प्रश्न–पत्र कोड **SET-3**

Series QSS4R/4 **Q.P. Code 65/4/3**

अनुक्रमांक
Roll No.

परीक्षार्थी प्रश्न–पत्र कोड को उत्तर–पुस्तिका के मुख–पृष्ठ पर अवश्य लिखें।
Candidates must write the Q.P. Code on the title page of the answer-book.

MATHEMATICS

गणित

निर्धारित समय : **3** घण्टे अधिकतम अंक : **80**

Time allowed : 3 Hours **Maximum Marks : 80**

(i) Please check that this question paper contains 23 printed pages.
कृपया जॉच कर लें कि इस प्रश्न –पत्र में मुद्रित पृष्ठ 23 हैं।

(ii) Please check that this question paper contains 38 questions.
कृपया जॉच कर लें कि इस प्रश्न– पत्र में 38 प्रश्न हैं।

(ii) Q.P. Code given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
प्रश्न पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए प्रश्न–पत्र कोड को परीक्षार्थी उत्तर-पुस्तिका के मुख्य-पृष्ठ पर लिखें।

(iv) **Please write down the serial number of the question in the answer-book before attempting it.**
कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर–पुस्तिका में प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।

(v) 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the candidates will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.
इस प्रश्न–पत्र को पढने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है। प्रश्न–पत्र का वितरण पूर्वाह्न मे 10.15 बजे किया जाएगा। 10.15 बजे से 10.30 बजे तक परीक्षार्थी केवल प्रश्न–पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर नहीं लिखेंगे।

General Instructions :

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

(i) This question paper contains 38 questions. All questions are compulsory.

(ii) Question paper is divided into FIVE sections - Section A, B, C, D and E.

(iii) In Section A : Questions number 1 to 18 are Multiple Choice Questions (MCQs) and Questions no. 19 & 20 are Assertion-Reason based questions of 1 mark each.

(iv) In Section B : Questions number 21 to 25 are Very Short Answer (VSA) type questions carrying 2 marks each.

(v) In Section C : Questions number 26 to 31 are Short Answer (SA) type questions, carrying 3 marks each.

(vi) In Section D : Questions number 32 to 35 are Long Answer (LA) type questions, carrying 5 marks each.

(vii) In Section E : Questions number 36 to 38 are case study based questions, carrying 4 marks each.

(viii) There is no overall choice. However, an internal choice has been provided in 2 questions in Section B, 3 questions in Section D and 2 questions in Section E.

(ix) Use of calculator is **not** allowed.

सामान्य निर्देश :

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख्ती से पालन कीजिए :

(i) इस प्रश्न-पत्र में 38 प्रश्न हैं। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) प्रश्न-पत्र पाँच खण्डों में विभाजित है – खण्ड– क, ख, ग, घ तथा ङ ।

(iii) खण्ड–क में प्रश्न-संख्या 1 से 18 तक बहुविकल्पी तथा प्रश्न संख्या 19 एवं 20 अभिकथन एवं तर्क आधारित 1 अंक के प्रश्न हैं।

(iv) खण्ड – ख में प्रश्न-संख्या 21 से 25 तक अति लघु–उत्तरीय (VSA) प्रकार के 2 अंकों के प्रश्न हैं।

(v) खण्ड – ग में प्रश्न-संख्या 26 से 31 तक लघु–उत्तरीय (SA) प्रकार के 3 अंकों के प्रश्न हैं।

(vi) खण्ड – घ में प्रश्न-संख्या 32 से 35 तक दीर्घ– उत्तरीय (LA) प्रकार के 5 अंकों के प्रश्न हैं।

(vii) खण्ड – ड़ में प्रश्न-संख्या 36 से 38 तक प्रकरण अध्ययन आधारित 4 अंकों के प्रश्न हैं।

(viii) प्रश्न–पत्र में समग्र विकल्प नहीं दिया गया है। यद्यपि, खण्ड–ख के 2 प्रश्नों में, खण्ड–ग के 3 प्रश्नों में, खण्ड–घ के 3 प्रश्नों में तथा खण्ड–ङ के 2 प्रश्नों में आंतरिक विकल्प का प्रावधान दिया गया है।

(ix) कैल्कुलेटर का उपयोग वर्जित है।

खण्ड–क (SECTION – A)

This section consists of 20 multiple choice questions of 1 mark each.

इस खण्ड में 20 बहुविकल्पी प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है। **20 × 1 = 20**

1. If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are two vectors such that $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$ and $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{3}$, then the angle between $2\vec{a}$ and $-\vec{b}$ is :

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो ऐसे सदिश हैं कि $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$ तथा $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{3}$ है, तो $2\vec{a}$ तथा$-\vec{b}$ के बीच का कोण है:

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{11\pi}{6}$

Sol. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$

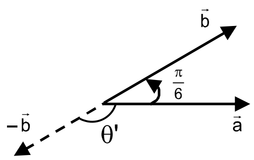
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$

$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{3}$

$1\times 2\cos\theta=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$



$\theta' = \pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

$\theta' = \frac{5\pi}{6}$

angle b/w $2\vec{a}$ & $-\vec{b}$ is $\frac{5\pi}{6}$

option (C)

2. The vectors $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{c} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ represents the sides of

(A) an equilateral triangle (B) an obtuse-angled triangle

(C) an isosceles triangle (D) a right-angled triangle

सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{c} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ जिस त्रिभुज की भुजाओं को निरूपित करते हैं, वह है:

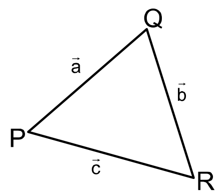
(A) एक समबाहु त्रिभुज (B) एक अधिक–कोण त्रिभुज

(C) एक समद्विबाहु त्रिभुज (D) एक समकोण त्रिभुज

Sol. $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\hat{c} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$



$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

$|\vec{c}| = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$

here : $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

so, given vectors represent the sides of a right angled triangle.

3. Let $\vec{a}$ be any vector such that $|\vec{a}|$ = a. The value of $|\vec{a}\times\hat{i}|^2 + |\vec{a}\times\hat{j}|^2 + |\vec{a}\times\hat{k}|^2$ is:

(A) a^2 (B) $2a^2$ (C) $3a^2$ (D) 0

माना $\vec{a}$ एक ऐसा सदिश है जिसके लिए $|\vec{a}|$ = a. है, तो

$|\vec{a}\times\hat{i}|^2 + |\vec{a}\times\hat{j}|^2 + |\vec{a}\times\hat{k}|^2$ का मान है:

(A) a^2 (B) $2a^2$ (C) $3a^2$ (D) 0

Sol. Let given vector is

$\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

then $\vec{a}\times\hat{i} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\times\hat{j} = -y\hat{k} + z\hat{j}$

$\Rightarrow (\vec{a}\times\hat{i})^2 = y^2 + z^2$ ------------ (1)

Similarly : $\vec{a}\times\hat{j} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\times\hat{j} = x\hat{k} - z\hat{i}$

$\Rightarrow (\vec{a}\times\hat{j})^2 = x^2 + z^2$ ------------ (2) and $\vec{a}\times\hat{k} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\times\hat{k} = -x\hat{j} + y\hat{i}$

$\Rightarrow (\vec{a}\times\hat{k})^2 = x^2 + y^2$ ------------ (3)

from equation (1), (2) & (3)

$(\vec{a}\times\hat{i})^2 + (\vec{a}\times\hat{j})^2 + (\vec{a}\times\hat{k})^2 = y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2$

$= 2(x^2+y^2+z^2)$

$= 2|\vec{a}|^2 = 2a^2$

$\left\{\because \vec{a}^2 = |a|^2\right\}$

option (B)

4. If A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ and $A^2 + 7I = kA$, then the value of k is:

यदि A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तथा $A^2 + 7I = kA$ है, तो k का मान है:

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 7

Sol. **(C)**

$A^2 + 7I = kA$

$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$

By Comparing respective terms of matrices

15 = 3 K

$\therefore$ K = 5

5. Let A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ and B = $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$. If AB = I, then the value of λ is :

माना A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ तथा B = $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$. I यदि AB = I है, तो λ का मान है:

(A) $\frac{-9}{4}$ (B) –2 (C) $\frac{-3}{2}$ (D) 0

Sol. **(B)**

AB = I

$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4+2\lambda \\ 0 & 1 & -6-3\lambda \\ 0 & 0 & 9+4\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On Comparing

$\frac{1}{3}(4+2\lambda) = 0$

$\lambda = -2$

6. Derivative of x^2 with respect to x^3, is:
x^2 का x^3 के सापेक्ष अवकलज है:

(A) $\frac{2}{3x}$ (B) $\frac{3x}{2}$ (C) $\frac{2x}{3}$ (D) $6x^5$

Sol. Let $y = x^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x$

Let $t = x^3$

$\frac{dt}{dx} = 3x^2$

$\frac{dy/dx}{dt/dx} = \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x}$ Option A

7. The function $f(x) = |x| + |x-2|$ is
(A) continuous, but not differentiable at $x = 0$ and $x = 2$.
(B) differentiable but not-continuous at $x = 0$ and $x = 2$.
(C) continuous but not differentiable at, $x = 0$ only.
(D) neither continuous nor differentiable at $x = 0$ and $x = 2$.
फलन $f(x) = |x| + |x-2|$
(A) संतत है, परन्तु $x = 0$ तथा $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है।

(B) अवकलनीय है, परन्तु $x = 0$ तथा $x = 2$ पर संतत नहीं है।

(C) संतत है, परन्तु केवल $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

(D) न तो संतत है और न ही $x = 0$ तथा $x = 2$ पर अवकलनीय है।

Sol. $f(x) = |x| + |x - 2|$

$$f(x) = \begin{cases} -x-x+2 & ; x<0 \\ x-x+2 & ; 0 \le x < 2 \\ x+x-2 & ; x \ge 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2 & ; x<0 \\ 2 & ; 0 \le x < 2 \\ 2x-2 & ; x \ge 2 \end{cases}$$

(i) at $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{LHL} = \lim_{x\to 0}(-2x+2) = 2 \\ &\text{RHL} = \lim_{x\to 0} 2 = 2 \\ &\& \ f(0) = 2 \end{aligned}\right\}$$

LHL = RHL = f(0)
So f(x) is continuous at $x = 0$
at $x = 2$

$$\left.\begin{aligned} &\text{LHL} = \lim_{x\to 2} 2 = 2 \\ &\text{RHL} = \lim_{x\to 2} 2x-2 = 2 \\ &\& \ f(2) = 2 \end{aligned}\right\}$$

LHL = RHL = f(2)
So f(x) is continuous at x = 2

Now

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & ; x < 0 \\ 0 & ; 0 < x < 2 \\ 2 & ; x > 2 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} LHD = 0 \\ RHD = 2 \end{array}\right\}$ LHD $\neq$ RHD so f(x) is not differentiable of x = 2

So, f(x) is continuous, but not differentiable at x = 0 and x = 2
Option (A).

8. The value of $\int_0^{\pi} \tan^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta$ is:

$\int_0^{\pi} \tan^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta$ का मान है:

(A) $x + \sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{3} - \pi$ (C) $\sqrt{3} - \pi$ (D) $\pi - \sqrt{3}$

Sol. $\int_0^{x}\left(\sec^2\frac{\theta}{3} - 1\right) d\theta$

$$\left[3\tan\frac{\theta}{3} - \theta\right]_0^{\pi}$$

$$\left[3\tan\frac{\pi}{3} - \pi - [3\tan 0 - 0]\right]$$

$3\sqrt{3} - \pi$

Option (B)

9. The integrating factor of the differential equation $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0, x \neq 0$ is:

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0, x \neq 0$ का समाकलन गुणक है:

(A) $\frac{2}{x}$ (B) x^2 (C) $e^{\frac{2}{x}}$ (D) $e^{\log(2x)}$

Sol. (B)

I. F $e^{\int \frac{2}{x} dx}$ $= e^{2\ln x}$

$= x^2$

$\therefore$ I. F = x^2
option (B)

10. The lines $\frac{1-x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{1}$ and $\frac{2x-3}{2p}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{7}$ are perpendicular to each other for p equal to :

रेखाएँ $\frac{1-x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{1}$ तथा $\frac{2x-3}{2p}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{7}$, p के जिस मान के लिए परस्पर लंबवत हैं, वह है:

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 3

Sol. D. R of the lines are of

L_1: – 2, 3, 1 and L_2: p, –1, 7 respectively if two lines are $\perp$ then

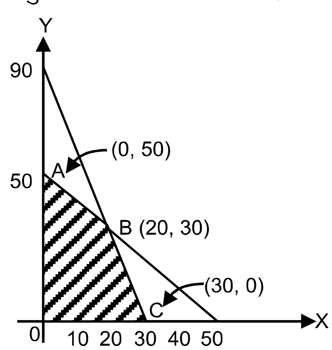
$-2 \times P + 3 \times -1 + 1 \times 7 = 0$

$-2p - 3 + 7 = 0$

P = 2 option (C)

11. The maximum value of Z = 4x + y for L. P. P. whose feasible region is given below is

रैखिक प्रोग्रामन समस्या (LPP) जिसका सुसंगत क्षेत्र दर्शाया गया है, के उद्देश्य फलन Z = 4x + y का अधिकतम मान है:



(A) 50 (B) 110 (C) 120 (D) 170

Sol. Maximum value of Z = 4x + y = ?

Corner Points	Value of Z = 4x + y
A (0, 50)	50
B (20, 30)	110
C (30, 0)	120
D (0, 0)	0

$\therefore$ Z is maximum at (30, 0)

Option (C)

12. The probability distribution of a random variable X is :

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	k	2k	k	0.1

Where k is some unknown constant.

The probability that the random variable X takes the value 2 is :

यदि एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन, निम्न है :

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	k	2k	k	0.1

जहाँ k एक अज्ञात अचर है।

तो यादृच्छिक चर X का मान 2 होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) 1

Sol. Since $\sum P(x) = 1$

$\Rightarrow$ 0.1 + K + 2K + K + 0.1 = 1

$\Rightarrow$ 4k = 1 – 0.2 = 0.8 $\Rightarrow$ $K = \frac{0.8}{4}$ $\Rightarrow$ K = 0.2

So P (x = 2) = 2K = 2 × 0.2 = 0.4 $= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Option (B)

13. The function f(x) = kx – sinx is strictly increasing for

फलन f(x) = kx – sinx, निरंतर वर्धमान है, यदि

(A) k > 1 (B) k < 1 (C) k > –1 (D) k < –1

Sol. **(A)**

f(x) = kx – sinx

$\because$ f(x) is strictly increasing

so, f'(x) > 0 $\forall x \in R$ ....(i)

f'(x) = k – cosx

$\Rightarrow$ f'(0) > 0

$\Rightarrow$ k – cos0 > 0

$\Rightarrow$ k – 1 > 0

k > 1

14. The Cartesian equation of a line passing through the point with position vector $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$ and parallel to the line $\vec{r} = \hat{i} + \hat{k} + \mu(2\hat{i} - \hat{j})$, is

एक रेखा का कार्तीय समीकरण, जो एक बिंदु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$ है, से होकर जाती है तथा रेखा $\vec{r} = \hat{i} + \hat{k} + \mu(2\hat{i} - \hat{j})$ के समांतर है, है:

(A) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$

(B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{0}$

(C) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{0}$

(D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{0}$

Sol. **(B)**

Since line passing through the point A (1,–1, 0) and parallel to $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j}$

So, dr's of line : < 2, –1, 0 >

So, Equation of line:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \Rightarrow \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-(-1)}{-1} = \frac{z-0}{0} \Rightarrow \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{0}$$

15. If $\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ is a scalar matrix, then the value of a + 2b + 3c + 4d is :

यदि $\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ एक अदिश आव्यूह (scalar matrix) है, तो a + 2b + 3c + 4d का मान है:

(A) 0 (B) 5 (C) 10 (D) 25

Sol. **(D)**

Scalar matrix is of the form

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$\therefore$ a = d = 5

& b = c = 0, by comparison.

$\therefore$ a + 2b + 3c + 4d

5 + 2 × 0 + 3 × 0 + 4 × 5

$\Rightarrow$ 25 Ans.

Option (D)

16. Given that $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, matrix A is :

दिया है कि $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो आव्यूह A है:

(A) $7\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{49}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Sol. **(B)** $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ adj. A

adj. A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, By short trick A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, adj. A = $\begin{bmatrix} d & -b \\ c & a \end{bmatrix}$

Option (B)

17. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, then the value of $I - A + A^2 - A^3 + \ldots$..is :

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ है तो $I - A + A^2 - A^3 + \ldots..$ है

(A) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sol. **(A)**

$\mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^3 = A^4 = A^5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hence, $I - A + A^2 - A^3 + \ldots\ldots\ldots = I - A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

18. The integrating factor of the differential equation $(x+2y^2)\ \frac{dy}{dx} = y\ (y > 0)$ is :

अवकल समीकरण $\left(x+2y^2\right)\frac{dy}{dx} = y\ \left(y > 0\right)$ का समाकलन गुणक है:

(A) $\frac{1}{x}$ (B) x (C) y (D) $\frac{1}{y}$

Sol. **(D)**

$$\left(x+2y^2\right)\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+2y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+2y^2}{y} = \frac{x}{y} + 2y$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

$$\text{I.F.} = e^{\int -\frac{1}{y}.dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$$

ASSERTION-REASON BASED QUESTIONS

Questions No. 19 & 20, are Assertion (A) and Reason (R) based questions carrying 1 mark each. Two statements are given, one labelled Assertion (A) and the other labelled Reason (R).

Select the correct answer from the codes (A), (B), (C) and (D) as given below:

(A) Both Assertion (A) and Reason (R) are true and the Reason (R) is the correct explanation of Assertion (A).

(B) Both Assertion (A) and Reason (R) are true and Reason (R) is not the correct explanation of the Assertion (A).

(C) Assertion (A) is true, but Reason (R) is false.

(D) Assertion (A) is false, but Reason (R) is true.

अभिकथन – तर्क आधारित प्रश्न

प्रश्न संख्या 19 एवं 20 में एक अभिकथन (A) के बाद एक तर्क (R) दिया है। निम्न में से सही उत्तर चुनिए :

(A) अभिकथन (A) तथा तर्क (R) दोनों सत्य हैं। तर्क (R) अभिकथन (A) की पूरी व्याख्या करता है।

(B) अभिकथन (A) तथा तर्क (R) दोनों सत्य हैं। तर्क (R) अभिकथन (A) की पूरी व्याख्या नहीं करता है।

(C) अभिकथन (A) सत्य है, परन्तु तर्क (R) असत्य है।

(D) अभिकथन (A) असत्य है, जबकि तर्क (R) सत्य हैं।

19. **Assertion (A):** The relation R = ((x, y): (x + y) is a prime number and x, y $\in$ N is not a reflexive relation.

Reason (R): The number '2n' is composite for all natural numbers n.

अभिकथन (A) : संबंध R = {(x, y) : (x + y) एक अभाज्य संख्या है तथा x, y $\in$ N} एक स्वतुल्य संबंध नहीं है।

तर्क (R) : सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए, 2n एक भाज्य संख्या है।

Sol. **(C)**

Assertion (A)

For a relation to be reflexive, $(x, x) \in R$

$\therefore$ x + x is a prime no.

$\therefore$ 2x is a prime no. $\forall x \in N$

But except for x = 1, we will get 2 which is prime for $x \in N$, where $x \neq 1$

we will get a composite no. i.e. 4, 6, 8, ...

It is not reflexive

Reason (R)

False, since for n = 1

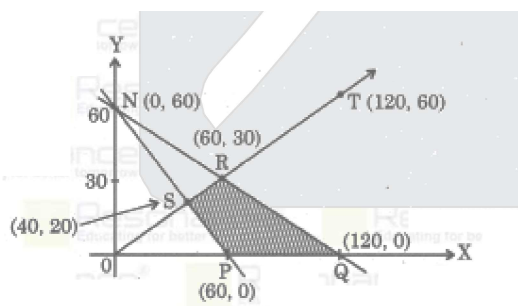
we will get 2, which is prime.

20. **Assertion (A) :** The corner points 'of the bounded feasible region of a L.P.P. are shown below. The maximum value of Z = x + 2y occurs at infinite points.

Reason (R) : The optimal solution of a LPP having bounded feasible region must occur at corner points.

अभिकथन (A) : किसी LPP के लिए परिबद्ध सुसंगत क्षेत्र के कोणीय बिंदु दर्शाए गए है।

Z = x + 2y का अधिकतम मान अनन्त बिन्दुओं पर है।



तर्क (R) : एक LPP जिसका सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध हो, का इष्टतम हल कोणीय बिंदु पर होता है।

Sol. **(A)**

Assertion (A) : False because the maximum value of z = x + 2y occurs at corner points ($\because$ bounded region)

Reason (R) : The optimal solution of a LPP having bounded feasible region must occur at corner points, which is true.

SECTION - B

In this section there are 5 very short answer type questions of 2 marks each.

इस खण्ड में **5** अति लघु उत्तर वाले प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के **2** अंक है।

21. (a) If $y = \cos^3(\sec^2 2t)$, find $\frac{dy}{dt}$.

OR

(b) If $x^y = e^{x-y}$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ -

(a) यदि $y = \cos^3(\sec^2 2t)$ है, तो $\frac{dy}{dt}$ ज्ञात कीजिए।

अथवा

(b) यदि $x^y = e^{x-y}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$.

Sol. (a) $y = \cos^3(\sec^2 2t)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = 3\cos^2(\sec^2 2t) \times (-\sin(\sec^2 2t)) \cdot 2\sec(2t) \cdot \sec(2t)\tan(2t) \cdot 2$

(b) $x^y = e^{x-y}$

taking log both side

$y \log x = (x - y) \log_e e \quad \{\log_e e = 1\}$

$y \log x = x - y$

$\therefore \quad y \times \frac{1}{x} + \log x \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}(\log x + 1) = 1 - \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{(1+\log x)}$

$\therefore \quad 1 + \log x = \frac{x}{y}$ (put)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

22. The volume of a cube is increasing at the rate of 6 cm^3/s. How fast is the surface area of cube increasing, when the length of an edge is 8 cm?

एक घन का आयतन 6 cm^3/s की दर से बढ़ रहा है। घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है, जब इसके किनारे की लंबाई 8 cm है?

Sol. Let side of cube = x cm

Given $\frac{dv}{dt} = 6\ cm^3/sec$

$\therefore \quad S = 6 \times x^2$

$\frac{ds}{dt} = 6 \times 2x\frac{dx}{dt} \qquad \text{..... (1)}$

$v = x^3$

$\frac{dv}{dt} = 3x^2\ \frac{dx}{dt}$

$6 = 3x^2\ \frac{dx}{dt}$

$2 = x^2\ \frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{x^2}$

Put in equation (1)

$\frac{dS}{dt} = 6 \times 2x \times \frac{2}{x^2}$

$= \frac{24}{x}\ cm^2/sec$

At x = 8

$\therefore \quad \frac{dS}{dt} = \frac{24}{8} = 3\ cm^2/sec$ Ans.

23. Show that the function f given by f(x) = sin x + cos x, is strictly decreasing in the interval $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

दर्शाइए कि f(x) = sinx + cosx द्वारा प्रदत्त फलन f, अंतराल $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

Sol. $f(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

$\therefore \quad x\ \varepsilon \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

Critical point $f'(x) = 0$

$\cos x - \sin x = 0$

$\tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$

For decreasing:

$f'(x) < 0$

$\cos x - \sin x < 0$

$\cos x < \sin x \qquad \because \quad x\ \varepsilon \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

$\therefore$ Function is strictly decreasing.

24. (a) Express $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$, where $\frac{-\pi}{2} < x\frac{\pi}{2}$ in the simplest form.

(a) $\frac{-\pi}{2} < x\frac{\pi}{2}$ के लिए $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

OR

(b) Find the principal value of $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(b) $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

Sol. (a) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$$

(b) $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$= \frac{\pi}{4}+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4} = \pi-\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

25. Find : $\int\frac{2x}{(x^2+1)(x^2-4)}dx$

ज्ञात कीजिए : $\int\frac{2x}{(x^2+1)(x^2-4)}dx$

Sol. $I = \int\frac{2x}{(x^2+1)(x^2-4)}dx$

Let $x^2 = t$

$\therefore$ $I = \int\frac{dt}{(t+1)(t-4)}$

$\therefore$ $\frac{1}{(t+1)(t-4)} = \frac{A}{(t+1)} + \frac{B}{(t-4)}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{(t+1)(t-4)} = \frac{A(t-4)+B(t+1)}{(t+1)(t-4)}$

Put $t = -1$ $\therefore$ $A = -\frac{1}{5}$

Put $t = 4$ $\therefore$ $B = \frac{1}{5}$

$\therefore$ $I = \int\frac{-1/5}{(t+1)}dt + \int\frac{1/5}{t-4}dt$

$I = -\frac{1}{5}\ln|t+1| + \frac{1}{5}\ln|t-4| + C = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{t-4}{t+1}\right) + C = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x^2-4}{x^2+1}\right) + C$ Ans.

In this section there are 6 short answer type questions of 3 marks each.

इस खण्ड में **6** लघु–उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के **3** अंक हैं।

26. Find : $\frac{dy}{dx}$, if $y = (\cos x)^x + \cos^{-1}\sqrt{x}$ is given.

दिया है कि $y = (\cos x)^x + \cos^{-1}\sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Sol. $y = (\cos x)^x + \cos^{-1}\sqrt{x}$

let $u = (\cos)^x$

$\log u = x\,\ell n(\cos x)$

$\frac{1}{u}\cdot\frac{dy}{dx} = \ell n(\cos x) + \frac{x}{\cos x}(-\sin x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (\cos x)^x\,(\ell n(\cos x) - x\tan x)$

& $v = \cos^{-1}\sqrt{x}$

$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = u + v$

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^x\,(\ell n(\cos x) - x\tan x) - \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

27. (a) Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = y\cot 2x$, given that $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

(a) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = y\cot 2x$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है कि $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

OR

(b) Find the particular solution of the differential equation $\left(xe^{\frac{y}{x}} + y\right)dx = xdy$ given that y = 1 when x=1.

(b) अवकल समीकरण $\left(xe^{\frac{y}{x}} + y\right)dx = xdy$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है कि y = 1 है जब x = 1 है।

Sol. **(a)**

$\frac{dy}{dx} = y\cot(2x)$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \cot(2x)\,dx \qquad \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\cot(2x)dx \qquad \Rightarrow \ln|y| = \frac{\ln|\sin 2x|}{2} + C$

using $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

$\Rightarrow \ln 2 = \dfrac{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2} + C \qquad \Rightarrow \ln 2 = 0 + C \qquad \Rightarrow C = \ln 2$

So,

$\ln|y| = \dfrac{\ln|\sin(2x)|}{2} + \ln 2$

$2 \ln |y| = \ln |\sin (2x)| + \ln(4)$

$\ln (y^2) = \ln |4 \sin(2x)|$

$\Rightarrow y^2 = 4 \sin(2x)$

$y = \pm 2 \sqrt{\sin(2x)}$

$\because y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

So, taking + ve sign

$\Rightarrow y = 2 \sqrt{\sin(2x)}$

OR

(b) $\left(xe^{\frac{y}{x}} + y\right)dx = xdx$

$\Rightarrow x\left(e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right) dx = xdy \qquad \Rightarrow \qquad e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$

$\frac{y}{x} = v \qquad \Rightarrow \qquad y = Vx$

$\frac{dx}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$e^V + v = v + x\frac{dv}{dx}$

$\Rightarrow e^V = x\frac{dv}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} = e^{-V} dV$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int e^{-V} dv \qquad \Rightarrow \qquad \ln |x| = -e^{-v} + C$

$\because$ y = vx $\Rightarrow$ $\ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + C$

$\because$ y (1) = 1

$\Rightarrow 0 = -e^{-1} + C$ $\Rightarrow$ $C = \frac{1}{e}$

$$\ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + \frac{1}{e}$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} = -\ln|x| + \frac{1}{e}$$

$$e^{-\frac{y}{x}} = \frac{1-e\ln|x|}{e}$$

take log both sides

$$-\frac{y}{x} = \ln|1-e\ln|x|| - \ln e$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{y}{x} = \ln(1 - e\ln|x|)$$

$$\Rightarrow 1 - \ln(1 - e\ln|x|) = \frac{y}{x}$$

$\Rightarrow y = x(1 - \ln(1 - e\ln|x|))$ $\rightarrow$ Ans.

28. Find : ज्ञात कीजिए : $\int \sec^3\theta d\theta$

Sol. $I = \int \sec^3\theta d\theta$

$$I = \int (1+\tan^2\theta)\sec\theta d\theta$$

$$I = \int (\sec\theta + \tan^2\theta\cdot\sec\theta)d\theta$$

$$I = \ell n|\sec\theta + \tan\theta| + \int \tan\theta.(\sec\theta.\tan\theta)d\theta$$

$$I = \ell n|\sec\theta + \tan\theta| + \tan\theta\ .\ \sec\theta - \int \sec^3\theta d\theta$$

$$2I = \ell n|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta\ .\ \tan\theta + c$$

$$I = \frac{1}{2}\ \ell n|\sec\theta + \tan\theta| + \frac{1}{2}\sec\theta\ .\ \tan\theta + c$$

29. (a) A card from a well, shuffled deck of 52 playing cards is lost. From the remaining cards of the pack, a card is drawn at random and is found to be a King. Find the probability of the lost card being a King.

OR

(b) A biased die is twice as likely to show an even number as an odd number. If such a die is thrown twice, find the probability distribution of the' number of sixes. Also, find the mean of the distribution.

(a) 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों में से यादृच्छया एक पत्ता निकाला जाता है, जो बादशाह वाला पत्ता पाया जाता है। खो गए पत्ते के बादशाह वाला पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

अथवा

(b) एक अभिनत पासे पर समसंख्या आने की प्रायिकता, विषम संख्या के आने की प्रायिकता से दुगुनी है। इस पासे को दो बार उछाला गया। छः आने की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। इस बंटन का माध्य भी ज्ञात कीजिए।

Sol. **(a)**

$$p\left(\frac{\text{lostcard king}}{\text{king}}\right)=\frac{p(\text{lostcard king | found king |})}{p(\text{king})}$$

$$=\frac{\left(\frac{4}{52}\right)\times\left(\frac{3}{51}\right)}{\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right)+\left(\frac{48}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right)}=\frac{12}{12+192}=\frac{12}{204}=\frac{3}{51}$$

(b)

$P(E)=\frac{2}{3}$, $P(O)=\frac{1}{3}$

$P(x = 0) = P(0_1).\ P(0_2)+ P(0_1).\ P(e_1).\text{not } 6 + P(e_1).\ P(e_2)\ 6 + P(e_1)(\text{not}6)\ .\ P(e_2)\ 6$

$$P(x=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^2.+\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}+\frac{11}{87}=\frac{49}{81}$$

$P(x = 1) = P(e_1).6.\ P(0_1)+ P(0_1).\ P(e_1).6 + P(e_1).\ (\text{not } 6) + P(e_2)\ 6 \times 2$

$$P(x=1)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{16}{81}=\frac{28}{81}$$

$P(x = 2) = P(e_1)\ 6.\ P(e_2)\ 6.$

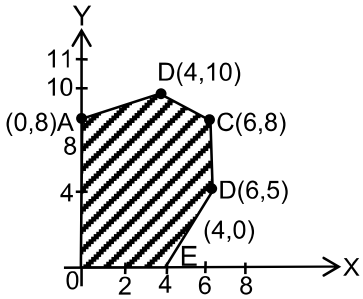
$$P(x=2)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$$

x =	0	1	2
Prob.	$\frac{49}{81}$	$\frac{28}{81}$	$\frac{4}{81}$

$$\text{Mean}=0\times\frac{49}{81}+\frac{28}{81}+2.\frac{8}{81}$$

$$\text{Mean}=\frac{28+8}{81}=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$$

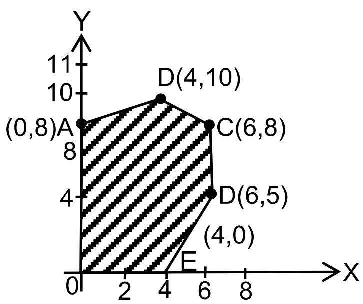
30. The corner points of the feasible region determined by the system of linear constraints are as shown in the following figure :



(i) If Z = 3x – 4y be, the: objective function, then find the maximum value of Z.

(ii) If Z = px + qy where p, q > 0 be the objective function. Find the" condition on p and q so that maximum value of Z occurs at B (4, 10) and C(6, 8).

रेखीय अवरोधों के निकाय द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र के कोणीय बिन्दु आकृति में दर्शाए गए हैं:



(i) यदि Z = 3x – 4y उद्देश्य फलन है, तो Z का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि Z = px + qy, p, q > 0 उद्देश्य फलन है, तो p तथा q में वह सम्बन्ध ज्ञात कीजिए, जिसके लिए Z का अधिकतम मान B(4, 10) तथा C(6, 8) पर हो।

Sol. (i) z = 3x–4y

Corner points	Z = 3x–4y
(0,8)	z = –32
(4, 10)	z = 12–40 = –28
(6,8)	z = 18–32=–14
(6,15)	z = 18–20 = –2
(4,0)	z = 12 $\rightarrow$ maximum

Maximum value of z = 12 at E(4,0)

(ii) Z = px + qy

at B (4,10) : z = 4p + 10q

at C(6,8) Z = 6p + 8q   Both are maximum means both are equal

4p + 10q = 6p + 8q

2q = 2p

p = q

31. (a) Evaluate : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{1+\cos 2x+\sin 2x}$

OR

(b) Find : $\int e^x\left[\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]dx$

(a) मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{1+\cos 2x+\sin 2x}$.

अथवा

(b) ज्ञात कीजिए : $\int e^x\left[\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]dx$

Sol. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{1+\cos 2x+\sin 2x}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx}{1+\sin 2x+\cos 2x} \text{ Replace } x \to \frac{\pi}{4}-x$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}dx}{1+\sin 2x+\cos 2x}dx$$

$$I = \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin 2x+\cos 2x} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{1+\sin 2x+\cos 2x}$$

$$I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{1+\frac{2\tan x}{1+\tan^2}+\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sec^2 x\,dx}{1+\tan^2 x+2\tan x+1-\tan^2 x} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sec^2 x\,dx}{2(1+\tan x)}$$

Let 1 +tanx = t

$\sec^2 x dx = dt$

$$I = \frac{\pi}{8} \int_{1}^{1+\tan\frac{\pi}{8}} \frac{dt}{t}$$

$$I = \frac{\pi}{8} (\ell an \mid t \mid)_{1}^{1+\tan\frac{\pi}{8}}$$

$$I = \frac{\pi}{8} |\ell n| 1 + \tan\frac{\pi}{8} |$$

$$I = \frac{\pi}{8} \left| \ell n \mid 1 + \tan\frac{\pi}{8} \right|$$

$$I = \frac{\pi}{8} \ell n \left| 1 + \tan\frac{\pi}{8} \right|$$

$$I = \frac{\pi}{8} \ell n \left| 1 + \tan\frac{\pi}{8} \right| \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{8} \ell n \left| \sqrt{2} \right| \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{8} \ell n \left| \sqrt{2} \right|$$

(b) $$\int e^x . \left(\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot (1) - x \times \frac{1 \times 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$\because \int e^x \cdot (f(x) + f'(x)) dx = e^x \cdot f(x) + c$$

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \left(\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

$$= e^x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

खण्ड–घ (SECTION – D)

In the section there are 4 long answer type questions of 5 marks each.

इस खण्ड में चार दीर्घ–उत्तर वाले प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न के **5** अंक हैं।

32. (a) Let A = R – {5} and B = R – {1} Consider the function $f : A \rightarrow B$,

defined by $f(x) = \dfrac{x-3}{x-5}$, Show that f is one-one and onto.

OR

(b) Check whether the relation S in the set of real numbers R defined by

S = {(a, b) : where $a - b + \sqrt{2}$ is an irrational number} is reflexive, symmetric or transitive.

(a) माना A = R {5} तथा B = R – {1} है । $f(x) = \dfrac{x-3}{x-5}$ द्वारा परिभाषित फलन $A \rightarrow B$ पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि f एकैकी व आच्छादक है ।

अथवा

(b) जाँच कीजिए कि क्या सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में परिभाषित संबंध

S = {(a, b) : जहाँ $a - b + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है } स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है ।

Sol. **(a)**

A = R – {5}

B = R – {1}

$f : A \rightarrow B$

$f(x) = \dfrac{x-3}{x-5}$

For one – one : $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore \dfrac{x_1-3}{x_1-5} = \dfrac{x_2-3}{x_2-5}$

$-5x_1 - 3x_2 + 15 = -3x_1 - 5x_2$

$\Rightarrow -5x_1 + 3x_1 = -5x_2 + 3x_2$

$-2x_1 = -2x_2$

$x_1 = x_1 \quad \forall x_1, x_2 \in A$

$\therefore$ f is one – one

For onto :

get y = $\frac{x-3}{x-5}$

yx – 5y = x – 3

y x – x = – 3 + 5y

x (y – 1) = 5y – 3

x = $\frac{5y-3}{y-1}$

$\because$ y $\in$ B (codomain)

for every value of y has pre-image in domain

$\therefore$ Range = codomain

$\therefore$ f is onto.

(b) Reflexivity : Let a ∈ R (set of real numbers)

Now, (a,a) ∈ R as a - a + $\sqrt{2}$ = $\sqrt{2}$ ∈ R

i.e., R is reflexive ...(i)

Symmetric : Let a,b ∈ R (set of real numbers)

Let a, b $\in \mathrm{R}$

$\Rightarrow$ **a – b +** $\sqrt{2} \in$ R

$\Rightarrow$ **b – a +** $\sqrt{2} \notin$ R

Transitivity: Let a, b, c, ∈ R

Now (a, b) ∈ R and (b, c) ∈ R

$\Rightarrow$ **a – b +** $\sqrt{2}$ ∈ R and b – c + $\sqrt{2}$ ∈ R

$\Rightarrow$ **a – b +** $\sqrt{2}$ + b – c + $\sqrt{2}$ ∈ R

$\Rightarrow$ **(a – c)** $\in$ R

i.e., S is transitive.

33.

(a) Find the distance between the line $\frac{x}{2} = \frac{2y-6}{4} = \frac{1-z}{-1}$ and another line parallel to it passing through the point (4, 0, –5)

(b) If the lines $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-7}$ are perpendicular to each other, find the value of k and hence write the vector equation of a line perpendicular to these two lines and passing through the point (3,– 4, 7).

(a) रेखा $\frac{x}{2} = \frac{2y-6}{4} = \frac{1-z}{-1}$ तथा इसके समांतर एक अन्य रेखा जो बिंदु (4, 0, –5) से होकर जाती है, के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

(b) यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ तथा $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-7}$ परस्पर लंबवत हैं, तो k का मान ज्ञात कीजिए । अतः उपरोक्त दोनों रेखाओं के लंबवत एक रेखा का सदिश समीकरण लिखिए, जो बिंदु (3, – 4, 7) से होकर जाती है।

Sol. **(a)**

line $\frac{x}{2} = \frac{2y-6}{4} = \frac{1-z}{-1}$

$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}$ ....(i)

its parallel and passing through line (4, 0, –5).

$\Rightarrow \frac{x-4}{2} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+5}{1}$ ....(ii)

$\therefore$ distance between two parallel line.

$$d = \frac{\left|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_2)\right|}{\left|\vec{b}\right|}$$

$\therefore \ \vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{a}_1 = 0\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{a}_2 = 4\hat{i} + 0\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (8 + 3)\ \hat{i} - (8 - 4)\ \hat{j} + (-6 - 8)\ \hat{k} = 11\hat{i} - 4\hat{j} - 14\hat{k}$

Remaining distance = $\sqrt{37}$ unit

OR

(b) line $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$

$\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1k}=\frac{z-6}{-7}$

$\therefore$ lines are perpendicular

$\Rightarrow -3 \times 3k + 2k \times 1 + 2 \times -7 = 0$

$\Rightarrow -9k + 2k - 14 = 0$

$\Rightarrow -7k = 14$

$k = -2$

$\therefore$ Equation of line which is perpendicular to both line

Let $\frac{x-3}{a}=\frac{y+4}{b}=\frac{z-7}{c}$ .....(i)

$\therefore$ According to question

$-3a - 4b + 2c = 0$

$-6a + b - 7c = 0$

$\frac{a}{28-2}=\frac{b}{-12-21}=\frac{c}{-3-24}$

$\frac{a}{26}=\frac{b}{-33}=\frac{c}{-27}=\lambda$

$\therefore$ Equation $\frac{x-3}{26}=\frac{y+4}{-33}=\frac{z-7}{-27}$ Ans.

34. Find A^{-1}, if $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hence, solve the following system of equations:

$x + 2y + z = 5$

$2x + 3y = 1$

$x - y + z = 8$

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए:

अतः निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए:

$x + 2y + z = 5$

$2x + 3y = 1$

$x - y + z = 8$

Sol. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 1 \times 3 - 2\,(2+1) + 1\,(0-3) = 3-6-3 = -6 \neq 0$ $\quad\therefore\quad$ $A^{-1} = \dfrac{\text{adj.}A}{|A|}$

$\text{Adj.}A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T$

$C_{11} = 3, C_{12} = -3, C_{13} = -3$; $C_{21} = -2, C_{22} = 0, C_{23} = 1$; $C_{31} = -5, C_{32} = 3, C_{33} = -4$

$\therefore \text{Adj. } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ $\qquad \therefore A^{-1} = \dfrac{1}{-6}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Equations :

$x + 2y + z = 5$

$2x + 3y = 1$

$x - y + z = 8$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

$Bx = C$

$X = B^{-1}C$

35. (a) Sketch, the graph of $y = x|x|$ and hence find the area bounded by this curve, X-axis and the ordinates $x = -2$ and $x = 2$, using integration.

OR

(b) Using integration, find the area bounded by the ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, the lines $x = -2$, $x = 2$, and the X-axis.

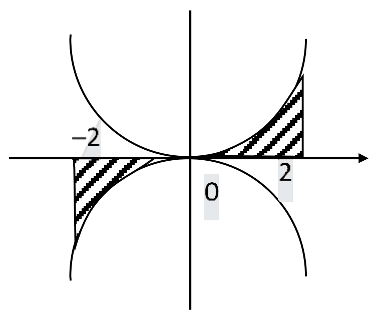
(a) वक्र $y = x|x|$ का आलेख खींचिए । अतः इस वक्र, X-अक्ष तथा कोटियों $x = -2$ तथा $x = 2$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समाकलन से ज्ञात कीजिए ।

अथवा

(b) समाकलन के प्रयोग से दीर्घवृत्त $9x^2 + 25y^2 = 225$, रेखाओं $x = -2$ तथा $x = 2$ और X-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Sol. (a) Curve : $y = x|x|$

$$y = x|x| \begin{cases} x^2 \ ; & x \geq 0 \\ -x^2 \ ; & x < 0 \end{cases}$$



$$\text{Area} = \int_{-2}^{0} x|x|\,dx + \int_{0}^{2} x|x|\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}$$

$$= -\left[0 - \frac{8}{3}\right] + \left[\frac{8}{3} - 0\right]$$

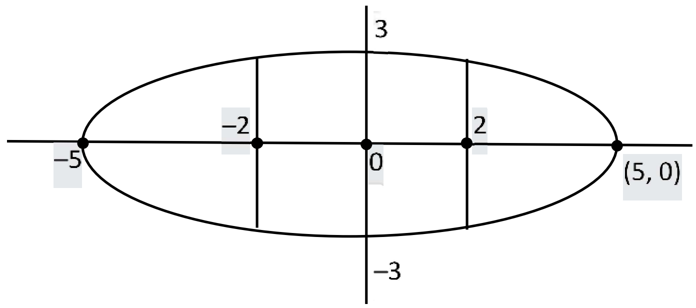
$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ square unit.}$$

OR

(b) Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Required Area:

$$\text{Area} = \int_{-2}^{2} y\, dx = \int_{-2}^{2} \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}\, dx \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{25} \\ &y^2 = 9\left(\frac{25 - x^2}{25}\right) \\ &\therefore y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2} \end{aligned} \right.$$

$$= 2\int_{0}^{2} \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}\, dx$$

$$= 2 \times \frac{3}{5}\left[\frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_0^2$$

$$= \frac{6}{5}\left[1\sqrt{25 - 4} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{2}{5} - 0\right]$$

$$= \frac{6}{5}\left[\sqrt{21} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{6}{5}\sqrt{21} + 15\sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \text{ square unit}$$

खण्ड–ड (SECTION – E)

In this section, there are 3 case study based question of 4 marks each.

36. Rohit, Jaspreet and Alia appeared for an interview for three vacancies in the same post. The probability of Rohit's selection is $\frac{1}{5}$, Jaspreet's selection is $\frac{1}{3}$ and Alia's selection is $\frac{1}{4}$. The event of selection is independent of each other.

Based on the above information, answer the following questions :

(i) What is the probability that at least one of them is selected?

(ii) Find P $(G|\overline{H})$ where G is the event of Jaspreet's selection-and $\overline{H}$ denotes the event that Rohit is not selected.

(iii) Find the probability that exactly one of them is selected.

OR

(iii) Find the probability that exactly two of them are selected.

रोहित, जसप्रीत और आलिया एक ही पद की तीन रिक्तियों के लिए साक्षात्कार के लिए उपस्थित हुए । रोहित के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है, जसप्रीत के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ तथा आलिया के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। चयन की घटना एक दूसरे से स्वतंत्र है ।

उपरोक्त जानकारी के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दें:

(i) इनमें से कम से कम एक के चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

(ii) $P(G|\overline{H})$ ज्ञात कीजिए जहाँ G, जसप्रीत के चुने जाने को दर्शाती है तथा $\overline{H}$ रोहित के न चुने जाने को दर्शाती है।

(iii) उनमें से केवल एक के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

अथवा

(iii) उनमें से कोई दो के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Sol. P (Rohit) = $\frac{1}{5}$

P (Jaspreet's) = $\frac{1}{3}$

P (Alia's) = $\frac{1}{4}$

(i) P (at least one selected) = 1 – no. one selected

$$= 1-\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= 1-\frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{5}$$

(ii)
$$P\left(\frac{G}{\overline{H}}\right)=\frac{P\left(G\cap\overline{H}\right)}{P\left(\overline{H}\right)}=\frac{P\left(G\cap\overline{H}\right)}{P\left(G\cap\overline{H}\right)+P\left(\overline{G}\cap\overline{H}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{8}{15}+\frac{4}{15}}$$

$$=\frac{4}{15}\times\frac{15}{12}$$

$$=\frac{1}{3}$$

(iii) P (exactly one of then selected)

$$=\left(\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{60}+\frac{12}{60}+\frac{8}{60}=\frac{26}{60}=\frac{13}{30}$$

OR

(iii) P (exactly two of then selected)

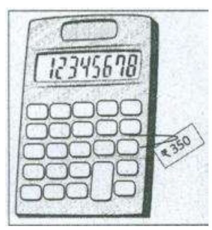
$$=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{60}+\frac{2}{60}+\frac{4}{60}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$$

37. A store has been selling calculators at Rs. 350 each. A market survey indicates that a reduction in price (p) of calculator increases the number of units (x) sold. The relation between the price and quantity-sold is given by the demand function $p = 450 - \frac{1}{2}x$

एक स्टोर, कैल्कुलेटर रू 350 प्रति कैल्कुलेटर के भाव से बेच रहा है। मार्केट के एक सर्वे के अनुसार मूल्य (p) के घटाने पर बिकने वाले कैल्कुलेटरों की संख्या (x) बढ़ जाती है। मूल्य और बिकने वाली संख्या का संबंध, अर्थात् माँग फलन $p = 450 - \frac{1}{2}x$ द्वारा प्रदत्त



Based on the above information, answer the following questions:

(i) Determine the number of units (x) that should be sold to maximise the revenue R(x) = xp(x). Also, verify the result.

(ii) What rebate in price of calculator should the store give to maximise the revenue?

उपरोक्त के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) अधिकतम आय R(x) = xp(x) प्राप्त करने के लिए कितनी इकाई (x) बेचने होगें? अपने उत्तर का सत्यापन कीजिए।

(ii) अधिकतम आय के लिए एक कैल्कुलेटर के मूल्य को स्टोर को कितना घटाना होगा??

Sol. $P(x) = 450 - \frac{1}{2}x$

$R(x) = x\,P(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$

$R'(x) = 450 - x = 0$

$$\begin{array}{ccc} + & 450 & - \\ & \text{max.} & \end{array}$$

R (x) is max^m at x = 450

$R(x) = 450\left(450 - \frac{1}{2}(450)\right)$

$= 450 \times \frac{1}{2}(450) = \frac{1}{2}(450)^2 = \frac{1}{2}(202500) = 101250$ Rs.

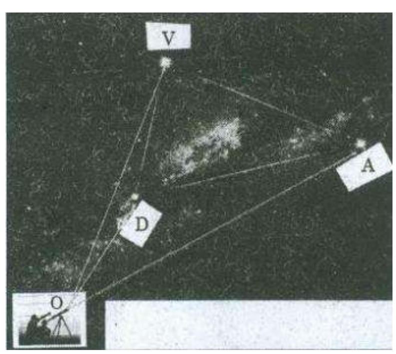
$SP = \frac{101250}{450} = 225$ Rs.

Verify Reduction Price $P = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$ Rs.

(ii) Rebate = 350 – 225 = 125 Rs.

38. An instructor at the astronomical centre shows three among the brightest stars in a particular constellation. Assume that the telescope is located at.O (0, 0, 0) and the three stars have their locations at the points D, A and V having position vectors $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}, 7\hat{i}+5\hat{j}+8\hat{k}$ and $-3\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}$ respectively.

एक खगोलीय केंद्र में एक प्रशिक्षक एक विशेष तारामंडल में सबसे चमकीले तीन सितारों को दर्शाता है। मान ले कि दूरबीन O (0, 0, 0) पर स्थित हैं तथा तीन सितारों की स्थितियाँ D, A और V पर इस प्रकार हैं कि उनके स्थिति–सदिश क्रमशः $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}, 7\hat{i}+5\hat{j}+8\hat{k}$ तथा $-3\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}$ है।



Based on the above information, answer the following questiion:

(i) How far is the star V from star A?

(ii) Find a unit vector in the direction of $\vec{DA}$.

(iii) Find the measure of $\angle$VDA.

OR

What is the projection of vector $\overrightarrow{DV}$ on vector $\overrightarrow{DA}$

उपरोक्त के आधार पर निम्न के उत्तर दीजिए:

(i) सितार V, सितारे A से कितनी दूरी पर है।

(ii) $\vec{DA}$ की दिशा में एक एकक–सदिश ज्ञात कीजिए।

(iii) $\angle$VDA का माप ज्ञात कीजिए।

अथवा

(iii) सदिश $\vec{DV}$ का सदिश $\vec{DA}$ पर प्रक्षेप कितना है?

Sol. D(2,3,4)
A(7,5,8)

V(–3, 7, 11)

O(0,0,0)

(i) distance between 'A' & 'V'

$$\sqrt{(7+3)^2+(5-7)^2+(8-11)^2}$$

$$= \sqrt{100+4+9} = \sqrt{113}$$

(ii) $\overrightarrow{DA} = (7-2)\hat{i} + (5-3)\hat{j} + (8-4)\hat{k} = 5\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$

$$\hat{DA} = \frac{5\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}}{|\overrightarrow{DA}|} = \frac{5\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}}{\sqrt{25+4+16}} = \frac{5\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}}{\sqrt{45}}$$

(iii) $\angle$VDA

$$\overrightarrow{VD} = (2+3)\hat{i} + (3-7)\hat{j} + (4-11)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{VD} = (2+3)\hat{i} + (3-7)\hat{j} + (4-11)\hat{k}$$
$$= 5\hat{i} - 4\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = -5\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

Let $\angle VDA = \theta$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{DV}.\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DV}||\overrightarrow{DA}|}$$

$$= = \frac{\left(-\overrightarrow{VD}\right).\left(-\overrightarrow{AD}\right)}{|\overrightarrow{VD}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{\left(5\hat{i}-4\hat{j}-7\hat{k}\right).\left(-5\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k}\right)}{\left(\sqrt{25+16+49}\right)\times\left(\sqrt{45}\right)}$$

$$= \frac{-25+8+28}{\sqrt{90}\times\sqrt{45}} = \frac{11}{45\times\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{45\sqrt{2}}\right)$$

OR

(iii) Projection of $\overrightarrow{DV}$ on $\overrightarrow{DA}$

$$= \frac{\overrightarrow{DV}.\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DA}|} = \frac{\left(-5\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}\right).\left(5\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)}{\left(\sqrt{25+4+16}\right)}$$

$$= \frac{-25+8+28}{\sqrt{45}} = \frac{11}{\sqrt{45}}$$