$

यदि बिंदु B को पहला और बिंदु A को दूसरा बिंदु मानें तब क्या ढाल बदल जाएगा?

प्रवणता $= \dfrac{2-7}{1-5}$

$= \dfrac{-5}{-4}$

$= \dfrac{5}{4}$

अर्थात् दिए गए दो बिंदुओं में से किसी भी बिंदु को प्रथम बिंदु या द्वितीय बिंदु मानने पर उन बिंदुओं से गुजरने वाली रेखा या अंतराल की प्रवणता का मान परिवर्तित नहीं होता।

अब आलेख 12 में दिखाए गए अंतराल AB की प्रवणता पर विचार कीजिए।

अंतराल AB की प्रवणता $= \dfrac{(1-7)}{(5-2)}$

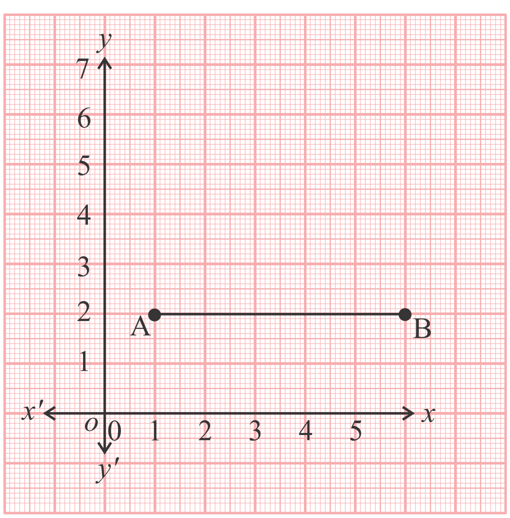
$= \dfrac{-6}{3}$

$= -2$

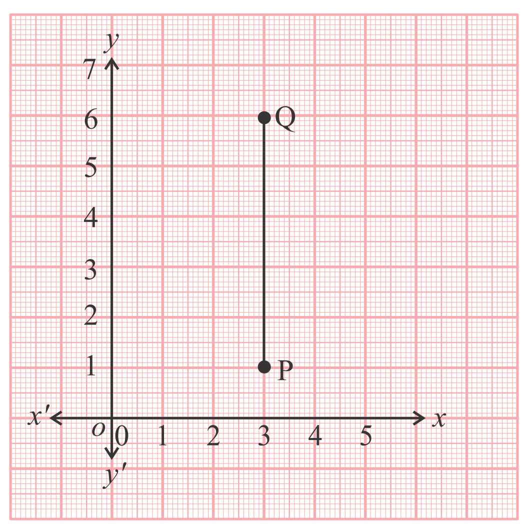
अर्थात यदि किसी अंतराल में A से B की दिशा में बढ़ने पर y का मान घटता जाता हो और x का मान बढ़ता जाता हो तो इस प्रकार के अंतराल की प्रवणता ऋणात्मक होती है।

विशेष स्थितियाँ

1) जब अंतराल क्षैतिज हो – इस स्थिति में $y_2 - y_1$ शून्य है और इसलिए प्रवणता शून्य है।



आलेख–13

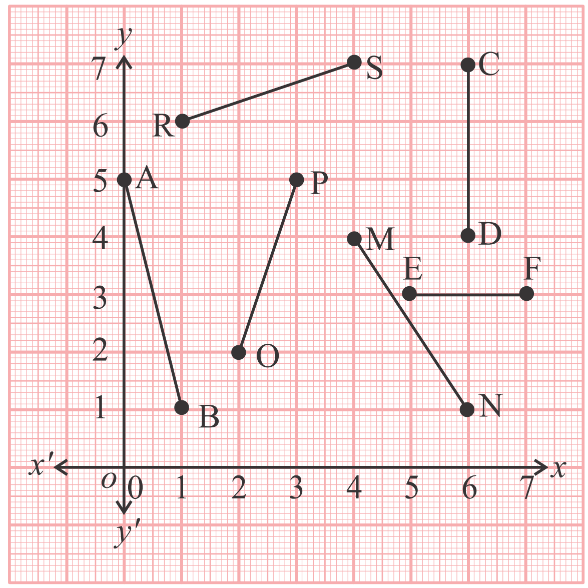


आलेख–14

2) जब अंतराल उर्ध्वाधर हो – इस स्थिति में $x_2 - x_1$ शून्य है, चूँकि शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है इसलिए हम कह सकते हैं कि प्रवणता परिभाषित नहीं है।

सोचें एवं चर्चा करें

दिए गए आलेख–15 को देखिए। आप इनकी प्रवणता के विषय में क्या कहेंगे? अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। कौन–कौन से रेखाखंड की प्रवणता धनात्मक है और कौन–कौन से रेखाखंड की प्रवणता ऋणात्मक ?



आलेख–15

रेखा की प्रवणता

रेखा की प्रवणता को रेखा के किसी अंतराल की प्रवणता से परिभाषित किया जाता है, क्योंकि रेखा के किन्हीं भी दो अंतरालों की प्रवणता बराबर होती हैं।

मान लीजिए कि दो अंतराल AB और PQ एक ही रेखा पर हैं। समकोण त्रिभुज ABC और PQR कि रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ AC और PR, x-अक्ष के समांतर हैं तथा BC और QR, y-अक्ष के समांतर हैं।

त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR में

AC समांतर है PR के तथा AQ तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

इसलिए $\angle A = \angle P$ (संगत कोण)

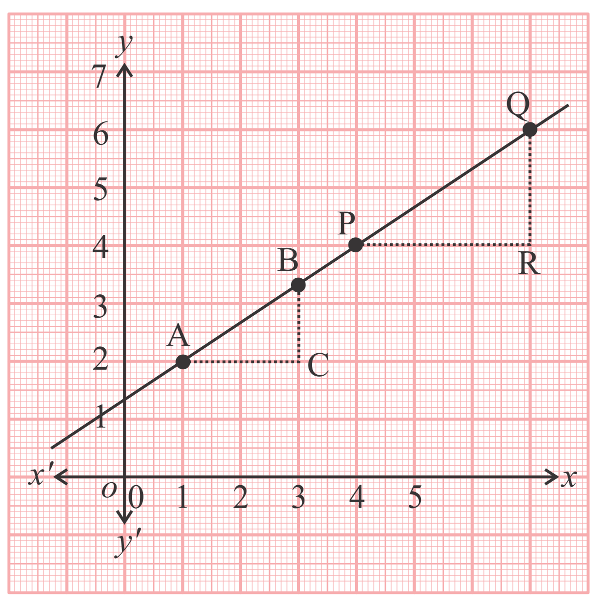
इसी तरह BC समांतर है QR के तथा AQ तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

इसलिए $\angle B = \angle Q$ (संगत कोण)

$\angle C = \angle R$ (समकोण)

इसलिए $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

इसलिए $\dfrac{QR}{PR} = \dfrac{BC}{AC}$



आलेख–16

हम कह सकते हैं कि इन दोनों अंतरालों AB और PQ की प्रवणता बराबर है।

उदाहरणः–7. एक रेखा बिंदु (1,2) और (5,10) से गुजरती है। इसकी ढाल ज्ञात कीजिए।

हलः– ढाल $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{10-2}{5-1}$

$= \dfrac{8}{4}$

$= 2$

उदाहरणः–8. एक रेखा बिंदु (5, 7) से गुजरती है और इसकी ढाल $\dfrac{2}{3}$ है। इस रेखा पर उस बिंदु के x निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसका y निर्देशांक 13 हो।

हल :– रेखा पर स्थित पहला बिंदु (5, 7) है। दूसरे बिंदु के निर्देशांक (x, 13) होंगे।

रेखा की ढाल $= \dfrac{13-7}{x-5}$

$= \dfrac{6}{(x-5)}$

इसलिए $\dfrac{6}{(x-5)} = \dfrac{2}{3}$ (दिया है।)

$18 = 2(x-5)$

$18 = 2x - 10$

$x = 14$

ढाल की तुलना

अभी आपने ढाल को किसी रेखा के अंतराल के दो बिंदुओं के निर्देशांकों के संदर्भ में देखा। आइए इसे एक अन्य संदर्भ में देखते हैं।

एक घोड़ागाड़ी और एक साइकिल किसी एक जगह से एक साथ चलना (क्रमशः 12 किमी./घंटा और 16 किमी./घंटा की चाल से) शुरू करते हैं। अलग–अलग समय पर इनके द्वारा तय की गई दूरी को इस तालिका में देखा जा सकता है–

तय की गई दूरी	15 मिनट में	30 मिनट में	60 मिनट में
घोड़ागाड़ी द्वारा तय की गई दूरी	3 किमी.	6 किमी.	12 किमी.
साइकिल द्वारा तय की गई दूरी	4 किमी.	8 किमी.	16 किमी.

समय और दूरी को निर्देशांक मानकर बनाए गए आलेख को ध्यान से देखें।

रेखा OP साइकिल के और रेखा OQ घोड़ागाड़ी के आलेख को प्रदर्शित करती है।

इन रेखाओं के अंतराल क्रमशः AB और CD है।

AB की ढाल $= \frac{16-8}{60-30}$

$= \frac{8}{30}$

$= \frac{4}{15}$

CD की ढाल $= \frac{12-6}{60-30}$

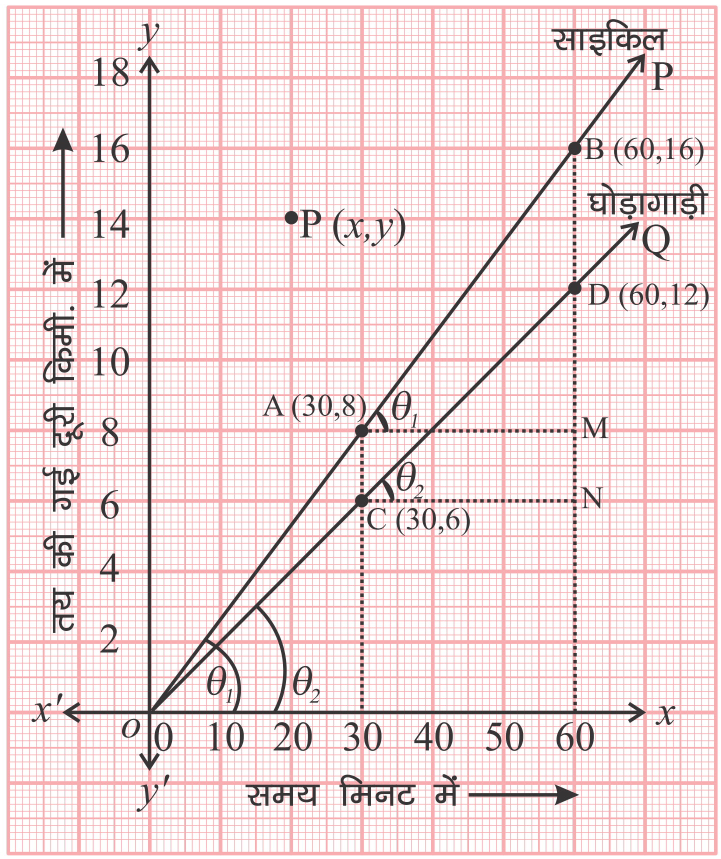
$= \frac{6}{30}$

$= \frac{3}{15}$

स्पष्ट है कि $\frac{4}{15} > \frac{3}{15}$

AB की ढाल, CD की ढाल से ज्यादा है।

अब AB की ढाल को समकोण त्रिभुज AMB में देखिए



आलेख–17

AB की ढाल $= \frac{16-8}{60-30}$

$= \frac{BM}{AM}$

$= \tan\theta_1$

(चूँकि $\angle BAM = \angle BOX$, रेखा OP द्वारा x–अक्ष के साथ बनाया गया कोण θ_1)

इसी तरह CD की ढाल $= \tan\theta_2$ ($\theta_2 =$ OQ द्वारा x–अक्ष के साथ बनाया गया कोण)

आपने देखा कि किसी रेखा के द्वारा x–अक्ष के साथ बनाए गए कोण का स्पर्शज्या (tangent) ही उस रेखा की ढाल है। स्पष्ट है कि कोण बढ़ने के साथ–साथ ढाल भी बढ़ती जाती है। एक और बात यहाँ देखी जा

सकती है कि त्रिभुज AMB में AM, 30 मिनट के समय अंतराल को और BM इस 30 मिनट में चली गई 8 किमी. की दूरी को बताता है तथा BM और AM का अनुपात साइकिल की चाल को बताता है। अतः हम देखते हैं कि यहाँ साइकिल की चाल उसकी रेखा की ढाल को व्यक्त करती है।

अंतःखंड

कोई रेखा x–अक्ष को जिस बिंदु पर काटती है, उस बिंदु की मूलबिंदु से दूरी x–अंतःखंड कहलाती है। इसीतरह, कोई रेखा y–अक्ष को जिस बिंदु पर काटती है, उस बिंदु की मूलबिंदु से दूरी y–अंतःखंड कहलाती है।

रेखा का समीकरण

EKLS3R

समीकरण $y = 2x + 4$ पर विचार कीजिए। क्या आप ऐसे निर्देशांकों के युग्म ज्ञात कर सकते हैं, जो इस समीकरण को संतुष्ट करें। उदाहरण के लिए

$x = 0$ के लिए

$$y = 2 \times 0 + 4$$

$$y = 4$$

इसलिए (0, 4) इस तरह का एक निर्देशांक युग्म है। इसी तरह के दूसरे निर्देशांक युग्म ज्ञात कीजिए। अब इन बिंदुओं को आलेखित कीजिए। आपने किस तरह की रेखा खींची? क्या यह सरल रेखा है?

अब आप एक ऐसी रेखा पर विचार कीजिए जिसकी ढाल 2 और y–अंतःखंड 4 है। यह रेखा बिंदु A (0, 4) से गुजरेगी।

इस रेखा पर कोई बिंदु P (x, y) लीजिए।

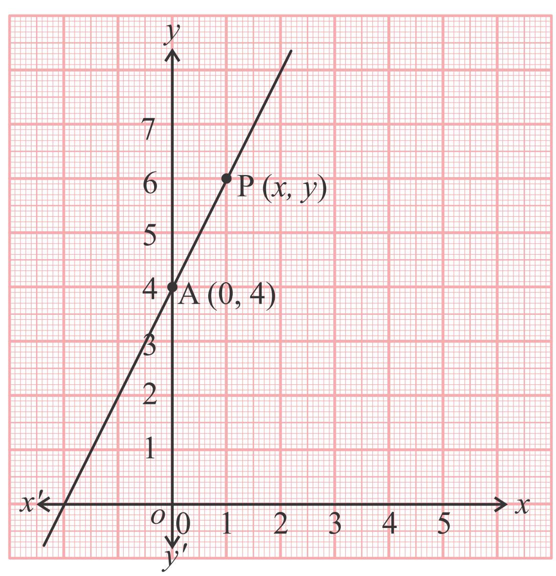
अंतराल AP की प्रवणता $= \dfrac{(y-4)}{(x-0)}$

$$= \frac{(y-4)}{x}$$

दिया गया है कि रेखा की ढाल 2 है,

अतः $$\frac{(y-4)}{x} = 2$$

$$y = 2x + 4$$



आलेख–18

यह उस रेखा का समीकरण है जो बिंदु $(0, 4)$ से गुजरती है और जिसकी ढाल 2 है। चूँकि बिंदु P भी इस रेखा पर स्थित है इसलिए बिंदु $P(x, y)$के निर्देशांक $y = 2x + 4$ को संतुष्ट करते हैं।

आइए, अब एक ऐसी रेखा पर विचार करें जिसकी ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c है। इस रेखा का समीकरण क्या होगा? यह रेखा बिंदु A(0, c) से गुजरेगी। मान लीजिए कि इस रेखा पर बिंदु $P(x, y)$ है।

अंतराल AP की ढाल $= \dfrac{(y-c)}{(x-0)}$ ....(1)

लेकिन हमें पता है कि इस रेखा की ढाल m है ....(2)

(1) और (2) से

$$\frac{(y-c)}{(x-0)} = m$$

$$y - c = mx$$

$$y = mx + c$$

अर्थात् कार्तीय समतल में उस रेखा का समीकरण $y = mx + c$ है, जिसका ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c है।

विलोमतः वे सभी बिंदु जिनके निर्देशांक समीकरण $y = mx + c$ को संतुष्ट करते हैं, सदैव उस रेखा पर स्थित होंगे जिसकी ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c है।

उदाहरणः–9. रेखा की ढाल (या प्रवणता) और Y अक्ष से अंतःखंड लिखिए :–

(1) $y = 7x - 5$

(2) $y = -x + 5$

हलः–

(1) $y = 7x - 5$ की तुलना व्यापक समीकरण $y = mx + c$ से करने पर $m = 7, c = -5$

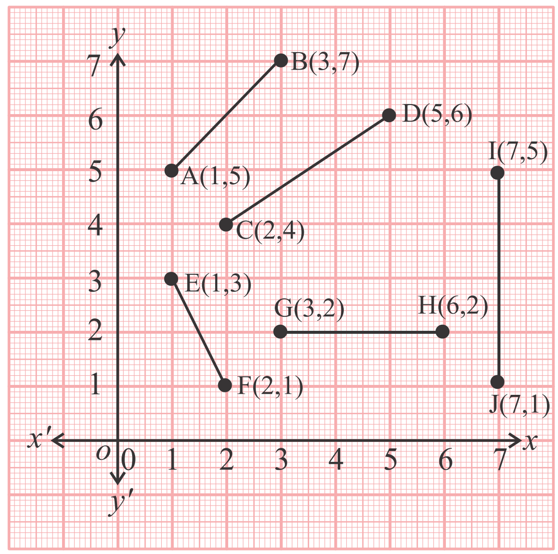
इसलिए रेखा की ढाल 7 और Y अक्ष से अंतःखंड –5 है।

(2) $y = -x + 5$ की तुलना $y = mx + c$ से करने पर $m = -1, c = 5$

इसलिए रेखा की ढाल –1 और Y अक्ष से अंतःखंड 5 है।

प्रश्नावली 3

1. दिए गए आलेख–19 में अंतराल की ढाल या प्रवणता ज्ञात कीजिए।



आलेख–19

2. X अक्ष के समांतर रेखा की प्रवणता क्या होगी?

3. एक रेखा बिंदु (7,10) से गुजरती है जिसकी ढाल $\frac{5}{6}$ है। (i) इस रेखा पर उस बिंदु के x निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसका y निर्देशांक 15 हो।

   (ii) Y निर्देशांक –3 पर x का मान क्या होगा?

4. एक रेखा बिंदु (3,7) व (6,8) से होकर जाती है तो उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

5 सरल रेखा $5x+6y=7$ को $y=mx+c$ के रूप में लिखिए तथा रेखा की ढाल तथा Y अक्ष से अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

6. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो Y अक्ष से 3 माप का अंतःखंड काटती है एवं जिसकी प्रवणता $\frac{5}{4}$ है।

7. Y अक्ष के समांतर रेखा की प्रवणता क्या होगी?

8. Y अक्ष से 6 माप का अंतःखंड काटने वाली $\frac{-5}{3}$ ढाल वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता $\frac{7}{3}$ है तथा रेखा बिंदु (6,0) से होकर जाती है।

10. मूल बिंदु से होकर जाने वाली उस सरल रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए जो बिंदु (2,3) से भी होकर जाती है।

EKVN5E

हमने सीखा

1. यदि किसी समतल पर दो परस्पर लंबवत रेखाएँ XOX' व YOY' एक बिंदु O पर प्रतिच्छेद करें तब हम XOX' को X अक्ष, YOY' को Y अक्ष कहते हैं। प्रतिच्छेद बिंदु O, ''मूल बिंदु'' तथा यह समतल, 'निर्देशांक समतल' कहलाता है।

2. निर्देशांक समतल में किसी बिंदु के लिए x–निर्देशांक, Y अक्ष से लंबवत दूरी व y–निर्देशांक X अक्ष से लंबवत दूरी के बराबर होता है।

3. निर्देशांक समतल पर किन्हीं दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ होती है।

4. समतल पर रेखा की ढाल या प्रवणता $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, जहाँ x निर्देशांक के A बिंदु से B बिंदु तक परिवर्तित होने का मान x_2-x_1 है तथा y निर्देशांक के A बिंदु से B बिंदु तक परिवर्तित होने का मान y_2-y_1 है।

5. ऐसी रेखा जिसकी ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c हो, का समीकरण $y = mx + c$ होता है।

उत्तरमाला–1

1. (i) प्रथम (ii) द्वितीय (iii) तृतीय (iv) चतुर्थ

2. (i) y–अक्ष (ii) x–अक्ष (iii) x–अक्ष (iv) y–अक्ष

3. (i) तृतीय (ii) शून्य (iii) लंब (iv) शून्य (v) (0,0)

4. (a) B, D, P ; और G, R और C,S (b) B, E ; P,Q,C,G

   (c) Q, R, D, C

उत्तरमाला–2

1. $PQ = 3\sqrt{2}$, $PR = \sqrt{5}$ 2. $AC = 2, AB = 3, BC = \sqrt{13}$ 3. 5

4. P(0,2) 5. $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ 6. $x - y - 2 = 0$

उत्तरमाला–3

1. AB की प्रवणता $= 1$, CD की प्रवणता $= \frac{2}{3}$, EF की प्रवणता $= -2$, GH की प्रवणता $= 0$,
IJ की प्रवणता = अपरिभाषित

2. शून्य 3. (i) $x = 13$ (ii) $x = -\frac{43}{5}$ 4. $\frac{1}{3}$

5. $y = -\frac{5}{6}x + \frac{7}{6}$, ढाल $= -\frac{5}{6}$, अंतःखंड $= \frac{7}{6}$

6. $5x - 4y + 12 = 0$ 7. अपरिभाषित 8. $5x + 3y - 18 = 0$

9. $7x - 3y - 42 = 0$ 10. $\frac{3}{2}$

अध्याय

07

आलेख [GRAPH]

EL5J72

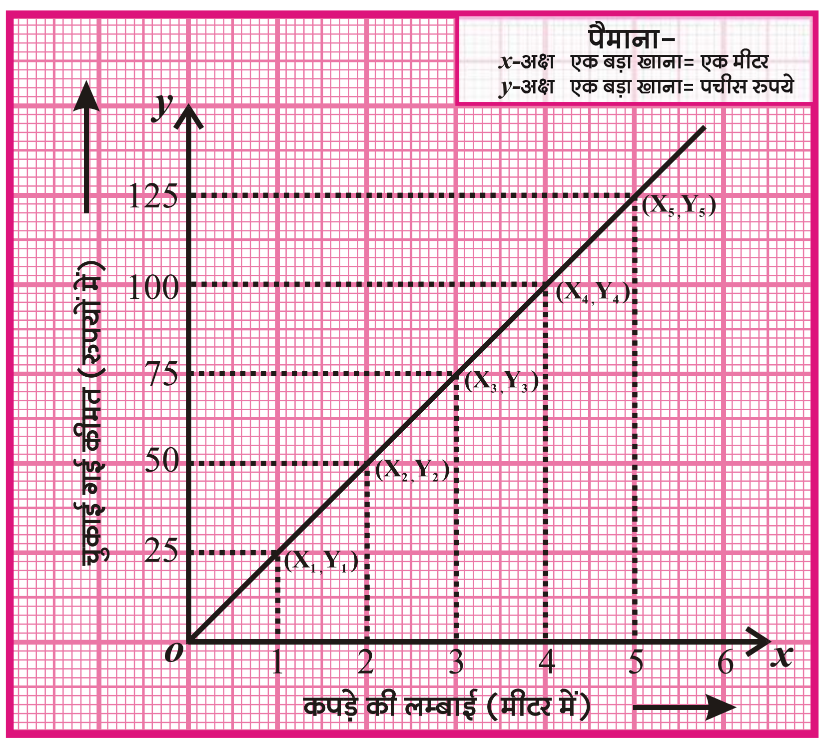
परिचय (Introduction)

गणित में हम जानकारियों को, बेहतर समझ व विश्लेषण के लिए कई माध्यमों से निरूपित और प्रदर्शित करते हैं । ऐसा ही एक माध्यम आलेख है जिसकी सहायता से हम बता सकते हैं कि किसी एक राशि से दूसरी राशि का क्या संबंध है। आलेख के माध्यम से यह भी देखा जा सकता है कि परस्पर संबंधित दो राशियों में से किसी एक में परिवर्तन करने पर दूसरे में क्या बदलाव आता है। इनके साथ–साथ आलेख बनाने से कुछ नई जानकारियाँ भी पता की जा सकती है। इस अध्याय में हम आलेख के विभिन्न उपयोगों को देख सकेंगे।

दो राशियों के बीच के संबंध –

कुछ व्यक्ति कपड़े की एक दुकान से 25 रुपये प्रति मीटर की दर से 1 मीटर, 2 मीटर, 3 मीटर, 4 मीटर और 5 मीटर लंबाई के कपड़े क्रमशः 25रु., 50रु., 75रु., 100रु. और 125रु. में खरीदते हैं। उनके द्वारा चुकायी गई कीमतों और कपड़े की लंबाइयों के बीच के संबंध को आलेख में प्रदर्शित किया गया है। आलेख में हम यह देख पाते हैं कि कपड़े की लंबाई बढ़ने से चुकाई गई कीमत में किस तरह का परिवर्तन हो रहा है।

आइए एक और उदाहरण देखते हैं।



आलेख–01

क्रिकेट के एक मैच में एक टीम के द्वारा शुरू के दस ओवरों में बनाए गए रनों की संख्या इस प्रकार थी– 5, 4, 8, 7, 2, 5, 4, 4, 2, 9. यदि हम ओवरों की संख्या और उनमें बने रनों की संख्या को लेते हुए आलेख खींचें तो चित्र 2 जैसा आलेख प्राप्त होगा। –

आलेख–02

सोचें व चर्चा करें

क्या आलेख में लिए गए आँकड़ों के बीच कोई संबंध है?

1. एक प्रकार के आँकड़ों को X अक्ष पर और दूसरे प्रकार के आँकड़ों को Y अक्ष पर प्रदर्शित किया गया। क्या आँकड़ों के लिए अक्षों को चुने जाने का कोई आधार है?
2. एक आलेख सरल रेखा के रूप में है ,दूसरा टेढ़ी–मेढ़ी रेखाओं के रूप में, क्या इसका कोई कारण हो सकता है?

आलेख बनाना सीखें :–

आलेख बनाने के लिए हमें दो तरह के आँकड़ों की जरूरत होती है। हम एक को X अक्ष और दूसरे को Y अक्ष पर दर्शाते हैं। क्या इन आँकड़ों को हम किसी भी अक्ष पर दर्शा सकते हैं? अथवा किस आँकड़े को X अक्ष और किस को Y अक्ष पर दर्शाना है इसके लिए कुछ आधार होते हैं।

आलेख 1 में देखें तो पाएँगें कि अगर हम ज्यादा कपड़ा खरीदते हैं तो हमें कीमत भी अधिक देनी होती है। अगर कम कपड़ा खरीदते हैं तो कीमत कम होगी। यह एक उदाहरण है जहाँ एक राशि दूसरी राशि को प्रभावित करती है। चुकाई गई कीमत, कपड़े की मात्रा पर निर्भर करती है। इस तरह हम कह सकते हैं कि यहाँ कपड़े की मात्रा एक मुक्त या स्वतंत्र चर है जबकि

चुकाई गई कीमत एक आश्रित चर है। प्रायः हम स्वतंत्र चर (आँकड़े) को X अक्ष पर तथा आश्रित चर को Y अक्ष पर दर्शाते हैं।

एक बार यह निश्चित हो जाए कि हमें X अक्ष पर कौन सा और Y अक्ष पर कौन सा आँकड़ा लेना है, उसके बाद दोनों अक्षों के लिए पैमाना चुनते हैं।

पैमाना – X अक्ष और Y अक्ष पर वांछित राशियों को निरूपित करने के लिए पैमाने का चयन राशि अनुसार करना होता है। आइए इस प्रक्रिया को आलेख–1 से समझते हैं। 6 मी. कपड़े के लिए चुकाई गई कीमत 125 रु. है। यदि हम 1 बड़े वर्ग की लंबाई = 1 रुपया पैमाना चुनने का निश्चय करें, तो हमें 125 वर्ग का अक्ष खींचना होगा। जो कागज की शीट पर संभव नहीं। इसके विपरीत 1 बड़े वर्ग की लंबाई =50 रु. का पैमाना चुने तो बहुत कम फैलाव होगा अतः हम ऐसा पैमाना चुनेंगे जिससे संबंध साफ दिखे। यहाँ हमने 1 बड़े वर्ग की लंबाई = 25रु. ली और हमें 6 इकाई का अक्ष खींचना होगा। ग्राफ खींचने के लिए पैमाने का चयन करते समय कुछ बातों का ध्यान रखना होगा।

- प्रत्येक राशि के अधिकतम और न्यूनतम मानों के बीच अंतर
- जिस पेपर पर आलेख खींचना है, उसके अधिकतम भाग का उपयोग करना।

प्रत्येक बिंदु को आलेख पर चिह्नित करते हैं। X अक्ष पर इंगित राशि के मान के लिए Y अक्ष की राशि के मान अनुसार X अक्ष से दूरी पर बिंदु अंकित करते हैं। इन दोनों मानों से ही ग्राफ पर बिंदु बनता है।

सभी बिंदुओं को जोड़कर आलेख प्राप्त करते हैं।

आलेखों से हमें क्या पता चलता है?

आपने अखबारों, पत्रिकाओं और टेलीविजन कार्यक्रमों में अलग–अलग तरह के आलेख देखे होंगे। वास्तव में ये आलेख संख्याओं से बने आँकड़ों के चित्रात्मक प्रदर्शन हैं। एक नजर डालने भर से हमें कई जानकारियाँ मिल जाती हैं। हम दोनों आलेखों को बारी–बारी से देखें तो पता चलेगा कि कपड़े की लंबाई और उसके मूल्यों को निर्देशांक मानकर खींचा सरल रेखा आलेख यह बताता है कि कपड़े के मूल्य और उसकी लंबाई के बीच एक निश्चित अनुपात है।

$$\left(\frac{100}{4}, \frac{75}{3}, \frac{25}{1} \cdots \text{आदि} \right)$$

यदि हम यह जानना चाहें कि किसी दी गई लंबाई के कपड़े का मूल्य क्या होगा या दिए हुए रुपयों में कितना कपड़ा खरीदा जा सकेगा तो हम आलेख द्वारा इसे भी बहुत आसानी से जान सकते हैं।

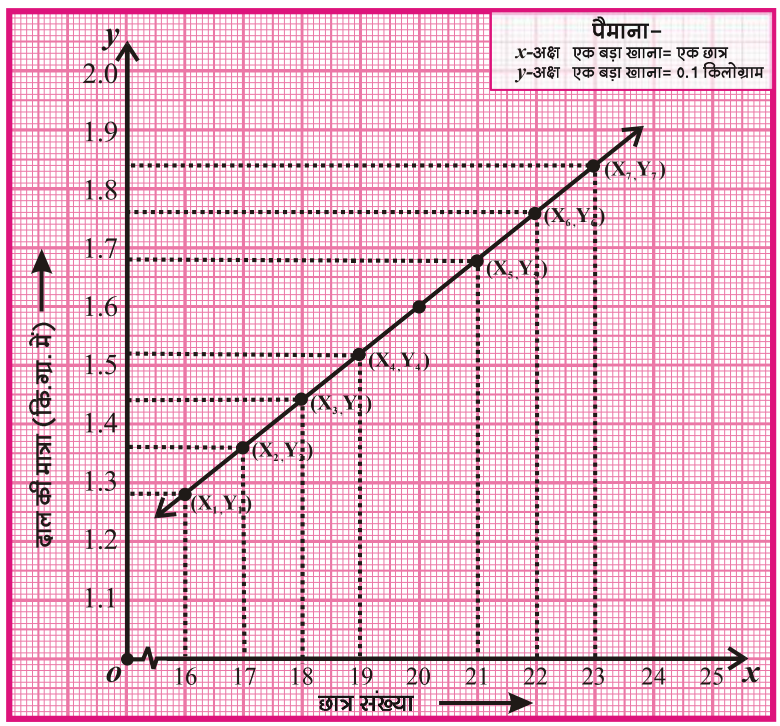
इसी तरह दूसरा टेढ़ा–मेढ़ा आलेख यह बताता है कि किसी ओवर में कितने रन बनेंगे यह अनिश्चित है। लेकिन आलेख को देखकर यह तुरंत बताया जा सकता है कि किस ओवर में सबसे ज्यादा या सबसे कम रन बने। औसत रन संख्या जानकर यह भी बताया जा सकता है कि 20 या 50 ओवर की समाप्ति पर लगभग कितने रन बन सकते हैं। किंतु यह अनुमान गलत भी हो सकता है क्योंकि बाद के ओवरों में रन तेजी से भी बन सकते हैं या पूरी टीम आउट भी हो सकती है।

कुछ और आलेख –

आलेख 3 :– उच्चतर माध्यमिक शाला जमरॉंव के छात्रावास में किसी एक सप्ताह के अलग–अलग दिनों में छात्रों की संख्या और उनके लिए पकाई गई दाल की मात्रा के आँकड़े निम्नानुसार थे –

छात्र संख्या	16	19	22	23	21	18	17
दाल की मात्रा (किग्रा. में)	1.280	1.520	1.760	1.840	1.680	1.440	1.360

आँकड़े (छात्र संख्या, दाल की मात्रा) के रूप में है।



आलेख–03

क्या छात्रों की संख्या और उनके लिए पकाई जाने वाली दाल की मात्रा में कोई संबंध है ? आइए इसे आलेख बनाकर समझें।

आप देख रहे हैं कि दाल की मात्रा छात्रों की संख्या बढ़ने–घटने के साथ ज्यादा या कम हो रही है। क्या इस बदलाव की कोई निश्चित दर है?

आपस में चर्चा करें। इस आलेख में एक बात ध्यान देने की है। यहाँ ग्राफ 0,0 से शुरू नहीं होता ऐसा कई आलेखों में होता है जहाँ कई बार आँकड़े शून्य के नजदीक से शुरू नहीं होते। ऐसी स्थिति में हम आलेख पर –∧∨– चिह्न के द्वारा खाली जगह को दर्शाते हैं। जैसे ऊपर दिए गए आलेख में X अक्ष पर आँकड़े 16 से शुरू होते हैं और 1 से 16 के बीच कोई आँकड़ा नहीं है। इसलिए X अक्ष पर मूल बिंदु शून्य से 16 के बीच के भाग को –∧∨– चिह्न से दर्शाया गया है।

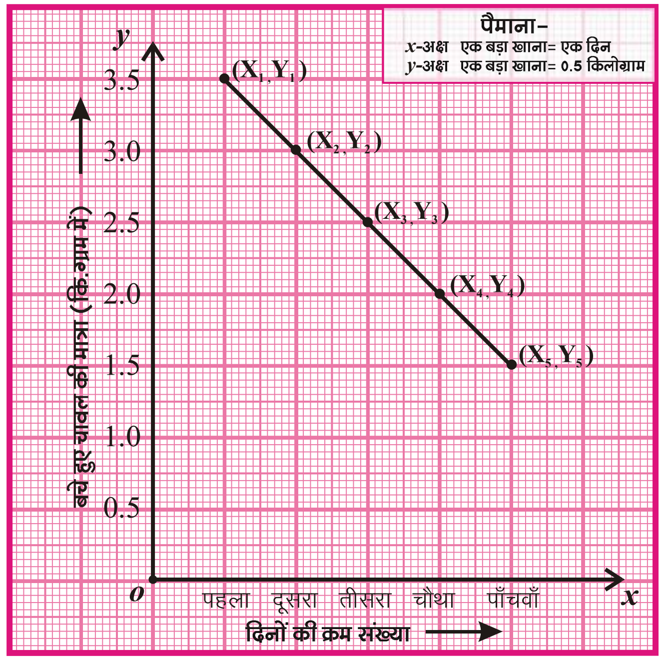
सोचें एवं चर्चा करें

यदि दिन क्रमांक के साथ पकाई दाल की मात्रा अथवा उपस्थित बच्चों का आलेख बनाएँ तो वह कैसा होगा?

आलेख 4 :— फूलमती ने अपने घर के लिए 4 किलोग्राम चावल खरीदा। उसके यहाँ रोज 500 ग्राम चावल पकता है। क्या हम प्रत्येक दिन बचे हुए चावल का आलेख बना सकते हैं ?

हल :— इस आलेख के आँकड़े (दिन, बचे हुए चावल की मात्रा) के रूप में हैं। पहला बिंदु (1,3.5) और पाँचवा बिंदु (5,1.5) है।

आप देख रहे हैं कि दिनों की संख्या बढ़ने के साथ बचे हुए चावल की मात्रा कम होती जा रही है। क्या आप आलेख को देखकर बता सकते हैं कि चावल कब खत्म हो जाएगा?



आलेख–04

करके देखें

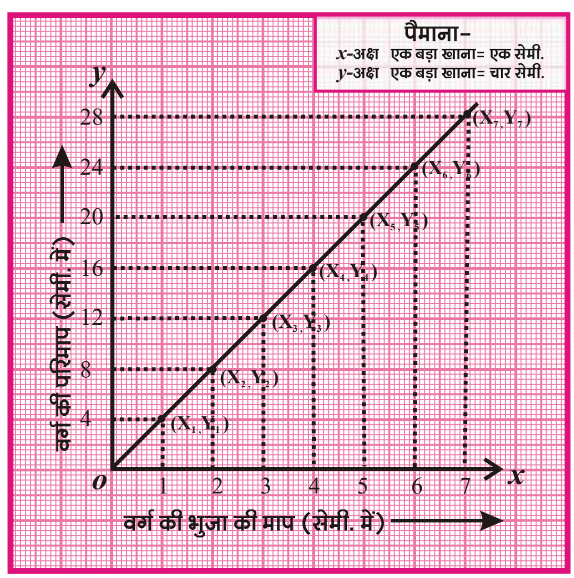
1. अपने आस–पास से इसी प्रकार के आँकड़े इकट्ठे कर इन आँकड़ों से आलेख बनाइए।
2. आलेख 3 और 4 दोनों एक सरल रेखा है किंतु दोनों एक दूसरे से भिन्न है। इनमें क्या–क्या फर्क है?
3. आलेख 3 और 4 में (x,y)की तालिका बनाएँ।

आलेख 5 :— वर्गों की एक भुजा की माप व उन वर्गों के परिमाप को सारणी में प्रदर्शित किया गया है।

वर्ग की भुजा की माप (सेमी. में)	1	2	3	4	5	6	7
वर्ग का परिमाप (सेमी. में)	4	8	12	16	20	24	28

सारणी के आँकड़ों से आलेख बनाइए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए —

1. x अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुनें।
2. y अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुनें।



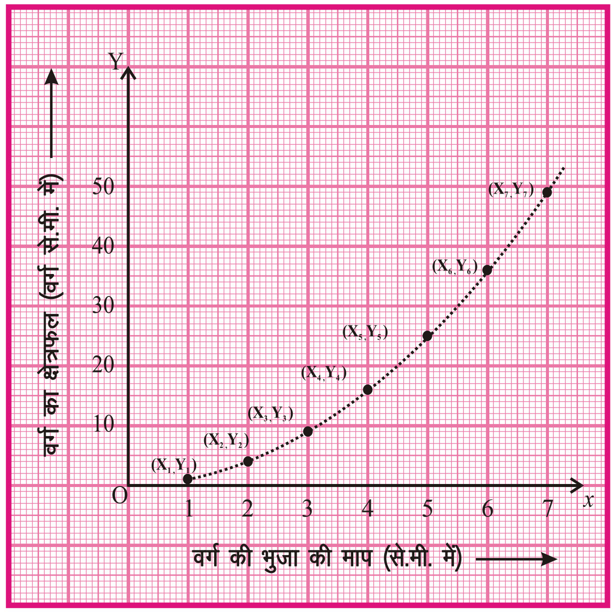
आलेख–05

हल :— इस आलेख में हम देख पा रहे हैं कि वर्ग की एक भुजा की माप में वृद्धि होने से उसके परिमाप में भी वृद्धि हो रही है। ऊपर दिए हुए आँकड़ों में वर्ग की भुजा की माप एक स्वतंत्र चर है और वर्ग का परिमाप आश्रित चर है। अतः x अक्ष पर वर्ग की भुजा की माप और y अक्ष पर वर्ग की परिमाप दर्शाएँ।

आलेख 6 :— किसी वर्ग की एक भुजा की लंबाई में परिवर्तन करने पर प्राप्त हुए क्षेत्रफल को नीचे सारणी में दर्शाया गया है । इनकी सहायता से एक आलेख बनाइए ।

वर्ग की भुजा की माप (सेमी. में)	0	1	2	3	4	5	6	7
वर्ग का क्षेत्रफल (वर्गसेमी. में)	0	1	4	9	16	25	36	49

हलः– वर्ग की भुजा और उसके क्षेत्रफल के बीच खींचें गये आलेख को देखने पर यह पता चल रहा है कि भुजा की लंबाई बढ़ने पर क्षेत्रफल का मान भी बढ़ता है, किन्तु यहाँ सरल रेखा के स्थान पर ऊपर उठती हुई एक वक्र रेखा प्राप्त होती है।



आलेख–06

सोचें व चर्चा करें

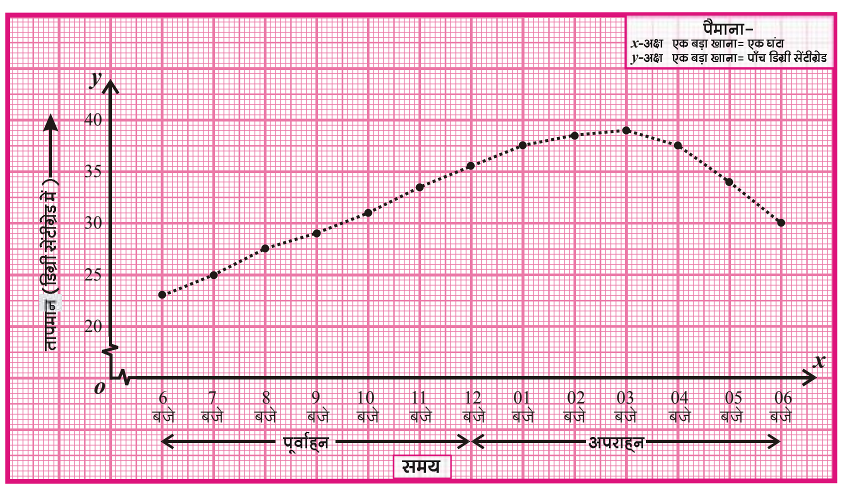
आलेख 5 व आलेख 6 में आपको क्या–क्या और अंतर दिख रहे हैं? चर्चा कीजिए।

आलेख 7 :– मार्च महीने के किसी दिन के सुबह 6 बजे से शाम 6 बजे तक का तापमान नीचे की सारणी में प्रदर्शित है–

समय	पूर्वाह्न							अपराह्न					
बजे	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
ताप (^{0}cपर)	23	25	27.5	29	31	33.5	35.5	37.5	38.5	39	37.5	34	30

सारणी के आँकड़ों के आधार पर आलेख खींचिए।

हलः– यहाँ हम देख सकते हैं कि यह आलेख पहले खींचे गए आलेखों से अलग है। समय बढ़ने के साथ–साथ पहले तापमान बढ़ रहा है तथा एक समय के बाद कम भी हो रहा है।



आलेख–07

क्या आप इसका कारण सोच सकते हैं?

अपने साथियों से इस पर चर्चा कीजिए।

इस आलेख के आधार पर 5 निष्कर्ष लिखें।

आलेख 8 :– मूलधन 100 रुपये पर 10 प्रतिशत वार्षिक ब्याज दर से 1, 2, 3 व 4 वर्ष के लिए साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए। समय व साधारण ब्याज के बीच आलेख बनाकर देखिए कि समय के साथ साधारण ब्याज में किस प्रकार परिवर्तन हो रहा है?

साथ ही निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. x अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुना।
2. y अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुना।
3. x अक्ष और y अक्ष पर आँकड़े दर्शाने के लिए आपने क्या पैमाना चुना?

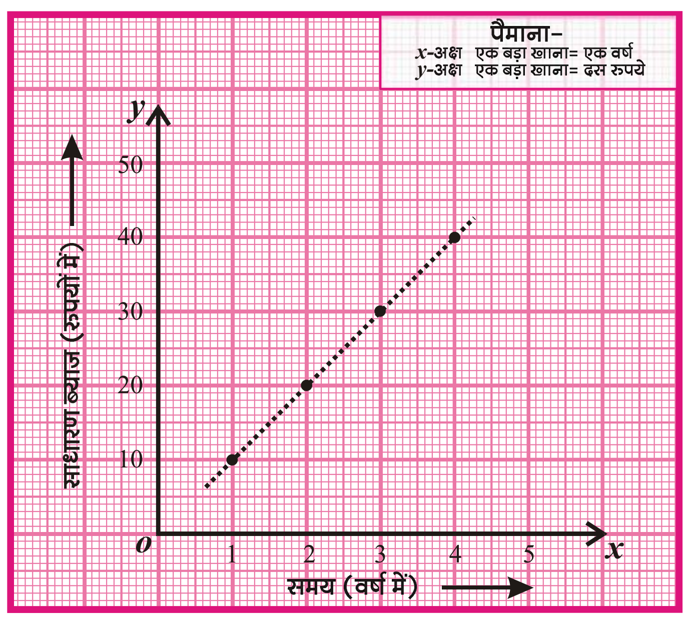
हलः– हमें दिया है –

मूलधन =100 रुपये, दर =10%

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

मूलधन व दर को स्थिर रखते हुए समय का मान 1, 2, 3 व 4 वर्ष रखने पर प्राप्त होने वाले साधारण ब्याज को निम्नानुसार सारणी में दर्शा सकते हैं–

समय (वर्ष में)	0	1	2	3	4
साधारण ब्याज (रुपये में)	0	10	20	30	40



आलेख–08

ग्राफ से हम कह सकते हैं कि जब मूलधन व दर स्थिर हों, तब समय बढ़ने के साथ साधारण ब्याज में भी निश्चित दर से परिवर्तन होता है।

x अक्ष पर समय (स्वतंत्र चर) y अक्ष पर साधराण ब्याज (आश्रित चर) चुना

पैमाना – x अक्ष पर 1 इकाई = 1वर्ष

y अक्ष पर 1 इकाई = 10 रु.

करके देखें

1. कुछ लोगों को क्रमशः 100रु., 200रु., 300रु., 400रु. 10% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से उधार दिया गया। एक वर्ष बाद इनसे मिलने वाले ब्याज के लिए एक आलेख बनाइए।
2. अपनी कक्षा के 10 विद्यार्थियों की आयु महीनों में एवं उँचाई सेमी. में नोट कीजिए और आयु तथा उँचाई के आकड़ों को आलेख में दर्शाइए। क्या आलेख में आयु व उँचाई के बीच कोई निश्चित संबंध देख पा रहे हैं ?

अब तक बने आलेखों में आपने देखा कि कुछ में सरल रेखा और कुछ में वक्र रेखा प्राप्त हो रही है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों हो रहा है ?

यह स्पष्ट है कि आलेख रेखा की आकृति उसमें निरूपित राशियों के बीच संबंध पर आधारित है। यही संबंध रेखा की आकृति को निर्धारित करता है। अब हम उन राशियों के बीच संबंध ढूँढते हैं।

आलेख क्रमांक 1 में,

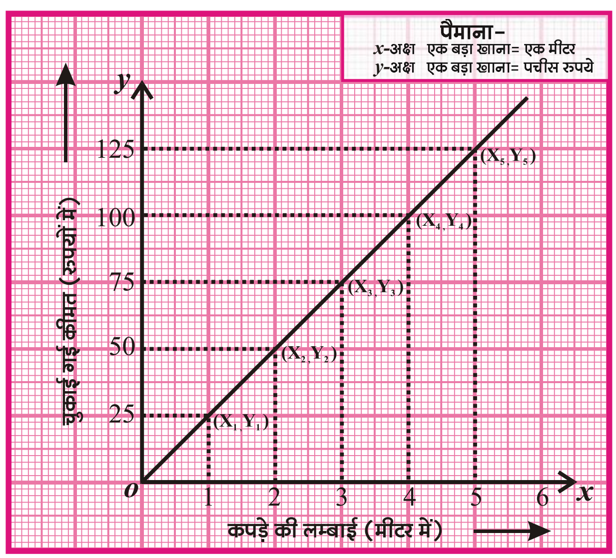
$X_1 = 1,\ X_2 = 2,\ X_3 = 3,\ X_4 = 4,\ X_5 = 5$

$Y_1 = 25,\ Y_2 = 50,\ Y_3 = 75,\ Y_4 = 100,\ Y_5 = 125$

यहाँ, $\dfrac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \dfrac{50-25}{2-1} = \dfrac{25}{1}$

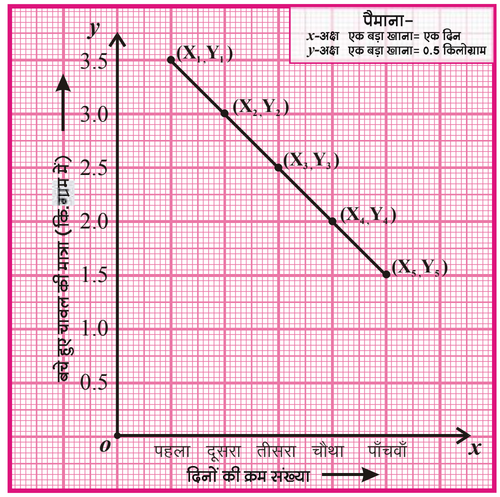
$\dfrac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} = \dfrac{75-50}{3-2} = \dfrac{25}{1}$

$\dfrac{Y_5 - Y_4}{X_5 - X_4} = \dfrac{125-100}{5-4} = \dfrac{25}{1}$



आलेख–01

आलेख क्रमांक 4 में,

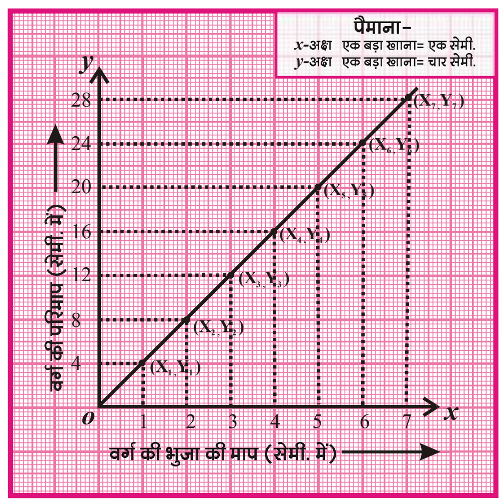


आलेख–04

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{3 - 3.5}{2 - 1} = -0.5$$

$$\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} = \frac{2.5 - 3.0}{3 - 2} = -0.5$$ ....इत्यादि

आलेख क्रमांक 5 में,



आलेख–05

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{8 - 4}{2 - 1} = 4$$

$$\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_1} = \frac{12 - 8}{3 - 2} = 4$$ ....इत्यादि

हम देख रहे हैं कि आलेख 1, 4, 5 में से प्रत्येक में

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} = \cdots\cdots\cdots\cdots$$ नियत हैं और

इनके आलेख भी सरल रेखा हैं।

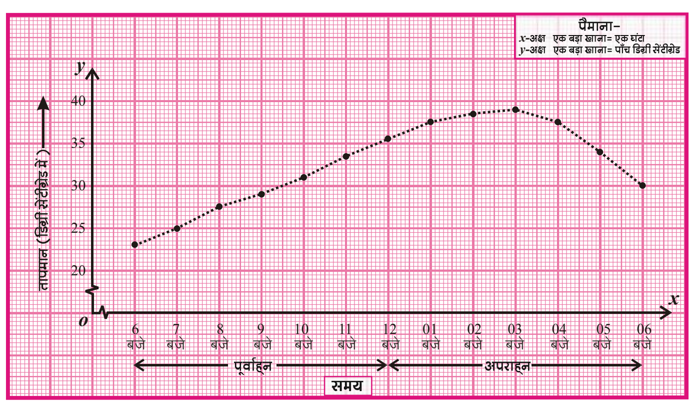
याने जहाँ भी आलेख में

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} = \frac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3} = \cdots\cdots\cdots = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{X_n - X_{n-1}} =$$ नियत होंगे,

वहाँ आलेख सरल रेखा के रूप में होगा। इस प्रकार के आलेखों में राशियों के बीच के संबंध को रैखिक समीकरण $ax + by = c$ या $y = mx + c$ के रुप में दर्शा सकते हैं।

क्या आलेखों में भी इस प्रकार का कोई संबंध है?

आलेख क्रमांक–7 में हम देखते हैं कि–



आलेख–07

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{25 - 23}{7 - 6} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} = \frac{27.5 - 25}{8 - 7} = \frac{2.5}{1}$$

$$\frac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3} = \frac{29 - 27.5}{9 - 8} = \frac{1.5}{1}$$

------------------------------ इत्यादि।

स्पष्ट है कि

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \neq \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} \neq \frac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3} \cdots\cdots\cdots$$

इसी प्रकार का संबंध आप आलेख क्रमांक 6 में भी देख सकते हैं।

इन दोनों उदाहरणों में

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}, \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2}, \frac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3} \cdots\cdots\cdots$$ नियत नहीं हैं।

इसलिए इन उदाहरणों में आलेख सरल रेखा नहीं है।

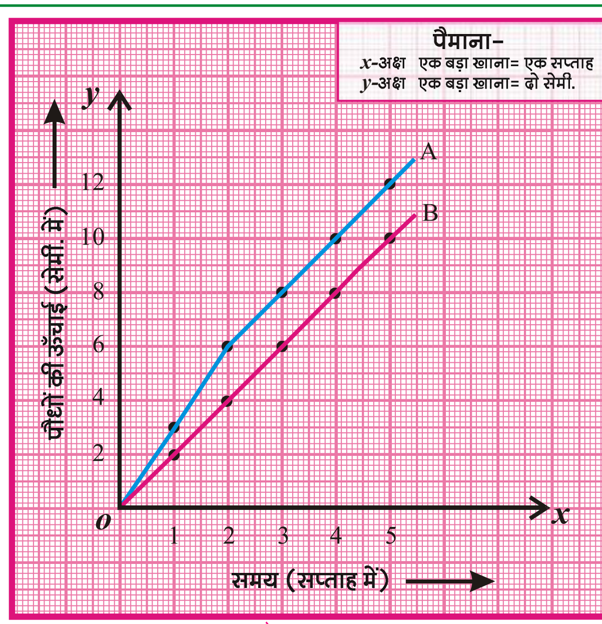
करके देखें

अपने विद्यालय के बगीचे के कुछ पौधों की लंबाई को 10 सप्ताह तक कापी में नोट कीजिए और प्राप्त आँकड़ों से आलेख खींचकर यह देखिए कि पौधों की लंबाई में किस प्रकार से परिवर्तन हुए हैं?

विभिन्न परिस्थितियों में बने आलेख को पढ़ना

अब हम विभिन्न उदाहरणों की सहायता से आलेख को पढ़ना, समझना और उसका विश्लेषण करना सीखेंगे।

उदाहरणः–1. दो गमलों A और B में दो अलग अलग प्रकार के पौधे लगाए गए हैं जिनकी ऊँचाइयाँ 5 सप्ताह तक हर सप्ताह के अंत में मापी गईं। इन मापों को नीचे आलेख में दर्शाया गया है। आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –



आलेख–09

(i) पाँचवें सप्ताह के अंत में दोनों गमलों के पौधों की ऊँचाई बताइए।

(ii) कौन से सप्ताह में गमले A के पौधे की ऊँचाई में सबसे अधिक बढ़ोतरी हुई और कितनी?

(iii) चौथे सप्ताह के अंत में गमले B के पौधे की ऊँचाई कितनी थी?

हलः– आलेख में हम देख पाते हैं कि –

(i) पाँचवें सप्ताह के अंत में गमले A के पौधे की उँचाई 12 सेमी. और गमले B के पौधे की ऊँचाई 10 सेमी. थी।

(ii) दूसरे सप्ताह में गमले A के पौधे की ऊँचाई में 3 सेमी. की बढ़ोतरी हुई। यह बाद के किसी अन्य सप्ताह में हुई बढ़ोतरी से ज्यादा थी।

(iii) चौथे सप्ताह के अंत में गमले B के पौधे की ऊँचाई 8 सेमी. थी।

उदाहरणः–2. एक 20–20 क्रिकेट मैच के दौरान दो टीमों A और B के द्वारा बनाए गए रनों को निम्नांकित आलेख में प्रदर्शित किया गया है–

आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

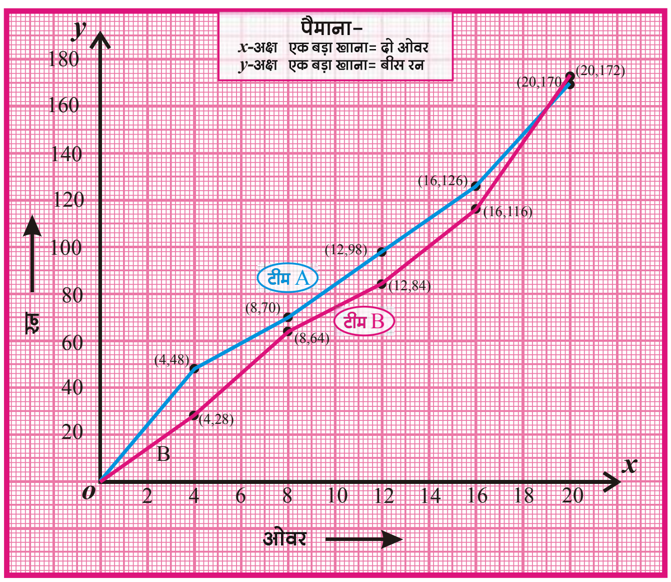
(i) टीम A ने 16 ओवर तक कितने रन बनाए?

(ii) किस अंतराल के दौरान टीम A और टीम B के रन बनाने की दर सबसे अधिक थी ?

(iii) किस अंतराल के दौरान टीम A और टीम B के रन बनाने की दर सबसे कम थी ?

(iv) 8 वें ओवर के पश्चात टीम A और B के रनों में कितना अंतर था?

(v) आलेख को देखकर बताइए कौन सी टीम विजयी हुई।



आलेख–10

हलः–

(i) टीम A ने 16 ओवर में 126 रन बनाए।

(ii) 16 से 20 ओवर के अंतराल में टीम A और टीम B के रन बनाने की दर सबसे अधिक थी।

(iii) 4 से 8 ओवर के अंतराल में टीम A के रन बनाने की दर सबसे कम थी तथा टीम B के रन बनाने की दर 8 से 12 ओवर के अंतराल में सबसे कम थी।

(iv) 8 वें ओवर के पश्चात टीम A और B के द्वारा बनाए गए रनों में 6 रन का अंतर था।

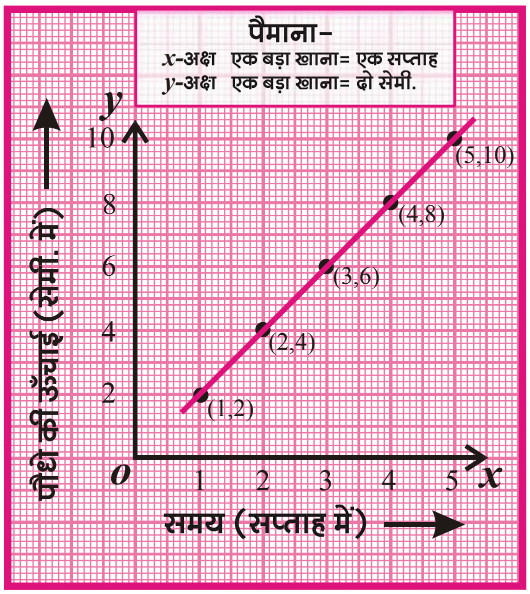
(v) आलेख से स्पष्ट है कि इस मैच में टीम B विजयी हुई।

करके देखें

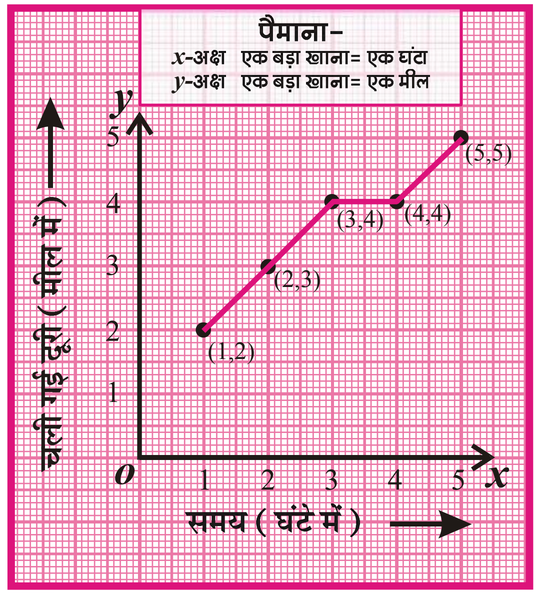
आप भी अपने मित्रों के साथ खेले गए क्रिकेट मैच में बनाए गए रनों को आलेख पर दर्शाइए।

प्रश्नावली 1

1. uhpsfn, x, nksv ky§kka d ksn§kdj crkb, fd D; kav ky§k (A) सरल रेखा तथा आलेख (B) वक्र रेखा के रुप में है?



आलेख–(A)



आलेख–(B)

ELEF8P

(i) आलेख (A) से क्या निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं?

(ii) यह निष्कर्ष आलेख (B) से प्राप्त निष्कर्ष से किस तरह अलग है?

2. एक व्यक्ति ने अपनी गाड़ी में 5 लीटर पेट्रोल भरवाया। पाँच दिनों में बचे हुए पेट्रोल की मात्रा व दिनों को निम्नांकित सारणी में दर्शाया गया है –

दिन	1	2	3	4	5
बचे हुए पेट्रोल की मात्रा (ली. में)	4	3	2	1	0

बचे हुए पेट्रोल की मात्रा व दिनों के मध्य आलेख खींचिए।

3. मूलधन 300 रुपये पर 5 प्रतिशत वार्षिक ब्याज दर से 1, 2, 3, 4 व 5 वर्ष के लिए साधारण ब्याज निम्न सारणी में प्रदर्शित है।

समय (वर्ष में)	0	1	2	3	4	5
साधारण ब्याज (रुपये में)	0	15	30	45	60	75

समय व साधारण ब्याज के बीच आलेख खींचिए।

4. x के विभिन्न मानों के लिए x^2 का मान ज्ञात करके x और x^2 के मानों के बीच एक आलेख खींचिए। x का मान -4 से +4 पूर्णांक संख्याएँ हैं।

5. एक परिवार में 5 सप्ताह तक उपयोग किए गए प्याज की मात्रा किग्रा. में निम्न सारणी में दी गई है–

सप्ताह	1	2	3	4	5
प्याज की मात्रा (किग्रा. में)	1	2	3	4	5

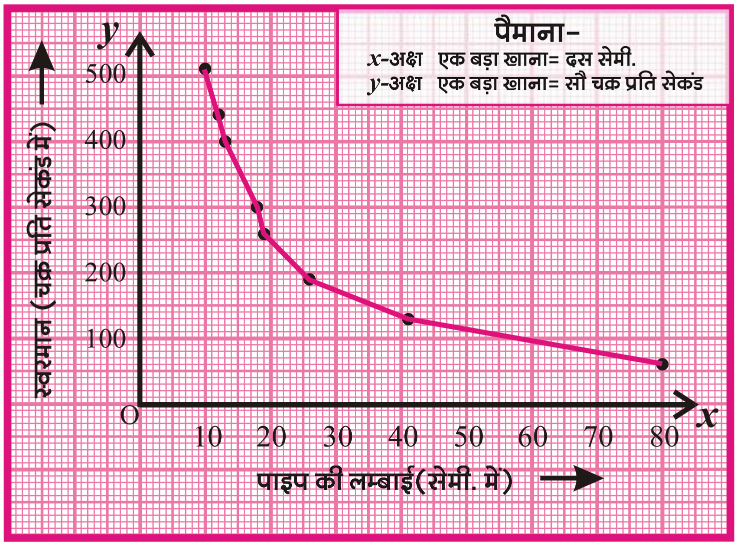
सप्ताह एवं उपयोग किए गए प्याज की मात्रा के बीच आलेख खींचिए ।

6. एक विज्ञान पत्रिका में छपे लेख के अनुसार किसी स्थान विशेष पर रहने वाली चींटियों की चाल पर तापमान का प्रभाव पड़ता है । यदि किसी स्थान पर रहने वाली चींटियों की चाल व उस स्थान के ताप के बीच के संबंध को समीकरण $s = \frac{t-20}{5}$ से प्रदर्शित किया गया हो जहाँ t ताप (°C) में व s चाल (सेमी. प्रति सेकण्ड) है। तब चींटियों की चाल $t = 25^o, 30, 35^o, 40$ रखते हुए तापमान व चाल में दर्शाने वाले संबंध को आलेख में प्रदर्शित कीजिए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

1. x अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुना।
2. y अक्ष पर कौन सा आँकड़ा चुना।
3. x अक्ष और y अक्ष पर आँकड़े दर्शाने के लिए आपने क्या पैमाना चुना?
4. जहाँ चींटियों की चाल 2.5 सेमी. प्रति सेकण्ड है उस स्थान का तापमान क्या है?
5. यदि तापमान $30^o C$ से $40^o C$ हो जाए तो चींटियों की चाल में कितना परिवर्तन होगा ?

7. अनीता ने अलग–अलग लंबाइयों की पाइप से वाद्‌य यंत्र बनाए हैं। पाइप की लंबाई (सेमी.) व ध्वनि का स्वर मान (Pitch) (चक्र प्रति सेकण्ड) के बीच गणितीय संबंध को निम्नांकित सारणी व आलेख में प्रदर्शित किया गया है–

ध्वनि का स्वर मान (चक्र प्रति सेकण्ड में)	64	128	192	261	300	395	438	512
पाइप की लंबाई (सेमी.में)	80	41	26	19	18	13	12	10



आलेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

(i) 160 चक्र प्रति सेकण्ड के लिए पाइप की लंबाई कितनी रखानी चाहिए ?

(ii) 60 सेमी. लंबी पाइप का स्वरमान कितना होगा ?

8. नीचे A और B दो सारणियाँ दी गई हैं उनमें प्रदर्शित राशियों के मध्य आलेख खींचिए और जाँचिए कि क्या उनमें $\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ नियत है ?

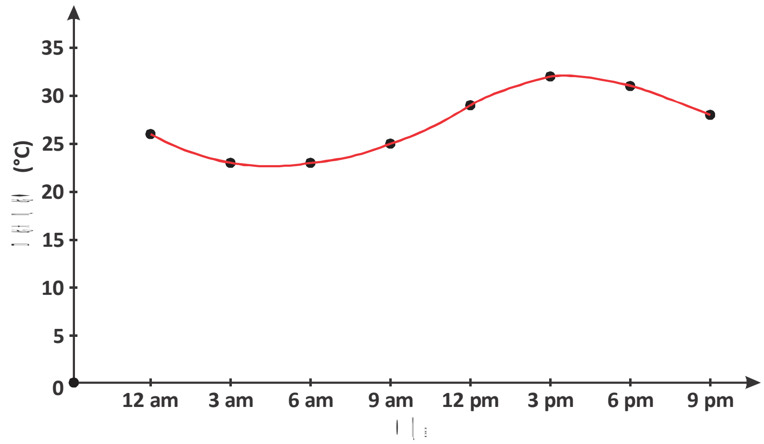
सारणी A

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
वृत्त की त्रिज्या r(सेमी. में)	2	4	6	8	10
वृत्त की परिधि $2\pi r$ (सेमी.में)	4π	8π	12π	16π	20π
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5

सारणी B

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
वृत्त की त्रिज्या r(सेमी. में)	1	2	3	4	5
वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ (वर्ग सेमी. में)	π	4π	9π	16π	25π
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5

9 किसी शहर में एक दिन में दर्ज तापमान के आँकड़े ग्राफ द्वारा दर्शाए गए हैं।



दिए गए ग्राफ के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

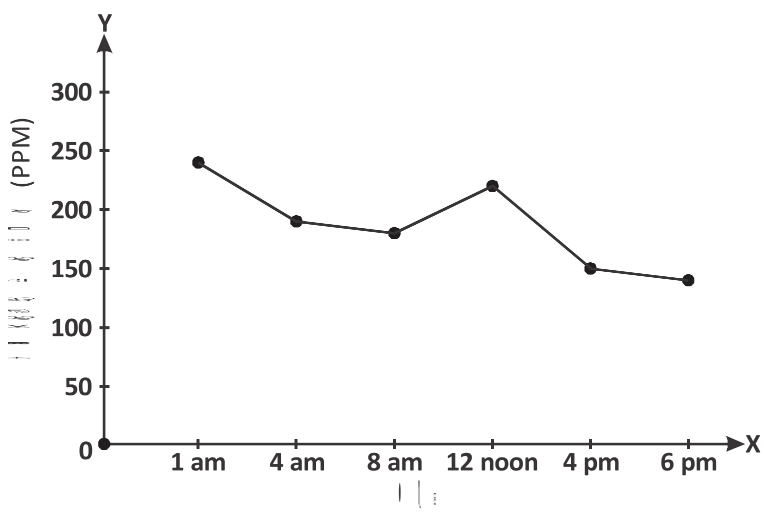
(i) सुबह 6 बजे शहर का तापमान कितना था?

(ii) दोपहर बाद 3 बजे का तापमान कितना था?

(iii) किस समय दिन का तापमान 30 डिग्री था?

(iv) आधी रात 12 बजे तापमान कितना रहा होगा?

(v) रात 9 बजे तापमान कितना रहा होगा?



10 एक शहर में किसी पूरे दिन वायु के प्रदूषण का स्तर नापा गया। इसे ग्राफ द्वारा प्रदर्शित किया गया है–दिए हुए ग्राफ द्वारा निम्नलिखित सवालों के जवाब खोजिए।

(i) सुबह 8 बजे प्रदूषण का स्तर कितना पाया गया?

(ii) प्रदूषण स्तर सबसे अधिक किस समय दर्ज किया गया?

(iii) दोपहर बाद 4 बजे प्रदूषण का स्तर कितना था?

(iv) दोपहर 12 बजे से शाम 6 बजे तक प्रदूषण में कितना अन्तर आया?

(v) रात 1 बजे से सुबह 4 बजे तक प्रदूषण में कितनी गिरावट आई?

हमने सीखा

1 आलेख के माध्यम से किन्हीं दो राशियों के बीच के संबंध को देखना।

2. दिए गए आँकड़ों से आलेख बनाना। इसके लिए कौन सी राशि किस अक्ष पर रहेगी यह चुनना। अक्ष पर पैमाना कैसे समझेंगे और चुनेंगे।

3. विभिन्न परिस्थितियों में बने आलेखों को पढ़ना।

4. आलेख में दी गई जानकारी से निष्कर्ष निकालना।

अध्याय 08

बैंकिंग एवं कराधान
BANKING AND TAXATION

ELNBAC

परिचय (Introduction) –

गोकुल अपने कुछ दोस्तों से बातै। कर रहा था। उनमें चर्चा चल रही थी कि उनके परिवार हर माह कुछ राशि बचा पाते हैं। उस राशि को कहाँ रखें जिससे वह सुरक्षित रहे व कभी–कभी जरूरत पड़ने पर मिल भी जाए।

मोहन – मुझे तो लगता है कि एक बचत खाता खोल लो।

अजमल – उससे तो अच्छा है कि आवर्ती जमा खाता खोल लो, अधिक ब्याज मिलेगा।

नरेश – पर उसमें तो हर माह कुछ जमा करना होगा।

गोकुल – ऐसा तो अगले कुछ महीनों तक हम कर ही सकते हैं।

अजमल – फिर तो ठीक है, हर महीने एक नियत राशि कम से कम 6 महीने तक जमा कराते रहो।

गोकुल – कितनी राशि, कहाँ जमा कराऊँ और 6 महीने ही करना है क्या?

नरेश – नहीं 10 वर्ष तक कर सकते हो और बैंक या पोस्ट आफिस कहीं भी। यही नहीं, तुम चाहो तो एक से अधिक खाते खोल सकते हो। यह ध्यान रहे कि राशि 10 रुपए के गुणक में ही लेनी होगी।

गोकुल – इसका क्या फायदा?

नरेश – इसके ब्याज की दर अधिक है, जितने लंबे समय तक करवाओ उतनी अधिक।

राकेश – और अगर बीच में पैसा चाहिए या किश्त न हो तो?

नरेश – हर साल कुछ राशि तो निकाल सकते हैं ही। किश्त न देने पर क्या होगा, यह

बैंक से पता करना होगा। हाँ, अगर खाता बंद करना पड़े तो ब्याज में कुछ कटौती कर शेष राशि आप को मिल जाएगी।

गरिमा – इससे अधिक ब्याज प्राप्त करने के लिए क्या कोई अन्य खाता खोला जा सकता है?

राकेश – हाँ, सावधि जमा खाता खोला जा सकता है। लेकिन इसमें एक निश्चित अवधि के लिए पैसा जमा करना होता है।

गरिमा – यह हम कैसे तय करें कि अपनी बचत राशि किस खाते में जमा करें?

राकेश – यदि निकट भविष्य में बचत राशि के उपयोग की विशेष आवश्यकता नहीं हो, तो इसे सावधि जमा खाते में जमा कर सकते हैं।

करके देखें

आपने पिछली कक्षाओं में साधारण ब्याज के बारे में पढ़ा है। आइए कुछ सवाल हल करके बचत खाते, आवर्ती जमा खाते और सावधि जमा खाते के अंतर को थोड़ा और समझते हैं।

1. महेश अपने बचत खाते में 300 रु. 3 माह के लिए जमा करता है तथा एकता 100 रु. प्रतिमाह की दर से 3 माह में आवर्ती जमा खाते में 300 रु. जमा करती है। यदि
   (क) बचत खाते में ब्याज की दर 4% वार्षिक तथा आवर्ती जमा खाते में ब्याज की दर 6% वार्षिक हो तो किसे अधिक ब्याज मिलेगा?
   (ख) दोनों खातों में ब्याज की दरें 6% हों तो क्या मिलने वाले ब्याज में कोई अंतर होगा, हाँ तो उसका कारण क्या है?
2. मनीषा 2000 रु. अपने बचत खाते में 2 वर्ष के लिए जमा करती है जिस पर उसे 4% की दर से वार्षिक ब्याज मिलता है परन्तु रोहन 2000 रु. 2 वर्ष के लिए अपने सावधि जमा खाते में जमा करता है जिस पर उसे 8% की दर से वार्षिक ब्याज मिलता है तो दोनों के खातों में 2 वर्ष के अंत में कितना ब्याज मिलेगा?

   तीनों खातों में अंतर को हम संक्षेप में इस तरह देख सकते हैं–

जब हमारे पास पैसा है और आगे कभी भी जरूरत पड़ सकती है तब हम उसे बचत खाते में जमा करते हैं। जबकि सावधि जमा खाते में हम तब जमा करते हैं जब हमें यह लगता है कि आने वाले छह महीने, साल–दो साल या किसी निश्चित अवधि तक उस पैसे की जरूरत नहीं पड़ेगी।

बचत खाते में जमा राशि जमाकर्ता द्वारा कभी भी निकाली जा सकती है इसलिए बैंक उस राशि का उपयोग नहीं करता तथा उस जमा राशि पर ब्याज की दर कम होती है, किंतु सावधि जमा खाते में जमा राशि के लिए बैंक आश्वस्त होता है कि वह उस अवधि के लिए उस राशि का उपयोग कहीं कर सकता है इसलिए इस पर ब्याज की दर अधिक होती है।

आवर्ती जमा खाता उक्त दोनों खातों से इस बात में अलग है कि इसमें जमाकर्ता के पास शुरू में अधिक धन नहीं होता। उसके पास बचत की थोड़ी राशि है और वह निरंतर इतनी राशि किसी निश्चित अवधि में जमा कर सकता है। ऐसी स्थिति में आवर्ती जमा खाता एक उपयुक्त विकल्प होता है। इसकी ब्याज दर बचत खाते से अधिक होती है क्योंकि आवर्ती जमा खाता भी किसी निश्चित अवधि के लिए होता है।

आइए आवर्ती जमा खाते के ब्याज की गणना को निम्न उदाहरणों द्वारा समझें

उदाहरणः—1. संतोष कुमार ने छत्तीसगढ़ विकास बैंक में 100 रु. का मासिक आवर्ती जमा खाता 6 माह के लिए खोला। यदि ब्याज की दर 6% वार्षिक हो तो 6 माह पश्चात उसे कितनी परिपक्वता राशि प्राप्त होगी?

हलः— (i) 100 रु. का 6 माह का 6% की दर से ब्याज (प्रथम किश्त का ब्याज)

$$= \frac{100 \times 6 \times 6 \times \frac{1}{12}}{100}$$

(ii) 100 रु. का 5 माह का 6% की दर से ब्याज (द्वितीय किश्त का ब्याज)

$$= \frac{100 \times 6 \times 5 \times \frac{1}{12}}{100}$$

(iii) 100 रु. का 4 माह का 6% की दर से ब्याज (तृतीय किश्त का ब्याज)

$$= \frac{100 \times 6 \times 4 \times \frac{1}{12}}{100}$$

(iv) 100 रु. का 3 माह का 6% की दर से ब्याज (चतुर्थ किश्त का ब्याज)

$$= \frac{100 \times 6 \times 3 \times \frac{1}{12}}{100}$$

(v) 100 रु. का 2 माह का 6% की दर से ब्याज (पांचवीं किश्त का ब्याज)

$$= \frac{100 \times 6 \times 2 \times \frac{1}{12}}{100}$$

(vi) 100 रु. का 1 माह का 6% की दर से ब्याज (छठवीं किश्त/अंतिम किश्त का ब्याज)

$$= \frac{100 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{12}}{100}$$

कुल ब्याज =

$$\left[\frac{100\times6\times6\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times5\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times4\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times3\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times2\times\frac{1}{12}}{100}+\frac{100\times6\times1\times\frac{1}{12}}{100}\right]$$

$$=\frac{100\times6\times\frac{1}{12}}{100}[6+5+4+3+2+1]$$

$$=\frac{100\times6\times\frac{1}{12}}{100}[1+2+3+4+5+6]$$

$$=\frac{100\times6\times\frac{1}{12}\times6\times7}{100\times2}$$ (समान्तर श्रेढ़ी के योग सूत्र से)

$$=\frac{21}{2} \quad =10.50 \text{ रु}$$

6 माह बाद प्राप्त कुल राशि = 100×6 + 10.50 = 610.50 रु.

उदाहरण:–2. यदि P रु. मासिक आवर्ती जमा खाते में $r\%$ वार्षिक ब्याज की दर से n माह तक जमा किया जाता है, तो n माह पश्चात आवर्ती जमा खाते में प्राप्त ब्याज की गणना कीजिए।

हल – P रु. का n माह बाद $r\%$ की दर से ब्याज (प्रथम किश्त का ब्याज)

$$=\frac{p\times r}{100}\times\frac{n}{12}$$ (क्योंकि यह धन n माह तक रहता है।)

P रु. का (n-1) माह बाद $r\%$ की दर से ब्याज (द्वितीय किश्त का ब्याज)

$$=\frac{P\times r}{100}\times\frac{n-1}{12}$$ (क्योंकि यह धन n-1 माह तक रहता है)

P रु. का (n-2) माह बाद $r\%$ की दर से ब्याज (तृतीय किश्त का ब्याज)

$$=\frac{P\times r}{100}\times\frac{n-2}{12}$$ (क्योंकि यह धन n-2 माह तक रहता है)

....

....

इसी प्रकार, P रु. का अंतिम माह से पूर्व माह बाद [अर्थात $n-(n-2)=2$ माह बाद] $r\%$ की दर से ब्याज (अंतिम से पूर्व किश्त का ब्याज)

$= \frac{P \times r}{100} \times \frac{2}{12}$ (क्योंकि यह धन 2 माह तक रहता है)

P रु. का अंतिम माह का $r\%$ की दर से ब्याज (अंतिम किश्त का ब्याज)

$= \frac{P \times r}{100} \times \frac{1}{12}$ (क्योंकि यह धन 1 माह तक रहता है)

कुल ब्याज $= \frac{P \times r}{100} \times \frac{1}{12}\left[n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots\ldots + 2 + 1\right]$

$= \frac{P \times r}{100} \times \frac{1}{12}\left[1 + 2 + 3 \ldots\ldots + (n-1) + n\right]$

$= \frac{P \times r}{100} \times \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ (क्योंकि समांतर श्रेणी में हैं।)

$\therefore$ आवर्ती जमा खाते में जमा धन राशि का कुल ब्याज $= \frac{P \times r}{100} \times \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$

जहाँ $P =$ मासिक किश्त राशि, $r =$ ब्याज की दर तथा

$n =$ मासिक किश्तों की कुल संख्या

आइए अब सावधि जमा खाते के ब्याज की गणना को निम्न उदाहरणों द्वारा समझें

इस खाते में जमा धन पर चक्रवृद्धि ब्याज देय होता है जिसका सूत्र निम्न प्रकार है:–

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

जहाँ $A =$ मिश्रधन, $P =$ मूलधन, $r =$ ब्याज की दर तथा $n =$ समय

गणना में लघुगणक का भी प्रयोग किया जा सकता है।

उदाहरण:– 3. निखिल ग्रामीण बैंक में 1 वर्ष 6 माह के लिए 10,000 रु. सावधि जमा खाते में जमा d j r k gS ; fn C;kt d hnj 8% प्रतिवर्ष है तथा उसका संयोजन अर्द्धवार्षिक हो, तो निखिल के सावधि जमा खाते में जमा राशि का परिपक्वता मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल:– दिया है, मूलधन $P = 10{,}000$ रु.,दर $= 8\%$ वार्षिक $= 4\%$ अर्द्धवार्षिक

समय, $n =$ 1 वर्ष 6 माह $=$ 3 अर्द्धवर्ष

मिश्रधन $A =$?

$\because$ मिश्रधन $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ से,

अतः मिश्रधन $A = 10000\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$

$$A = 10000\left(1+\frac{1}{25}\right)^3$$

$$A = 10000\left(\frac{26}{25}\right)^3$$

$$A = 10000\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{25}$$

$A = 11248.64$ रुपये

अतः निखिल को देय परिपक्वता मूल्य 11248.64 रुपये है।

उदाहरणः–4. मोहन ने कृषि विकास बैंक में 50,000 रुपये 2 वर्ष के लिए सावधि जमा खाते में जमा किए। यदि ब्याज की दर 10% वार्षिक हो तथा ब्याज प्रति छमाही बाद संयोजित किया जाता हो, तो परिपक्वता पर बैंक उसे कितनी धनराशि देगा?

हलः– दिया है, मूलधन P= 50,000 रु.

ब्याज की दर r = 10% वार्षिक = 5% अर्द्धवार्षिक

समय n = 2 वर्ष = 4 छमाही,

तो मिश्रधन $A = ?$

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ से,

अतः मिश्रधन $A = 50000\left(1+\frac{5}{100}\right)^4$

$$A = 50000\left(1+\frac{1}{20}\right)^4$$

$$A = 50000\left(\frac{21}{20}\right)^4$$

$$A = 50000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$$

$A = 60775.31$ रुपये

इस प्रकार मोहन को 2 वर्ष पश्चात परिपक्वता राशि 60775.31 रुपये प्राप्त होगी।

प्रश्नावली 1

1. करीम भारतीय स्टेट बैंक में 150 रु. प्रतिमाह की दर से 2 वर्ष तक आवर्ती जमा खाता में निवेश करता है। यदि ब्याज की दर 5% वार्षिक हो तो उसे 2 वर्ष बाद कितनी धनराशि बैंक द्वारा भुगतान की जाएगी?
2. रेशमा ने पंजाब नेशनल बैंक में 200 रु. प्रतिमाह की दर से 5 वर्ष के लिये आवर्ती जमा खाता खोला। यदि ब्याज की दर 6% वार्षिक हो, तो 5 वर्ष पश्चात उसे कितनी धनराशि प्राप्त होगी?
3. रोहन ने डाकघर में 50 रु. प्रतिमाह की दर से 5 वर्ष के लिए आवर्ती जमा खाता खोला। 5% वार्षिक ब्याज की दर से उसे कितना धन मिलेगा ?
4. पद्मनी ने जिला सहकारी बैंक में 100 रुपये प्रतिमाह का 10 वर्ष के लिये आवर्ती जमा खाता खोला। यदि इन्हें बैंक द्वारा ब्याज की राशि 3025 रु. प्रदान की जाती है, तो ब्याज की दर कितने प्रतिशत वार्षिक होगी?
5. किशन ने एक बैंक की शाखा में तीन वर्ष के लिए 250 रुपये प्रतिमाह का एक आवर्ती जमा खाता खोला तो 5% वार्षिक ब्याज की दर से उसे बैंक द्वारा कितनी धनराशि प्राप्त होगी ?
6. रजत ने सेंट्रल बैंक ऑफ इंडिया की एक शाखा में 100 रुपये प्रतिमाह की दर से तीन वर्ष के लिए आवर्ती जमा खाता खोला। कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से उसे 222 रूपये ब्याज मिलेगा?
7. किशन इलाहाबाद बैंक में सावधि जमा के रूप में 20,000 रु. 1 वर्ष के लिए 16% वार्षिक ब्याज की दर से जमा करता है। यदि ब्याज तिमाही संयोजित होता है, तो परिपक्वता के पश्चात किशन को कितनी धनराशि प्राप्त होगी?
8. हेमचरण ग्रामीण बैंक में 1,00,000 रुपये 1 वर्ष 6 माह के लिए 8% वार्षिक ब्याज की दर से सावधि जमा करता है, यदि ब्याज तिमाही संयोजित होता है, तो परिपक्वता तिथि पर कितनी धनराशि प्राप्त होगी?
9. एक व्यक्ति सावधि जमा खाता में 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए 2 लाख रु. निवेश करता है, तो उसे परिपक्वता के समय कितनी धनराशि प्राप्त होगी, यदि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है?
10. निलेश बैंक ऑफ इंडिया में 50 हजार रुपये का 1 वर्ष के लिए 8% वार्षिक ब्याज की दर से सावधि जमा खाता खोलता है। यदि ब्याज तिमाही संयोजित किया जाता है तो उसे एक वर्ष पश्चात कितनी राशि का भुगतान बैंक द्वारा किया जावेगा।
11. पुष्पा ने 60 हजार रुपये को 1 वर्ष 6 माह के लिए सावधि जमा खाते में निवेश किया। परिपक्वता तिथि पर कितने धन की प्राप्ति होगी यदि ब्याज की दर 12% वार्षिक हो तथा ब्याज प्रति 6 माह के बाद संयोजित किया जाता है।
12. श्रीराम ने 20,000 रु. 2 वर्ष के लिए सावधि जमा खाते में जमा कराया। यदि ब्याज की दर 6% वार्षिक हो तथा ब्याज छमाही संयोजित होता है तो नियत तिथि पश्चात मिलने वाली धनराशि कितनी होगी?

उत्तरमाला–1

1. 3787.50 रु.	2. 13830 रु.	3. 3381.25 रु.	4. 5%
5. 9693.75 रु.	6. 4%	7. 23,397.17 रु.	8. 1,12,616.24 रु.
9. 2,16,320.00 रु.	10. 54121.60 रु.	11. 71,460.96 रु.	12. 22510.17 रु.

कराधान [TAXATION]

EY2JQH

परिचय (Introduction)

भारत सरकार जनकल्याण के लिये बहुत से काम करती है। इसके लिये उसे धन की आवश्यकता पड़ती है।क्या आप बता सकते हैं कि सरकार इन सब कार्यों को पूरा करने के लिये धन कहाँ से प्राप्त करती है?

सरकार धन प्राप्त करने के लिए आयकर, सेवाकर, बिक्री कर आदि के रूप में जनता पर कर लगाती है। ये करें पूर्व निर्धारित होती हैं।

सोचें एवं चर्चा करें?

सरकार इसके अतिरिक्त विकास के कार्यों को पूर्ण करने के लिये और अपने खर्चों की पूर्ति हेतु कहाँ–कहाँ से धन प्राप्त करती है ?

आप जानते हैं कि आयकर क्या है?

भारत सरकार को विभिन्न स्रोतों से प्राप्त होने वाली कुल आय का एक बड़ा हिस्सा आयकर से प्राप्त राशि होती है। सरकार आयकर प्राप्त करने के लिए आयकर की न्यूनतम सीमा निर्धारित करती है। इस सीमा से अधिक आय प्राप्त करने वाले व्यक्तियों , कंपनियों या उद्योगों को आयकर देना होता है। लेकिन न्यूनतम सीमा से कम आय प्राप्त करने वाले व्यक्तियों ,कंपनियों या उद्योगों को आयकर नहीं देना पड़ता। आय के विभिन्न स्तरों के लिए सरकार द्वारा आयकर की दरें निर्धारित की जाती है जिसके अनुसार आयकर का भुगतान करना पड़ता है परन्तु कुछ विशेष श्रेणियों में आने वाले व्यक्तियों,कंपनियों या उद्योगों को आयकर में छूट दी जाती है। आयकर की दर आय के साथ–साथ बढ़ती जाती है। यह बढ़ी दर निश्चित स्तर से अधिक आय पर लगती है। व्यक्तियों, कंपनियों या उद्योगों के आय के एक या एक से अधिक साधन हो सकते हैं अतः उन सभी साधनों से प्राप्त आय पर गणना द्वारा प्राप्त कर का योग ही आयकर है। कभी–कभी इस आयकर पर सरकार विशेष प्रायोजनाओं के लिए थोड़ा सा अतिरिक्त कर लगा देती है जिसे उपकर (Cess) कहा जाता है। आयकर की सीमा के अन्तर्गत आने वाले प्रत्येक व्यक्ति,कंपनी या उद्योग को आयकर अनिवार्यतः चुकाना चाहिए ।

क्या आयकर जमा करने के लिये आयकरदाता के खाते की कोई संख्या (Account Number) होती है?

भारत सरकार द्वारा गठित आयकर विभाग आयकरदाताओं से आयकर प्राप्त करता है। अब प्रश्न यह उठता है कि आयकरदाताओं की पहचान आयकर विभाग कैसे करता

है ? आयकरदाताओं की पहचान के लिए आयकर विभाग द्वारा प्रत्येक व्यक्ति,संस्था या कंपनी को एक पहचान संख्या दी जाती है जिसे स्थायी खाता संख्या (Permanent Account Number या PAN) अथवा अस्थायी खाता संख्या (Temporary Account Number या TAN) कहा जाता है। बैंकों में खाता खोलने के लिए PAN को अनिवार्य किया जाता है ताकि आयकर विभाग को खाताधारकों के आय की जानकारी हो सके।

यह आयकर किस अवधि के लिये एवं किस दर पर लगाया जाता है?

किसी व्यक्ति, कंपनी या उद्योग को 1 अप्रैल से 31 मार्च तक की अवधि में आय के समस्त स्रोतों से जो आय होती है उसी पर उसे आयकर का भुगतान करना होता है। इस अवधि को वित्तीय वर्ष कहते हैं। आयकर गणना के लिए सरकार द्वारा आयकर की दरें निर्धारित की जाती हैं जो वित्तीय वर्ष के अनुसार बदलती रहती हैं।

(1) आइए विगत तीन वर्षों की आयकर दरों की तालिका का अवलोकन करें जिसमें आयकर की गणना दरें समय अनुसार परिवर्तित हुई हैं –

वित्तीय वर्ष	पुरूष		महिला		वरिष्ठ नागरिक	
	आय सीमा	आयकर दर	आय सीमा	आयकर दर	आय सीमा	आयकर दर
2013–14	2 लाख तक	निरंक	2.5 लाख तक	निरंक	2.5 लाख तक	निरंक
	2 से 5 लाख तक	10 %	2.5 से 5 लाख तक	10 %	2.5 से 5 लाख तक	10 %
	5 से 10 लाख तक	20 %	5 से 10 लाख तक	20 %	5 से 10 लाख तक	20 %
	10 लाख से ऊपर	30 %	10 लाख से ऊपर	30 %	10 लाख से ऊपर	30 %
2014–15	2.5 लाख तक	निरंक	3 लाख तक	निरंक	3 लाख तक	निरंक
	2.5 से 5 लाख तक	10 %	3 से 5 लाख तक	10 %	3 से 5 लाख तक	10 %
	5 से 10 लाख तक	20 %	5 से 10 लाख तक	20 %	5 से 10 लाख तक	20 %
	10 लाख से ऊपर	30 %	10 लाख से ऊपर	30 %	10 लाख से ऊपर	30 %
2015–16	2.5 लाख तक	निरंक	3 लाख तक	निरंक	3 लाख तक	निरंक
	2.5 से 5 लाख तक	10 %	3 से 5 लाख तक	10 %	3 से 5 लाख तक	10 %
	5 से 10 लाख तक	20 %	5 से 10 लाख तक	20 %	5 से 10 लाख तक	20 %
	10 लाख से ऊपर	30 %	10 लाख से ऊपर	30 %	10 लाख से ऊपर	30 %

(2) वर्तमान में शिक्षा उपकर देय आयकर का 2 प्रतिशत एवं माध्यमिक और उच्च शिक्षा देय आयकर का 1 प्रतिशत है अथवा समेकित रूप से कुल शिक्षा उपकर 3 प्रतिशत।

(3) यदि कर योग्य आय 10 लाख रुपए से अधिक हो तो देय आयकर पर 10 प्रतिशत अधिभार भी देना पड़ता है।

(4) आयकर अधिनियम 1961 की धारा 80 C के अन्तर्गत जमा की गई धन राशि पर आयकर छूट की अधिकतम सीमा 1.5 लाख रुपए है, जो सकल आय से घटा दी जाती है। शेष आय पर आयकर की गणना की जाती है।

निवेश की गई छूट योग्य राशि निम्नलिखित है–

(अ) जीवन बीमा पॉलिसी की वार्षिक किस्त।

(ब) यूलिप में जमा वार्षिक किस्त।

(स) सामान्य भविष्य निधि वार्षिक जमा राशि।

(द) गृह ऋण पर मूल धन जमा की वार्षिक राशि।

(इ) बच्चों को देय शिक्षण शुल्क।

(फ) सावधि जमा की राशि।

(ग) समूह बीमा/परिवार कल्याण में जमा वार्षिक अंश दान की राशि आदि।

आइए आयकर गणना को निम्न उदाहरण द्वारा समझते हैं:

उदाहरणः– 1. एक कर्मचारी की वित्तीय वर्ष 2008–09 में आय 4,28,000 रु. थी। उसने 2500रु. प्रतिमाह सामान्य भविष्य निधि में तथा 25,000 रु. अर्द्धवार्षिकी जीवन बीमा पॉलिसी प्रीमियम में जमा किया। उसने 30,000 रु. का राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदा तथा 25,000 रु. एक चेरिटेबल ट्रस्ट में दान किए। कर्मचारी द्वारा वित्तीय वर्ष के अंतिम माह में चुकाई गई आयकर की धनराशि ज्ञात कीजिए। आयकर की धारा 80सी के अंतर्गत सामान्य भविष्य निधि, जीवन बीमा प्रीमियम और राष्ट्रीय बचत पत्र आदि में जमा के कुल 1,00,000 रु. तक आयकर से छूट है। ट्रस्ट में दान की राशि का 50% आयकर में छूट धारा 80जी के अंतर्गत है। आयकर की दरें निम्नानुसार हैं :–

क्र.	कर योग्य सीमा	आयकर की दर
1	1,50,000 रु. तक	कोई आयकर नहीं
2	1,50,001 रु. से 3,00,000 रु. तक	10%
3	3,00,001 रु. से 5,00,000 रु. तक	20%

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% शिक्षा अधिभार लगाया जाएगा।

हलः– एक कर्मचारी की कुल आय = 4,28,000 रु.

ट्रस्ट में दान की गई राशि = 25000 रु. का 50%

$$= \frac{25000 \times 50}{100}$$

छूट की राशि = 12,500 रु.

शेष आय = 4,28,000 रु. – 12,500 रु. = 4,15,500 रु.

आयकर की धारा 80–सी अंतर्गत जमा कुल राशि =

सामान्य भविष्य निधि + जीवन बीमा प्रीमियम + राष्ट्रीय बचत पत्र

= 2500×12 + 25000×2 + 30,000

= 30,000 + 50,000 + 30,000

= 1,10,000 रु. जो 1 लाख से अधिक है

आयकर में छूट की राशि 1,00,000 रु.

अतः कर योग्य आय = 4,15,500 – 1,00,000 रु.

= 3,15,500 रु.

दिए गए आयकर की दर क्रमांक 3 के अनुसार, = प्रथम 1,50,000 तक कोई कर नहीं

आयकर = 1,50,000 रु. का 10%+ 1,55,000 का 20%

= 15,000 रु. + 3100

= 18,100 रु.

शिक्षा अधिभार = 18,100 का 3%

= 543 रु.

कुल देय आयकर = 18,100 + 543

= 18643 रु.

उदाहरणः–2. वित्तीय वर्ष 2012–13 में मकान किराया भत्ता छोड़कर एक व्यक्ति की वार्षिक आय 4,80,000 रु. है। उसने 36000 रु. भविष्य निधि में, 18000 रु. जीवन बीमा प्रीमियम में और 20,000 रु. राष्ट्रीय बचत पत्र योजना में जमा किया। उसे वार्षिक देय आयकर पर 3% शिक्षा कर भी देना पड़ता है। यदि वह 1500 रु. प्रतिमाह आयकर 10 माह तक जमा करता है तो शेष आयकर की राशि बताइए। आयकर गणना करने के पहले भविष्य निधि, जीवन बीमा एवं राष्ट्रीय बचत पत्र में नियोजित राशि अधिकतम 1,00,000 रु. कर मुक्त है। आयकर की दरें निम्नानुसार हैं :–

क्र.	कर योग्य सीमा	आयकर की दर
1	2,00,000 रु. तक	कोई आयकर नहीं
2	2,00,001 से 5,00,000 रु.	10%

हलः– वार्षिक आय = 4,80,000 रु.

1. भविष्य निधि में जमा राशि = 36000 रु.
2. जीवन बीमा में जमा राशि = 18,000 रु.
3. राष्ट्रीय बचत पत्र योजना में जमा राशि = 20,000 रु.

कुल जमा राशि = 36,000 + 18,000 + 20,000

= 74,000 रु.

कर योग्य आय = 4,80,000 रु. – 74000 = 4,06,000 रु.

आयकर = (4,06,000 रु. – 2,00,000 रु.) का 10% ($\because$ 2,00,000 रु. तक कोई आयकर नहीं लगता है।)

$$= \frac{206000 \times 10}{100}$$

= 20,600 रु.

शिक्षाकर = 20,600 रु. का 3%

$$= \frac{20600 \times 3}{100}$$

= 618 रु.

कुल देय आयकर = 20,600 रु. + 618 रु. = 21,218 रु.

10 माह में जमा किया गया आयकर = 1500 × 10 रु. = 15,000 रु.

शेष देय आयकर = 21,218 रु. – 15,000 रु.

= 6,218 रु.

उदाहरणः–3. वित्तीय वर्ष 2013–14 में एक शासकीय कर्मचारी की कुल वार्षिक आय 3,60,000 रु. थी। उसने 20,000 रु. जीवन बीमा पॉलिसी का वार्षिक प्रीमियम तथा 4000 रु. प्रतिमाह सामान्य भविष्य निधि में जमा किया। देय आयकर की गणना कीजिए।

यदि आयकर गणना के पूर्व सामान्य भविष्य निधि एवं जीवन बीमा आदि में नियोजित राशि का अधिकतम 1,00,000 रु. कर मुक्त हो।

आयकर की दरें निम्नानुसार हैं :–

क्रमांक	कर योग्य सीमा	आयकर की दर
1	2,00,000 रु. तक	कोई आयकर नहीं
2	2,00,001 रु. से 5,00,000 रु. तक	10%
3	5,00,001 रु. से 10,00,000 रु. तक	20%

शिक्षा उपकर देय आयकर का 3% है।

हलः– शासकीय कर्मचारी की कुल वार्षिक आय = 3,60,000 रु.

1. सामान्य भविष्य निधि में जमा राशि = 48,000 रु.
2. जीवन बीमा में जमा राशि = 20,000 रु.

कुल जमा राशि = 48,000 + 20,000

= 68,000 रु.

छूट अधिकतम 1 लाख रु. है, अतः 68,000 रु. पर कर नहीं देना होगा।

कर योग्य आय = 3,60,000 – 68,000 = 2,92,000 रु.

देय आयकर = (2,92,000 − 2,00,000) का 10% (∵ 2,00,000 रु. तक कोई आयकर नहीं लगता है।)

= 92,000 का 10%

= 9,200 रु.

शिक्षा उपकर = देय आयकर का 3%

$$= \frac{9200 \times 3}{100}$$

= 276 रु.

कुल देय आयकर = 9,200 + 276 = 9,476 रु. उत्तर

प्रश्नावली 2

1. वित्तीय वर्ष 2013–14 में एक शासकीय कर्मचारी की वार्षिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) 4,10,000 रु. है। वह प्रतिमाह 4,000 रु. अपने सामान्य भविष्य निधि खाते तथा 24,000 रु. वार्षिक जीवन बीमा प्रीमियम में जमा करता है। वह 25,000 रु. का राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदता है। प्रधानमंत्री राहत कोष (जो 100% कर मुक्त है) में 20,000 रु. तथा एक वृद्धाश्रम में 12,000 रु. (जिसका 50% करमुक्त) दान करता है। उसके द्वारा वर्ष के अंत में देय आयकर की गणना कीजिए। सभी बचत 1,00,000 रु. तक कर मुक्त है। आयकर दरें निम्नानुसार हैं–

क्रमांक	कर योग्य सीमा	आयकर की दर
1	2,00,000 रु. तक	शून्य
2	2,00,001 रु. से 5,00,000 रु. तक	10%
3	5,00,001 रु. से 10,00,000 रु. तक	20%

1. शिक्षा उपकर – देय आयकर का 2%
2. माध्यमिक और उच्च शिक्षा उपकर – देय आयकर का 1%

2. नवीन का वित्तीय वर्ष 2013–14 में वार्षिक वेतन 7,20,000 रु. है। वह सामान्य भविष्य निधि में 4,000 रु. मासिक जमा करता है। 20,000 रु. वार्षिक जीवन बीमा की किस्त जमा करता है। 30,000 रु. राष्ट्रीय बचत पत्र में निवेश करता है। अनाथ आश्रम में 15,000 रु. दान करता है जिसका 50% कर मुक्त है। तो उसके द्वारा वर्ष के अन्त में देय आयकर की गणना कीजिए।

आयकर दरें निम्नानुसार हैं :–

क्रमांक	कर योग्य सीमा	आयकर की दर
1	2,00,000 रु. तक	कोई आयकर नहीं
2	2,00,001 रु. से 5,00,000 रु. तक	10%
3	5,00,001 रु. से 10,00,000 रु. तक	20%
4	10,00,001 रु. से अधिक पर	30%

1. शिक्षा उपकर – देय आयकर का 2%
2. माध्यमिक और उच्च शिक्षा उपकर – देय आयकर का 1%
3. सभी बचत 1,00,000 रु. तक कर मुक्त हैं।

3. वित्तीय वर्ष 2008–09 में रमेश की कुल वार्षिक आय 3,00,000 रु. थी। वह सामान्य भविष्य निधि खाते में 1,000 रु. प्रतिमाह जमा करता था तथा उसने 12,000 रु. वार्षिक जीवन बीमा पॉलिसी का प्रीमियम दिया था। यदि 1,50,000 रु. तक कोई आयकर नहीं है तथा 1,50,000 रु. से अधिक आय पर 10% की दर से आयकर देय हो एवं सभी बचत पर छूट की अधिकतम सीमा 1,00,000 रु. हो तो उसके द्वारा देय आयकर की गणना कीजिए, जहाँ शिक्षा उपकर देय आयकर का 3% है।

4. वित्तीय वर्ष 2014–15 में किसी बैंक कर्मचारी की मासिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) 40,000 रु. है। वह 42,000 रु. वार्षिक अपने सामान्य भविष्य निधि में जमा करता है तथा 6,000 रु. की अर्द्धवार्षिक प्रीमियम एल.आई.सी. में देता है। यदि वर्ष के प्रथम 11 माह के लिए 1,600 रु. प्रतिमाह आयकर देता है तो वित्तीय वर्ष के अंतिम माह में उसके द्वारा भुगतान किये जाने वाले आयकर की गणना कीजिए। आयकर में छूट समस्त बचतों का 100% (अधिकतम 1,00,000 रु.) है।

(अ) आयकर की दरें निम्नानुसार हैं :–

क्रमांक	कर योग्य सीमा	आयकर की दर
1	2,50,000 रु. तक	कोई आयकर नहीं
2	2,50,001 रु. से 5,00,000 रु. तक	10%
3	5,00,001 रु. से 10,00,000 रु. तक	20%
4	10,00,001 से अधिक पर	30%

(ब) अधिभार : देय आयकर का 10% यदि कर योग्य आय 10 लाख रु. से अधिक हो।

(स) शिक्षा उपकर : देय आयकर का 3%।

5. वित्तीय वर्ष 2012–13 में राजेश की कुल वार्षिक आय 5,25,000 रु. है। वह सामान्य भविष्य निधि में 8,000 रु. प्रतिमाह जमा करता है तथा 8,000 रु. अपने भारतीय जीवन बीमा का

वार्षिक प्रीमियम देता है। यदि वह 2 लाख रु. तक कोई आयकर नहीं देता है तथा 2 लाख रु. से अधिक आय पर 10% की दर से आयकर देय हो एवं आयकर में छूट सभी बचत पत्रों का 100% (अधिकतम सीमा 1 लाख रु.) हो तो राजेश के द्वारा देय आयकर की गणना कीजिए जहाँ शिक्षा उपकर देय आयकर का 3% है।

6. वित्तीय वर्ष 2014–15 में श्रीमती भावना की वार्षिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) 6,00,000 रु. है। वह अपने सामान्य भविष्य निधि में 48,000 रु. वार्षिक एवं जीवन बीमा निगम में 25,000 रु. वार्षिक प्रीमियम जमा करती है। यदि वर्ष के प्रथम 11 माह में 1500 रु. प्रतिमाह आयकर देती है तथा सभी बचत पत्रों पर छूट की अधिकतम सीमा एक लाख रु. है। देय आयकर की गणना कीजिए।

अ) आयकर की दरें निम्नानुसार हैं–

क्रमांक	कर योग्य सीमा	आयकर की दर
1	2,50,000 रु. तक	कोई आयकर नहीं
2	2,50,001 रु. से 5,00,000 रु. तक	10%
3	5,00,001 रु. से 10,00,000 रु. तक	20%

इसके अतिरिक्त देय आयकर पर 3% शिक्षा उपकर लगता है।

7. एक अधिकारी की वित्तीय वर्ष 2012–13 में वार्षिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) 7,20,000 रु. है। उसने सामान्य भविष्य निधि में प्रतिमाह 4000 रु., जीवन बीमा निगम में प्रतिमाह 3000 रु. जमा किए तथा 30,000 रु. का राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदा। एक अनाथ आश्रम को 20,000 रु. दान दिए जिस पर 50% टैक्स से छूट मिलती है। यदि सभी बचतों पर छूट की अधिकतम सीमा एक लाख रु. हो तो उस अधिकारी द्वारा देय आयकर की गणना कीजिए।

अ) आयकर की दरें निम्नानुसार हैं–

क्रमांक	कर योग्य सीमा	आयकर की दर
1	2,00,000 रु. तक	कोई आयकर नही
2	2,00,001 रु. से 5,00,000 रु. तक	10%
3	5,00,001 रु. से 10,00,000 रु. तक	20%
4	10,00,001 रु. से अधिक पर	30%

इसके अतिरिक्त देय आयकर पर 3% शिक्षा उपकर लगता है।

उत्तरमाला–2

1. कुल आयकर 8,961 रु.
2. कुल आयकर 54,487 रु.
3. कुल आयकर 12,978 रु.
4. कुल आयकर 18,128 रु. एवं अंतिम माह का आयकर 528 रु.
5. कुल आयकर 23,175 रु. एवं शिक्षा उपकर 675 रु.
6. कुल आयकर 31,312 रु. एवं शिक्षा उपकर 912 रु.
7. कुल आयकर 53,560 रु. एवं शिक्षा उपकर 1,560 रु.

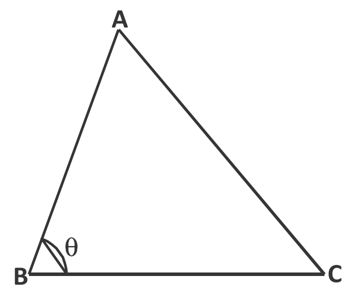
अध्याय 09

त्रिकोणमितीय समीकरण एवं सर्वसमिकाएँ

[TRIGONOMETRIC EQUATION AND IDENTITIES]

EYKBU7

हमने त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ व $\operatorname{cosec}\theta$ के बारे में कक्षा–9 में पढ़ा है। ये किसी भी कोण के लिए पता किए जा सकते हैं परन्तु इस अध्याय में हम इनकी चर्चा न्यून कोणों के लिए ही करेंगे।



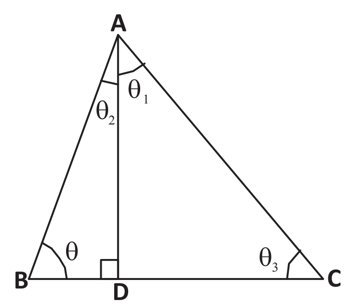
त्रिभुज ABC में कोण B लें। क्या आप $\angle B = \theta$ के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को पता कर सकते हैं?

कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को पता करने के लिए हमें इस कोण को शामिल करते हुए एक समकोण त्रिभुज बनाना होगा।

ΔABC के θ कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए समकोण त्रिभुज कैसे बनाएँ ?

हम ΔABC में शीर्ष A से भुजा BC पर लंब AD डालेंगे। अब प्राप्त समकोण त्रिभुज ADB व त्रिभुज ADC में आकृति 1(ii) न्यून कोण θ एवं θ_1 के लिए निम्नलिखित सारणी को पूर्ण कीजिएः–

$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\frac{AD}{AB}$					
$\sin\theta_1$	$\cos\theta_1$	$\tan\theta_1$	$\cot\theta_1$	$\sec\theta_1$	$\operatorname{cosec}\theta_1$
$\frac{CD}{AC}$					

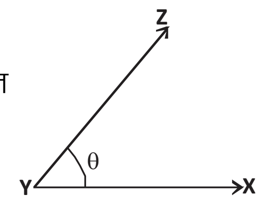


करके देखें

आकृति–1(ii) में कोण θ_2 व θ_3 के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

सोचें एवं चर्चा करें

दिए गए $\angle XYZ = \theta$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात कैसे ज्ञात करेंगे?



त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच संबंध

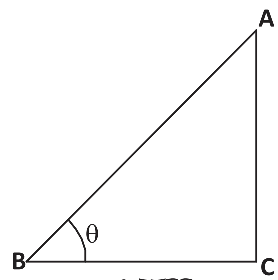
पिछली कक्षा में हमने त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच कुछ संबंधों को जाना है।

आइए, अब हम इन त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच कुछ और संबंध ढूंढ़ते हैं–

समकोण त्रिभुज ACB में कोण C समकोण है।(आकृति–2) पाइथागोरस प्रमेय से–

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \qquad .....(1)$$

उपरोक्त समीकरण को AB^2 से भाग देने पर



$$\frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2}$$

$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AB}\right)^2$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

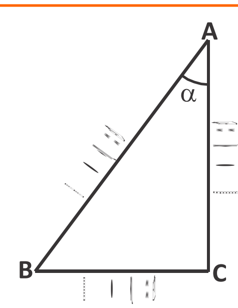
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad .....(2)$$

$\sin\theta$ व $\cos\theta$ के बीच प्राप्त यह संबंध क्या θ के $0°$ से $90°$ तक के सभी मानों के लिए सत्य है? अपने उत्तर के लिए उचित तर्क दीजिए।

करके देखें

(i) $\theta = 30°, 45°, 60°$ के लिए प्राप्त संबंध $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ की सत्यता की जाँच कीजिए।

(ii) दी गई आकृति के लिए $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ की सत्यता की जाँच कीजिए।



आप पाएँगे कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, θ के $0°$ से $90°$ तक के सभी मानों के लिए सत्य है।

क्या त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच इसी प्रकार के अन्य संबंध भी हो सकते हैं? आइए देखें–

समीकरण (1) में BC^2 से भाग देने पर

$$\frac{AC^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

$$(\tan\theta)^2 + 1 = (\sec\theta)^2$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad .....(2)$$

क्या उपरोक्त संबंध भी $0°$ से $90°$ तक के सभी कोणों के लिए सत्य है? आइए कोण के कुछ मानों के लिए अनुपातों के संबंध को देखें। उदाहरण के लिए जब $\theta = 0°$ हो–

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= 1 + \tan^2\theta \\ &= 1 + \tan^2 0° \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \\ \text{R.H.S.} &= \sec^2\theta \\ &= \sec^2 0° \\ &= 1 \end{aligned}$$

अतः यह $\theta = 0°$ के लिए सत्य है।

क्या यह $\theta = 90°$ के लिए भी सत्य है? क्योंकि $\theta = 90°$ के लिए $\tan\theta$ और $\sec\theta$ परिभाषित नहीं है, अतः हम $\theta = 90°$ को छोड़कर कह सकते हैं कि $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, θ के उन सभी मानों के लिए सत्य है, जहाँ $0° \le \theta < 90°$ है।

आइए, अब हम त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच एक और संबंध देखते हैं। समीकरण (1) को AC^2 से भाग देने पर हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है?

$$\frac{AC^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\left(\frac{AC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \qquad .....(3)$$

हम जानते हैं कि $\theta = 0°$ के लिए $\cot\theta$ व $\operatorname{cosec}\theta$ परिभाषित नहीं है अतः

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$, जहाँ $0° < \theta \le 90°$ है।

सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को किसी भी एक त्रिकोणमितीय अनुपात में व्यक्त करना

EYU7VU

हमने विभिन्न त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच संबंध देखें हैं। क्या हम किसी भी एक त्रिकोणमितीय अनुपात में अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों को रूपांतरित कर सकते हैं जैसे यदि हमें cosA व tanA को sinA के पदों में व्यक्त करना हो, तो

$$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

अतः $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

और $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$$= \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

> एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात होने पर अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कर सकते हैं।

करके देखें

1. secA को sinA के पदों में व्यक्त कीजिए।
2. सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को cosA के पदों में व्यक्त कीजिए।

हमने त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच संबंधों का अध्ययन किया है।

आइए, अब नीचे लिखे संबंध पर विचार करते हैं–

$$\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \,.\, \sec\theta$$

क्या यह संबंध सही है, आइए इसकी जाँच करें–

$$\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \,.\, \sec\theta$$

बायाँ पक्ष $= \cot\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta \,.\, \cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta . \cos\theta} \qquad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\text{cosec}\theta}$$

$= \text{cosec}\theta \,.\, \sec\theta$

= दायाँ पक्ष

अब हम इसी प्रकार के कुछ और उदाहरण लेते हैं–

उदाहरणः–1. सिद्ध कीजिए कि–

$$\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

हलः– बायाँ पक्ष $= \sin^4\theta - \cos^4\theta$

$= (\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2 \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \qquad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,.\,1$

$= \sin^2\theta - \cos^2\theta$

= दायाँ पक्ष

उदाहरणः–2. सिद्ध कीजिए कि–

$$\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

हल : बायाँ पक्ष $= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

= दायाँ पक्ष

उदहरणः–3. सिद्ध कीजिए कि–

$$\frac{\cos A}{1-\tan A}+\frac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$$

हलः– बायाँ पक्ष $=\dfrac{\cos A}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}+\dfrac{\sin A}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}$

$$=\frac{\cos A\,.\,\cos A}{\cos A-\sin A}+\frac{\sin A\,.\,\sin A}{\sin A-\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}-\frac{\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}{\cos A-\sin A}$$

$=\sin A+\cos A$ $=$ दायाँ पक्ष

उदाहरणः–4. सिद्ध कीजिए कि–

$$\frac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta+\sin\theta\,.\,\cos\theta}=\cot\theta$$

हल : बायाँ पक्ष $=\dfrac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta+\sin\theta\,.\,\cos\theta}$

$$=\frac{\cos\theta+1-\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$=\cot\theta$ $=$ दायाँ पक्ष

कभी–कभी हमें दिए गए प्रतिबंधों की सहायता से कुछ संबंधों को सिद्ध करना होता है आइए इसे कुछ उदाहरणों से समझते हैं–

उदाहरणः–5. यदि $\sin\theta + \cos\theta = 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\sin\theta - \cos\theta = \pm 1$

हलः– दिया गया हैः $\sin\theta + \cos\theta = 1$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta \,.\, \cos\theta = 1$$

$$1 + 2\sin\theta \,.\, \cos\theta = 1 \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$2\sin\theta \,.\, \cos\theta = 1 - 1$$

$$\sin\theta \,.\, \cos\theta = 0 \qquad .....(1)$$

अब $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta \,.\, \cos\theta$

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2 \times 0$$ समी. (1) से

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1$$

$$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm 1$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरणः–6. यदि $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ हो।

तो सिद्ध कीजिए कि $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

हलः– दिया हैः $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

$$\sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta$$

$$\sin\theta = \cos\theta\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{2} - 1} = \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta}{2 - 1}$$

$$\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$$

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$$

यही सिद्ध करना था।

नए संबंध बनाना

यदि $x = \sin\theta$

$y = \cos\theta$

तो हम x व y के मध्य संबंध कैसे पता करेंगे?

हम त्रिकोणमितीय अनुपातों के संबंधों से θ को विलोपित कर x व y के बीच संबंध पता कर सकते हैं।

जैसे– $x^2 + y^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$x^2 + y^2 = 1$

आइए, इसे कुछ और उदाहरणों से समझें–

उदाहरण:–7. यदि $x = a\cos\theta - b\sin\theta$ और $y = a\sin\theta + b\cos\theta$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

हल:– दिया है $x = a\cos\theta - b\sin\theta$ .....(1)

$y = a\sin\theta + b\cos\theta$ .....(2)

समी. (1) व (2) का वर्ग करने पर

$x^2 = (a\cos\theta - b\sin\theta)^2$

$y^2 = (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$

$x^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\,.\,\sin\theta$ .....(3)

$y^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\,.\,\cos\theta$ .....(4)

समी. (3) व (4) को जोड़ने पर

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\,.\,\sin\theta$$
$$+ a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\,.\,\cos\theta$$
$$= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= a^2 + b^2 \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

उदाहरण:–8. यदि $\tan\theta + \sin\theta = m$ और $\tan\theta - \sin\theta = n$ हो तो सिद्ध कीजिए कि–

$$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$$

हल:– दिया है $m = \tan\theta + \sin\theta$

$n = \tan\theta - \sin\theta$

$m + n = 2\tan\theta$

$m - n = 2\sin\theta$

अब, $(m-n)(m+n) = 4 \sin\theta \,.\, \tan\theta$

$$m^2 - n^2 = 4 \sin\theta \,.\, \tan\theta \qquad .....(1)$$

$$m \,.\, n = (\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)$$

$$= \tan^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta[1-\cos^2\theta]}{\cos^2\theta}$$

$$= \sin^2\theta . \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \sin^2\theta \,.\, \tan^2\theta$$

$$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{\sin^2\theta . \tan^2\theta}$$

$$= 4 \sin\theta \,.\, \tan\theta$$

$$4\sqrt{mn} = m^2 - n^2 \qquad \text{समी. (1) से}$$

या $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ यही सिद्ध करना था।

प्रश्नावली–1

निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए–

1. $\dfrac{1}{\sec\theta - 1} - \dfrac{1}{\sec\theta + 1} = 2\cot^2\theta$
2. $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \,.\, \text{cosec}^2\theta$
3. $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2\sin^2 A \,.\, \cos^2 A$
4. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \text{cosec}\theta - \cot\theta$
5. $(1 + \cot\theta - \text{cosec}\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

6. $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=4\cot\theta\,\text{cosec}\theta$

7. $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\,\text{cosec}\theta$

8. यदि $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$

9. यदि $\tan\theta=n\tan\phi$ तथा $\sin\theta=m\sin\phi$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\cos^2\theta=\dfrac{m^2-1}{n^2-1}$

10. यदि $x=a\,\text{cosec}\theta$ तथा $y=b\cot\theta$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

11. यदि $x=r\sin A\cos C$, $y=r\sin A\sin C$ और $z=r\cos A$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $r^2=x^2+y^2+z^2$

सर्वसमिका व त्रिकोणमितीय समीकरण

हमने त्रिकोणमितीय अनुपात $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \sec\theta$, $\text{cosec}\theta, \cot\theta$ के आपस में संबंध को जाना है। इन संबंधों में हमने एक संबंध $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ देखा है। यह संबंध θ के सभी मानों के लिए सत्य है। त्रिकोणमितीय अनुपातों के ऐसे संबंध को, जो कोण के रूप में दिए गए चर के सभी मानों के लिए सत्य हो,त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहा जाता है।

तब, क्या संबंध $\sin\theta+\cos\theta=1$ भी एक सर्वसमिका है?

आइए देखें,

$\theta=0°$ लेने पर

$=\sin 0°+\cos 0°$

$=0+1$

$=1$

EZ43XH

$\theta=30°$ के लिए

$=\sin 30°+\cos 30°$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\neq 1$

हमने देखा कि $\theta = 0°$ के लिए यह संबंध सत्य है लेकिन $\theta = 30°$ के लिए सत्य नहीं है। अतः हम $\sin\theta + \cos\theta = 1$ को सर्वसमिका नहीं कह सकते ।

कोण के रूप में दिए गए चर के कुछ विशेष मानों के लिए कुछ त्रिकोणमितीय संबंध सत्य होते हैं इन्हें त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं। तब क्या हम $\sin\theta + \cos\theta = 1$ को त्रिकोणमितीय समीकरण कह सकते हैं? हमने देखा कि $\theta = 0°$ के लिए यह संबंध सत्य है लेकिन $\theta = 30°$ के लिए सत्य नहीं है अतः $\sin\theta + \cos\theta = 1$ त्रिकोणमितीय समीकरण है।

करके देखें

दिए गए संबंधों में $\theta = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ मानों को रखिए और जाँच कीजिए कि यह θ के किन मानों के लिए सत्य है–

1. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$
2. $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$
3. $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$
4. $\tan\theta.\sec\theta = 2\sqrt{3}$

θ के जिन मानों के लिए त्रिकोणमितीय समीकरण सत्य है। वे मान त्रिकोणमितीय समीकरण के हल कहलाते हैं।

आइए, अब कुछ त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करें–

उदाहरणः–9. $\sqrt{3}\tan\theta - 2\sin\theta = 0$ को हल कीजिए।

हलः– $\sqrt{3}\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - 2\sin\theta = 0$ $\left[\because \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$

$\sqrt{3}\sin\theta - 2\sin\theta.\cos\theta = 0$

$\sin\theta(\sqrt{3} - 2\cos\theta) = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0°$

अब $\sqrt{3} - 2\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \quad -2\cos\theta = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 30°$

अतः $\theta = 0°, 30°$

उदाहरणः–10. $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$ को हल कीजिए। जहाँ $0° \le x \le 90°$

हलः–

$$\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos x(\cos x + 1) - 1(\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 60°$$

तथा $(\cos x + 1) = 0$

$$\Rightarrow \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -1$$

क्योंकि $0° \le x \le 90°$ के लिए $\cos x$ ऋणात्मक नहीं होता है। अतः हम $\cos x = -1$ को छोड़ देते हैं। इसलिए समीकरण का हल $x = 60°$ है।

उदाहरणः–11. निम्नलिखित त्रिकोणमितीय समीकरण के हल ज्ञात कीजिए जहाँ $0° \le \theta \le 90°$

$$\frac{\cos\theta}{\text{cosec}\theta + 1} + \frac{\cos\theta}{\text{cosec}\theta - 1} = 2$$

हलः–

$$\frac{\cos\theta}{\text{cosec}\theta + 1} + \frac{\cos\theta}{\text{cosec}\theta - 1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta(\text{cosec}\theta - 1) + \cos\theta(\text{cosec}\theta + 1)}{\text{cosec}^2\theta - 1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta[\text{cosec}\theta - 1 + \text{cosec}\theta + 1]}{\cot^2\theta} = 2 \qquad [\because \text{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta]$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta \,.\, 2\,\text{cosec}\theta}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{\sin\theta}}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\cot\theta}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\cot\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 2\tan\theta = 2$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \tan 45°$$

$$\therefore \quad \theta = 45°$$

प्रश्नावली–2

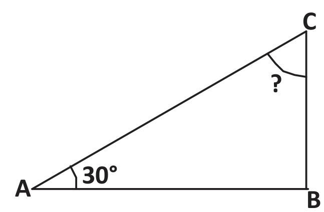
1. दिए गए त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल कीजिए जहाँ $0° \le \theta \le 90°$

(i) $2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$ (ii) $2\sin^2\theta - \cos\theta = 1$

(iii) $3\tan^2\theta = 2\sec^2\theta + 1$ (iv) $\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2 = \sin^2\theta$

(v) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात



आकृति–3

एक समकोण ΔABC में यदि $\angle A=30°$ तब $\angle C$ क्या होगा? (आकृति–3)

और यदि $\angle C = 60°$ तो क्या $\angle A$ का मान पता कर सकते हैं?(आकृति–4)

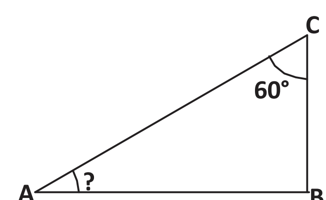
क्या $\angle A$ व $\angle C$ के बीच कोई ऐसा संबंध है जिससे एक कोण का मान पता होने पर हम दूसरे कोण का मान पता कर सकें ?

हम जानते हैं कि ΔABC में

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

$$\because \angle B = 90°$$

$$\therefore \quad \angle A + \angle C = 90°$$



आकृति–4

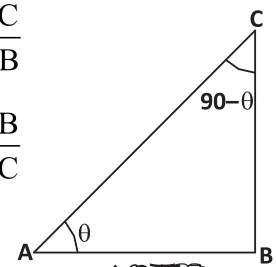
यानी $\angle A$ व $\angle C$ पूरक कोण हैं।

अब त्रिभुज ABC में (आकृति–5)

$\angle A = \theta$ तो $\angle C = 90° - \theta$

तब क्या $\angle A$ व $\angle C$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच भी कोई संबंध है ?

क्या दिए गए त्रिभुज में $(90°-\theta)$ कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात को θ कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात में परिवर्तित किया जा सकता है? कैसे?



$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} \qquad \cos\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} \qquad \sec\theta = \frac{AC}{AB} \qquad \cot\theta = \frac{AB}{AC}$$

अब $\angle C = (90°-\theta)$ के लिए ΔABC में

त्रिकोणमितीय अनुपात

$$\sin(90°-\theta) = \frac{AB}{AC}, \quad \cos(90°-\theta) = \frac{BC}{AC}, \quad \tan(90°-\theta) = \frac{AB}{BC},$$

$$\operatorname{cosec}(90°-\theta) = \frac{AC}{AB}, \quad \sec(90°-\theta) = \frac{AC}{BC}, \quad \cot(90°-\theta) = \frac{BC}{AB}$$

कोण θ व $(90°-\theta)$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों की तुलना करने पर हमें नीचे दिए संबंध प्राप्त होंगे–

$$\sin(90°-\theta) = \frac{AB}{AC} = \cos\theta, \quad \cos(90°-\theta) = \frac{BC}{AC} = \sin\theta$$

$\tan(90°-\theta) = \cot\theta$ और $\cot(90°-\theta) = \tan\theta$

$\sec(90°-\theta) = \operatorname{cosec}\theta$ और $\operatorname{cosec}(90°-\theta) = \sec\theta$

सोचें एवं चर्चा करें

क्या उपरोक्त संबंध $0° \le \theta \le 90°$ के सभी मानों के लिए सत्य है?

करके देखें

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के संबंध का प्रयोग करके नीचे की सारणी को पूर्ण कीजिए।

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	....	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	....	1
$\cos\theta$	....	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	....	$\frac{1}{2}$	....

पूरक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों का उपयोग

आइए हम यह देखें कि पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से त्रिकोणमितीय सारणी का बिना प्रयोग किए मान कैसे ज्ञात करते हैं? क्या उन कोणों के लिए जिनके त्रिकोणमितीय अनुपात पता करना सरल नहीं है, हम इनका उपयोग कर सकते हैं?जैसे $\theta = 31°$ या फिर $13°$ और $\phi = 20°$ या $43°$ आदि।

अब हम $\dfrac{2\sin 30°}{\cos 60°}$ का मान त्रिकोणमितीय सारणी का प्रयोग किए बगैर ही ज्ञात करके देखते हैं।

$$\frac{2\sin 30°}{\cos 60°}$$

$$= \frac{2\sin 30°}{\cos(90° - 30°)} \qquad [\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta]$$

$$= 2\frac{\sin 30°}{\sin 30°}$$

$$= 2$$

इसी प्रकार $\dfrac{3\tan 15°}{\cot 75°}$ का मान ज्ञात करना हो तो

$$\frac{3\tan 15°}{\cot 75°}$$

$$= \frac{3\tan 15°}{\cot(90° - 15°)}$$

$$= \frac{3\tan 15°}{\tan 15°}$$

$$= 3$$

उदाहरणः—12. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\dfrac{\sin 31°}{2\cos 59°}$ (b) $\dfrac{\sec 70°}{\operatorname{cosec} 20°} + \dfrac{\sin 59°}{\cos 31°}$

हलः— (a) $\dfrac{\sin 31°}{2\cos 59°}$

$$= \frac{\sin(90^0 - 59^0)}{2\cos 59^0}$$

$$= \frac{\cos 59°}{2\cos 59°} \qquad [\because \quad \sin(90°–\theta) = \cos\theta]$$

$$= \frac{1}{2}$$

(b) $\frac{\sec 70°}{\operatorname{cosec}20°} + \frac{\sin 59°}{\cos 31°}$

$$= \frac{\sec(90° - 20°)}{\operatorname{cosec}20°} + \frac{\sin(90° - 31°)}{\cos 31°} \qquad \left[\begin{matrix}\therefore \sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta \\ \sin(90° - \theta) = \cos\theta\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}70°}{\operatorname{cosec}70°} + \frac{\cos 31°}{\cos 31°}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

उदाहरणः–13. $\left(\frac{\sin 47°}{\cos 43°}\right)^2 + \left(\frac{\cos 43°}{\sin 47°}\right)^2 - 4\cos^2 45°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– $\left(\frac{\sin 47°}{\cos 43°}\right)^2 + \left(\frac{\cos 43°}{\sin 47°}\right)^2 - 4\cos^2 45°$

$$= \left(\frac{\sin(90° - 43°)}{\cos 43°}\right)^2 + \left(\frac{\cos(90° - 47°)}{\sin 47°}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\cos 43°}{\cos 43°}\right)^2 + \left(\frac{\sin 47°}{\sin 47°}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2}$$

$= 1 + 1 - 2$

$= 0$

उदाहरणः–14. सिद्ध कीजिए कि–

$\tan 7° \tan 23° \tan 60° \tan 67° \tan 83° = \sqrt{3}$

हलः– बायाँ पक्ष $= \tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

$= \tan(90^\circ - 83^\circ) \tan(90^\circ - 67^\circ) \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

$= \cot 83^\circ \cot 67^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

$= \cot 83^\circ \tan 83^\circ \cot 67^\circ \tan 67^\circ \tan 60^\circ$

$$= \cot 83^\circ \times \frac{1}{\cot 83^\circ} \times \cot 67^\circ \times \frac{1}{\cot 67^\circ} \times \sqrt{3}$$

$= \sqrt{3}$

त्रिकोणमितीय समीकरण हल करना

अब हम निम्नलिखित समीकरण पर विचार करते हैं–

$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$ में अज्ञात कोण θ का मान मालूम करने लिए हम निम्नलिखित तरीके का उपयोग करेंगे।

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \sin 30^\circ$$

$$\theta = 30^\circ$$

आइए इसे कुछ और उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरणः–15. यदि $\sin 55^\circ \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = 1$, तो θ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

हलः– $\sin 55^\circ \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = 1$

$\Rightarrow \quad \sin(90^\circ - 35^\circ) \sec\theta = 1$

$\Rightarrow \quad \cos 35^\circ . \sec\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos 35^\circ}$$

$\Rightarrow \quad \sec\theta = \sec 35^\circ$

$\therefore \quad \theta = 35^\circ$

उदाहरणः–16. यदि $\sin 34^\circ = p$ हो, तो $\cot 56^\circ$ का मान ज्ञात करो।

हलः– $\sin 34^\circ = p$

$\sin(90° - 56°) = p$

$\cos 56° = p$ .....(1)

हम जानते हैं कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\Rightarrow \sin^2 56° = 1 - \cos^2 56°$

$\Rightarrow \sin^2 56° = 1 - p^2$ .....(2)

$\Rightarrow \sin 56° = \sqrt{1-p^2}$

अतः समी. (1) व (2) से

$$\cot 56° = \frac{\cos 56°}{\sin 56°}$$

$$= \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

उदाहरणः–17. यदि $\cot 3A = \tan(A - 22°)$ जहाँ 3A न्यून कोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– दिया है – $\cot 3A = \tan(A - 22°)$

$\Rightarrow \quad \tan(90° - 3A) = \tan(A - 22°)$

$\Rightarrow \quad 90° - 3A = A - 22°$

$\Rightarrow \quad 90° + 22° = A + 3A$

$\Rightarrow \quad 112° = 4A$

$\Rightarrow \quad A = \frac{112°}{4}$

$\therefore \quad A = 28°$

त्रिकोणमितीय अनुपातों के संबंधों को पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का प्रयोग कर सिद्ध किया जा सकता है। आइए देखें–

उदाहरणः–18. सिद्ध कीजिए कि– $\frac{\sin(90° - \theta)\cos(90° - \theta)}{\tan\theta} = \cos^2\theta$

हलः– बायाँ पक्ष $= \frac{\sin(90° - \theta)\cos(90° - \theta)}{\tan\theta}$

$$= \frac{\cos\theta \sin\theta}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta \sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{\sin\theta}$$

$= \cos^2\theta$

= दायाँ पक्ष

उदाहरणः–19. सिद्ध कीजिए कि $\sin(90° - \theta)\sec\theta + \cos(90° - \theta)\operatorname{cosec}\theta = 2$

हलः– बायाँ पक्ष $= \sin(90° - \theta)\sec\theta + \cos(90° - \theta)\operatorname{cosec}\theta$

$= \cos\theta\sec\theta + \sin\theta\operatorname{cosec}\theta$

$$= \cos\theta \times \frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$$

$= 1 + 1$

$= 2$

= दायाँ पक्ष

उदाहरणः–20. यदि $\angle A, \angle B$ व $\angle C$ त्रिभुज ABC के अंतः कोण हों तो सिद्ध कीजिए कि–

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

हलः– दिया है कि A, B व C त्रिभुज ABC के अंतःकोण हैं।

तो $A + B + C = 180°$

$A + B = 180° - C$ .....(1)

पुनः बायाँ पक्ष $= \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$$= \sin\left(\frac{180° - C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{180°}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(90° - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{C}{2}$$

= दायाँ पक्ष

आइए अब हम देखें कि दिए गए कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात को 0° से 45° के त्रिकोणमितीय अनुपात में कैसे परिवर्तित कर सकते हैं।

उदाहरणः–21. tan 59° + cot 75° को 0° से 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात में व्यक्त कीजिए।

हलः– $\tan 59° + \cot 75° = \tan(90° - 31°) + \cot(90° - 15°)$

$= \cot 31° + \tan 15°$

$[\because \tan(90° - \theta) = \cot\theta$

$\cot(90° - \theta) = \tan\theta]$

EZCYZ5

प्रश्नावली–3

1. निम्नलिखित में 0° से 45° के बीच के त्रिकोणमितीय अनुपात में व्यक्त कीजिए–

   (i) sin 56° (ii) tan 81° (iii) sec 73°

2. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $\dfrac{\cos 80°}{\sin 10°}$ (ii) $\dfrac{\sin 37°}{2\cos 53°}$ (iii) $3\sin 17° \sec 73°$

3. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $\sin 64° - \cos 26°$

   (ii) $3\cos 80° \operatorname{cosec} 10° + 2\cos 59° \operatorname{cosec} 31°$

   (iii) $2\dfrac{\cos 67°}{\sin 23°} - \dfrac{\tan 40°}{\cot 50°} + \cos 0°$ (iv) $\sin^2 35° + \sin^2 55°$

   (v) $\left(\dfrac{5\sin 35°}{\cos 55°}\right) + \left(\dfrac{\cos 55°}{2\sin 35°}\right) - 2\cos 60°$

4. सिद्ध कीजिए कि–

(i) $\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27° = 1$

(ii) $\tan 15° \tan 36° \tan 45° \tan 54° \tan 75° = 1$

(iii) $\sin^2 85° + \sin^2 80° + \sin^2 10° + \sin^2 5° = 2$

5. सिद्ध कीजिए कि–

$$\sin(90°-\theta)\cos(90°-\theta) = \frac{\tan\theta}{1+\cot^2(90°-\theta)}$$

6. सिद्ध कीजिए कि–

$$\frac{\cos\theta}{\sec(90°-\theta)+1} + \frac{\sin(90°-\theta)}{\operatorname{cosec}\theta - 1} = 2\cot(90°-\theta)$$

7. सिद्ध कीजिए कि–

$$\frac{\tan(90°-\theta)}{\operatorname{cosec}^2\theta.\tan\theta} = \cos^2\theta$$

8. यदि $\sin A = \cos B$ तो सिद्ध कीजिए कि– $A + B = 90°$

9. यदि $\operatorname{cosec} 2A = \sec(A - 36°)$, जहाँ 2A एक न्यून कोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

10. यदि $A + B = 90°, \sec A = a, \cot B = b$ तब सिद्ध कीजिए कि– $a^2 - b^2 = 1$

11. यदि A, B व C त्रिभुज ABC के अंतःकोण हों तो सिद्ध कीजिए कि–

$$\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\left(\frac{A}{2}\right)$$

12. यदि $\sec 34° = x$ तो $\cot^2 56° + \operatorname{cosec} 56°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. त्रिकोणमितीय अनुपातों में निम्नलिखित संबंध होते हैं–

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ जहाँ $0° \le \theta \le 90°$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ जहाँ $0° \le \theta < 90°$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ जहाँ $0° < \theta \le 90°$

2. किसी भी त्रिकोणमितीय अनुपात को किसी अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात के पदों में लिखा जा सकता है।

3. सर्वसमिकाएँ वे समीकरण हैं जो कोणों के चर के सभी मानों के लिए सत्य होते हैं।

4. कोण θ के किसी मान के लिए यदि एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किए जा सकते हैं।

5. पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों में निम्नलिखित संबंध होते हैं–

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$, $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90° - \theta) = \text{coesc}\,\theta$, $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$

6. सर्वसमिकाओं को जाँचना व सिद्ध करना, कोणों के कुछ मानों के आधार पर नहीं किया जा सकता।

उत्तरमाला–2

1(i).	$\theta = 30°, 90°$	1(ii).	$\theta = 60°$	1(iii).	$\theta = 60°$
1(iv).	$\theta = 0, 60°$	1(v).	$\theta = 60°$		

उत्तरमाला–3

1.	(i)	cos 34°	(ii)	cot 9°	(iii)	cosec 17°
2.	(i)	1	(ii)	$\frac{1}{2}$	(iii)	3
3.	(i)	0	(ii)	5	(iii)	2
	(iv)	1	(v)	$\frac{9}{2}$		

9. 42°

12. $x^2 + x - 1$

अध्याय

10

ऊँचाई एवं दूरी

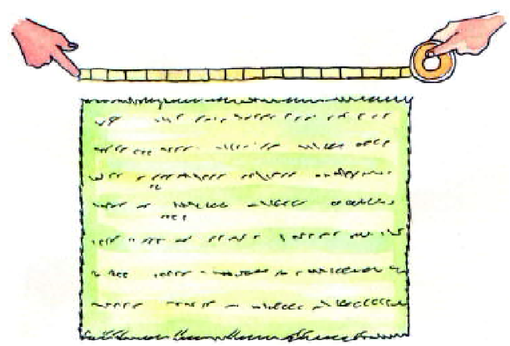
[HEIGHT AND DISTANCE]

EZLV1S

आप अपने विद्यालय के खेल मैदान की लंबाई एवं चौड़ाई पता करना चाहते हैं तो आप इसका मापन कैसे करेंगे? इसका मापन करने के लिए आपको कोई मापन यंत्र जैसे रूलर (स्केल), मापने वाले फीते की आवश्यकता होगी। क्या हम रूलर की सहायता से मैदान की लंबाई आसानी से पता कर सकते हैं? इसमें क्या कठिनाइयाँ आएँगी?

राजेश ने कहा, रूलर की सहायता से मापने पर हमें रूलर का बार–बार उपयोग करना होगा क्योंकि मैदान की लंबाई अधिक है परंतु बार–बार उठाने और रखने में गलती हो सकती है अतः हम मापने वाले लंबे फीते का प्रयोग करेंगे।

जाहिदा बोली, मैदान की लंबाई, चौड़ाई पता करने के लिए मैदान के एक छोर से दूसरे छोर तक फीते को ले जाना होगा। एक छोर पर एक बच्चा फीते के एक सिरे को पकड़ कर खड़ा हो जाए और मैदान के दूसरे छोर तक फीते को ले जाकर उसे पढ़ने से दूरी पता चल जाएगी।



आकृति–1

जमुना ने पूछा, क्या इसी तरह हमें खजूर के पेड़, वालीबॉल के मैदान में लगे नेट के खंभों की ऊँचाई पता करनी हो तो इनके ऊपरी सिरे से जमीन तक की दूरी मापनी होगी? पर यह थोड़ा मुश्किल है। पेड़ और खंभों के शिखर तक हम कैसे पहुँचेंगे?

असलम ने पूछा, तो हमें क्या करना चाहिए?

यहाँ हम गणित की कौनसी तकनीक का प्रयोग करें?

क्या हम त्रिकोणमिति का प्रयोग कर ऊँचाई एवं दूरी पता कर सकते हैं?

आइए देखें –

आप अपने विद्यालय के झण्डे के खंभे की ऊँचाई पता करना चाहते हैं। हम जानते हैं कि त्रिकोणमितीय अनुपात त्रिभुज की भुजाओं एवं कोण के बीच संबंध है। क्या आप झण्डे के खंभे को एक भुजा लेकर एक समकोण त्रिभुज बना सकते हैं? इस त्रिभुज में खंभे की ऊँचाई ज्ञात करने के लिये हमें किन मानों की आवश्यकता होगी?

यदि विद्यालय के मैदान में कोई बिंदु A लें जो खंभे के पाद बिंदु से 10 मीटर की दूरी पर है (देखिए आकृति–2)। बिंदु A से झण्डे के शीर्ष C को मिलाने वाली रेखा, बिंदु A पर जमीन के साथ $60°$ का कोण बनाती है।

तो ΔABC में

$\angle CAB = 60°$

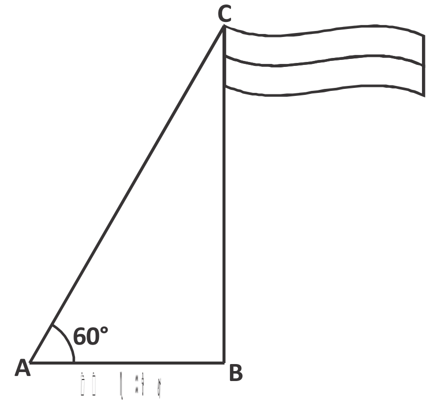
$AB = 10$ मीटर

$$\tan A = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan 60° = \frac{BC}{10}$$

$BC = 10 \tan 60°$

$BC = 10\sqrt{3}$ मीटर

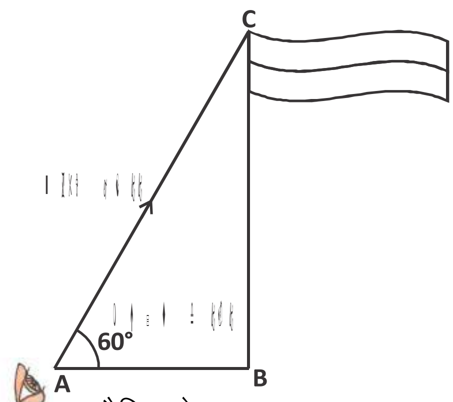


आकृति–2

इस प्रकार हम झण्डे के खंभे की ऊँचाई त्रिकोणमिति का प्रयोग कर पता लगा सकते हैं।

उन्नयन कोण

आइए हम उपरोक्त आकृति–2 पर पुनः विचार करते हैं। यदि आप मैदान में खड़े होकर झण्डे को देखें तो आपकी आँख को बिंदु A पर लेने पर आपकी आँख से झण्डे के शीर्ष C को मिलाने वाली रेखा AC दृष्टि रेखा कहलाती है।



आकृति–3

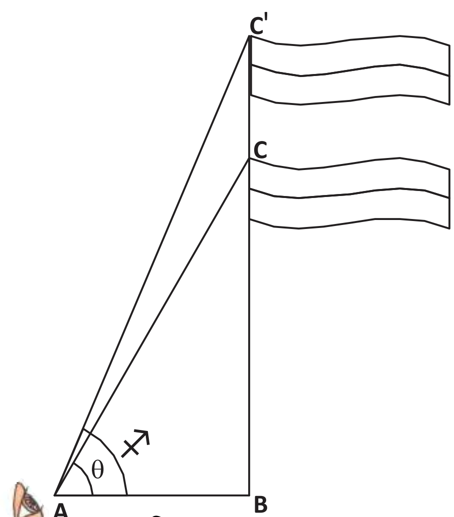
झण्डे के खंभे की ऊँचाई हमारी ऊँचाई से अधिक हो तो उसके शीर्ष को देखने के लिए हमें ऊपर की ओर देखना होगा।

हमारी आँख से खंभे के शीर्ष को मिलाने वाली दृष्टि रेखा AC व क्षैतिज रेखा AB के बीच बना कोण उन्नयन कोण कहलाता है। (देखिए आकृति–3) यहाँ हमने माना है कि आँख A पर है अतः उन्नयन कोण A से क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के बीच का कोण है।

यदि खंभा और ऊँचा हो तो सिर को और ऊँचा उठाना पड़ेगा।

इस स्थिति में क्या उन्नयन कोण पहले से अधिक होगा? यानी ϕ का मान से θ से बड़ा होगा?

झण्डे के खंभे की ऊँचाई और अधिक बढ़ने के कारण आपकी दृष्टि रेखा व क्षैतिज रेखा के बीच का कोण बढ़ जाता है यानी उन्नयन कोण बढ़ जाता है।(आकृति–4)

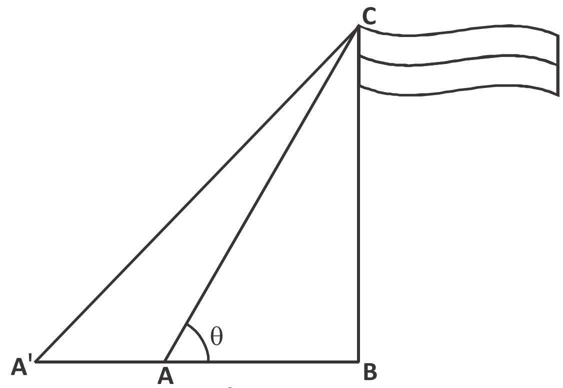


आकृति–4

सोचें एवं चर्चा करें

यदि झण्डे की ऊँचाई कम कर दी जाए तो उन्नयन कोण के मान में क्या परिवर्तन आएगा?

आइए, अब एक दूसरी स्थिति पर विचार करें यदि हम झण्डे को बिंदु A से न देखकर उससे थोड़ा और दूर A' से देखें (आकृति–5)



आकृति–5

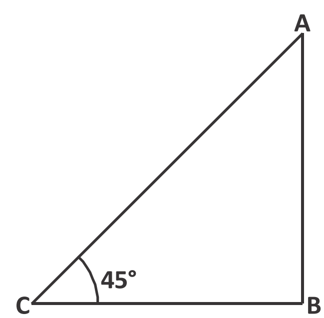
आप पाएँगे कि बिंदु A' से झण्डे के खंभे के शीर्ष को देखे जाने पर दृष्टि रेखा व क्षैतिज रेखा के बीच का कोण कम हो जाता है यानी उन्नयन कोण का मान कम हो जाता है।

इस प्रकार हमने पाया कि उन्नयन कोण का मान वस्तु की ऊँचाई के साथ–साथ बढ़ता है परंतु वस्तु की प्रेक्षक (देखने वाले) से दूरी बढ़ने पर क्रमशः कम होता जाता है।

त्रिकोणमिति का प्रयोग कर पर्वत की ऊँचाई, ग्रहों के बीच की दूरी, पृथ्वी व सूर्य के बीच की दूरी, महासागर की गहराई का मापन किया जाता है। खगोलविद् इसका प्रयोग, पृथ्वी से ग्रहों एवं तारों की दूरियाँ ज्ञात करने में करते हैं।

हम अपने दैनिक जीवन में भी समस्याओं को हल करने के लिए त्रिकोणमिति का उपयोग करते हैं। आइए कुछ उदाहरण देखें–

उदाहरणः–1. एक भवन के पाद बिंदु से 15 मीटर की दूरी पर स्थित किसी बिंदु से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



आकृति–6

हलः– आकृति में AB भवन की ऊँचाई है। भवन AB के पाद बिंदु B से 15 मीटर दूर स्थित बिंदु C से भवन के शिखर A का उन्नयन कोण $\angle ACB = 45°$

मान लीजिए भवन की ऊँचाई h मीटर है

तो ΔABC में $\tan 45° = \dfrac{AB}{BC}$

या $\tan 45° = \dfrac{h}{15}$

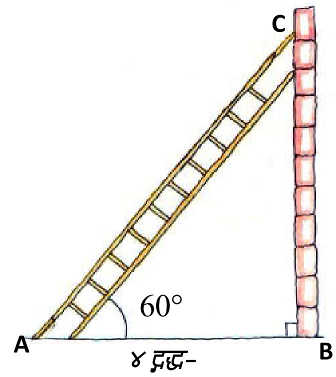
या $1 = \dfrac{h}{15}$ $\quad [\because \tan 45° = 1]$

$\therefore$ $h = 15$ मीटर

अतः भवन की ऊँचाई 15 मीटर है।

उदाहरणः–2. एक सीधी दीवार पर सीढ़ी इस प्रकार रखी गई है कि वह जमीन से 60° का कोण बनाती है। यदि सीढ़ी का पाद बिंदु दीवार से 4 मीटर दूरी पर हो तब सीढ़ी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि AC सीढ़ी है जिसकी लंबाई x मी. है अर्थात् AC $= x$ मी. दिया गया है कि सीढ़ी का पाद बिंदु A दीवार से 4 मी. की दूरी पर है।



आकृति–7

अतः Δ ABC में AB $= 4$ मी.

तथा $\angle BAC = 60°$

तब $\cos 60° = \dfrac{AB}{AC}$

या $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{x}$

या $x = 8$ मीटर

अतः सीढ़ी की लंबाई 8 मीटर होगी।

उदाहरणः–3. तेज हवा से टूटे एक पेड़ का सिरा झुक कर पेड़ के पाद से 6 मीटर की दूरी पर जमीन को छूता है। यह हिस्सा जमीन से 60° का कोण बनाता है। पूरे पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हलः– पेड़ का टूटा हुआ भाग AC है। (देखिए आकृति– 8)

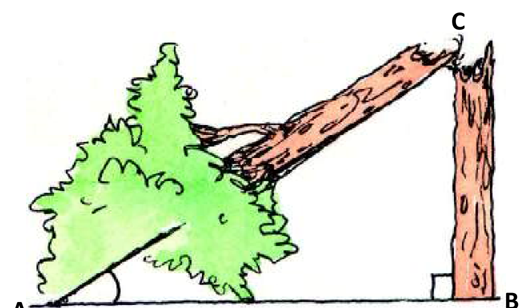
दिया गया है कि टूटे सिरे के शीर्ष से पेड़ के पाद बिंदु की दूरी 6 मी. है।

समकोण ΔABC में

$$\tan 60° = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{BC}{6}$$

$$BC = 6\sqrt{3} \text{ मी.}$$



आकृति–8

पुनः समकोण ΔABC में

$$\sin 60° = \frac{BC}{AC}$$

या $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{AC}$

या $AC = \dfrac{6\cancel{\sqrt{3}} \times 2}{\cancel{\sqrt{3}}}$

$$AC = 12 \text{ मी.}$$

अतः पेड़ की ऊँचाई $= BC + AC$

$$= 6\sqrt{3} + 12$$

$$= 6\left(\sqrt{3} + 2\right) \text{ मी.}$$

उदाहरणः–4. 1.4 मी. लंबा एक प्रेक्षक एक मीनार से 25.6 मी. की दूरी पर है। उसकी आँखों से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। मीनार की ऊँचाई बताइए।

हल : यहाँ BC मीनार है, AE प्रेक्षक है और $\angle CED$ उन्नयन कोण है।

तथा $AB = ED = 25.6$ मी.

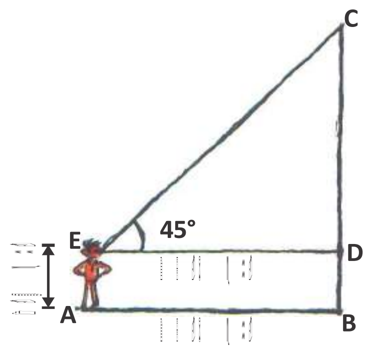
$AE = BD = 1.4$ मी.

समकोण ΔCDE में

$$\tan 45° = \frac{DC}{ED}$$

$$1 = \frac{DC}{25.6}$$

$DC = 25.6$ मी.



आकृति–9

अतः मीनार की ऊँचाई $= BD + DC$

$$= 1.4 + 25.6$$

$$= 27 \text{ मी.}$$

नोट : यदि प्रेक्षक की ऊँचाई न दी गई हो तो प्रेक्षक को एक बिंदु मान लिया जाता है।

फरीदा के घर के बाहर एक झण्डा लगा हुआ है (देखिए आकृति–10) फरीदा इस झण्डे के डंडे की लंबाई ज्ञात करना चाहती है। क्या झण्डे को बिना निकाले डंडे की लंबाई का पता लगा सकते हैं?

आइए देखें–

उदाहरणः–5. भूमि के एक बिंदु P से 10 मी. ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। भवन के शिखर पर एक झण्डा लगाया गया है और P से झण्डे के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। तो झण्डे के डंडे की लंबाई और बिंदु P से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः– आकृति–10 में AB भवन की ऊँचाई है, BD झण्डे के डंडे की लंबाई है और P दिया हुआ बिंदु है। ध्यान दीजिए कि यहाँ दो समकोण त्रिभुज PAB और PAD हैं। हमें झण्डे के डंडे की लंबाई यानी BD और बिंदु P से भवन की दूरी यानी PA पता करना है।

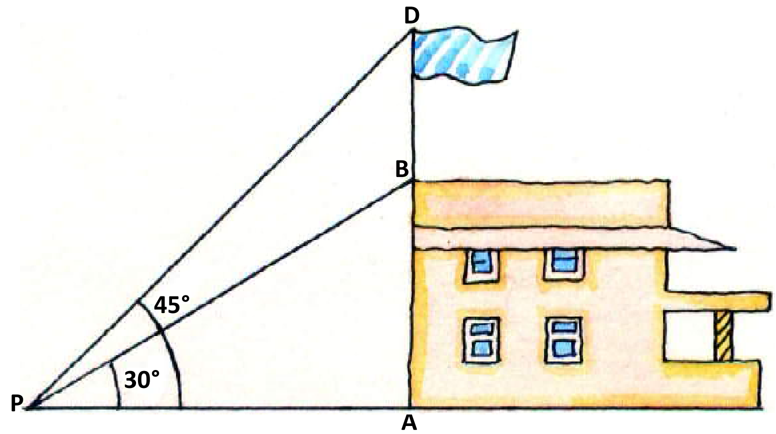
चूँकि हमें भवन की ऊँचाई AB पता है इसलिए

पहले हम समकोण ΔPAB लेंगे।

यहाँ $\tan 30° = \dfrac{AB}{PA}$

$\Rightarrow$ यानी $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{PA}$

इसलिए $PA = 10\sqrt{3}$ मी.



आकृति–10

$\therefore$ P से भवन की दूरी $10\sqrt{3}$ मी.

आइए, अब हम यह मान लें कि $BD = x$ मी. है

तथा $AD = AB + BD = (10 + x)$ मी.

अब समकोण ΔPAD में

$$\tan 45° = \frac{AD}{PA}$$

$$= \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} = 10 + x$$

$$x = 10\left(\sqrt{3} - 1\right) \text{ मी.}$$

अतः झंडे के डंडे की लंबाई $10\left(\sqrt{3} - 1\right)$ मी. है।

उन्नयन कोण का ऊँचाई एवं दूरी से संबंध हम देख चुके हैं। हमने देखा था कि उन्नयन कोण का मान वस्तु की ऊँचाई के बढ़ने के साथ बढ़ता है तथा वस्तु की प्रेक्षक से दूरी बढ़ने के साथ घटता जाता है।

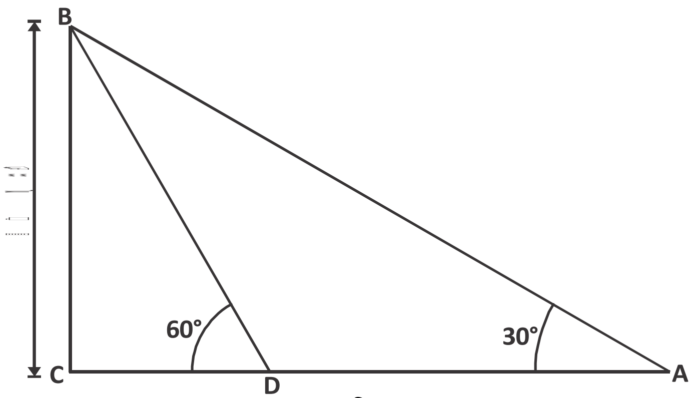
आइए, इन कथनों पर आधारित उदाहरणों को हल करें–

उदाहरणः–6. एक लड़का 30 मी. ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितना चला है?

हलः– माना कि BC भवन है तथा बिंदु A पर लड़का खड़ा है।

BC = 30 मी.

समकोण ΔABC में



आकृति–11

$$\tan 30° = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{AC}$$

$AC = 30\sqrt{3}$ मी.

पुनः समकोण ΔBCD में

$$\tan 60° = \frac{BC}{CD}$$

$$\tan 60° = \frac{30}{CD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{CD}$$

$$CD = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{10\times 3}{\sqrt{3}}$$

$CD = 10\sqrt{3}$ मी.

अतः लड़के द्वारा भवन की ओर चली गई दूरी $AD = AC - CD$

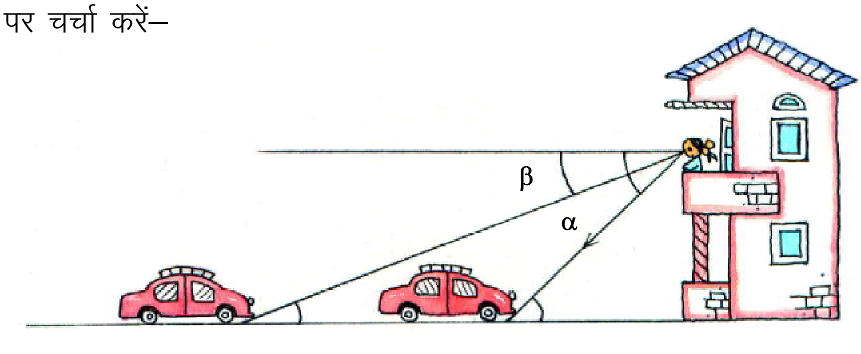
$= 30\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$

$20\sqrt{3}$ मी. अतः लड़का भवन की ओर $20\sqrt{3}$ मी. चला।

अवनमन कोण

आइए, एक अन्य परिस्थिति पर चर्चा करें–

रमा अपने घर की बालकनी में खड़ी है और उसके घर के तरफ आती हुई कार को देख रही है। इस स्थिति में क्षैतिज रेखा व दृष्टि रेखा के बीच बना कोण अवनमन कोण कहलाता है। (आकृति–12)



आकृति–12

अब यदि यह कार घर के और पास आ जाए तो (आकृति–12) उस स्थिति में अवनमन कोण में क्या परिवर्तन आएगा?

कोण α व β में क्या संबंध होगा?

क्या $\alpha > \beta$

$\alpha < \beta$

या $\alpha = \beta$

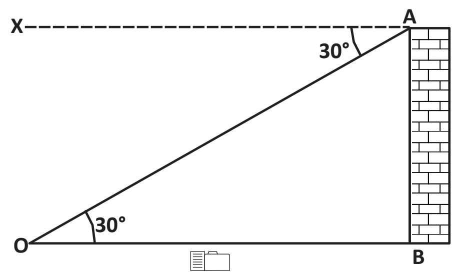
आप देख सकते है कि कार व घर के बीच की दूरी कम होने पर अवनमन कोण का मान बढ़ता जाता है।

यानी $\alpha > \beta$

सोचें एवं चर्चा करें

आकृति–12 में यदि कार रमा के ठीक नीचे आ जाए तब अवनमन कोण क्या होगा?

उदाहरणः–7. भवन के शिखर से भूमि पर स्थित एक गमले का अवनमन कोण 30° है। यदि गमला भवन के पाद बिंदु से 30 मीटर की दूरी पर हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



आकृति–13

हलः– माना AB भवन है और बिन्दु O गमला है।

अवनमन कोण $\angle XAO = 30°$ और

$OB = 30$ मीटर

$\angle XAO = \angle AOB = 30°$

(एकांतर कोण)

ΔOAB में

$$\tan 30° = \frac{AB}{OB}$$

$$AB = OB \tan 30°$$

$$= 30 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

अतः भवन की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मीटर है।

उदाहरणः–8. एक प्रकाश स्तंभ के शिखर से किसी भवन के शिखर एवं तल के अवनमन कोण क्रमशः $45°$ व $60°$ है। यदि भवन की ऊँचाई 12 मी. हो तो प्रकाश स्तंभ की ऊँचाई एवं प्रकाश स्तंभ से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए।

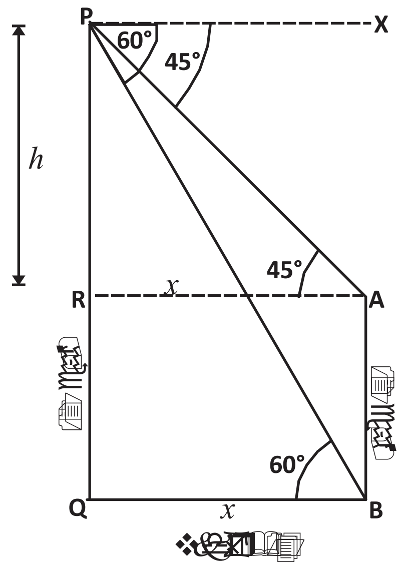
हलः– माना कि PQ एक प्रकाश स्तंभ है। इससे x मी. दूरी पर एक भवन AB है जिसकी ऊँचाई 12 मी. है।

अतः $QB = x$ मी., $AB = 12$ मी.

प्रकाश स्तंभ के शिखर से भवन के शिखर व तल का अवनमन कोण क्रमशः $45°$ व $60°$ है।

$\angle APX = 45°$ तथा $\angle BPX = 60°$ एवं माना $PR = h$

समकोण त्रिभुज PRA में



$$\tan 45° = \frac{PR}{RA}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{PR}{x}$$

$$\Rightarrow \quad PR = x$$

$$\therefore h = x$$

समकोण ΔPQB में

$$\Rightarrow \quad \tan 60° = \frac{PQ}{QB}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{h+12}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x = h + 12$$

x का मान रखने पर

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h = h + 12$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h - h = 12$$

$$\Rightarrow \quad h\left(\sqrt{3}-1\right) = 12$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$ (हर का परिमेयीकरण करने पर)

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$\Rightarrow \quad h = 6(\sqrt{3}+1) \text{ मी.}$$

प्रकाश स्तंभ की ऊँचाई $= PR + RQ$

$= 6(\sqrt{3}+1)+12$

$= 6\sqrt{3}+6+12$

$= 6\sqrt{3}+18$

$= 6(\sqrt{3}+3)$ मी.

क्योंकि $x = h$ इसलिए $x = 6(\sqrt{3}+1)$ मी.

प्रकाश स्तंभ की ऊँचाई $6(\sqrt{3}+3)$ मी. तथा भवन की दूरी $6(\sqrt{3}+1)$ मी. होगी।

उदाहरणः–9. किसी टीले के शीर्ष से मैदान में स्थित दो मकानों, जो टीले के विपरीत ओर हैं,के पाद के अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° हैं। यदि टीले की ऊँचाई 60 मी. हो तब मकानों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः– माना PQ टीला है तथा A व B उसके विपरीत ओर स्थित दो मकान हैं।

दिया गया है कि $PQ = 60$ मी.

$\angle XPA = 30°$

$\therefore \quad \angle PAQ = 30°$ (एकांतर कोण)

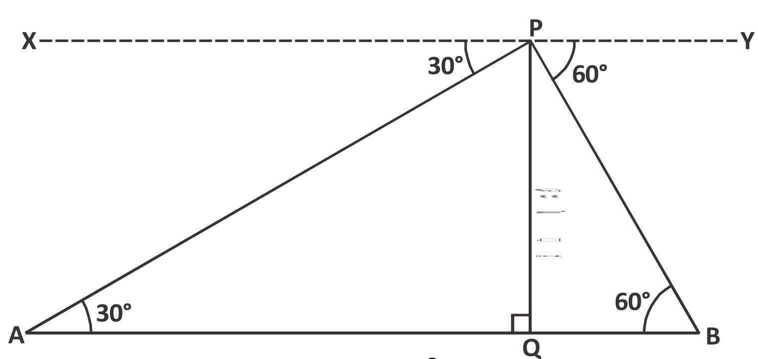
इसी प्रकार

$\angle YPB = \angle PBQ = 60°$

समकोण ΔPQA में

$$\tan 30° = \frac{PQ}{AQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60}{AQ}$$



आकृति–15

$AQ = 60\sqrt{3}$ मी.

पुनः ΔPQB में

$$\tan 60° = \frac{PQ}{BQ}$$

$$\sqrt{3} = \frac{60}{BQ}$$

$$BQ = \frac{60}{\sqrt{3}}$$

$$BQ = 20\sqrt{3} \text{ मी.}$$

अतः मकानों के बीच की दूरी $AB = AQ + BQ$

$$= 60\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$$

$$AB = 80\sqrt{3} \text{ मी.}$$

उदाहरणः–10. एक सीधी सड़क एक भवन के पाद तक जाती है। भवन के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30° के अवनमन कोण पर देखता है। कार भवन के पाद की ओर एक समान चाल से जाती है। 30 मी. चलने के बाद कार का अवनमन कोण 60° हो जाता है। यदि इस बिंदु से भवन के पाद बिंदु तक पहुँचने में लगा समय 10 सेकण्ड हो तो कार की चाल एवं भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि AB भवन है जिसकी ऊँचाई h मी. है तथा

$BC = x$ मी.

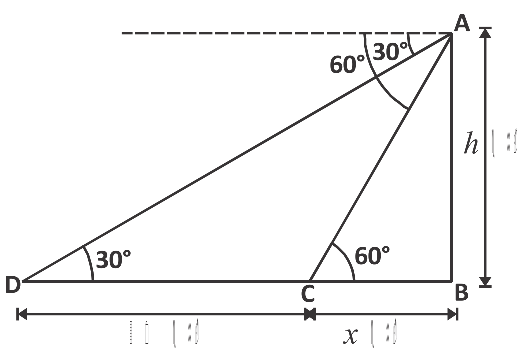
दिया गया है कि

$CD = 30$ मी.

$\angle ADB = 30°$

$\angle ACB = 60°$

तब समकोण ΔABD में



आकृति–16

$$\tan 30° = \frac{AB}{DB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30+x}$$

$$h = \frac{30+x}{\sqrt{3}} \quad \text{.................(1)}$$

पुनः समकोण ΔABC में

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$h = x\sqrt{3} \quad ....(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{30+x}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \quad 30 + x = 3x$

$\Rightarrow \quad 2x = 30$

$\Rightarrow \quad x = 15$ मी.

अतः भवन की ऊँचाई $h = x\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ मी.

प्रश्न के अनुसार

बिंदु C से भवन के पाद बिंदु तक पहुँचने में कार को 10 सेकण्ड लगते हैं

$\therefore$ कार की चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

$= \frac{15}{10}$

= 1.5 मी./से.

EZVR3F

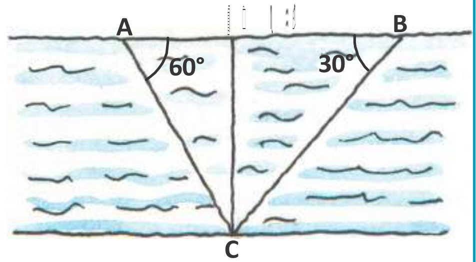
प्रश्नावली–1

1. जमीन पर स्थित किसी बिंदु से 90 मी. दूर स्थित मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक उर्ध्वाधर स्तंभ जिसकी ऊँचाई $3\,h$ मी. है, के पाद बिंदु से $\sqrt{3}h$ दूरी पर स्थित किसी बिंदु से स्तंभ के शिखर का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।
3. एक पतंग भूमि से 60 मी. ऊँचाई पर उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी भूमि के एक बिंदु पर खूँटी से बंधी हुई है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 30° है तब यह मानकर कि डोरी पूर्णतः तनी हुई है, उसकी लंबाई ज्ञात कीजिए।
4. किसी स्तंभ के पाद बिंदु से 15 मी. ऊंचे एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है तथा भवन के पाद बिंदु से स्तंभ के शिखर का उन्नयन कोण 60° है तब स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. दो मीनारों के बीच की क्षैतिज दूरी 120 मी. है। दूसरी मीनार के शीर्ष से देखने पर प्रथम मीनार के शिखर का उन्नयन कोण $30°$ है। यदि दूसरी मीनार की ऊँचाई 40 मी. है तो प्रथम मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

6. एक मीनार के आधार से एक सरल रेखा में a और b दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण, पूरक कोण हैं तो सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{ab}$ होगी।

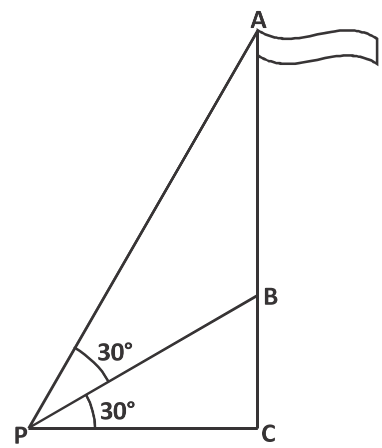
7. 15 मीटर ऊँचे एक भवन के शिखर से किसी मीनार की चोटी का उन्नयन कोण $60°$ तथा मीनार के पाद का अवनमन कोण $30°$ है तो मीनार की ऊँचाई एवं भवन से मीनार की दूरी ज्ञात कीजिए।



आकृति–17

8. नदी के एक किनारे पर दो बिंदु A और B के बीच की दूरी 40 मी. है। नदी के एक किनारे के समांतर दूसरे किनारे पर बिंदु C इस प्रकार है कि $\angle BAC=60°$ तथा $\angle ABC=30°$, तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए। (आकृति–17)

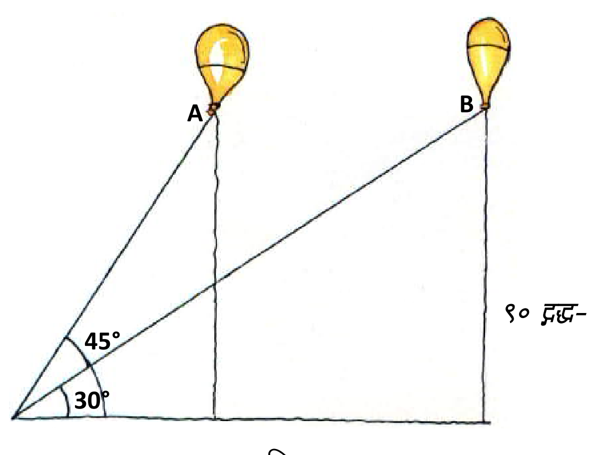
9. एक मंदिर का शिखर तथा उस पर लगा झण्डा भूमि के किसी बिंदु पर क्रमशः $30°$ और $60°$ का कोण अंतरित करते हैं। यदि मंदिर की ऊँचाई 10 मीटर हो, तो झण्डे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (आकृति–18)



आकृति–18

10. 40 मीटर चौड़ी सड़क पर, दो समान ऊँचाई वाले बिजली के खंभे एक दूसरे के सामने स्थित हैं। दोनों खंभों के बीच सड़क पर स्थित किसी एक बिंदु से पहले एवं दूसरे खंभे के उन्नयन कोण क्रमशः $30°$ व $60°$ हैं तो खंभे की ऊँचाई व खंभों से उस बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

11. एक प्रेक्षक भूमि से 90 मीटर की ऊँचाई पर क्षैतिज रेखा में उड़ रहे गुब्बारे को देखता है। यदि किसी क्षण प्रेक्षक की आँखों से गुब्बारे का उन्नयन कोण $45°$ है और कुछ समय बाद यह उन्नयन कोण घटकर $30°$ हो जाता है तो गुब्बारे द्वारा बिंदु A से B तक तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।(आकृति–19)



आकृति–19

हमने सीखा

1. त्रिकोणमितीय अनुपातों की मदद से हम पेड़ों,भवनों,मीनारों,ग्रहों, तारों आदि में पारस्परिक दूरी व ऊँचाई निकाल सकते हैं।
2. दृष्टि रेखा – प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु को मिलाने वाली रेखा होती है।
3. देखी गई वस्तु का उन्नयन कोण दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जब वस्तु क्षैतिज रेखा से ऊपर होता है।
4. देखी गई वस्तु का अवनमन कोण दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जब वस्तु क्षैतिज रेखा से नीचे होती है।
5. किसी भवन,मीनार आदि के पाद के पास स्थित किसी बिंदु से (भवन या मीनार के) शिखर का उन्नयन कोण, पाद से बिंदु की दूरी बढ़ने के साथ–साथ घटता जाता है।
6. किसी भवन,मीनार आदि के शिखर से उसके पाद के पास स्थित किसी बिंदु के अवनमन कोण का मान पाद से बिंदु की दूरी बढ़ने के साथ–साथ घटता जाता है।

उत्तरमाला–1

(1) $30\sqrt{3}$ मीटर (2) 60° (3) 120 मीटर

(4) 45 मीटर (5) $40\left(\sqrt{3}+1\right)$ मीटर

(7) 60 मीटर, $15\sqrt{3}$ मीटर (8) $10\sqrt{3}$ मीटर (9) 20 मीटर

(10) $10\sqrt{3}$ मीटर, पहले खंभे से 30 मीटर,दूसरे खंभे से 10 मीटर

(11) $90\left(\sqrt{3}-1\right)$ मीटर

अध्याय 11

ज्यामितीय आकृतियों में समरूपता

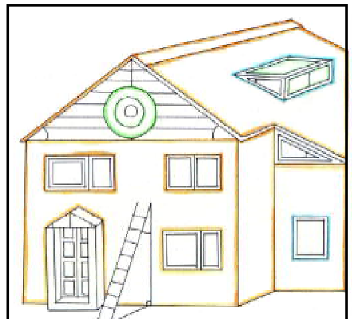
[SIMILARITY IN GEOMETRICAL SHAPES]

F15H53

परिचय (Introduction)

हम अपने आस–पास अलग–अलग तरह की छोटी–बड़ी आकृतियाँ देखते हैं। इनमें से कुछ वृत्ताकार, कुछ घनाकार, कुछ त्रिभुजाकार जैसी होती हैं और कुछ को इसी तरह की आकृतियों में बाँट कर देखा जा सकता है।

आकृति–1 देखिए, इस मकान के चित्र में भी विभिन्न ज्यामितीय आकृतियाँ देखी जा सकती हैं। इनमें कुछ आयताकार हैं तो कुछ त्रिभुजाकार।

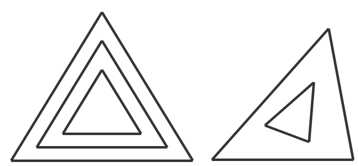


आकृति–1

क्या आप इसमें कुछ और अन्य तरह की आकृतियाँ ढूँढ़ सकते हैं? कौन सी और आकृतियाँ हैं? साथियों से चर्चा करें।

समान आकृतियाँ :– ध्यान से देखने पर हम पाते हैं कि इनमें से कुछ आकृतियाँ, आकार (size) एवं आकृति (shape) दोनों में समान हैं। यानी सर्वांगसम हैं।

अब आकृति–2 देखें, 2(i) में तीन त्रिभुज बने हैं। देखने में इन तीनों त्रिभुजों के कोण बराबर लगते हैं एवं भुजाएँ एक खास अनुपात में बड़ी या छोटी दिखती हैं। इसलिए आकृति 2(i) में बने तीनों त्रिभुज एक जैसे लगते हैं। किन्तु आकृति 2(ii) में दोनों त्रिभुज के कोण अलग–अलग हैं। अतः यह दोनों त्रिभुज दिखने में ही भिन्न हैं।



(i) (ii)

आकृति–2

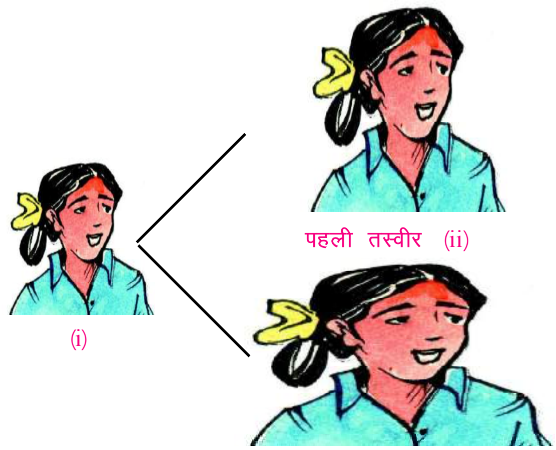
सामान्यतः एक जैसी दिखने वाली आकृतियों को हम समरूप कह देते हैं परन्तु गणित में समरूप होने की कुछ शर्तें होती हैं क्या 2(i) में बने तीनों त्रिभुज समरूप हैं? देखने में तो ये त्रिभुज समरूप दिख रहे हैं, पर यह कैसे निश्चित करें? आगे हम इनकी समरूपता पर चर्चा करेंगे।

स्केलिंग (Scaling)

अक्सर हमारे सामने ऐसी परिस्थियाँ आती हैं, किसी तस्वीर को बड़ा करके देखना है या किसी खेत, मकान, कारखाने अथवा मैदान का नक्शा, कागज पर बनाना है। या फिर बने हुए नक्शे से वास्तविक दूरियाँ, आकार, आकृति, क्षेत्रफल आदि पता करना है। इस तरह की सभी आवश्यकताओं के लिए हम स्केलिंग का उपयोग करते हैं।

स्केलिंग का अर्थ है आकार (size) में बदलाव करना। यानी आकार को बड़ा या छोटा करना। किन्तु बड़ा–छोटा करने में भी कुछ बातों का ध्यान रखना पड़ता है जिससे नया चित्र पहले वाले जैसा दिखे। पहले जैसे दिखने का क्या अर्थ है?

आकृति–3 के चित्रों को देखिए। आकृति 3(i) को बड़ा करने के प्रयास में 3(ii) और 3(iii) प्राप्त हुए हैं। इन दोनों में से कौन–सी तस्वीर चुनेंगे? जाहिर सी बात है पहली। इसमें पहली तस्वीर इस तरह बड़ी की गई है जिससे उसकी आकृति मूल तस्वीर 3(i) के जैसी ही रहे इसके लिए तस्वीर को निश्चित अनुपात में बड़ा किया गया है। हम यह कह सकते हैं कि आकृति 3(i) व 3(ii) समरूप हैं।



आकृति–3

अब आकृति 3(iii) को देखिए। इस तस्वीर की चौड़ाई, ऊँचाई के अनुपात में मूल तस्वीर की चौड़ाई से अधिक प्रतीत हो रही है। यह मूल तस्वीर से अलग दिखाई पड़ रही है अतः आकृति 3(i) व 3(iii)समरूप नहीं हैं।

इसलिए स्केलिंग करते समय हमें इस बात का ध्यान रखना होता है कि आकार बड़ा या छोटा करें तो उसकी आकृति में कोई परिवर्तन न हो और समरूपता का गुण बरकरार रहे।

स्केल गुणक (Scale Factor)

दो समरूप आकृतियों के माप में विशेष अनुपात होता है जिसे स्केल गुणक (Scale factor) कहते हैं। स्केल गुणक का उपयोग करके किसी आकृति को आवश्यकतानुसार निश्चित अनुपात में बड़ा या छोटा किया जा सकता है।

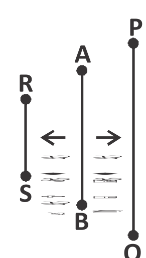
जैसे 5 सेमी. के रेखाखण्ड को 10 सेमी. करने के लिए स्केल गुणक 2 होगा क्योंकि $5\times 2=10$। इसी तरह 50 सेमी. × 20 सेमी. के नक्शे को 10 सेमी. × 4 सेमी. तक स्केल करने के लिए स्केल गुणक $\frac{1}{5}$ या 0.2 होगा। $50\times\frac{1}{5}=10$ सेमी. , $20\times\frac{1}{5}=4$ सेमी.। यानी स्केलिंग करने पर रेखाखण्ड 2 गुना (बड़ा) हो जाएगा और नक्शा $\frac{1}{5}$ या 0.2 गुना (छोटा) हो जाएगा। हम देख सकते हैं कि जिस अनुपात में नक्शे की एक भुजा कम हुई है उसी अनुपात में उसकी दूसरी भुजा भी कम हुई है। स्केल गुणक यदि 1 से अधिक है तो नई आकृति बड़ी होगी और यदि स्केल गुणक 1 से कम है तो नई आकृति छोटी होगी।

अब आकृति– 4 को देखिए रेखाखण्ड $\overline{AB}$ को बड़ा करने पर $\overline{PQ}$ और छोटा करने पर $\overline{RS}$ मिलता है। माना स्केल गुणक x है।

(i) बढ़ाना (Dilation/Enlargement)

$PQ = x\,(AB)$ (चूँकि x स्केल गुणक है)

$$\frac{PQ}{AB}=x$$



आकृति–4

क्योंकि $PQ > AB$ है, इसलिए $x>1$

अतः आकृति को बड़ा करने (dilation) के लिए स्केल गुणक '1' से बड़ा होना चाहिए।

(ii) घटाना (Reduction)

$RS = x(AB)$ (चूँकि x स्केल गुणक है)

$$\frac{RS}{AB} = x$$

क्योंकि $RS < AB$ है, इसलिए यहाँ $x < 1$

स्पष्टतः आकृति को छोटा करने (reduce) के लिए स्केल गुणक '1' से छोटा होना चाहिए।

करके देखें

1. 12 सेमी. लंबे एक रेखाखण्ड को 36 सेमी. लंबा रेखाखण्ड बनाने के लिए स्केल गुणक क्या होगा? इसी तरह 12 सेमी. के रेखाखण्ड की लंबाई को 6 सेमी. करना हो तो स्केल गुणक क्या होना चाहिए?

नक्शा और पैमाना

गाँव, जिला, राज्य और राष्ट्र के नक्शों को बनाते समय एक बड़े क्षेत्र को कागज पर दिखाना होता है। इसमें अलग–अलग माप के पैमाने लिए जाते हैं। यदि छत्तीसगढ़ के नक्शे में पैमाना 1 सेमी. : 50,00,000 सेमी. या 1 सेमी. : 50 किमी. लिखा है तो इससे क्या निष्कर्ष निकालेंगे?

रोहित कहता है कि 1 सेमी. : 50 किमी. का मतलब नक्शे पर 1सेमी., वास्तव में 50 किमी. को दर्शाता है। अतः 2 सेमी., $50 \times 2 = 100$ किमी. को तथा 4 सेमी., $50 \times 4 = 200$ किमी. को दर्शाएगा।

क्या आपको रोहित की बात ठीक लगी? यहाँ स्केल गुणक कितना है? दोस्तों से चर्चा करें।

सोचें एवं चर्चा करें

(1) आप अपने गाँव का नक्शा बनाने के लिए क्या पैमाना लेना चाहेंगे? क्यों?

(2) (i) आपको अपनी किताब में बने भारत के नक्शे (20सेमी.×20सेमी.) को दीवार (3मी.×2मी) पर बनाना है। क्या आप स्केल गुणक 1मी.=12सेमी. लेकर यह बना सकते हैं?

(ii) यदि नहीं तो क्यों?

(iii) स्केल गुणक अधिकतम कितना लिया जाए ताकि नक्शा 6मी.×4मी. दीवार पर बनाया जा सके?

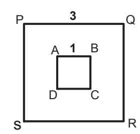
(3) अपनी तहसील व जिले के नक्शों को बनाने में आप कौनसा स्केल लेंगे और क्यों?

प्रश्नावली–1

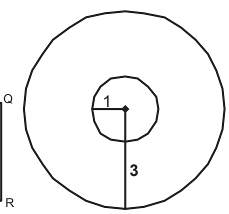
1. खेत के नक्शे को 1 सेमी. : 10 मी. स्केल किया गया है। नक्शे में खेत का माप 3 सेमी.× 4 सेमी. है। खेत का वास्तविक क्षेत्रफल वर्गमी. में ज्ञात कीजिए?
2. आपके पास 3600 वर्ग सेमी. क्षेत्रफल की वर्गाकार पेंटिंग है। स्केल गुणक 0.1 लेते हुए पेंटिंग को स्केल करें। स्केलिंग करने के बाद भुजा की माप ज्ञात कीजिए?
3. किसी शहर के नक्शे में रेलवे स्टेशन से एयरपोर्ट (हवाई अड्डा) की दूरी 3 सेमी. है। यदि नक्शे का पैमाना 2 सेमी. : 7 किमी. है तो रेलवे स्टेशन से एयरपोर्ट की वास्तविक दूरी किमी. में क्या होगी?

वर्ग एवं वृत्त की समरूपता

इस भाग में हम वर्ग, वृत्त, समांतर चतुर्भुज और त्रिभुज जैसी आकृतियों में समरूपता पर चर्चा करेंगे। यहाँ आकृति– 4 में दो वर्ग दिए गए हैं जिनकी भुजाएँ क्रमशः 1 सेमी. और 3 सेमी. हैं। क्या दोनों वर्ग समरूप हैं?



आकृति–5



आकृति–6

चूँकि वर्ग के प्रत्येक कोण का माप 90° होता है और इनके कोण बराबर एवं हरेक की चारों भुजाएँ समान होती हैं, अतः दोनों वर्गों की सभी भुजाएँ समानुपातिक भी होंगी। अतः दोनों वर्ग समरूप हैं। अब हम देखते हैं कि वर्ग ABCD की प्रत्येक भुजा को तीन गुना बढ़ाने पर वर्ग PQRS मिलता है। यानी स्केल गुणक 3 है।

अब आकृति– 5 में दो वृत्त हैं। एक वृत्त की त्रिज्या 1 सेमी. और दूसरे वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी. है। क्या दोनों वृत्त समरुप हैं?

हम 1 सेमी. त्रिज्या के वृत्त को बड़ा करके 3 सेमी. का वृत्त बना सकते हैं। या 3 सेमी. त्रिज्या के वृत्त के आकार (साइज) को घटाकर 1 सेमी. त्रिज्या का वृत्त बना सकते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि दोनों वृत्त समरूप हैं।

कॉपी में अलग–अलग त्रिज्या के वृत्त बनाइए और पता कीजिए कि वे समरुप हैं या नहीं।

सोचें एवं चर्चा करें

- क्या सभी वर्ग समरुप होते हैं?
- क्या सभी वृत्त समरुप होते हैं?

अन्य आकृतियों में समरूपता :

वृत्त व वर्ग विशेष तरह की आकृतियाँ हैं, इन्हें केवल एक अवयव भुजा, त्रिज्या द्वारा निर्धारित किया जा सकता है। स्केलिंग करते समय आकृति के रूप को बरकरार रखना होता है। जहाँ इनके लिए समरूपता के गुण मौजूद हैं। अन्य आकृतियों में ऐसा नहीं है। अलग–अलग प्रकार

की आकृतियों के लिए समरूपता जाँचने के मापदण्ड अलग–अलग होंगे। तो फिर हमें कैसे पता चले कि कोई दो आकृतियाँ समरूप हैं अथवा नहीं। इसी के लिए समरूप आकृतियों की कुछ विशेषताएँ निर्धारित करना उपयोगी है।

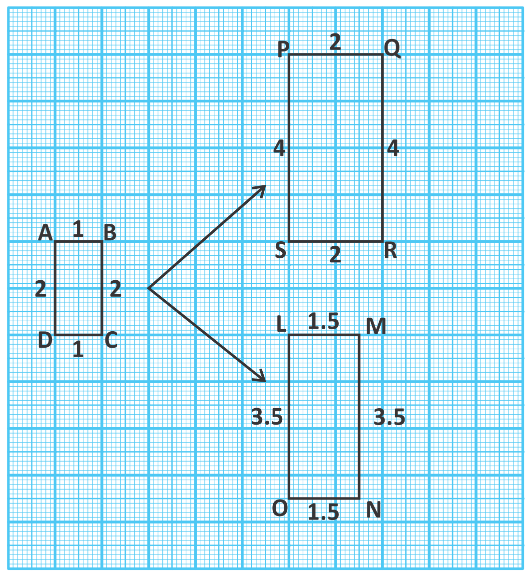
बहुभुजों में समरूपता :

दो बहुभुजों के समरूप होने का अर्थ है कि यदि उन्हें एक निश्चित स्केल गुणक से बड़ा अथवा छोटा किया जाए, जिससे उनकी सभी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में बड़ी अथवा छोटी (स्केल) हों, तो वे दोनों समरूप होंगे। अतः **बहुभुजों में समरूपता के लिए सभी संगत कोणों का बराबर होना तथा सभी संगत भुजाओं का एक ही अनुपात में होना आवश्यक है।**

अब हम आयत और त्रिभुज में समरुपता को समझेंगे और समरूपता जाँचने के तरीके पर बात करेंगे।

आयत में समरूपता कैसे जाँचे ?

ग्राफ पर बने आयत के चित्रों को देखिए(आकृति–7)। यदि आयत ABCD मूल आकृति है तो क्या आयत PQRS और आयत LMNO, मूल आकृति के समरूप है? देखने पर तो यह आकृतियाँ समरूप दिखती हैं परन्तु वास्तव में यह समरूप हैं या नहीं, हमें पता करना होगा।



आकृति–7

आयत के प्रत्येक कोण का माप 90^0 होता है। अर्थात सभी आयतों के कोण बराबर होंगे। चूँकि आयत में आमने–सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं। अतः आयत में समरूपता जाँचने के लिए हमें चारों भुजाओं की नहीं बल्कि दो संलग्न भुजाओं के अनुपात पता करने की जरूरत होती है। आकृति–7 देखकर नीचे बनी तालिका पूरी कीजिए

तालिका–1

भुजाओं की माप		संगत भुजाओं का अनुपात
आयत **ABCD**	आयत **PQRS**	
$AB = 1$	$PQ = 2$	$\frac{PQ}{AB} = \frac{2}{1}$
$BC = 2$	$QR = 4$	$\frac{QR}{BC} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

आयत PQRS और आयत ABCD की संगत भुजाओं का अनुपात समान है। यह अनुपात

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=2$$

$$\therefore \frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=\frac{RS}{CD}=\frac{SP}{DA}=2$$

चूँकि आयत PQRS और ABCD के सभी संगत भुजाओं का अनुपात बराबर है। यहाँ स्केल गुणक '2' है। भुजा PQ, भुजा AB की दुगुनी है । दोनों आयत समरूप हैं। इसे गणितीय रूप में इस तरह लिखेंगे– आयत ABCD ~ आयत PQRS, जहाँ '~' समरूपता का चिह्न है।

तालिका–2

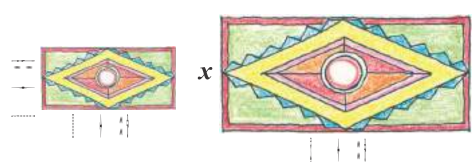
भुजाओं की माप		संगत भुजाओं का अनुपात
आयत **ABCD**	आयत **LMNO**	
AB= 1	LM = 1.5	$\frac{LM}{AB}=\frac{1.5}{1}$
BC = 2	MN = 3.5	$\frac{MN}{BC}=\frac{3.5}{2}=\frac{1.75}{1}$

अब तालिका–2 को देखकर आयत ABCD और LMNO के बीच तुलना कीजिए । क्या आयत ABCD और आयत LMNO समरूप हैं?

यहाँ एक संगत भुजा का अनुपात 1.5 है और दूसरी संगत भुजा का अनुपात 1.75 है। चूँकि संगत भुजाएँ समानुपातिक नहीं हैं। इसलिए आयत ABCD और आयत LMNO समरूप नहीं हैं ।

करके देखें

चित्र में दोनों चादरें समरूप हैं, तो–

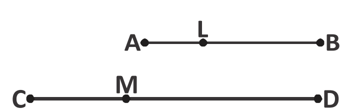


(i) स्केल गुणक कितना होगा?

(ii) x का मान ज्ञात कीजिए ।

(iii) चादरों के परिमाप और क्षेत्रफल का अनुपात कितना है?

रेखाखण्डों का समानुपातिक विभाजन

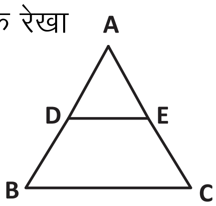


बिन्दु L और M, $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ पर स्थित हैं।

यदि $\frac{AL}{LB}=\frac{CM}{MD}$ है तो हम कहते हैं कि $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ L और M द्वारा समानुपातिक रूप से विभाजित हैं। इस नियम का उपयोग हम त्रिभुजों की समरूपता को परखने के लिए करेंगे।

प्रमेय 1 :– यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर बाकी दो भुजाओं को भिन्न–भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती हुई एक रेखा खींची जाए, तो यह रेखा उन दोनों भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करती है।

उपपत्ति : हमें एक त्रिभुज ABC दिया है, जिसमें भुजा BC के समांतर खींची गई एक रेखा अन्य दो भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर काटती है।



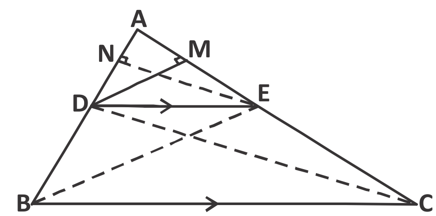
आकृति–8 (i)

हमें सिद्ध करना है कि $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

B को E से तथा C को D से मिलाइए तथा $DM \perp AC$ एवं $EN \perp AB$ खींचिए ।

चूँकि ΔADE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times AD \times EN$$



आकृति–8 (ii)

ΔADE के क्षेत्रफल को ar (ADE) से भी व्यक्त किया जाता है।

अतः $ar\,(ADE) = \frac{1}{2} \times AD \times EN$

तथा $ar\,(BDE) = \frac{1}{2} \times DB \times EN$

इसी प्रकार $ar\,(ADE) = \frac{1}{2} \times AE \times DM$ तथा $ar\,(DEC) = \frac{1}{2} \times EC \times DM$

अतः $$\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \quad \text{.............. (1)}$$

तथा $$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \quad \text{............... (2)}$$

ध्यान दीजिए कि ΔBDE और ΔDEC एक ही आधार DE तथा समांतर रेखाओं BC और DE के बीच बने दो त्रिभुज हैं।

अतः $ar(BDE) = ar(DEC)$ .... (3)

इसलिए (1), (2) और (3), से

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (यह आधारभूत समानुपातिक प्रमेय है)

इस प्रमेय का विलोम भी सिद्ध किया जा सकता है । आइए देखें–

प्रमेय 2 :– यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के समांतर होती है।

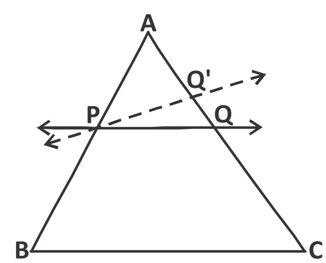
उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम एक रेखा PQ, इस प्रकार लें कि $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ और इसके विपरीत यह बात माने कि PQ, भुजा BC के समांतर नहीं है।

अब यदि PQ, भुजा BC के समांतर नहीं है, तो BC के समांतर कोई दूसरी रेखा होगी। मान लें रेखा PQ' वह रेखा है जो BC के समांतर है।

अतः $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ'}{Q'C}$ होगा (आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

पर, $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ है।

इसलिए $\frac{AQ}{QC}=\frac{AQ'}{Q'C}$



आकृति–9

दोनो पक्षों में 1 जोड़ने पर

$$\frac{AQ}{QC}+1=\frac{AQ'}{Q'C}+1$$

$$\frac{AQ+QC}{QC}=\frac{AQ'+Q'C}{Q'C}$$

$$\therefore \frac{AC}{QC}=\frac{AC}{Q'C}$$ अतः $QC=Q'C$

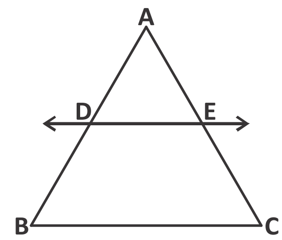
लेकिन ऐसा तभी संभव होगा जब Q एवं Q' एक ही बिंदु हो

इसलिए $PQ \parallel BC$ है।

आइए, इन प्रमेयों पर आधारित कुछ उदाहरण देखते हैं–

उदाहरणः–1. यदि कोई रेखा ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करे तथा भुजा BC के समांतर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ ।

हलः– $DE \parallel BC$ (दिया है)



आकृति–10

अतः $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

अर्थात् $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$

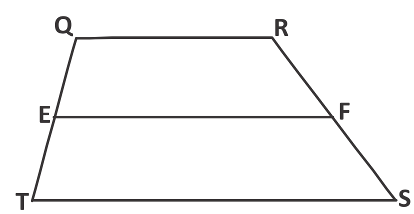
या $\frac{DB}{AD}+1=\frac{EC}{AE}+1$

या $\frac{DB+AD}{AD}=\frac{EC+AE}{AE}$

या $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

अतः $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

उदाहरणः–2. QRST एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें QR || TS है। असमांतर भुजाओं QT और RS पर क्रमशः बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि EF भुजा QR के समांतर है। दर्शाइए कि $\frac{QE}{ET}=\frac{RF}{FS}$ है।



आकृति–11 (i)

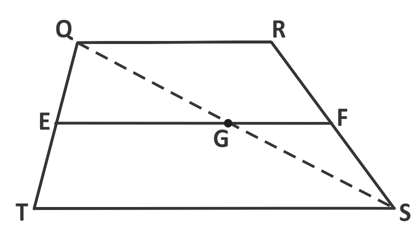
हलः– Q को S से मिलाइए जो EF को बिंदु G पर प्रतिच्छेद करे।

QR || TS और EF || QR (दिया है) आकृति–10 (ii)

इसलिए EF || TS (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं)।

अब ΔQTS में EG || TS (क्योंकि EF || TS)

अतः $\frac{QE}{ET}=\frac{QG}{GS}$ ...... (1)



आकृति–11 (ii)

इसी प्रकार ΔSQR में

$\frac{GS}{QG}=\frac{FS}{RF}$ अर्थात् $\frac{QG}{GS}=\frac{RF}{FS}$ ...... (2)

समी. (1) और (2) से $\frac{QE}{ET}=\frac{RF}{FS}$

प्रश्नावली–2

1. एक वृत्ताकार मैदान की त्रिज्या 52 मीटर है। इस मैदान का नक्शा कागज पर बनाइए जिसमें पैमाना 13 मीटर : 1 सेमी. हो। नक्शे में मैदान की त्रिज्या क्या होगी?

2. किसी आयत की दो आसन्न भुजाओं की माप क्रमशः 5 सेमी. और 7.5 सेमी. है। निम्न स्केल गुणक मानते हुए नए आयतों की भुजाओं की माप और क्षेत्रफल पता कीजिए–

   (i) 0.8

   (ii) 1.2

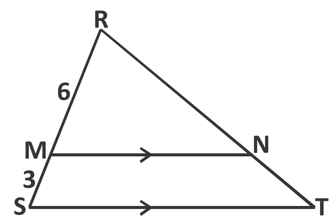
   (iii) 1.0

   स्केल गुणक '1' मानने पर मिला आयत क्या वास्तविक आयत के सर्वांगसम है?

3. आकृति–12 (i) में $MN \parallel ST$ तब निम्नलिखित का मान पता कीजिए।

   (i) $\frac{TN}{NR}$ (ii) $\frac{TR}{NR}$

   (iii) $\frac{TN}{RT}$

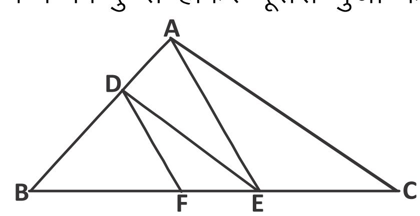


आकृति–12 (i)

4. आधारभूत समानुपातिक प्रमेय (Basic proportionality theorem) का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य–बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

5. आकृति में $DF \parallel AE$ और $DE \parallel AC$ है।

   सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है। आकृति–12 (ii)



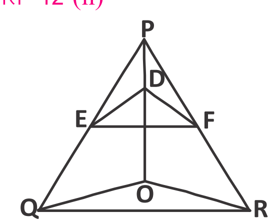
आकृति–12 (ii)

6. किसी ΔPQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिंदु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए बताइए कि क्या $EF \parallel QR$ है:

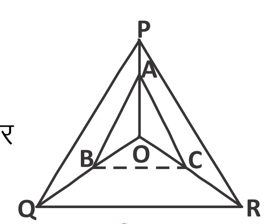
   (i) PE = 3.9 सेमी., EQ = 3 सेमी., PF = 3.6सेमी. और FR = 2.4 सेमी.

   (ii) PE = 4 सेमी., QE = 4.5 सेमी., PF = 8 सेमी. और RF = 9 सेमी.

   (iii) PQ = 1.28 सेमी., PR = 2.56 सेमी., PE = 0.18 सेमी. और PF = 0.36 सेमी.



आकृति–12 (iii)



आकृति–12 (iv)

7. आकृति–12 (iii) में $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$ है। दर्शाइए कि $EF \parallel QR$ है।

8. आकृति–12 (iv) में OP, OQ और OR पर क्रमशः तीन बिन्दु A, B और C इस प्रकार स्थित हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ है। दर्शाइए कि $BC \parallel QR$ है।

संकेत :– जिन सवालों में आवश्यकता हो चित्र बनाकर हल करें। इससे आसानी होगी।

समांतर चतुर्भुज में समरूपता :–

F1EI6Q

क्या आयतों की समरूपता की कसौटियाँ समांतर चतुर्भुजों में समरूपता जाँचने के लिए पर्याप्त होंगी? जाहिर है कि यह पर्याप्त नहीं है क्योंकि समांतर चतुर्भुजों के कोण बराबर नहीं होते। अतः हम एक और प्रमेय तक पहुँचते हैं।

प्रमेय 3 :– यदि दो समांतर चतुर्भुज में संगत कोण बराबर हों, तो उनकी सभी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती हैं, अतः ऐसे समांतर चतुर्भुज समरूप होते हैं।

उपपत्ति :– प्रमेय के कथनानुसार ऐसे दो समांतर चतुर्भुज ABCD और PQRS लें

जहाँ, $\angle A=\angle P, \angle B=\angle Q$

और $\angle C=\angle R, \angle D=\angle S$ (आकृति–13 (i), (ii))

समांतर चतुर्भुज PQRS में S को Q से मिलाइए तथा PS और SR पर दो बिंदु क्रमशः A' तथा C' इस प्रकार लीजिए कि

$AD=A'S, \quad DC=SC'$

तथा $\angle DAB=\angle SA'B'$ फिर B' को C' से मिलाइए।

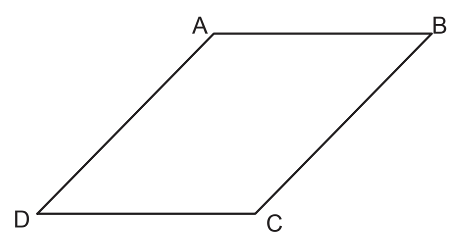
अब $\triangle PSQ$ और $\triangle A'SB'$ में $\angle SPQ=\angle SA'B'$ (दिया है)

$\therefore \quad A'B' \parallel PQ$ (PQ और A'B' को तिर्यक रेखा PS प्रतिच्छेद करती है एवं इससे बने संगत कोण बराबर हैं।)

अब $\triangle PSQ$ में $A'B' \parallel PQ \parallel SR$, तो आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से

$\frac{PS}{A'S}=\frac{PQ}{A'B'}=\frac{QS}{B'S}$ होगा (क्यों?)

$\frac{PS}{AD}=\frac{PQ}{AB}=\frac{QS}{B'S}$ होगा (क्यों?) ....(1)



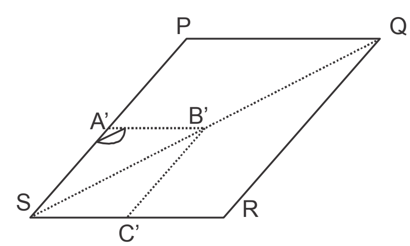
आकृति–13 (i)

इसी प्रकार $\triangle SQR$ में भी $\frac{SR}{SC'}=\frac{QR}{B'C'}=\frac{QS}{B'S}$

या $\frac{SR}{CD}=\frac{QR}{BC}=\frac{QS}{B'S}$ (क्यों?) ....(2)

(1) और (2) से

$\frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=\frac{SR}{CD}=\frac{PS}{AD}$ (क्यों?)



आकृति–13 (ii)

अतः यदि हम यह मानें कि दो समांतर चतुर्भुज के संगत कोण बराबर हैं, तो हम पाते हैं कि उनकी चारों संगत भुजाएँ समानुपातिक होंगी।

क्या इसका विलोम भी सत्य होगा?

प्रमेय 4 :– यदि दो समांतर चतुर्भुज में संगत भुजाएँ समानुपातिक तथा उनके संगत कोण बराबर हों तो वे समांतर चतुर्भुज समरूप होंगे ।

उपपत्तिः– यह कथन स्वयं सिद्ध कीजिए।

निष्कर्ष :–

ऊपर लिखे गए दोनों प्रमेयों से यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दोनों कसौटियाँ अर्थात (i) संगत कोण बराबर हों (ii) संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, में से केवल किसी एक का संतुष्ट होना पर्याप्त है। समांतर चतुर्भुज में समरूपता के लिए दोनों कसौटियों की आवश्यकता नहीं होती क्योंकि एक से स्वतः दूसरी कसौटी प्राप्त हो जाती है।

इसी तरह अन्य बहुभुजों के जोड़ों (समलम्ब चतुर्भुज, सम चतुर्भुज, पंचभुज आदि) में समरूपता को जाँचा जा सकता है ।

करके देखें

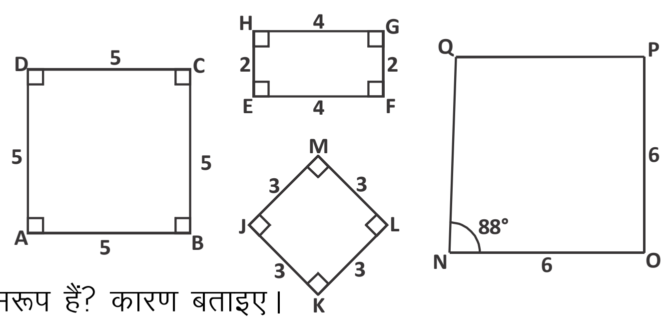
1. क्या दिए गए चतुर्भुज समरूप हैं? कारण सहित लिखिए–

   (i) ABCD और EFGH

   (ii) ABCD और JKLM

   (iii) ABCD और NOPQ

   (iv) JKLM और NOPQ



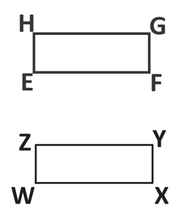
2. क्या EFGH और JKLM समरूप हैं? कारण बताइए।

3. EFGH के समरूप एक चतुर्भुज बनाइए।

क्या सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप भी होती हैं ?

आइए, समरूपता और सर्वांगसमता में संबंध समझते हैं।

दो चतुर्भुज EFGH व WXYZ सर्वांगसम हैं अर्थात EFGH $\cong$ WXYZ, इसलिए इनकी संगत आसन्न भुजाओं की माप व संगत कोण बराबर होंगे ।



आकृति–14

$\therefore$ EF = WX, FG = XY, GH = YZ और HE = ZW

या $\frac{EF}{WX}=1, \frac{FG}{XY}=1, \frac{GH}{YZ}=1$ और $\frac{HE}{ZW}=1$

$$\therefore \frac{EF}{WX}=\frac{FG}{XY}=\frac{GH}{YZ}=\frac{HF}{ZW}=1$$

स्पष्टतः दोनों चतुर्भुजों की भुजाएँ समानुपातिक हैं इसलिए ये चतुर्भुज समरूप होंगे। अर्थात सर्वांगसमता में समरूपता की दोनों जरूरतें पूरी होती हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

क्या सभी समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम भी होती हैं। कारण सहित समझाएँ।

समरूप आकृतियों के परिमाप में संबंध

यदि दो आकृतियाँ समरूप हों, तो क्या हम उन आकृतियों के परिमाप में संबंध बता सकते हैं? माना हमें दो समरूप बहुभुज दिए हैं, जिनके स्केल गुणक m है। समरूपता की कसौटी के अनुसार–

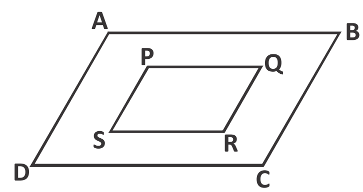
$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CD}{RS}=\frac{DA}{SP}=m$$ (संगत भुजाएँ समानुपातिक हैं) ....(1)

$AB = mPQ$ .... (2)

$BC = mQR$ .... (3)

$CD = mRS$ .... (4)

और $DA = mSP$ ....(5)



आइए इनके परिमाप पता करते हैं–

बहुभुज ABCD का परिमाप $= AB + BC + CD + DA$ .... (6)

तथा बहुभुज PQRS का परिमाप $= PQ + QR + RS + SP$ .... (7)

(6) व (7) से

$$\frac{\text{बहुभुज ABCD का परिमाप}}{\text{बहुभुज PQRS का परिमाप}}=\frac{AB+BC+CD+DA}{PQ+QR+RS+SP}$$

(2), (3), (4) और (5) से–

$$\frac{\text{बहुभुज ABCD का परिमाप}}{\text{बहुभुज PQRS का परिमाप}}=\frac{m(PQ+QR+RS+SP)}{(PQ+QR+RS+SP)}$$

$$\frac{\text{बहुभुज ABCD का परिमाप}}{\text{बहुभुज PQRS का परिमाप}}=m=\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CD}{RS}=\frac{DA}{SP}$$ (1) से

अर्थात् किन्हीं दो समरूप बहुभुजों के परिमाप का अनुपात, उनकी संगत भुजाओं के अनुपात और स्केल गुणक के बराबर होता है।

उदाहरणः–3. दी गई आकृति में यदि चतुर्भुज ABCD ~ चतुर्भुज PQRS है तो–

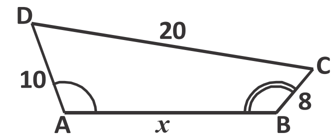
(i) स्केल गुणक क्या होगा? (चतुर्भुज ABCD का चतुर्भुज PQRS से)

(ii) x, y और z का मान ज्ञात कीजिए ।

(iii) चतुर्भुज ABCD का परिमाप कितना है?

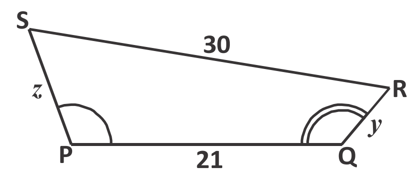
(iv) दोनों चतुर्भुजों के परिमापों का अनुपात क्या होगा?

हलः– (i) संगत भुजाओं का अनुपात है–



$$\frac{CD}{RS}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$ (स्केल गुणक)

(ii) चूँकि दिए गए दोनों चतुर्भुज समरूप हैं अतः उनकी संगत भुजाएँ समानुपातिक होंगी–



$$\frac{CD}{RS}=\frac{AB}{PQ}$$

$$\therefore \frac{2}{3}=\frac{x}{21}$$

$$x=14$$

तथा $$\frac{CD}{RS}=\frac{BC}{QR}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{y}$$

$$y=12$$

$$\frac{CD}{RS}=\frac{AD}{PS}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{10}{z}$$

$$z=15$$

(iii) चतुर्भुज ABCD का परिमाप है :

10 + 20 + 8 + 14 = 52 इकाई

(iv) दोनों चतुर्भुजों को परिमाप का अनुपात होगा–

$$\frac{\text{चतुर्भुज ABCD का परिमाप}}{\text{चतुर्भुज PQRS का परिमाप}} = \frac{2}{3}$$ जो कि स्केल गुणक के बराबर है।

प्रश्नावली–3

1. दिए गए चित्र में बहुभुज समरूप हैं तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए।

(i) OP

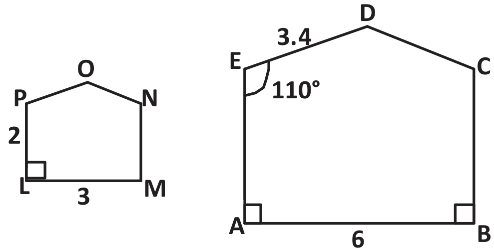
(ii) EA

(iii) m ∠OPL

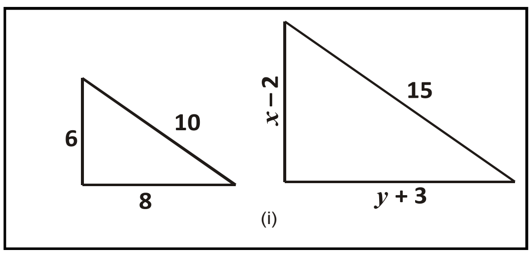
(iv) m ∠LMN

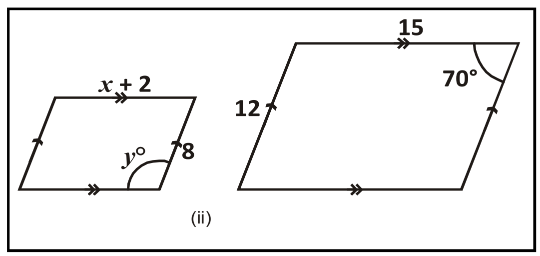
(v) बहुभुज DEABC ~ ?

(vi) बहुभुज BCDEA ~ बहुभुज NOPLM, कथन ठीक नहीं लिखा है। इसे ठीक करके लिखें।

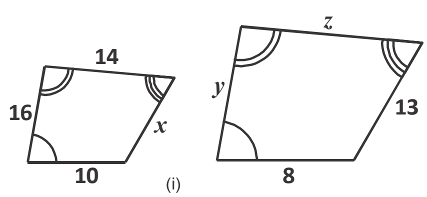


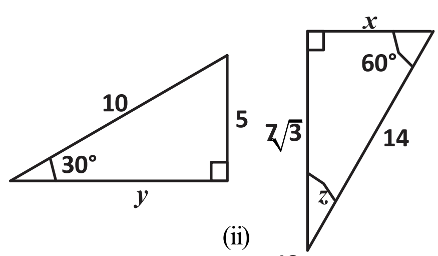
2. चित्र (i) के त्रिभुज और (ii) के समांतर चतुर्भुज समरूप हैं तो x और y का मान पता कीजिए।



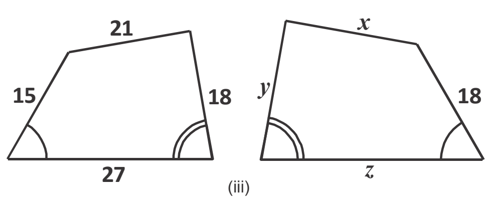


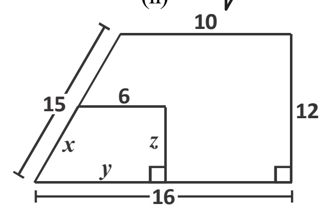
3. नीचे दिए गए प्रत्येक चित्र के दोनों बहुभुज समरूप है तो प्रत्येक में x, y और z का मान ज्ञात कीजिए।





(ii)





4. एक चतुर्भुज की भुजाओं की माप 4 सेमी., 6 सेमी., 6 सेमी. व 8 सेमी. है। दूसरा चतुर्भुज, जो पहले चतुर्भुज के समरूप है, उसकी भुजाओं की माप 6 सेमी., 9 सेमी., 9 सेमी. और 12 सेमी. है।

(i) स्केल गुणक क्या होगा? (दूसरे चतुर्भुज का पहले चतुर्भुज से)

(ii) दोनों चतुर्भुजों के परिमाप ज्ञात कीजिए।

(iii) इनके परिमापों का अनुपात क्या है?
(दूसरे चतुर्भुज का पहले चतुर्भुज से)

5. निम्नलिखित के लिए उदाहरण दें एवं उनके कारण लिखिए ।

(i) यदि दो बहुभुज सर्वांगसम हैं, तो वे समरूप होंगे ही।

(ii) यदि दो बहुभुज समरूप हैं, तो जरूरी नहीं कि वे सर्वांगसम हों।

(iii) ऐसे ही तीन और कथन सोच कर लिखें।

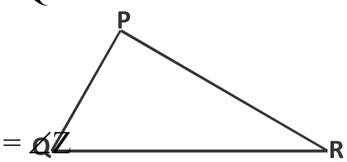
F1NE8D

त्रिभुजों में समरूपता कैसे जाँचें ?

अभी तक हमने देखा कि कोई भी दो त्रिभुज ΔPQR और ΔXYZ को समरूप सिद्ध करने के लिए दो कसौटियाँ हैं।

(i) संगत कोण बराबर हों

$$\angle P = \angle X, \quad \angle Q = \angle Y, \quad \angle R = \angle Z$$



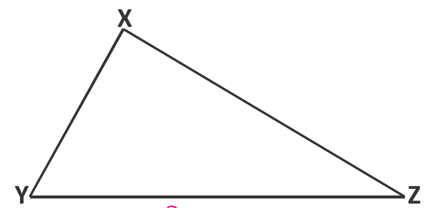
आकृति–15 (i)

(ii) संगत भुजाओं के अनुपात समान हों (समानुपातिक हों)

$$\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ} = \frac{RP}{ZX}$$

तब $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ होंगे।

इनमें से कोई भी एक पूरी होने पर हम कह सकते हैं कि दोनों त्रिभुज समरूप हैं।



आकृति–15 (ii)

कोण–कोण–कोण (AAA) समरूपता कसौटी –

यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती हैं और इसीलिए ये त्रिभुज समरूप होते हैं। इस कसौटी को दो त्रिभुजों की समरूपता की कोण–कोण–कोण **(AAA)** कसौटी कहा जाता है।

आइए देखें कि इन कसौटियों को पूरा करने के लिए न्यूनतम कौन सी शर्तें ढूँढ़ी जा सकती हैं। **कोण–कोण (AA) समरूपता** : यदि एक त्रिभुज के दो कोण एक अन्य त्रिभुज के क्रमशः दो कोणों के बराबर हों, तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

यह त्रिभुजों की समरूपता की कोण–कोण कसौटी है।

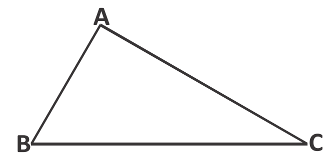
इस कसौटी का उपयोग कर हम दो अन्य कसौटियाँ SAS और SSS, को गणितीय रूप से (प्रमेय) सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 5 :– SAS (भुजा–कोण–भुजा) समरूपता प्रमेय : यदि एक त्रिभुज का एक कोण, दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम दो ऐसे त्रिभुज ABC और DEF लेंगे जिनमें

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$ (<1) यानी DE बड़ा है AB से तथा $\angle A = \angle D$ हो।

ΔDEF में DE तथा DF पर क्रमशः दो बिंदु P व Q इस प्रकार लेते हैं कि $DP = AB$ और $DQ = AC$

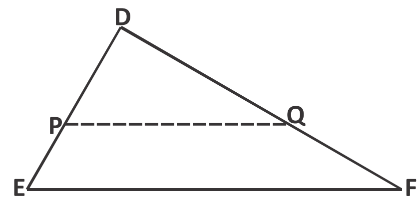


आकृति–16 (i)

अब P से Q को मिलाइए ।

$$\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} \qquad \left(\because \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}\right)$$

$\therefore PQ \parallel EF$ (आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)



आकृति–16 (ii)

अतः $\angle P = \angle E$ और $\angle Q = \angle F$ (क्यों?)

यहाँ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$

$(AB = DP; AC = DQ$ और

$\angle BAC = \angle PDQ)$

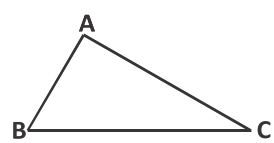
$\therefore$ $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$

कोण–कोण समरूपता के अनुसार ΔABC और ΔDEF समरूप त्रिभुज हैं।

यानी $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

प्रमेय 6 :– **SSS (भुजा–भुजा–भुजा) समरूपता प्रमेय :** यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती हों, तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए ऐसे दो त्रिभुज ABC और DEF लेते हैं जिनमें



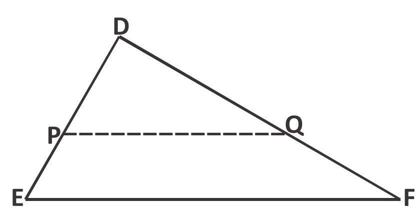
आकृति–17

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \text{ हों।}$$

ΔDEF में DE तथा DF पर क्रमशः दो बिंदु P व Q इस प्रकार लेते हैं कि $DP = AB$ और $DQ = AC$ तथा P से Q को मिलाइए।

यहाँ $\dfrac{DP}{DE} = \dfrac{DQ}{DF}$ $\left(\because \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{FD}\right.$ और $DP = AB, DQ = AC$ है)

$\therefore$ $PQ \parallel EF$ (क्यों?) (प्रमेय 2)



आकृति–18

अतः $\angle P = \angle E$ और $\angle Q = \angle F$

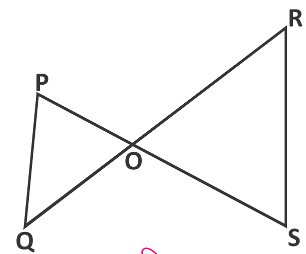
$\therefore$ $\Delta DEF \sim \Delta DPQ$ (कोण–कोण समरूपता)

हम जानते हैं कि $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (दिए हुए पद व रचना से)

$\therefore$ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$

यानि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (कोण–कोण समरूपता अभिधारणा से)

उदाहरणः–4. यदि $PQ \parallel RS$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ है। (आकृति 19)



आकृति–19

हलः– $PQ \parallel RS$ (दिया है)

$\angle P = \angle S$ (एकांतर कोण)

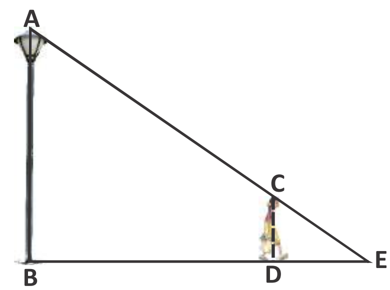
और $\angle Q = \angle R$ (एकांतर कोण)

साथ ही $\angle POQ = \angle SOR$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \Delta POQ \sim \Delta SOR$ (कोण–कोण–कोण समरूपता कसौटी)

उदाहरणः–5. एक लड़की जिसकी ऊँचाई 90 सेमी. है, एक लैम्पपोस्ट जिस पर 3.6 मीटर ऊँचाई पर बल्ब लगा है, से 1.2 मी. प्रति सेकंड की चाल से दूर जा रही है। 4 सेकंड बाद उस लड़की की परछाई की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः– माना लैम्पपोस्ट के बल्ब की ऊँचाई AB तथा लड़की की ऊँचाई CD है। चित्र में आप देख सकते हैं कि लड़की की परछाई DE है।



आकृति–20

माना $DE = x$ मी.

चूँकि दूरी = चाल × समय

इसलिए $BD = 1.2 \times 4 = 4.8$ मी.

ΔABE और ΔCDE में,

$\angle B = \angle D$ (प्रत्येक 90° है, लैम्पपोस्ट और लड़की भूमि से ऊर्ध्वाधर हैं)

$\angle E = \angle E$ (उभयनिष्ठ कोण)

अतः $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (कोण–कोण समरूपता कसौटी)

इसलिए $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ (चूँकि 1 मी. = 100 सेमी.)

$4.8 + x = 4x$

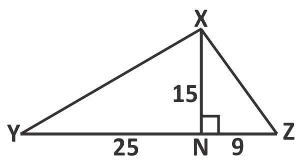
$3x = 4.8$

$x = 1.6$

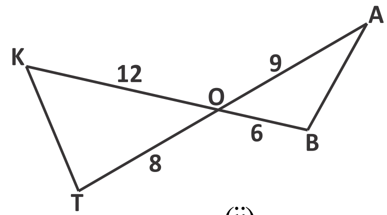
अतः 4 सेकंड चलने के बाद लड़की की परछाई की लंबाई 1.6 मी. है।

करके देखें

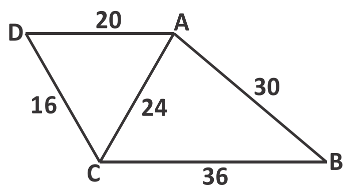
1. इन त्रिभुजों में समरूपता की जाँच कीजिए और बताइए कि कौनसी कसौटी का उपयोग हुआ।



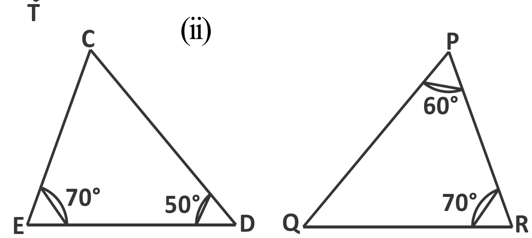
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

(i)	ΔYXN और ΔXNZ	(ii)	ΔOAB और ΔOKT
(iii)	ΔADC और ΔACB	(iv)	ΔCED और ΔPRQ

समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों में संबंध

हमने देखा कि समरूप बहुभुजों के परिमाप का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के अनुपात के बराबर होता है। तब दो त्रिभुज ABC तथा PQR में

$$\frac{\Delta ABC \text{ का परिमाप}}{\Delta PQR \text{ का परिमाप}} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

या $$\frac{AB+BC+CA}{PQ+QR+RP} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

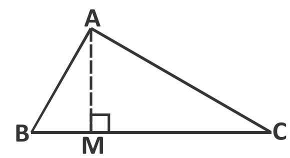
क्या इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के अनुपात और इनकी संगत भुजाओं के अनुपात में कोई संबंध है?

इस संबंध को अगले प्रमेय में देखेंगे।

प्रमेय 7 :– दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।

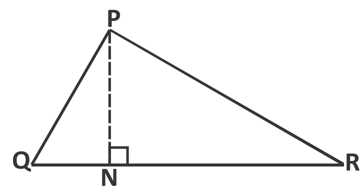
उपपत्ति : हमें दो त्रिभुज ABC और PQR ऐसे दिए हैं कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।

हमें सिद्ध करना है कि :



$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल पता करने के लिए हम इनके शीर्षलंब क्रमशः AM और PN खींचते हैं।



अब $ar(ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AM$ और

$$ar(PQR) = \frac{1}{2} \times QR \times PN$$

$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad \text{............. (1)}$$

अब ΔABM और ΔPQN में,

$\angle B = \angle Q$ $(\Delta ABC \sim \Delta PQR)$

$\angle M = \angle N$ (प्रत्येक कोण 90^o का है)

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQN$ (कोण–कोण समरूपता अभिधारणा)

इसलिए $\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ}$ .... (2)

हम जानते हैं कि

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दिया है)

तब $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ .... (3)

समीकरण (1) और (3) से,

$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AM}{PN}$$

समीकरण (2) से,

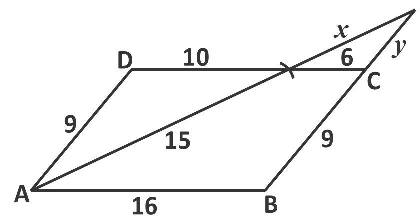
$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$$

अतः समी. (3) से $\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$

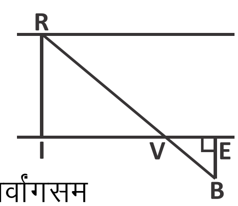
करके देखें

1. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात 25:9 है। तो उनके संगत भुजाओं का अनुपात क्या होगा?
2. त्रिभुज TFR और त्रिभुज SPM समरूप हैं, जिनका स्केल गुणक 7 : 4 है। इनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?
3. $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ है, जहाँ $PQ = 3XY$ है।
   इनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

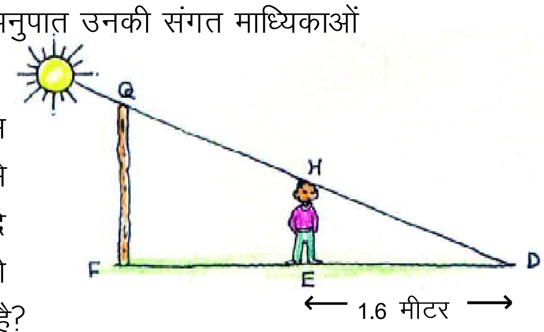
प्रश्नावली–4



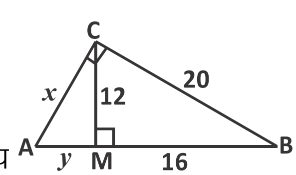
1. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। x और y का मान पता कीजिए।
2. एक समलंब चतुर्भुज ABCD जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $AB = 2\,CD$ हो तो त्रिभुज AOB और COD के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।



3. चित्र में यदि IV = 36 मीटर, VE = 20 मीटर और EB = 15 मीटर दिया है तो नदी की चौड़ाई (RI) कितनी होगी?
4. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
5. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।



6. शाहिद एक खंभे की लंबाई का अनुमान लगाते समय इस प्रकार खड़ा होता है कि उसके सिर H की छाया व खंभे के शिखर Q की छाया एक ही बिंदु D पर पड़ती है। यदि DE=1.6 मीटर और DF= 4.4 मीटर हो तो खंभे की लंबाई क्या होगी, जबकि शाहिद की लंबाई 1.2 मीटर है?



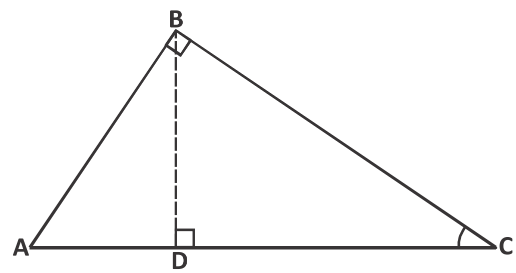
7. (i) चित्र में कौन से दो त्रिभुज, ΔABC के समरूप है? नाम लिखिए।
   (ii) x और y का मान क्या होगा?
8. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार है कि D भुजा BC का मध्य बिंदु है। त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है–
   (i) 2:1 (ii) 1:2 (iii) 4:1 (iv) 1:4
9. दो समरूप त्रिभुजों में $9ar(ABC) = 16ar(PQR)$ है तो $\dfrac{AB}{PQ}$ का मान होगा–
   (i) 4:3 (ii) 16:3 (iii) 3:4 (iv) 9:4

पाइथागोरस प्रमेय

आपने पिछली कक्षाओं में पाइथागोरस प्रमेय की मदद से कई प्रश्न हल किए हैं व गतिविधियों के द्वारा इस प्रमेय का सत्यापन भी किया है। क्या त्रिभुजों में समरूपता की अवधारणा का उपयोग करके पाइथागोरस प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं ? आइए देखें।

प्रमेय 8 :– यदि किसी समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लंब डाला जाए तो इस लंब के दोनों ओर बने त्रिभुज संपूर्ण त्रिभुज के समरूप होते हैं तथा परस्पर समरूप होते हैं।

उपपत्ति : दिया है : एक ΔABC है जिसका कोण B समकोण है तथा BD कर्ण AC पर लंब है।



हमें सिद्ध करना है कि

(i) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

(ii) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

(iii) $\Delta ABD \sim \Delta DBC$

हम देख सकते हैं कि ΔADB और ΔABC में

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle ADB = \angle ABC$ (दोनों 90^o के कोण है)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta ABC$ (कैसे?) .... (1)

इसी प्रकार ΔBDC और ΔABC में

$\angle C = \angle C$ और $\angle BDC = \angle ABC$ (क्यों?)

इसलिए $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ .... (2)

(1) और (2) से हमें मिलता है–

$\Delta ADB \sim \Delta BDC$ .... (3)

(यदि कोई दो त्रिभुज किसी तीसरे त्रिभुज के समरूप हो, तो वे दोनों त्रिभुज भी आपस में समरूप होंगे।)

अब हम इस प्रमेय का उपयोग करके, पाइथागोरस प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 9 :– एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उपपत्ति : हमें एक समकोण त्रिभुज ABC दिया गया है जिसका $\angle B$ समकोण है।

हमें सिद्ध करना है कि $AC^2 = AB^2 + BC^2$

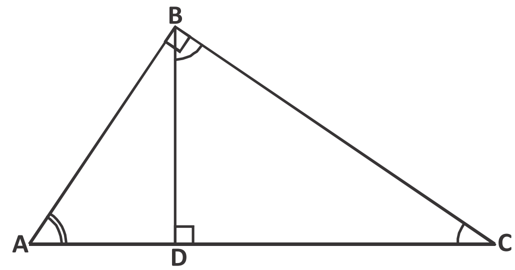
इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए रचना की आवश्यकता है इसलिए अब हम त्रिभुज के शीर्ष B से AC भुजा पर BD लंब खींचिए।

अब ΔADB व ΔABC में

$\angle ADB = \angle ABC = 90^\circ$

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC$ (कोण–कोण समरूपता से)



$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (समानुपातिक भुजाएँ)

; k $AD.\,AC = AB^2$ .... (1)

इसी प्रकार $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ है।

$\therefore \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$ (समानुपातिक भुजाएँ)

या $CD.\,AC = BC^2$ .... (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर

$AD.\,AC + CD.\,AC = AB^2 + BC^2$

या $AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

या $AC.AC = AB^2 + BC^2$

या $AC^2 = AB^2 + BC^2$

क्या पाइथागोरस प्रमेय के विलोम को भी सिद्ध किया जा सकता है?

प्रमेय 10 :– यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

उपपत्ति : इसे आप स्वयं सिद्ध कीजिए ।

इन प्रमेयों पर आधारित कुछ सवाल करते हैं ।

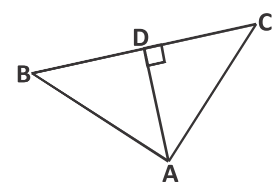
करके देखें

एक सीढ़ी किसी दीवार पर इस प्रकार टिकी हुई है कि निचला सिरा दीवार से 2.5 मीटर की दूरी पर है तथा इसका ऊपरी सिरा भूमि से 6 मीटर की ऊँचाई पर बनी एक खिड़की तक पहुँचता है। सीढ़ी की लंबाई क्या होगी?

उदाहरण:–6. चित्र में $AD \perp BC$ है।

सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है।

हल:– ΔADC में



$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (पाइथागोरस प्रमेय) .... (1)

अब ΔADB में

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (2)

(2) में से (1) को घटाने पर

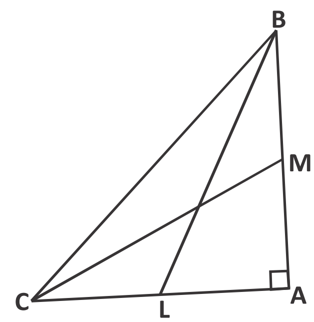
$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$

या $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

उदाहरणः–7. BL और CM एक समकोण त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ है तथा त्रिभुज में कोण A समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$

हलः– ΔABC में $\angle A = 90^\circ$ है तथा BL और CM उसकी माध्यिकाएँ हैं।

ΔABC में, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (क्यों?)



ΔABL में, $BL^2 = AL^2 + AB^2$

$$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$$

(AC का मध्य बिंदु L है)

$$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

$$4BL^2 = AC^2 + 4AB^2 \quad \text{............ (2)}$$

ΔCMA में, $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

(AB का मध्य बिंदु M है)

$$4\,CM^2 = 4\,AC^2 + AB^2 \quad \text{............ (3)}$$

(2) और (3) को जोड़ने पर

$$4BL^2 + 4CM^2 = AC^2 + 4AB^2 + 4AC^2 + AB^2$$

$$4\left(BL^2 + CM^2\right) = 5AC^2 + 5AB^2$$

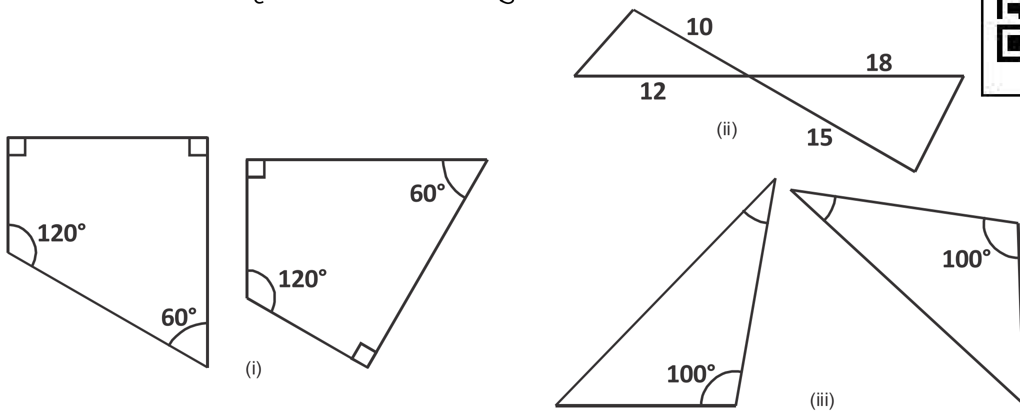
$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

$$4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2 \qquad \text{(1) से}$$

F1XAA1

प्रश्नावली–5

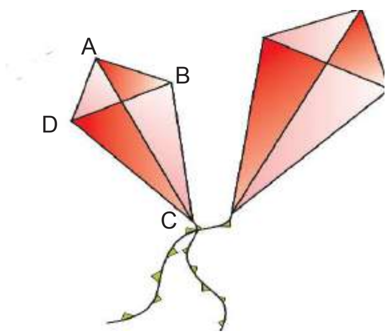
1. निम्नलिखित आकृतियों का कौन सा युग्म समरूप नहीं है और क्यों?



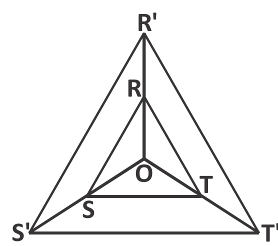
2. मेघा ने दो समरूप पतंगें बनाई। बड़ी पतंग का विकर्ण, छोटी पतंग के विकर्ण का 1.5 गुना है तब

(i) स्केल गुणक क्या होगा?

(ii) बड़ी पतंग के विकर्णों की माप ज्ञात कीजिए। जबकि BD = 40 सेमी. और AC = 68 सेमी.



3. एक समकोण ΔPQR में कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ पर दर्शाइए कि $PM^2 = QM.MR$



4. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 2a है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

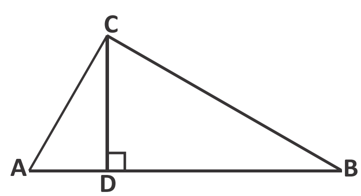
5. ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $\angle C = 90^o$ है। सिद्ध कीजिए $AB^2 = 2AC^2$ है।

6. यदि दिए गए चित्र में $OR' = 2.OR$

$OS' = 2.OS$

$OT' = 2.OT$

सिद्ध कीजिए कि $\Delta RST \sim \Delta R'S'T'$



7. एक त्रिभुज ABC जिसमें $\angle C$ समकोण है। भुजाओं CA और CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित हैं। सिद्ध कीजिए $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

8. ΔACB में $\angle ACB = 90^o$ तथा $CD \perp AB$ है। सिद्धकीजिए कि $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$

9. यदि पृथ्वी का व्यास लगभग 8000 मील है, सूर्य का व्यास लगभग 864000 मील है। पृथ्वी और सूर्य की दूरी लगभग 92 मिलियन मील है।

   यदि कागज पर पृथ्वी को 1 इंच व्यास के वृत्त से दर्शाएँ तो सूर्य का व्यास और पृथ्वी से सूर्य की दूरी कागज पर कितनी होगी? (1मिलियन $= 10^6$)

10. यदि दो समषट्भुजों के परिमाप का अनुपात 5:4 है तो उनकी भुजाओं का अनुपात क्या होगा?

हमने सीखा

1. दो समरूप आकृतियों की माप में विशेष अनुपात होता है, जिसे स्केल गुणक (scale factor) कहते हैं।
2. दो बहुभुज जिनकी भुजाओं की संख्या समान हों, समरूप होते हैं, यदि
   (i) उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।
   (ii) उनके संगत कोण बराबर हों।
3. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न–भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो यह रेखा अन्य दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करती है।
4. यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के समान्तर होती है।
5. सभी सर्वांगसम बहुभुज समरूप भी होते हैं।
6. किन्हीं दो समरूप बहुभुजों के परिमाप का अनुपात, उनकी संगत भुजाओं के अनुपात या स्केल गुणक के समान होता है।
7. यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के क्रमशः दो कोणों के बराबर हों, तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।
8. यदि एक त्रिभुज का एक कोण, दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। (SAS समरूपता कसौटी)
9. यदि दो त्रिभुजों में संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, तो उनके संगत कोण बराबर होते हैं और इसीलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं ।
10. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।

11. यदि किसी समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लंब डाला जाए तो इस लंब के दोनों ओर बने त्रिभुज, मूल त्रिभुज के समरूप होते हैं तथा परस्पर भी समरूप होते हैं।

12. एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

13. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

उत्तरमाला–1

1. 1200 वर्गमीटर 2. 6सेमी. 3. 10.5 किमी.

उत्तरमाला–2

1. 4 सेमी. 2. (i) 4 सेमी., 6 सेमी., 24 सेमी. (ii) 6 सेमी., 9 सेमी., 54 सेमी.

(iii) 5 सेमी., 7.5 सेमी., 37.5 सेमी. ,हाँ 3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$

6. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ

उत्तरमाला–3

1. (i) 1.7 (ii) 4 (iii) 110° (iv) 90° (v) बहुभुज OPLMN (vi) बहुभुज BCDEA समरूप है बहुभुज MNOPL के

2. (i) $x = 11, \quad y = 9$

(ii) $x = 8, y = 110°$

3. (i) $x = 16.25, y = 20, z = 17.5$

(ii) $x = 7, y = 5\sqrt{3}, z = 30°$

(iii) $x = 25.2, y = 21.6, z = 32.4$ (iv) $x = 9, y = 9.6, z = 7.2$

4. (i) 1.5 (ii) 24 सेमी., 36 सेमी. (iii) 1.5

उत्तरमाला–4

1. $x = 9, y = \frac{27}{5}$ 2. 4:1 3. 27 मीटर 6. 3.3 मीटर

7. (i) त्रिभुज ACM व त्रिभुज CBM (ii) $x = 15, y = 9$

8. (iii) 4:1 9. (i) 4:3

उत्तरमाला–5

1. (i) एक समलंब चतुर्भुज है दूसरा नहीं।

   (iii) एक ही कोण का मान ज्ञात है। अतः अन्य कोणों की समानता के बारे में कुछ नहीं कह सकते।

2. (i) 1.5 (ii) 102 सेमी. व 60 सेमी.

4. $\sqrt{3}a$ 9. 108 इंच, 11500 इंच 10. 5:4

अध्याय 12

वृत्त एवं स्पर्श रेखाएँ
[CIRCLE AND TANGENTS]

F276BN

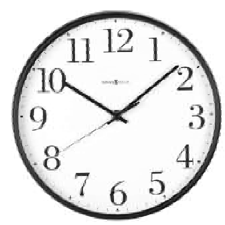
परिचय (Introduction)

हम अपने आस–पास विभिन्न आकृतियों की वस्तुएँ देखते हैं। जैसे सिक्का, चूड़ी, साइकिल का पहिया, घड़ी आदि सब में कुछ एक जैसे गुण हैं।

सिक्के का किनारा
चित्र–1

चूड़ी का किनारा
चित्र–2

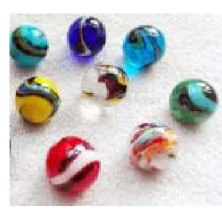
पहिये का किनारा
चित्र–3



घड़ी का किनारा
चित्र–4

इन सभी आकृतियों के किनारे वृत्त की तरह दिखाई देते हैं। हम ऐसी और बहुत सी वस्तुएँ ढूँढ़ सकते हैं जो इन्हीं की तरह की हैं। क्या आप कुछ ऐसी और वस्तुएँ जल्दी से सोच सकते हैं? गेंद, काँच की गोली, पानी की बूंद जैसी और भी वस्तुएँ गोलाकार होती है।

गेंद
चित्र–5

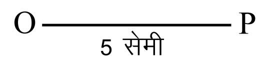

काँच की गोली
चित्र–6

ये (चित्र–5 ,6) वृत से अलग हैं और ऊपर दिए गए चित्रों से भी। आपस में चर्चा करके सिक्के जैसी वस्तुएँ व गेंद जैसी वस्तुओं के अंतर लिखिए।

इस अध्याय में सिक्के जैसी यानी वृत्तनुमा सतह वाली वस्तुओं की सतह के गुण देखेंगे।

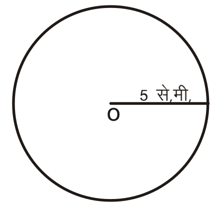
वृत्त क्या है ?

कागज पर एक बिंदु "O" लेकर इससे 5 सेमी. की दूरी पर बिंदु P लें।



क्या कुछ और भी बिंदु हो सकते हैं जो बिन्दु O से 5 सेमी. की दूरी पर हों? इसे कैसे ढूँढ़ेंगे? कितने ऐसे और बिंदु होंगे?

परकार को 5 सेमी. फैलाकर O बिंदु पर परकार की नोंक को रखें, O से 5 सेमी. दूरी पर बिंदुओं को चिह्नित करें । कागज पर O से 5 सेमी. की दूरी पर स्थित सभी बिंदुओं को मिलाने पर हमें आकृति 1(ii) प्राप्त होगी। किसी तल पर खींची गई इस प्रकार की बंद आकृति वृत्त होती है। उन सभी बिंदुओं का समूह जो तल में एक नियत बिंदु से निश्चित दूरी पर स्थित हो तथा एक बंद आकृति बनाता हो, वृत्त कहलाता है। बिंदु O को वृत्त का केन्द्र कहते हैं। केन्द्र से वृत्त के किसी भी बिंदु तक की दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। क्या पहिया, घड़ी, चूड़ी, सिक्के आदि वस्तुओं पर भी एक बिंदु ढूँढ़ सकते हैं जिससे सिरे तक दूरी बराबर हो।



आकृति–1(ii)

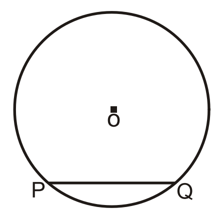
करके देखें

सत्य या असत्य लिखिए। कारण व उदाहरण से समझाइए ।

1. वृत्त की अनेक त्रिज्याएँ होती हैं।
2. वृत्त की सभी त्रिज्याएँ समान नहीं होती हैं।

जीवा (Chord)

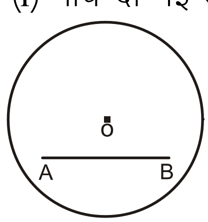
कागज पर एक वृत्त खींचकर, उस की परिधि पर कोई भी दो बिंदु लें। आकृति–2 में दो बिंदुओं P और Q को दिखाया गया है। दोनों बिंदुओं को मिलाने पर रेखाखण्ड PQ बनता है यह रेखाखण्ड वृत्त की एक जीवा है। क्या आप सोच सकते हैं कि ऐसे कितने रेखाखण्ड होंगे जिनके अंत बिंदु वृत्त पर हों? आप पाएँगे कि ऐसी अनंत जीवाएँ हैं।



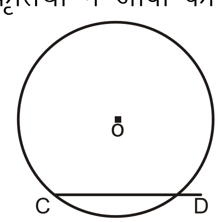
आकृति–2

करके देखें

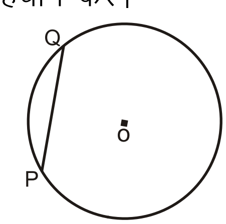
(i) नीचे दी गई आकृतियों में जीवा की पहचान करें।



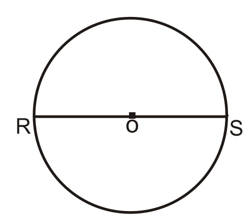
आकृति–3



आकृति–4



आकृति–5

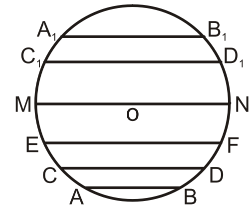


आकृति–6

(ii) क्या जीवाएँ एक ही लंबाई की हैं?

(iii) सबसे लंबी जीवा कौन सी है?

वृत्त की सबसे बड़ी जीवा



आकृति–7

एक वृत्त जिसका केन्द्र O है इसमें विभिन्न जीवाएँ AB, CD, EF और MN आदि खींची गई हैं (आकृति 7)। इन सभी जीवाओं की लंबाइयों का अवलोकन करें।

AB व MN में कौन बड़ी है?

CD व MN में कौन बड़ी है?

इसी प्रकार जीवा EF व MN में किसकी लंबाई अधिक है?

जीवा A_1B_1 और MN में से? आप देख सकते हैं कि जीवा MN की लंबाई सबसे अधिक है। क्या जीवा MN में कोई विशेष गुण देख पा रहे हैं जो शेष जीवाओं में नहीं है? जीवा MN वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरती है। उस जीवा को जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है, वृत्त का व्यास कहते हैं। क्या आप वृत्त में व्यास से भी बड़ी जीवा खींच सकते हैं?

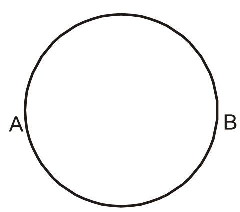
नहीं, आप पाएँगे कि व्यास, वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है।

सोचें एवं चर्चा करें

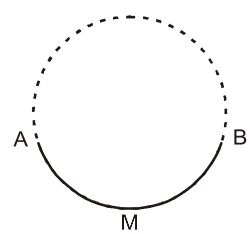
क्या आकृति–7 में MN के अतिरिक्त और भी व्यास खींचे जा सकते हैं?

यदि हाँ तो, ऐसे कितने व्यास खींचे जा सकते हैं?

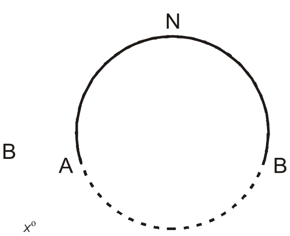
वृत्त का चाप (Arc of a circle)



आकृति–8



आकृति–9



आकृति–10

वृत्त की परिधि पर कोई दो बिंदु A और B हों तो वृत्त दो भागों में बँट जाता है। (आकृति 8,9,10)

इनमें वृत्त का एक भाग छोटा तथा एक भाग बड़ा है। वृत्त के छोटे भाग को लघु चाप $\overset{\frown}{AMB}$ (आकृति–8) तथा बड़े भाग को दीर्घ चाप $\overset{\frown}{ANB}$ (आकृति–9) कहते हैं।

पुनः आकृति–8 में यदि यह मान लें कि कोई बिंदु A से वृत्ताकार पथ पर गति करता हुआ बिंदु A पर वापस पहुँच जाए तो बिंदु के द्वारा तय की गई पथ की लंबाई वृत्त की परिधि कहलाती है।

एक वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका परिमाप होता है, जिसे सामान्यतः परिधि कहा जाता है।

वृत्तखंड (Segment of a circle)

आकृति–11

किसी वृत्त पर एक जीवा AB खींचिए। क्या आप बता सकते हैं कि जीवा वृत्त के अन्तः भाग को कितने भागों मे विभाजित करती है। (आकृति–11)। आप देख सकते हैं कि जीवा वृत्त के अन्तः भाग को दो भागों में विभाजित करती है। जीवा तथा चाप के मध्य क्षेत्र को वृत्तखण्ड कहते हैं। जीवा तथा लघु चाप के मध्य क्षेत्र को लघु वृत्तखण्ड तथा जीवा और दीर्घ चाप के मध्य क्षेत्र को दीर्घ वृत्तखण्ड कहते हैं।

करके देखें

कागज पर एक वृत्त खींचिए तथा अलग–अलग माप की जीवा खींचकर जीवा की लंबाई तथा संगत लघु वृत्तखण्ड में संबंध ढूँढ़िए।

हम देख सकते हैं कि जीवा की लंबाई कम होगी तो लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्र भी कम होगा।

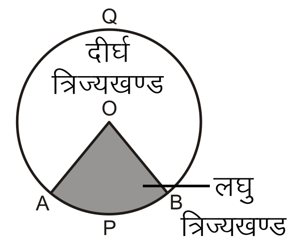
सोचें एवं चर्चा करें

(1) एक वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी. है। वृत्त की जीवाओं की लंबाइयाँ क्रमशः 4 सेमी., 6सेमी.,10 सेमी.व 8 सेमी. हैं। इन जीवाओं के संगत दीर्घ वृत्तखण्ड को छोटे से बड़े के क्रम में लिखिए।

(2) उपरोक्त 6 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त में जब जीवा 12 सेमी. की हो तो दीर्घ वृत्तखण्ड और लघु वृत्तखण्ड में क्या संबंध देखते हैं ?

त्रिज्यखंड (Sector)

एक वृत्त पर दो बिंदु A और B लीजिए। (देखिए आकृति–12) चाप AB के सिरों को वृत्त के केन्द्र O से मिलाइए केन्द्र को चाप $\overset{\frown}{AB}$ के सिरों से मिलाने वाली त्रिज्याओं एवं चाप के बीच के क्षेत्र को त्रिज्यखण्ड कहते हैं।

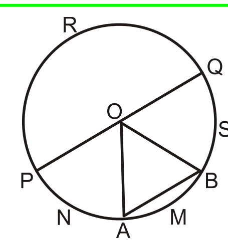


आकृति–12

वृत्तखण्ड की तरह आप पाते हैं कि लघु चाप तथा त्रिज्याओं से घिरा क्षेत्र लघु त्रिज्यखण्ड और दीर्घ चाप तथा त्रिज्याओं से घिरा क्षेत्र दीर्घ त्रिज्यखण्ड होता है। OAPB लघु त्रिज्यखण्ड है और OAQB दीर्घ त्रिज्यखण्ड है ।

करके देखें

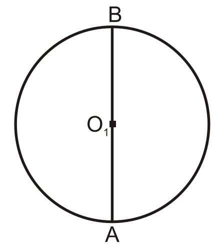
दी गई आकृति में त्रिज्या, जीवा, व्यास, चाप, त्रिज्यखण्ड, वृत्तखण्ड की पहचान कर दी गयी तालिका में लिखें।



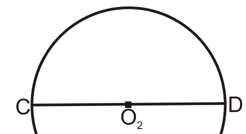
आकृति–13

त्रिज्या	जीवा	व्यास	चाप	त्रिज्यखण्ड	वृत्तखण्ड

सर्वांगसम वृत्त (Congruent circles)



आकृति–14



आकृति–15

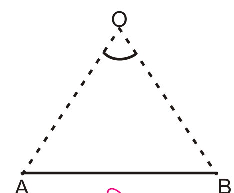
हमने देखा था कि ऐसी दो आकृतियाँ जो एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेती हैं सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती हैं।

अगर हम बराबर त्रिज्या के दो वृत्त लें जिनके केन्द्र O_1 व O_2 हों। पुनः O_1 केन्द्र वाले वृत्त में एक व्यास AB तथा O_2 केन्द्र वाले वृत्त में व्यास CD लें। (आकृति–14,15)

एक वृत्त को दूसरे वृत्त पर इस प्रकार रखें कि केन्द्र O_1 केन्द्र O_2 पर पड़े तथा व्यास AB के अंत बिन्दु A व B क्रमशः बिन्दु C व बिन्दु D पर पड़ें। आप देख सकते हैं कि एक वृत्त दूसरे वृत्त को पूर्णतया ढँक लेता है अतः हम कह सकते हैं कि लिए गए दोनों वृत्त सर्वांगसम हैं। इस गतिविधि को बराबर त्रिज्या के अन्य वृत्त खींचकर दोहराएँ।

आप पाएँगे कि बराबर त्रिज्याओं वाले वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

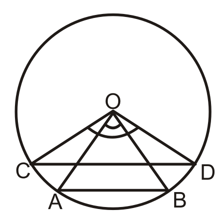
जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण



आकृति–16

एक रेखाखण्ड AB तथा एक बिंदु O जो रेखाखण्ड में नहीं है, दिए गए हैं। (आकृति–16)

O को A और B से मिलाइए। $\angle AOB$, रेखाखण्ड AB द्वारा बिन्दु O पर अंतरित कोण कहलाता है।



आकृति–17

एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा दो जीवाएँ AB और CD हैं। (आकृति–17) जीवा AB तथा CD द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण क्रमशः $\angle AOB$ तथा $\angle COD$ हैं। क्या आप बता सकते हैं $\angle AOB$ और $\angle COD$ में कौन सा कोण बड़ा है? क्या आप जीवा की लंबाई तथा जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण में कोई संबंध देख पाते है? आप कह सकते हैं कि जीवा की लंबाई अधिक होगी तो केन्द्र पर बना कोण भी अधिक होगा।

करके देखें

5 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त खींचें। वृत्त में 3, 5., 8., 10 तथा 6 सेमी. लंबाई की दो–दो जीवाएँ खींचें। चाँदे की सहायता से इन जीवाओं द्वारा केन्द्र पर बने कोणों की माप करें और दी गई तालिका में लिखें।

जीवा की लंबाई	3 सेमी.	5 सेमी.	6 सेमी.	8 सेमी.	10 सेमी.
कोण					

उपरोक्त तालिका को पूर्ण करने पर आप पाएँगे कि एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

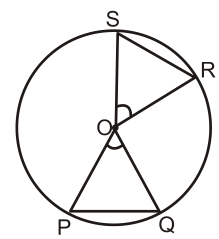
वृत्त के कुछ प्रमेय

हमने ज्यामितीय कथनों को सिद्ध करना सीखा है। अब हम वृत्त के बारे में कुछ कथनों को जो उसके गुण बताते हैं सिद्ध करने के तरीके देखेंगे। पहला कथन हम वही लेते हैं जो हमने ऊपर देखा। किसी वृत्त में बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

प्रमेय – 1

कथन – किसी वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

ज्ञात है – एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। इसकी दो बराबर जीवाएँ PQ और RS हैं।



अकृति–18

सिद्ध करना है – $\angle POQ = \angle ROS$

उपपत्ति – ΔPOQ तथा ΔROS में

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OQ = OS$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$PQ = RS$ (ज्ञात है)

अतः $\Delta POQ \cong \Delta ROS$ (भु.भु.भु. सर्वांगसमता)

$\therefore$ $\angle POQ = \angle ROS$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

FDKES8

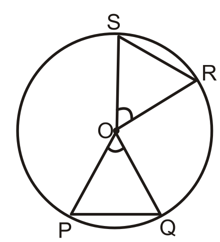
क्या इस कथन का विलोम भी सत्य है, अर्थात् यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं। आइए इस कथन को सिद्ध करके देखते हैं।

प्रमेय – 2

कथन – यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।

ज्ञात है – एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। इसकी दो जीवाएँ PQ और RS हैं तथा $\angle POQ = \angle ROS$

सिद्ध करना है – $PQ = RS$



आकृति–19

उपपत्ति – ΔPOQ तथा ΔROS में,

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OQ = OS$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle POQ = \angle ROS$ (दिया है)

अतः $\Delta POQ \cong \Delta ROS$ (भु.को.भु. सर्वांगसमता)

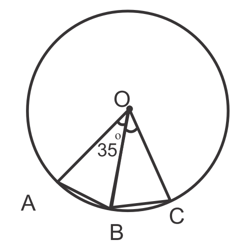
$\therefore$ $PQ = RS$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोमतः यदि दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनके संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।

उदाहरणः–1. आकृति–20 में जीवा AB और BC बराबर हैं तथा $\angle AOB = 35°$ है तो $\angle AOC$ ज्ञात कीजिए।

हलः– $\angle AOB = \angle BOC$ (वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।)

$\angle BOC = 35°$ ($\angle AOB = 35°$ दिया है।)



आकृति–20

अतः $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$

$= 35° + 35°$

$= 70°$

$\therefore$ $\angle AOC = 70°$

उदाहरणः–2. एक वृत्त के अन्तर्गत समपंचभुज खींचा गया है। समपंचभुज की प्रत्येक भुजा केन्द्र पर कितने अंश का कोण बनाएगी?

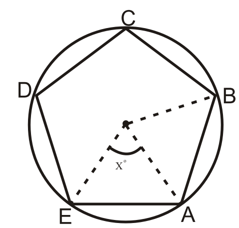
हलः– समपंचभुज की पाँचों भुजाएँ बराबर होती हैं अतः वे वृत्त के केन्द्र पर बराबर कोण बनाती हैं।

माना समपंचभुज की प्रत्येक भुजा केन्द्र पर $x°$ का कोण बनाती है।

अतः $5x° = 360°$ (क्यों?)

$$x° = \frac{360°}{5}$$

$\therefore$ $x° = 72°$



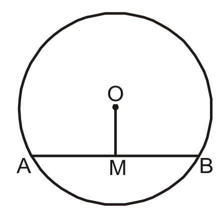
आकृति–21

करके देखें

1. एक वृत्त के अंतर्गत समबहुभुज खींचा गया है। समबहुभुज की प्रत्येक भुजा केंद्र पर $60°$ का कोण अंतरित करती है तो समबहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

केन्द्र से जीवा पर लंब

कागज पर एक वृत्त खींचिए। इसका केन्द्र O तथा AB इसकी एक जीवा है। केन्द्र से जीवा AB पर लंब डालिए (आकृति 22) जो AB से M पर मिलता हो। AM और BM के बारे में आप क्या कह सकते हैं?



आकृति–22

क्या वे बराबर हैं ? कैसे पता करेंगे ? यहाँ हम गणित के कौन से तर्कों का प्रयोग करें? क्या हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता का प्रयोग कर सकते हैं ?

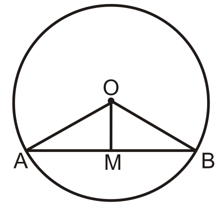
प्रमेय – 3

कथन – किसी वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

ज्ञात है – एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा AB उसकी एक जीवा है तथा $OM \perp AB$

सिद्ध करना है – $AM = MB$

रचना – O को A और B से मिलाइए



आकृति–23

उपपत्ति – ΔOMA तथा ΔOBM में,

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle OMA = \angle OMB$ (समकोण हैं)

$\Delta OMA \cong \Delta OMB$ (समकोण–कर्ण भुजा सर्वांगसमता से)

अत : $AM = MB$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

इस प्रमेय का विलोम क्या है ? क्या वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लंब होती है?

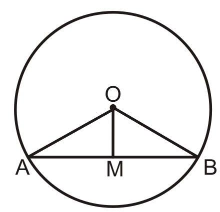
प्रमेय – 4

कथन – एक वृत्त के केन्द्र और जीवा के मध्य बिंदु को मिलाने वाला रेखाखंड जीवा पर लंब होता है।

ज्ञात है – एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। AB उसकी एक जीवा है तथा M जीवा का मध्य बिंदु है।

सिद्ध करना है – $OM \perp AB$

रचना – O को A और B से मिलाइए।



आकृति–24

उपपत्ति – ΔOMA तथा ΔOMB में

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$AM = MB$ (दिया है)

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\Delta OMA \cong \Delta OMB$ (भु.भु.भु. सर्वांगसमता)

अत : $\angle OMA = \angle OMB$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

$\angle OMA + \angle OMB = 180°$ (रेखीय युग्म अभिगृहीत)

$\angle OMA + \angle OMA = 180°$ $(\angle OMA = \angle OMB)$

$2\angle OMA = 180°$

$\angle OMA = 90°$

अत : $OM \perp AB$

आइए अब हम वृत्त के इन गुणों का उपयोग कर कुछ उदाहरण हल करते हैं।

उदाहरण:–3. एक वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. है तो केन्द्र से 3 सेमी. की दूरी पर स्थित जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल:– ΔOAC में $OA = 5$ सेमी., $OC = 3$ सेमी. है।

पाइथागोरस प्रमेय से

$OA^2 = OC^2 + AC^2$

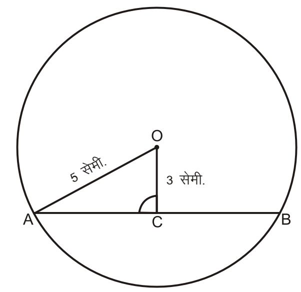
$5^2 = 3^2 + AC^2$

$AC^2 = 5^2 - 3^2$

$AC^2 = 25 - 9$

$AC^2 = 16$

$AC = 4$



आकृति–25

अतः जीवा $AB = 2 \times AC = 8$ सेमी.

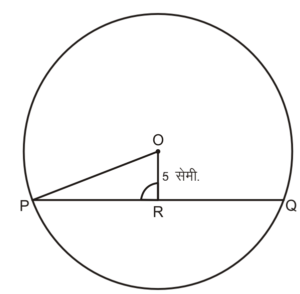
उदाहरणः–4. किसी वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी. की दूरी पर स्थित जीवा की माप 24 सेमी. है। वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।

हलः– $OR = 5$ सेमी., जीवा $PQ = 24$ सेमी.

$PR = \frac{1}{2} PQ$ सेमी.

$= \frac{1}{2} \times 24$

$= 12$ सेमी.



आकृति–26

ΔOPR में पाइथागोरस प्रमेय से,

$OP^2 = PR^2 + OR^2$

$= 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25$

$= 169$

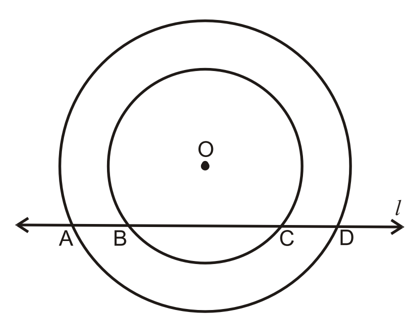
$OP = 13$

अतः वृत्त का व्यास $= 2 \times OP$

$= 2 \times 13$

$= 26$ सेमी.

उदाहरणः–5. एक रेखा l दो संकेन्द्रीय वृत्तों (एक ही केन्द्र वाले वृत्त), को A, B, C और D बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति–27)। यदि $AD = 18$ सेमी. तथा $BC = 8$ सेमी. हो तो AB का मान ज्ञात कीजिए। वृत्तों का केन्द्र O है।



आकृति–27

हलः– केन्द्र O से रेखा l पर लंब OM खींचिए (देखिए आकृति–28)।

$OM \perp BC$

$\therefore \quad BM = MC \quad \ldots\ldots (i)$

$BM + MC = BC$

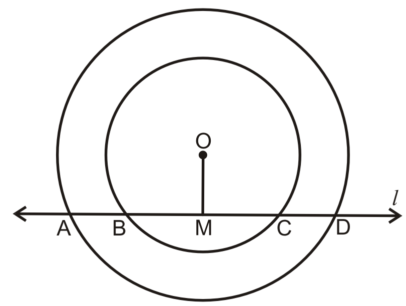
$BM + BM = 8$

$2BM = 8$

$BM = 4$ सेमी.

इसी प्रकार $\quad OM \perp AD$

$AM = MD \quad \ldots\ldots (ii)$



आकृति–28

$AM + MD = AD$

$2AM = 18$

$AM = 9$ सेमी.

अतः $\quad AB = AM - BM$

$= 9 - 4$

$= 5$ सेमी.

उदाहरण–6. एक वृत्त की दो जीवाएँ PQ और RS समान्तर हैं और AB, जीवा PQ का लम्ब समद्विभाजक है। सिद्व कीजिए कि AB जीवा RS को भी समद्विभाजित करती है।

हलः– हम जानते हैं कि वृत्त की जीवा का लम्बार्द्धक वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

AB जीवा PQ का लम्ब समद्विभाजक है।

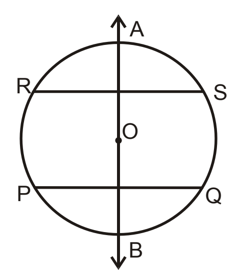
$\therefore$ AB वृत्त के केन्द्र से होकर जाएगा।

$AB \perp PQ$ और $PQ \parallel RS \Rightarrow AB \perp RS$

अतः $AB \perp RS$ और AB वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

$\therefore$ AB जीवा RS का भी लंब समद्विभाजक होगा।

अतः AB जीवा RS को भी समद्विभाजित करेगा।



आकृति–29

करके देखें

$5x$ त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से $6x$ लंबाई की जीवा पर डाले गए लंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 1

1. वृत्त की जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए, यदि

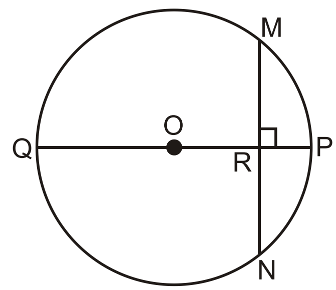
   (i) त्रिज्या = 13 सेमी. तथा जीवा की केन्द्र से दूरी = 12 सेमी.

   (ii) त्रिज्या = 15 सेमी. तथा जीवा की केन्द्र से दूरी = 9 सेमी.

2. वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए यदि जीवा की लंबाई तथा केन्द्र से दूरी क्रमशः

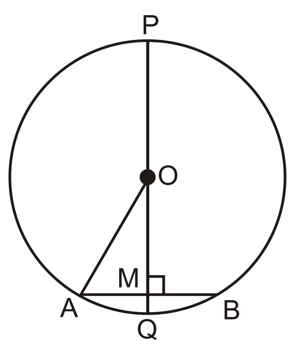
   (i) 8 सेमी. और 3 सेमी. (ii) 14 सेमी. और 24 सेमी.

3. आकृति–30 में, PQ वृत्त का व्यास है। $MN \perp PQ$ तथा PQ=10 सेमी. और PR=2सेमी. है तो MN की लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति–30

4. आकृति–31 में जीवा AB= 18सेमी. है तथा PQ, जीवा AB की लंबसमद्विभाजक है जो जीवा को M बिंदु पर मिलती है, यदि MQ=3 सेमी. हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



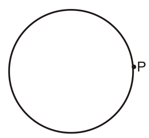
आकृति–31

5. एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, की दो जीवाएँ PQ और QR हैं तथा $\angle PQO = \angle OQR = 55^\circ$ । सिद्ध कीजिए कि PQ=QR.

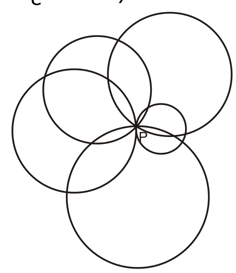
6. केन्द्र O वाले एक वृत्त में AB और AC दो समान जीवाएँ है। यदि $OD \perp AB$ और $OE \perp AC$ तो सिद्ध कीजिए कि ΔADE समद्विबाहु त्रिभुज है।

तीन असंरेख बिंदुओं से होकर जाने वाला वृत्त

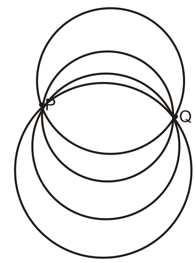
कागज पर एक बिंदु P लें। परकार की सहायता से एक वृत्त खींचें जो बिंदु P से होकर जाता है। क्या हम बिंदु P से होकर जाने वाला एक और वृत्त खींच सकते हैं? ऐसे कितने वृत्त खींचे जा सकते हैं ? (देखिए आकृति–33)।



आकृति–32



आकृति–33

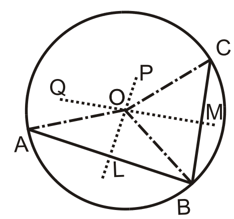


आकृति–34

आप देख सकते हैं कि ऐसे अनेक वृत्त खींचे जा सकते हैं। इसी तरह दो बिंदुओं P व Q से होकर जाने वाले अनेक वृत्त खींचे जा सकते हैं (देखिए आकृति–34)। क्या तीन असंरेख बिंदुओं P, Q व R से होकर जाने वाले अनेक वृत्त खींचे जा सकते हैं?

प्रमेय – 5

कथन – तीन असंरेख बिंदुओं से होकर एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।



आकृति–35

ज्ञात है – A, B और C तीन असंरेख बिंदु हैं।

सिद्ध करना है – A, B और C से एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।

रचना – बिंदु A को B से तथा B को C से मिलाइए। AB और BC के लम्बार्द्धक क्रमशः PL और QM खींचिए। माना PL और QM एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O को A,B और C से मिलाइए।

उपपत्ति – बिंदु O, AB के लम्बार्द्धक PL पर स्थित है।

$\therefore$ OA = OB ----- (i) (किसी रेखाखण्ड के लम्बार्द्धक में स्थित प्रत्येक बिंदु रेखाखण्ड के अंत बिंदुओं से समान दूरी पर होता है।)

इसी प्रकार O, BC के लंबार्द्धक MQ पर स्थित है।

$\therefore$ OB = OC ----- (ii)

OA = OB = OC = r (माना) (PL और QM एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करेंगे।) O एकमात्र बिंदु है जो A, B और C से समान दूरी पर होगा।

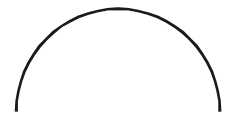
अतः तीन असंरेख बिंदुओं से एक और केवल एक वृत्त होकर जाता है।

हम इस तथ्य का उपयोग त्रिभुज के तीनों शीर्ष से होकर एक वृत्त खींचने में करते हैं। इस वृत्त को त्रिभुज ABC का परिवृत्त और इसके केन्द्र को त्रिभुज का परिकेन्द्र कहा जाता है।

करके देखें

एक वृत्त का चाप दिया गया है (देखिए आकृति–36)।

वृत्त का केन्द्र ज्ञात कर वृत्त को पूरा कीजिए।



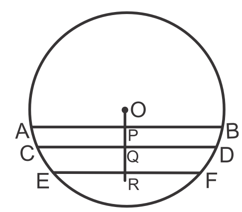
आकृति–36

सोचें व चर्चा करें

क्या तीन संरेख बिंदुओं से होकर जाने वाला कोई वृत्त खींचा जा सकता है?

जीवाएँ और केन्द्र से उनकी दूरियाँ

एक वृत्त में असंख्य जीवाएँ होती हैं। किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर एक दूसरे के समान्तर जीवाएँ खींचिए (देखिए आकृति–37)। क्या आप जीवा की लंबाई तथा जीवा की केन्द्र से दूरी में कोई सम्बन्ध देखते हैं? दी गई आकृति में जीवा AB, CD व EF को केन्द्र से दूरी के घटते क्रम में लिखिए। आप देखेंगे कि जीवा की लंबाई बढ़ते जाने पर उसकी केन्द्र से दूरी कम होती जाती है। व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है। उसकी केन्द्र से दूरी शून्य है। क्या एक वृत्त पर बराबर जीवाएँ लें तो उनकी केन्द्र से दूरी समान होगी? आइए अब हम इस कथन की सत्यता की जाँच करते हैं।

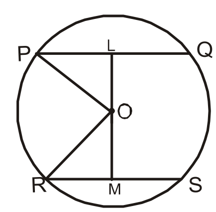


आकृति–37

प्रमेय – 6

कथन – किसी वृत्त (अथवा सर्वांगसम वृत्तों) की बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी पर होती हैं।

ज्ञात है – वृत्त में PQ और RS दो समान जीवाएँ हैं तथा O से PQ और RS पर क्रमशः OL और OM लंब डाला गया है।



आकृति–38

सिद्ध करना है – $OL = OM$

रचना – O को P तथा R से मिलाइए।

उपपत्ति – $PQ = RS$ (ज्ञात है)

$\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}RS$

$PL = RM$ (केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समान भागों में बाँटता है।)

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्या)

$\angle OLP = \angle OMR = 90°$ (रचना से)

$\Delta OLP \cong \Delta OMR$ (R.H.S सर्वांगसमता प्रमेय से)

$\therefore \quad OL = OM$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

करके देखें

एक वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएँ लंबाई में बराबर होती हैं। उपपत्ति दें।

आइए अब हम उपरोक्त परिणामों का उपयोग कर कुछ उदाहरण हल करते हैं –

उदाहरणः–7. एक वृत्त की त्रिज्या 20 सेमी. है। दो बराबर और समांतर जीवाओं के बीच की दूरी 24 सेमी. है। जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः–

$OM = ON$ ---- (i) (बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं।)

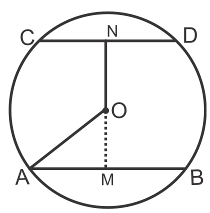
$MN = OM + ON$

$MN = OM + OM$ (i) से

$24 = 2\ OM$

$OM = 12$ सेमी.

$OA = 20$ सेमी.



आकृति–39

ΔOAM में,

$OA^2 = OM^2 + AM^2$

$AM^2 = OA^2 - OM^2$

$= 20^2 - 12^2$

$= 400 - 144$

$= 256$

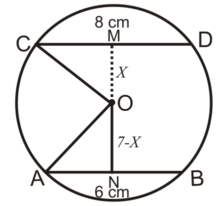
$AM = 16$

अतः जीवा की लंबाई $AB = 2 \times AM$

$= 2 \times 16$

$= 32$ सेमी.

उदाहरणः–8. एक वृत्त की 6 सेमी. तथा 8 सेमी. लंबी दो जीवाएँ AB और CD समांतर हैं और केन्द्र की विपरीत दिशा में स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच की दूरी 7 सेमी. हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



आकृति–40

हलः– यहाँ $AB = 6$ सेमी.

$$AN = \frac{1}{2}AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 6$$

$AN = 3$ सेमी.

(केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।)

इसी प्रकार $CD = 8$ सेमी

$$CM = \frac{1}{2}CD$$

$= \frac{1}{2} \times 8 = 4$ सेमी.

ΔOAN में

$$OA^2 = ON^2 + AN^2$$

$OA^2 = (7 - x)^2 + 3^2$ ($\because$ MN=7CM, माना OM=x तब ON=7-x)

ΔOCM में,

$$OC^2 = OM^2 + CM^2$$

$$OC^2 = x^2 + 4^2$$

$\because$ $OA = OC$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\therefore$ $OA^2 = OC^2$

अतः $(7 - x)^2 + 3^2 = x^2 + 4^2$

$$x^2 - 14x + 58 = x^2 + 16$$

$$-14x = 16 - 58$$

$$14x = 42$$

$x = 3$ सेमी.

अतः वृत्त की त्रिज्या

$$OA^2 = (7 - x)^2 + 3^2$$

$$= (7 - 3)^2 + 3^2$$

$$= 16 + 9$$

$$= 25$$

$OA = 5$ सेमी.

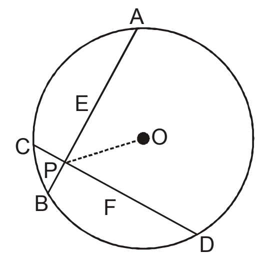
वृत्त की त्रिज्या $OA = 5$ सेमी.

प्रश्नावली 2

1. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि वृत्त का केन्द्र $\angle BAC$ के समद्विभाजक पर स्थित है।

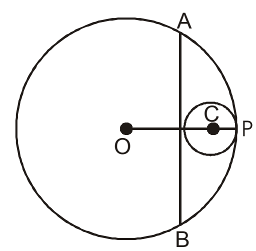
2. 10 सेमी. और 24 सेमी. की दो समांतर जीवाएँ वृत्त के केन्द्र के विपरीत ओर हैं। जीवाओं के बीच की दूरी 17 सेमी. है। वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।

3. एक वृत्त का केन्द्र O है तथा $\angle APD$ का कोण समद्विभाजक PO है (देखिए आकृति–41)। सिद्ध कीजिए AB=CD.



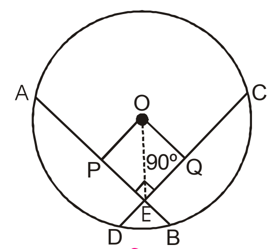
आकृति–41

4. दो वृत्त हैं जिनका केन्द्र O और C है तथा त्रिज्या क्रमशः 13 सेमी. और 3 सेमी. है (देखिए आकृति–42)। यदि OC का लंबसमद्विभाजक, बड़े वृत्त को A और B पर मिलता है तो ABकी लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति–42

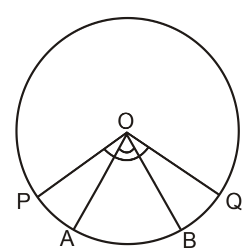
5. आकृति–43 में केन्द्र O वाले एक वृत्त में AB और CD दो समान जीवाएँ बिंदु E पर समकोण पर मिलती है। यदि Pऔर Q जीवा AB और CD के मध्य बिंदु हों तो सिद्ध कीजिए कि OPEQ एक वर्ग है।



आकृति–43

वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण –

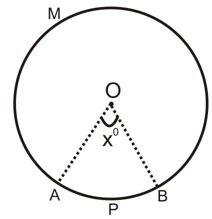
वृत्त पर कोई दो बिन्दु A और B हों तो वृत्त दो चापों में बँट जाता है । लघु चाप AB के अंत बिंदु A और B को केन्द्र O से मिलाइए। चाप AB के द्वारा केन्द्र पर बना $\angle AOB$ केन्द्रीय कोण कहलाता है। पुनः वृत्त पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार लेते हैं कि उनसे बने लघु चाप PQ की लंबाई, लघु चाप AB से अधिक हो तथा वह केंद्र O पर $\angle POQ$ बनाता हो (देखिए आकृति–44)। क्या चाप की लंबाई तथा चाप द्वारा केन्द्र पर बनाए गए कोण में कोई संबंध देख पा रहे हैं? आकृति–44 में आप देख सकते हैं कि चाप की लंबाई अधिक होने पर केन्द्र में बना कोण भी अधिक होता है।



आकृति–44

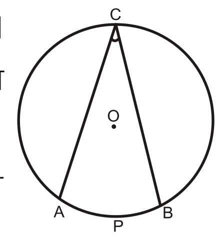
सोचें एवं चर्चा करें

एक वृत्त के लघुचाप APB का अंश माप (आकृति–45) x° हो तो दीर्घ चाप AMB का अंश माप $(360^\circ - x^\circ)$ होता है। क्यों?



आकृति–45

वृत्त के चाप के अंत बिंदुओं को वृत्त की शेष परिधि में स्थित किसी बिंदु से मिलाइए। जैसे आकृति–46 में दिखाया गया है तब $\angle ACB$ चाप APB द्वारा परिधि के C बिंदु पर बनाया गया कोण कहलाता है।



आकृति–46

आइए अब हम एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण तथा वृत्त के परिधि के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण में संबंध देखते हैं।

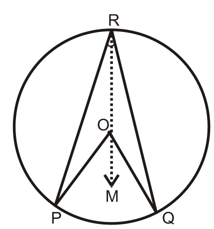
प्रमेय – 7

कथन – वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण, वृत्त के परिधि के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

ज्ञात है – वृत्त के एक चाप PQ द्वारा केन्द्र पर बना कोण $\angle POQ$ और शेष परिधि के R बिंदु पर बना कोण $\angle PRQ$ है।

सिद्ध करना है – $\angle POQ = 2\angle PRQ$

रचना – बिंदु R को केन्द्र O से मिलाते हुए M तक आगे बढ़ाया।



आकृति–47

उपपत्ति –

ΔPOR में,

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OPR = \angle ORP$ (त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

$\angle POM = \angle OPR + \angle ORP$ (बहिष्कोण प्रमेय)

$\angle POM = 2\angle ORP$ ....(1)

ΔQOR में,

$OQ = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OQR = \angle ORQ$ (त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\angle QOM = \angle ORQ + \angle OQR$ (बहिष्कोण प्रमेय)

$\angle QOM = 2\angle ORQ$ ....(2)

अतः $\angle POM + \angle QOM = 2\angle ORP + 2\angle ORQ$ ....(1) व (2) को जोड़ने पर

$$\angle POQ = 2(\angle ORP + \angle ORQ)$$

$$\angle POQ = 2\angle PRQ$$

आइए अब हम प्रमेय (7) की एक स्थिति पर विचार करते हैं जब चाप एक अर्द्धवृत्त हो।

प्रमेय – 8

कथन – वृत्त की परिधि के किसी बिंदु पर व्यास द्वारा अंतरित कोण समकोण होता है।

ज्ञात है – वृत्त पर व्यास द्वारा अंतरित कोण $\angle LNM$ है।

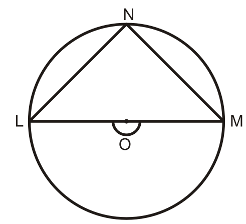
सिद्ध करना है – $\angle LNM = 90°$

उपपत्ति – $\angle LOM = 180°$ (सरल रेखा)

$\angle LOM = 2\angle LNM$ (प्रमेय 7 से)

$\therefore$ $2\angle LNM = 180°$

या $\angle LNM = \frac{180°}{2} = 90°$



आकृति–48

अतः हम कह सकते हैं कि एक वृत्त की परिधि के किसी बिंदु पर व्यास द्वारा अंतरित कोण समकोण होता है।

उदाहरणः–9. आकृति–49 में O वृत्त का केन्द्र तथा $\angle OPR = 30°$ तथा $\angle OQR = 40°$ है। तब $\angle POQ$ ज्ञात कीजिए।

हलः– ΔPOQ में,

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

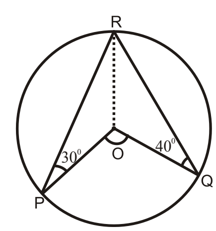
$\therefore$ $\angle OPR = \angle ORP = 30°$ (समद्विबाहु त्रिभुज के कोण)

इसी प्रकार ΔOQR में,

$\angle OQR = \angle ORQ = 40°$

अतः $\angle PRQ = \angle ORP + \angle ORQ$

$= 30° + 40°$



आकृति–49

$\angle PRQ = 70°$

$\therefore$ $\angle POQ = 2\angle PRQ$ (केन्द्र पर बना कोण शेष खण्ड में बने कोण का दुगुना होता है।)

$\angle POQ = 2 \times 70° = 140°$

उदाहरणः–10. आकृति–50 में AB वृत्त का व्यास और O केन्द्र है। यदि $\angle OAP = 50°$ तो

$\angle OPB$ ज्ञात कीजिए।

हल:– ΔAOP में

$OA = OP$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

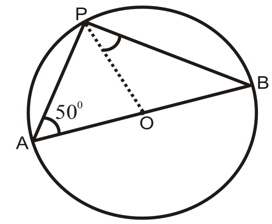
$\therefore \quad \angle OAP = \angle OPA = 50°$

$\angle APB = 90°$ (व्यास द्वारा अंतरित कोण)

अत: $\angle APB = \angle OPA + \angle OPB$

$90° = 50° + \angle OPB$

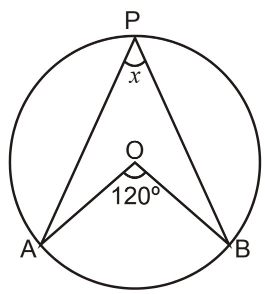
$\therefore \quad \angle OPB = 40°$



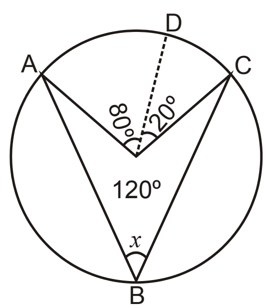
आकृति–50

करके देखें

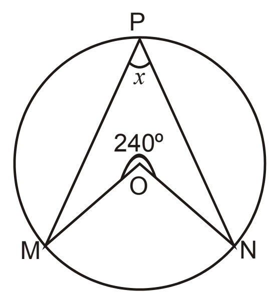
दी गई आकृतियों में x का मान ज्ञात कीजिए



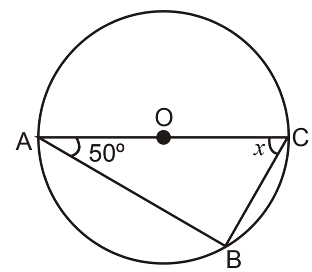
आकृति–51



आकृति–52



आकृति–53



आकृति–54

आइए अब हम वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोणों के बीच संबंध देखते हैं।

प्रमेय – 9

कथन – वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण आपस में बराबर होते हैं।

ज्ञात है – वृत्त का केन्द्र O, वृत्त के एक ही खण्ड में बने $\angle ACB$ और $\angle ADB$ हैं

सिद्ध करना है – $\angle ACB = \angle ADB$

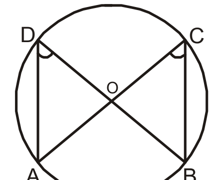
उपपत्ति – $\angle AOB = 2\angle ACB$ (चूंकि वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त की परिधि के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।)

$\angle AOB = 2\angle ADB$

अत: $2\angle ACB = 2\angle ADB$

$\angle ACB = \angle ADB$

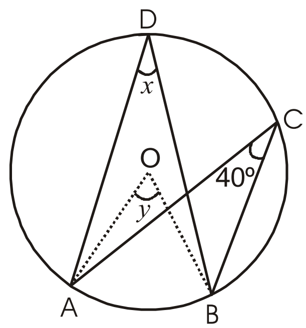
अत: हम कह सकते हैं कि वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण आपस में बराबर होते हैं।



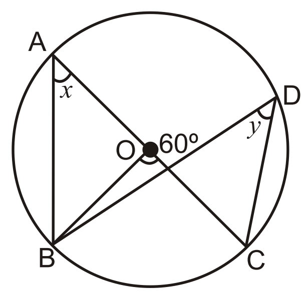
आकृति–55

करके देखें

दी गई आकृति में x और y का मान ज्ञात कीजिए



आकृति–56



आकृति–57

उदाहरणः–11. आकृति–58 में $\angle CAB = 25°$ और $\angle ADB = 35°$ हैं। तब $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए।

हलः– यहाँ आकृति में $\angle ADB = \angle ACB$ (एक ही वृत्तखण्ड के कोण)

$\therefore \quad \angle ACB = 35°$

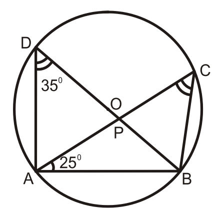
ΔABC में,

$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180°$

$\angle ABC + 35° + 25° = 180°$

$\angle ABC = 180° - 60°$

$\angle ABC = 120°$



आकृति–58

उदाहरणः–12. सिद्ध कीजिए कि समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं में से किसी एक भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त त्रिभुज के आधार को समद्विभाजित करता है।

हलः– ΔABC में $AB = AC$ तथा AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त BC को बिंदु D पर काटता है।

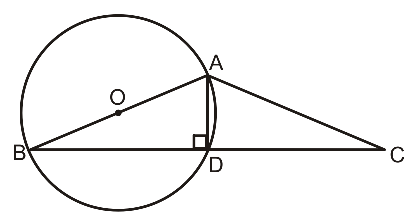
चूँकि वृत्त पर व्यास द्वारा बना कोण समकोण होता है।

$\therefore \quad \angle ADB = 90°$

परन्तु $\quad \angle ADB + \angle ADC = 180°$

$90° + \angle ADC = 180°$

$\angle ADC = 90°$



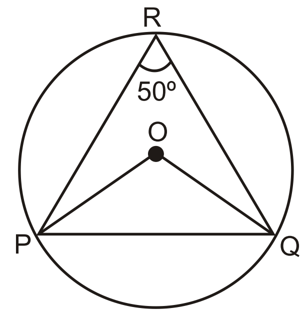
आकृति–59

ΔADB और ΔADC में,

	$AB = AC$	(दिया है)
	$AD = AD$	(उभयनिष्ठ भुजा)
और	$\angle ADB = \angle ADC = 90°$	
$\therefore$	$\Delta ADB \cong \Delta ADC$	(समकोण–कर्ण–भुजा सर्वांगसमता)
	$BD = DC$	

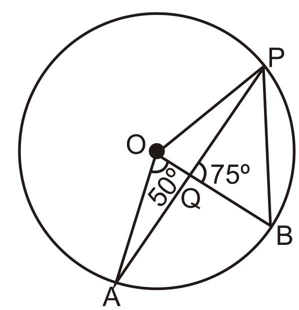
प्रश्नावली 3

1. आकृति–59 में, O वृत्त का केन्द्र है, PQ एक जीवा है। यदि $\angle PRQ = 50°$ हो तो $\angle OPQ$ ज्ञात कीजिए।



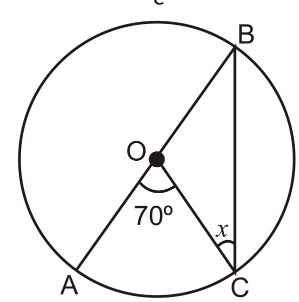
आकृति–60

2. आकृति में $\angle PBO$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $\angle AOB = 50°$ तथा $\angle PQB = 75°$ है।



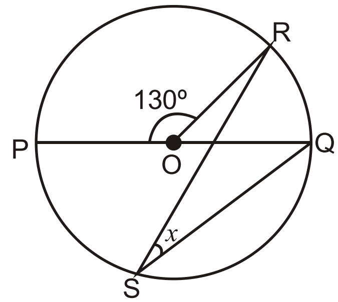
आकृति–61

3. आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए। O वृत्त का केन्द्र है।



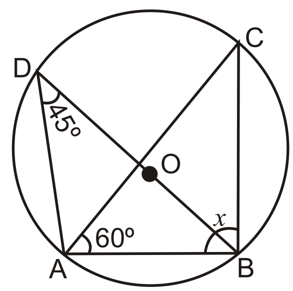
आकृति–62

4. यदि O वृत्त का केन्द्र है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



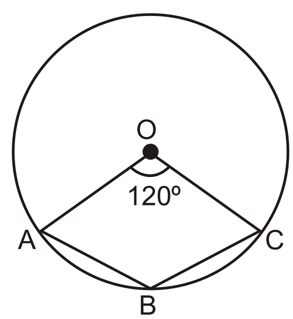
आकृति–63

5. यदि O वृत्त का केन्द्र है तो दी गई आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए।



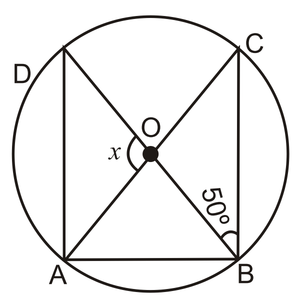
आकृति–64

6. आकृति में $\angle ABC$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति–65

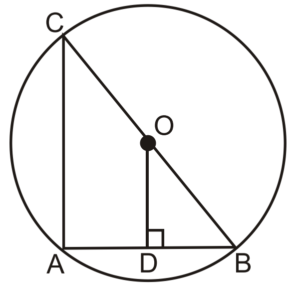
7. आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $AD \parallel BC$.



आकृति–66

8- आकृति में, O वृत्त का केन्द्र तथा $OD \perp AB$ यदि OD=5 सेमी. हो तो AC का मान

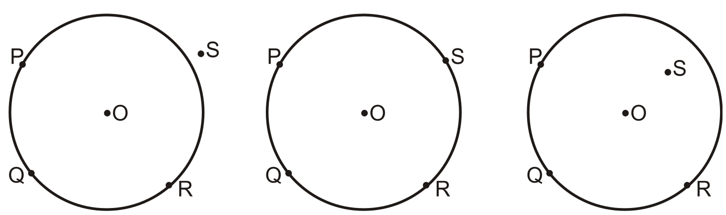
ज्ञात कीजिए।



आकृति–67

चक्रीय चतुर्भुज

आपने देखा है कि तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है। क्या हम चार असंरेख बिंदुओं (जिनमें कोई तीन बिंदु संरेख नहीं हैं) को लेकर एक वृत्त खींच सकते हैं? कोई तीन असंरेख बिंदु P, Q, R लेकर एक वृत्त खींचने पर हमें चौथे बिंदु S की स्थिति निम्न प्रकार प्राप्त हो सकती है।

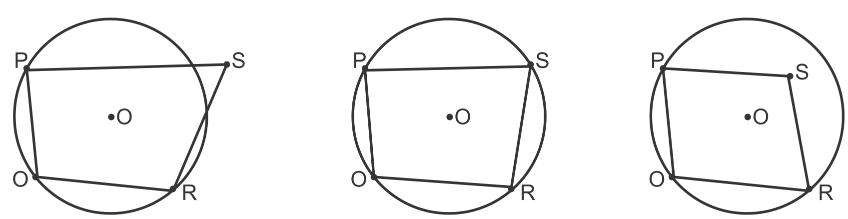


स्थिति I   स्थिति II   स्थिति III

आकृति–68

स्थिति I में बिंदु S वृत्त के बाह्य भाग में, स्थिति II में वृत्त पर तथा स्थिति III में वृत्त के अन्तः भाग में स्थित है। अतः हम कह सकते हैं कि चार असंरेख बिंदु से होकर एक वृत्त खींचने पर चारों बिंदु एक वृत्त में हो सकते हैं और नहीं भी।

उपरोक्त आकृति में बिंदु P, Q, R, S को मिलाने पर चतुर्भुज प्राप्त होगा। (देखिए आकृति–69)



स्थिति I   स्थिति II   स्थिति III

आकृति–69

स्थिति II में प्राप्त चतुर्भुज PQRS के चारों शीर्ष वृत्त पर स्थित हैं। यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं तो वह चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है। क्या इस चतुर्भुज का कोई विशेष गुण होता है जो अन्य चतुर्भुज में सामान्यतः नहीं होता है?

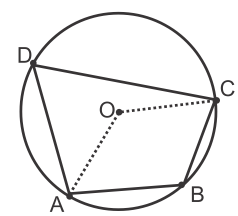
करके देखें

किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर कोई चार बिंदु लेकर चतुर्भुज बनाइए। उनके सम्मुख कोणों को माप कर उनका योगफल ज्ञात कीजिए।

आप पाएँगे कि ऐसा चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष वृत्त पर हो उनके सम्मुख कोणों का योगफल $180°$ होता है।

आइए अब हम उपरोक्त कथन का तार्किक रुप ज्ञात करेंगे।

प्रमेय – 10



आकृति–70

कथन – चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल $180°$ होता है।

ज्ञात है – ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है – $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

रचना – O से A और C को मिलाइए।

उपपत्ति – चाप ABC का केन्द्र पर बना कोण $\angle AOC = 2\angle ADC$ (i)

चाप CDA का केन्द्र पर बना कोण $\angle COA = 2\angle ABC$ (ii)

अतः $\angle AOC + \angle COA = 2(\angle ADC + \angle ABC)$

$$360° = 2(\angle D + \angle B)$$

$$\angle B + \angle D = \frac{360°}{2}$$

$$\angle B + \angle D = 180°$$

चतुर्भुज ABCD में,

$$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 360°$$

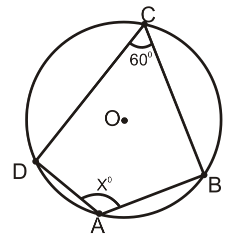
$$\angle A + \angle C + 180° = 360°$$

$$\angle A + \angle C = 180°$$

अतः हम कह सकते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल $180°$ होता है।

क्या इस कथन का विलोम भी सत्य है? हाँ, यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग $180°$ हो तो चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है, अर्थात् चतुर्भुज के चारों शीर्ष से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

उदाहरणः—13. दी गई आकृति—71 में x का मान ज्ञात कीजिए।



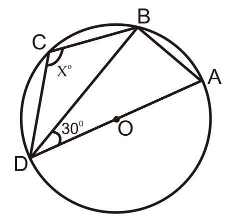
आकृति—71

हलः— $\angle A + \angle C = 180^o$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180^o होता है।)

$x + 60^o = 180^o$

$x = 120^o$

उदाहरणः—14. दी गई आकृति—72 में x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति—72

हलः— $\angle ABD = 90^o$ (वृत्त पर व्यास द्वारा बना कोण)

$\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB = 180^o$

$90^o + 30^o + \angle DAB = 180^o$

$\angle DAB = 180^o - 120^o$

$\angle DAB = 60^o$

$\angle DCB + \angle DAB = 180^o$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग)

$x + 60^o = 180^o$

$x = 120^o$

उदाहरणः—15. त्रिभुज ABC के भुजा BC पर बिंदु P इस प्रकार स्थित है कि AB=AP। बिंदु A और C से क्रमशः BC और PA के समांतर रेखाएँ खींचे जो बिंदु D पर मिलें (देखिए आकृति—73)। सिद्ध कीजिए कि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

आकृति—73

हलः— ΔABP में

AB=AP (दिया है)

अतः $\angle ABP = \angle APB$

(समान भुजा के सम्मुख कोण)

AP || CD तथा AD || BC (दिया है)

अतः APCD एक समांतर चतुर्भुज है।

$\angle APC = \angle ADC$

(समांतर चतुर्भज के सम्मुख कोण)

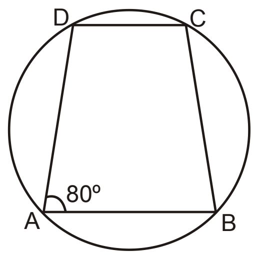
चूंकि $\angle APB + \angle APC = 180^o$ (रेखीय युग्म अभिगृहीत से)

$\angle ABP + \angle ADC = 180^o$ ($\angle APB = \angle ABP$ और $\angle APC = \angle ADC$)

किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180^o हो तो चतुर्भुज, चक्रीय चतुर्भुज होता है।

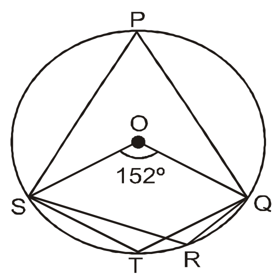
प्रश्नावली 4

1. दी गई आकृति में AB || CD यदि $\angle DAB = 80^o$ तो चतुर्भज के शेष अंतःकोणों का मान ज्ञात कीजिए।



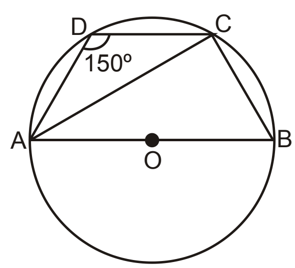
आकृति–74

2. दी गई आकृति में $\angle QRS$ तथा $\angle QTS$ ज्ञात कीजिए।



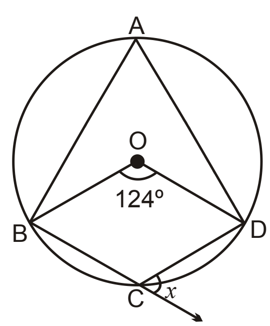
आकृति–75

3. दी गई आकृति में $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसकी भुजा AB वृत्त का व्यास है। यदि $\angle ADC = 150^o$ हो तो $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



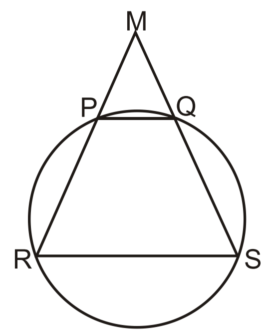
आकृति–76

4. दी गई आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए।



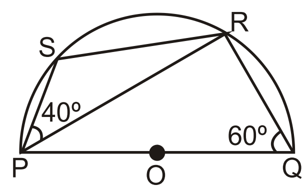
आकृति–77

5. एक वृत्त की दो समांतर जीवाएँ PQ और RS हैं तथा रेखाएँ RP और SQ , बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती हैं(देखिए आकृति–78)।
सिद्ध कीजिए कि $MP = MQ$



आकृति–78

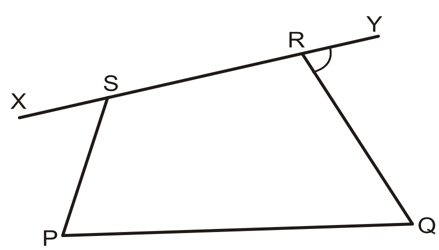
6. दी गई आकृति में PQ अर्द्धवृत्त का व्यास है। यदि $\angle PQR = 60^o$ तथा $\angle SPR = 40^o$ हो तो $\angle QPR$ और $\angle PRS$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति–79

7. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण वृत्त के व्यास हों तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत होगा।

8. आकृति–80 में PQRS एक चतुर्भुज है। यदि $\angle P = \angle QRY$ है तो सिद्ध कीजिए कि PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है।



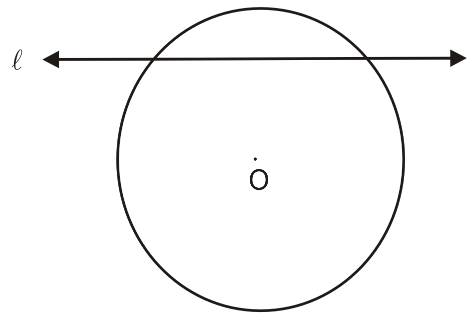
आकृति–80

9. यदि एक समलंब चतुर्भुज की असमान्तर भुजाएँ बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय चतुर्भुज होगा।

FE46VI

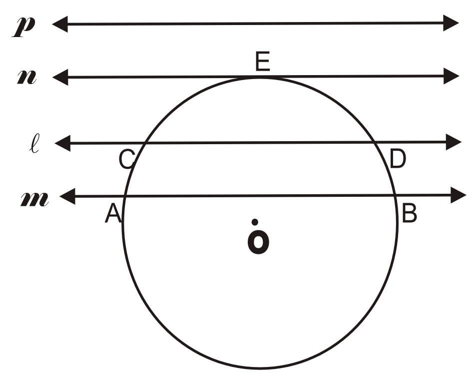
वृत्त की स्पर्श रेखाएँ और छेदक रेखाएँ

कागज पर किसी भी त्रिज्या का वृत्त तथा एक रेखा l लें जैसे आकृति–81 में दिखाया गया है। अब रेखा l के समान्तर कुछ रेखाएँ खींचिए।



आकृति–81

दी गई आकृति–82 में रेखा m और वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिंदु A, B हैं । इसी प्रकार रेखा l और वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिंदु C, D हैं। रेखा n और वृत्त में केवल एक ही उभयनिष्ठ बिंदु E है तथा रेखा p और वृत्त में कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है।

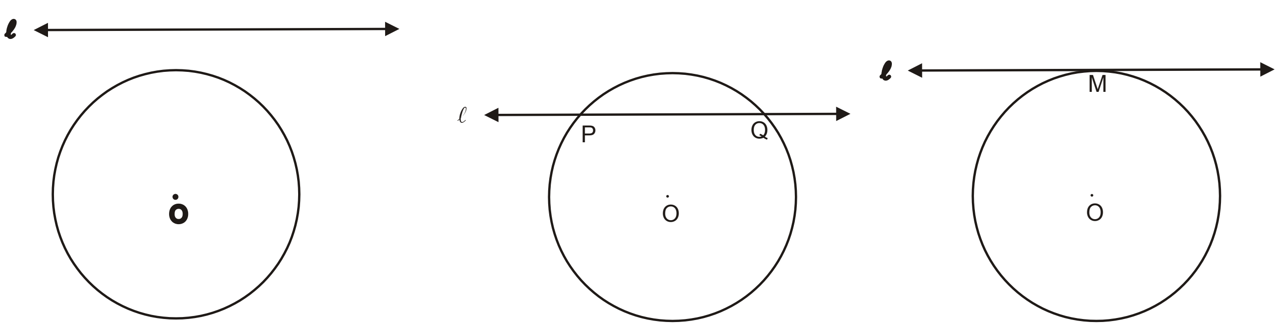


आकृति–82

हम देखते हैं कि कोई रेखा किसी वृत्त के सापेक्ष निम्न तीन स्थितियों में हो सकती है।

आकृति–83 (i) में रेखा l वृत्त को प्रतिच्छेद नहीं करती अर्थात् रेखा l व वृत्त का कोई भी उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है।

आकृति–83 (ii) में रेखा l वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है अर्थात् रेखा l और वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिंदु P और Q हैं। इस स्थिति में हम l को वृत्त की छेदक रेखा कहते हैं।



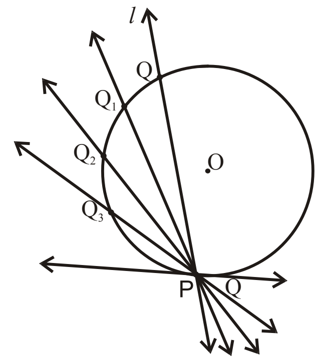
(i) (ii) (iii)

आकृति–83

आकृति–83 (iii) में रेखा l और वृत्त को एक बिंदु पर केवल स्पर्श करती है अर्थात् रेखा l और वृत्त में एक ही उभयनिष्ठ बिंदु M है। इसी स्थिति में हम रेखा l को वृत्त की स्पर्श रेखा तथा

उभयनिष्ठ बिंदु M को स्पर्श बिंदु कहते हैं।

आकृति–84 में रेखा l वृत्त को दो बिंदुओं P व Q पर प्रतिच्छेद कर रही है। रेखा l को बिंदु P पर स्थिर रखते हुए किसी आकृति–84 में रेखा l वृत्त को दो बिंदुओं P व Q पर प्रतिच्छेद कर रही है। रेखा l को बिंदु P पर स्थिर रखते हुए किसी भी एक दिशा में लगातार घुमाते जाने पर एक स्थिति ऐसी होगी कि प्रतिच्छेदी बिंदु, बिंदु P पर संपाती हो जाता है। इस स्थिति में छेदक रेखा को हम वृत्त की स्पर्श रेखा कहते हैं और बिंदु P को स्पर्श बिंदु।



आकृति–84

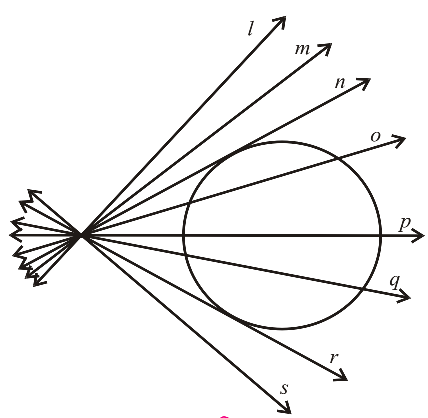
किसी वृत्त की स्पर्श रेखा, छेदक रेखा की एक विशिष्ट दशा है जब संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाएँ। अर्थात किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो वृत्त को एक बिंदु पर स्पर्श करती है।

सोचें व चर्चा करें

वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। क्यों?

करके देखें

नीचे दी गई आकृति में प्रतिच्छेदी रेखा, छेदक और स्पर्श रेखाओं को पहचान कर अपनी कापी में उनके नाम लिखें।



आकृति–85

स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिंदु से होकर जाती हुई त्रिज्या

एक बिंदु व एक रेखा के बीच की दूरी (जब बिंदु रेखा में न हो) न्यूनतम तब होती है जब वह लंबवत होती है। क्या स्पर्श बिंदु से केन्द्र की दूरी न्यूनतम होगी अर्थात् स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होगी?

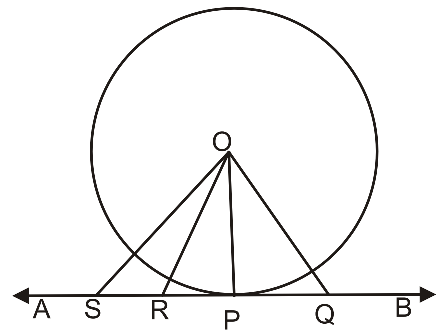
प्रमेय – 11

वृत्त की स्पर्श रेखा पर, स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या लंब होती है।

ज्ञात है – एक वृत्त का केन्द्र O है तथा स्पर्श रेखा AB स्पर्श बिंदु P पर वृत्त को स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है – $OP \perp AB$

रचना – AB पर P के अतिरिक्त अन्य बिंदु Q, R, S लीजिए और केन्द्र O से मिलाइए।



आकृति–86

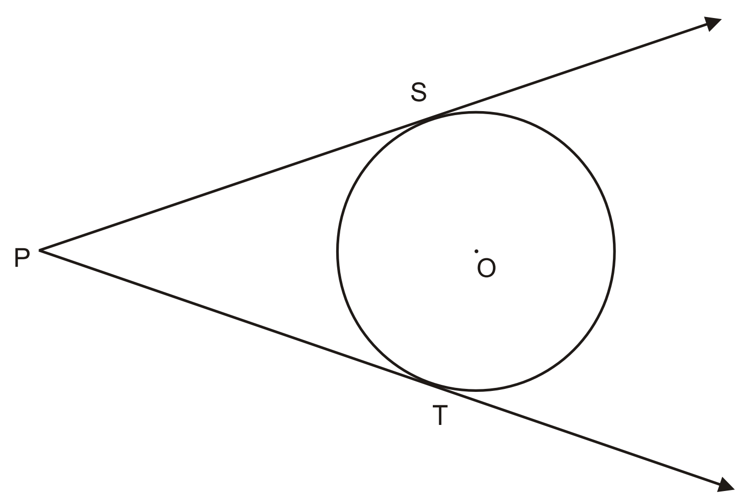
उपपत्ति – बिंदु Q, R, S वृत्त के बाहर स्थित हैं, वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु की केन्द्र से दूरी त्रिज्या से बड़ी होती है। अतः OP की लंबाई OQ, OR, OS में प्रत्येक से छोटी होगी। अतः दूरी OP, बिंदु O से AB के अन्य बिंदुओं से न्यूनतम दूरी पर है।

$\therefore OP \perp AB$

हम इस तथ्य का उपयोग वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचने में करते हैं जब हमें वृत्त का केन्द्र बिंदु ज्ञात हो।

वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाएँ–

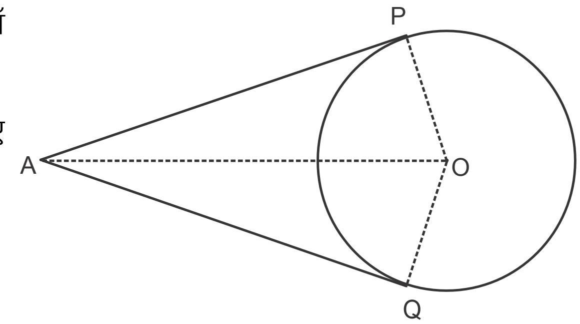
वृत्त के बाह्य भाग में एक बिंदु P लीजिए। वृत्त पर बिंदु P से स्पर्श रेखाएँ खींचने का प्रयत्न कीजिए (देखिए आकृति–87)। आप पाएँगे कि वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींच सकते हैं। बाह्य बिंदु P से वृत्त के स्पर्श बिंदु तक की दूरी को, स्पर्श रेखा की लंबाई कहते हैं। आकृति में क्या PS और PT में कोई संबंध है? PS और PT की लंबाइयाँ मापें। आप पाएँगे कि PS = PT । आइए इस तथ्य की पुष्टि के लिए उपपत्ति देखते हैं।



आकृति–87

प्रमेय – 12

बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।



आकृति–88

ज्ञात है – AP और AQ बाह्य बिंदु A से वृत्त पर खींचे गए दो स्पर्श रेखाखण्ड हैं।

सिद्ध करना है – $AP = AQ$

रचना – वृत्त के केन्द्र O से A ,P, Q को मिलाइए।

उपपत्ति – ΔOPA तथा ΔOQA में,

$OP = OQ$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ भुजाएँ)

$\angle APO = \angle AQO = 90°$ (स्पर्श बिंदु से जाती हुई त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लंब होती है।)

$\Delta OPA \cong \Delta OQA$ (समकोण–कर्ण–भुजा सर्वांगसमता)

अतः $AP = AQ$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

उपरोक्त प्रमेय की उपपत्ति में $\Delta OPA \cong \Delta OQA$ अतः $\angle OAP = \angle OAQ$ आप कह सकतें हैं कि वृत्त का केन्द्र $\angle PAQ$ के कोणार्द्धक पर स्थित है। इस तथ्य का उपयोग ऐसे वृत्त खींचने में किया जा सकता है जो दो प्रतिच्छेदी रेखाओं को स्पर्श करता है। विशेष रूप से एक ऐसा वृत्त भी खींचा जा सकता है जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करेगा। इस वृत्त को त्रिभुज का अंतःवृत्त और इसके केन्द्र को त्रिभुज का अंतःकेन्द्र कहा जाता है।

उदाहरणः–16. दी गई आकृति–89 में $OP = 13$ सेमी. तथा वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. है। बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा PT तथा PS की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः– ΔOPT में,

$\angle OTP = 90°$

समकोण ΔOPT में

$OP^2 = OT^2 + PT^2$

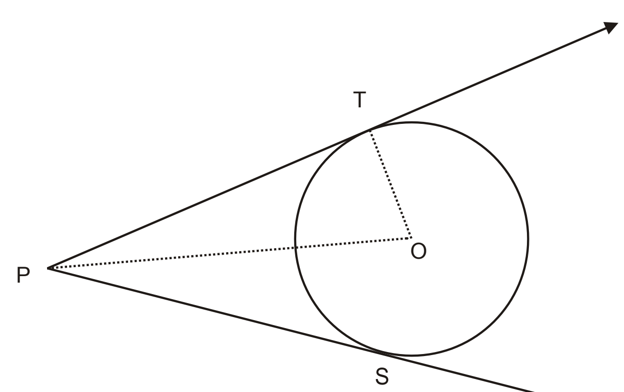
या $13^2 = 5^2 + PT^2$

या $PT^2 = 13^2 - 5^2$

$PT^2 = 169 - 25$

$PT^2 = 144$

$PT = 12$ सेमी.



आकृति–89

हम जानते हैं कि

$PS = PT$

अतः $PS = 12$ सेमी

अतः स्पर्श रेखा $PT = PS = 12$ सेमी.

उदाहरणः–17. दी गई आकृति–90 में O वृत्त का केन्द्र है तथा PA और PB वृत्त की स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं $\angle APB = 60°$ हो तो $\angle AOB$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– चतुर्भुज AOPB में,

$\angle OAP = \angle OBP = 90°$

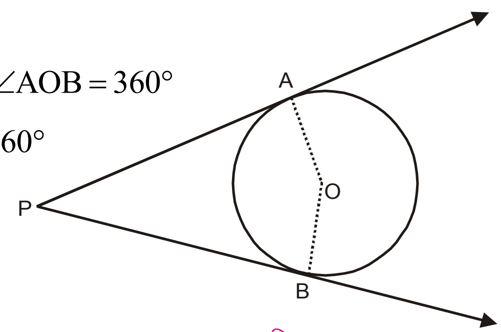
तथा $\angle OAP + \angle APB + \angle PBO + \angle AOB = 360°$

$90° + 60° + 90° + \angle AOB = 360°$

$240° + \angle AOB = 360°$

$\angle AOB = 360° - 240°$

$\angle AOB = 120°$



आकृति–90

उदाहरणः–18. दी गई आकृति–73 में P, Q तथा R एक वृत्त के बाह्य बिंदु हैं, जिसका केन्द्र O है। स्पर्श रेखा PA, QB तथा RC की लंबाइयाँ क्रमशः 3 सेमी,,4 सेमी, और 5 सेमी, हैं। ΔPQR का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हलः– वृत्त के बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाईयाँ बराबर होती हैं।

$\therefore$ $PC = PA = 3$ सेमी.

$QA = QB = 4$ सेमी.

$RB = RC = 5$ सेमी.

$PQ = PA + AQ$

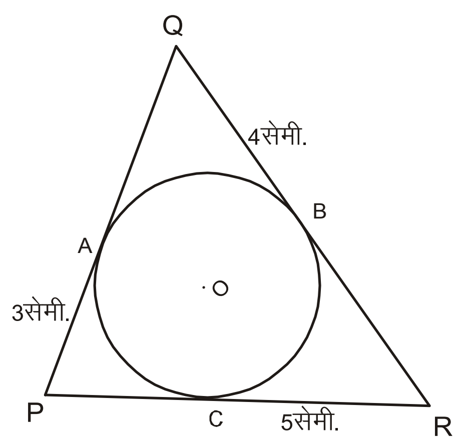
$PQ = 3 + 4 = 7$ सेमी.

$QR = QB + BR$

$QR = 4 + 5 = 9$ सेमी.

$PR = PC + CR$

$PR = 3 + 5 = 8$ सेमी.



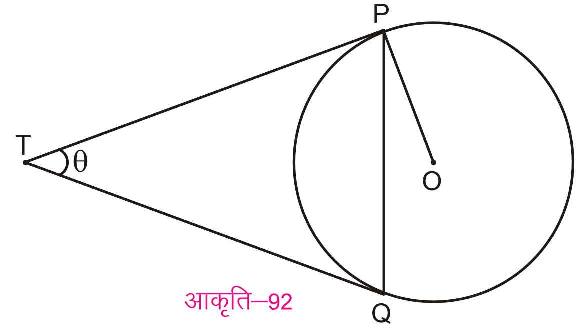
आकृति–91

अतः ΔPQR की परिमाप $= PQ + QR + PR$

$= 7 + 9 + 8$ सेमी.

$= 24$ सेमी.

उदाहरणः—19. केन्द्र O वाले वृत्त पर, एक बाह्य बिंदु T से दो स्पर्श रेखाएँ TP तथा TQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ है।



आकृति—92

हलः— माना $\angle PTQ = \theta$

$TP = TQ$ (प्रमेय 12 से)

अतः ΔTPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें

$\angle TPQ + \angle TQP = 180^\circ - \theta$

$\therefore \quad \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta)$

$\angle TPQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$

$\because \quad \angle OPT = 90^\circ$ है। (प्रमेय 11 से)

$\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ$

$= 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)$

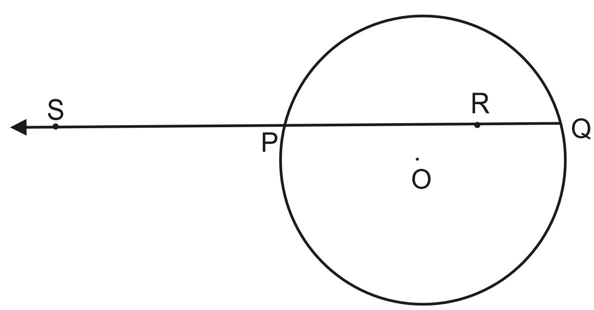
$= \frac{1}{2}\theta$

$= \frac{1}{2}\angle PTQ$

अतः $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ सिद्ध हुआ।

जीवा के खण्ड

PQ एक वृत्त की जीवा है और R वृत्त के अंदर PQ पर स्थित एक बिंदु है। तब यह कहा जाता है कि बिंदु R जीवा PQ को दो खण्डों PR और RQ में अंतः विभाजित करता है। इसी प्रकार यदि S वृत्त के बाहर रेखा PQ पर स्थित एक बिंदु हो तब यह कहा जाता है कि बिंदु S जीवा PQ को दो खण्डों SP और SQ में बाह्य विभाजित करता है।



आकृति—93

स्पर्श रेखा और छेदक रेखा के बीच संबंध

हमने वृत्त के बाह्य बिंदु से खींची गयी दो स्पर्श रेखाओं के बीच संबंध देखा है । क्या वृत्त के बाह्य बिंदु से खींची गयी छेदक रेखा तथा स्पर्श रेखा में कोई संबंध है?

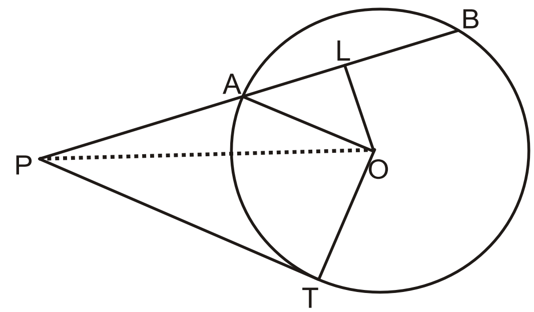
प्रमेय – 13

कथन – यदि PAB वृत्त की छेदक रेखा हो जो वृत्त को A और B पर प्रतिच्छेद करती है और PT एक स्पर्श रेखाखण्ड हो तो $PA \times PB = PT^2$

दिया है – वृत्त की छेदक रेखा PAB जो वृत्त को A और B पर प्रतिच्छेद करती है और PT पर स्पर्श रेखाखण्ड है।

सिद्ध करना है – $PA \times PB = PT^2$

रचना – AB पर लंब OL खींचिए। OP, OT और OA को मिलाइए।



आकृति–94

उपपत्ति –

$$PA \times PB = (PL - AL)(PL + LB)$$

$$= (PL - AL)(PL + AL)$$

(केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है)

$$= PL^2 - AL^2$$

$$= PL^2 - (OA^2 - OL^2) \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$= PL^2 - OA^2 + OL^2$$

$$= PL^2 + OL^2 - OA^2 \qquad (\Delta OPL \text{ में पाइथागोरस प्रमेय से})$$

$$= OP^2 - OA^2$$

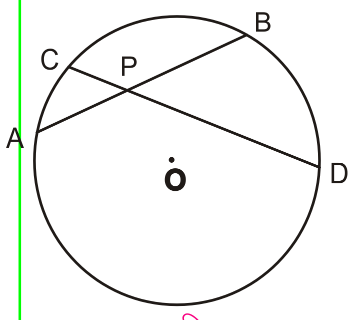
$$= OP^2 - OT^2 \qquad (OA = OT = \text{त्रिज्या})$$

$$= PT^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

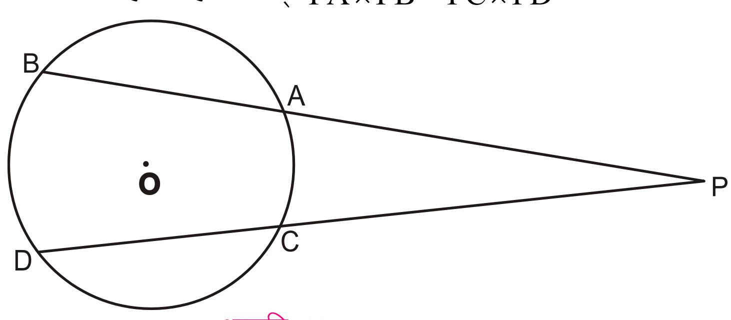
$$\therefore \quad PA \times PB = PT^2$$

करके देखें

यदि किसी वृत्त की जीवाएँ एक दूसरे को वृत्त के अंतर्गत या बहिर्गत प्रतिच्छेद करती हैं तो किसी एक जीवा के खण्डों से बनने वाले आयत का क्षेत्रफल दूसरी जीवा के खण्डों से बनने वाले आयत के क्षेत्रफल के बराबर होता है अर्थात् $PA \times PB = PC \times PD$



आकृति–95



आकृति–96

उदाहरणः—20. AB तथा CD वृत्त की दो जीवाएँ है, जो बिंदु P पर वृत्त को अंतःभाग में काटती हैं। यदि PA = 2 सेमी., PB = 3 सेमी., तथा PC = 4 सेमी., है ती PD की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः— दिया है,

PA = 2 सेमी., PB = 3 सेमी., तथा PC = 4 सेमी.,

माना PD = x सेमी.

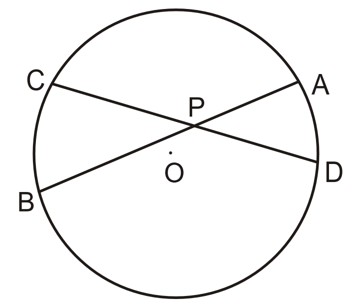
हम जानते हैं कि $PA \times PB = PC \times PD$

$$2 \times 3 = 4 \times x$$

$$x = \frac{6}{4}$$

$$x = 1.5 \text{ सेमी.}$$

PD = 1.5 सेमी.



आकृति—97

उदाहरणः—21. जीवाएँ PQ तथा RS वृत्त के बाहर एक बिंदु M पर एक दूसरे को काटती हैं। यदि MQ = 3 सेमी. MP = 8 सेमी., तथा MS = 4 सेमी. है, तो MR और जीवा RS की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः— दिया गया है, MQ = 3 सेमी. MP = 8 सेमी., तथा MS = 4 सेमी.

माना MR = x सेमी.

हम जानते हैं कि $MQ \times MP = MS \times MR$

$$3 \times 8 = 4 \times MR$$

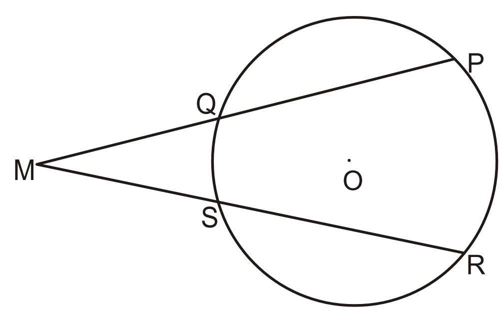
$$MR = \frac{24}{4}$$

MR = 6 सेमी

जीवा RS = MR - MS

= 6 - 4

जीवा = 2 सेमी.



आकृति—98

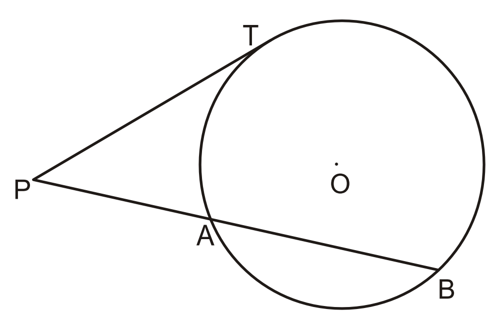
उदाहरणः—22. दी गई आकृति—99 में PA = 4 सेमी. तथा PB = 9 सेमी. तो PT की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः— हम जानते हैं कि $PA \times PB = PT^2$

$$4 \times 9 = PT^2$$

$$PT^2 = 36$$

PT = 6 सेमी.



आकृति—99

एक स्पर्श रेखा तथा जीवा द्वारा बनाए गए कोण

माना एक वृत्त का केन्द्र O है तथा AB इस वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा है। बिंदु P से वृत्त की जीवा PQ खींचिए । दीर्घ चाप PQ में एक बिंदु R लीजिए।

दीर्घ चाप PRQ, जीवा PQ द्वारा बनाया गया वृत्तखंड का एकांतर वृत्तखंड कहलाता है।

आकृति–100 में, $\angle QPB = x°$ हो तो $\angle OPQ = 90° - x°$ (क्यों ?)

$\angle OPQ = \angle OQP = 90° - x°$ ($\because$ OP = OQ = त्रिज्या)

ΔPOQ में

$\angle POQ = 180° - [(90° - x°) + (90° - x°)]$

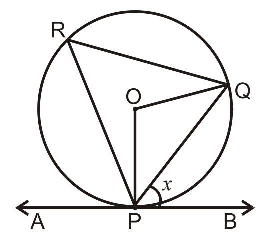
$= 180° - [180° - 2x°]$

$= 2x°$

$\angle PRQ = \frac{1}{2}\angle POQ$

$= \frac{1}{2} \times 2x°$

$= x°$



आकृति–100

अतः हम कह सकते हैं कि ''किसी जीवा द्वारा, दी गई स्पर्श रेखा के साथ उनके स्पर्श बिंदु पर बना कोण, उस जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्ड में बने कोण के बराबर होता है।''

यह भी एक प्रमेय है जिसका उपयोग वृत्त की स्पर्श रेखा खींचने में करते हैं जब वृत्त के केन्द्र का पता न हो।

उदाहरणः–23. दी गई आकृति–101 में PQ वृत्त की स्पर्श रेखा है यदि AOB वृत्त का व्यास है तथा $\angle SAB = 50°$ है तो $\angle ASP$ ज्ञात कीजिए।

हलः– $\angle BSQ = \angle SAB = 50°$

(एकान्तर वृत्तखण्ड के परिणाम द्वारा)

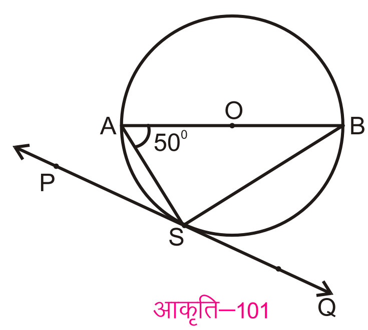
$\angle ASB = 90°$

(व्यास द्वारा बना कोण)

$\angle ABS + \angle ASB + \angle BAS = 180°$

$\angle ABS + 90° + 50° = 180°$

$\angle ABS = 40°$



आकृति–101

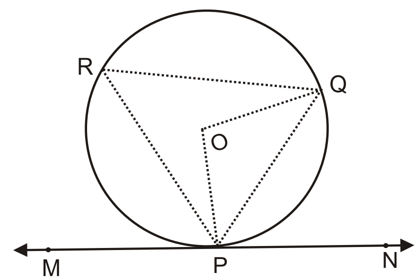
$\because$ $\angle ASP = \angle ABS$ (एकान्तर वृत्तखण्ड के परिणाम द्वारा)

$\therefore$ $\angle ASP = 40°$

उदाहरणः–24. स्पर्श रेखा MN वृत्त को बिंदु P पर स्पर्श करती है। PQ जीवा इस प्रकार है कि $\angle QPN = 52°$ तब $\angle POQ$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ O वृत्त का केन्द्र है।

हलः– बिंदु R वृत्त की परिधि पर एक बिंदु है केन्द्र O को P और Q से मिलाए। इसी प्रकार R को P तथा Q से।

$\angle QPN = \angle PRQ = 52°$ (चूँकि किसी जीवा द्वारा, दी गई स्पर्श रेखा के साथ उनके स्पर्श बिंदु पर बना कोण, उस जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्ड में बने कोण के बराबर होता है।)



आकृति–102

$\angle POQ = 2\angle PRQ$ (केन्द्र पर बना कोण वृत्त के परिधि के शेष भाग में बने कोण का दुगुना होता है।)

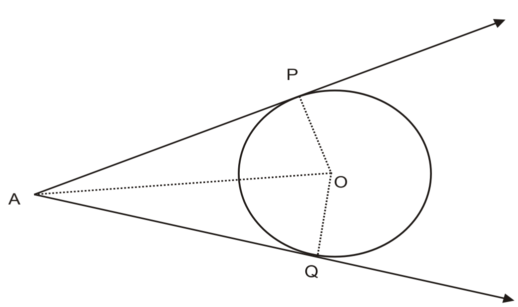
$\angle POQ = 2 \times 52°$

$\angle POQ = 104°$

प्रश्नावली 5

1. एक बिंदु P से जो वृत्त के केन्द्र से 10 सेमी. दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 8 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

2. दी गई आकृति–103 में $\angle POQ = 100°$, AP तथा AQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle PAO$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति–103

FED2X6

3. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

4. एक वृत्त एक चतुर्भुज ABCD के चारों भुजाओं को स्पर्श करती है। सिद्ध कीजिए कि

   $AB + CD = BC + DA$

5. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

6. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के दो समांतर स्पर्श रेखाओं के बीच खींची गई एक अन्य स्पर्श रेखा का अंतःखण्ड, केन्द्र पर समकोण अंतरित करता है।

हमने सीखा

1. उन सभी बिंदुओं का समूह जो तल मे एक नियत बिंदु से समान दूरी पर स्थित हो तथा एक बंद आकृति बनाता हो वृत्त कहलाता है।
2. एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती है।
3. एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों तो वे जीवाएँ बराबर होती है।
4. वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।
5. एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लंब होती है।
6. तीन अंसरेख बिंदुओं से होकर एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।
7. एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं।
8. वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण, वृत्त के परिधि के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।
9. वृत्त के परिधि के किसी बिंदु पर व्यास द्वारा अंतरित कोण समकोण होता है।
10. वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण आपस में बराबर होते हैं।
11. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180° होता है।

12. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180° हो तो वह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है।

13. स्पर्श बिंदु से खींची गई त्रिज्या वृत्त की स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

14. बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती है।

15. किसी जीवा द्वारा, दी गई स्पर्श रेखा के साथ उनके स्पर्श बिंदु पर बना कोण, उस जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्ड में बने कोण के बराबर होता है।

उत्तरमाला 1

1. (i) 10 सेमी. (ii) 24सेमी.
2. (i) 5 सेमी. (ii) 25 सेमी.
3. 8 सेमी.
4. 15 सेमी.

उत्तरमाला 2

2. 26 सेमी.
4. 24 सेमी.

उत्तरमाला 3

1. 40^o
2. 80^o
3. 35^o
4. 25^o
5. 75^o
6. 120^o
7. 80^o
8. 10 सेमी.

उत्तरमाला 4

1. $\angle DCB = 100^o$, $\angle ABC = 80^o$, $\angle ADC = 100^o$

2. $\angle QRS = 104^o$, $\angle QTS = 104^o$

3. $\angle BAC = 60^o$

4. 62^o

6. $\angle QPR = 30^o$, $\angle PRS = 20^o$

उत्तरमाला 5

1. 6 सेमी.

2. 40^o

अध्याय 13

ज्यामितीय रचनाएँ
[GEOMETRICAL CONSTRUCTIONS]

FELXYT

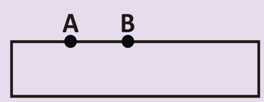
परिचय (Introduction)

ज्यामितीय रचना करने से तात्पर्य परकार और रूलर की सहायता से माप कर ज्यामितीय आकृतियाँ बनाना है। ज्यामितीय रचना के द्वारा हम ज्यामिति की कई अवधारणाओं, संबंधों व उपपत्तियों को अनुभव कर सकते हैं और उनके बारे में सोच सकते हैं। हम उन अवधारणाओं का उपयोग कर ऐसी ज्यामिति रचनाएँ करेंगे जो हमने पढ़ी है। रचित करने के साथ–साथ कुछ रचनाओं का विश्लेषण भी करेंगे जिससे हम ये समझ सकेंगे कि ये रचनाएँ किस तरह की जाती हैं और क्यों? इस बात को समझने के लिए हम दिए गए सवालों के अनुसार रचनाओं को बनाते समय उनके बारे में सोचेंगे व चर्चा करेंगे।

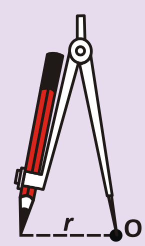
गणित में तर्क, प्रमाण (proof) आदि को ध्यान में रखकर सवाल हल किए जाते है। सवाल हल करना और यह देखना कि क्या कोई सवाल एक से ज्यादा तरीके से हल किया जा सकता है। कौनसा तरीका ज्यादा उपयुक्त और आसान जैसी बातें सोचना महत्वपूर्ण है। यह सवाल करना व सोचना हमारी तार्किक और सृजनात्मक क्षमता का विकास करता है।

अभी तक आपने स्केल और चाँदे की सहायता से निश्चित माप के रेखाखंड और कोण बनाए हैं। इस अध्याय में हम परकार और रूलर के उपयोग से रचना करेंगे।

रूलर का रचना में उपयोग : हम जानते हैं कि किन्हीं दो बिंदुओं A और B दोनों से गुजरने वाली सिर्फ एक सरल रेखा खींची जा सकती है (अभिगृहीत)। हम रूलर का उपयोग रेखा AB, रेखाखंड AB या किरण AB बनाने के लिए कर सकते हैं।



परकार का रचना करने में उपयोग : वृत्त की परिभाषा से हम जानते हैं कि एक निश्चित बिंदु और त्रिज्या से केवल एक वृत्त बनाया जा सकता है। यहाँ हम परकार का उपयोग वृत्त या चाप बनाने के लिए करेंगे।



आइए, कुछ ज्यामितीय रचनाएँ करते हैं–

रचना–1 : समान कोण की रचना करना

एक कोण दिया गया है, हमें उसके बराबर एक दूसरे कोण की रचना करनी है। यह काम हम कैसे करेंगे? एक तो यह कर सकते हैं कि एक चाँदे की मदद से कोण को माप लें। फिर उसके बराबर कोण बना लें। लेकिन यदि हमारे पास कोण मापने का कोई उपकरण नहीं है तो हम क्या करेंगे? आइए देखें –

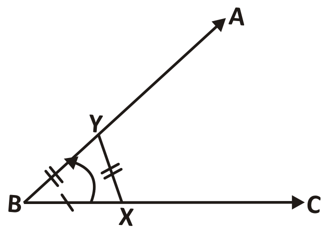
पद–1 इस रचना पर काम करने से पहले हमें निम्न सवालों पर सोचने से मदद मिलेगी–

1. *सवाल में क्या जानकारी दी गई है, इसे कैसे करना होगा और दी गई जानकारियों में से कौन–सी उपयोगी है?*

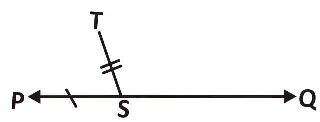
   हमें एक कोण दिया है और हमें इसके बराबर कोण की रचना करनी है।

   यदि दिया गया कोण ABC है तो एक कोण RPQ की रचना इस प्रकार करनी है कि $\angle RPQ = \angle ABC$ हो।

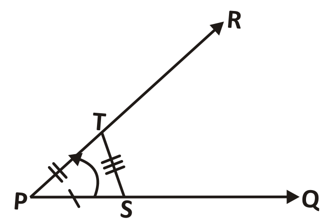
2. *दी गई जानकारियों के आधार पर रचना करते समय किन ज्यामितीय अवधारणाओं का उपयोग हो सकता है?*



आकृति – 1



आकृति – 2



आकृति – 3

हमें पता है कि यदि हम किसी किरण को एक स्थिति से दूसरी स्थिति तक घुमाते हैं तो उस घुमाव का मान ही कोण होता है। किरण BC को BA तक घुमाने पर हमें कोण ABC प्राप्त होता है। (आकृति–1)

यदि एक किरण PQ बनाएँ और उसे इतना घुमाएँ जितना BC को BA तक घुमाया गया है। लेकिन यह होगा कैसे?

यदि BC और BA पर क्रमशः दो बिंदु X,Y इस प्रकार लें कि BX=BY और PQ पर बिंदु S इस प्रकार लें कि BX=PS (आकृति–2)

अब B और X के सापेक्ष Y की जो स्थिति है वैसी ही स्थिति पर एक बिंदु (मान लें T) P और S के सापेक्ष ढूँढ़ लिया जाए तो किरण PT, BY के संगत होगी। (आकृति–3)

यह बिंदु T, PS त्रिज्या के चाप पर S से XY दूरी पर स्थित होगा।

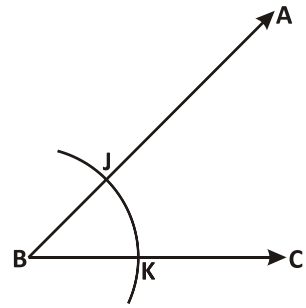
यदि PT को मिलाते हुए PR किरण खींची जाए तो $\angle TPS$, $\angle YBX$ (या $\angle ABC$)के बराबर होगा।

पद–2 : कच्चा चित्र बनाने के बाद चरणबद्ध रूप से ज्यामिति रचना की जा सकती है।

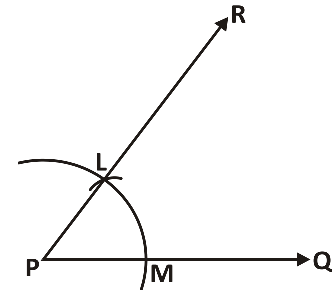
रचना के चरण :–

1. एक बिंदु P लेते हैं। P से एक किरण PQ खींचते हैं। यह किरण नये कोण की एक भुजा होगी।
2. अब दिए गए कोण ABC के शीर्ष B से किसी भी माप का एक चाप काटते हैं जो BA को J पर और BC को K पर प्रतिच्छेद करता है। (आकृति–4) देखिए।
3. अब हम इसी माप का चाप बिन्दु P से काटते हैं जो किरण PQ को M पर प्रतिच्छेद करता है। (आकृति–5)
4. अब बिंदु K से KJ का माप लेते हैं और बिन्दु M से इसी माप का एक चाप, पहले वाले चाप पर काटते हैं और प्रतिच्छेद बिन्दु को L नाम देते हैं। (आकृति–5)
5. अब हम P से L को जोड़ते हुए एक किरण PR खींचते हैं।
   ∠RPQ अभीष्ट कोण है।

   ∠RPQ = ∠ABC



आकृति – 4



आकृति – 5

पद–3 रचित आकृति को जाँचना– रचित आकृति सवाल में दी गई जानकारी के अनुसार है या नहीं, इसे हम माप के अलावा प्रमाण के माध्यम से भी जाँच सकते हैं।

आइए, अब देखें कि क्या प्राप्त कोण दिए हुए कोण के बराबर है?

इसके लिए हम दोनों के चित्रों के संदर्भित कोणों को लेते हुए त्रिभुज बनाते हैं। बिन्दु M को L से और K को J से जोड़ें जिससे ΔPML और ΔBKJ बन जाएँगे।

यदि हम ΔPML और ΔBKJ को देखें तो पाएँगे कि–

PM = BK (रचना से),

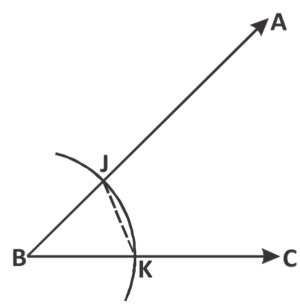
ML = KJ (रचना से)

PL = BJ (रचना से)

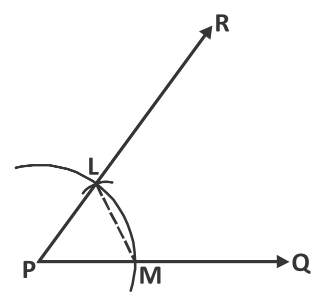
इसलिए ΔPML ≅ ΔBKJ (SSS सर्वांगसमता से)

अत: ∠LPM = ∠JBK

इस प्रकार ∠RPQ = ∠ABC



आकृति – 6

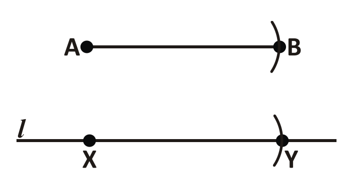


आकृति – 7

उदाहरण–1. दिए गए रेखाखंड के बराबर एक रेखाखंड की रचना करें।

हल :

पद–1 हमें एक रेखाखण्ड AB दिया गया है। एक ऐसे रेखाखंड की रचना करनी है जो AB के बराबर हो।



आकृति – 8

पद–2 : रचना के चरण :–

1. एक रेखा खींचें, इसे l मानें।
2. l पर कोई भी बिन्दु X चुनें।
3. अब परकार पर AB के बराबर त्रिज्या लें। X को केन्द्र मानकर, रेखा l पर चाप बनाएँ और कटान बिन्दु को Y नाम दें।

   रेखाखंड XY, रेखाखंड AB के सर्वांगसम है।

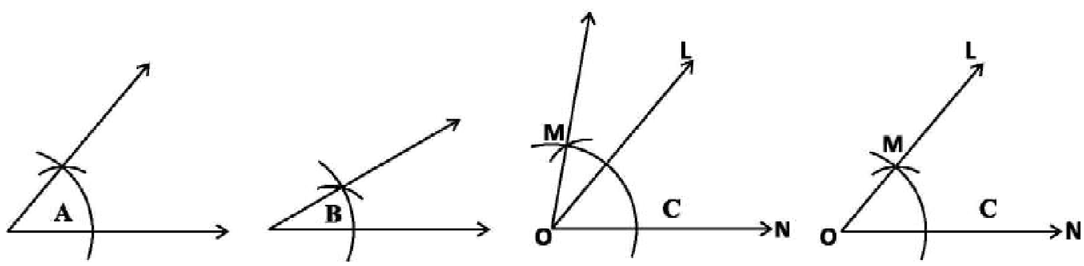
पद–3 : प्रमाण :–

यहाँ हमने AB को त्रिज्या लेकर और केन्द्र 'X' से चाप बनाया। इसलिए XY=AB

उदाहरण–2. दो कोण दिए गए हैं। एक ऐसे कोण की रचना करें जिसकी माप दिए हुए दोनों कोणों के योगफल के बराबर हो।

हल : रचना–1 का उपयोग करते हुए $\angle A$ के सर्वांगसम कोण $\angle LON$ बनाएँ। इसी तरह OL को एक भुजा मानते हुए $\angle MOL$ बनाएँ जो $\angle B$ के सर्वांगसम हो।

यानी $\angle LON + \angle MOL = \angle A + \angle B$



आकृति – 9 आकृति – 10 आकृति – 11 आकृति – 12

करके देखें

1. उदाहरण–2 में की गई रचना के चरण विस्तार से स्वयं लिखिए।
2. 30° और 90° माप के कोण बनाइए। बताइए कि यह कैसे बनाया?
3. भुजा की कोई भी माप लेते हुए एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
4. एक न्यूनकोण बनाइए और एक ऐसे कोण की रचना कीजिए जिसका मान पहले बनाए गए न्यूनकोण के मान से दोगुना हो।

रचना–2 : समांतर रेखा की रचना करना

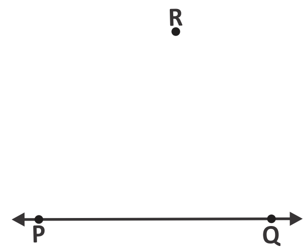
हम यहाँ एक सरल रेखा के बाहर स्थित बिंदु से उस रेखा के समांतर रेखा खींचना चाहते हैं। हमने जिन पदों में पहली रचना की है आइए उन्हीं पदों का उपयोग करते हुए समांतर रेखा की रचना करते हैं।

पद–1 : रचना शुरू करने से पहले निम्नलिखित सवालों पर सोचना :–

1. *सवाल में क्या जानकारी दी गई है? किस क्रम में इनका उपयोग करना है? क्या रचना करनी है? किस क्रम में करनी है?*

   दी गई जानकारी में से कौन–सी उपयोगी है और कौन सी नहीं?

   यहाँ हमें एक रेखा दी गई है और एक बिंदु। यह बिंदु दी गई रेखा के बाहर स्थित है। हमें उस बिंदु से समांतर रेखा की रचना करनी है। आकृति – 13



आकृति – 13

2. *दी गई जानकारी के आधार पर रचना करते समय किन ज्यामितीय अवधारणाओं का उपयोग करना होगा?*

   हमें पता है कि यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को प्रतिच्छेद करे और उन पर बने संगत कोण बराबर हों तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

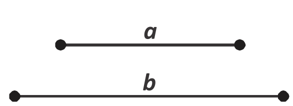
   तो हम दिए गए बिंदु से तिर्यक रेखा की रचना कर सकते हैं जो दी गई रेखा को प्रतिच्छेद करे

   तिर्यक रेखा और दी गई रेखा के बीच बने कोण के बराबर कोण, बिंदु पर बनाएँ तो प्राप्त रेखा दी गई रेखा के समांतर होगी।

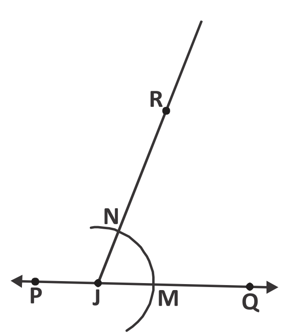
पद–2 : एकत्रित जानकारी के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर सोचना कि अपेक्षित आकृति का कौन–कौन सा हिस्सा हमें ज्ञात हो गया है। आकृति की रचना के लिए हमें और क्या चाहिए। फिर अंत में चरणबद्ध रूप से ज्यामिति रचना करना।

रचना के चरण :

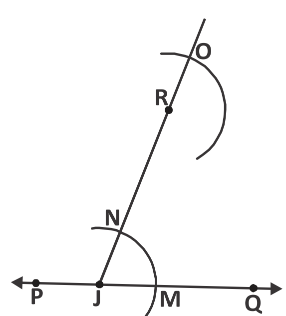
एक रेखा PQ और एक बिंदु R दिए गए हैं।



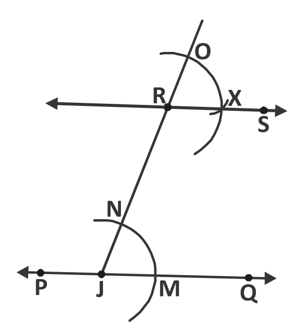
आकृति – 14



आकृति – 15



आकृति – 16



आकृति – 17

हमें PQ के समांतर एक रेखा की रचना करनी है जो R से गुजरती हो।

1. R से एक तिर्यक रेखा खींचे हैं जो PQ को किसी बिंदु J पर प्रतिच्छेद करे। हमें पता है कि यदि संगत कोण बराबर हो तो रेखाएँ समांतर होती हैं।

2. अब हम बिंदु J से किसी भी माप का एक चाप काटते हैं जो PQ को M और JR को N पर प्रतिच्छेद करती है। (आकृति–15)

3. अब इसी माप का एक चाप बिंदु R से बनाते हैं जो JR को O पर प्रतिच्छेद करती है। (आकृति–16)

4. अब MN की माप लेकर बिंदु O से एक चाप काटते हैं जो पहले बनाए गए चाप को X पर प्रतिच्छेद करता है।

   अब हम बिंदु R से X को जोड़ते हुए एक रेखा RS खींचते हैं

   इस प्रकार, रेखा PQ के समांतर रेखा RS होगी। (आकृति–17)

पद–3: रची हुई आकृति को जाँचना : यह देखना कि रची हुई आकृति अपेक्षित आकृति के अनुसार है या नहीं।

प्रमाण – रचे हुए चित्र को देखें–

चूँकि $\angle ORX = \angle RJM$ (संगत कोण)

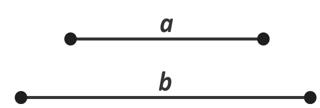
तो हम कह सकते हैं कि $RS \parallel PQ$

प्रश्नावली–1

1. कॉपी पर 'a' और 'b' दो रेखाखण्ड बनाएँ। अब निर्देशानुसार रेखाखंडों की रचना करें।

   (a) $a + b$ (b) $b - a$

   (c) $2b + a$ (d) $3a - b$



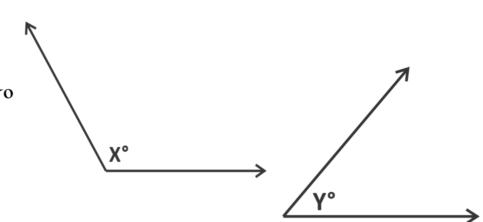
2. परकार और रूलर की सहायता से इन मापों के कोण बनाएँ– 15^o, 45^o, 105^o, 75^o

3. दो कोण X^o (अधिककोण) और Y^o (न्यूनकोण) दिए हैं–

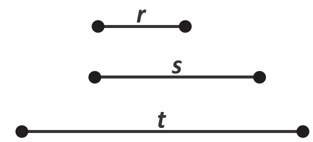
   निम्नलिखित मापों के कोण बनाएँ –

   (a) $X^o - Y^o$ (b) $X^o + Y^o$

   (c) $(180 - X)^o$ (d) $2Y^o$



4. आपको तीन निश्चित मापों 'r', 's' और 't' के रेखाखंड दिए गए हैं।



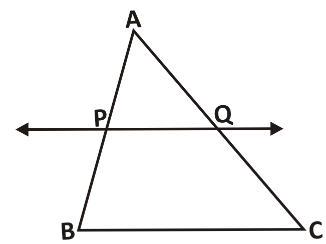
   (a) क्या इन रेखाखंडों से त्रिभुज की रचना संभव है? यदि हाँ तो त्रिभुज बनाएँ।

   (b) क्या s, t व r + t से त्रिभुज बन पाएगा?

5. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए। अब शीर्ष A से भुजा BC के समांतर एक रेखा की रचना कीजिए। शीर्ष A पर बने कोणों के योग और त्रिभुज के सभी कोणों के योग की जाँच कीजिए।

रचना – 3 : दिये गये अनुपात में रेखाखंड की रचना

इस रचना के लिए हम थेल्स प्रमेय का उपयोग करेंगे। समरूप त्रिभुज में आपने थेल्स प्रमेय पढ़ा होगा जिसके अनुसार, "यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा के समांतर कोई ऐसी रेखा खींची जाए जो बाकी दोनों भुजाओं को काटे, तो यह समांतर रेखा दोनों भुजाओं को बराबर अनुपात में विभाजित करेगी।"



आकृति – 18

दिए गए त्रिभुज ABC में PQ और BC समांतर हैं, तो थेल्स प्रमेय से हम कह सकते हैं कि $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ (आकृति–18)

यदि $AP = \frac{1}{3}AB$, तो थेल्स प्रमेय से हम कह सकते हैं कि $AQ = \frac{1}{3}AC$

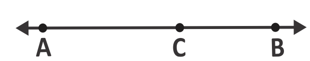
उदाहरण–3. दिए गए रेखाखंड AB पर एक बिंदु C ढूँढ़िए जिसमें AC:AB = 2:3

हल :

पद 1 : हमें एक रेखाखंड AB दिया हुआ है और हमें उस पर एक बिंदु C इस तरह प्राप्त करना है कि AC : AB = 2 : 3

यानी रेखाखंड AC का माप, रेखाखंड AB (दिए गए रेखाखंड) का $\frac{2}{3}$ होगा। (आकृति–19)

सोचें कि रचना कैसे करेंगे : चूँकि AC : AB = 2 : 3

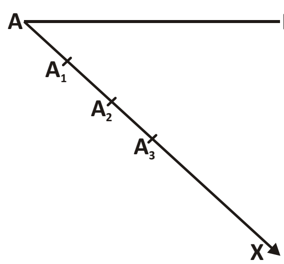


आकृति – 19

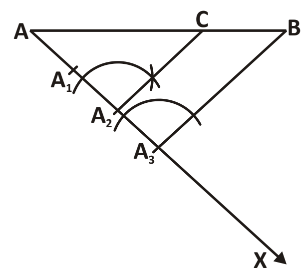
AB को 3 बराबर भागों में विभाजित करें और उसमें दो भाग लें तो वह पूरे रेखाखंड के $\frac{2}{3}$ के बराबर होगा।

हमें यह पता है कि किसी त्रिभुज में एक भुजा के समांतर रेखा अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है। आकृति –21

तो क्यों न AB के साथ न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण खींचें जिस पर 3 बराबर भाग लिए जा सकें। अब 2:3 अनुपात को ध्यान में रखकर तीसरे बिंदु को B से मिलाएँ और इसी के समांतर दूसरे बिंदु से एक रेखा खींचें।



आकृति – 20



आकृति – 21

पद 2 : रचना के चरण

1. बिंदु A से कोई भी न्यूनकोण बनाते हुए एक किरण AX खींचते हैं।
2. AX पर 3 बराबर चाप काटें। इन्हें AA_1, A_1A_2, A_2A_3 नाम देते हैं।

   $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$
3. अब A_3 से B को मिलाएँ और A_2 से A_3B के समांतर रेखा खींचें जो AB को 'C' पर प्रतिच्छेद करती है।

   AC अभीष्ट रेखाखंड है, चूँकि $AC : AB = 2 : 3$

पद 3 : प्रमाण : हम ज्यामिति रचना के आधार पर कैसे कह सकते हैं कि $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$

ΔABA_3 और ΔACA_2 में $A_2C \parallel A_3B$ (रचना से)

थेल्स प्रमेय से हम कह सकते हैं कि,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AA_2}{AA_3} \quad \cdots (1)$$

रचना से हमें ज्ञात है कि,

$\frac{AA_2}{AA_3} = \frac{2}{3}$ (चूँकि AA_3 तीन बराबर भागों में विभाजित है।)

अतः $\frac{AC}{AB} = \frac{AA_2}{AA_3} = \frac{2}{3}$

उदाहरण–4. एक ऐसे रेखाखंड की रचना कीजिए जो कि दिए गए रेखाखंड के माप का $\frac{3}{2}$ हो।

हल :

पद 1 : हमें रेखाखंड AB दिया है, एक बिंदु C लेना है जिससे

$AC : AB = 3 : 2$

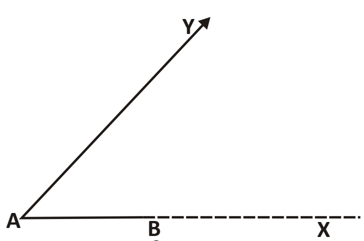
पिछले उदाहरण में बिंदु C दोनों बिंदुओं A और B के बीच में स्थित था। इस उदाहरण में बिंदु C ऐसा है कि $AC : AB = 3 : 2$ इसलिए बिंदु C रेखाखंड AB के बाहर स्थित होगा। जब रेखाखंड AC रेखाखंड AB से बड़ा होगा तभी AB का $\frac{3}{2}$ गुना हो सकेगा।

पद 2 : रचना के चरण :

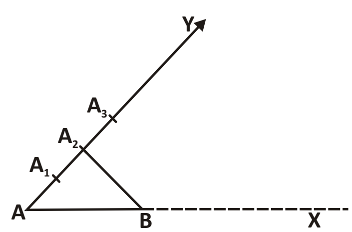
1. बिंदु A से न्यूनकोण बनाते हुए एक किरण AY खींचें और रेखाखंड AB को X तक बढ़ाएँ। (AB को X तक इसलिए बढ़ाया क्योंकि हमें एक ऐसा बिंदु C चाहिए जिससे AC:AB = 3:2)

2. AY पर 3 बराबर चाप काटें उन्हें A_1, A_2, A_3 नाम दें।

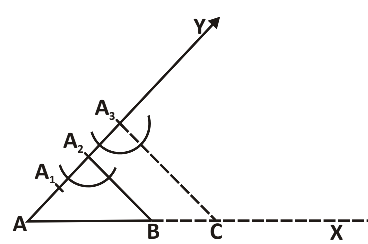
3. अब A_2 को B से जोड़ें और A_3 से A_2B के समांतर रेखा खींचें जो AX को C पर काटे। अभीष्ट बिन्दु C, AX पर इस प्रकार है कि $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$



आकृति – 22



आकृति – 23



आकृति – 24

पद 3 : प्रमाण : क्या हम ज्यामिति रचना के आधार पर कह सकते हैं कि $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$?

ΔACA_3 और ΔABA_2 में

$A_2B \parallel A_3C$ (रचना से)

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AA_3}{AA_2} \cdots (1)$$ (थेल्स प्रमेय से)

रचना से हमें यह पता है कि,

$$\frac{AA_3}{AA_2} = \frac{3}{2}$$

अतः समीकरण (1) से $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$

इस रचना में हमें रेखा खण्ड AC मिला है जो दी गई रेखा खण्ड AB से एक निश्चित अनुपात में बड़ा है। $AC = \frac{3}{2}AB$ या हम यह भी कह सकते हैं कि बिंदु 'C' रेखाखण्ड AB को 3 : 2 में विभाजित करता है।

FEVU1G

समरूप त्रिभुज की रचना

हम जानते हैं कि समरूप बहुभुज में संगत कोण बराबर होते हैं और संगत भुजाएँ समान अनुपात में होती हैं।

समरूपता की यही दो कसौटियाँ त्रिभुज पर भी लागू होती हैं।

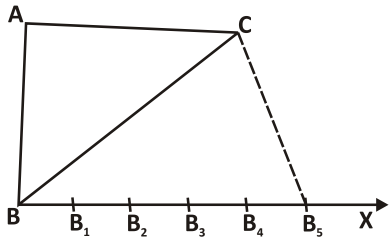
रचना – 4 : दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना करें जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं के $\frac{3}{5}$ हो।

पद 1 : हमें त्रिभुज ABC दिया गया है जिसके समरूप त्रिभुज की रचना करनी है। हमें पता है कि समरूप त्रिभुज में संगत कोण बराबर और संगत भुजाएँ समानुपातिक होती हैं। यहाँ अनुपात $\frac{3}{5}$ दिया है। पहले की गई रचनाओं का उपयोग करते हुए समरूप त्रिभुज बनाते हैं।

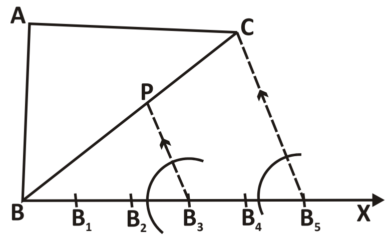
पद 2 : रचना के चरण

1. बिंदु B से A के दूसरी ओर एक न्यूनकोण बनाते हुए एक किरण BX खींचें।

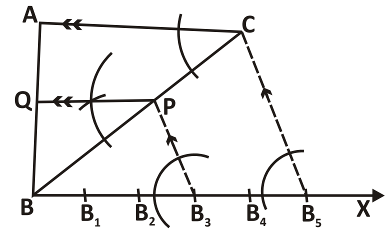
2. अब BX पर 5 बराबर चाप काटें और उन्हें क्रमशः B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 नाम दें।
   इससे हमें $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ प्राप्त होते हैं।



आकृति – 25



आकृति – 26



आकृति – 27

3. अब B_5 से C मिलाएँ और B_3 से B_5C के समांतर एक रेखा खींचें जो BC को P पर प्रतिच्छेद करे।
4. अब P से AC के समांतर एक रेखा खींचें जो AB को Q पर प्रतिच्छेद करे।

QBP अभीष्ट त्रिभुज है।

पद 3 : प्रमाणः

कैसे जाँचें कि ΔQBP और ΔABC, समरूप त्रिभुज हैं?

एक तरीका तो यह होगा कि हम दोनों त्रिभुज की भुजाओं को माप लें और देखें कि संगत भुजाएँ समानुपातिक हैं या नहीं।

दूसरा समरूपता के अभिगृहीत (कोण–कोण–कोण समरूपता) से सिद्ध करके देखें–

ΔQBP और ΔABC में,

$\angle QBP = \angle ABC$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle PQB = \angle CAB$ (संगत कोण) (रचना से $PQ \parallel CA$)

$\angle BPQ = \angle BCA$ (संगत कोण) (रचना से $PQ \parallel CA$)

अतः $\Delta QBP \sim \Delta ABC$ (कोण–कोण–कोण समरूपता)

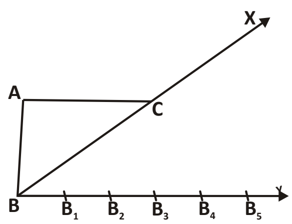
यानी $\frac{QB}{AB} = \frac{BP}{BC} = \frac{QP}{AC}$

$\frac{BP}{BC} = \frac{3}{5}$ (रचना से BC, 5 बराबर भाग हैं और BP, 3 बराबर भाग हैं)

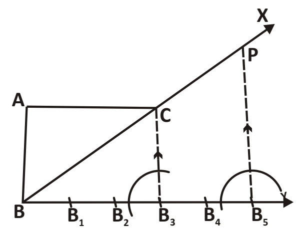
$BP = \frac{3}{5}BC$

$\therefore\ QP = \frac{3}{5}\ AC$ और $QB = \frac{3}{5}\ AB$

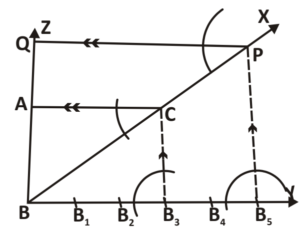
उदाहरण–5. दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना करें जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं के $\frac{5}{3}$ हों।



आकृति – 28



आकृति – 29



आकृति – 30

पद 1 : हमें एक त्रिभुज ABC दिया गया है। इसके समरूप एक त्रिभुज की रचना करनी है जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं के $\frac{5}{3}$ हों।

पद 2 : रचना के चरण :

1. बिंदु B से A के दूसरी ओर एक न्यूनकोण बनाते हुए एक किरण BY खींचें । BC और BA को आगे बढ़ाते हुए क्रमशः किरण BX व BZ खींचें।
2. अब BY पर 5 बराबर भाग लें उन्हें BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5 नाम दें।
3. अब B_3 से C को मिलाएँ। B_5 से B_3C के समांतर एक रेखा खींचें जो BX को P पर प्रतिच्छेद करे।
4. अब P से AC के समांतर एक रेखा खींचें जो BZ को Q पर प्रतिच्छेद करे।

QBP अभीष्ट त्रिभुज है।

FF5Q34

समरूप चतुर्भुज की रचना

जिस तरह हमने एक समरूप त्रिभुज की रचना की है आइए उसी तरह एक समरूप चतुर्भुज की रचना करते हैं।

हमें एक चतुर्भुज ABCD दिया है। एक ऐसे समरुप चतुर्भुज की रचना करनी है जिसकी प्रत्येक भुजा की माप चतुर्भुज ABCD की संगत भुजाओं के माप का $\frac{2}{5}$ हो।

पद 1 : हमें एक चतुर्भुज ABCD दिया गया है और इसके समरूप एक चतुर्भुज की रचना करनी है जिसकी भुजाओं की माप दिए गए चतुर्भुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{5}$ हो। यहाँ भी समरूप त्रिभुज के समान ही रचना होती है। एक बात ध्यान रखने योग्य है कि पहले हम विकर्ण (diagonal) की रचना करते हैं।

पद 2 : रचना के चरण :

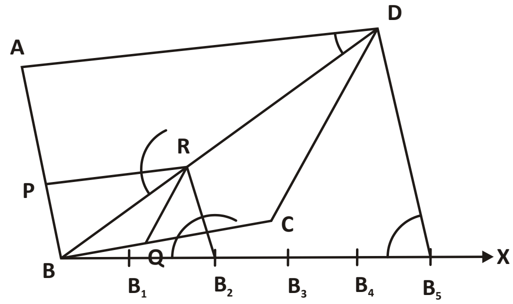
1. बिन्दु B से A के दूसरी और एक न्यूनकोण बनाते हुई किरण BX की रचना करें।

2. अब BX पर 5 बराबर भाग लें इन्हें BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5 नाम दें।

3. अब B_5 से D को मिलाएँ और B_2 से B_5D के समांतर एक रेखा खींचें जो BD को R पर प्रतिच्छेद करती हो।

4. अब R से AD के समांतर एक रेखा खींचें जो AB को P पर प्रतिच्छेद करती हो।

5. इसी प्रकार R से CD के समांतर एक रेखा खींचें जो BC को Q पर प्रतिच्छेद करती हो।



आकृति – 31

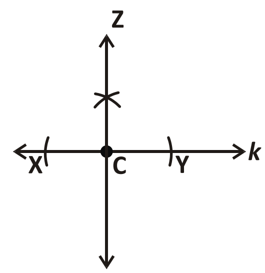
इस प्रकार, PBQR अभीष्ट चतुर्भुज प्राप्त होता है।

लंब खींचना

उदाहरण–6. रेखा k के बिंदु C पर लंब खींचें।

हल : पद 1 : हमें रेखा k पर बिंदु C पर एक लंब खींचना है।

आकृति – 32



आकृति – 33

पद 2 : रचना के चरण

1. C को केन्द्र मानें और उसके दोनों ओर कोई भी माप लेकर k पर चाप काटें। कटान बिंदु को X और Y मानें।

2. CX के माप से ज्यादा त्रिज्या लें X और Y को केन्द्र मानकर, रेखा के एक ओर चाप खींचें। ये दोनों चाप एक दूसरे को किसी बिन्दु पर काटेंगे।

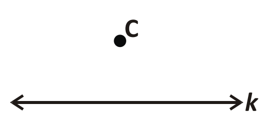
3. C से इस कटान बिन्दु को मिलाते हुए रेखा CZ खींचें।

   CZ रेखा k पर लंब है जो, बिंदु C से गुजरता है।

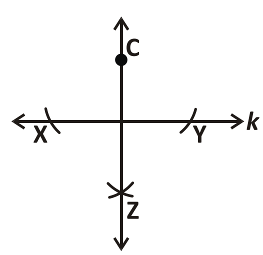
उदाहरण–7. बिंदु C रेखा k के बाहर है। k पर लंब की रचना करें जो C से गुजरता हो।

हल : (संकेत)–पहले बिंदु C को केन्द्र मानें और उससे बराबर दूरी पर बिंदु X, Y प्राप्त करें। फिर बिंदु X और Y को केन्द्र मानकर बिंदु Z प्राप्त करें।

इस रचना के चरण विस्तार से स्वयं लिखें।



आकृति – 34



आकृति – 35

करके देखें

1. 5.8 सेमी. का रेखाखंड AB खींचिए और उस पर बिंदु C इस तरह लीजिए कि AC:CB = 3:4 हो। जाँचिए कि AC:CB = 3:4 है या नहीं।
2. एक रेखाखण्ड की रचना कीजिए जो किसी रेखाखण्ड AB का $\frac{7}{5}$ गुना हो।
3. एक त्रिभुज PQR बनाइए जिसमें QR = 6 सेमी. PQ = 5 सेमी. और $\angle PQR = 60°$ हो। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें $AB = \frac{2}{5}$ PQ हो।
4. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें BC = 5.5 सेमी. $\angle ABC = 75°$ और $\angle ACB = 45°$ हो। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज XYZ बनाइए जिसमें $YZ = \frac{5}{4}$ BC हो।

प्रश्नावली – 2

1. एक समरूप त्रिभुज की रचना कीजिए जो कि दिए गए त्रिभुज का $\frac{3}{5}$ गुना हो।
2. एक समबाहु त्रिभुज PQR की रचना कीजिए। साथ ही एक और त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $PQ = \frac{3}{4}$ AB हो।
3. एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए। साथ ही एक और त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = \frac{2}{3}$ PQ हो।
4. दो समरूप त्रिभुजों की रचना कीजिए। एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज का $\frac{4}{3}$ गुना हो।

अभी तक आपने समरूप त्रिभुज से जुड़ी हुई रचनाओं का अध्ययन किया है। अब हम पिछली कक्षाओं में पढ़ी हुई अवधारणाओं का उपयोग कर कुछ और रचनाएँ करेंगे।

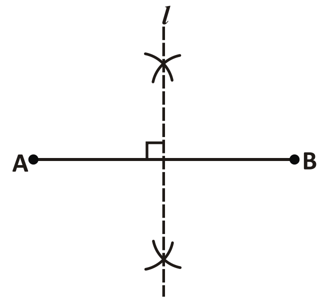
लंब समद्विभाजक

लंब समद्विभाजक (Perpendicular bisector) : यह वह रेखा है जो किसी दिए गए रेखाखंड पर समकोण बनाते हुए उसे दो बराबर भागों में बाँटती है।

लंब समद्विभाजक की रचना

1. दिया हुआ रेखाखण्ड AB बनाएँ।

2. परकार की भुजाओं को इतना फैलाइए कि उसका फैलाव दिए हुए रेखाखंड की लंबाई के आधे से अधिक हो।
2. अब परकार की नोंक को बिंदु A पर रखकर रेखाखंड के दोनों और चाप काटें, फिर बिंदु B पर परकार रखकर यही प्रक्रिया दोहराएँ।
3. चापों के कटान बिंदुओं को स्केल की सहायता से मिलाएँ।



आकृति – 36

यह रेखा 'ℓ', रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक है।

क्या लंब समद्विभाजक का प्रत्येक बिंदु, बिंदु A और B से समान दूरी पर होता है?

आइए देखें –

लंब समद्विभाजक पर कोई बिंदु O लें। इस बिंदु को रेखाखंड के दोनों अंत बिंदुओं A और B से मिलाएँ। अब त्रिभुज AOD और BOD में,

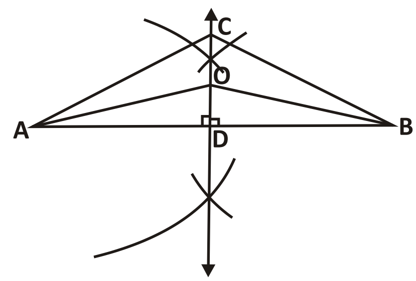
AD = DB (D, AB का मध्य बिंदु है।)

$\angle ODA = \angle ODB$ (समकोण)

OD = OD (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOD$ (SAS सर्वांगसमता से)

तो OA = OB

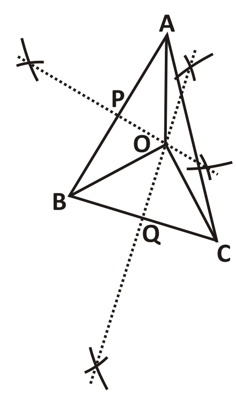


आकृति – 37

लंब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु, बिंदु A और B से समान दूरी पर होगा।

त्रिभुज की कुछ और रचनाएँ

पद 1 : हमें एक त्रिभुज दिया गया है। अब एक ऐसे वृत्त की रचना करनी है जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों A, B और C से होकर गुजरता है।



आकृति – 38

सोचें की रचना कैसे करेंगे :

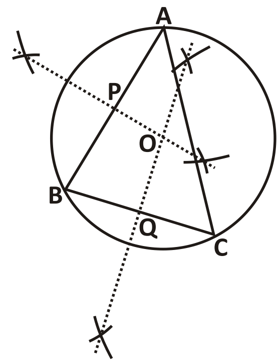
चूँकि वृत्त त्रिभुज के तीनों शीर्षों से गुजरता है इसलिए हम कह सकते हैं कि वृत्त का केंद्र तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होगा। हमें यह भी पता है कि लंब समद्विभाजक पर स्थित कोई भी बिंदु भुजा के शीर्षों से समान दूरी पर होता है। त्रिभुज ABC की भुजा AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित सभी बिंदु जो शीर्ष A और B से समान दूरी पर होंगे। इसी प्रकार भुजा BC के लंब समद्विभाजक पर भी स्थित सभी बिंदु शीर्ष B और C से समान दूरी पर होंगे।

मान लें कि दोनों ही लंब समद्विभाजक किसी बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं और उस बिंदु को हम 'O' नाम देते हैं। चूँकि बिंदु O दोनों ही लंब समद्विभाजक पर स्थित हैं अतः OA = OB = OC अब O को केंद्र लेकर और OA को त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाते हैं। क्या बनाया गया वृत्त तीनों शीर्षों से होकर गुजरता है?

आइए देखें –

पद 2 : रचना के चरण :

1. एक त्रिभुज ABC बनाएँ ।
2. भुजा AB और BC पर लंब समद्विभाजक खींचें जो क्रमशः AB को P पर और BC को Q पर प्रतिच्छेद करते हों। दोनों लंब समद्विभाजक बिन्दु 'O' पर प्रतिच्छेद करेंगे।
3. अब O को केंद्र लेकर और OA के माप की त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाएँ। आकृति में आप देख सकते हैं कि यह वृत्त तीनों शीर्षों से गुजरता है।



आकृति – 39(i)

पद 3 : प्रमाण :

कैसे पता करें वृत्त त्रिभुज के शीर्ष A, B और C से गुजरता है?

त्रिभुज AOP और त्रिभुज BOP में,(आकृति – 39(ii))

AP = PB (क्यों?)

$\angle$OPA = $\angle$OPB (क्यों?)

OP = OP (उभयनिष्ठ)

अतः त्रिभुज AOP $\cong$ BOP

इससे हम कह सकते हैं कि,

OA = OB .... (i)

आकृति – 39(ii)

इसी तरह त्रिभुज BOQ $\cong$ COQ

$\therefore$ OB = OC .... (ii)

(i) और (ii) से हम कह सकते हैं कि,

OA = OB = OC

यानी केन्द्र O, बिंदु A, B और C से समान दूरी पर है, तो OA को त्रिज्या लेकर बनाया गया वृत्त B और C से भी जाएगा।

किसी त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक जिस बिंदु पर मिलते हैं, उसे त्रिभुज का परिकेन्द्र कहते हैं। यहाँ बिंदु O, त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र है और A, B, C से गुजरने वाला वृत्त परिवृत्त है।

कोण समद्विभाजक

दिए गए कोण को दो बराबर कोणों में विभाजित करें।

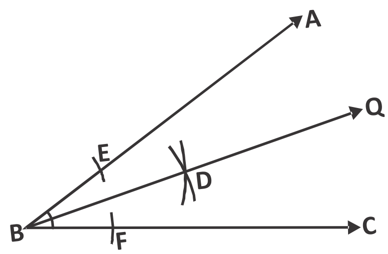
हल :

पद 1 : एक कोण ABC दिया गया है। हमें एक ऐसी किरण की रचना करनी है जो $\angle$ABC को दो बराबर कोणों में विभाजित करे।

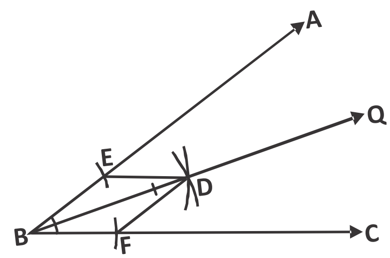
सोचें कि यह किस तरह किया जा सकता है। हमें पता है कि कोण समद्विभाजक वह रेखा होती है जो किसी कोण को दो बराबर भाग में विभाजित करती है, अतः दोनों कोण बराबर होते हैं। यदि हम दो त्रिभुजों की रचना इस तरह करें कि कोण समद्विभाजक दोनों त्रिभुजों की उभयनिष्ठ भुजा हो और दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों। (यहाँ BE = BF और DE = DF)। तब SSS से दोनों प्राप्त त्रिभुज सर्वांगसम होंगे। सर्वांगसम त्रिभुज के लिए हमें एक ऐसा बिन्दु चाहिए जो भुजा BA और BC पर स्थित बिन्दुओं से समान दूरी पर हो।

पद 2 : रचना के चरण :

1. शीर्ष B को केंद्र लेकर, कोई भी त्रिज्या लेकर एक चाप काटें जो किरण BA और BC को क्रमशः बिन्दु E और F पर प्रतिच्छेद करती हो।



आकृति – 40



आकृति –41

2. अब E और F को केंद्र लेकर तथा $\frac{1}{2}$ EF से बड़ी त्रिज्या लेकर चाप काटें जो एक दूसरे को D पर प्रतिच्छेद करें।

3. अब किरण BD बनाएँ। यही अभीष्ट कोण समद्विभाजक है।

पद 3 : प्रमाण : लेकिन यह हम कैसे कहें कि किरण BD कोण समद्विभाजक है। आइए देखें।

D से F और E को मिलाएँ अब त्रिभुज BED और BFD में,

BE = BF (एक ही चाप कि त्रिज्याएँ)

ED = FD (एक ही चाप कि त्रिज्याएँ)

BD = BD (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः $\Delta BED \cong \Delta BFD$ (SSS से)

इससे हमें प्राप्त होता है $\angle ABD = \angle DBC$ (CPCT)

कोण समद्विभाजक की भुजाओं से दूरी :

कोण समद्विभाजक पर कोई बिन्दु P लें। बिन्दु P से भुजा BA और BC की दूरी ज्ञात करने के लिए P से BA और BC पर लम्ब डालें।

बिन्दु P से भुजा AB पर लंब डालें जो AB को M पर प्रतिच्छेद करता हो। इसी तरह P से ही BC पर लम्ब डालें जो उसे R पर प्रतिच्छेद करता हो। अब त्रिभुज BMP और BRP में,

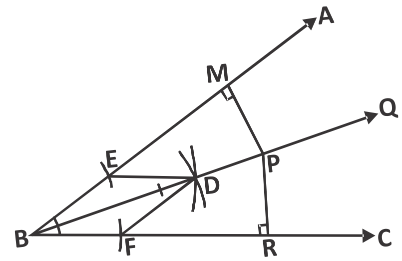
$\angle BMP = \angle BRP$ (समकोण)

$\angle MBP = \angle RBP$ (क्योंकि BP कोण समद्विभाजक है)

BP = BP (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta BMP \cong \Delta BRP$ (AAS सर्वांगसमता)

इससे हमें प्राप्त होता है PM = PR (CPCT))



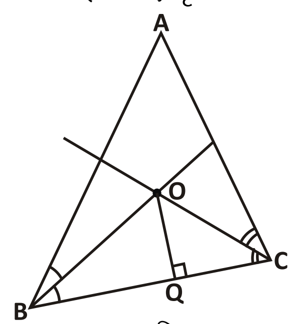
आकृति – 42

अंतः वृत्त (अंतर्गत वृत्त)

पद 1 : हमें एक त्रिभुज ABC दिया है और हमें एक ऐसे वृत्त की रचना करनी है जो त्रिभुज के तीनों भुजाओं को स्पर्श करती है।

रचना कैसे करें :

चूँकि वृत्त त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करते हुए गुजरता है इसलिए वृत्त का केंद्र तीनों भुजाओं से समान दूरी पर होगा। हम जानते हैं कि कोण समद्विभाजक पर स्थित कोई भी बिंदु कोण की भुजाओं से समान दूरी पर होता है। कोण ABC के कोण समद्विभाजक पर स्थित ऐसे कई बिंदु होंगे जो भुजा BA और BC से समान दूरी पर होंगे। इसी प्रकार कोण BCA के कोण समद्विभाजक पर भी ऐसे कई बिंदु स्थित होंगे जो भुजा CB और CA से समान दूरी पर होंगे।

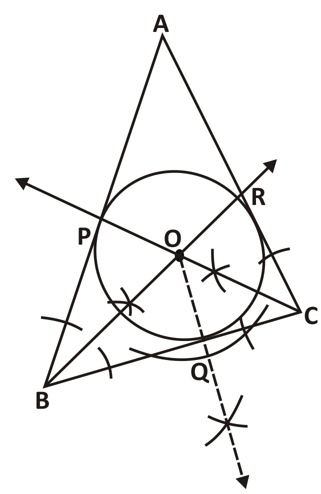


आकृति – 43

दोनों कोण समद्विभाजक एक दूसरे को जिस बिंदु पर काटते हैं उसे O मानें तो बिंदु O से भुजा AB, BC और CA की दूरी समान होगी। अब O को केन्द्र और केन्द्र से किसी भुजा की लम्बवत दूरी को त्रिज्या मानकर वृत्त खींचें। क्या यह वृत्त ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करेगा?

पद 2 : रचना के चरण :

1. एक त्रिभुज ABC बनाएँ।
2. कोण ABC और कोण BCA के कोण समद्विभाजक खींचें। जिस बिंदु पर दोनों एक दूसरे को काटें उसे बिंदु O मान लें।
3. अब बिंदु O से भुजा BC पर लंब डालें जो BC को Q पर प्रतिच्छेद करता है। O को केंद्र लेकर और OQ को त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाएँ। आकृति में आप देख सकते हैं कि यह वृत्त तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। अतः O की AB, BC और CA से लम्बवत दूरी समान है।



आकृति – 44

पद 3 : प्रमाण : आइए हम गणितीय तर्कों के आधार पर देखते हैं कि क्या प्राप्त वृत्त तीनों भुजाओं को स्पर्श करते हुए गुजरता है?

त्रिभुज POB और त्रिभुज BOQ में,

$\angle PBO = \angle QBO$

$\angle OPB = \angle OQB = 90^\circ$

OB = OB (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta POB \cong \Delta QOB$

$\therefore$ OP = OQ....(i)

इसी तरह $\Delta ROC \cong \Delta QOC$

$\therefore$ OR = OQ....(ii)

(i) और (ii) से हम कह सकते हैं कि,

OP = OQ = OR

अब हम O को केंद्र लेकर और त्रिज्या OP लेकर एक वृत्त बनाते हैं जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करते हुए गुजरता है।

किसी त्रिभुज के कोण समद्विभाजक जिस बिंदु पर मिलते हैं, उसे अंतःकेन्द्र कहते हैं और वृत्त को अंतःवृत्त कहते हैं।

करके देखें

1. अंतःवृत्त और परिवृत्त की रचना कीजिए जब त्रिभुज ABC में :
   (i) AB = 3 सेमी., BC = 4 सेमी. और $\angle B = 90^\circ$ । साथ ही अंतःवृत्त और परिवृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
   (ii) AB = BC = CA = 6 सेमी. अंतःकेंद्र और परिकेंद्र कहाँ स्थित हैं?
   (iii) BC = 7 सेमी., $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 105^\circ$ अंतःकेंद्र और परिकेंद्र कहाँ स्थित हैं?

FFEL4R

प्रश्नावली–3

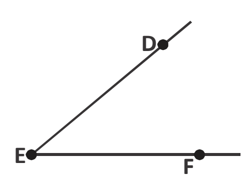
1. निर्देशानुसार रचना करें– (परकार का उपयोग करें)
   (i) रेखा ℓ पर स्थित बिन्दु p पर लंब खींचें।

   (ii) बिन्दु s से रेखा ℓ पर लंब खींचें।

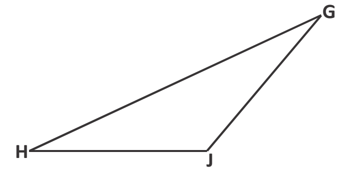
   (iii) रेखाखंड JK का लंब समद्विभाजक बनाएँ।

   (iv) बिन्दु 'T' से होती हुई रेखा जो ℓ के समांतर हो खींचें।

   (v) बिन्दु 'F' से होती हुई रेखा जो ED के समांतर हो, खींचें।



(vi) बिन्दु G से रेखा HJ पर लंब डालें।



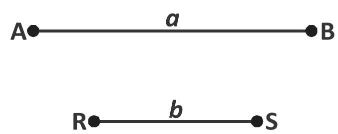
2. आपको दो रेखाखण्ड AB = a और RS = b दिए हैं। अब निर्देशानुसार रचना करें–

(i) 'a' और 'b' भुजा का आयत बनाएँ।

(ii) 4b परिमाप का वर्ग बनाएँ।

(iii) a कर्ण का वर्ग बनाएँ।

(iv) समांतर चतुर्भुज जिसकी भुजा a और b तथा इनके बीच का कोण θ हो।



3. एक समकोण त्रिभुज पर परिवृत्त की रचना कीजिए। रचे गए वृत्त की त्रिज्या का मान बताइए।

4. एक समकोण त्रिभुज पर अंतःवृत्त की रचना कीजिए। रचे गए वृत्त की त्रिज्या का मान बताइए।

5. एक समबाहु त्रिभुज पर अंतःवृत्त और परिवृत्त की रचना कीजिए। अब अंतःकेंद्र और परिकेंद्र निकालिए। क्या दोनों एक ही जगह पर स्थित हैं?

6. कोई तीन असंरेख बिन्दु (non-collinear points) लीजिए और उनसे गुजरने वाले एक वृत्त की रचना कीजिए।

7. मोहन अपनी शाला के वृत्ताकार मैदान के केन्द्र पर झण्डा फहराना चाहता है। मैदान में किस जगह झण्डे के लिए खंभा गड़ाया जाए, यह पता लगाने के लिए उसे जोया और राहुल की सहायता लेनी पड़ी। सोचिए तीनों ने मिलकर खंभे के लिए जगह कैसे ढूँढ़ी होगी?

हमने सीखा

1. **सवाल को समझना :–** सवाल पर काम शुरू करने का सबसे पहला कदम है सवाल को पढ़ना और यह देखना की क्या जानकारी दी गयी है और क्या रचना करनी है। यह एक तरीके से जानकारी को समझकर उसे गणितीय रूप व संदर्भ में परिवर्तित करने जैसा है। इसमें यह समझने की जरूरत है कि दी गई जानकारी में से कौनसी उपयोगी है और कौन सी नहीं। दी गई जानकारी के आधार पर किन ज्यामितीय अवधारणाओं का उपयोग हो सकता है, इस तरह की सोच सवाल को समझने मे मदद करती है।

2. एकत्रित की गई जानकारी के आधार पर एक कच्चा (Rough) चित्र बनाकर एवं विश्लेषण कर यह सोच सकते हैं कि इस सवाल को किस तरह हल करें। इसमें यह सोचना होगा कि जो जानकारी दी गई है उसमें अपेक्षित आकृति का कौन–कौन सा हिस्सा हमें ज्ञात हो गया है और आकृति की रचना के लिए क्या और चाहिए।

3. एक बार विश्लेषण कर कच्चा (Rough) चित्र बनने के बाद चरणबद्ध रूप से ज्यामितीय रचना की जा सकती है।

4. अंत में रचना पूरी होने के बाद देखें कि रचित आकृति सवाल में दी गयी जानकारी के अनुसार है या नहीं। ज्यामितीय रचना में आप माप के अलावा प्रमाण (proof) के माध्यम से भी देख सकते हैं कि रचित आकृति अभीष्ट है या नहीं।

अध्याय

14

गणितीय कथनों की जाँच

[PROOF OF MATHEMATICAL STATEMENTS]

FFNH6E

परिचय (Introduction)

हम अपने जीवन में अक्सर रोजाना के कथनों या दावों को ऐसे ही मान लेने के बजाय तर्कों से तौलने की कोशिश करते हैं। जैसे– आपने विज्ञापनों में देखा, सुना होगा कि– "आप इस पेंसिल से लिखेंगे तो तेज लिख पाएँगे।" या "आप अपने बच्चे को यह टॉनिक पिलाएँगे तो वह तेज दौड़ेगा।" यानी अगर आपको तेज लिखना है तो उसी पेंसिल से लिखें और टॉनिक पीने से तेज दौड़ेंगे नहीं तो पीछे रह जाएँगे। अब बात आती है कि इन दावों और कथनों को जो हम सुनते रहते हैं उन्हें कैसे जाँचा जाए? या उनकी सत्यता कैसे पता की जाए?

एक तरीका तो है कि बार–बार अवलोकन (Empirical Observation) करके पता करें कि टॉनिक पीने से कितने बच्चे दौड़ में अव्वल आए या कितने बच्चों का कद बढ़ा अथवा उसी पेंसिल से लिखने वाले कितने बच्चों की लिखने की गति तेज हो गई । फिर इन अवलोकनों के आधार पर आगे सोचा जा सकता है। पर क्या यह तरीका हर स्थिति में कारगर होगा? क्या यह गणितीय कथनों पर भी लागू हो सकता है?

जैसे इन कथनों को पढ़िए –

1. किसी संख्या का गुणज उस संख्या के सभी गुणनखण्डों का भी गुणज होता है।
2. जो संख्या 8 से विभाजित होगी वह 4 से भी विभाजित होगी।
3. संख्या 0.000001, संख्या 10^{-20} से बड़ी है।
4. दो विषम संख्याओं का जोड़ हमेशा सम संख्या होती है।
5. दो संख्याओं का गुणलफल उन दोनों संख्याओं से बड़ा होता है।

ऐसे कथनों को जाँचने के लिए क्या पहले वाला तरीका उपयोग कर सकते हैं? यानी क्या हम कथन (1) को जाँचने के लिए हर संख्या के सभी गुणज और गुणनखण्ड निकालेंगे? या फिर कथन (2) में 8 से विभाजित होने वाली अनंत संख्याओं को 4 से विभाजित करके देखेंगे?

यह स्पष्ट है कि इस प्रकार के कथनों को जाँचने के लिए यह तरीका संभव नहीं है। कुछ व्यापक तरीके या आधार जरूरी हैं जिससे यह पता लगाया जा सके कि 0.000001, 10^{-20} से बड़ा है या छोटा। इसी तरह कोई ऐसा नियम चाहिए जिनके आधार पर विषम संख्याओं का जोड़ सम संख्या दिखाया जा सके या फिर संख्याओं के गुणनफल का परीक्षण हो सके।

आइए गणितीय कथनों को जाँचने का तरीका पता करते हैं।

गणितीय कथनों को सिद्ध करना

इसके लिए हम कुछ कथनों का उदाहरण ले कर देखते हैं।

संख्याओं के कथन

कथन 1 : एक विषम और एक सम संख्या का जोड़ हमेशा विषम संख्या होती है।

उपपत्ति : किसी भी सम पूर्णांक b को हम $b = 2k$ लिख सकते हैं, जहां k कोई पूर्णांक है।

(सम पूर्णांक की परिभाषा से, चूंकि b, 2 से विभाजित है) -------------- (1)

किसी भी विषम पूर्णांक a को हम $a = 2k_1 + 1$ लिख सकते हैं ,जहाँ k_1 भी पूर्णांक है।

(किसी भी सम संख्या में 1 जोड़ने पर विषम संख्या प्राप्त होती है) ------- (2)

अब (1) व (2) को जोड़ने पर

$a + b = 2k_1 + 1 + 2k \quad = 2\,(k + k_1) + 1$

$= 2m + 1$ जहाँ $m = k + k_1$ है और m एक पूर्णांक है। (क्यों?)

चूँकि $2m$ एक सम संख्या है।

अतः $2m + 1$ एक विषम संख्या है।

यानी एक विषम और एक सम संख्या का जोड़ हमेशा विषम संख्या ही होगी।

आपने देखा कि यहाँ हमने सम और विषम पूर्णांक की परिभाषा के आधार पर इस कथन को सिद्ध किया है ।

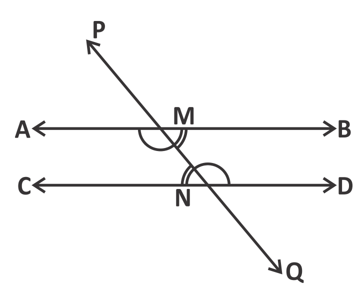
ज्यामितीय कथन

आपने कक्षा 9 में ज्यामिति के कथनों को सिद्ध करना सीखा है । जैसे – "चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग 360^0 होता है।" या "यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे तो एकान्तर अंतः कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।"

यहाँ हम दूसरे कथन की उपपत्ति करेंगे और उसके मुख्य पहलुओं को ढूँढ़ेंगे।

कथन 2 : यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे तो एकांतर अंतःकोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

उपपत्ति : माना AB और CD समांतर रेखाओं को PQ तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करती है ।



यहाँ $\angle MND$ व $\angle AMN$ एकांतर अन्तःकोणों का एक युग्म है ।

तथा $\angle MNC$ व $\angle BMN$ एकांतर अन्तःकोणों का दूसरा युग्म है ।

हमें यह देखना है कि क्या $\angle MND = \angle AMN$ व

$\angle MNC = \angle BMN$

चूँकि $\angle PMB$ व $\angle MND$ संगत कोण हैं

$\therefore \angle PMB = \angle MND$ (संगत कोण अभिगृहीत से) ....(1)

तथा $\angle PMB = \angle AMN$ (शीर्षाभिमुख कोण प्रमेय से) ....(2)

(1) और (2) से,

$\angle MND = \angle AMN$ ....(3)

इसी प्रकार

$\angle MNC = \angle BMN$ ....(4)

अतः यहाँ एकांतर अंतःकोणों के दोनों युग्म बराबर है।

उपपत्ति के मुख्य पहलू

ऊपर की दोनों उपपत्तियों को ध्यानपूर्वक पढ़िए और बताइए कि इन कथनों को सिद्ध करने में कौन–कौन से मुख्य पहलुओं का उपयोग हुआ है ?

माधवी कहती है कि उपपत्ति के तीन मुख्य पहलू दिखे–

1. दोनों कथनों को सिद्ध करने के लिए पहले से सिद्ध प्रमेय, परिभाषा या अभिगृहीतों का उपयोग किया गया है।
2. उपपत्ति का प्रत्येक कथन, ठीक पहले वाले कथन से तार्किक रूप से जुड़ा है।
3. कथनों को लिखते समय विशेष प्रकार के प्रतीकों व चिह्नों का उपयोग किया है और बड़े वाक्यों को इनका उपयोग करके संक्षिप्त में लिखा है।

क्या आप माधवी की बात से सहमत हैं?

करके देखें

1. "चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग 360^0 होता है।"

   इस कथन को सिद्ध करें और उसमें उपपत्ति के तीनों मुख्य पहलू ढूँढ़ें।

सोचें एवं चर्चा करें

जिन दो कथनों को ऊपर हमने सिद्ध किया है उनकी उपपत्ति पढ़ें और निम्नलिखित प्रश्नों पर कक्षा में चर्चा करें।

1. कौन–कौनसी परिभाषा, प्रमेयों या अभिगृहीतों का उपयोग किया गया है?
2. उन चिह्नों, प्रतीकों की सूची बनाइए जो इन उपपत्तियों में इस्तेमाल किए गए हैं।

उपपत्ति समझना व करना

आइए देखते हैं कि ऊपर लिखे तीनों पहलू किस प्रकार उपपत्ति पढ़ने, समझने और लिखने में मदद करते हैं।

1. "परिभाषाओं, पूर्व ज्ञात प्रमेय, स्वयं सिद्ध का प्रयोग

यदि आपको एक कथन सिद्ध करने के लिए दिया जाए तो आप कैसे शुरू करेंगे?

ज़ाहिर है इसके लिए आपको उन सभी ज्ञात जानकारियों की आवश्यकता होगी जिनके आधार पर कथन को सिद्ध किया जा सके। ये जानकारियाँ अभिगृहीत, परिभाषा, पूर्व सिद्ध कथन हो सकती हैं। इसलिए किसी कथन को सिद्ध करने के लिए सबसे पहले यह सोच लें कि क्या–क्या पता है? ताकि इन जानकारियों का इस्तेमाल सही जगह पर हो सके।

हमने समरूपता के अध्याय में दो त्रिभुजों में SAS और SSS समरूपता प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए AA समरूपता कसौटी का उपयोग किया है। इसी तरह कक्षा 9 में $\sqrt{2}$ को अपरिमेय संख्या सिद्ध करने हेतु परिमेय संख्या की परिभाषा का उपयोग किया गया व किसी समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं को बराबर सिद्ध करने के लिए "एकांतर कोणों का युग्म" प्रमेय का उपयोग किया गया।

करके देखें

अब तक की उपपत्तियों में उपयोग की गई परिभाषाएँ छाँटिए।

2. निगमनिक तर्कण द्वारा उपपत्ति (Deductive Reasoning)

किसी उपपत्ति में एक कथन के बाद अगला कथन किस आधार पर लिखें यह सोचना महत्वपूर्ण है। इसके लिए पहले से ज्ञात परिभाषा, अभिगृहीत व पूर्व सिद्ध प्रमेय की जानकारी होना आवश्यक है

1. निम्नलिखित कथन का निष्कर्ष कथन लिखिए ।

"l और m समांतर रेखाएँ हैं।"

समांतर रेखा की परिभाषा से हमें पता है कि समांतर रेखाओं में उभयनिष्ठ बिंदु नहीं होता है। (तर्क)

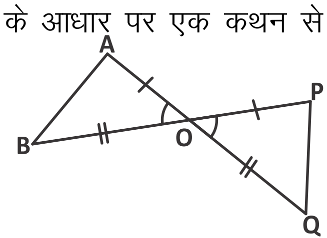
इसलिए हम कह सकते हैं यदि "l और m कोई दो समांतर रेखाएँ हैं तो उनमें कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं होगा।"(निष्कर्ष कथन)

एक अन्य उदाहरण देखते हैं–

2. यदि $a + 5 = b$ और $c = b$ है तो

$a + 5 = c$ होगा। याने $a = c - 5$

3. ऊपर लिखे दोनों उदाहरणों में परिभाषा और अभिगृहीत के आधार पर एक कथन से अगला कथन लिखा गया है। इसी तरह पूर्व सिद्ध कथन या प्रमेयों के आधार पर भी निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। आइए एक उदाहरण देखते हैं–



ΔAOB और ΔPOQ में $\angle AOB = \angle POQ$,

$OA = OP$ और $OB = OQ$ है।

SAS सर्वांगसमता प्रमेय के आधार पर हम कह सकते हैं कि$\Delta AOB \cong \Delta POQ$

4. निगमनिक तर्क हमें एक व्यापक सत्य कथन से विशिष्ट सत्य कथन तक पहुँचने में भी मदद करता है। उदाहरण के लिए यदि एक बार यह सिद्ध कर दें कि किन्हीं दो विषम

संख्याओं का गुणनफल एक विषम संख्या होती है तो बिना गुणा किए ही हम विषम संख्याओं को पहचान कर गुणनफल के विषम होने को जान सकते हैं।

उदाहरणार्थ 7428391 × 607349 का गुणनफल भी विषम संख्या होगी क्योंकि 7428391 और 607349 दोनों संख्याएँ ही विषम हैं।

करके देखें

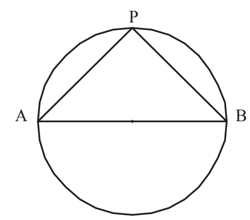
1. सिद्ध करें कि – किन्हीं भी दो क्रमागत विषम संख्याओं का योग, 4 का गुणज होता है।
2. दिए गए कथनों के आधार पर निष्कर्ष कथन लिखिए।

   (i) कथन a – वर्ग एक आयत है।

   कथन b – आयत एक समांतर चतुर्भुज है।

   (ii) कथन a – जीवा AB वृत्त की परिधि पर $\angle APB$ बनाती है।

   कथन b – जीवा AB एक व्यास है।

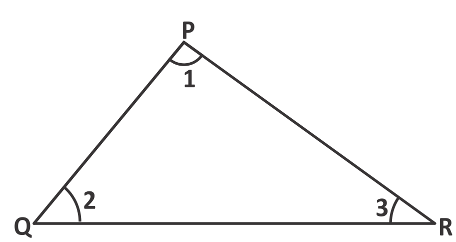


3. यदि ABCD और PQRS दो आयत हैं तो इनके कोणों, भुजाओं व विकर्णों के बारे में हम क्या–क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? क्या हम कह सकते हैं कि ये सर्वांगसम अथवा समरूप हैं?

क्या काटकर व नापकर गणितीय कथन सिद्ध कर सकते हैं ?

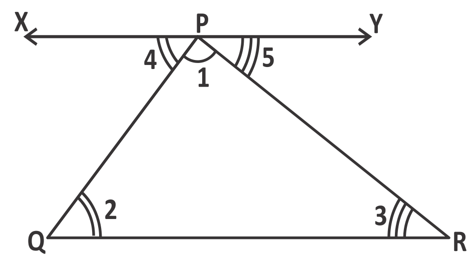
गणित सीखते समय हम कई बार माप कर या विशेष उदाहरण देखकर व्यापक स्तर पर कुछ बातें मान लेते हैं। त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180° है, इसे भी दिखाते समय हम माप कर अथवा कोनों को काट, उन्हें एक साथ रखकर यह कहते हैं कि अंतःकोणों का योग 180° है। किन्तु यह इस कथन की उपपत्ति नहीं है। इस तरह दर्शाने से यह हर त्रिभुज के लिए मान्य है ऐसा हम नहीं कह सकते।

हम जानते हैं कि किसी भी त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180° होता है, एक प्रमेय है जो कि सभी त्रिभुजों पर लागू एक व्यापक कथन है। मान लें कि आपने किसी एक त्रिभुज के कोणों को मापा यदि उनका योग 180° हो तो किसी दूसरे त्रिभुज के लिए भी ऐसा होगा हम यही बात नहीं कह सकते। इस प्रकार सभी संभव त्रिभुज के कोणों को मापना संभव नहीं है। इसके अलावा यदि योग 180° से कम या ज्यादा हो तो हम यही मानेंगे कि माप ठीक से नहीं हुआ। ऐसा इसलिए है क्योंकि हम जानते हैं कि समतल पर बने त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होगा ही और हम इसे व्यापक रूप में सिद्ध कर सकते हैं, जिससे यह हर त्रिभुज के लिए सही होगा ही।



गणित में कथन को सिद्ध करने के लिए निगमनिक तर्कण (Deductive Reasoning) का उपयोग करते हैं जिससे व्यापक रूप से किसी भी कथन की सत्यता जाँची व स्थापित की जा सकती है। व्यापकता के लिए हम यहाँ एक त्रिभुज की कल्पना करेंगे, जिसके आकार, कोणों की माप आदि के बारे में हम कुछ नहीं जानते अर्थात् वे कुछ भी हो सकते हैं। इससे हमारा निष्कर्ष हर त्रिभुज पर लागू होगा।

प्रमेय 1 : किसी त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180° होता है।



उपपत्ति : एक त्रिभुज PQR दिया है जिसके कोण $\angle 1, \angle 2$ और $\angle 3$ हैं।

सिद्ध करना है: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

रचना : QR के समांतर बिंदु P से होती हुई एक रेखा XPY बनाएँ, ताकि समांतर रेखाओं का गुणों का उपयोग कर सकें।

आकृति में,

$\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ (XPY एक रेखा है) ....(1)

$\angle 4 = \angle 2$ और $\angle 5 = \angle 3$ (एकांतर कोणों का युग्म) ....(2)

(1) में $\angle 4$ और $\angle 5$ का मान रखने पर

$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180°$ ....(3)

यानी $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

इसमें $\angle 1, \angle 2$ का अलग–अलग मान व PQ, QR आदि की लम्बाई कुछ भी हो सकती है। शर्त यह है कि त्रिभुज बन पाए। ....(4)

ज्यामिति में कथनों को सिद्ध करते समय हम अक्सर रचना करते हैं। इस उपपत्ति में हमने एक समांतर रेखा XPY खींची जिससे हम एकांतर कोण प्रमेय का उपयोग कर पाए।

करके देखें

सिद्ध करें कि –

1. किसी त्रिभुज का बहिष्कोण दूरस्थ अन्तःकोणों के योगफल के बराबर होता है।
2. किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होती हैं।
3. किसी समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
4. दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण व संगत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

3. गणितीय भाषा का उपयोग करके सटीक, संक्षिप्त एवं स्पष्ट भाषा में लिखना

प्राकृत संख्या के इस गुणधर्म को पढ़ें

$$n_1 + n_2 = n_2 + n_1 \qquad \forall\, n_1, n_2 \in \mathrm{N} \qquad (1)$$

क्या आप बता सकते हैं कि यह प्राकृत संख्या का कौन सा गुणधर्म है?

यह कथन प्राकृत संख्याओं में जोड़ के क्रम विनिमेय (Commutative Property) के गुणधर्म को बताता है। यानी शाब्दिक तौर पर कहें तो किन्हीं भी दो प्राकृत संख्याओं का जोड़, उनके क्रम बदल कर जोड़ने पर समान रहता है। कथन में इसी बात को कुछ अक्षर, प्रतीक या चिह्नों की मदद से संक्षिप्त में लिखा गया है। जैसे दो प्राकृत संख्याओं को n_1 और n_2 से दर्शाया गया है। साथ ही दो नए संकेत $\forall$ और $\in$ भी हैं।

यह छोटा सा गणितीय कथन यह बताता है कि किन्हीं भी दो प्राकृत संख्याओं का योगफल इस बात पर निर्भर नहीं करता है कि किसमें किसका योग कर रहे हैं। इसका अर्थ यह है कि हम n_1 और n_2 को मान बदल कर कोई भी प्राकृत संख्या रख सकते हैं और हर मान के $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ प्राप्त होता है ।

इसी तरह से हम गुणा के लिए क्रम विनिमेय के नियम को भी लिख सकते हैं।

अब परिमेय संख्या की निम्नलिखित परिभाषा को पढ़ें जिसे अक्षर–प्रतीकों की मदद से लिखा गया है।

$$\mathrm{Q} = \frac{p}{q} \qquad \text{जहाँ } p, q \in \mathrm{I} \;\&\; q \neq 0$$

''किसी परिमेय संख्या Q को $\frac{p}{q}$ के रुप में लिखते हैं जहाँ p, q कोई दो पूर्णांक हैं और q का मान 0 नहीं हो सकता।''

करके देखें

निम्नलिखित गणितीय कथनों को शब्दों में लिखिए ।

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a, m, n \in \mathrm{N}$

(ii) $p(x + y) = px + py \quad \forall p, x, y \in \mathrm{R}$

(ii) प्राकृतिक संख्याओं के सभी गुणधर्मों को प्रतीक भाषा में लिखें।

गणित में प्रतीक व गणितीय कथन

गणित में परिभाषाएँ, गुण, नियम इस तरीके से संक्षिप्त में लिखे जाते हैं। ऐसा न हो तो कथनों व उपपत्तियों को लिखने में जाने कितना लिखना पड़े। गणितीय भाषा सही चिह्नों के उपयोग से किसी बात को सटीकता से कहने में मदद करती है। इसलिए इसका उपयोग प्रमेय सिद्ध करते हुए करना जरूरी भी है और फायदेमंद भी।

वैसे तो गणित में अनेक चिह्न उपयोग किए जाते हैं पर यहाँ पर कुछ चिह्नों और उनके अर्थ दिए हैं। आगे हम इनका उपयोग समझेंगे और कुछ नए कथन भी लिखेंगे।

क्र.	चिह्न	अर्थ	
1.	$=$	बराबर है	(is equal to)
2.	$<$	से छोटा है	(Less than)
3.	$>$	से बड़ा है	(Greater than)
4.	$\therefore$	इसलिए	(Therefore)
5.	$\because$	चूंकि	(Since)
6.	$\neq$	बराबर नहीं है	(is not equal to)
7.	$\forall$	सभी के लिए/प्रत्येक के लिए	(For all)
8.	$\in$	का अवयव है	(Belongs to)
9.	$\notin$	का अवयव नहीं है	(does not belong to)
10.	$\sim$	समरूप है	(is similar to)
11.	$\cong$	सर्वांगसम है	(is congruent to)
12.	$\Rightarrow$	अंतर्भाव/इंगित करता है	(implies to)
13.	$\parallel$	समांतर है	(is parallel to)

उदाहरणः–1. निम्न शाब्दिक कथनों को गणितीय कथनों में लिखें–

(अ) पूर्णांक संख्याओं में व्यवकलन करते समय क्रम विनिमेय नियम लागू नहीं होता है।

(ब) किसी भी प्राकृत संख्या का वर्ग, उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।

हलः– (अ) $a - b \neq b - a \quad \forall\ a, b \in \mathrm{I}$

गणितीय कथन लिखने के लिए हमने दो चरों a और b का उपयोग किया है और चिह्नों $\neq, \forall, \in$ का उपयोग किया है।

(ब) $x^2 \geq x \qquad \forall x \in N$

यहाँ x किसी प्राकृत संख्या को निरूपित करता है।

करके देखें

इन सभी के लिए गणितीय कथन लिखें....

(i) किसी पूर्णांक संख्या को 1 से गुणा करने पर वही पूर्णांक संख्या प्राप्त होती है।

(ii) किसी भी त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा से अधिक होता है।

(iii) दो भिन्नात्मक संख्याओं का योग एक भिन्नात्मक संख्या ही होती है।

प्रश्नावली 1

1. बताइए कि निम्नलिखित गणितीय कथन सही हैं या गलत? उत्तर का कारण भी लिखिए।

(i) चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग $350°$ होता है।

(ii) किसी वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq 0$

(iii) दो सम संख्याओं का जोड़ सम संख्या होता है ।

(iv) सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती है।

(v) $3n + 1 > 4$, जहाँ n प्राकृत संख्या है।

(vi) $x^2 > 0$, जहाँ x वास्तविक संख्या है।

(vii) $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall\, a, b, c \in N$

(viii) $(p - q) + r = p - (q + r) \quad \forall\, p, q, r \in Q$

(ix) $(x + y) - z = x + (y - z) \quad \forall\, x, y, z \in R$

2. नीचे की सूची में कुछ अभिगृहीत, प्रमेय एवं परिभाषाएँ दी गई हैं। इन्हें ध्यान से पढ़ें।

कथन 1.	पूर्ण, हिस्से से बड़ा होता है। (अभिगृहीत)
कथन 2.	यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप अलग–अलग हो तो वह त्रिभुज विषमबाहु त्रिभुज होता है। (परिभाषा)
कथन 3.	यदि n विषम पूर्णांक है तो $n = 2k + 1$ लिखा जा सकता है, जहां k कोई पूर्णांक है। (परिभाषा)
कथन 4.	दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ, दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (प्रमेय)
कथन 5.	यदि कोई दो वस्तुएँ क्रमशः तीसरी वस्तु के बराबर हैं, तो पहली दोनों वस्तुएँ एक–दूसरे के बराबर होती हैं। (अभिगृहीत)

ऊपर दिए कथनों के आधार पर नीचे दी गई जानकारियों के लिए संभव निष्कर्ष कथन लिखें।

(i) त्रिभुज RST और त्रिभुज XYZ में $RS = XY$, $ST = YZ$ और $TR = ZX$ है।

(जैसे यहाँ कथन–4 के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\Delta RST \cong \Delta XYZ$)

(ii) $\frac{AB}{2} = AC$

(iii) $l = \frac{k+5}{2}$ और $2m = k + 5$ है। जहाँ k, l और $m \in R$

(iv) ΔDEF में $DE \neq EF \neq FD$ है।

(v) 141 एक विषम पूर्णांक है।

3. यदि n_1 और n_2 दो सम पूर्णांक हैं तथा k_1 और k_2 कोई दो पूर्णांक हैं तब,

(i) सम पूर्णांक की परिभाषा का उपयोग करके n_1 और n_2 को क्रमशः k_1 और k_2 के रूप में लिखिए ।

(ii) गुणा $n_1 n_2$ को k_1 और k_2 के रूप में लिखिए ।

(iii) अब $n_1 + n_2$ को k_1 और k_2 के रूप में लिखिए ।

(iv) $n_1 \times n_2$ सम संख्या है या विषम? क्यों?

(v) $n_1 + n_2$ सम संख्या है या विषम? क्यों?

4. यदि $ax^2 + bx + c = 0$ एक द्विघाती समीकरण है जहाँ $a, b, c \in R$ और $a \neq 0$ तो इनमें से कौन–कौन से समीकरण द्विघाती समीकरण हो सकते हैं और कारण लिखिए।

(i) $ax^2 - bx + c = 0$ (ii) $bx + c = 0$ (iii) $ax^2 + c = 0$

(iv) $ax^2 = 0$ (v) $bx = 0$

5. नीचे परिमेय संख्या (Q) की परिभाषा है–

$Q = \frac{p}{q}$ जहाँ $\forall\, p, q \in I$ और $q \neq 0$

(i) परिमेय संख्या की परिभाषा शब्दों में लिखिए।

(ii) क्या $\frac{6}{0}$ परिमेय संख्या है?

(iii) क्या $\frac{81}{1}$ परिमेय संख्या है? परिभाषा के आधार पर कारण बताइए।

(iv) यदि $\frac{b+9}{a-5}$ एक परिमेय व्यंजक है, जहाँ $a, b \in N$ (प्राकृत संख्या) है, तो a का कौन सा मान यहाँ मान्य नहीं है? और क्यों?

(v) यदि $\frac{p^2+7}{q^2-25}$ परिमेय व्यंजक है। यहाँ q का मान 5 और –5 क्यों नहीं हो सकता? (परिभाषा का उपयोग करें।)

गणितीय कथनों को सिद्ध करने के ढंग

अभी तक हमने गणितीय कथनों को सामान्यतः सीधे–सीधे निगमन तर्क से सिद्ध किया है। इसके कुछ और उदाहरण देखते हैं –

"यदि ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है तो वह समद्विबाहु त्रिभुज भी है।"

यदि कोई त्रिभुज समबाहु है तो उसकी तीनों भुजाएँ बराबर हैं। यानी उसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं तो उसकी कोई भी दो भुजाएँ बराबर होंगी ही। अतः वह समद्विबाहु भी होगा।

आइए अब इन्हीं तथ्यों को हम प्रतीकों की सहायता से लिखकर प्रदर्शित करना सीखते हैं।

$A : \Delta ABC$ समबाहु त्रिभुज है।

$B : \Delta ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है।

अब यदि कथन A सही है तो कथन B भी सही है। अतः इसे निम्नलिखित तरीके से दर्शाएँगे।

$A \Rightarrow B$ हम इसे ऐसे पढ़ते हैं "यदि A तो B" या 'A अंतर्भाव B'

यहाँ $\Rightarrow$ अंतर्भाव (इंगित करता है) का चिह्न है।

करके देखें

1. इस प्रकार के कुछ और कथन सोचकर लिखें जिन्हे सीधे–सीधे निगमन तर्क पर सिद्ध किया जा सकता है।
2. क्या $A \Rightarrow B$ यह दिखाता है कि $B \Rightarrow A$? कारण बताएँ।

अंतर्भाव का उपयोग

आइए कुछ उदाहरण देखते हैं

कथन 1 :– यदि $x^2 = 4$ है तो $x = 2, -2$ होगा।

$A : x^2 = 4$

$B : x = \pm 2$

हमें पता है कि यदि $x^2 = 4$ हो तो x का मान 2 और –2 होगा। अतः $A \Rightarrow B$ है।

कथन 2 :– यदि m , 9 का गुणज है तो m , 3 का भी गुणज है।

$A : m, 9$ का गुणज है।

$B : m, 3$ का गुणज है।

हम जानते हैं कि यदि कोई संख्या 9 का गुणज हो तो वह 3 की भी गुणज होगी। अतः $A \Rightarrow B$

करके देखें

इन कथनों में सही तार्किक संबंध पता करें और चिह्न ($\Rightarrow$) का उपयोग करके दर्शाएँ।

1. P: चतुर्भुज ABCD एक आयत है।
   Q: चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है ।
2. A: बिंदु P_1 रेखा l और m पर स्थित है।
   B: रेखा l और m असमांतर रेखाएँ हैं।

कुछ और कथनों को सिद्ध करना

अब हम कुछ ऐसे कथनों को परखेंगे अथवा उपपत्ति करेंगे जिनमें सीधे निगमन द्वारा हम कथन की उपपत्ति तक नहीं पहुंच सकते।

कथन 3 :– विषम संख्या का वर्ग विषम संख्या होती है।

उपपत्ति :– माना n एक विषम संख्या है तब

$$n = 2k + 1$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$n^2 = (2k + 1)^2$

$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$=2(2k^2+2k)+1$ (चूँकि $2k^2 + 2k$ भी पूर्णांक है, इसलिए इसे कोई पूर्णांक

$=2b + 1$ b के बराबर मान सकते हैं यानी $b = 2k^2 + 2k$)

यानी $n^2 = 2b + 1$

चूंकि $2b$ एक सम संख्या है अतः $2b + 1$ एक विषम संख्या है ।

स्पष्टतः विषम संख्या का वर्ग एक विषम संख्या होती है।

कथन 4 :– सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इस कथन को सिद्ध करने के लिए सबसे पहले हम यह मानेंगे कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या नहीं है यानि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अब यदि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है तो परिमेय संख्या के गुणधर्मों का उपयोग करते हुए हम ऐसे निष्कर्ष तक पहुँचेंगे जो $\sqrt{2}$ के परिमेय संख्या होने के विपरीत हो। इस तरह $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या सिद्ध हो जाएगी।

आइए इस कथन की उपपत्ति देखते हैं–

उपपत्ति :– दिए गए कथन के विपरीत को सत्य मानते हैं कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। तब परिमेय संख्या की परिभाषा से,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{जहाँ } a, b \in I,\ b \neq 0 \quad \text{............(1)}$$

साथ ही a और b सहअभाज्य है।

(1) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$2b^2 = a^2 \quad \text{..........(2)}$$

$$2m = a^2 \quad \text{जहाँ } m = b^2,\ m \in I$$

$2m = (2n)^2$ जहाँ $a = 2n, n \in I$ (यदि a^2 एक सम संख्या है तो a भी जो कि पूर्णांक है, एक सम संख्या होगी)

अब समीकरण (2) में a का मान रखने पर

$2b^2 = (2n)^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2$ (यदि मानें कि $n^2 = p$ कोई पूर्णांक है)

$\therefore b^2 = 2p$ जहाँ $p \in I$

(अतः b^2 एक सम संख्या है और इसलिए b जो कि पूर्णांक है, भी एक सम संख्या होगी।)

$\Rightarrow b = 2q$ जहाँ $q \in I$

यानी अब a और b का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 2 है अर्थात a और b सहअभाज्य नहीं है। यह माने गए कथन से विपरित है, जिसमें a, b सहअभाज्य थे। अतः इसको गलत सिद्ध करता है कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इस प्रकार सत्यापन के तरीके को विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति (proof by contradiction) कहते हैं। जैसा कि हमने ऊपर किया। इस तरीके में हम यह मान लेते हैं कि दिया गया कथन सत्य नहीं है और उस कथन का उल्टा (निषेधन) सही है। फिर तार्किक ढंग से आगे बढ़कर माने गए कथन को गलत साबित करते हैं। परिणाम स्वरूप वास्तविक कथन सत्य सिद्ध हो जाता है। इस प्रकार कई बार कथनों को सिद्ध करने के लिए इस विधि का उपयोग करते हैं। जैसा कि आपने देखा इसमें सबसे पहले कथन का निषेधन को सही मानते हैं।

किसी कथन को नकारना उस कथन का निषेधन कहलाता है। इसके लिए हम विशेष चिह्न का इस्तेमाल करते हैं। कथन P का निषेध कथन ~P याने टिल्ड P लिखा जाता है।

आइए कुछ उदाहरण देखते हैं–

1. $P : x$ और y दोनों पूर्णांक है।

   $\sim P : x$ और y दोनों पूर्णांक नहीं है।

2. B: रेखाखण्ड AB, रेखाखण्ड PT पर लंब है।

   $\sim B$: रेखाखण्ड AB, रेखाखण्ड PT पर लंब नहीं है।

करके देखें

निम्न कथनों का निषेधन कथन लिखिए–

1. C : स्पर्श रेखा वृत्त को सिर्फ एक बिंदु पर स्पर्श करती है।
2. D : समान्तर माध्य गुणोत्तर माध्य से बड़ा होता है।
3. R : $b^2 - a^2$ एक ऋणात्मक संख्या है।

कथनों की जाँच : कई बार कथनों की जाँच करने में सीधे–सीधे तर्क ढूँढ़ना आसान नहीं होता। उन्हें सिद्ध करना आसान नहीं होता और कई बार तो वह सही भी नहीं होते और उन्हें गलत सिद्ध करना होता है। गणितीय कथन को गलत सिद्ध करने के लिए कैसे बढ़ें?

कथन 5 :– सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती है।

हम पाते हैं कि इस कथन में तार्किक संबंध ढूँढना कठिन है, क्योंकि अभाज्य संख्याएँ पता करने का कोई निश्चित पैटर्न नहीं है यह स्पष्ट है कि अनंत अभाज्य संख्याओं के विषम होने की जाँच करना संभव नहीं है। किन्तु यदि हम एक भी ऐसी अभाज्य संख्या ढूँढ लें जो विषम नहीं है, तो यह कथन असत्य सिद्ध हो जाएगा। ऐसा एक प्रत्युदाहरण है। '2' यह एक ऐसी अभाज्य संख्या है जो विषम नहीं है। अतः दिया गया कथन असत्य है ।

अब इस कथन के लिए प्रत्युदाहरण ढूँढ़ें।

कथन 6 :– $\forall x \in R$ यदि x^2 परिमेय संख्या है तो x भी परिमेय संख्या है।

इस कथन में भी अगर $x^2 = 2$ है, जो एक परिमेय संख्या है तो $x = \sqrt{2}$ मिलेगा जो परिमेय संख्या नहीं है। अतः इस एक उदाहरण से दिए गए कथन को असत्य सिद्ध कर दिया। इसके लिए और भी कई उदाहरण मिल सकते है।

यह ध्यान रहे कि सिर्फ एक प्रत्युदाहरण से कोई व्यापक कथन असत्य सिद्ध हो जाता है क्योंकि गणित में किसी कथन के व्यापक रूप से सत्य होने के लिए उसका हर स्थिति में वैध होना जरुरी है। इसलिए यदि कथन एक भी स्थिति में गलत साबित हो जाता है तो वह असत्य है। इसे प्रत्युदाहरण द्वारा (Disproof by counter example) कथन को असत्य सिद्ध करना कहते हैं।

करके देखें

इन कथनों का एक प्रत्युदाहरण ढूंढ़ें और असत्य सिद्ध करें।

a. सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं का गुणा दोनों परिमेय संख्याओं से बड़ा होता है।

b. सभी समरूप आकृतियाँ, सर्वांगसम भी होती हैं।

उदाहरणः–2. सिद्ध कीजिए कि $2k+7$ एक विषम पूर्णांक है जहाँ k एक पूर्णांक है।

हलः– यदि n विषम पूर्णांक है, तो $n = 2k+1$ लिख सकते हैं जहाँ k कोई पूर्णांक है।

हमें सिद्ध करना है कि $n = 2k+7$ विषम पूर्णांक है $\forall\, k \in \mathrm{I}$

$n = 2k+7$

$= 2k+6+1$

$= 2(k+3)+1$ ----------(1)

माना $k+3 = m$ $\quad \forall\, m \in \mathrm{I}$ ----------(2)

(1) व (2) से $n = 2m+1$

$n = 2m+1$ एक विषम पूर्णांक हैं $\forall\, m \in \mathrm{I}$ (विषम संख्या की परिभाषा के अनुसार)

स्पष्टतः $2k+7$ एक विषम पूर्णांक है।

प्रश्नावली 2

1. इन कथनों को गणितीय रूप में लिखिए ।
   (i) पूर्णांक, गुणन संक्रिया के सापेक्ष संवृत है।
   (ii) परिमेय संख्याओं में घटाने में क्रम विनिमेय लागू नहीं होता है।
2. निम्न गणितीय कथनों को पढ़कर उनपर आधारित उत्तर दें।
   अ. कथन : $n^3 \geq n \qquad \forall\, n \in Q$
   (i) इस कथन को शब्दों में लिखें।
   (ii) क्या यह कथन सही है?
   (iii) यह कथन किन संख्याओं के लिए सही है?
   (iv) क्या इस कथन में $n = \frac{\sqrt{2}}{7}$ रखा जा सकता है?
   (v) क्या कथन $p^3 \geq p \;\; \forall p \in I$ सही है? कारण बताएँ।
   ब. $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$
   (i) इस कथन को 'यदि–तो' के रूप में लिखें।
   (ii) क्या यह कथन सही है?
   (iii) यदि $x \notin$ N क्या यह कथन सही है?
3. बताइए कि निम्न कथन सत्य है या असत्य। उत्तर का कारण लिखें।
   (i) सभी बहुभुज पंचभुज होते हैं।
   (ii) सभी षट्भुज बहुभुज होते हैं।
   (iii) सभी सम संख्याएँ 2 से भाज्य नहीं होती हैं।
   (iv) कुछ वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय होती हैं।
   (v) सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय होती हैं।
4. दिया हुआ है कि ABCD समांतर चतुर्भुज है और $\angle B = 80°$ तब समांतर चतुर्भुज के अन्य कोणों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
5. सिद्ध करें कि 4m+9 एक विषम पूर्णांक है जहाँ m एक पूर्णांक है।
6. उपयुक्त चिह्न का उपयोग करते हुए निम्न कथनों का निषेधन कथन लिखिए–
   (i) M:$\sqrt{7}$ अपरिमेय संख्या है।
   (ii) A : $6 + 3 = 9$
   (iii) D : कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।
   (iv) P : त्रिभुज PQR समबाहु है।
7. निम्न कथनों में तार्किक संबंध पता करें और अंतर्भाव ($\Rightarrow$) चिह्न का उपयोग करके दर्शाएँ–
   (i) A : ΔABC के सभी अंतःकोण बराबर हैं।
   B : ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।
   (ii) T : P(a) = 0
   S : (x-a) बहुपद P (x) का एक गुणनखंड है।
   (iii) P : x और y दो विषम संख्याएँ हैं।
   Q : $x + y$ एक सम संख्या है।

प्रतिधनात्मक (Contrapositive)

कुछ कथनों को दिए गए रूप में सिद्ध करना मुश्किल होता है, जैसे यह कथन देखें :–

A_1 : यदि दो त्रिभुज समरूप नहीं है तो वे त्रिभुज सर्वांगसम भी नहीं है।

इस कथन को ऐसे भी लिखा जा सकता है :–

A_2 : यदि दो त्रिभुज समरूप हैं तो वे सर्वांगसम भी हैं।

A_3 : यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं तो वे समरूप भी नहीं हैं।

A_4 : यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो वे त्रिभुज समरूप भी हैं।

अब बताएँ कि ऊपर लिखे चारों कथनों में से कौन–से कथन तुल्य है? जाहिर है कथन A_1 और A_4 तुल्य कथन है, क्योंकि यह दोनों तार्किक रूप से एक ही बात कहते हैं और वही उसका प्रतिधनात्मक रूप है।

हालाकि कथन A_1 और A_4 तार्किक रूप से एक ही बात को कहते हैं पर कथन A_1 की अपेक्षा A_4 में तर्क ढूँढना और उसे उपयोग करना ज्यादा आसान है। कथन A_4 कथन A_1 का प्रतिधनात्मक रूप है। इसलिए कुछ कथनों को सिद्ध करने के लिए उन्हें प्रतिधनात्मक रूप में लिखकर सिद्ध करते हैं।

उदाहरणः–3. निम्न कथन का प्रतिधनात्मक रूप में लिखें –

यदि एक संख्या 25 से भाज्य है तो वह 5 से भी भाज्य होगी।

हलः– यदि एक संख्या 5 से भाज्य नहीं है तो वह 25 से भी भाज्य नहीं है।

उदाहरणः–4. यदि $x^2 - 6x + 5$ सम है, तो x विषम है। जहाँ $\forall\, x \in I$

हलः– इस कथन को प्रतिधनात्मक रूप में लिखकर देखते हैं।

यदि x विषम नहीं है, तो $x^2 - 6x + 5$ सम नहीं है। $\forall\, x \in I$

अब x विषम नहीं है $\Rightarrow x$ सम है

$x = 2k, k \in I$ (सम पूर्णांक की परिभाषा से)

$x^2 - 6x + 5 \quad \Rightarrow (2k)^2 - 6(2k) + 5$

$\Rightarrow 4k^2 - 12k + 4 + 1 \quad \Rightarrow 2\,(2k^2 - 6k + 2) + 1$

$\Rightarrow 2b + 1$ जहाँ $b = 2k^2 - 6k + 2$ और b एक पूर्णांक है $(b \in I)$

विषम पूर्णांक की परिभाषा से हम यह जानते हैं कि $2b + 1$ एक विषम पूर्णांक है।

अर्थात् यदि x विषम नहीं है, तो $x^2 - 6x + 5$ सम नहीं है।

प्रश्नावली 3

FG799P

1. fl) d j sfd n बहुभुज जहाँ $n \geq 3$, और जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं, के अंतः कोणों का योग $n\left[180-\frac{360}{n}\right]^{\circ}$ होता है।
2. किसी समांतर श्रेणी का n वां पद 6n+1 है। सिद्ध करें कि उस श्रेणी के p पदों का योग $3p^2 + 4p$ है।
3. सिद्ध करें कि किन्हीं भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग हमेशा 6 का गुणज होता है।
4. सिद्ध करें कि $(2n+3)^2-(2n-3)^2$ का एक गुणनखण्ड 8 है यहाँ n एक प्राकृत संख्या है।
5. सिद्ध करें कि दो क्रमागत पूर्णांक संख्याओं के वर्गों के योग को 4 से विभाजित करने पर शेषफल सदैव 1 प्राप्त होता है ।

हमने सीखा

1. कथनों को सिद्ध करने के लिए –
   - (i) पहले से सिद्ध प्रमेय, परिभाषा या अभिगृहीत का उपयोग किया जाता है।
   - (ii) उपपत्ति का प्रत्येक कथन, ठीक पहले वाले कथन से तार्किक रूप से जुड़ा होता है।
   - (iii) कथनों को लिखते समय विशेष प्रकार के प्रतीकों चिह्नों का प्रयोग किया जाता है ताकि बड़े वाक्यों को संक्षिप्त में लिखा जा सके।
2. गणितीय भाषा का प्रयोग करके कथनों को सटीक, संक्षेप व स्पष्ट भाषा में लिखा जा सकता है।

   जैसे– $\forall, \in, \cong$ आदि।
3. गणितीय कथनों को सिद्ध करने के ढंग
   - (i) निगमन तर्क
   - (ii) प्रत्युदाहरण द्वारा

उत्तरमाला–1

1. (i) गलत (ii) सही (iii) सही (iv) गलत (v) गलत
   (vi) गलत (vii) सही (viii) गलत (ix) सही
2. (i) $\Delta RST \cong \Delta XYZ$ (कथन–4 से)

   (ii) $AB \rangle AC$ (कथन–1 से)

   (iii) $l = m$ (कथन–5 से)

   (iv) ΔDEF विषमबाहु त्रिभुज है।(कथन–2 से)

(v) $141 = 2 \times 70 + 1$ (कथन–3 से)

3. (i) $n_1 = 2k_1, n_2 = 2k_2$

(ii) $n_1 \times n_2 = 4(k_1 \times k_2)$

(iii) $n_1 + n_2 = 2(k_1 + k_2)$

(iv) $n_1 \times n_2 = 2(k_1 \times k_2) = 2k$, सम संख्या की परिभाषा से।

(v) सम संख्या।

4. (i), (iii), (iv) सभी में $a \neq 0$ है।

5. (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) $a = 5$ मान्य नहीं है।

उत्तरमाला–2

1. (i) $a.b = c \forall a, b, c \in I$ (ii) $p - q \neq q - p \forall p, q \in Q$

2. अ. (i) किसी परिमेय संख्या का घन उस संख्या से बड़ा होता है।

(ii) नहीं (iii) $n \in N$ के लिए सही है। (iv) नहीं

(v) नहीं, ऋणात्मक संख्या का घन उस संख्या से छोटा होता है।

ब. (i) यदि किसी संख्या का वर्ग 1 है तो उस संख्या का मान 1 होगा।

(ii) हाँ (iii) नहीं

3. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य

4. $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 80°$

6. (i) $\sim M : \sqrt{7}$ अपरिमेय संख्या नहीं है।

(ii) $\sim A : 6 + 3 \neq 9$

(iii) $\sim D :$ कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक नहीं होती हैं।

(iv) $\sim P :$ त्रिभुज PQR समबाहु नहीं है।

7. (i) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$ (ii) $S \Rightarrow T, T \Rightarrow S$ (iii) $P \Rightarrow Q$

अध्याय 15

ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

[SURFACE AREA AND VOLUME OF SOLIDS]

FGG5BC

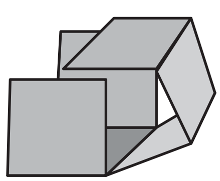
परिचय (Introduction)

हम त्रिविमीय संसार में रहते हैं। जिन त्रिविमीय आकृतियों को हम देख सकते हैं या स्पर्श कर सकते हैं उन आकृतियों की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई को मापा जा सकता है। कई बार हमें इन आकृतियों के अवयवों जैसे– आयतन, क्षेत्रफल आदि को मापने की आवश्यकता होती है। जैसे जमीन खरीदते–बेचते समय, मूर्ति बनाने में कितना सामान लगेगा पता करने में इत्यादि।

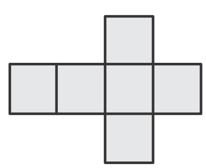
त्रिविमीय आकृतियों के क्षेत्रफल और आयतन पता करने के पहले, हम इन आकृतियों को खोलकर देखते हैं।

त्रिविमीय आकृति बनाने के लिए पृष्ठीय जाल

कमली और मांगी के पास पुट्ठे का एक घनाकार डिब्बा था। उन्होंने कैंची की सहायता से डिब्बे की कोर को काटा और फैलाकर रख दिया। इस खुली हुई आकृति के बारे में उन्होंने आपस में चर्चा की। कुछ समय बाद उन्होंने सेलो टेप (cello tape) की सहायता से इन खुले हुए भागों को जोड़कर डिब्बे को वापस बना लिया और बहुत खुश हुए। उन्होंने मांगी के पिता को डिब्बा दिखाया और अपने द्वारा किये गये कार्य की चर्चा की।



आकृति – 1

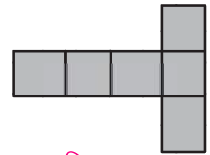


आकृति – 2

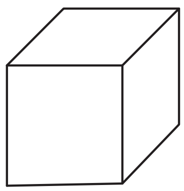
मांगी के पिता बहुत खुश थे परंतु उन्होंने पूछा कि क्या डिब्बा और अलग तरह से भी खोला जा सकता है? फिर उन्होंने डिब्बे को खोला और आकृति (3) प्राप्त किया। मांगी और कमली ने तुरंत ही उस आकृति को वापस रखने की कोशिश की।

कमली और मांगी से मांगी के पिता ने पुट्ठे को एक–एक घनाकार डिब्बों के किनारों को काटकर खुली आकृति बनाने के लिए कहा, दोनों ने नीचे दी गई आकृतियाँ बनाईं।

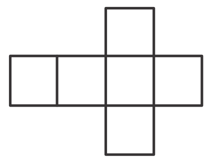
दोनों से मांगी के पिता ने इस गतिविधि के द्वारा आकृति बनाने के तरीकों पर चर्चा की यहाँ हमने पाया कि जब हम पुट्ठे के घनाकार डिब्बे की कोरों को काटते हैं और उसे फैला कर रखते हैं तो हमें दो



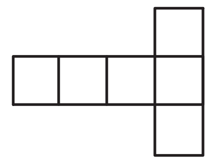
आकृति – 3



आकृति – 4



आकृति – 5



आकृति – 6

विभिन्न प्रकार की समतल आकृतियाँ प्राप्त हो सकती हैं। इन समतल आकृतियों को घन का पृष्ठीय जाल (Net) कहते हैं। किसी त्रिविमीय आकृति का पृष्ठीय जाल (Net) द्विविमीय आकृति होती है। आकृति–5 और आकृति–6 एक ही घन के दो पृष्ठीय जाल को प्रदर्शित करते हैं। क्या हम इसी घन के और अधिक पृष्ठीय जाल प्राप्त कर सकते हैं?

करके देखें

1. पुट्ठे के घनाकार डिब्बे लीजिए और उनकी कोरों को काटते हुए अलग–अलग ढंग से खोलिए। आप कितने प्रकार के विभिन्न खुली (समतल) आकृतियाँ पाते हैं?
2. घन का पृष्ठीय जाल (Net) बनाइए।

   हम पुट्ठे के घनाकार डिब्बे से ग्यारह भिन्न–भिन्न पृष्ठीय जाल प्राप्त कर सकते हैं। एक घनाभ का पृष्ठीय जाल कैसा होगा?
3. एक पुट्ठे से 4सेमी. भुजा वाला घनाकार डिब्बा तैयार कीजिए।
4. एक पुट्ठे का घनाभाकार डिब्बा तैयार कीजिए जिसकी भुजाएँ 12 सेमी., 6 सेमी. और 8 सेमी. है।

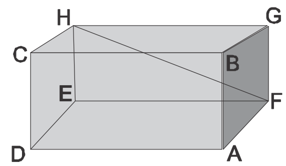
घन और घनाभ के भाग (Parts of a Cube and Cuboid)

(i) घन और घनाभ के पृष्ठ, कोर और शीर्ष (Face,Edge and Vertex)

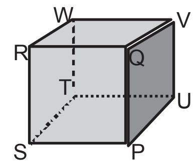
पिछली कक्षाओं में हम घन, घनाभ और बेलन के बारे में पढ़ चुके हैं । इस अध्याय में हम घन और घनाभ के भागों के बारे में जानेंगे।

पता लगाएँ (Explore)

दिए गए घन और घनाभ के चित्र को देखिए। यहाँ ABCDEFGH घनाभ और



आकृति – 7



आकृति – 8

PQRSTUVW घन है। घन और घनाभ का नामकरण शीर्षों के आधार पर होता है। क्या आप घन और घनाभ के पृष्ठ, कोर और शीर्षों को गिनकर उनके नाम बता सकते हैं?

घन या घनाभ के पृष्ठों व शीर्षों के बीच क्या संबंध है?

आकृति (7, 8) का अवलोकन करते हुए मित्रों से चर्चा करें और अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखें।

आपके अवलोकन के बिंदु निम्नलिखित हैं–

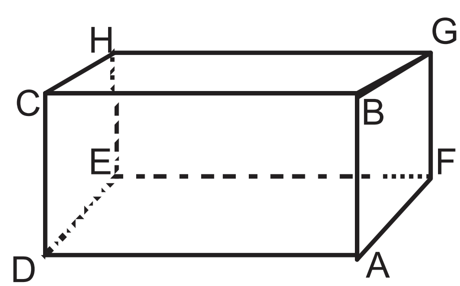
दिए गए घनाभ ABCDEFGH के कुछ अवलोकन एवं संबंध–

- घनाभ के 8 शीर्ष हैं, जो A,B,C,D,E,F,G और H हैं।
- घनाभ की 12 कोर हैं। घनाभ में सम्मुख कोर बराबर होते हैं। जैसे ऊपर दिए घनाभ (आकृति 7) में कोर AB व DC, EF व HG आदि सम्मुख कोर बराबर हैं।
- घनाभ के 6 पृष्ठ हैं, जो ABCD, EFGH, AFGB, DEHC, AFED और BGHC हैं। ABCD और EFGH आपस में बराबर हैं। इसी प्रकार AFGB और DEHC, AFED और BGHC बराबर हैं।

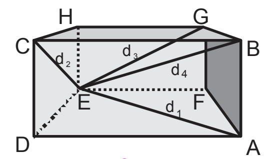
आकृति 7 व 8 का अवलोकन करें और बताएँ कि कौन–कौन सी कोरों की लंबाईयाँ और कौन –कौन से पृष्ठ आपस में बराबर हैं?

(ii) घन और घनाभ के विकर्ण (Diagonal of a Cube and Cuboid) :-

शिक्षक ने विद्यार्थियों से पूछा– चॉक के डिब्बे व कक्षा की आकृति कैसी है? सभी विद्यार्थियों ने उत्तर दिया कि घनाभ जैसी है तब शिक्षक ने पांच विद्यार्थियों को बुलाकर उन्हें चॉक के डिब्बे में पेंसिल रखने को कहा। विद्यार्थियों ने कहा कि पेंसिल किसी भी तल पर रखने पर डिब्बे में नहीं आती। ABCDEFGH चॉक का एक डिब्बा है। इस डिब्बे में पेंसिल को तल BGHC पर रखने पर हम देखते हैं कि पेंसिल डिब्बे के अन्दर नहीं समा पाती क्योंकि पेंसिल की लंबाई डिब्बे की लंबाई से अधिक है। तब क्या पेंसिल को डिब्बे के अन्दर रखा नहीं जा सकता ? लेकिन यदि पेंसिल को BGHC पर इस प्रकार रखें कि उसके सिरे BH या GC



की ओर हो तब एक संभावना बनती हैं कि शायद पेंसिल डिब्बे में समा जाए क्योंकि आप देखते हैं कि BGHC में BH या GC की लंबाई BG व BC से अधिक है। (एक चॉक का या अन्य कोई खाली डिब्बा ले कर देखें जो घनाभ के आकार का हो) यदि पेंसिल को ऐसा रखने के बाद भी वह डिब्बे में समा नहीं पाती तब क्या पेंसिल को रखने का कोई और तरीका हो सकता है जिससे पेंसिल के डिब्बे में समा सकने की संभावना हो?



आकृति – 9

अब यदि पेंसिल को इस प्रकार रखें कि उसके सिरे DG या AH या FC या EB की ओर रहे तब हम देखते हैं कि पेंसिल के डिब्बे में समा जाने की संभावना और भी बढ़ जाती है। यानी यह दूरी डिब्बे के अन्दर की सबसे लंबी दूरी होती है। यह दूरी चॉक के डिब्बे (घनाभ) का आकाशीय विकर्ण है। यानी AH,DG,FC,EB घनाभ ABCDEFGH के आकाशीय विकर्ण हैं। इन्हें हम घनाभ का विकर्ण कहते हैं। घनाभ ABCDEFGH में उसके तल के विपरीत कोनों की दूरियाँ जैसे AE व DF,DH व EC इत्यादि घनाभ के पृष्ठीय विकर्ण हैं।

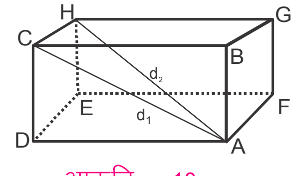
तब शिक्षक ने कक्षा के सभी विद्यार्थियों से कहा कि किसी घनाभाकार डिब्बे में धागे की सहायता से आकृति 9 में दर्शाई गई दूरियों $d_1, d_2, d_3,$ व d_4 को मापकर देखें कि उनमें कौन–सी दूरी सबसे अधिक है। इन दूरियों को हम क्या कहेंगे?

d_1, d_2 और d_3 को घनाभ का विकर्ण कहते हैं, परंतु d_4 क्या है? क्या हम इसे भी विकर्ण कह सकते हैं? यह भी एक विकर्ण है किन्तु बाकी से अलग। यह घनाभ के किसी भी तल पर स्थित नहीं है।

इस प्रकार $d_1, d_2, d_3,$ और d_4 विकर्ण हैं,जिसमें परंतु ये दो भिन्न प्रकार के हैं। d_1, d_2, d_3 किसी पृष्ठ पर बने विकर्ण हैं इसलिए इन्हें पृष्ठीय विकर्ण कहते हैं तथा d_4 पूरे घनाभ में है इसलिए इसे घनाभ का विकर्ण (diagonal of cuboid) या आकाशीय विकर्ण कहते हैं।

घनाभ का पृष्ठीय और आकाशीय विकर्ण (face and space diagonal)

यदि हम पुट्ठे की डिब्बे को देखेंगे तो पाएँगे कि विकर्ण दो प्रकार के हैं एक डिब्बे के पृष्ठ पर तथा दूसरा पूरे घनाभ में है जो विकर्ण डिब्बे के पृष्ठ पर बनते हैं, वे पृष्ठीय विकर्ण कहलाते हैं और जो विकर्ण पूरे डिब्बे (अर्थात त्रिविमीय आकृति) में बनते हैं, वे घनाभ के विकर्ण कहलाते हैं।



आकृति – 10

ज्यामिति में घन या घनाभ का पृष्ठीय विकर्ण एक ही पृष्ठ के शीर्षों को तथा घनाभ का विकर्ण अलग–अलग पृष्ठों को मिलाने वाला रेखाखंड होता है। दिए गए घनाभ (आकृति–10) में AH घनाभ का विकर्ण तथा AC पृष्ठीय विकर्ण है।

हम घन या घनाभ के कुल 16 विकर्ण प्राप्त कर सकते हैं जिसमे 12 पृष्ठीय विकर्ण तथा 4 घन और घनाभ के विकर्ण हैं।

करके देखें

1. अपनी कॉपी पर एक घन और घनाभ बनाइए और इनके विकर्णों के नाम लिखिए। घन और घनाभ के पृष्ठीय तथा घन और घनाभ के विकर्णों की संख्या गिनकर अलग–अलग लिखिए।

घन एवं घनाभ के विकर्णों की लंबाई पता करना
(Finding out the Diagonal of cube and cuboid)

घनाभ (Cuboid)

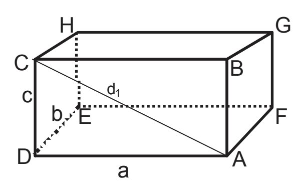
किसी कमरे में कमरे की लंबाई ,चौड़ाई और ऊँचाई से भी अधिक लंबाई के बाँस को रखना है। यदि हमें कमरे की लंबाई,चौड़ाई,ऊँचाई और बाँस की लंबाई पता हो तब यह कैसे जान पाएँगे कि वह बाँस कमरे में रखा जा सकेगा या नहीं ? या हम यह कैसे बताएँ कि अधिकतम कितनी लंबाई का बाँस कमरे के भीतर रखा जा सकेगा? यानी किसी घनाभ के आकार के डिब्बों में अधिकतम कितनी लंबाई की छड़ी,पेंसिल या लकड़ी का टुकड़ा रखा जा सकता है यह पता करने के लिए हमें घनाभ की लंबाई ,चौड़ाई,ऊँचाई और उसके आकाशीय विकर्ण में संबंध को जानना होगा। हम घन और घनाभ के पृष्ठीय विकर्ण तथा घन या घनाभ के विकर्णों के बारे में जान चुके हैं । अब हम यह जानेंगे कि यदि घनाभ की भुजाएँ दी गई हों तो उनके पृष्ठीय विकर्ण तथा घनाभ के विकर्णों की लंबाई की गणना कैसे करें?

पृष्ठीय विकर्ण (Face diagonal)

पृष्ठीय विकर्ण की लंबाई कैसे ज्ञात करेंगे?

हम जानते हैं कि ΔADC एक समकोण त्रिभुज है जहाँ $AD = a$ इकाई और $DC = c$ इकाई

है इसलिए बोधायन–पाइथागोरस प्रमेय से हम पाते हैं कि



आकृति – 11

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

अतः पृष्ठीय विकर्ण (AC) की लंबाई = $\sqrt{a^2 + c^2}$ इकाई

इसी प्रकार हम पृष्ठीय विकर्ण AE और AG ज्ञात कर सकते हैं।

$$AE = d_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ इकाई}$$

$$AG = d_3 = \sqrt{b^2 + c^2} \text{ इकाई}$$

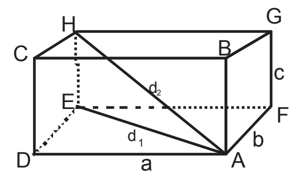
अतः ऐसे घनाभ जिसकी तीनों भुजाएँ अलग–अलग लंबाई की हैं में 3 अलग–अलग लंबाई के पृष्ठ विकर्ण होते हैं।

घनाभ का विकर्ण

दिए गए घनाभ (आकृति 11) की भुजाएँ a इकाई, b इकाई और c इकाई हैं। AH घनाभ का एक विकर्ण है। हम घनाभ के विकर्ण AH की लंबाई की गणना कैसे करेंगे?

आकृति 11 में AE एक पृष्ठीय विकर्ण है और इसकी लंबाई $\sqrt{a^2+b^2}$ इकाई होगी।

ΔAEH एक समकोण त्रिभुज है।(आकृति 12) हम बोधायन–पाइथागोरस प्रमेय से घनाभ का विकर्ण AH की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं।



आकृति – 12

$$AH = \sqrt{AE^2 + EH^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)+c^2}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

इसलिए घनाभ के विकर्ण (AH) की लंबाई

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ इकाई

अतः घनाभ के आकाशीय विकर्ण की लंबाई = $\sqrt{(\text{लंबाई})^2+(\text{चौड़ाई})^2+(\text{ऊँचाई})^2}$ इकाई

क्या अन्य 3 आकाशीय विकर्ण की लंबाई भी इतनी ही है? यह विकर्ण पहचानें।

विकर्ण हैं........,..........,........

बोधायन–पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके पता करें।

घन (Cube) -

यदि घन की भुजा a इकाई हो तो घन के पृष्ठीय विकर्ण की लंबाई $= \sqrt{a^2+a^2}$

$= \sqrt{2a^2}$

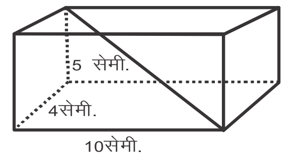
$= a\sqrt{2}$ इकाई

घन के सभी पृष्ठीय विकर्ण एक ही लंबाई के हैं।

घन का आकाशीय विकर्ण $= \sqrt{a^2+a^2+a^2}$

$= \sqrt{3a^2}$

$= a\sqrt{3}$ इकाई



आकृति – 13

उदाहरणः–1. एक घनाभ की लंबाई 10 सेमी., चौड़ाई 4 सेमी. तथा ऊँचाई 5 सेमी. है तो आकाशीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए?

हलः– घनाभ की लंबाई, चौड़ाई व ऊँचाई दी गई है। हमें घनाभ के आकाशीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात करनी है।

हम जानते हैं कि

$$\text{घनाभ का विकर्ण} = \sqrt{(\text{लंबाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2 + (\text{ऊँचाई})^2}$$

$$= \sqrt{(10)^2 + (4)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{100 + 16 + 25}$$

$$= \sqrt{141}$$

$$= 11.87 \text{ सेमी.}$$

अतः घनाभ के विकर्ण की लंबाई 11.87 सेमी. होगी।

उदाहरणः–2.

6 सेमी. भुजा वाले घन के पृष्ठीय विकर्ण व घन के आकाशीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए?

हलः– घन की भुजा 6 सेमी. दी गई है। हमें पृष्ठीय व घन के आकाशीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात करनी है।

हम जानते हैं कि घन का पृष्ठीय विकर्ण $= a\sqrt{2}$ इकाई, जहाँ a घन की भुजा है।

अतः घन का पृष्ठीय विकर्ण $= 6\sqrt{2}$ सेमी.

चूँकि घन का विकर्ण $= a\sqrt{3}$ इकाई

अतः घन का विकर्ण $= 6\sqrt{3}$ सेमी.

प्रश्नावली–1

1. एक घनाभ 8 मी. लंबा, 4 मी. चौड़ा और 2 मी. ऊँचा है। घनाभ के सभी विकर्णों की लंबाई ज्ञात कीजिए?
2. एक घन के पृष्ठीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा $12\sqrt{3}$ से. मी. है। उसका आकाशीय विकर्ण कितना होगा?
3. उस बड़े से बड़े खंभे की लंबाई ज्ञात कीजिए जो 10 मी. लंबा, 10 मी. चौड़ा और 5 मी. ऊँचे कमरे में रखा जा सकता है?

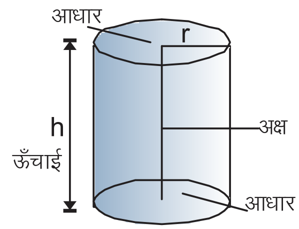
FGQ1CZ

बेलन (Cylinder)

बेलन एक त्रिविमीय आकृति है जिसमें दो सर्वांगसम एवं समांतर वृत्तीय पृष्ठ, एक वक्र पृष्ठ के द्वारा आपस में जुड़े होते हैं।

बेलन के उदाहरण – पाइप, ट्यूब लाइट इत्यादि।

वृत्तीय पृष्ठों के बीच की लंबवत दूरी को बेलन की ऊँचाई तथा वृत्तीय पृष्ठ को बेलन का आधार कहते हैं। वृत्तीय पृष्ठों (आधार) के केन्द्रों को मिलाने वाला रेखाखंड बेलन का अक्ष कहलाता है।



आकृति – 14

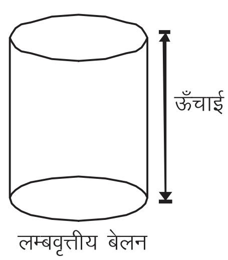
बेलन के प्रकार (Types of Cylinder)

लंबवृत्तीय और तिर्यक बेलन

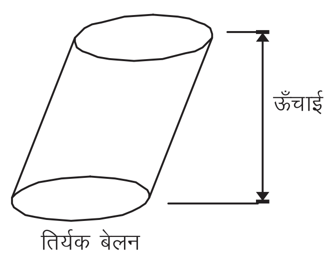
जब दो आधार ठीक एक दूसरे के ऊपर हों तथा अक्ष आधार के साथ समकोण बनाता हो तो उसे " लंब वृत्तीय बेलन " कहते हैं।(आकृति 15) यदि लंब वृत्तीय बेलन के एक आधार को थोड़ा सा खिसका दिया जाये जिससे अक्ष आधार के लंबवत न हो तो उसे तिर्यक बेलन (Oblique Cylinder) कहते हैं।(आकृति 16)

बेलन का पृष्ठीय जाल (Net of Cylinder)

एक ऐसा बेलन लें जिसके दोनों सिरे बंद हों। माना इस बेलन के आधार की त्रिज्या r



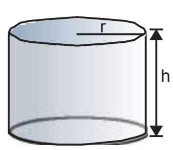
आकृति – 15



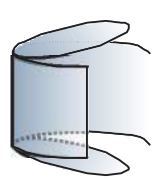
आकृति – 16

तथा ऊँचाई h इकाई है। जब हम बेलन (आकृति–17)की कोर को काटकर फैलाते हैं (आकृति 18, 19) तब हमें बेलन का पृष्ठीय जाल (net) प्राप्त होता है।

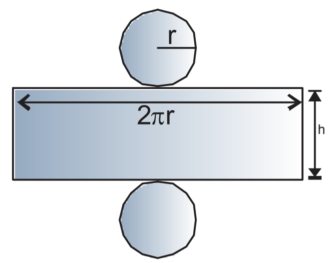
बेलन के पृष्ठीय जाल में, आयत की लंबाई (बेलन का वक्र तल) $2\pi r$ इकाई तथा चौड़ाई (बेलन की ऊँचाई) h इकाई और दोनों वृत्तीय सतहों की त्रिज्या r इकाई है।



आकृति – 17



आकृति – 18



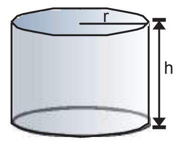
आकृति – 19

करके देखें

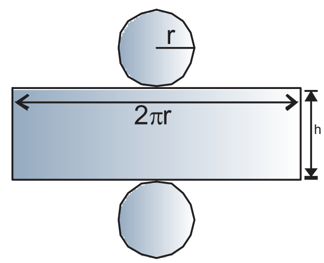
1. 7 सेमी. ऊँचाई तथा 2 सेमी. त्रिज्या के आधार वाले बेलन का पृष्ठीय जाल (net) बनाइए।
2. ड्राईंग पेपर का उपयोग करते हुए 7 सेमी. ऊँचाई तथा 2 सेमी. त्रिज्या वाले बेलन बनाइए।

लंब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल (Surface area of right circular cylinder)

यहाँ r त्रिज्या तथा h ऊँचाई के बेलन का पृष्ठीय जाल (Net) आकृति 20(ii) के समान दिखेगा। इस संदर्भ में आयत की चौड़ाई बेलन की ऊँचाई h के बराबर तथा आयत की लंबाई वृत्त की परिधि $2\pi r$ के बराबर है।



आकृति – 20(i)



आकृति – 20(ii)

अतः बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= $2\pi rh$ वर्ग इकाई

और बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + दोनों आधारों का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

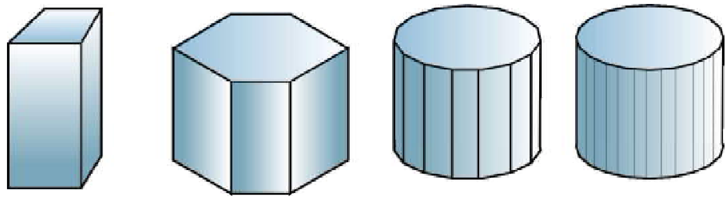
$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$ वर्ग इकाई

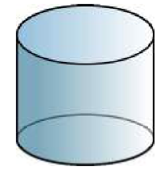
जहाँ r बेलन के आधार की त्रिज्या तथा ऊँचाई h है।

लंब वृत्तीय बेलन का आयतन (Volume of a Right Circular Cylinder)

हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन, घनाभ के आधार का क्षेत्रफल और उसकी ऊँचाई का गुणनफल होता है। नीचे दी गई आकृति–21 एक घनाभ है जिसके आधार में भुजाओं की संख्या के बढ़ने से आकृति –21 में क्रमिक परिवर्तन हो रहा है। आप देख सकते हैं कि यह धीरे–धीरे लंब वृत्तीय बेलन बनता जाता है। यह इसलिए कि आधार धीरे–धीरे वृत्त के और करीब जाता रहता है।जब इसके आधार की भुजाओं की संख्या असीमित हो जाती है तब यह आधार वृत्त बन जाता है और पूरी आकृति लंब वृत्तीय बेलन (आकृति–22) बन जाती है।



आकृति – 21



आकृति – 22

इसलिए हम कह सकते हैं कि बेलन के आयतन का सूत्र हम घनाभ से प्राप्त कर सकते हैं। बेलन का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और उसकी ऊँचाई के गुणनफल के बराबर होता है।

मान बेलन के आधार की त्रिज्या r इकाई तथा ऊँचाई h इकाई हो तो

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$ घन इकाई

करके देखें

1. एक कागज की शीट लें। उसे लंबाई की तरफ से मोड़कर एक बेलन बनाएँ। प्राप्त बेलन का क्षेत्रफल एवं आयतन प्राप्त करें। अब इसी शीट को चौड़ाई की ओर से मोड़कर प्राप्त बेलन का आयतन एवं क्षेत्रफल प्राप्त करें। प्राप्त आयतन और क्षेत्रफल के बारे में आप क्या कह सकते हैं?
2. पाँच रुपए के कुछ सिक्के लें और अलग–अलग संख्या में सिक्कों को एक के ऊपर एक जमाएँ। इस तरह से प्राप्त आकृति का क्षेत्रफल एवं आयतन निकालें। क्षेत्रफल एवं आयतन प्राप्त करने के लिए आपने किन–किन तरीकों का उपयोग किया?

वक्रपृष्ठ व आयतन की गणना

अकसर आयतन मापने के लिए बेलनाकार बर्तनों का उपयोग होता है। इसके अलावा यह पता करना होता है कि किसी धातु की बेलनाकार वस्तु को बनाने में कितनी धातु लगेगी अथवा किसी बेलनाकार डिब्बे पर रंग करने में कितना रंग खर्च होगा अथवा कितना कागज इसे पूरी तरह लपेट लेगा? इस सबके लिए हमें बेलन के वक्रपृष्ठ व आयतन की गणना करनी होगी। आइए,देखें यह गणना कैसे करते हैं।

उदाहरण:–3. एक लंबवृत्तीय बेलन के आधार की परिधि 44 सेमी. है, यदि बेलन की ऊँचाई 10 सेमी. है तो बेलन का वक्रपृष्ठ और आयतन ज्ञात कीजिए।

हल:– मान लीजिए कि बेलन के आधार की त्रिज्या r सेमी. और ऊँचाई h सेमी. है।

दिया है बेलन की ऊँचाई h = 10 सेमी.

बेलन के आधार की परिधि $2\pi r$ = 44 सेमी.

$$r = \frac{44}{2\pi}$$

$$r = \frac{44}{2} \times \frac{7}{22}$$

$$r = 7 \text{ सेमी.}$$

बेलन का वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 10$$

बेलन का वक्रपृष्ठ = 440 वर्ग सेमी.

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 10$$

बेलन का आयतन = 1540 घन सेमी.

उदाहरणः—4. दो बराबर ऊँचाई वाले लंबवृत्तीय बेलनों के आधार की त्रिज्या 3 : 4 के अनुपात में हैं। इनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए

हलः— मान लीजिए कि दोनों बेलनों की त्रिज्याएँ क्रमशः r_1 और r_2 तथा ऊँचाई h है।(क्यों)
चूँकि बेलन के आधार की त्रिज्याएँ क्रमशः 3 : 4 के अनुपात में है

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{4}$$

या $r_1 = 3r, r_2 = 4r$ (क्यों ?)

अतः पहले बेलन का आयतन $= \pi r_1^2 h$

तथा दूसरे बेलन का आयतन $= \pi r_2^2 h$

$\therefore$ दोनों बेलनों का आयतन का अनुपात $\dfrac{\pi r_1^2 h}{\pi r_2^2 h} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$

$$\frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_2^2 h} = \frac{(3r)^2}{(4r)^2}$$

$$= \frac{9r^2}{16r^2}$$

$$= \frac{9}{16}$$

उदाहरणः—5. आयशा को विज्ञान प्रोजेक्ट के अंतर्गत बेलनाकार बहुरूपदर्शक (kaleido-scope) का वक्रपृष्ठ बनाने के लिए कितने क्षेत्रफल के चार्ट पेपर (Chart paper) की आवश्यकता होगी, यदि उसकी त्रिज्या 2.1 सेमी. और लंबाई 20 सेमी. हो।

हलः— दिया है

बेलनाकार बहुरूपदर्शक की त्रिज्या $r=2.1$ सेमी.

बहुरूपदर्शक की लंबाई $h = 20$ सेमी.

आवश्यक चार्ट पेपर का क्षेत्रफल = बहुरूपदर्शक के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh$$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 2.1\times 20$$

$= 264$ वर्ग सेमी.

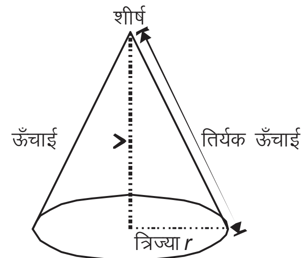
प्रश्नावली 2

1. एक बेलन के आधार की त्रिज्या 14 सेमी. और ऊँचाई 10 सेमी. है। बेलन के वक्रपृष्ठ तथा संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 3696 वर्ग सेमी. है। यदि बेलन के आधार की त्रिज्या 14 सेमी. है तो बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. 14 सेमी. ऊँचाई वाले बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 88 वर्ग सेमी. है। बेलन के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।
4. एक बेलनाकार स्तंभ का व्यास 50 सेमी. और ऊँचाई 3.5 मी. है। बेलन के वक्रपृष्ठ की रंगाई का लागत मूल्य ज्ञात कीजिए यदि दर 12.50 रू. प्रति वर्ग मीटर है।
5. एक रोलर का व्यास 84 सेमी. और लंबाई 120 सेमी. है। पूरे मैदान को एक बार चलने में रोलर 500 चक्कर लगाता है तो मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 3 सेमी. और ऊँचाई 14 सेमी. है।
7. एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. और ऊँचाई 10 सेमी. है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।
8 एक बेलन के आधार की परिधि 88 सेमी. और ऊँचाई 10 सेमी. है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।
9. एक बेलन का आयतन 3080 घन सेमी. और ऊँचाई 20 सेमी. है। बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
10. एक 35 सेमी. ऊँचाई वाले जार (Vessel) में 11 लीटर जूस आता है। जार का व्यास ज्ञात कीजिए। (1 लीटर= 1000 घन सेमी.)
11. एक पतले बेलनाकार टीन में 1 लीटर पेंट आता है। यदि टीन का व्यास 14 सेमी. है तो टीन की ऊँचाई क्या होगी? (लीटर= 1000घन सेमी.)
12. एक अस्पताल में हर मरीज को प्रतिदिन 7 सेमी. व्यास वाले बेलनाकार बर्तन में सूप दिया जाता है। यदि बेलनाकार बर्तन में सूप 4 सेमी. की ऊँचाई तक भरा जाता हो तो अस्पताल में प्रतिदिन 50 मरीजों के लिए कितनी मात्रा में सूप बनाया जाता है?

13. एक तांबे के छड़ का व्यास 1 मी. और लंबाई 8 मी. है जिसे पिघलाकर 18 मीटर पतला तार खींचा गया है तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।
14. 7 मी. व्यास का एक कुआँ 20 मी. गहरा खोदा गया और उससे निकली मिट्टी से 22 मी. $\times$14 मी. का एक प्लेटफार्म बनाया गया है। इस प्लेटफार्म की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
15. एक घनाभ जिसकी भुजाएँ 5.5 सेमी.,10सेमी. और 3.5 सेमी. है को पिघलाकर 1.75 सेमी. व्यास तथा 2 सेमी. मोटाई के कितने सिक्के बनाये जा सकते हैं?
16. बेलन का आयतन और वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल क्रमशः 24750 घन सेमी. और 3300 वर्ग सेमी. हैं। बेलन के आधार की त्रिज्या और उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

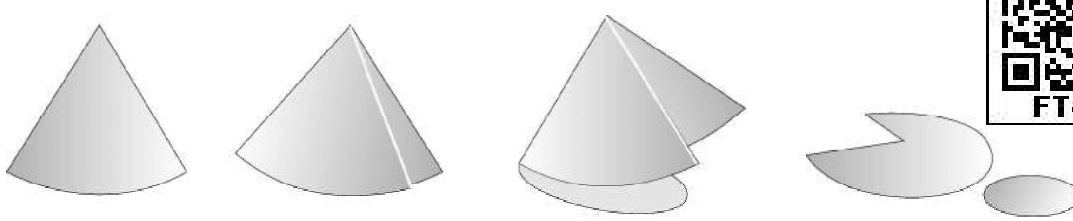
शंकु (cone)

शंकु एक ऐसी त्रिविमीय आकृति है, जिसमें एक वृत्तीय आधार और एक शीर्ष होता है। यह दो रेखाखण्डों से जुड़े हुए होते हैं। शीर्ष से आधार की परिधि को जोड़ने वाला रेखाखण्ड, शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) होता है। शंकु के शीर्ष से शंकु के आधार के केन्द्र को मिलाने वाला रेखाखण्ड, अगर शंकु के आधार पर लंब हो, तो उसे लंब वृत्तीय शंकु कहते हैं।



आकृति – 23

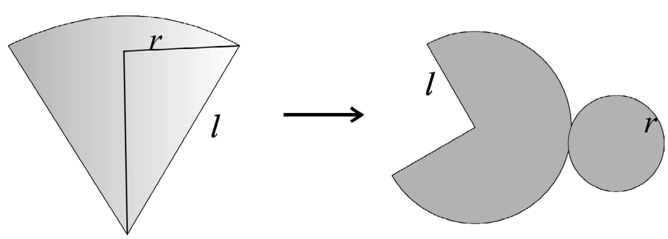
FT49TJ



आकृति – 24

1. शंकु का पृष्ठीय जाल

नीचे की शांकव की आकृतियों को देखिए। यदि हम शंकु को उसकी तिर्यक ऊँचाई एवं उसके आधार के किनारे से काटकर खोलें तो वह दी गई आकृतियों के समान दिखाई देगा।



आकृति – 25

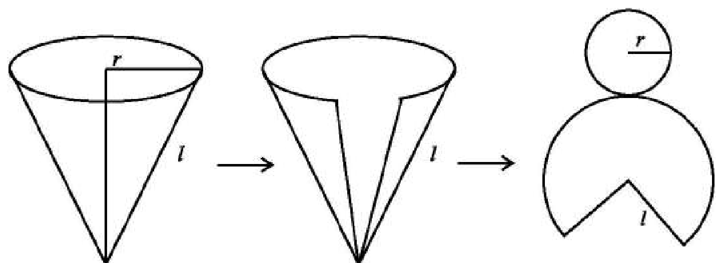
शंकु के पृष्ठीय जाल में l इकाई त्रिज्या वाले वृत्त के त्रिज्याखंड एवं r इकाई त्रिज्या वाला वृत्त सम्मिलित है।

2. शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

यदि शंकु के आधार की त्रिज्या r इकाई तथा उसकी तिर्यक ऊँचाई l इकाई हो तो पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल तथा आधार का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा।

हमने चर्चा की है कि यदि हम शंकु को काटकर खोलते है तो हमें वक्र पृष्ठ प्राप्त होते हैं।

शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल



आकृति – 26(i) आकृति – 26(ii) आकृति – 26(iii)

प्राप्त करना होगा।

शंकु के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल = l इकाई त्रिज्या वाले वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(2\pi r)l$$

$= \pi rl$ वर्ग इकाई

शंकु के आधार का क्षेत्रफल = r त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi r^2$ वर्ग इकाई

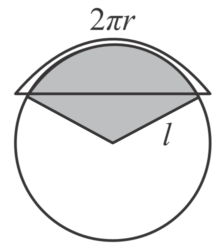
अतः शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ = शंकु के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल + शंकु के आधार का क्षेत्रफल

$$= \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r(r+l)$$

अतः शंकु के संपूर्ण पृष्ठ जिसके आधार की त्रिज्या r इकाई एवं तिर्यक ऊँचाई l इकाई हो $\pi r(r+l)$ है।

नोट :–



ऊपर के शंकु का वृत्ताकार आधार की परिधि $2\pi r$ है। यह एक ऐसे वृत्त का त्रिज्याखंड है जिसकी त्रिज्या l है। हम जानते हैं कि छायांकित त्रिज्याखंड के क्षेत्रफल तथा वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात, त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई तथा वृत्त की परिधि के अनुपात के बराबर होता है।

अर्थात

$$\frac{\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\text{त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई}}{\text{वृत्त की परिधि}}$$

$$\frac{\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल}}{\pi l^2} = \frac{\text{त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई}}{2\pi l}$$

$$\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\text{त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई} \times \pi l^2}{2\pi l}$$

$$\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\text{त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई} \times l}{2}$$

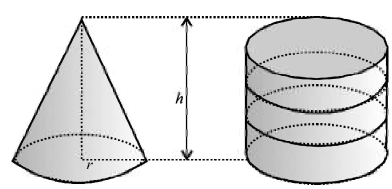
$$\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल} = \frac{2\pi r \times l}{2}$$

$$\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल} = \pi r l$$

जहाँ $2\pi r$ वृत्त के त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई है तथा l वृत्त की त्रिज्या है।

3. शंकु का आयतन

शंकु एवं बेलन के आयतन के बीच संबंध को समझने के लिये आइए एक क्रियाकलाप करें। समान आधार एवं समान ऊँचाई वाला एक शंकु एवं एक बेलन बनाइए।

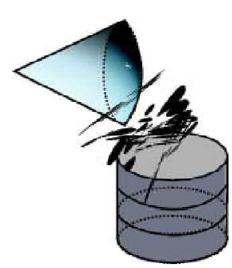


आकृति – 28

शंकु को बारीक रेत से भरिए और फिर उसी रेत को बेलन में डाल दीजिए। क्या बेलन रेत से भर गया?

बेलन को रेत से भरने के लिये आपको यह प्रक्रिया कितनी बार दोहरानी पड़ेगी?

बेलन को पूरा भरने के लिये हमें यह प्रक्रिया तीन बार दोहरानी पड़ती है । इस प्रकार शंकु व बेलन के आधार का क्षेत्रफल एवं ऊँचाई समान होने की स्थिति में बेलन का आयतन शंकु के आयतन का तीन गुना होता है।



आकृति – 29

अतः $3 \times$ शंकु का आयतन = बेलन का आयतन

$$\text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3}(\text{बेलन का आयतन}) = \frac{1}{3}(\text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{ऊँचाई})$$

क्योंकि बेलन का आयतन आधार (वृत्त) का क्षेत्रफल एवं ऊँचाई का गुणनफल होता है।

अतः शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\times A\times h$ जहाँ A आधार का क्षेत्रफल है और h बेलन की ऊँचाई है।

आधार का क्षेत्रफल $A=\pi r^2$

अतः शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\times\pi r^2 h$ घन इकाई

बेलन का आयतन जिसके आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h हो $\pi r^2 h$ होती है। अतः शंकु का आयतन, बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है जिनके आधार की त्रिज्याएँ एवं ऊँचाई समान होती हैं।

उदाहरणः–6. एक शंकु का व्यास 12 सेमी. और ऊँचाई 8 सेमी. है। शंकु का वक्रपृष्ठ और आयतन ज्ञात कीजिए।

हलः– माना शंकु की त्रिज्या r सेमी., ऊँचाई h सेमी. और तिर्यक ऊँचाई l सेमी. है।

दिया है शंकु की ऊँचाई h =8 सेमी.

शंकु का व्यास 2r =12 सेमी.

शंकु का त्रिज्या r =6 सेमी.

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l=\sqrt{h^2+r^2}$

$=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}$

$=\sqrt{100}=10$ सेमी.

शंकु का वक्रपृष्ठ $=\pi rl$

$=\pi\times 6\times 10=60\pi$ वर्ग सेमी.

शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$=\frac{1}{3}\times\pi\times 6\times 6\times 8$

$=96\pi$ घन सेमी.

उदाहरणः–7. एक शंकु के आकार के तंबू में 65π वर्ग मीटर कपड़ा लगा है। तंबू की तिर्यक ऊँचाई 13 मीटर है तो उसकी ऊँचाई तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हलः– माना शंकु की त्रिज्या r मी., ऊँचाई h मी. और तिर्यक ऊँचाई l मी. है।

दिया है शंकु की तिर्यक ऊँचाई l = 13 मीटर

शंकु के आकार के तंबू में लगे कपड़े का क्षेत्रफल, शंकु के वक्रपृष्ठ के क्षेत्रफल के बराबर होगा (क्यों)

शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $=65\pi$

$$\pi rl = 65\pi$$

$$r = \frac{65\pi}{\pi l}$$

$$r = \frac{65}{13}$$

$r = 5$ मी.

तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = l^2 - r^2$$

$$= (13)^2 - (5)^2$$

$$= 169 - 25$$

$$h^2 = 144$$

$h = 12$ मी.

शंकु के आधार के तंबू की त्रिज्या 5 मी. और ऊँचाई 12 मी. है।

प्रश्नावली 3

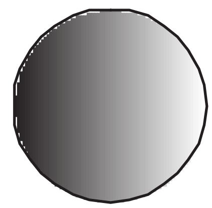
1. एक लंब वृत्तीय शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊँचाई 10 सेमी. तथा आधार की त्रिज्या 7 सेमी. हो।
2. यदि किसी शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 77 π वर्ग सेमी. है तथा उसका आधार का व्यास 14 से. मी. हो तब उस शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. यदि शंकु की तिर्यक ऊँचाई 21 सेमी. तथा आधार का व्यास 14 सेमी. हो तो उसके संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. यदि एक जोकर की शंक्वाकार टोपी के आधार की त्रिज्या 7 सेमी. तथा ऊँचाई 24 सेमी. हो तो ऐसी 10 टोपी बनाने के लिए लगने वाली शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. एक शंक्वाकार तंबू की ऊँचाई 5 मी. तथा आधार की त्रिज्या 12 मी. हो तो उसकी तिर्यक ऊँचाई तथा तंबू को बनाने में लगने वाले तिरपाल(केनवास) का लागत मूल्य ज्ञात कीजिये यदि उसका मूल्य 70 रू. प्रति वर्ग मीटर हो।
6. उस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिये जिसके आधार का क्षेत्रफल 300 वर्ग सेमी. तथा ऊँचाई 15 सेमी. हो।
7. शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए यदि उसका आयतन 550 घन सेमी. तथा उसका व्यास 10 सेमी. हो।

8. किसी शंक्वाकार कप के आधार की परिधि 22 सेमी. तथा ऊँचाई 6 सेमी. हो तो उसमें अधिकतम कितना पानी रखा जा सकता है।
9. यदि एक मीटर लंबी धातु की छड़ (जो बेलनाकार है) की त्रिज्या 3.5 सेमी. है, को पिघलाकर ऐसे कितने शंकु बनाये जा सकते हैं जिसकी त्रिज्या 1 सेमी. और ऊँचाई 2.1 सेमी. हो।
10. एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 21 सेमी., 28 सेमी. तथा 35 सेमी. है यदि उसे 28 सेमी. वाले भुजा को अक्ष मानकर घुमाया जाय तो बनने वाली आकृति का नाम तथा उसका आयतन ज्ञात कीजिये।
11. यदि एक शंकु व एक बेलन के आधार की त्रिज्या तथा ऊँचाई समान हो तो उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिये।

गोला (Sphere)

एक वृत्त को व्यास के परितः घुमाने पर जो आकृति प्राप्त होती है उसे गोला कहते हैं।

गोला एक ऐसी ठोस आकृति है जिस पर स्थित हर बिंदु उसके केन्द्र से एक निश्चित दूरी पर स्थित होता है।

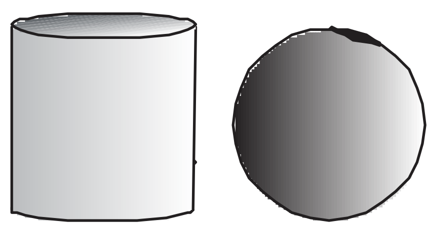


आकृति – 31

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

गतिविधिः–1

हमें पता है कि पृष्ठीय क्षेत्रफल किसी भी ठोस (वस्तु) आकृति के बाहरी आवरण को बताती है। हम बेलन और गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल की तुलना कर सकते हैं।



आकृति – 32

एक बेलन और गोला लें जिसमें कि बेलन के आधार की त्रिज्या और गोले की त्रिज्या समान हो और बेलन की ऊँचाई गोले की त्रिज्या की दुगुनी हो साथ ही एक रस्सी भी लें।

बेलन की आधी ऊँचाई पर चिह्न लगाइए और बेलन के तल अथवा शीर्ष से मध्य चिह्न तक रस्सी से बेलन को लपेटे। अब इस रस्सी को काटें और इसे गोले पर लपेटे।

आप पाएँगे कि इस रस्सी के द्वारा गोले का आधा भाग ढँक जाएगा।

अतः इस गतिविधि से हम यह कह सकते हैं कि बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल के समान है जब बेलन के आधार की त्रिज्या और गोले की त्रिज्या बराबर हो और बेलन की ऊँचाई गोले के व्यास के बराबर हो।

अतः हम कह सकते हैं कि,

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi r h$

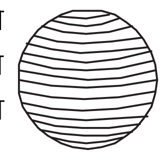
$= 2\pi r(2r)$

$= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई

इसलिए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई, जहां r गोले की त्रिज्या है।

गतिविधिः– 2

एक डोरी लीजिए और उसे गेंद पर पूरी तरह लपेट दीजिए (बीच में कोई भी जगह छूटने न पाए और न ही डोरी एक–दूसरे के ऊपर हो) आकृति 33 देखिए। अगर हम इस डोरी से वृत्त बनाएं जिसकी त्रिज्या गोले की त्रिज्या के बराबर हो, तो आप पाएँगे कि हम ऐसे 4 वृत्त बना पा रहें हैं (आकृति 34) जिसका क्षेत्रफल πr^2 होगा।



आकृति – 33

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\times$ वृत्त का क्षेत्रफल

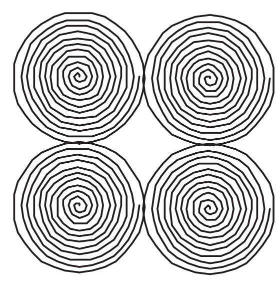
$= 4\pi r^2$

इसलिए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई, जहाँ r गोले की त्रिज्या है।
तब एक अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल निम्नलिखित तरीके से प्राप्त किया जा सकता है ।

अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\times$(गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2}(4\pi r^2)$

$= 2\pi r^2$



आकृति – 34

अर्द्धगोले के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$ वर्ग इकाई

अतः

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल	$= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई
अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल	$= 2\pi r^2$ वर्ग इकाई
अर्द्धगोले के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल	$= 3\pi r^2$ वर्ग इकाई

गोले का आयतन

गोले का आयतन उसकी त्रिज्या के घन के समानुपाती होता है। जैसे–जैसे त्रिज्या बढ़ती है आयतन तेजी से बढ़ता है। आयतन का मान $\frac{4}{3}\pi r^3$ द्वारा दिया जाता है।

उदाहरणः–8. किसी लोहे के गोले की त्रिज्या 7 सेमी. है, तो उसका वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हलः– दिया है गोले की त्रिज्या $r =$ 7 सेमी.

गोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

$$= 4\times\frac{22}{7}\times(7)^2$$

$$= 4\times\frac{22}{7}\times 7\times 7$$

$= 616$ वर्ग सेमी.

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^3$$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 7$$

$= 1437.33$ घन सेमी.

उदाहरणः–9. 14 सेमी. व्यास वाले अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हलः– मान लीजिए अर्द्धगोले की त्रिज्या r सेमी. है।

दिया है अर्द्धगोले का व्यास = 14 सेमी.

$\therefore$ $2r =$ 14 सेमी.

या $r =$ 7 सेमी.

$\because$ अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $3\pi r^2$

$$= 3\times\frac{22}{7}\times(7)^2$$

= 462 वर्ग सेमी.

उदाहरणः–10. 2 से. मी. त्रिज्या वाली 64 गोलियों को पिघलाकर एक बड़ा गोला बनाया गया। बड़े गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हलः– मान लीजिए छोटे गोले की त्रिज्या r से. मी. है।

दिया है $r =$ 2 सेमी.

प्रत्येक छोटे गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32}{3}\pi$ घन सेमी.

$\because$ 64 छोटे गोले का आयतन = $64\times\frac{32}{3}\pi$

$= \frac{2048\pi}{3}$

इन 64 छोटे गोले को पिधलाकर बड़ा गोला बनाया है, अतः बड़े गोले का आयतन 64 छोटे गोले के आयतन के बराबर होगा। मान लीजिए बड़े गोले की त्रिज्या R सेमी. है।

बड़े गोले का आयतन = 64 छोटे गोले का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2048\pi}{3}$$

$$R^3 = \frac{2048\pi\times 3}{3\times 4\pi}$$

$$R^3 = 512$$

R = 8 सेमी.

इसलिए बड़े गोले की त्रिज्या = 8 सेमी.

उदाहरणः—11. धातु के बने एक गोले की त्रिज्या 3 सेमी. है। यदि धातु का घनत्व 8 ग्राम /सेमी^{3} हो तो गोले का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हलः— हम जानते हैं कि आयतन और घनत्व का गुणनफल द्रव्यमान के बराबर होता है। इसलिए हम पहले गोले का आयतन ज्ञात करेंगे।

मान लीजिए कि गोले की त्रिज्या r सेमी. है।

r = 3 सेमी.

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(3)^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 3\times 3\times 3$

= 113.14 सेमी.^{3}

चूँकि धातु का घनत्व 8 ग्राम/सेमी.^{3} है अर्थात 1 सेमी.^{3}धातु का द्रव्यमान 8 ग्राम है

$\therefore$ गोले का द्रव्यमान = आयतन$\times$घनत्व

= 113.14$\times$8

= 905.12 ग्राम

= 0.9051 किग्रा. (लगभग)

`

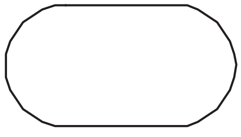
प्रश्नावली 4

1. एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 21 सेमी. है।
2. एक ग्लोब का व्यास 14 सेमी. है, पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. है, गोले का व्यास ज्ञात कीजिए।
4. एक गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 3 सेमी. है।
5. 2 सेमी. त्रिज्या वाले 21 गोलियों को पिघलाकर बड़ा गोला बनाया जाता है इस नये गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।
6. एक ठोस गोले को जिसकी त्रिज्या 10.5 सेमी. है, को पिघलाकर कुछ छोटे शंकु बनाए गये जिनमें कि प्रत्येक कि त्रिज्या 3.5 सेमी. और ऊँचाई 3 सेमी. है। बनाए गए शंकु की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. हवा भरने पर गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या 7 सेमी. से बढ़कर 14 सेमी. हो जाती है। दोनों स्थिति में गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।
8. एक गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. है।
9. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64:27 है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
10. एक ठोस गोले की त्रिज्या 12 सेमी. है। इस गोले से 6 सेमी. त्रिज्या के कितने गोले बन सकते हैं।
11. यदि किसी गोले का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल बराबर है तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
12. मिट्टी का एक शंकु जिसकी ऊँचाई 24 सेमी. और आधार की त्रिज्या 6 सेमी. है जो एक बच्चा गोले में परिवर्तित कर देता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
13. लोहे के तीन गोलियों को जिनकी त्रिज्याएँ 6 सेमी., 8 सेमी. और 10 सेमी. है को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। बनाए गए नये गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

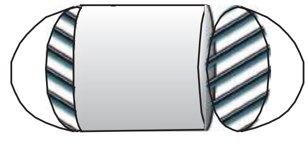
संयोजित ठोसों का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

(Surface area and volume of a combination of solids)

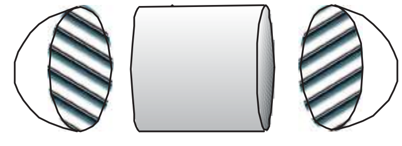
हमारे दैनिक जीवन में अनेक संयोजित ठोस दिखाई देते हैं जैसे एक कैप्सूल जो एक बेलन और दो अर्द्धगोलों का संयोजन है, ये अर्द्धगोले बेलन के छोरों में लगे होते हैं। इसी प्रकार



आकृति–35



आकृति–36



आकृति–37

खिलौना जिसका आधार अर्द्धगोला तथा उसके ऊपर शंकु होता है। इसलिए संयोजित ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन की गणना की आवश्यकता होती है।

आइए आकृति 35 में दिखाए गए पात्र(container) पर विचार कीजिए। हमें इस पात्र को बनाने के लिए आवश्यक लोहे की चादर का क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करना है परंतु पात्र ऐसी आकृति का नहीं है जिसके लिए हमने यह गणना कर ली है। यदि कोई ठोस आकृति 36 में दिखाए आकार का हो तो फिर हम क्या करें?

ऐसी स्थितियों में हम आकृति को ऐसे छोटे–छोटे भागों में बाँट लेते हैं जिनका आयतन व क्षेत्रफल आदि निकाल सकते हैं और समस्या का हल प्राप्त कर सकते हैं। हम देख सकते हैं कि यह कैप्सूल एक ठोस बेलन के छोरों पर अर्द्धगोलों को जोड़ कर बनाया गया है। यदि हम पात्र को काटते हैं तो यह आकृति 36,37 के अनुसार दिखेगी।

अतः पात्र को बनाने के लिए आवश्यक लोहे की चादर का क्षेत्रफल = पहले अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + दूसरे अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल

पात्र का आयतन = पहले अर्द्धगोले का आयतन + बेलन का आयतन + दूसरे अर्द्धगोले का आयतन

उदाहरणः–12. लोहे का एक बर्तन जिसे खोखले अर्द्धगोले के ऊपर, खोखला बेलन जोड़कर बनाया गया है। अर्द्धगोले का व्यास 14 सेमी. और बर्तन की कुल ऊँचाई 13 सेमी. हैं। बर्तन को बनाने के आवश्यक लोहे की चादर का क्षेत्रफल तथा बर्तन में धारित तरल का आयतन ज्ञात कीजिए। (लोहे की चादर की मोटाई नगण्य है।)

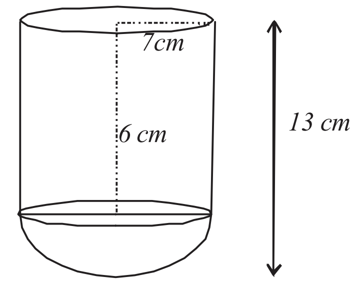
हलः–

अर्द्धगोले का व्यास = 14 सेमी.

$\therefore$ अर्द्धगोले की त्रिज्या = 7 सेमी.

बेलनाकार भाग की ऊँचाई = 13–7

= 6 सेमी.



आकृति – 38

बेलनाकार भाग के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 6$

$= 264$ वर्ग सेमी.

अर्द्धगोले का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

= 308 वर्ग सेमी.

इसलिए बर्तन को बनाने के लिए आवश्यक

लोहे की चादर का क्षेत्रफल = बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + अर्द्धगोले का क्षेत्रफल

$= 264$ वर्ग सेमी. $+ 308$ वर्ग सेमी.

$= 572$ वर्ग सेमी.

बेलनाकार भाग का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 6$

$= 924$ घन सेमी.

और, अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$

$= 718.6$ घन सेमी.

अतः बर्तन में धारित पानी की मात्रा $=$ बेलन का आयतन $+$ अर्द्धगोले का आयतन

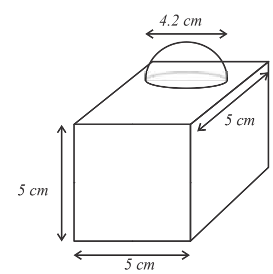
$= 924$ घन सेमी. $+ 718.6$ घन सेमी.

$= 1642.6$ घन सेमी.

FTM1HU

प्रश्नावली 5

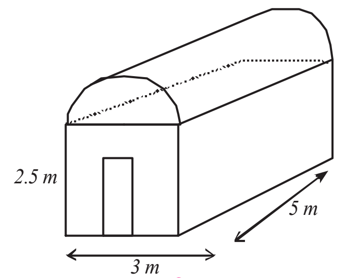
1. दी गई आकृति (आकृति 39) दो ठोसों, एक घन तथा एक अर्द्धगोले से बनी है। आकृति में आधार एक घन है जिसकी कोर 5सेमी. तथा एक अर्द्धगोला है जो ऊपर लगा है इसगका व्यास 4.2 सेमी. हो तो दी गई आकृति का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$)



आकृति–39

2. एक खिलौना जो कि शंकु की आकृति का है, की त्रिज्या 5 सेमी. है। वह एक समान त्रिज्या के अर्द्धगोले के ऊपर लगा है। खिलौने की कुल ऊँचाई 17 सेमी. है। उस खिलौने का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. अर्द्धगोले पर शंकु के आकार का एक ठोस स्थित है। इन दोनों की त्रिज्याएँ 1 सेमी. के बराबर है। शंकु की ऊँचाई, उसकी त्रिज्या के बराबर है। ठोस का आयतन π के रूप में ज्ञात कीजिए।
4. गोलाकार शीशे के एक बर्तन की बेलनाकार गर्दन 4 सेमी. लंबी एवं 2सेमी. व्यास वाली है। गोलाकार भाग का व्यास 6 सेमी. है तो उसमें भरे हुए पानी की मात्रा ज्ञात कीजिए।

5. आकृति–40 में दिखाए हरित गृह(ग्रीन हाउस) के ऊपरी सिरे के दोनों भाग अर्द्धवृत्ताकार हैं,इन्हें इस ग्रीन हाऊस को कपड़े से ढंककर बनाया गया है। इसमें 1.2 मी.$\times$0.5 मी. साइज का एक लकड़ी का दरवाजा है। हरित गृह को पूर्ण रूप से ढकने में लगने वाले कुल कपड़े का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति–40

हमने सीखा

1. किसी त्रिविमीय आकृति जैसे घनाभ, बेलन, शंकु आदि का पृष्ठीय जाल समझना व आकारों का पृष्ठीय जाल समझना व बनाना।
2. घनाभ,घन व अन्य आकारों के तल,शीर्ष,पृष्ठ व कोर पहचानना व समझना।
3. घनाभ व घन के विभिन्न विकर्णों को पहचानना,समझना।
4. त्रिविमीय आकृतियाँ जैसे बेलन, शंकु, गोला आदि का क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करना।
5. संयोजित ठोसों का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करना।

उत्तरमाला–1

1. $2\sqrt{21}$ मी. 2. 36 सेमी. 3. 15 मी.

उत्तरमाला–2

1. 880 वर्ग सेमी. एवं 2112 वर्ग सेमी. 2. 42 सेमी. 3. 2 सेमी 4. 68.75रु
5. 1584 वर्गमीटर 6. 396 घन सेमी. 7. 1540 घन सेमी. 8. 6160 घन सेमी.
9. 7 सेमी. 10. 20 सेमी. 11. 6.49 सेमी. 12. 7700 घन सेमी.
13. 2/3 14. 2.5 मीटर 15. 35 16. 15 सेमी. एवं 35 सेमी.

उत्तरमाला–3

1. 220 वर्ग सेमी. 2. $6\sqrt{2}$ सेमी. 3. 616 वर्ग सेमी. 4. 5500 वर्ग सेमी.
5. 34320 रु. 6. 1500 घन सेमी. 7. 21 सेमी. 8. 77 घन सेमी.
9. 1750 10. 12936 घन सेमी. 11 1 : 3

उत्तरमाला–4

1. 5544 वर्ग सेमी.
2. 196π वर्ग सेमी.
3. 7 सेमी.
4. 36π घन सेमी.
5. 224π घन सेमी.
6. 126
7. 1 : 4
8. 179.66 घन सेमी.
9. 16 : 9
10. 8
11. 3 इकाई
12. 6 सेमी.
13. 12 घन सेमी.

उत्तरमाला–5

1. 163.86 वर्ग सेमी.
2. 115π वर्ग सेमी.
3. 22000 रु.
4. π घन सेमी.
5. 44π घन सेमी.
6. 62.9 वर्ग सेमी.

अध्याय 16

आँकड़ों का विश्लेषण

[ANALYZING DATA]

FTVHYH

परिचय (Introduction)

हम प्रतिदिन नई नई सूचनाओं के संपर्क में आते हैं जैसे– इस साल चावल के उत्पादन में 8 प्रतिशत वृद्धि हुई, पिछले वर्ष किस खिलाड़ी ने सबसे बेहतर हॉकी खेली? या फिर मोबाइल कंपनी 'A' ने जनवरी के महीने में कितने मोबाइल बेचे? ऐसी और बहुत सी महत्वपूर्ण जानकारियाँ प्रकाशित होती हैं जिनकी आवश्यकता हमें पड़ती रहती है। जैसे– रेलगाड़ी के आने–जाने का समय, फल–सब्जियों के दाम, पेट्रोल का वर्तमान मूल्य, अनाज तथा डेयरी का उत्पादन, स्टील, कोयला तथा अन्य उत्पादन। इसके अलावा और भी बहुत से आँकड़ें होते हैं, जिनके आधार पर महत्वपूर्ण निर्णय लिए जाते हैं तथा भविष्य की योजनाएँ भी बनाई जाती हैं।

किस्म–किस्म की जानकारियाँ कैसे ढूँढे

क्या हम अभी यह बता सकते हैं कि आने वाले दो दिनों का तापमान कैसा रहेगा? या इस वर्ष राज्य में कितनी मात्रा में चावल का उत्पादन हुआ? या फिर पिछले पाँच वर्षों में पेट्रोल के दामों में कितनी वृद्धि या कमी हुई?

इन सभी के बारे में कुछ कह पाना संभव है किंतु सीधे सीधे नहीं, इन सभी सवालों के जवाब खोजने के लिए हमें इनसे संबंधित आँकड़ों का अध्ययन करना होगा।

अखबारों और पत्रिकाओं में विभिन्न आँकड़े जैसे–फसलों के उत्पादन, मौसम संबंधी जानकारियाँ, खेलों का विवरण, खाद्य वस्तुओं के दाम आदि प्रकाशित होते रहते हैं।

स्वास्थ्य और शिक्षा से संबंधित आँकड़े भी सरकार द्वारा विभिन्न संस्थाओं के माध्यम से एकत्रित किए जाते हैं जैसे– कौन से क्षेत्र में किस बीमारी का फैलाव अधिक है, उससे कितने लोग प्रभावित हैं? इसके आधार पर यह तय करने में मदद मिलती है कि बीमारी की रोकथाम के लिए किस तरह के इंतजाम की आवश्यकता है। आज से 6–7 दशक पहले भारत में यह भी महत्वपूर्ण प्रश्न था कि इस साल देश में अनाज का कितना उत्पादन हुआ, कितने की आवश्यकता है और अनाज की आपूर्ति के लिए, कितना अनाज बाहर से मंगवाना पड़ सकता है। आँकड़ों को विभिन्न अखबारों, पत्र–पत्रिकाओं में प्रकाशित करवाया जाता है, जिससे सबको जानकारी रहे कि कौन–सी योजना किस प्रकार के आँकड़ों को आधार बनाकर लागू की जा रही है तथा किस प्रकार के आँकड़ों के आधार पर निर्णय लिए जा रहे हैं।

करके देखें

1. आपने गणित के अतिरिक्ति अन्य विषयों जैसे– विज्ञान, सामाजिक अध्ययन आदि में भी आँकड़ों का प्रयोग होते हुए देखा होगा। आँकड़ों के कुछ उदाहरण दीजिए।
2. कुछ पत्र–पत्रिकाओं तथा अखबारों का अवलोकन कीजिए तथा इनमें छपे आँकड़ों को इकट्ठा कीजिए। चर्चा कीजिए यह किस–किस के बारे में हैं?
3. आपके स्कूल के ऑफिस में किस तरह के आँकड़ें उपलब्ध हैं? पता कीजिए।
4, स्कूल परिसर में आपने नोटिस बोर्ड पर आँकड़ें देखे होंगे। कौन–कौन से आँकड़ें देखे?

सोचें और चर्चा करें

नीचे दिए गए सवालों के जवाब आप कहाँ–कहाँ से पता लगा सकते हैं?

(1) आपके जिले में कौन–सी बीमारी का फैलाव अधिक है?

(2) वर्तमान वर्ष में आपके जिले की जनसंख्या कितनी है?

(3) वर्तमान वर्ष में सरकार द्वारा बाजार में गेहूँ तथा धान का न्यूनतम मूल्य कितना निर्धारित किया गया है?

कई और सरल सवाल भी

इसी तरह से कई बातें हम अपने बारे में भी जानना चाहते हैं, जैसे क्या आप कक्षा के सभी विद्यार्थियों से तेज दौड़ सकते हैं या फिर आपकी ऊँचाई कक्षा के बाकी छात्रों से तुलना करने पर कम है या अधिक? इस तरह के प्रश्नों का हल हम कैसे ढूँढें?

कुछ छात्र–छात्रा आप से तेज दौड़ते हैं, कुछ धीरे। कुछ आप से लंबे होंगे, कुछ छोटे।

अगर एक कक्षा में 50 विद्यार्थी हैं और उसमें रानी की ऊँचाई 160 सेमी. है तथा बाकी के विद्यार्थियों की ऊँचाई इस प्रकार है :–

161	160	162	159	161	158	162	163
158	158	160	159	160	161	163	160
158	161	158	159	163	159	160	159
158	160	159	162	163	160	159	159
159	162	161	163	159	161	161	160
163	160	163	161	160	158	160	163
160	160						

क्या इन आँकड़ों को देखकर आप यह बता सकते हैं कि रानी की ऊँचाई बाकी विद्यार्थियों की ऊँचाई की तुलना में कहाँ ठहरती है? हर बच्चे की ऊँचाई के साथ उसकी ऊँचाई की तुलना करना मुश्किल है। यदि उपरोक्त आँकड़ों को व्यवस्थित रूप से संग्रहित कर लिया जाए तो तुलना करना आसान हो जाएगा। अतः आँकड़ों को व्यवस्थित करने के लिए हम बारम्बारता सारणी बनाते हैं।

निम्नलिखित बारम्बारता सारणी में इन आँकड़ों को व्यवस्थित किया गया है:—

तालिका—1

ऊँचाई (सेमी.में)	158	159	160	161	162	163
विद्यार्थियों की संख्या	7	10	13	8	4	8

इस बारम्बारता सारणी को देखकर क्या—क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

एक तो यह कि सबसे ज्यादा बच्चे 160 सेमी. वाले समूह में हैं। इसमें 13 बच्चे हैं। 17 बच्चे उन समूहों में हैं जिनकी ऊँचाई रानी की ऊँचाई से कम है। सबसे कम ऊँचाई 158 सेमी. है और इसमें 7 बच्चे हैं।

हम इस सारणी से और क्या—क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? दोस्तों से चर्चा करें व कम से कम 5 और निष्कर्ष लिखें।

इसी तरह हम तेज दौड़ने की बात करें तो हम देखते हैं कि सभी दौड़ने वालों की गति एक बराबर नहीं होती। नीचे दिए गए आँकड़ों में 50 लोगों के दौड़ने की गति किमी.प्रति घंटे में दी गई है। यानी यह बताया गया है कि एक घंटे में वे कितने—कितने किमी. दौड़ते हैं।

तालिका—2

दौड़ने की गति (किमी.प्रति घंटा)	15	11	9	5	6	4
छात्रों की संख्या	5	6	7	8	9	10

यदि नफीसा के दौड़ने की गति 7 किमी./घंटा है तो उपरोक्त तालिका की सहायता से उसकी गति का तुलनात्मक अध्ययन कर सकते हैं। यह भी देख सकते हैं कि कितने लोग उससे तेज दौड़ते हैं और कितने लोग उससे धीरे दौड़ते हैं?

करके देखें

1. नीचे दिए गए सवाल पढ़िए और बताइए कि उनके जवाब ढूँढने के लिए हमें किस प्रकार के आँकड़े चाहिए? चर्चा करके यह भी बताइए कि आँकड़े हमें कहाँ से और कैसे मिलेंगे?

1. पिछले तीन वर्षों में रायपुर में पेट्रोल के दामों में क्या–क्या बदलाव आए?
2. इस साल देश के कौन से राज्य में सबसे कम वर्षा हुई?
3. पिछले पाँच वर्षों में छत्तीसगढ़ में मछली उत्पादन में कितनी वृद्धि हुई?
4. 2011 की जनगणना में किस राज्य की जनसंख्या सबसे अधिक थी?
5. पिछले पाँच वर्षों में आपके गाँव/शहर की जनसंख्या में क्या परिवर्तन आए?
6. छत्तीसगढ़ के किस जिले में स्कूलों की संख्या सबसे अधिक है?
7. पिछले पाँच वर्षों में भारत ने हॉकी में कितने अंतर्राष्ट्रीय मैच खेले?
8. वर्ष 2010 से 2015 तक पूरे भारत में चावल का कितना उत्पादन हुआ?

सोचें एवं चर्चा करें

1. यदि आपके स्कूल में कुल 1000 छात्र हों और यदि आपको अपनी ऊँचाई की तुलना सबसे करनी हो तो यह कैसे करेंगे?

2. यदि आप अपने जिले के छात्रों के साथ अपने दौड़ने की गति की तुलना करना चाहें तो आपको किस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता होगी? यह भी सोचें कि आप उन्हें कैसे व्यवस्थित करेंगे?

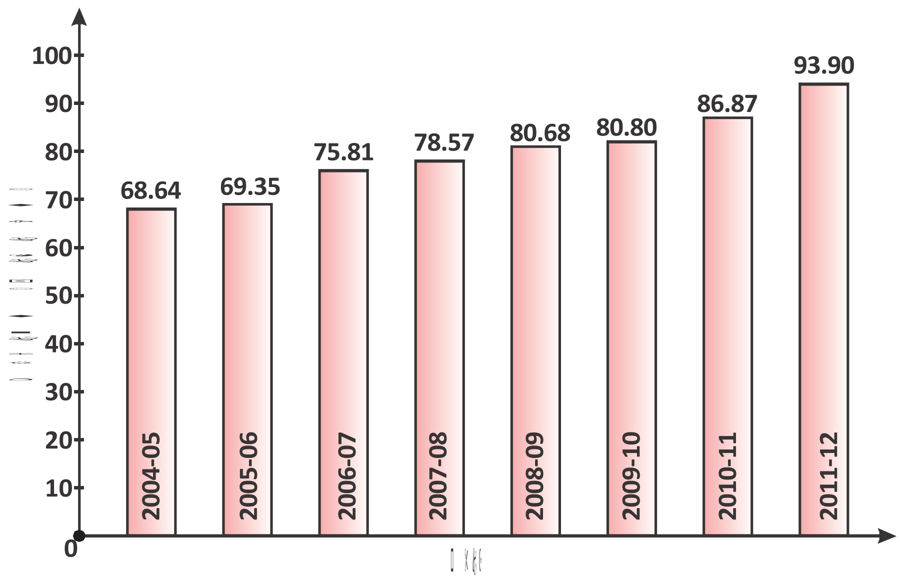
आँकड़ों का चित्रात्मक निरूपण

पिछली कक्षा में आपने आँकड़ों का संग्रहण तथा प्रस्तुतीकरण सीखा है। साथ ही बारम्बारता सारणी तथा आँकड़ों के आलेखीय निरूपण को भी समझा है, जिसमें आपने आयत चित्र, आवृत्ति बहुभुज तथा संचयी आवृत्ति वक्र आदि बनाना सीखा। इन चित्रों के आधार पर हम बहुत–सी जानकारियाँ प्राप्त करते हैं तथा उनसे निष्कर्ष भी निकालते हैं। आइए कुछ इसी तरह के आँकड़ों का अध्ययन करते हैं:–

स्तंभ आलेख का अध्ययन

किसी प्रदेश में विभिन्न वर्षों में हुए गेहूँ के उत्पादन को निम्नलिखित आलेख द्वारा दर्शाया गया है–

इस आलेख को देखने से गेहूँ उत्पादन के बारे में कौन–कौन सी बातें स्पष्ट दिखती हैं? आलेख को पढ़कर निम्नलिखित सवालों के जवाब खोजें।



(i) 2007–08 में गेहूँ उत्पादन कितने टन था?

(ii) किस वर्ष में गेहूँ उत्पादन सबसे अधिक हुआ?

(iii) क्या यह कहा जा सकता है कि प्रत्येक वर्ष गेहूँ उत्पादन में वृद्धि हुई है?

(iv) किन दो वर्षों के बीच गेहूँ उत्पादन में सबसे अधिक परिवर्तन हुआ?

करके देखें

तालिका का अध्ययन

वर्ष 1980 से 1989 तक एक शहर में हुई वर्षा के एकत्रित किए गए आँकड़ों को नीचे की तालिका में दर्शाया गया है।

वर्ष	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
कुल वर्षा (इंचमें)	24.7	21.2	14.5	13.2	12.1	16.8	19.9	29.2	31.6	21.0

वर्षा से संबंधित इन आँकड़ों का अध्ययन कीजिए, स्तम्भालेख बनाइए तथा इनके आधार पर कम से कम पाँच अलग–अलग तरह के निष्कर्ष लिखिए।

माध्य, माध्यिका, बहुलक

आपने आँकड़ों से बने स्तम्भ आलेख व आवृत्ति वक्र से कुछ सवालों के जवाब ढूँढे तथा निष्कर्ष निकाले। क्या स्तम्भ आलेख को देखकर यह बता सकते हैं कि 2005 से 2012 तक गेहूँ का औसत उत्पादन प्रतिवर्ष कितना रहा? क्या हम यह बता पाएँगे कि आँकड़ों को क्रम में रखने पर कौन–सा वर्ष ठीक बीच में आयेगा? फिर दूसरी तालिका से यह जान सकते हैं कि इस शहर में औसतन एक वर्ष में कितनी बारिश होती है या यह कि सामान्यतः कितनी बारिश होने की उम्मीद की जा सकती है। स्तम्भ आलेख देखकर हम आँकड़ों के क्रम व उनके रूख के बारे में नहीं बता सकते। इसके अलावा औसत उत्पादन निकालने के लिए हमें अंकगणितीय औसत चाहिए। आइए, याद करें हम यह कैसे निकालते हैं?

अंकगणितीय औसत या समांतर माध्य (Arithmetic Mean)

अब हम 2005 से 2012 तक गेहूँ के औसत उत्पादन की गणना करने के लिए प्रत्येक वर्ष के गेहूँ के उत्पादन (लाख टन में) को जोड़ेंगे तथा उसे कुल वर्षों से भाग देंगे। आइए देखें कि गेहूँ का औसत उत्पादन कितना रहा?

कुल उत्पादन = 68.64 + 69.35 + 75.81 + 78.57 + 80.80 +80.80 + 86.87 + 93.90

= 634.74 लाख टन

2005 से 2012 तक कुल वर्ष = 8 वर्ष

$$\text{औसत उत्पादन} = \frac{634.74}{8}$$

= 79.34 लाख टन

यहाँ हमने गेहूँ के औसत उत्पादन की गणना की है। आँकड़ों के औसत को सांख्यिकी में समांतर माध्य कहते हैं। यानी जब आँकड़ों का समांतर माध्य ज्ञात करना हो तो आँकड़ों को जोड़कर कुल आँकड़ों की संख्या से भाग देते हैं। सूत्र के रूप में इसे निम्नलिखित ढंग से लिखते हैं–

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

यदि प्रेक्षणों को x लिखें तो प्रेक्षणों का योग Σx तथा प्रेक्षणों की संख्या n हो तब

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{\sum x}{n}$$

समांतर माध्य को प्रायः A.M., M अथवा $\bar{x}$ से प्रदर्शित किया जाता है।

असतत श्रेणी वाले आँकड़े

अभी तक हमने जो उदाहरण देखे वे व्यक्तिगत श्रेणी के आँकड़े थे तथा आँकड़ों की संख्या कम थी लेकिन जब आँकड़ों की संख्या बहुत अधिक हों तब समांतर माध्य की गणना कैसे करें?

कक्षा नवमीं की अर्द्धवार्षिक परीक्षा में 35 विद्यार्थियों के गणित विषय के प्राप्तांक निम्नानुसार हैं:–

30,	30,	38,	40,	42,	35,	40,	30,	45,	48,
40,	42,	38,	30,	38,	40,	35,	30,	42,	40,
42,	38,	35,	42,	40,	38,	42,	40,	48,	45,
38,	40,	30,	35,	35					

यहाँ न्यूनतम प्राप्तांक 30 तथा अधिकतम प्राप्तांक 48 हैं। हम देख पा रहें हैं कि प्राप्तांक 30,35,38,40,42,45,48 तक सीमित हैं जिनकी ही पुनरावृत्ति हो रही हैं। अतः इन आँकड़ों को निम्नलिखित तरीके से लिखा जा सकता है।

प्राप्तांक(x)	:	30	35	38	40	42	45	48
बारम्बारता(f)	:	6	5	6	8	6	2	2

जब आँकड़ें इस प्रकार से दिए गए हों तब समांतर माध्य की गणना करने के लिए आँकड़ों (प्रेक्षणों) तथा उनके संगत बारम्बारताओं के गुणनफल के योग को बारम्बारताओं के योग से भाग कर देते हैं।

प्राप्तांक(x)	बारम्बारता(f)	प्राप्तांक तथा संगत बारम्बारता का गुणनफल(fx)
30	6	180
35	5	175
38	6	228
40	8	320
42	6	252
45	2	90
48	2	96
	$\sum f = 35$	$\sum fx = 1341$

$$\therefore \text{समांतर माध्य} = \frac{\text{प्रातांक व उनके संगत बारम्बारताओं के गुणनफल का योग}}{\text{बारम्बारताओं का योग}}$$

$$\overline{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6 + f_7x_7}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1341}{35}$$

$$\overline{X} = 38.31$$

कक्षा नवमीं की अर्द्धवार्षिक परीक्षा में विद्यार्थियों के गणित विषय का औसत प्राप्तांक 38.31 है।

अब हम उन आँकड़ों के समांतर माध्य के बारे में चर्चा करेंगे जिनमें आँकड़ों की पुनरावृत्ति तो हो रही है पर आँकड़ों की संख्या बहुत अधिक है। तब हम उन आँकड़ों को समूह में बाँटकर समांतर माध्य की गणना करते हैं।

आइए इसे एक उदाहरण से सीखें

उदाहरणः–1. एक गाँव के माध्यमिक विद्यालय में 100 विद्यार्थी हैं, उन विद्यार्थियों के घर से विद्यालय की दूरियाँ किमी. में नीचे दी गई हैं। इन आँकड़ों से औसत दूरी ज्ञात कीजिए।

17	1	19	0	4	1	3	2	0	4
5	7	2	8	9	19	2	17	1	18
0	3	2	5	2	8	1	10	1	11
13	8	9	4	15	0	15	3	11	11
2	19	0	14	12	1	12	1	13	1
9	3	6	4	14	3	10	12	4	8
0	7	9	6	5	9	7	8	2	9
5	8	6	7	9	5	5	6	3	8
7	5	0	1	3	0	4	2	0	1
3	0	4	3	2	0	1	0	4	0

हलः– दिए गए आँकड़ों में हम देखते हैं कि कई आँकड़े बहुत बार आए हैं इनमें सबसे छोटी संख्या 0 और सबसे बड़ी 19 है। इन आँकड़ों को हमें समूहों में बाँटना होगा जिससे गणना आसान हो जाए।

आँकड़ों को 4 अंतराल वाले समूहों में बाँटते हैं। जैसे 0 से 4 किमी. तक की दूरी से आने वाले विद्यार्थियों की संख्या 42 , 4 से 8 किमी. तक की दूरी से आने विद्यार्थियों की संख्या 24 है , इत्यादि। इसी तरह हम 8–12 , 12–16, 16–20 अंतराल में छात्र की संख्या पता करते हैं;

विद्यार्थियों के घर से विद्यालय की दूरी किमी.में	विद्यार्थियों की संख्या (f)	मध्यमान (x)	fx
0-4	42	2	84
4-8	24	6	144
8-12	19	10	190
12-16	9	14	126
16-20	6	18	108
	$\sum f_i = 100$	$\sum f_i x_i = 652$	

ऊपर हमने अंतरालों का मध्यमान अंतराल की दोनो सीमाओं को जोड़कर 2 से भाग करके निकाला है। अब हम मध्यमान और विद्यार्थियों की संख्या के गुणनफल को जोड़कर विद्यार्थियों की संख्या से भागकर औसत पता कर सकते हैं।

$$\text{औसत} = \frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या व मध्यमान के गुणनफल का जोड़}}{\text{विद्यार्थियों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{84+144+190+126+108}{100}$$

$$= \frac{652}{100}$$

$= 6.52$ किमी.

'औसत' को हम एक ऐसी संख्या के रूप में देख सकते हैं जो आँकड़ों के पूरे समूह का एक गुण बताती है। जाहिर है यह सबसे कम मान से अधिक तथा सबसे अधिक मान से कम होती है और इन आँकड़ों के बीच में ही होती है। इसे 'अंकगणितीय औसत कहते हैं।

अंकगणितीय औसत की गणना

आइए, इसे कुछ और उदाहरणों से समझते हैं।

नीचे तालिका में पाँच वर्षों के दाल उत्पादन संबंधी आँकड़े दिए गए हैं–

वर्ष	2007–08	2008–09	2009–10	2010–11	2011–12
दाल का उत्पादन (लाख टन में)	14.8	14.6	14.7	18.2	17.2

इन आँकड़ों का समांतर माध्य या औसत ज्ञात करना है। इसे पता करने के लिए, सभी प्रेक्षणों को जोड़ कर उसे वर्षों की कुल संख्या से भाग देना होगा, यानी

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{14.8+14.6+14.7+18.2+17.2}{5} \text{ लाख टन}$$

$$= \frac{79.5}{5} = 15.9 \text{ लाख टन}$$

दाल का औसत उत्पादन 15.9 लाख टन है। तालिका में प्रदर्शित प्रत्येक वर्ष का उत्पादन औसत से अलग है। परन्तु औसत के प्रयोग से हम पिछले पाँच साल के उत्पादन को किसी एक ही मान द्वारा दर्शा सकते हैं।

आइए, औसत का एक और उदाहरण देखते हैं।

उदाहरण–2. धमतरी जिले में हुई वर्षा (मि.मी.) के आँकड़े इस प्रकार है। इन आँकड़ों का औसत ज्ञात कीजिए।

880.5, 1474.9, 806.3, 1554.9, 1019,2, 1046.5, 1017.2

हलः– आप जानते है कि

$$\text{माध्य} = \frac{\text{प्रेक्षणों का जोड़}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

$$\text{इस प्रकार, औसत} = \frac{880.5 + 1474.9 + 806.9 + 1554.9 + 1019.2 + 1046.5 + 1017.2}{7}$$

$$= \frac{7799.5}{7} = 1114.21 \text{ मिमी.}$$

अतः वर्षा का अंकगणितीय औसत 1114.21 मिमी. है।

औसत का व्यवहार में उपयोग

क्या आप बता सकते हैं कि लड़कियों को सामान्यतः घर में खेलने का कितना समय मिलता है? हम जानते हैं कि रोज खेलने का समय निश्चित नहीं होता, किसी दिन कोई घंटों तक खेलता है और किसी दिन बहुत कम या फिर बिल्कुल नहीं।

इसका मतलब है कि एक दिन के आधार पर आप नहीं बता सकते कि लड़कियाँ प्रतिदिन कितने समय तक खेलती हैं। अगर आप प्रत्येक लड़की के हर रोज खेलने के समय के बारे में आँकड़े एकत्रित करेंगे तो आपके पास बहुत सारे आँकड़े हो जायेंगे। इन्हें व्यवस्थित करना आसान नहीं होगा। इस समस्या को हल करने के लिए हम एक महीने के आँकड़े लेकर उनके प्रतिदिन खेलने का औसत समय पता कर सकते हैं। तालिका–3 देखें। यहाँ हमें 50 लड़कियों के खेलने का समय दिया गया है। क्या आप बता सकते हैं कि अधिकतर लड़कियाँ कितने समय तक खेलती हैं?

तालिका–3 में आप देख सकते हैं कि अधिकतर लड़कियों को खेलने के लिए औसतन 2 घंटे से कम का समय मिलता है। सबसे ज्यादा यानी 12 लड़कियाँ औसतन 2 घंटे खेलती हैं किन्तु सभी लड़कियों के प्रतिदिन खेलने का औसत समय 2 घंटे नहीं है। यहाँ अंकगणितीय औसत निकालने के लिए सभी 50 लड़कियों द्वारा औसतन खेलने में प्रतिदिन बिताए जाने वाले कुल घंटे पता करने होंगे।

तालिका–3

प्रतिदिन खेलने का औसत समय (घंटे में)	लड़कियों की संख्या	50 लड़कियों के खेलने का कुल समय
x_i	f_i	$x_i f_i$
0	4	0
$\frac{1}{2}$	6	3
1	8	8
$1\frac{1}{2}$	9	$13\frac{1}{2}$
2	12	24
$2\frac{1}{2}$	7	$17\frac{1}{2}$
3	4	12
कुल	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i x_i = 75$

$$\text{औसत} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\text{औसत} = \frac{75}{50} \text{ घंटे}$$

$= 1$ घण्टा 50 मिनट

यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ की बारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, ...f_n$ हों तो इसका अर्थ है कि प्रेक्षण x_1 , f_1 बार आता है, प्रेक्षण x_2, f_2 बार आता है, इत्यादि।

जैसे इस उदाहरण में प्रतिदिन औसतन 0 घंटा खेलने वाली 4 लड़कियाँ हैं और औसतन 1/2 घंटा खेलने वाली 6 लड़कियाँ हैं तो $x_1 = 0, f_1 = 4$ और $x_2 = \frac{1}{2}, f_2 = 6$ होगा।

अब सभी प्रेक्षणों और बारम्बारता के गुणनफल (fx) के मानों का

योग $= f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n$ है तथा

प्रेक्षणों की कुल संख्या $= f_1 + f_2 + ... + f_n$ है।

माध्य निकालने के लिए हम इस योग को बारम्बारता के योग से भाग देंगे। इस प्रकार माध्य हुआ–

माध्य (अंकगणितीय औसत) $= \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ जहाँ i का मान 1 से n तक होगा

जोड़ को संक्षिप्त में एक यूनानी अक्षर $\sum$ (सिग्मा) से व्यक्त करते हैं। यह जोड़ को दर्शाता है। इसलिए बारम्बारता के जोड़ को $\sum f_i$ और प्रेक्षणों एवं बारम्बारता के गुणनफल के योग को $\sum f_i x_i$ से दर्शाया है।

इसका अर्थ यह हुआ कि 1 घंटा 50 मिनट का औसत समय प्रत्येक लड़की को हर रोज खेलने के लिए मिलता है। अब बाकी आँकड़ों के साथ इस औसत की तुलना करते हैं।

क्या आप बता सकते हैं कि कितनी लड़कियाँ औसत घंटो से अधिक घंटे खेलती हैं और कितनी लड़कियाँ कम? आप देख सकते हैं कि औसत से कम समय खेलने वाली लड़कियों की संख्या 27 है तथा औसत से ज्यादा खेलने वाली 23 हैं।

इस प्रकार जब हम बड़े पैमाने पर आँकड़ों का अध्ययन करते हैं तब उन्हें व्यवस्थित करने में औसत हमारी मदद करता है। जैसे उपरोक्त उदाहरणों में लड़कियों के खेलने का औसत समय या दौड़ने की औसत गति।

करके देखें

1. पिछले उदाहरण में प्रस्तुत कक्षा के 50 छात्रों की ऊँचाई का औसत ज्ञात कीजिए। अपनी ऊँचाई के साथ उसकी तुलना कीजिए।

2. तालिका–2 में प्रस्तुत कक्षा के 50 छात्रों की दौड़ने की गति का औसत निकालिए। इस औसत से आप क्या–क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

उपरोक्त उदाहरणों में आपने दिए गए प्रेक्षणों का औसत निकालना सीखा परन्तु यदि औसत पहले से दिया गया हो तो क्या अज्ञात प्रेक्षणों को ज्ञात किया जा सकता है।

नीचे दिए गए उदाहरण को देखिए–

उदाहरण–3. नीचे दिए गए प्रेक्षणों का औसत 36 है। अज्ञात प्रेक्षण (f) ज्ञात कीजिए।

25, 39, 35, f, 46

हलः– आप जानते हैं कि–

$$\text{औसत} = \frac{25+39+35+f+46}{5}$$

$$\text{औसत} = \frac{145+f}{5}$$

औसत का मान रखने पर

$$36 = \frac{145+f}{5}$$

$$36 \times 5 = 145 + f$$

$$180 = 145 + f$$

$$180 - 145 = f$$

$$35 = f$$

अतः f का मान 35 हुआ। इस प्रकार सभी प्रेक्षण 25, 39, 35, 35, 46 हुए।

उदाहरणः–4. नीचे दी गई तालिका के आँकड़ों की मदद से छात्रों की औसत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई(सेमी.में)	158	159	160	161	162	163
छात्रों की संख्या	7	10	13	8	4	5

हलः– हमें पता है कि माध्य (अंकगणितीय औसत)

ऊँचाई(सेमी.में)(x_i)	छात्रों की संख्या(f_i)	($f_i x_i$)
158	7	1106
159	10	1590
160	13	2080
161	8	1288
162	4	648
163	5	815
	$\sum f_i = 47$	$\sum f_i x_i = 7527$

अतः अंकगणितीय औसत $= \dfrac{7527}{47}$

$= 160.15$ सेमी.

यानी छात्रों की औसतन ऊँचाई 160.15 सेमी. है।

करके देखें

1. पहली 15 प्राकृत संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।
2. मार्च–अप्रैल, 2010 के दौरान भुवनेश्वर (उड़ीसा) में पेट्रोल के दाम (रूपये में) नीचे दिए गए हैं। इनका औसत ज्ञात कीजिए।

   61.28, 62.08, 59.35, 56.28, 59.28
3. एक राज्य में 8 वर्षों में हुए चावल उत्पादन (लाख टन) के आँकड़े निम्नलिखित हैं। इन आँकड़ों का औसत ज्ञात कीजिए।

   84.98, 93,34, 71.82, 88.53, 83.13, 91.79, 93.36, 96.69

औसत हमें क्या बताती है?

हमने देखा कि औसत से हमें एक आधार मिल जाता है जो पूरे आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करता है। परन्तु क्या अंकगणितीय औसत आँकड़ों को पूरा प्रदर्शित नहीं कर पाती।

नीचे दिए गए कथनों को पढ़िएः–

1. इस साल फरवरी माह में दिन का औसत तापमान 23°C था।
2. पिछले पाँच वर्षों में पेट्रोल के प्रति लीटर दाम का औसत 65.70 रुपये रहा।
3. दसवीं कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु लगभग 15 वर्ष है।

आपने अक्सर ऐसे कथनों को पढ़ा होगा और सुना भी होगा। एक महीने अथवा दिन का औसत तापमान, पेट्रोल का औसत दाम आदि के मान से हम कुछ बातें समझ सकते हैं और कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं। किन्तु कई बातें औसत से पता नहीं चलती। जैसे–

कथन–1 में, पूरे महीने तापमान कभी 23°C से अधिक और तो कभी उससे कम रहा होगा। औसत हमें यह नहीं बताता कि तापमान कितना–कितना था। अधिक से अधिक कितना व कम से कम कितना । क्या तापमान में बहुत उतार–चढ़ाव हुआ या वह लगभग एक जैसा ही था।

कथन–2 में भी, पेट्रोल के दाम समय–समय पर बदलते रहे होंगे। प्रत्येक वर्ष औसत दाम 65.70 रूपये नहीं रहा होगा। इससे हम यह नहीं बता सकते कि आज पेट्रोल का दाम क्या है? फिर भी औसत से हम यह अंदाजा लगा पा सकते हैं कि पेट्रोल का दाम प्रति लीटर 64 रुपये से 66 रुपये के इर्द–गिर्द ही रहा होगा अगर हमें यह पता हो कि अकसर पेट्रोल के दामों में अचानक उतार–चढ़ाव नहीं होता है।

कथन–3 में, कुछ विद्यार्थियों की आयु 15 से कम होगी तथा कुछ की अधिक होगी। इससे हमें और अधिक जानकारी नहीं मिलती।

आइए, औसत का एक उदाहरण और देखते हैं–

उदाहरण–5. नीचे तालिका में सात कर्मचारियों के वेतन के आँकड़े दिए हुए हैं–

1400 1500 8400 8700 9000 9200 9400

इन आँकड़ों का औसत निकालकर देखिए–

$$\text{आप जानते हैं, औसत} = \frac{1400+1500+8400+8700+9000+9200+9400}{7}$$

$$= \frac{47600}{7} = 6800 \text{ रूपये}$$

आँकड़ों का औसत वेतन 6800 रूपये है।

पर क्या औसत इन आँकड़ों के केन्द्र को सही रूप से प्रस्तुत कर पा रहा है? कोई भी आँकड़ा औसत के करीब नहीं है। इस औसत से हम यह तो पता कर सकते हैं कि हर महीने कुल कितना खर्चा वेतन पर होता है, किन्तु यह नहीं कि एक कर्मचारी को लगभग कितना वेतन मिलता है?

आप देख सकते हैं कि इन आँकड़ों का गणितीय औसत हमें आँकड़ों के वितरण को समझने में मदद नहीं कर पा रहा है।

माध्यिका

जब प्रेक्षणों के मान एक–दूसरे से बहुत अन्तर पर होते हैं, तब माध्य से हम सभी कई अर्थपूर्ण निष्कर्ष नहीं निकाल पाते। यहाँ हम एक नए संख्यात्मक प्रतिनिधि का उपयोग करेंगे जिसे माध्यिका कहते हैं। माध्यिका वह आँकड़ा है जो व्यवस्थित प्रेक्षणों में आए मानों के ठीक बीच में होता है।

FU5T15

आइए एक उदाहरण से माध्यिका को समझते हैं और फिर उसकी उपयोगिता देखेंगे।

उदाहरण 5 के वेतन आँकड़ों को देखिए–

1400, 1500, 8400, 8700, 9000, 9200, 9400

इन आँकड़ों की माध्यिका क्या है? आँकड़ों में कुल सात पद है जिसमें से चौथा पद मध्य पद है। इसलिए इन आँकड़ों की माध्यिका 8700 है। आँकड़ों के प्रेक्षणों का मध्य पद ही हमें माध्यिका देता है। कई बार माध्यिका आँकड़ों का बेहतर प्रतिनिधित्व कर सकती है क्योंकि माध्यिका पर बहुत बड़े एवं बहुत छोटे प्रेक्षणों का असर नहीं पड़ता।

करके देखें

निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए–

1. 25, 21, 23, 18, 20, 23, 24
2. 113, 102, 95, 85, 110, 109, 106,110, 115

आइए, माध्यिका के कुछ और महत्वपूर्ण उपयोग समझते हैं।

उदाहरणः–6. किसी दफ्तर में 10 पदों पर नियुक्ति के लिए 21 व्यक्तियों ने इंटरव्यू दिया। इंटरव्यू में उन्हें कुल 50 अंकों में से निम्नलिखित अंक प्राप्त हुए–

25, 23, 45, 40, 42, 38, 32, 43, 47, 36, 28, 37, 35, 34, 42, 21, 27, 18, 39, 41, 40

इनमें से 10 व्यक्तियों को नौकरी के लिए चुना जाना है।

इसके लिए क्या किया जाए?

हम जानते हैं कि 21 में से सर्वाधिक अंक प्राप्त करने वाले 10 व्यक्तियों को चुना जाएगा। इस प्रक्रिया को सरल बनाने के लिए आँकड़ों को बढ़ते क्रम में व्यवस्थित किया जा सकता है जो कि इस प्रकार होगा–

18, 21, 23, 25, 27, 28, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 40, 41, 42, 42, 43, 45, 47

इन आँकड़ों में माध्यिका 11 वाँ पद यानी 37 है जो कि शुरू के 10 व्यक्तियों तथा आखिर के 10 व्यक्तियों के बीच में है। अतः नौकरी के लिए 37 से अधिक अंकों वाले व्यक्तियों का चुनाव किया जायेगा। यहाँ 37 आँकड़ों की माध्यिका है।

अर्थात् यदि प्रेक्षणों की कुल संख्या n हो,

तो प्रेक्षणों का $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद ही माध्यिका होगी।

आप देख सकते हैं कि उदाहरण–4 और उदाहरण–5 में कुल प्रेक्षणों की संख्या विषम संख्याएँ हैं। उपरोक्त तरीके से कुल प्रेक्षणों की संख्या विषम होने पर माध्यिका आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। परन्तु यदि प्रेक्षणों की कुल संख्या सम हो तो माध्यिका को कैसे पता करेंगे? इसे समझने के लिए एक उदाहरण देखते हैं–

उदाहरणः—7. 10 विद्यार्थियों की ऊँचाई (सेमी.में) निम्नलिखित है—

117, 106, 123, 110, 125, 112, 115, 102, 100, 115

इन आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हलः— माध्यिका ज्ञात करने के लिए आँकड़ों को सबसे पहले बढ़ते हुए क्रम में रखना होगा।

100, 102, 106, 110, 112, 115, 115, 117, 123, 125

यहाँ प्रेक्षणों की संख्या सम है इसलिए न ही पाँचवाँ पद प्रेक्षणों के बिल्कुल मध्य है और न ही छठा पद। प्रेक्षणों का मध्यपद यानी माध्यिका पाँचवें और छठें पद के मध्य में हैं अतः ऐसी परिस्थिति में प्रेक्षणों के मध्य में पड़ने वाले दोनों पद का औसत ही माध्यिका होती है। इस उदाहरण में, पाँचवा पद = 112 सेमी.

छठा पद = 115 सेमी.

$$\text{माध्यिका} = \frac{\text{पाँचवाँ पद} + \text{छठा पद}}{2}$$

$$= \frac{112+115}{2} = 113.5 \text{ सेमी.}$$

इन आँकड़ों की माध्यिका 113.5 सेमी. है।

यानी जब प्रेक्षणों की कुल संख्या सम हो तब माध्यिका को ऐसे समझा जा सकता है—

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$

अभी तक हमने दिए हुए प्रेक्षणों की माध्यिका निकाली। अब दी हुई माध्यिका का प्रयोग कर अज्ञात प्रेक्षणों का मान पता करेंगे।

उदाहरणः—8. आरोही क्रम में व्यवस्थित आँकड़ों 7, 10, 12, p, q, 27, 31 की माध्यिका 17 है। यदि इसमें एक और प्रेक्षण 40 जोड़ दिया जाए तो माध्यिका 18 हो जाती है। p तथा q का मान ज्ञात कीजिए।

हलः— आप जानते हैं कि माध्यिका सदैव प्रेक्षणों के मध्य पद का मान होती है।

प्रेक्षणों 7, 10, 12, p, q, 27, 31 में माध्यिका चौथा पद है। यानी $p = 17$

अब यदि एक और प्रेक्षण 40 इसमें जोड़ दिया जाए तो प्रेक्षण होंगे 7, 10, 12, p, q, 27, 31, 40 अब चूँकि प्रेक्षणों की संख्या सम हो गई है अतः

$$\text{नई माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$

$$18 = \frac{p+q}{2}$$

$$18 = \frac{17+q}{2}$$

$$36 = 17 + q$$

$$19 = q$$

अतः p और q के मान क्रमशः 17 तथा 19 हैं।

बहुलक

FUEP2S

आपने औसत तथा माध्यिका को समझा। आँकड़ों से निष्कर्ष निकालने का एक और मापक 'बहुलक' है। बहुलक प्रेक्षणों में सबसे अधिक बार आया प्रेक्षण होता है । उदाहरण के लिए किसी परीक्षा में कक्षा 10 के 20 विद्यार्थियों के गणित विषय के प्राप्तांक निम्नलिखित थेः–

40, 25, 40, 35, 36, 45, 45, 40, 35, 39, 41, 42, 40, 25, 40, 42, 35, 38, 40

इन आँकड़ों में हम देखते हैं कि 40 अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या सबसे अधिक 6 है यानी बहुलक 40 हुआ।

आइए एक अन्य उदाहरण से बहुलक को समझें–

उदाहरणः–9. एक दुकानदार अपनी दुकान पर किसी विशेष कम्पनी के पाँच अलग–अलग नम्बर (6, 7, 8, 9, 10) के जूते बेचता है। तीन महीने में हुई बिक्री के आँकड़े इस प्रकार है–

जूते का नम्बर	6	7	8	9	10
बेचे गए जूतों की संख्या	18	24	41	19	9

तीन महीने में दुकानदार ने देखा कि काफी जूते बिक चुके हैं। अब दुकानदार को जूतों के खाली हुए स्टॉक को भरना है। क्या वह औसत या माध्यिका ज्ञात करके यह निर्णय ले पाएगा कि उसे कौन–से नम्बर के जूते जल्दी से जल्दी कम्पनी से मंगवाने होंगे? यह हम औसत व माध्यिका से पता नहीं कर सकते। उसे उस माप के जूते मंगवाने चाहिए जो सबसे ज्यादा बिकते हो।

उपरोक्त रिकॉर्ड को देखकर दुकानदार 8 नम्बर के जूते कम्पनी से मंगवाने का निर्णय लेता है। वह अन्य नम्बर के जूतों के स्टॉक को उनके कम खरीदारों को देखते हुए कुछ समय के लिए टाल देता है। आप देख सकते हैं कि '8' नम्बर के जूते की मांग सबसे अधिक है क्योंकि इनकी बिक्री सबसे ज्यादा हुई है।

अतः यहाँ बहुलक 8 है।

करके देखें

निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

1. 25, 9, 69, 34, 70, 36, 90, 70, 56, 70, 71
2. 56, 39, 94, 36, 39, 15, 39, 40

प्रश्नावली–1

1. निम्नलिखित सवालों के हल खोजने के लिए आप समांतर माध्य तथा माध्यिका में से किसका प्रयोग करेंगे और किसमें इनमें से कोई भी काम नहीं आएगा?
   (i) राज्य में सबसे अधिक लोकप्रिय अखबार कौन–सा है?
   (ii) एक महीने में हुई औसत वर्षा कितनी है?
   (iii) किसी परीक्षा में 100 विद्यार्थियों ने भाग लिया। इन विद्यार्थियों में से अंकों के आधार पर सबसे बेहतर प्रदर्शन करने वाले 50 विद्यार्थी कौन–से हैं?
   (iv) जनवरी के महीने में पेट्रोल का औसत दाम कितना रहा?
   (v) कौन–से खिलाड़ी ने अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट में अभी तक सबसे ज्यादा विकेट लिए हैं?
   (vi) दावत में बुलाए गए 20 व्यक्तियों के लिए कितनी चपातियों की आवश्यकता पड़ेगी, यह तय करने के लिए।
   (vii) किस महीने में ज्यादा बारिश होती है?
2. 10 महीनों में हुई वर्षा (मिमी.) के आँकड़े निम्नलिखित है–

   243.50, 266.00, 347.70, 240.00, 325.20,
   264.80, 356.30, 211.60, 246.90, 282.70

   इन आँकड़ों से औसत वर्षा ज्ञात कीजिए।
3. सबसे पहली 10 सम संख्याएँ कौन–सी है? इनका औसत ज्ञात कीजिए।
4. पाँच अलग–अलग शहरों में चावल के दाम का औसत ज्ञात कीजिए–

शहर	A	B	C	D	E
दाम (रुपये में)	25	28	30	31	32

5. तालिका में अंतर्राष्ट्रीय खेलों (ओलंपिक) में अधिकतम ऊँची कूद के आँकड़े दिए हुए हैं। इन आँकड़ों का औसत, बहुलक तथा माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्ष	1960	1964	1968	1972	1976	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004
ऊँचाई (मीटर में)	1.85	1.90	1.82	1.92	1.93	1.97	2.02	2.03	2.02	2.05	2.01	2.06

6. आठ विद्यार्थियों का भार (किलोग्राम में) इस प्रकार है–

   30, 32, 33, 38, 37, 41, 35, 40

   विद्यार्थियों का औसत भार ज्ञात कीजिए।

7. लगातार पाँच वर्षों में किसी स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित है–

   1150, 1250, 1360, 1275, 1310

   इन पाँच वर्षों में स्कूल में औसतन कितने विद्यार्थी थे।

अंकगणितीय औसत, माध्यिका और बहुलक की सीमाएँ

आँकड़ों को समझने के लिए एक प्रतिनिधि मान अंकगणितीय औसत यानी माध्य है। हमने देखा यह आँकड़ों के बारे में हमें बहुत कुछ बताता है, लेकिन इससे कुछ बातें स्पष्ट नहीं हो पाती और इसे आँख मूँदकर इस्तेमाल करने से गड़बड़ हो सकती है। जैसे घर का दरवाजा घर में रहने वाले बड़ों व बच्चों की ऊँचाई का औसत लेकर नहीं बनाया जा सकता और न ही इस आधार पर कि ज्यादा लोग किस ऊँचाई के हैं।

जैसा कि हमने देखा कि इसके अलावा माध्यिका और बहुलक भी कई प्रश्नों का जवाब नहीं बता पाते। यह आँकड़ों को समझने में ज्यादा मददगार होते हैं किन्तु इन्हें भी ध्यान से उपयोग करना होता है। कई विशिष्ट बातें इनमें नहीं दिखती।

वर्गीकृत आँकड़ों में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक

ज्यादातर स्थितियों में प्रेक्षणों की संख्या इतनी अधिक होती हैं कि उनको ठीक तरह से पढ़ने और निष्कर्ष निकालने के लिए हमें उन्हें समूहों में बाँटकर (वर्गीकृत करके) छोटा करने की जरूरत होती है। अतः जब हम अवर्गीकृत आँकड़ों को वर्गीकृत आँकड़ों में बदल देते हैं, तब हमें इन्हें पढ़ने एवं निष्कर्ष निकालने के लिए माध्य, माध्यिका और बहुलक पता करने होंगे।

उदाहरण 13 में 10 के वर्ग अंतराल बनाकर वर्गीकृत आँकड़े दिए है। याद रखें कि वर्ग अंतरालों की बारम्बारताएँ निश्चित करते समय किसी ऊपरी वर्ग सीमा में आने वाले प्रेक्षण अगले वर्ग अंतराल में लेते है। जैसे– जिस वर्ष 50 लाख टन चावल का उत्पादन हुआ है, वह 40–50 वर्ग अंतराल में न होकर 50–60 वर्ग अंतराल में होगा।

हमने देखा कि अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य निकालने के लिए हम दिए गए प्रेक्षणों का जोड़ निकालते हैं। लेकिन वर्गीकृत आँकड़ों के लिए हम क्या करेंगे ? उस वर्ग में से कौन–सा मान लें,कौन–सी संख्या चुनें? क्या 40–50 के वर्ग के लिए 40 लें अथवा 50 या कोई और?

अतः यहाँ हमें एक ऐसी संख्या चाहिए जो सभी वर्ग अंतरालों का प्रतिनिधित्व करे। हम यह मान लेते हैं कि पूरे वर्ग अंतराल की बारम्बारता मध्य बिन्दु के चारों ओर केन्द्रित होती है, और हर वर्ग अंतराल का मध्य बिन्दु उस वर्ग का प्रतिनिधि है। इस मध्य बिन्दु (Mid Point) को वर्ग प्रतीक (Class Mark) भी कहते है।

उदाहरणः–10. एक उच्चतर माध्यमिक शाला के छोटे– बड़े बच्चों के वजन के आँकड़े नीचे दिए गए हैं, इसका समांतर माध्य पता करें।

वजन (किग्रा में)	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
बच्चों की संख्या	11	29	6	3	1

हलः– मध्य बिन्दु ज्ञात करने के लिए हमें वर्ग सीमा का उपयोग करना होता है। मध्य बिन्दु, वर्ग की निम्न सीमा तथा उच्च सीमा का औसत होता है। पहले हम मध्य बिंदु निकालेंगे। वर्ग (30–40) का मध्य बिन्दु देखें तो वह 35 होगा, यानी

$$\text{मध्य बिन्दु} = \frac{\text{निम्न वर्ग सीमा} + \text{उच्च वर्ग सीमा}}{2} = \frac{30+40}{2} = 35$$

मध्य बिन्दु को हम x_i द्वारा दर्शाते हैं। पहला मध्य बिन्दु $x_1 = 35$

इसी प्रकार हम बाकी वर्गों के मध्य बिन्दु ज्ञात कर सकते हैं जो कि क्रमशः 45, 55, 65 और 75 होंगे। अब प्रत्येक मध्य बिन्दु को प्रत्येक वर्ग की बारम्बारता से गुणा कर इसका उपयोग माध्य ज्ञात करने के लिए करेंगे। नई तालिका इस प्रकार बनेगी–

वजन (किग्रा.)	वर्षों की संख्या (f_i)	मध्य बिन्दु (x_i)	($f_i x_i$)
30–40	11	35	385
40–50	29	45	1305
50–60	6	55	....
60–70	3	65	....
70–80	1	75	....
योग	**50**		**2290**

तालिका को पूरा कीजिए।

अतः हम पाते हैं कि ऊपर बनी तालिका में $f_i x_i$ का योग यानी $\sum f_i x_i = 2290$ है।

अतः दिए हुए आँकड़ों का माध्य $\bar{X}$ होगा :

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2290}{50} = 45.8 \text{ किग्रा.}$$

यानी औसतन वजन प्रति बच्चा 45.8 किग्रा. हैं।

वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

ऊपर हमने यह पता लगाया कि औसतन बच्चों का वजन क्या है। यदि हम यह जानना चाहते हैं कि कौन–सा वजन सबसे ज्यादा बच्चों का है, तो हमें इन आँकड़ों का बहुलक पता करना होगा।

आप यह जानते हैं कि बहुलक दिए गए आँकड़ों में से वह मान होता है जो सबसे अधिक बार दोहराया गया होता है। वर्गीकृत आँकड़ों में हम सबसे पहले बहुलक वर्ग की पहचान करते हैं। इन आँकड़ों में वर्ग (40–50) की आवृत्ति सबसे अधिक है अतः यह बहुलक वर्ग है । हमें इससे यह पता चल पाता है कि आँकड़ों का बहुलक इसी वर्ग अंतराल के बीच मौजूद है। इस प्रकार की स्थिति में बहुलक सूत्र में मान रखकर ज्ञात कर लेते हैं।

> f_1 और f_0 में जितना अधिक अंतर होगा बहुलक l से उतना ही बड़ा होगा। इसी तरह f_2 और f_1 में जितना कम अंतर होगा बहुलक l से उतना ही बड़ा होगा और $l+d$ के करीब होगा। अगर यह सोचें कि बहुलक का अधिकतम मान कितना हो सकता है तो हम यह देखेंगे कि इसका अधिकतम मान l तथा f_1 व f_0 या f_2 व f_1 के अंतर d के योग के बराबर होगा। यानी बहुलक l और $l+d$ के बीच होगा।

बहुलक ज्ञात करने का सूत्र–

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

इस सूत्र में–

l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले की बारम्बारता

f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद की बारम्बारता

h = वर्ग अंतराल की माप

उदाहरणः–11. उदाहरण 10 की तालिका में बहुलक वर्ग = 40–50, बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 40

बहुलक वर्ग की बारम्बारता (f_1) = 29

बहुलक वर्ग से ठीक पहले की बारम्बारता (f_0) = 11

बहुलक वर्ग से ठीक बाद की बारम्बारता (f_2) = 6

वर्ग माप (h) = 10

सूत्र में इन मानों को रखने पर

$$\text{बहुलक} = 40 + \left[\frac{29-11}{2(29)-11-6}\right] \times 10$$

$$= 40 + \left[\frac{18}{58-17}\right] \times 10 = 40 + \frac{18}{41} \times 10$$

$$= 44.39 \text{ किग्रा.}$$

यह $l + d$ के करीब है क्योंकि f_0 बड़ा व f_2 छोटा है।

इस प्रकार वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात किया जाता। यह बहुलक के आँकड़ों के करीब हैं।

वर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका

उदाहरणः–12. किसी स्कूल में दसवीं कक्षा की लड़कियों की ऊँचाई इस प्रकार दी गई है–

ऊँचाई (सेमी.)	135–140	140–145	145–150	150–155	155–160
लड़कियों की संख्या	1	2	11	9	7

इन आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हलः– दिए गए आँकड़ों की माध्यिका निकालने के लिए आवृत्ति से संचयी आवृत्ति निकालनी होगी। (आप कक्षा–9 में संचयी आवृत्ति निकालना सीख चुके हैं)

ऊँचाई	लड़कियों की संख्या (संचयी बारम्बारता)
140 से कम	1
145 से कम	1 + 2 = 3
150 से कम	3 + 11 = 14
155 से कम	14 + 9 = 23
160 से कम	23 + 7 = 30

यह 'से कम' प्रकार का संचयी बारम्बारता बंटन है जहाँ 140, 145,150,155,160 वर्ग की ऊपरी सीमाएँ हैं।

हम जानते हैं कि दिए गए वर्गीकृत आँकड़ों के मध्य का प्रेक्षण किसी वर्ग अंतराल में स्थित होगा। वह वर्ग अंतराल कैसे पता करें जिसमें मध्य प्रेक्षण स्थित है ?

ऊँचाई	लड़कियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (cf)
135–140	1	1
140–145	2	3
145–150	11	14
150–155	9	23
155–160	7	30

इस माध्यिका वर्ग (Median Class) को निकालने के लिए हम सभी वर्गों की संचयी बारम्बारताएँ और $\frac{n}{2}$ ज्ञात करते हैं। अब हम वह वर्ग खोजते हैं जिसकी संचयी बारम्बारता $\frac{n}{2}$ से अधिक या उससे निकटतम है। यहाँ $n = 30$ है यानी $\frac{n}{2} = 15$ हुआ अब 150–155 ही वह वर्ग है जिसकी संचयी बारम्बारता 23 है अर्थात 15 से ज्यादा है तो 15वाँ प्रेक्षण या माध्यिका 150–155 वर्ग में ही आएगा।

अतः 150–155 माध्यिका वर्ग है। माध्यिका वर्ग पता करने के बाद हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके माध्यिका निकाल सकते हैं–

$$\text{माध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

जहाँ $l =$ माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

$n =$ प्रेक्षणों (कुल आवृत्ति)की संख्या

cf = माध्यिका वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता

f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता

h = वर्ग माप (यह मानते हुए कि वर्ग माप बराबर है)

अब $\frac{n}{2}=15$, l = 150, cf = 14 , f = 9 , h = 9

$$\text{माध्यिका} = 150 + \left(\frac{15-14}{9}\right) \times 5$$

$$= 150 + \frac{5}{9}$$

$$= 150.55 \text{ सेमी.}$$

अतः लगभग आधी लड़कियों की ऊँचाई 150.55 सेमी.से कम है और शेष आधी लड़कियों की ऊँचाई 150.55 सेमी. से अधिक या उसके बराबर है।

इसी प्रकार हम आँकड़ों को 'से अधिक' के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं। यह तालिका में दिखाया गया है। इससे भी कई निष्कर्ष निकाल सकते हैं,जैसे 150 सेमी. से अधिक 16 लड़कियों की ऊँचाई है,आदि।

ऊँचाई	लड़कियों की संख्या
135 से अधिक या उसके बराबर	30
140 से अधिक या उसके बराबर	29
145 से अधिक या उसके बराबर	27
150 से अधिक या उसके बराबर	16
155 से अधिक या उसके बराबर	7

इस तालिका से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? चर्चा करके 3 निष्कर्ष लिखिए।

रूझान : अंतर्वेषण और बहिर्वेषण (Trend:Interpolation and Extrapolation)

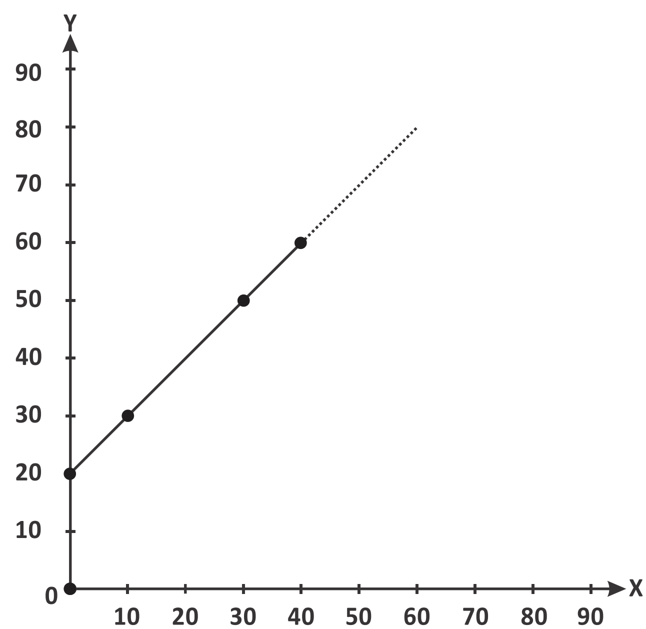
हमने देखा कि आँकड़ों को व्यवस्थित करने और उनके अध्ययन के बाद हमें कई बातें पता चलती हैं किन्तु कई बातें हम नहीं जान पाते। एक और सवाल यह है कि हमारे पास जिस अन्तराल के आँकड़े हैं उसके आगे के आँकड़ों के बारे में क्या हम कुछ कह सकते हैं? माना हमने एक शहर में कुल वर्षा के आँकड़े कई वर्षों तक ज्ञात किए। इसमें से बीच के कुछ वर्षों में कुल बारिश के आँकड़े हमारे पास उपलब्ध नहीं हैं क्योंकि इन्हें इकट्ठा करना रह गया । तो क्या हम इनका अनुमान लगा सकते हैं और हम यह भी सवाल पूछ सकते हैं कि क्या इन आँकड़ों से हम यह बता सकते हैं कि आने वाले साल में कुल कितनी बारिश होगी?

इन दोनों के बारें में सोचने के लिए हमें आँकड़ों के पैटर्न को देखना होगा। यानी क्या आँकड़ों में बदलाव का कोई निश्चित ढंग है? क्या उनमें हम कोई रूझान देख सकते हैं? हम आगे कुछ उदाहरणों के माध्यम से इस पर विचार करेंगे और यह देखेंगे कि ऐसा कब किया जा सकता है और कब नहीं।

मान लीजिए कि आप किसी द्रव्य को 40 मिनट तक गर्म करते हैं और चार अलग–अलग समय पर उसका तापमान नोट करते हैं जो इस तालिका में दिए हैं।

समय (मिनट में)	0	10	30	40
तापमान (डिग्री सेल्सियस में)	20	30	50	60

इन आँकड़ों को आलेख में दर्शाने पर बिंदु प्राप्त होते हैं। इन बिंदुओं से जोड़ती हुई एक रेखा खींचिए। हम कह सकते हैं कि शुरूआत में 0 मिनट पर तापमान 20^0C,10 मिनट बाद 30^0C, 30 मिनट बाद 50^0C और 40 मिनट बाद 60^0C नोट किया गया पर क्या हम इन आँकड़ों को देखकर 20 मिनट और 60 मिनट बाद तापमान बता सकते हैं? जाहिर है नहीं। इन आँकड़ों में सिर्फ 0, 10, 30 और 40 मिनट पर तापमान दिए हैं। 20 मिनट, अंतराल 10–30 के बीच आता है। हम आलेख की मदद से 20 मिनट के संगत तापमान पता कर सकते हैं जो कि 40^0C है। (आलेख–2)



यहाँ दिए गए आँकड़ों में अनंत ऐसे आँकड़ें हैं जो दिए गए आँकडों के अंदर आते हैं और उनके संगत तापमान भी इस आलेख से बता सकते हैं, इसे अंतर्वेषण कहते हैं।

ध्यान दीजिए कि यहाँ आँकड़ों का परिसर (Range) 0 – 40 (मिनट) तक है। 50 मिनट इसके बाहर आता है। 50 मिनट पर तापमान पता करने के लिए हम इस आलेख की रेखा को उसी ओर आगे बढ़ाएँगे। आगे बढ़ाने पर हमें 50 मिनट पर तापमान 70^0C प्राप्त हुआ। इसी प्रकार आगे बढ़ाई गई रेखा पर अन्य संगत तापमान भी दर्शाये जा सकते हैं। यह तरीका जिसमें लिए गए आँकड़ों के रूख को आगे बढ़ाते हुए आँकड़ों के परिसर के बाहर के अनंत मान पता करते हैं, बहिर्वेषण कहते हैं। यह माना जाता है कि आँकड़ों के बदलने का रूख (Trend) एक ही है और आँकड़ों के परिसर के बीच व उसके बाहर दोनों के लिए उसमें कोई अप्रत्याशित उतार–चढ़ाव नहीं है।

अंतर्वेषण और बहिर्वेषण की सीमाएँ

ऊपर के उदाहरण में हमने आलेख के आधार पर 0 से 40 के बीच 20 मिनट पर व इस परिसर से बाहर भी 50 मिनट का तापमान बता दिया। क्या आप यह बता सकते हैं कि द्रव्य को 90 मिनट तक गर्म करें, तब तापमान कितना होगा? तालिका में आप देखते हैं कि प्रत्येक 10 मिनट में द्रव्य के ताप में 10^0C की बढ़ोतरी हो रही है इस आधार पर हम कह सकते हैं कि 90 मिनट पर तापमान 110^0C होगा। क्या खुले बर्तनों में गर्म हो रहे पानी का ताप हो सकता है? जाहिर है कि इस ग्राफ का रूख धीरे–धीरे बदला और उपलब्ध आँकड़ों के आधार पर बाद के समय की ओर ज्यादा नहीं किया जा सकता। दूसरा प्रश्न यह भी है कि क्या अंतर्वेषण एवं बहिर्वेषण सभी आँकड़ों में किया जा सकता है। क्या निम्नलिखित आँकड़ों में भी हम यह कर सकते हैं? आइए देखें:–

ओलंपिक मे अधिकतम ऊँची कूद के आँकड़े निम्नानुसार है–

वर्ष	1960	1964	1972	1976	1980
ऊँचाई(मीटर में)	1.85	1.90	1.92	1.93	1.97

इन आँकड़ों के आधार पर क्या आप बता पाएँगे कि 1956 में ऊँची कूद की अधिकतम ऊँचाई कितनी रही होगी?

यह संभव नहीं है क्योंकि इनमें कोई रूझान नहीं है । ये तो उस प्रतियोगिता में अधिकतम दूरी के रिकार्ड किए गए आँकड़े हैं। इसी प्रकार यदि जनसंख्या के आँकड़ों में कोई रूझान नहीं है तो इसमें भी हम अनुमान नहीं लगा सकते कि आगे के वर्ष में जनसंख्या कितनी होगी या दिए गए वर्षों के बीच किसी वर्ष में जनसंख्या कितनी रही होगी? यानी अंतर्वेषण एवं बहिर्वेषण की सीमाएँ हैं जो आँकड़ों के रूप व रूख पर आधारित होते हैं हम प्रत्येक प्रकार के आँकड़ों के लिए अंतर्वेषण और बहिर्वेषण नहीं कर सकते।

सोचें एवं चर्चा करें

नीचे की तालिका में कक्षा दसवीं की परीक्षा के परिणाम दिए गए हैः–

वर्ष	2001	2002	2003	2005
परिणाम	88%	80.5%	66%	55%

क्या आप 2004 एवं 2006 के परीक्षा परिणाम का अनुमान लगा सकते हैं?

ग्राफ से आँकड़े निकालना

करके देखें

आप अपने स्कूल के अलग–अलग कक्षाओं के 40 लड़के या लड़कियों की उम्र एवं उनकी ऊँचाई(सेमी.), का आँकड़ा एकत्रित कीजिए एवं उन बच्चों की आयु तथा उनकी आयुवार औसत ऊँचाई के बीच ग्राफ खींचिए। (आँकड़े लेते समय ध्यान रखें कि समान आयु वाले बच्चों की संख्या 3 से 5 अवश्य हो)

इस ग्राफ के आधार पर आप बताएँ–

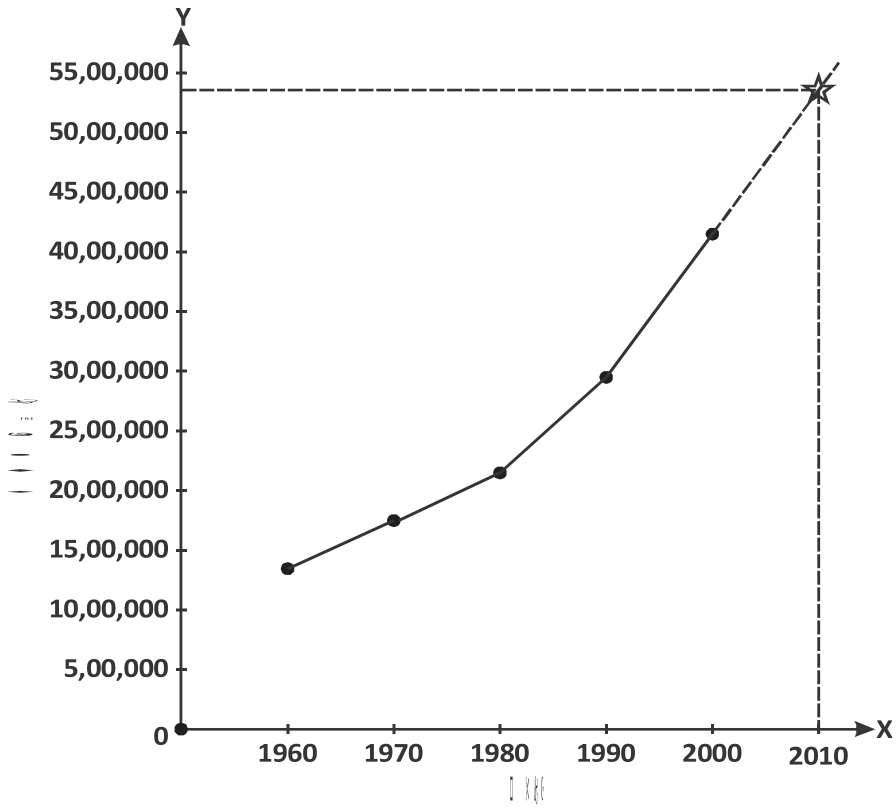
1. 15 वर्ष की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई कितनी है?
2. 10 वर्ष की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई कितनी है?
3. 13 वर्ष से लेकर 15 वर्ष तक की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई में इस दौरान कितनी वृद्धि हुई?
4. क्या आप पता लगा सकते हैं कि 14 वर्ष की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई कितनी होगी? कैसे?
5. 16 वर्ष की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई कितनी होगी?

   सवाल 4 एवं 5 के हल कैसे पता किए जा सकते हैं?

संकेतः– X–अक्ष पर 14 वर्ष को दर्शाइए और उसे X–अक्ष के लंबवत चलकर आलेख की रेखा के सीधवाली बिंदु से मिलाइए। आलेख की रेखा पर मिले बिन्दु को Y–अक्ष से मिलाइए। Y–अक्ष पर जो मान मिलेगा वह 14 वर्ष की उम्र वाले बच्चों की औसत ऊँचाई दिखाएगा। इसी प्रकार आप आपके द्वारा लिए गए आँकड़ों में से किसी भी उम्र वाले बच्चों की औसत ऊँचाई पता कर सकते हैं।

6. क्या आप इस ग्राफ 8 वर्ष व 20 वर्ष पर इन्हीं लड़कियों की औसत ऊँचाई पता कर सकते हैं? चर्चा करके लिखें।

उदाहरणः–13. जनसंख्या के आँकड़ों से संबंधित निम्नलिखित ग्राफ को देखिए तथा ग्राफ के आधार पर नीचे लिखे सवालों के जवाब दीजिए।



(i) वर्ष 1980 में जनसंख्या कितनी थी?

(ii) वर्ष 1960 से 2000 तक जनसंख्या में कितनी वृद्धि हुई?

(iii) वर्ष 1975 में जनसंख्या कितनी थी?

(iv) वर्ष 1995 में जनसंख्या कितनी थी? पता लगाइए।

(v) क्या दिए गए आँकड़ों के आधार पर 2010 की जनसंख्या का अनुमान लगाया जा सकता है?

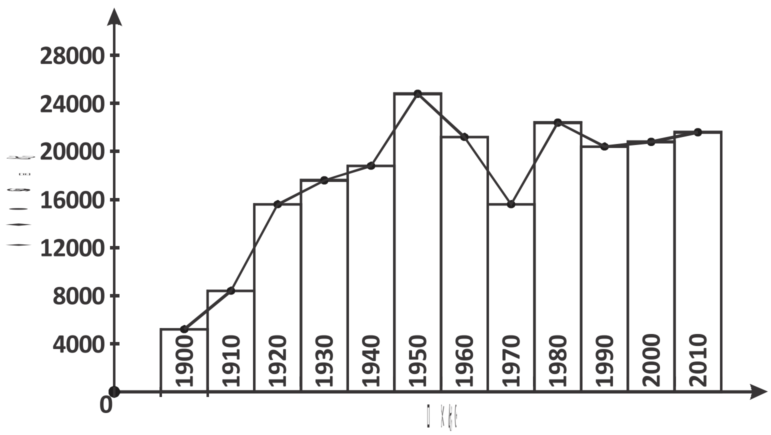
प्रश्न (i) और (ii) के आँकड़ें हमें सीधे–सीधे ग्राफ द्वारा मिल सकते हैं। परंतु प्रश्न (iii), (iv) और (v) के आँकड़ें हमें ग्राफ द्वारा निकालने होंगें। ग्राफ में प्रदर्शित आँकड़ों को यदि देखें तो उसमें लगातार वृद्धि होती हुई दिखाई पड़ रही है। X–अक्ष पर वर्ष 1975,1995 और 2010 को दर्शाने के साथ–साथ Y–अक्ष पर भी पैमाना 4,500,000 से 5,500,000 तक बढ़ाना होगा। अब यदि ग्राफ पर ज्ञात हुए बिन्दुओं को Y–अक्ष पर स्थित संगत बिंदुओं से मिलाएँ तो 1975,1995 और 2010 की जनसंख्या के अनुमानित आँकड़े मिल सकते हैं (ग्राफ– देखें)। इस प्रकार हम एकत्रित आँकड़ों के आधार पर अनुमानित आँकड़ें प्राप्त कर सकते हैं।

अनुमानित आँकड़ों के आधार पर वर्तमान में भविष्य के लिए नई योजनाएँ बनाने में मदद होती है। जैसे अनुमानित जनसंख्या के वास्तविकता में बदलने से पहले नियंत्रित करने की योजना वर्तमान में ही बनायी जा सकती है।

नोटः– 2010 के अनुमानित आँकड़े के लिए यह माना गया है कि जनसंख्या बढ़ने का रूझान वही रहेगा। यह आवश्यक नहीं है कि ऐसा हो उस समय जनसंख्या बढ़ने को रोकने के बहुत प्रयास हो रहे थे। उससे रूझान पर क्या असर आया कह नहीं सकते, इसलिए इस तरह का बहिर्वेषण इस समझ से ही किया जाता है कि यह एक अनुमान मात्र है।

उदाहरणः–14. किसी देश की जनसंख्या को विभिन्न वर्षों में निम्नलिखित आलेख द्वारा दर्शाया गया है–

आलेख का अध्ययन कर निम्नलिखित सवालों के हल खोजिए।



(i) सबसे अधिक जनसंख्या कौन से वर्ष में थी?

(ii) सबसे कम जनसंख्या कितनी है?

(iii) कौन–कौन से वर्ष ऐसे हैं जिसमें जनसंख्या में वृद्धि हुई?

(iv) कौन–से वर्ष ऐसे हैं जिसमें जनसंख्या में गिरावट आई?

(v) प्रारम्भ के पाँच वर्षों में जनसंख्या में लगातार वृद्धि हुई है या कमी आई है?

आइए इन आँकड़ों पर थोड़ा और विचार करते हैं।

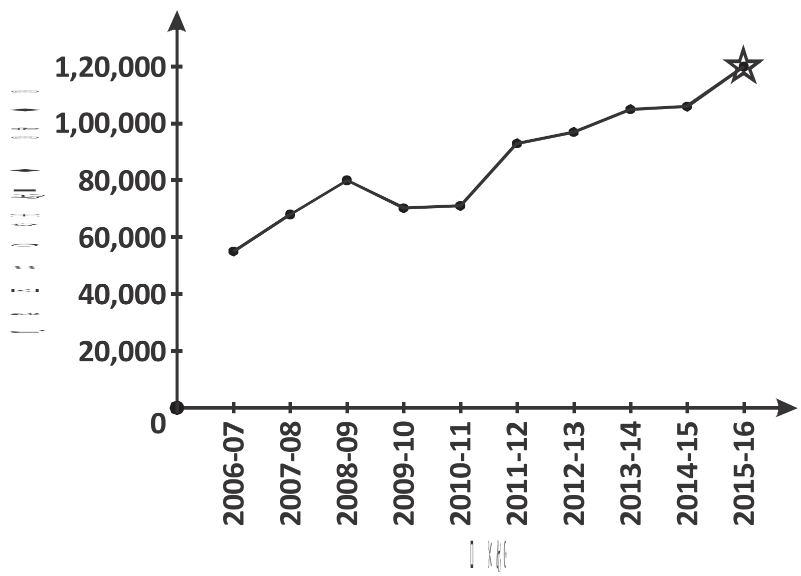
यदि हम वर्ष 1900 से वर्ष 1950 तक के प्रारम्भिक पचास वर्षों के आँकड़ों को देखें तो पता चलता है कि जनसंख्या में लगातार वृद्धि हुई है। उसके बाद के वर्षों की बात करें तो वर्ष 1950 से 1970 तक जनसंख्या में गिरावट आई है और उसके बाद फिर से वृद्धि दर्ज की गई। वर्ष 1990 से 2010 तक के आँकड़े भी जनसंख्या में वृद्धि दिखा रहे हैं।

आपने देखा कि बार–बार जनसंख्या के आँकड़ों के बदलने की दिशा में कई बार परिवर्तन आया। अलग–अलग समय पर आँकड़ों में वृद्धि तथा गिरावट से, आँकड़ों में परिवर्तन की दिशा कई बार बदली इसे आँकड़ों का रूझान कहते हैं। आँकड़ों का रूझान हमें आँकड़ों के बारे में भविष्य के पूर्वानुमान लगाने में मदद करता है।

आइए, इसे एक और उदाहरण से समझते हैं–

उदाहरणः–15. किसी प्रदेश में मछली उत्पादन से संबंधित आँकड़े नीचे ग्राफ द्वारा प्रदर्शित किए गए हैः–

ग्राफ का अध्ययन कीजिए तथा निम्नलिखित सवालों के जवाब खोजिए–



(i) वर्ष 2011–12 में कितना मछली उत्पादन हुआ?

(ii) अधिकतम मछली उत्पादन कौनसे वर्ष में हुआ?

(iii) क्या मछली उत्पादन में लगातार वृद्धि दिख रही है?

जब भी हम आँकड़ों का अध्ययन करते हैं हम आँकड़ों में बदलाव के कारणों के बारे में भी सोचते हैं, जैसे– उपरोक्त उदाहरण में मछली उत्पादन में वृद्धि होने के क्या कारण हैं।

वर्ष 2007 में उस प्रदेश की सरकार ने 'मत्स्य मित्र' नामक योजना की पहल की जिसमें मत्स्य विभाग ने समुदाय को साथ में जोड़कर मछली पालन को प्रोत्साहित किया। अब प्रदेश विभाग के साथ हजारों की संख्या में समुदाय के लोग हैं जो विभाग को मछली पालन के लिए अनुकूल स्थान खोजने में मदद करते हैं साथ ही मछली उत्पादन से संबंधित महत्वपूर्ण आँकड़े दर्ज करने में भी भूमिका निभाते हैं।

मछली उत्पादन में समुदाय को सक्रिय रूप से जोड़ लेने के कारण प्रदेश द्वारा किए गए उत्पादन में लगातार वृद्धि हुई। पिछले आँकड़ों के आधार पर बहिर्वेषण करने पर यह अनुमान लगाया गया कि वर्ष 2015–16 तक मछली उत्पादन 1,20,000 टन तक पहुँच जाएगा।

FUXG63

प्रश्नावली–2

1. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए–

महिला शिक्षकों की संख्या (%में)	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	75–85
राज्यों की संख्या	6	11	7	4	4	2	1

इस तालिका के आधार पर महिला शिक्षकों की संख्या के बारे में 5 निष्कर्ष लिखिए।

2. एकदिवसीय अंतर्राष्ट्रीय मैचों में बहुत से गेंदबाजों द्वारा लिए गए कुल विकेटों की संख्या के आँकड़े तालिका में दिए गए हैं। इनका बहुलक ज्ञात कीजिए–

विकेटों की संख्या	0–50	50–100	100–150	150–200	200–250	250–300
गेंदबाजों की संख्या	4	5	16	12	3	2

इस तालिका के आँकड़ों के बारे में 5 निष्कर्ष लिखिए।

3. निम्नलिखित तालिका में 35 शहरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) के आँकड़े दिए गए हैं। इन आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए–

साक्षरता दर (%में)	45–55	55–65	65–75	75–85	85–95
शहरों की संख्या	3	10	11	8	3

इस तालिका के आँकड़ों के बारे में 3 निष्कर्ष लिखिए

4. किसी अस्पताल में एक साल में भर्ती हुए मरीजों के आँकड़ें निम्नलिखित हैं। इनका माध्य ज्ञात कीजिए–

उम्र (वर्षों में)	5–15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65
मरीजों की संख्या	6	11	21	23	14	5

इस तालिका के आँकड़ों के बारे में 3 निष्कर्ष लिखिए

5. किसी परीक्षा में विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नलिखित सारणी में दी गई है–

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
विद्यार्थियों की संख्या	1	12	24	32	10	5

प्राप्तांक की माध्यिका ज्ञात कीजिए। इस तालिका के आँकड़ों के आधार पर 3 निष्कर्ष लिखिए।

हमने सीखा

1. स्तंभ आलेख व तालिकाएँ आँकड़ों को समझने में मदद करती हैं।
2. विभिन्न परिस्थितियों में विचाराधीन आँकड़े ही प्रेक्षण होते हैं।
3. औसत एक ऐसी संख्या है जो आँकड़ों के पूरे समूह का गुण बताती है।
4. औसत दिए गए प्रेक्षणों के सबसे कम व सबसे अधिक मान के बीच में ही होता है।
5. आँकड़ों के औसत को सांख्यिकी में समांतर माध्य कहते हैं।
6. माध्य, माध्यिका एवं बहुलक आँकड़ों के प्रतिनिधि मान होते हैं।
7. माध्यिका वह आँकड़ा है जो व्यवस्थित प्रेक्षणों में आए मान के ठीक बीच में होता है।
8. बहुलक वे मान होते हैं जो दिए गए प्रेक्षणों में सबसे अधिक बार होते हैं।
9. आँकड़ों में बहुत अधिक अंतर होने पर उन आँकड़ों के माध्य से निकाला गया निष्कर्ष त्रुटिपूर्ण हो सकता है।
10. व्यक्तिगत श्रेणी में दिए गए आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने के लिए आँकड़ों को बढ़ते या घटते क्रम में व्यवस्थित करते हैं।
11. दिए गए प्रेक्षणों में अधिकतम व न्यूनतम मान के अंतर को परिसर कहते हैं। यह प्रेक्षणों के मान का फैलाव दिखाता है।
12. व्यक्तिगत श्रेणी में समांतर माध्य ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है–

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{कुल प्रेक्षणों की संख्या}}$$

13. असतत व वर्गीकृत श्रेणी में समांतर माध्य निकालने का सूत्र निम्नलिखित है–

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

14. व्यक्तिगत श्रेणी के आँकड़ों से माध्यिका ज्ञात करते समय प्रेक्षणों (पदों) की संख्या के विषम होने पर निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं–

$$\text{माध्यिका} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{वाँ पद}$$

15. व्यक्तिगत श्रेणी के आँकड़ों से माध्यिका ज्ञात करते समय प्रेक्षणों (पदों)की संख्या के सम होने पर निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं–

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{वाँ पद}}{2}$$

16. वर्गीकृत श्रेणी में दिए गए आँकड़ों की माध्यिका की गणना के निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं–

$$\text{माध्यिका} = \ell + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

17 वर्गीकृत श्रेणी में दिए गए आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं–

$$\text{बहुलक} = \ell + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

18. आलेख की मदद से आँकड़ों के परिसर में ऐसे मान भी ज्ञात कर सकते है जो आँकड़ों में नहीं दिए गए हैं, अंतर्वेषण कहलाता है। किन्तु ऐसा हर प्रकार के आँकड़ों के लिए संभव नहीं है।

19. आलेख में रेखा के बढ़ने की दिशा व घटने की दिशा के आधार पर आँकड़ों के परिसर के बाहर के मान ज्ञात करना बहिर्वेषण कहलाता है। यह भी आँकड़ों में रूझान स्पष्ट होने की स्थिति में किया जा सकता है।

उत्तरमाला–1

1. (i) इनमें से कोई नहीं (ii) समांतर माध्य (iii) माध्यिका (iv) समांतर माध्य (v) बहुलक (vi) समांतर माध्य (vii) इनमें से कोई नहीं

2. 278.47 मिमी. 3. 11 4. 29.2 रूपये

5. समांतर माध्य = 1.965 मीटर , माध्यिका = 1.99, बहुलक = 2.02

6. 35.75 किलोग्राम

उत्तरमाला–2

1. 39.71% 2. 136.66 3. 69.42%

4. माध्य = 35.37, 5. 31.56