चतुर्भुज

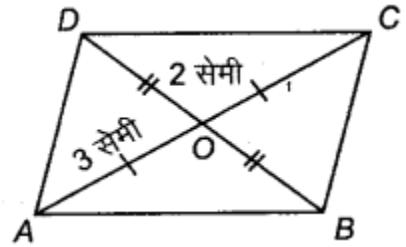
Exercise 9.1

प्रश्न 1. एक चतुर्भुज के कोण 3 : 5 : 9 : 13 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल: चतुर्भुज के कोणों का अनुपात = 3 : 5 : 9 : 13
कोणों के अनुपात का योग =3 + 5 + 9 + 13 = 30
चूंकि हम जानते हैं कि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।
प्रथम कोण का मान = $\frac{3}{30}$ × 360° = 36°
द्वितीय कोण का मान = $\frac{5}{30}$ × 360° = 60°
तृतीय कोण का मान = $\frac{9}{30}$ × 360° = 108°
चतुर्थ कोण का मान = $\frac{13}{30}$ × 360° = 156°
अत: चतुर्भुज के कोण है : 36°, 60°, 108°, 156°

प्रश्न 2. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं जो OA = 3 सेमी और OD = 2 सेमी है तो AC और BD की लम्बाई ज्ञात कीजिए

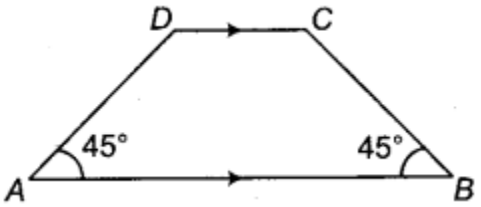
हल:



OA = 3 सेमी तथा
OD = 2 सेमी
चूंकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
AC = 2 × OA = 2 × 3 = 6 सेमी
तथा BD = 2 × OD = 2 × 2 = 4 सेमी।
अतः विकर्ण AC और BD की लम्बाई 6 सेमी तथा 4 सेमी है।

प्रश्न 3. एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बे होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल: एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं, यह कथन असत्य है क्योंकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित होते हैं।



प्रश्न 4. क्या कोण 110°, 80°, 70° और 95° किसी चतुर्भुज के कोण हो सकते हैं।

हल: दिए गए चतुर्भुज के कोणों का योग = 110° + 80° + 70° + 95° = 355°
चूँकि चतुर्भुज के सभी कोणों का योग 360° होता है।
अतः यह चतुर्भुज के कोण नहीं हैं।

प्रश्न 5. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण अधिककोण हो सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

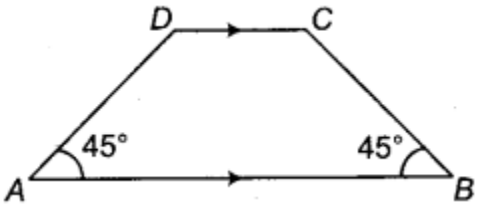
हल: अधिककोण का मान 90° से अधिक तथा 180° से कम होता है। माना चारों अधिककोणों में से प्रत्येक अधिककोण का मान 91° है।
कोणों का योग = 91° + 91° + 91° + 91° = 364°
जो कि 360° से अधिक है। अत: चतुर्भुज संभव नहीं है।
अतः चतुर्भुज के सभी कोण, अधिककोण नहीं हो सकते।

प्रश्न 6. एक चतुर्भुज का एक कोण 108° है तथा अन्य तीनों कोण बराबर हैं। तीनों बराबर कोणों में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए।

हल: माना प्रत्येक बराबर कोणों का मान x, x, x हैं।
चूँकि चतुर्भुज के सभी कोणों का योग 360° होता हैं।
108° + x + x + x = 360°
⇒ 3x + 108° = 360°
⇒ 3x = 360° – 108° = 252°
⇒ x = 84°
अतः चतुर्भुज के प्रत्येक बराबर कोण 84° है।

प्रश्न 7. ABCD एक समलम्ब है, जिसमें AB || DC और ∠A = ∠B = 45°है। इस समलम्ब के कोण C और D ज्ञात कीजिए।

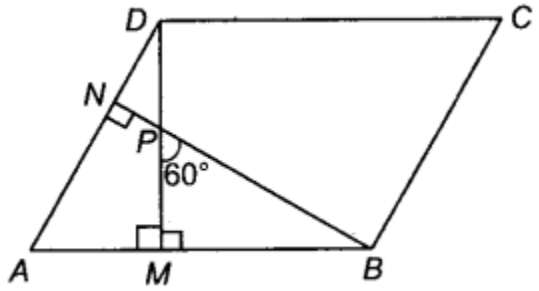
हल: समलम्ब ABCD में, ∠A = ∠B = 45° तथा AB||CD



AB || CD, AD एक तिर्यक रेखा है।
⇒ ∠A + ∠D = 180° (तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्त: कोण)
⇒ 45° + ∠D = 180°
⇒ ∠D = 180° – 45° = 135°
इसी प्रकार ∠C = 135°, अत: ∠C = ∠D = 135°

प्रश्न 8. एक समांतर चतुर्भुज के एक अधिककोण के शीर्ष से खींचे गए उस समांतर चतुर्भुज के दो शीर्षलंबों के बीच का कोण 60° है। इस समांतर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

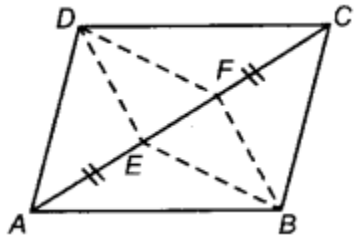
हल: माना कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज हैं, जिसमें अधिककोणों के शीर्ष D से AB पर लम्ब DM तथा शीर्ष B से AD पर लम्ब BN खींचा। दोनों शीर्ष लम्बों के बीच का कोण 60° है।
अर्थात् ∠BPM = 60°, ∠NPD = 60° (शीर्षाभिमुख कोण)



चतुर्भुज AMPN में
∠A + ∠AMP + ∠NPM + ∠ANP = 360°
∠A + 90° + 120° + 90° = 360°
∠A + 300° = 360°
∠A = 60°
AD || BC तथा AB एक तिर्यक रेखा है।
∠A + ∠B = 180° (एकान्तर कोण)
60° + ∠B = 180°
∠B = 120°
अब ∠C = ∠A = 60° तथा ∠D = ∠B = 120° (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

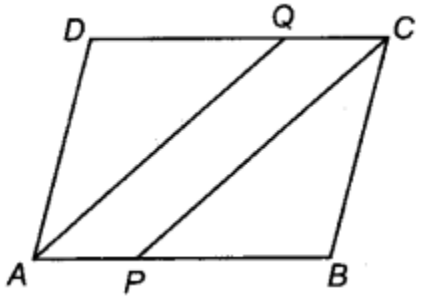
प्रश्न 9. समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC पर बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि AE = CF है। दर्शाइए कि BFDE एक समांतर चतुर्भुज है।

हल:

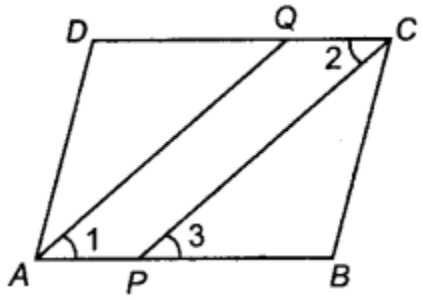


AC पर बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि
AE = CF है।
AE = CF
AE + EF = CF + EF (दोनों ओर EF जोड़ने पर)
AF = CE ...(1)
AB || CD, तथा AC एक तिर्यक रेखा है।
∠BAC = ∠DCA (एकान्तर कोण)
∠BAF = ∠DCE ...(2)
ΔABF और ΔCDE में,
AB = CD (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)
∠BAF = ∠DCE (समी. (2) से)
AF = CE (समी. (1) से)
ΔABF = ΔCDE (SAS नियम से)
∠AFB = ∠CED (CPCT)
∠EFB = ∠FED
परन्तु यह एकान्तरे कोण है। अत: DE || FB
तथा DE = FB (CPCT)
चूंकि चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर तथा समान्तर है।
अतः BFDE एक समान्तर चतुर्भुज है।
इति सिद्धम्।

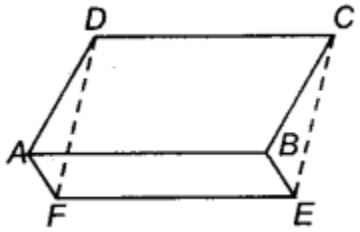
प्रश्न 10. चित्र में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। AQ और CP क्रमशः ∠A और ∠C के समद्विभाजंक हैं। सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।



हल: समान्तर चतुर्भुज
ABCD में,
∠A = ∠C (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)
$\frac{1}{2}$ ∠A = $\frac{1}{2}$ ∠C (AQ तथा CP क्रमशः ∠A तथा ∠C के अर्धक हैं।)
∠1 = ∠2 ...(1)
AB || CD तथा तिर्यक रेखा CP है।
∠3 = ∠2 ...(2) (एकान्तर कोण)
समीकरण (1) तथा (2) से, ∠1 = ∠3
तिर्यक रेखा AB, रेखाओं AQ तथा PC को इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि ∠1 = ∠3, अर्थात् संगत कोण बराबर हैं।
तथा AQ || PC
अब AB || CD
AP || QC
AQ || PC तथा AP || QC
APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।
इति सिद्धम्।



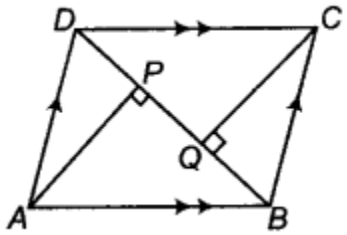
प्रश्न 11. चित्र में ABCD और AFEB समान्तर चतुर्भुज हैं। सिद्ध कीजिए कि CDFE समान्तर चतुर्भुज हैं।



हल: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।
AB || CD तथा AB = CD ...(1)
AFEB एक समान्तर चतुर्भुज है।
AB || FE, तथा AB = FE ...(2)
समीकरण (1) तथा (2) से
FE || CD तथा FE = CD

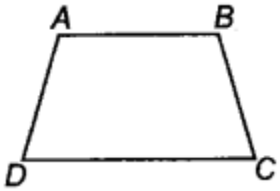
अतः एक चतुर्भुज का सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर समान्तर तथा बराबर है, प्रमेय 9.8 से, CDFE एक समान्तर चतुर्भुज है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 12. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण BD पर A और C से डाले गये लम्ब क्रमशः AP और CQ हैं। सिद्ध कीजिए कि AP = CQ

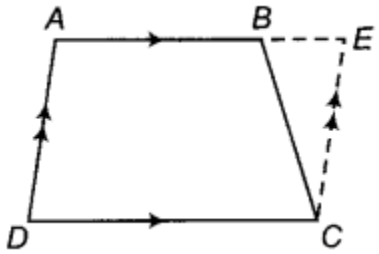


हल: दिया है। समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण BD पर A और C से डाले। गए लम्ब क्रमशः AP तथा CQ हैं।
सिद्ध करना है : AP = CQ
उपपत्ति: समान्तर चतुर्भुज ABCD में, AB || CD तथा BD एक तिर्यक रेखा है।
∠ABD = ∠CDB (एकान्तर कोण)
∠ABP = ∠CDQ ...(1)
∠APB = ∠CQD = 90° (दिया है)
∆APB तथा ∆CQD के दो-दो कोण समान हैं।
दोनों के तीसरे कोण भी समान होंगे।
∠PAB = ∠QCD ...(2)
∆APB तथा ∆CQD में,
∠ABP = ∠CDQ (समीकरण (1) से)
AB = CD (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)
∠PAB = ∠QCD (समीकरण (2) से)
∆APB = ∆CQD (ASA नियम से)
AP = CQ (CPCT)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 13. चित्र में, ABCD एक चतुर्भुज है। जिसमें AB || DC और AD = BC तो सिद्ध कीजिए कि ∠A = ∠B

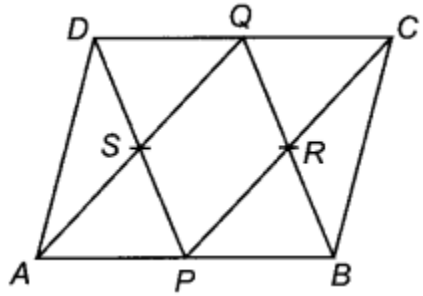


हल: दिया है : एक चतुर्भुज ABCD जिसमें AB || DC तथा AD = BC
सिद्ध करना है : ∠A = ∠B.



रचना : AB को आगे बढ़ाया तथा बिन्दु C से AD के समान्तर रेखा CE खींची जो बढ़ाई गई रेखा AB को बिन्दु E पर मिलती है।
उपपत्ति : AD || CE तथा AE एक तिर्यक रेखा है।
∠A + ∠E = 180° ...(1)
(क्रमागत अन्त:कोणों का योग 180° होता है)
अब AD || CE (रचना से) तथा AE ||CD
AECD एक समान्तर चतुर्भुज है।
AD = CE (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ) ...(2)
तथा AD = BC (दिया है) ...(3)
समीकरण (2) तथा (3) से,
BC = CE
∠CBE = ∠CEB (सम्मुख भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं) ...(4)
∠B + ∠CBE = 180° (रैखिक युग्म कोण)
∠B + ∠CEB = 180° (समीकरण (4) से)
∠B + ∠E = 180° ...(5)
समीकरण (1) तथा (5) से,
∠A + ∠E = ∠B + ∠E
∠A = ∠B
इति सिद्धम्।

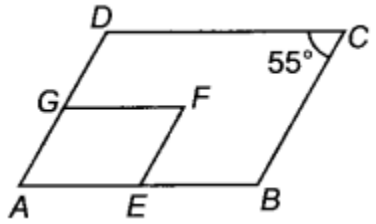
प्रश्न 14. दिए गए चित्र में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। P और Q क्रमशः सम्मुख भुजाओं AB और CD के A मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि PRQS एक समान्तर चतुर्भुज है।



हल: समान्तर चतुर्भुज ABCD में,
AB || CD = AP || CQ
⇒ AB = CD (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)
⇒ $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ CD
⇒ AP = CQ (∴ P तथा Q; AB तथा CD के मध्य बिन्दु हैं।)
चतुर्भुज APCQ की भुजाओं का एक युग्म परस्पर समान्तर तथा बराबर है। अत: प्रमेय 9.8 से,
APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।
PC || AQ
⇒ PR || SQ ...(1)
इसी प्रकार PBQD एक समान्तर चतुर्भज है।
PD || BQ
⇒ PS || QR
अब PR || SQ तथा RQ || SP
⇒ PRQS एक समान्तर चतुर्भुज हैं।
इति सिद्धम्।

Exercise 9.2

प्रश्न 1. चित्र में, ABCD और AEFG दो समांतर चतुर्भुज हैं। यदि ∠C = 55° है, तो ∠F निर्धारित कीजिए।



हल: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।
⇒ ∠A = ∠C (सम्मुख कोण)
⇒ ∠A = 55° [∵∠C = 55°]
AEFG एक समान्तर चतुर्भुज है।
∠F = ∠A (सम्मुख कोण)
⇒ ∠F = 55°

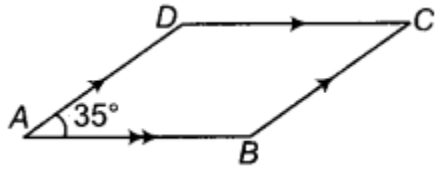
प्रश्न 2. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण न्यूनकोण हो सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

हल: माना चतुर्भुज का प्रत्येक कोण 89° है।
चतुर्भुज के चारों कोणों का योग = 89° + 89° + 89° + 89° = 356°
परन्तु चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।
अत: चतुर्भुज के सभी कोण न्यूनकोण नहीं हो सकते।

प्रश्न 3. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण समकोण हो सकते हैं?

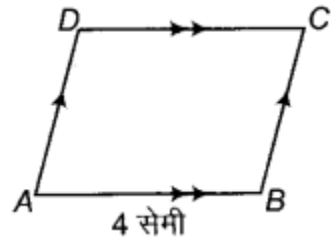
हल: एक आयत व वर्ग के सभी कोण समकोण होते हैं तथा आयत या वर्ग एक चतुर्भुज है।
अत: चतुर्भुज के सभी कोण समकोण हो सकते हैं।

प्रश्न 4. किसी चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यदि ∠A = 35° है, तो ∠B निर्धारित कीजिए।



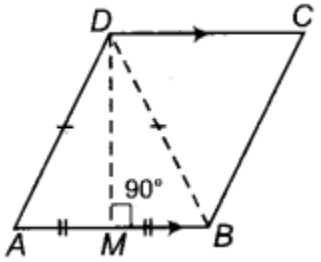
हल: चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। अत: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।
∠A = 35°
AD || BC तथा AB एक तिर्यक रेखा है।
∠A + ∠B = 180°(क्रमागत अन्त:कोणों का योग 180° होता है)
⇒ 35° + ∠B = 180°
⇒ ∠B = 180° – 35°
⇒ ∠B = 145°

प्रश्न 5. एक चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण बराबर हैं। यदि AB = 4 सेमी है, तो CD निर्धारित कीजिए।



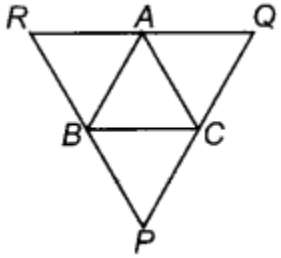
हल: चूंकि चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण बराबर हैं।
अत: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।
समान्तर चतुर्भुज ABCD में,
AB = 4 सेमी
चूँकि हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।
CD = AB
⇒ CD = 4 सेमी

प्रश्न 6. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसमें D से AB पर शीर्षलम्ब AB को समद्विभाजित करता है। समचतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।



हल: माना शीर्ष D से शीर्षलम्ब DM, AB को समद्विभाजित करता है।
ΔAMD तथा ΔBMD में
AM = BM (दिया है)
∠AMD = ∠BMD = 90° (दिया है)
DM = DM (उभयनिष्ठ भुजा)
ΔAMD = ΔBMD (SAS नियम से)
AD = BD (CPCT) …(1)
AD = AB (समचतुर्भुज की भुजाएँ) …(2)
समीकरण (1) तथा (2) से,
AD = AB = BD
ABD एक समबाहु त्रिभुज है।
⇒ ∠A = 60°(∵ समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° होता है)
अब AD || BC तथा AB एक तिर्यक रेखा है।
∠A + ∠B = 180° (क्रमागत अन्त:कोण)
⇒ 60° + ∠B = 180°
∠B = 180° – 60° = 120°
∠C = ∠A = 60° तथा ∠D = ∠B = 120° (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

प्रश्न 7. एक त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B और C से होकर क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के समांतर रेखाएँ RQ, PR और QP चित्र में दर्शाए अनुसार खींची गई हैं। दर्शाइए कि BC = $\frac{1}{2}$ QR है।

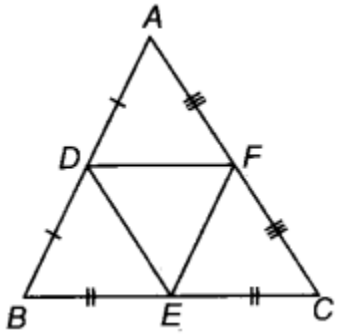


हल: BC || RQ (दिया है)
⇒ BC || AR

तथा AC|| RP (दिया है)
⇒ RB || AC
BC || AR तथा RB || AC
ACBR एक समान्तर चतुर्भज है।
RB || AC तथा RB = AC (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)
AC || RP ⇒ AC || BP …(1)
तथा AB || PQ ⇒ AB || PC
ABPC एक समान्तर चतुर्भुज है।
⇒ BP || AC तथा BP = AC …(2) (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)
समीकरण (1) तथा (2) से,
RB = BP
⇒ B, RP का मध्य बिन्दु है तथा BC || QR
BC = $\frac{1}{2}$ QR
इति सिद्धम्।

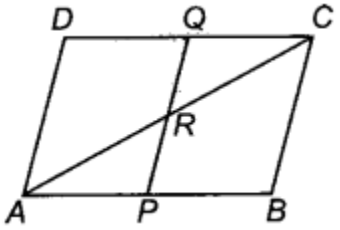
प्रश्न 8. D, E और F क्रमशः एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और AC के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि ∆DEF भी एक समबाहु त्रिभुज हैं।

हल:



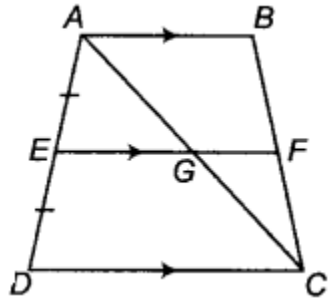
D, E और F क्रमश: एक समबाहु त्रिभुज ABC को भुजाओं AB, BC तथा AC के मध्य बिन्दु हैं।
D तथा F, AB और AC के मध्य बिन्दु हैं।
DF = $\frac{1}{2}$ BC …(1) है।
D तथा E, AB तथा BC के मध्य बिन्दु है।
DE = $\frac{1}{2}$ AC …(2)
E और F, BC तथा AC के मध्य बिन्दु हैं।
EF = $\frac{1}{2}$ AB …(3)
AB = BC = AC (समबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ) …..(4)
समीकरण (1), (2), (3) तथा (4) से
DE = EF = DF
अतः त्रिभुज DEF एक समबाहु त्रिभुज हैं।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 9. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की, सम्मुख भुजाओं AB और CD पर क्रमशः बिन्दु P और Q इस प्रकार लिए गए हैं कि AP = CQ है (चित्र) दर्शाइए कि AC और PQ परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



हल: दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AB और CD पर क्रमशः बिन्दु P और Q इस प्रकार लिए गए हैं कि AP = CQ
सिद्धकरना है: AC और PQ परस्पर समद्विभाजित है।
उपपत्ति: समान्तर चतुर्भुज ABCD में,
AB || CD तथा AC एक तिर्यक रेखा है।
∠BAC = ∠DCA (एकान्तर कोण)
∠PAR = ∠QCR …(1)
∆APR तथा ∆CQR में,
AP = CQ (दिया है)
∠PAR = ∠QCR (समी. (1) से)
∠ARP = ∠CRQ (शीर्षाभिमुख कोण)
∆APR = ∆CQR (AAS नियम से)
AR = CR तथा PR = QR (CPCT)
अतः AC और PQ परस्पर समद्विभाजित होते हैं।
इति सिद्धम्।

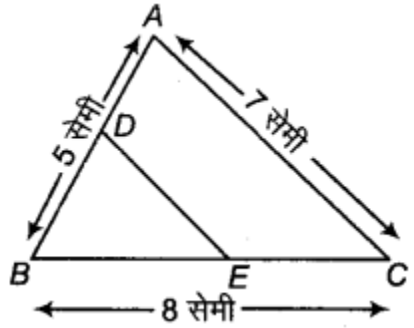
प्रश्न 10. E एक समलंब ABCD की भुजा AD का मध्य-बिन्दु है, जिसमें AB || DC है। E से होकर AB के समांतर खींची गई रेखा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिन्दु है। (संकेत : AC को मिलाइए।)



हल: दिया है: AB || EF || CD तथा E, AD का मध्य बिन्दु है।
सिद्ध करना है: F, भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

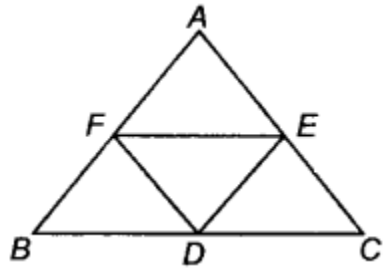
रचना : A को C से मिलाया, जो कि EF को G पर प्रतिच्छेद करती है।
उपपत्ति: EF || CD ⇒ EG || CD
∆ACD में,
EG || CD तथा E भुजा AD का मध्य बिन्दु है।
⇒ G, AC का मध्य बिन्दु होगा।
∆ABC में, GF || AB तथा G, AC का मध्य बिन्दु है।
⇒ F, भुजा BC का मध्य बिन्दु होगा।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 11. ∆ABC में, AB = 5 सेमी, BC = 8 सेमी और CA = 7 सेमी हैं। यदि D और E क्रमशः AB और BC के मध्य-बिन्दु हैं, तो DE की लंबाई निर्धारित कीजिए।



हल: ∆ABC, में बिन्दु D और E, भुजा AB तथा AC के मध्य में बिन्दु हैं।
AC = 7 सेमी
DE || AC तथा
DE = $\frac{1}{2}$ × AC
⇒ DE = $\frac{1}{2}$ × 7 = 3.5 सेमी

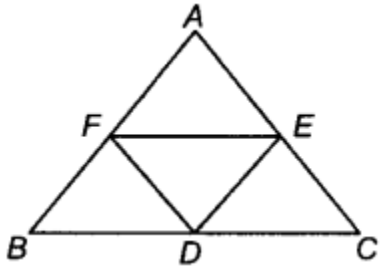
प्रश्न 12. चित्र में यह दिया है कि BDEF और FDCE समांतर चतुर्भुज हैं। क्या आप यह कह सकते हैं कि BD = CD है? क्यों और क्यों नहीं?



हल: दिए गए चित्र में, BDEF समान्तर चतुर्भुज है।
⇒ BD = FE (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ) …(1)
तथा FDCE समान्तर चतुर्भुज है।

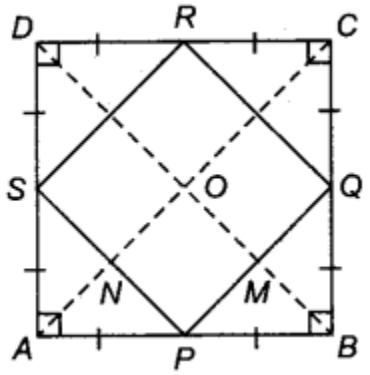
CD = FE (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ) …(2)
समीकरण (1) व (2) से,
BD = CD

प्रश्न 13. दिए गए चित्र में, D, E और F क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं। यदि AB = 4.3 सेमी, BC = 5.6 सेमी और AC = 3.9 सेमी हों, तो निम्नलिखित का परिमाप ज्ञात कीजिए।
(i) ∆DEF
(ii) चतुर्भुज BDEF



हल: ∆ABC में, F तथा E भुजाओं AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं।
FE = $\frac{1}{2}$ BC …(1)
⇒ FE = $\frac{1}{2}$ x 5.6 = 2.8 सेमी (∵ BC = 5.6 सेमी)
F तथा D भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।
FD = $\frac{1}{2}$ x AC = $\frac{1}{2}$ x 3.9 (∵ AC = 3.9 सेमी)
⇒ FD = 1.95 सेमी
तथा D और E भुजाओं BC और AC के मध्य बिन्दु हैं।
DE = $\frac{1}{2}$ x AB …(2)
⇒ DE = $\frac{1}{2}$ x 4.3
⇒ DE = 2.15 सेमी
∆DEF का परिमाप = DE + EF + FD = 2.15 + 2.8 + 1.95 = 6.9 सेमी।
अत: ∆DEF का परिमाप = 6.9 सेमी
(ii) FE = $\frac{1}{2}$ x BC [समी (1) से]
⇒ FE = BD = 2.8 सेमी [BD = CD]
तथा DE = $\frac{1}{2}$ x AB [समी (2) से]
⇒ DE = BF = 2.15 सेमी [BF = AF]
चतुर्भुज BDEF का परिमाप = BD + DE + FE + FB = 2.8 + 2.15 + 2.8 + 2.15 = 9.9 सेमी
अतः चतुर्भुज BDEF का परिमाप = 9.9 सेमी।

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।

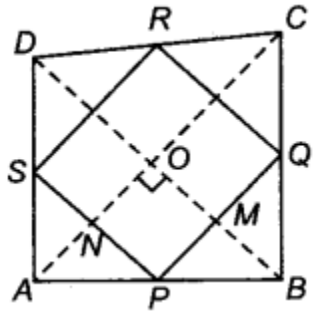


हल: दिया है: ABCD एक वर्ग है। जिसकी भुजाओं AB, BC, CD तथा AD के क्रमशः मध्य बिन्दु P, Q, R तथा S हैं। P को Q से, Q को R से, R को S से तथा S को न P से मिलाया। हमें PQRS एक चतुर्भुज प्राप्त होता है।
सिद्ध करना है : PQRS एक वर्ग है।
रचना : AC और BD को मिलाया।
उपपत्ति: ΔABC में, P तथा Q भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।
PQ || AC तथा $PQ = \frac{1}{2} AC$ …(1)
ΔADC में, R तथा S भुजाओं CD तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।
SR || AC तथा $SR = \frac{1}{2} AC$ …(2)
समीकरण (1) तथा (2) से,
PQ || SR तथा PQ = SR …(3)
PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।
ABCD एक वर्ग है।
AB = BC = CD = AD
$\Rightarrow \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$ तथा $\frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD$
$\Rightarrow$ PB = CR तथा BQ = CQ …(4)
ΔPBQ तथा ΔRCQ में,
PB = CR तथा BQ = CQ (समी. (4) से)
$\angle PBQ = \angle RCQ = 90°$
$\Delta PBQ = \Delta RCQ$ (SAS नियम से)
PQ = QR …. (CPCT) …(5)
समीकरण (3) तथा (5) से
PQ = QR = RS …(6)
परन्तु PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।
QR = PS …(7)
समीकरण (6) तथा (7) से
PQ = QR = RS = PS
PQ || AC $\Rightarrow$ PM || NO

P तथा S भुजाओं AB तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।
PS || BD ⇒ PN || MO
अतः PNOM में, PM || NO तथा PN || MO
PNOM एक समान्तर चतुर्भुज है।
चूँकि हम जानते हैं कि वर्ग के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।
अत: ∠AOB = 90°
⇒ ∠NOM = 90°
⇒ ∠QPS = 90°
अब ∠NPM = ∠AOB = 90° (समान्तर चतुर्भुज PNOM के सम्मुख कोण)
समान्तर चतुर्भुज PQRS में,
PQ = QR = RS = SP तथा ∠QPS = 90°
अत: PQRS एक वर्ग है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 15. एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत् हैं। सिद्ध कीजिए कि इसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित चतुर्भुज एक आयत होता है।

हल: दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण परस्पर लम्ब हैं अर्थात् ∠AOB = 90° तथा बिन्दु P, Q, R तथा S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।
PQ, QR, RS तथा SP को मिलाया गया है।
सिद्ध करना है : PQRS एक आयत है।

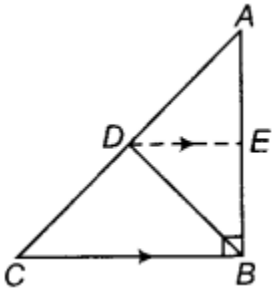


रचना : AC तथा BD को मिलाया।
उपपत्ति: ∆ABC में, बिन्दु P और Q भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।
अत: PQ || AC तथा PQ = $\frac{1}{2}$ AC …(1)
∆ADC में, बिन्दु R तथा S भुजाओं CD तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।
SR || AC तथा SR = $\frac{1}{2}$ AC …(2)
समीकरण (1) तथा (2) से,
PQ || SR तथा PQ = SR
⇒ PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।
PQ || AC
⇒ PM || ON ….(3)
∆ABD में, बिन्दु P तथा S भुजाओं AB तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।

PS || BD ⇒ PN ||OM …(4)
समीकरण (3) तथा (4) से
PM || ON तथा PN || OM
⇒ PNOM एक समान्तर चतुर्भुज है।
चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर लम्बवत् है।
∠AOB = 90°
⇒ ∠NOM = 90°
⇒ ∠NPM = ∠NOM = 90° (सम्मुख कोण)
⇒ ∠QPS = 90°
अब PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसका एक कोण ∠QPS = 90°
अत: PQRS एक आयत है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण को समद्विभाजित करने वाली माध्यिका कर्ण की आधी होती है।

हल: दिया है: ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका ∠B समकोण है तथा बिन्दु D, AC का मध्य बिन्दु है।
सिद्ध करना है:
BD = AD = $\frac{1}{2}$ AC

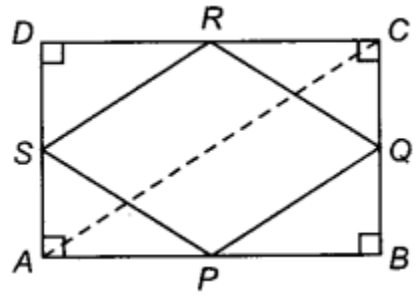


रचना : बिन्दु D से DE || BC खींची।
उपपत्ति: DE || BC
∠AED = ∠ABC (संगत कोण)
∠AED = 90° [∵∠ABC = 90°] …(1)
∠AED + ∠BED = 180° (रैखिक कोण युग्म)
⇒ 90° + ∠BED = 180°
⇒ ∠BED = 180° – 90° = 90° …(2)
∆ABC में बिन्दु D, भुजा AC का मध्य बिन्दु है। तथा DE || BC
बिन्दु E, भुजा AB का मध्य बिन्दु होगा।
AE = BE …(3)
∆AED तथा ∆BED में,
AE = BE (समी. (3) से)
∠AED = ∠BED = 90° (समी. (1) तथा (2) से)
DE = DE (उभयनिष्ठ भुजा)

∆AED = ∆BED (SAS नियम से)
⇒ AD = BD (CPCT)
परन्तु AD = CD अत: AD = BD = $\frac{1}{2}$ AC
अत: एक समकोण त्रिभुज के कर्ण को समद्विभाजित करने वाली माध्यिका कर्ण की आधी होती है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि एक आयत की भुजाओं के युग्मों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से एक समचतुर्भुज बनता है।

हलं: दिया है: ABCD एक आयत है जिसमें P, Q, R, S क्रमश: आयत की भुजाओं AB, BC, CD, AD के मध्य बिन्दु हैं।
PQ, QR, RS तथा PS को मिलाया।



रचना : AC को मिलाया।
उपपत्ति: ∆ABC में, बिन्दु P तथा Q भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु है।
PQ || AC तथा PQ = AC … (1)
इसी प्रकार, ∆ACD में, बिन्दु R तथा S भुजाओं। CD तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।
SR || AC तथा SR = $\frac{1}{2}$ AC …(2) समीकरण (1) तथा (2) से,
PQ || SR तथा PQ = RS
PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।
बिन्दु P, AB का मध्य बिन्दु है।
AP = PB …(3)
AD = BC (आयत की सम्मुख भुजाएँ)
⇒ $\frac{1}{2}$ AD = $\frac{1}{2}$ BC
⇒ AS = BQ …(4)
∆SAP तथा ∆QBP में,
AP = PB (समीकरण (3) से)
∠SAP = ∠QBP = 90°
AS = BQ (समी. (4) से)
∆SAP = ∆QBP (SAS नियम से)
PS = PQ (CPCT)
समान्तर चतुर्भुज PQRS में PQ = PS अर्थात् दो संलग्न भुजाएँ समान हैं।
अत: PQRS एक समचतुर्भुज है।

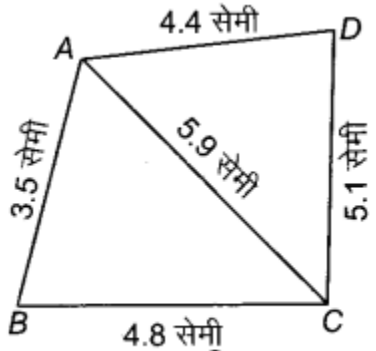
अतः एक आयत की भुजाओं के युग्मों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से एक समचतुर्भुज बनता है।
इति सिद्धम्।

Exercise 9.3

दिये गए निम्न तथ्यों से चतुर्भुज की वर्णन सहित रचना कीजिए।

प्रश्न 1. चतुर्भुज ABCD में, AB = 3.5 सेमी, BC = 4.8 सेमी, CD = 5.1 सेमी, AD = 4.4 सेमी और एक विकर्ण AC = 5.9 सेमी।

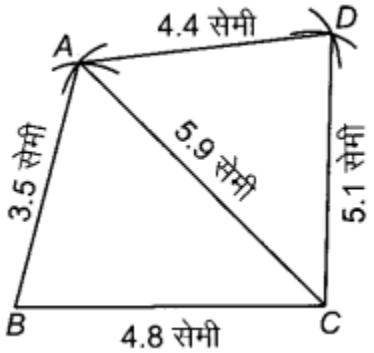
हल: प्रश्नानुसार, प्रश्न में दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

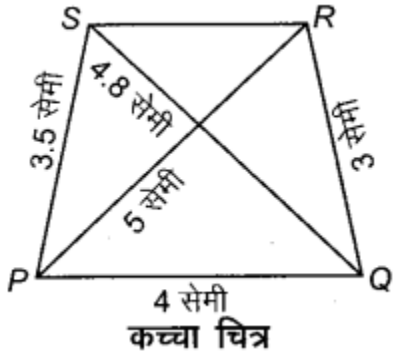
रचना के पद :

1. कच्चे चित्र के अनुसार BC = 4.8 सेमी का रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु B तथा C से क्रमशः 3.5 सेमी तथा 5.9 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु A पर काटते हैं।
3. B को A से तथा C को A से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज ABC प्राप्त होता है
4. बिन्दु A से 4.4 सेमी तथा C से 5.1 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु D पर काटते हैं।
5. A को D से तथा C को D से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD की रचना पूर्ण होती है।



प्रश्न 2. चतुर्भुज PQRS में, PQ = 4 सेमी, QR = 3 सेमी, QS = 4.8 सेमी, PS = 3.5 सेमी और PR = 5 सेमी।

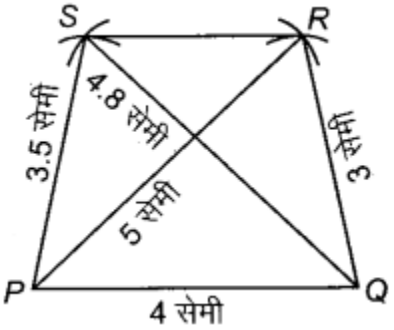
हल: प्रश्नानुसार, प्रश्न में दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

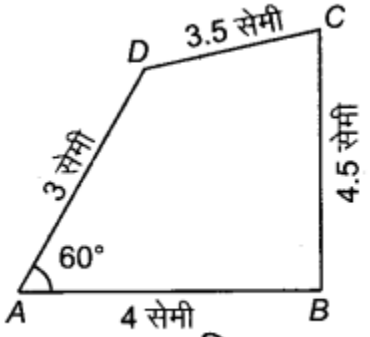
रचना के पद :

1. कच्चे चित्र के अनुसार PQ = 4 सेमी का रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु P तथा Q से क्रमशः 3.5 सेमी तथा 4.8 सेमी के दो चाप लगाए जो कि एक-दूसरे को बिन्दु S पर काटते हैं।
3. P को S तथा Q को S से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज PQS प्राप्त होता है
4. बिन्दु P तथा Q से क्रमश: 5 सेमी व 3 सेमी के दो चाप लगाए जो 4 सेमी कि एक दूसरे को बिन्दु R पर काटते हैं।
5. P को R से, को R से तथा R को S से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज PQRS प्राप्त होता है।



प्रश्न 3. चतुर्भुज ABCD में, AB = 4 सेमी, BC = 4.5 सेमी, CD = 3.5 सेमी, AD = 3 सेमी और ∠A = 60°

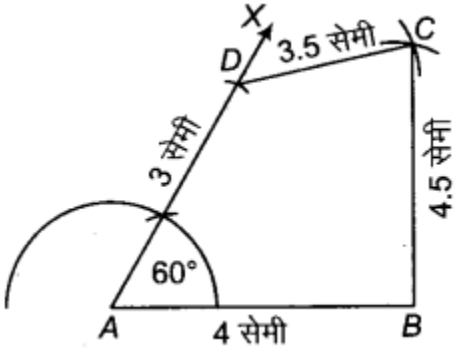
हल: प्रश्नानुसार, प्रश्न में दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

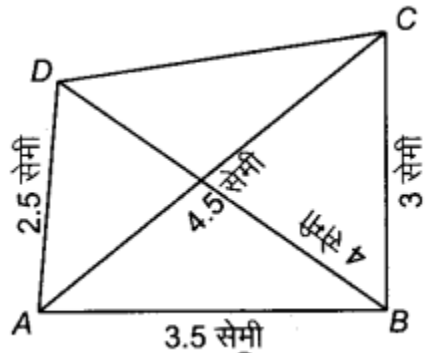
रचना के पद :

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 4 सेमी का रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु A पर 60° को कोण बनाती हुई रेखा AX खींची। रेखा AX से AD = 3 सेमी काटा।
3. बिन्दु B तथा D से क्रमशः 4.5 सेमी। तथा 3.5 सेमी के दो चाप लगाए जो कि दूसरे को बिन्दु C पर काटते हैं।
4. B को C से तथा D को C से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 4. चतुर्भुज ABCD में, AB = 35 सेमी, BC = 3 सेमी, AD = 2.5 सेमी, AC = 4.5 सेमी और BD = 4 सेमी।

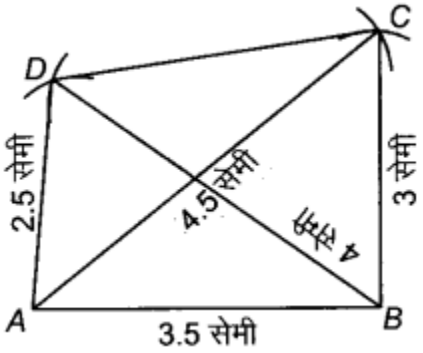
हल: प्रश्नानुसार, प्रश्न में दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

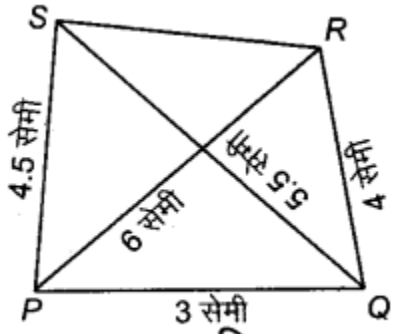
रचना के पद :

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 3.5 सेमी का रेखाखण्ड़ खींचते हैं।
2. बिन्दु A तथा B से क्रमशः 4.5 सेमी तथा 3 सेमी के दो चाप लगाएँ जो एक दूसरे को बिन्दु C पर काटते हैं।
3. A को C से तथा B को C से मिलाया। इसे प्रकार ΔABC प्राप्त होता है।
4. बिन्दु A तथा B से क्रमश: 2.5 सेमी तथा 4 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु D पर काटते हैं। A को D से तथा B को D से मिलाया।
5. C को D से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 5. चतुर्भुज PQRS में, PQ = 3 सेमी, QR = 4 सेमी, PS = 4.5 सेमी, PR = 6 सेमी और QS = 5.5 सेमी।

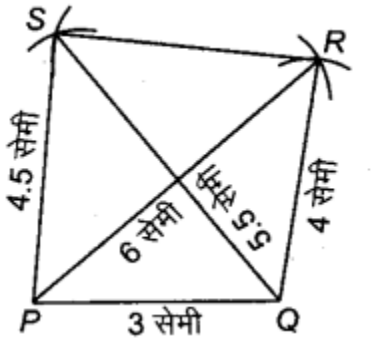
हल: प्रश्नानुसार, प्रश्न में दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार हैं-



कच्चा चित्र

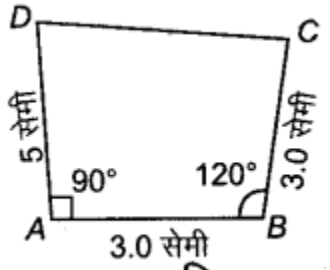
रचना के पदः

1. कच्चे चित्र के अनुसार PQ = 3 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु P तथा Q से क्रमशः 6 सेमी तथा 4 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु R पर काटते हैं।
3. P को R तथा Q को R से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज PQR प्राप्त होता है।
4. बिन्दु P तथा Q से क्रमशः 4.5 सेमी तथा 5.5 सेमी के दो चाप लगाए जो कि एक दूसरे को बिन्दु S पर काटते हैं।
5. P को S, Q को S तथा R को S से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज PQRS प्राप्त होता है।



प्रश्न 6. चतुर्भुज ABCD में, AB = BC = 3.0 सेमी, AD = 5 सेमी, ∠A = 90° और ∠B = 120°

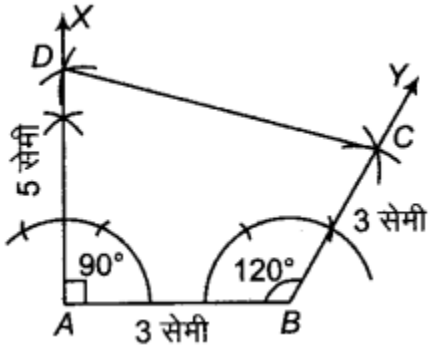
हल: प्रश्नानुसार, प्रश्न में दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

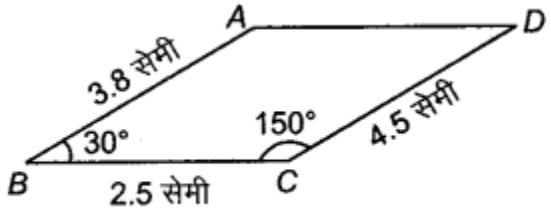
रचना के पदः

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 3.0 सेमी 3.0 सेमी का रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु A पर 90° तथा बिन्दु B पर 120° का कोण बनाती हुई दो रेखाएँ AX और BY खींची।
3. रेखा AX से AD = 5 सेमी तथा BY से BC = 3 सेमी काटा।
4. C को D से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 7. चतुर्भुज ABCD में, AB = 3.8 सेमी, BC = 2.5 सेमी, CD = 4.5 सेमी और ∠B = 30° तथा ∠C = 150°

हल: प्रश्नानुसार, प्रश्न में दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार है-

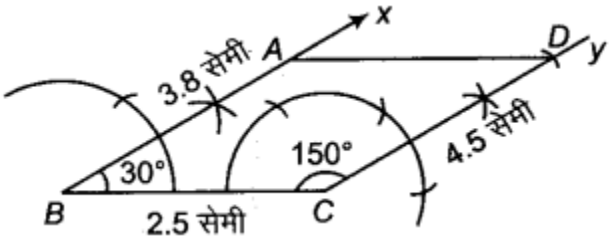


कच्चा चित्र

रचना के पद :

1. कच्चे चित्र के अनुसार BC = 2.5 सेमी का रेखाखण्ड खींचते हैं।

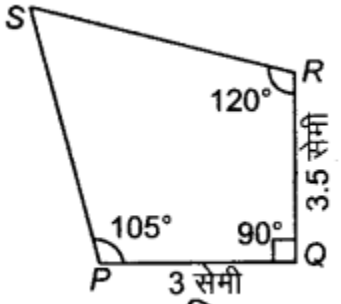
2. बिन्दु B पर 30° तथा C पर 150° का कोण बनाती हुई रेखाएँ BX तथा CY खींची।
3. रेखा BX से AB = 38 सेमी तथा CY से CD = 4.5 सेमी काटा।।



4. A को D से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।

प्रश्न 8. चतुर्भुज PQRS में, PQ = 3 सेमी, QR = 3.5 सेमी, ∠Q = 90°, ∠P = 105° और ∠R = 120°

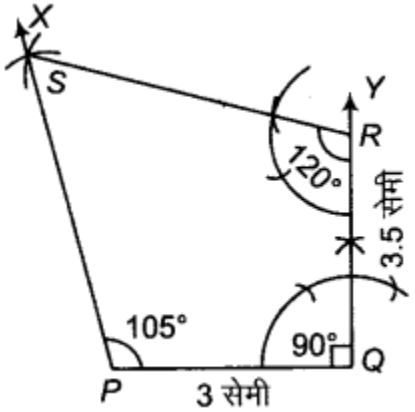
हल: प्रश्नानुसार, प्रश्न में दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

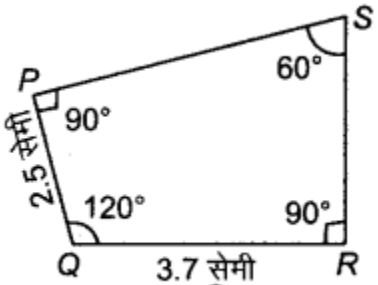
रचना के पदः

1. कच्चे चित्र के अनुसार PQ = 3 सेमी की रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु P पर 105° तथा बिन्दु Q पर 90° का कोण बनाती हुई रेखाएँ PX तथा QY खींची।
3. रेखा QY से QR = 3.5 सेमी काटा।
4. बिन्दु R पर 120° का कोण बनाती हुई रेखा खींची जो रेखा PX को S पर प्रतिच्छेद करती है।
   इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज PQRS प्राप्त होता है।



प्रश्न 9. चतुर्भुज PQRS में, PQ = 2.5 सेमी, QR = 3.7 सेमी, ∠Q = 120°, ∠S = 60° और ∠R = 90°

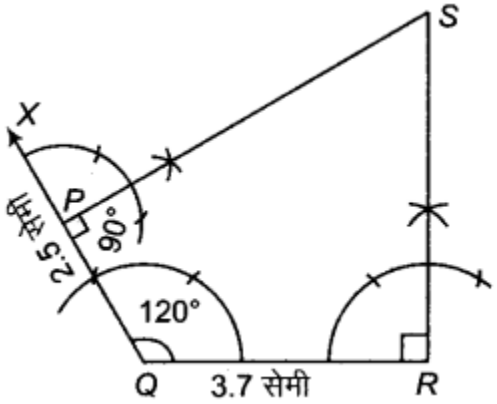
हल: ∠P + ∠Q + ∠R + ∠S = 360°
⇒ ∠P + 120° + 90° + 60° = 360°
⇒ ∠P = 90°
प्रश्नानुसार, प्रश्न में दी मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

रचना के पद :

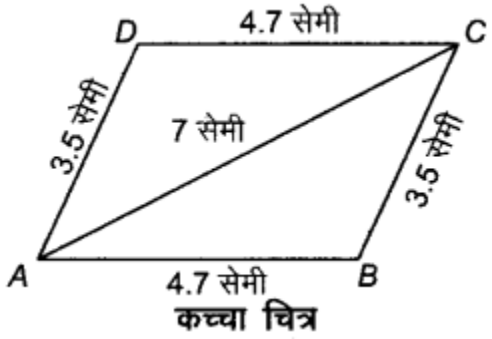
1. कच्चे चित्र के अनुसार QR = 3.7 की रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु Q पर 120° का कोण बनाती हुई रेखा QX खींची।
3. रेखा QX से QP = 2.5 सेमी काटा।
4. बिन्दु P पर 90° तथा बिन्दु R पर 90° का कोण बनाती हुई रेखाएँ खींची जो कि एक दूसरे को बिन्दु S पर काटती हैं।
   इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज PQRS प्राप्त होता है।



Exercise 9.4

प्रश्न 1. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4.7 सेमी, BC = 3.5 सेमी तथा AC = 7 सेमी।

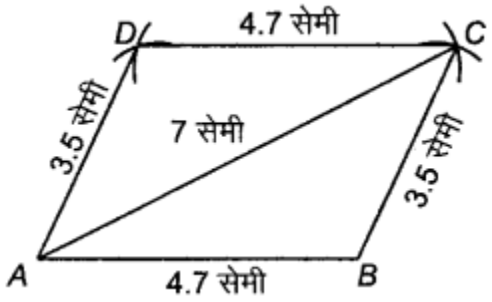
हल: प्रश्नानुसार दी मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं जोकि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

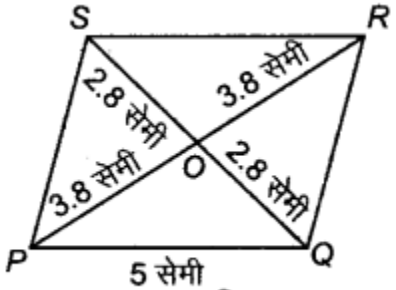
रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 4.7 सेमी का रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु A तथा B से क्रमशः 7 सेमी तथा 3.5 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु C पर काटते हैं।
3. A को C से तथा B को C से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज ABC प्राप्त होता है।
4. बिन्दु A तथा C से क्रमशः 3.5 सेमी 4.7 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु D पर काटते हैं।
5. A को D से तथा C को D से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 2. समान्तर चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 5 सेमी तथा विकर्ण PR = 7.6 सेमी तथा विकर्ण QS = 5.6 सेमी है।

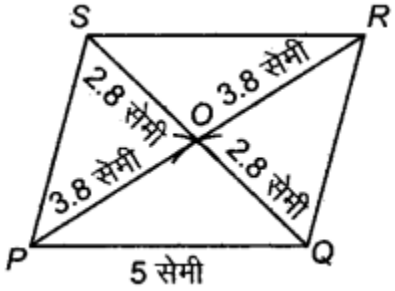
हल: प्रश्नानुसार दी मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं जोकि इस प्रकार हैं।



कच्चा चित्र

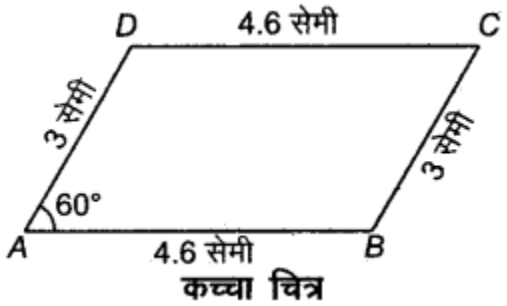
रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार PQ = 5 सेमी का रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. विकर्ण PR का आधा = $\frac{7.6}{2}$ = 3.8 सेमी
   तथा विकर्ण QS का आधा = $\frac{5.6}{2}$ = 2.8 सेमी।
   बिन्दु P तथा Q से क्रमश: 3.8 सेमी तथा 2.8 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को O पर काटते हैं।
3. P को O से तथा Q को O से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज OPQ प्राप्त होता हैं।
4. PO तथा QO को इस प्रकार आगे बढ़ाया कि PR = 7.6 सेमी तथा QS = 5.6 सेमी।
5. QR, SR तथा PS को मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज PQRS प्राप्त होता हैं।



प्रश्न 3. समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसकी दो भुजाएँ क्रमशः 4.6 सेमी और 3 सेमी हों तथा उनके बीच का कोण 60° हो।

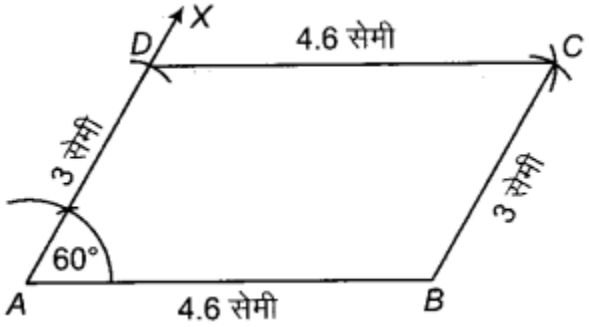
हल: प्रश्नानुसार दी मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं। जोकि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

रचना के पद

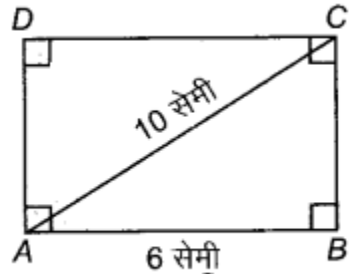
1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 4.6 सेमी का रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु A पर 60° का कोण बनाती हुई रेखा AX खींची।
3. रेखा AX से AD = 3 सेमी काटा।



4. बिन्दु B तथा D से क्रमश: 3 सेमी तथा 4.6 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु C पर काटते हैं।
5. B को C से तथा D को C से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।

प्रश्न 4. एक आयत ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 6 सेमी और विकर्ण AC = 10 सेमी हो।

हल: प्रश्नानुसार दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं| जोकि इस प्रकार है-

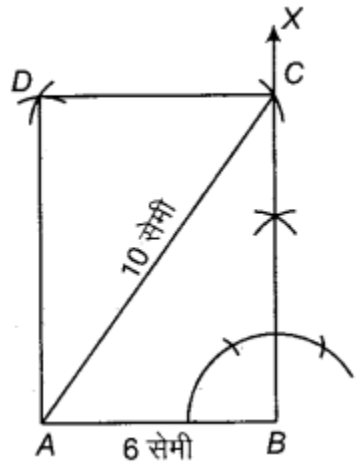


कच्चा चित्र

रचना के पद

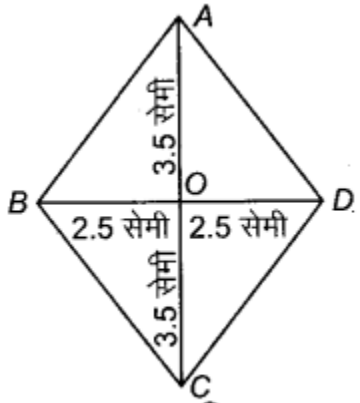
1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 6 सेमी का एक कच्चा चित्र रेखाखण्ड खींचते हैं।

2. बिन्दु B पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा BX खींची।
3. बिन्दु A से 10 सेमी का चाप लगाया जो रेखा को बिन्दु C पर काटता है।
4. बिन्दु A तथा C से भुजा BC तथा AB के बराबर त्रिज्या के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु D पर काटते हैं।
5. A को D, A को C तथा C को D से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज आयत ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 5. एक समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसके विकर्ण AC = 7 सेमी और BD = 5 सेमी हो।

हल: प्रश्नानुसार दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं। जोकि इस प्रकार है-

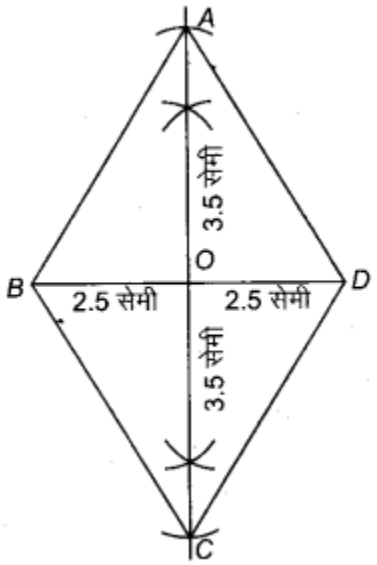


कच्चा चित्र

रचना के पद

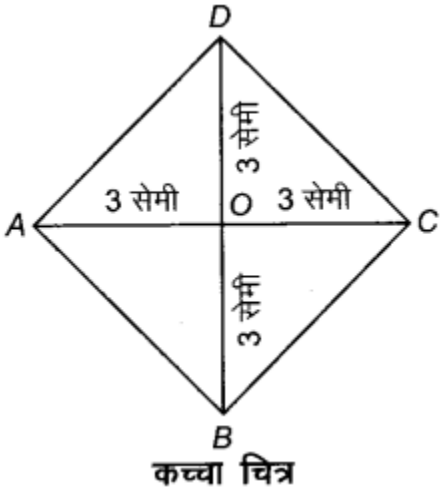
1. कच्चे चित्र के अनुसार BD = 5 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड BD का कच्चा चित्र लम्बअर्धक किया जो BD को O पर मिलता है।
3. बिन्दु O से विकर्ण AC का आधा अर्थात् = 3.5 सेमी के दो चाप BD के दोनों तरफ लगाए जो लम्ब अर्धक को क्रमशः A तथा C पर काटते हैं।

4. AB, BC, CD तथा AD को मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट समचतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 6. एक वर्ग ABCD की रचना कीजिए। जिसके विकर्ण 6 सेमी हो।

हल: प्रश्नानुसार दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं जोकि इस प्रकार है।

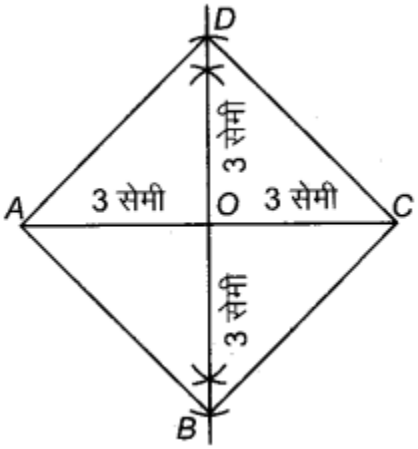


कच्चा चित्र

रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार AC = 6 सेमी का रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड AC का लम्ब अर्धक खींचा जो AC को O पर मिलता हैं।
3. बिन्दु O से विकर्ण BD का आधा अर्थात् $\frac{6}{2}$ = 3 सेमी के दो चाप AC के दोनों तरफ लगाए जो लम्ब अर्धक को D तथा B पर काटते हैं।

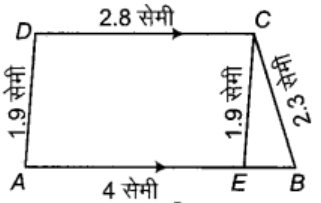
4. AB, BC, CD तथा AD को मिलाया। इस प्रकार ABCD अभीष्ट वर्ग प्राप्त होता है।



Exercise 9.5

प्रश्न 1. समलम्ब चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB || CD, AB = 4 सेमी, BC = 2.3 सेमी, CD = 2.8 सेमी और DA = 1.9 सेमी।

हल: प्रश्नानुसार दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं जोकि इसे प्रकार है-

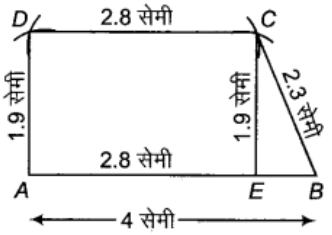


कच्चा चित्र

रचना के पद

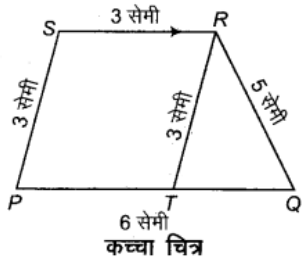
1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 4 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड AB में से AE = CD = 2.8 सेमी पर E बिन्दु अंकित किया।
3. बिन्दु E तथा B से क्रमशः 1.9 सेमी (भुजा AD के बराबर) तथा 2.3 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु C पर काटते हैं।
4. E को C तथा B को C से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज EBC प्राप्त होता है।

5. बिन्दु A तथा C से क्रमशः 1.9 सेमी = तथा 2.8 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु DA पर काटते हैं।
6. A को D तथा C को D से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट समलम्ब ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 2. समलम्ब चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ || SR, PQ = 6 सेमी, RS = 3 सेमी, PS = 3 सेमी, QR = 5 सेमी।

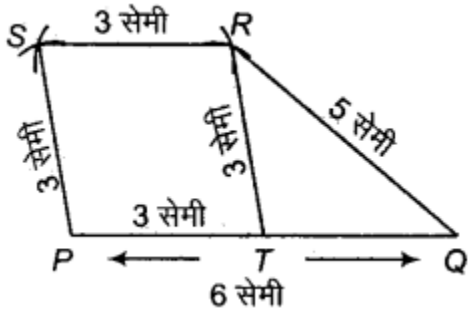
हल: प्रश्नानुसार दी मापों का कच्चा चित्र बनाते है जोकि इस प्रकार हैं।



कच्चा चित्र

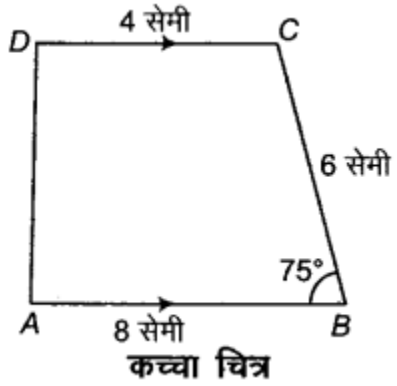
रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार PQ = 6 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड PQ में से PT = RS = 3 सेमी पर बिन्दु T अंकित करते हैं।
3. बिन्दु T तथा Q से क्रमशः 3 सेमी (भुजा PS के बराबर) तथा 5 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु R पर काटते हैं।
4. T को R तथा Q को R से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज TRQ प्राप्त होता है।
5. बिन्दु P तथा R से क्रमशः 3 सेमी तथा 3 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु S पर काटते हैं।
6. P को S तथा R को S से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट समलम्ब PQRS प्राप्त होता है।



प्रश्न 3. समलम्ब चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB || CD, AB = 8 सेमी, BC = 6 सेमी, CD = 4 सेमी और ∠B = 75°

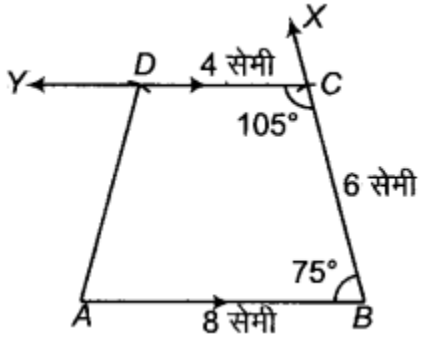
हल: प्रश्नानुसार दी मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं जोकि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

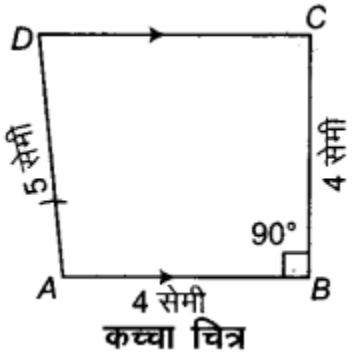
रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 8 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखा AB के बिन्दु B पर कच्चा चित्र 75° का कोण बनाती हुई रेखा BX खींची।
3. रेखाखण्ड BX में से BC = 6 सेमी काटा।
4. रेखाखण्ड BC के बिन्दु C पर 105° का कोण बनाती हुई रेखा CY खींची।
   [∵AB || CD, ∠C = 180° – 75° = 105°]
5. रेखा CY में से CD = 4 सेमी काटा। AD को मिलाया, इस प्रकार अभीष्ट समलम्ब ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 4. समलम्ब चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB || CD, AB = 4 सेमी, BC = 4 सेमी, AD = 5 सेमी और ∠B = 90°

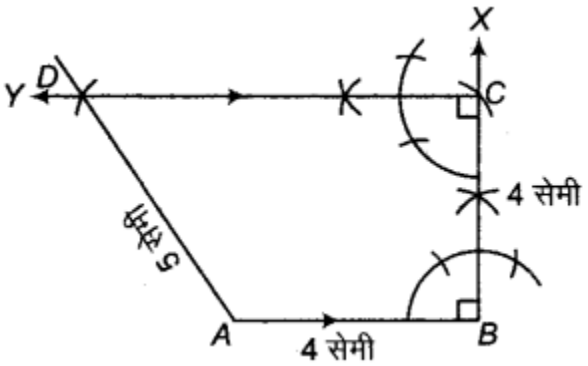
हल: प्रश्नानुसार दी गई मापों को कच्चा चित्र बनाते हैं जोकि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 4 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।



2. रेखाखण्ड AB के बिन्दु B पर 90° का कोण बनाती हुई रेखी BX खींची।
3. रेखा BX में से BC = 4 सेमी काटा।
4. रेखा BX के बिन्दु C पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा CY खींची।
5. बिन्दु A से 5 सेमी का चाप लगाया जो रेखा CY को बिन्दु D पर काटता है।
6. A को D से मिलाया।
   इस प्रकार अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।

Miscellaneous Exercise

निम्नलिखित में से (प्रश्न 1 से 15 तक) प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए।

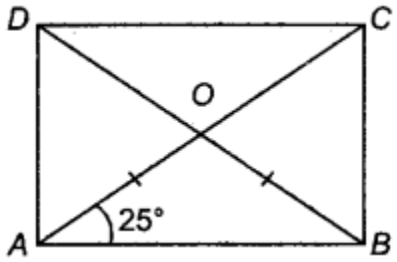
प्रश्न 1. एक चतुर्भुज के तीन कोण 75°, 90° और 75° हैं। इसका चौथा कोण है-

(A) 90°
(B) 95°
(C) 105°
(D) 120°

उत्तर : (D)
संकेत : चौथा कोण = 360° – 240°= 120°

प्रश्न 2. एक आयत का एक विकर्ण उसकी एक भुजा से 25° पर नत है। इसके विकर्षों के बीच का न्यूनकोण है-
(A) 55°
(B) 50°
(C) 40°
(D) 25°

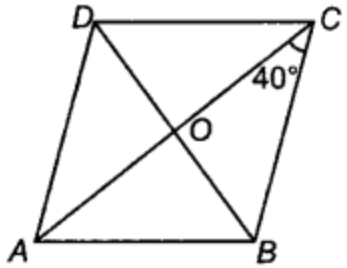
उत्तर : (B)
संकेत :



AC = BD
$\Rightarrow \frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ BD
⇒ AO = OB
∠OAB = ∠OBA (सम्मुख कोण)
ΔOAB में,
∠OAB + ∠AOB + ∠OBA = 180°
⇒ 25° + ∠AOB + 25° = 180°
⇒ ∠AOB = 180° – 50° = 130°

प्रश्न 3. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसमें ∠ACB = 40° तब ∠ADB है-
(A) 40°
(B) 45°
(C) 50°
(D) 60°

उत्तर : (C)
संकेत :



∠CAD = ∠ACB [एकान्तर कोण]
⇒ ∠CAD = 40°
⇒ ∠OAD = 40°
∠AOD = 90°
ΔAOD में,
∠AOD + ∠OAD + ∠ADO = 180°
⇒ 90° + 40° + ∠ADO = 180°
⇒ 130° + ∠ADO = 180°
⇒ ∠ADO = 50°
अतः ∠ADB = 50°

प्रश्न 4. चतुर्भुज PQRS की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को, एक ही क्रम में मिलाने पर बना चतुर्भुज एक आयत होता है, यदि :
(A) PQRS एक आयत है।
(B) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।
(C) PQRS के विकर्ण परस्पर लंब हों।
(D) PQRS के विकर्ण बराबर हों।

उत्तर: (C) PQRS के विकर्ण परस्पर लंब हों।

प्रश्न 5. चतुर्भुज PQRS की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को, एक ही क्रम में मिलाने पर बना चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है, यदि
(A) PQRS एक समचतुर्भुज है।
(B) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।
(C) PQRS के विकर्ण परस्पर लंब हों।
(D) PQRS के विकर्ण परस्पर बराबर हो।

उत्तर: (D) PQRS के विकर्ण परस्पर बराबर हो।

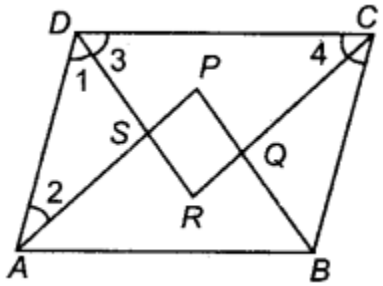
प्रश्न 6. यदि चतुर्भुज ABCD के कोणों A, B, C और D को इसी क्रम में लेने पर, अनुपात 3 : 7 : 6 : 4 हो तो ABCD है एक
(A) समचतुर्भुज

(B) समांतर चतुर्भुज
(C) समलंब
(D) पतंग

उत्तर : (C)
संकेत : चतुर्भुज ABCD के कोणों का अनुपात = 3 : 7 : 6 : 4
कोणों का अनुपातीय योग = 3 + 7 + 6 + 4 = 20
परन्तु ∠A + ∠B + ∠C + ∠D = 360°
$\angle A = \frac{3}{20}$ x 360° = 54°
$\angle B = \frac{7}{20}$ x 360°=126°
$\angle C = \frac{6}{20}$ x 360°= 108°
$\angle D = \frac{4}{20}$ x 360° = 72°
∠A + ∠B = 54° + 126° = 180°
तथा ∠C + ∠D = 108° + 72° = 180°
AD || BC
चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर है।
अतः दिया गया चतुर्भुज समलम्ब होगा।

प्रश्न 7. यदि चतुर्भुज ABCD के ∠A और ∠B के समद्विभाजक परस्पर P पर प्रतिच्छेद करते हैं, ∠B और ∠C के समद्विभाजक Q पर, ∠C और ∠D के R तथा, ∠D और ∠A के S पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो PQRS है एक
(A) आयत
(B) समचतुर्भुज
(C) समांतर चतुर्भुज
(D) चतुर्भुज जिसके सम्मुख कोण संपूरक हैं।

उत्तर : (A)
संकेत :

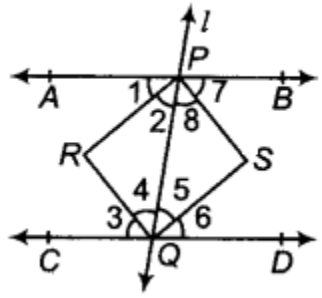


समान्तर चतुर्भुज ABCD में,
∠A + ∠D = 180° (क्रमागत अन्त:कोण)
$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D = \frac{180}{2}$
⇒ ∠1 + ∠2 = 90°

त्रिभुज ΔASD में,
∠ASD = 180° – (∠1 + ∠2) = 180° – 90° = 90°
∠PSR = ∠ASD (शीर्षाभिमुख कोण)
∠PSR = 90°
इसी प्रकार, ∠PQR = 90°
अब ∠C + ∠D = 180°
$\Rightarrow \frac{1}{2}$ ∠C + $\Rightarrow \frac{1}{2}$ ∠D = $\frac{180}{2}$
∠3 + ∠4 = 90°
त्रिभुज CRD में, ∠CRD = 180° – (∠3 + ∠4) = 180° – 90° = 90°
इसी प्रकार ∠APB = 90°
चतुर्भुज PQRS में, ∠P = ∠Q = ∠R = ∠S = 90°
अत: PQRS एक आयत होगा।

प्रश्न 8. यदि APB और CQD दो समांतर रेखाएँ हैं, तो कोणों APQ, BPQ, CQP और PQD के समद्विभाजक बनाते है-
(A) एक वर्ग
(B) एक समचतुर्भुज
(C) एक आयत
(D) कोई अन्य समांतर चतुर्भुज

उत्तर : (C)
संकेत :

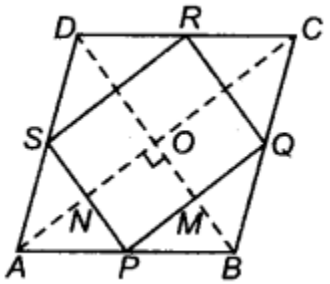


∠1 = ∠2, ∠3 = ∠4 तथा ∠7 = ∠8
∠APR + ∠CQP = 180° (क्रमागत अन्त:कोण)
$\Rightarrow \frac{1}{2}$ ∠APQ + $\frac{1}{2}$ ∠CQP = $\frac{180}{2}$
∠2 + ∠4 = 90°
त्रिभुज PQR में, ∠2 + ∠4 + ∠R= 180°
⇒ 90 + ∠R = 180°
⇒ ∠R = 180° – 90° = 90°
इसी प्रकार ∠S = 90°
∠1 + ∠2 + ∠8 + ∠7 = 180°(रैखिक युग्म कोण)
⇒ ∠2 + ∠2 + ∠8 + ∠8 = 180°

⇒ 2(∠2 + ∠8) = 180°
⇒ ∠2 + ∠8 = 180
∠P = 90°, इसी प्रकार ∠Q = 90°
∠P = ∠Q = ∠R = ∠S = 90°
अत: PRQS एक आयत होगा।

प्रश्न 9. एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर बनने वाली आकृति होती है-
(A) एक समचतुर्भुज
(B) एक आयत
(C) एक वर्ग
(D) कोई भी समांतर चतुर्भुज

उत्तर : (B)
संकेत :



त्रिभुज ABC में, बिन्दु P तथा Q भुजा AB तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।
PQ || AC
तथा PQ = $\frac{1}{2}$ AC .....(1)
इसी प्रकार, SR || AC तथा SR = $\frac{1}{2}$ AC ...(2)
समी (1) तथा (2) से
PQ || SR तथा PQ = SR
PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।
PQ || AC ⇒ PM || NO ...(3)
तथा त्रिभुज ABD में, बिन्दु P तथा S भुजा AB तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।
PS || BD ⇒ PN || MO ...(4)
समी (3) तथा (4) से,
PM || NO तथा PN ||OM
⇒ PMON एक समान्तर चतुर्भुज है।
चूंकि हम जानते हैं कि समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।
अतः ∠NOM = 90°
∠NPM = ∠NOM = 90° (सम्मुख कोण)
समान्तर चतुर्भुज PMON एक आयत होगा।

प्रश्न 10. D और E क्रमश: $\triangle$ABC की भुजा AB और AC के मध्य-बिन्दु हैं तथा O भुजा BC पर कोई बिन्दु है। O को A से मिलाया जाता है। यदि P और Q क्रमश: OB और OC के मध्य-बिन्दु हैं, तो DEQP है एक-

(A) वर्ग

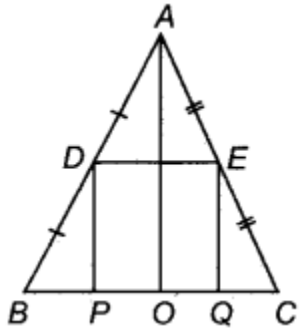
(B) आयत

(C) समचतुर्भुज

(D) समांतर चतुर्भुज

उत्तर : (D)

संकेत : त्रिभुज ABO में, D तथा P भुजा AB तथा OB के मध्य बिन्दु हैं।



PD || AO तथा PD = $\frac{1}{2}$ AO ....(1)

इसी प्रकार त्रिभुज AOC में, Q तथा E भुजा OC तथा AC के मध्य बिन्दु है।

QE|| AO तथा QE = $\frac{1}{2}$ AO ...(2)

समीकरण (1) तथा (2) से

DP = QE तथा DP || QE

चतुर्भुज PQED में, सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर समान्तर तथा बराबर है।

PQED समान्तर चतुर्भुज है।

प्रश्न 11. एक चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर प्राप्त आकृति केवल एक वर्ग है, यदि

(A) ABCD एक समचतुर्भुज है।

(B) ABCD के विक़र्ण बराबर हैं।

(C) ABCD के विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लंब है

(D) ABCD के विकर्ण परस्पर लम्ब हैं,

उत्तर : (C) ABCD के विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लंब है

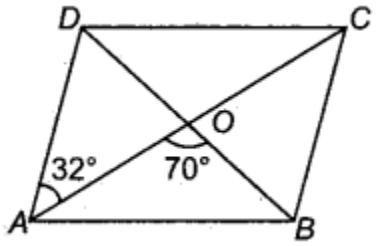
प्रश्न 12. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि ZDAC = 32° और ZAOB = 70° है तो ZDBC है-

(A) 24°

(B) 86°

(C) 38°
(D) 32°

उत्तर : (C)
संकेत :



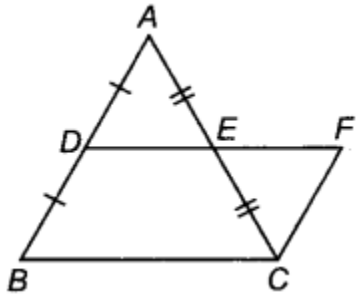
समान्तर चतुर्भुज ABCD में,
AD || BC तथा AC एक तिर्यक रेखा है।
∠BCA = ∠DAC (एकान्तर कोण)
∠BCA = 32°
त्रिभुज BOC में,
∠AOB = ∠BCO + ∠OBC (त्रिभुज का बहिष्कोण कोण)
⇒ 70° = 32° + ∠OBC [∵ ∠BCO = ∠BCA]
⇒ 70° – 32° = ∠OBC
⇒ ∠OBC = 38°
⇒ ∠DBC = 38° [∵ ∠DBC = ∠OBC]

प्रश्न 13. एक समांतर चतुर्भुज के लिए, निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य नहीं है?
(A) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
(B) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
(C) सम्मुख कोण विकर्णो से समद्विभाजित होते हैं।
(D) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

उत्तर : (C) सम्मुख कोण विकर्णो से समद्विभाजित होते हैं।

प्रश्न 14. D और E क्रमश: $\triangle$ABC की भुजा AB और AC के मध्य-बिन्दु हैं। DE का F तक बढ़ाया जाता है। यह सिद्ध करने के लिए कि CF रेखाखंड DA के बराबर और समांतर है, हमें एक अतिरिक्त सूचना की आवश्यकता है, जो है-
(A) ∠DAE = ∠EFC
(B) AE = EF
(C) DE = EF
(D) ∠ADE = ∠ECF

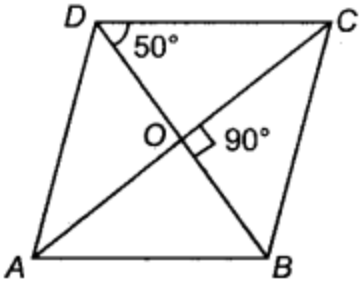
उत्तर : (C)
संकेत :



D और E त्रिभुज ABC के मध्य बिन्दु हैं।
AD = BD तथा AE = EC
त्रिभुज AED तथा त्रिभुजे CEF में,
AE = EC (दिया है) ...(1)
∠AED = ∠CEF (शीर्षाभिमुख कोण) ...(2)
DE = EF (दिया नहीं है) ...(3)
∆ADE = ∆CEF (SAS नियम से)
AD = CF (CPCT)
तथा: ∠DAE = ∠ECF (CPCT)
⇒ ∠DAC = ∠ACF
परन्तु यह एकान्तर कोण है।
अत: AD || CF
रेखाखण्ड CF को AD के बराबर तथा समान्तर सिद्ध करने के लिए ∆ADE = ∆CEF सिद्ध करने की आवश्यकता है।
दोनों त्रिभुजों को सर्वांगसम सिद्ध करने के लिए DE = EF, तीसरी सूचना की आवश्यकता है।
अतः विकल्प (C) सही है।

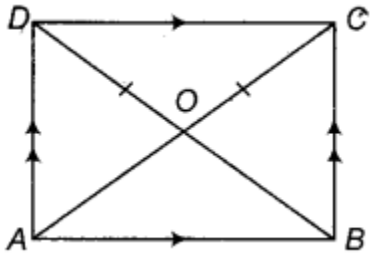
प्रश्न 15. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि ∠BOC = 90° और ∠BDC = 50° है, तो ∠OAB है-
(A) 90°
(B) 50°
(C) 40°
(D) 10°

उत्तर : (C)
संकेत :



समान्तर चतुर्भुज ABCD में ∠BDC = 50° तथा ∠BOC = 90°
AB || CD तथा BD एक तिर्यक रेखा है।
∠ABD = ∠BDC (एकान्तर कोण)
∠ABD = 50°
⇒ ∠ABO = 50°
ΔAOB में,
∠BOC = ∠OAB + ∠ABO = 90°
⇒ ∠OAB + 50° = 90°
⇒ ∠OAB = 40°

प्रश्न 16. ABCD एक समांतर चतुर्भुजे है। यदि इसके विकर्ण बराबर हैं, तो ∠ABC का मान ज्ञात कीजिए।



हल: चूंकि हम जानते हैं कि आयत और वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं। आयत और वर्ग का प्रत्येक कोण समकोण होता है।

अतः दोनों ही स्थितियों में ∠B = 90°
अतः ∠ABC का मान 90° होगा।

प्रश्न 17. एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बराबर और लंब होते हैं। क्या यह कथन सत्य है। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल: चूंकि हम जानते हैं कि वर्ग के विकर्ण परस्पर बराबर व लम्बे होते हैं। समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं, बराबर नहीं। अत: दिया गया कथन असत्य है।

प्रश्न 18. एक चतुर्भुज के तीन कोण बराबर हैं। क्या यह एक समान्तर चतुर्भुज है?

हल: यदि चतुर्भुज के तीन बराबर कोणों में प्रत्येक 90° की माप का है तो दिया चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होगा। अन्यथा चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज नहीं होगा।
अत: इसका समान्तर होना आवश्यक नहीं है।

प्रश्न 19. चतुर्भुज ABCD में ∠A + ∠D = 180° है। इस चतुर्भुज को कौन-सा विशेष नाम दिया जा सकता है?

हल: चतुर्भुज ABCD में, ∠A + ∠D = 180°
परन्तु यह क्रमागत अन्त: कोण है।
∵ AB || CD
इस प्रकार चतुर्भुज ABCD को सम्मुख भुजाओं को एक युग्म समान्तर है।
अत: चतुर्भुज ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज होगा।

प्रश्न 20. एक चतुर्भुज के सभी कोण बराबर हैं। इस चतुर्भुज को कौन-सा विशेष नाम दिया गया है?

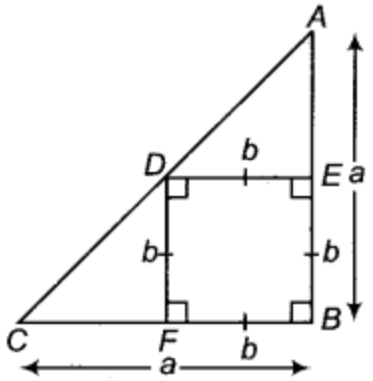
हल: माना कि चतुर्भुज के प्रत्येक बराबर कोण का मान x° है।
चतुर्भुज के सभी कोणों का योग 360° होता है।
x° + x° + x° + x° = 360°
⇒ 4x° = 360°
⇒ x° = $\frac{360}{4}$ = 90°
चतुर्भुज का प्रत्येक कोण 90° है।
अतः दिया गया चतुर्भुज आयत या वर्ग होगा।

प्रश्न 21. एक आयत के विकर्ण परस्पर बराबर एवम् लम्ब हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल: चूंकि, आयत के विकर्ण बराबर तो होते हैं लेकिन परस्पर लम्ब नहीं होते।
अत: दिया गया कथन असत्य है।

प्रश्न 22. कोई वर्ग एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के अंतर्गत इस प्रकार है कि वर्ग और त्रिभुज में एक कोण उभयनिष्ठ है। दर्शाइए कि वर्ग का शीर्ष जो उभयनिष्ठ कोण के शीर्ष के सम्मुख है कर्ण को समद्विभाजित करता है।

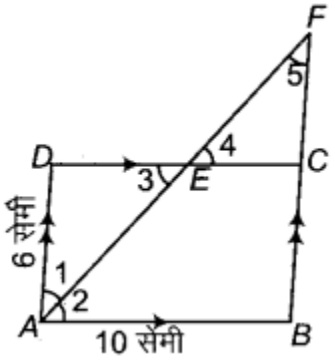
हल: दिया है। माना समद्विबाहु त्रिभुज ABC में वर्ग BEDF इस प्रकार है कि दोनों का उभयनिष्ठ कोण ∠B है।



सिद्ध करना है-
उभयनिष्ठ कोण के सम्मुख वर्ग का शीर्ष (D) कर्ण (AC) को समद्विभाजित करता है। अर्थात् AD = CD
उपपत्तिः
माना AB = BC = a तथा
BE = DE = DF = FB = b
AE = AB – BE = a – b
इसी प्रकार CF = BC – FB = a – b ...(2)
समकोण त्रिभुज AED तथा CFD में
AE = CF, (समी. (1) तथा (2) से)
∠AED = ∠CFD (प्रत्येक 90° है)
ED = FD
∆AED = ∆CFD (SAS नियम से)
AD = CD (CPCT)
अतः बिन्दु D, कर्ण AC को समद्विभाजित करता है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 23. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में, AB = 10 सेमी और AD = 6 सेमी है। ∠A का समद्विभाजक DC से E पर मिलता है तथा AE और BC बढ़ाने पर F पर मिलते हैं। CF की लंबाई ज्ञात कीजिए।

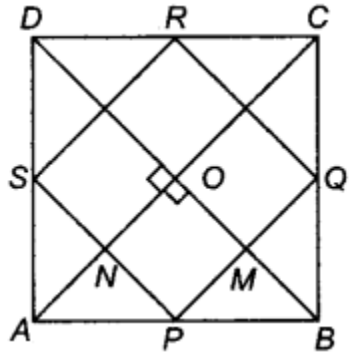
हल:



समान्तर चतुर्भुज ABCD में, AF, ∠A का समद्विभाजक है।
∠1 = ∠2 ...(1)
AB || CD तथा AF तिर्यक रेखा है।
∠3 = ∠2 (एकान्तर कोण) ...(2)
समीकरण (1) तथा (2) से,
∠1 = ∠3 ...(3)
AD = DE (ΔADE में समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ)
6 सेमी = DE
CE = CD – DE
⇒ CE = AB – DE [∵ AB = CD]
⇒ CE = 10 – 6 = 4 सेमी
⇒ ∠4 = ∠3 (शीर्षाभिमुख कोण) ...(4)
AD || BF तथा AF तिर्यक रेखा है।
∠1 = ∠5 (एकान्तर कोण) ...(5)
समीकरण (3), (4) तथा (5) से
∠4 = ∠5
⇒ EC = CF
⇒ 4 सेमी = CF
अत: CF = 4 सेमी

प्रश्न 24. P, Q, R और S एक चतुर्भुज ABCD की क्रमशः AB, BC,CD और DA भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं, जिसमें AC = BD और AC ⊥ BD है। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक वर्ग है।

हल: दिया है : एक चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB, BC, CD, DA के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q, R, S है तथा चतुर्भुज के विकर्ण बराबर तथा लम्ब हैं।
सिद्ध करना हैः PQRS एक वर्ग है।

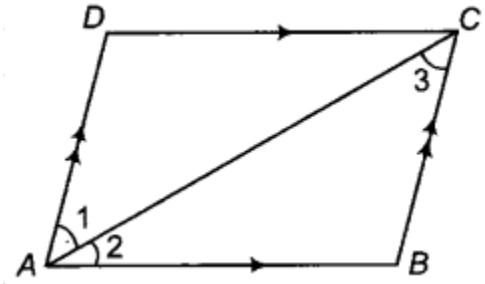


रचनाः AC और BD को मिलाया
उपपत्तिः ΔABC में, बिन्दु P तथा Q भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु है।
PQ || AC तथा
PQ = $\frac{1}{2}$ AC ...(1)
ΔADC में, बिन्दु S तथा R भुजाओं AD तथा CD के मध्य बिन्दु हैं।

SR || AC तथा SR = $\frac{1}{2}$ AC ...(2)
समीकरण (1) तथा (2) से
PQ || SR तथा PQ = SR
चतुर्भुज PQRS में सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर तथा समान्तर है।
PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।
∆ABD में, बिन्दु P तथा S, भुजाओं AB तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।
PS || BD ⇒ PN || OM ...(3)
तथा PS = $\frac{1}{2}$ BD ...(4)
PQ || AC ⇒ PM || ON ...(5)
समीकरण (3) तथा (5) से,
PN || OM तथा PM || ON
⇒ PMON एक समान्तर चतुर्भुज है।
∠NOM = 90°[∵ दिया है AC ⊥ BD]
∠NPM = ∠NOM = 90° (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)
AC = BD (दिया है)
⇒ $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ BD ...(6)
समीकरण (1), (4) तथा (6) से,
PQ = PS
अब समान्तर चतुर्भुज PQRS में, ∠P = 90° तथा PQ = PS है।
अत: PQRS एक वर्ग होगा।
इति सिद्धम्

प्रश्न 25. एक समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसके एक कोण को समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि यह समान्तर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है।

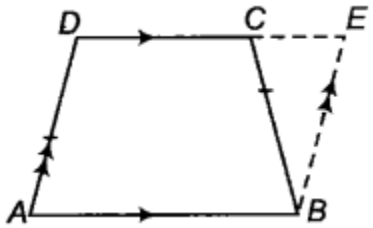
हल:



माना कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसका विकर्ण AC इसके ∠A को समद्विभाजित करता है।
अर्थात् ∠1 = ∠2 ....(1)
समान्तर चतुर्भुज ABCD में, AD|| BC तथा AC त्रिर्यक रेखा है।
अतः ∠1 = ∠3 (एकान्तर कोण) ...(2)
समीकरण (1) तथा (2) से
∠2 = ∠3

⇒ AB = BC (समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ)
अब संमान्तर चतुर्भुज ABCD में संलग्न भुजाएँ AB तथा BC बराबर है।
अत: ABCD एक समचतुर्भुज होगा।
इति सिद्धम्

प्रश्न 26. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AB || DC और AD = BC है। सिद्ध कीजिए कि ∠A = ∠B और ∠C = ∠D है।

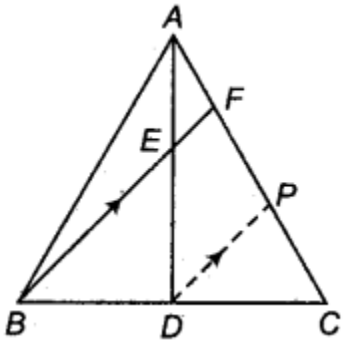


हल: रेखा DC को आगे बढ़ाया तथा बिन्दु B से AD के समान्तर रेखा BE खींची जो बढ़ी हुई रेखा DC को बिन्दु E पर मिलती है।
AB || DC ⇒ AB || DE
AD || BE (रचना से)
ABED एक समान्तर चतुर्भुज है।
AD = BC ...(1) (दिया है)
AD = BE .....(2) (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)
समीकरण (1) तथा (2) से,
BC = BE
⇒ ∠BEC = ∠BCE ...(3) (समान भुजा के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)
∠C + ∠BCE = 180° (रैखिक युग्म कोण)
⇒ ∠C + ∠BEC = 180° (समीकरण (3) से)
∠C + ∠E = 180° ...(4)
AD || BE तथा DE तिर्यक रेखा है।
⇒ ∠D + ∠E = 180° (क्रमागत अन्तः कोणों का योग = 180°) ...(5)
समीकरण (4) तथा (5) से
∠C + ∠E = ∠D + ∠E
⇒ ∠ C = ∠D ...(6)
अब AB || CD तथा AD एक तिर्यक रेखा है।
∠A + ∠D = 180° ...(7)
तथा AB || CD तथा BC एक तिर्यक रेखा है।
∠B + ∠C = 180° (क्रमागत अन्तः कोणों का योग 180° होता है।) ...(8)
समीकरण (7) तथा (8) से,
∠A + ∠D = ∠B + ∠C
⇒ ∠A + ∠C = ∠B + ∠C [समी. (6) का प्रयोग करने पर]
⇒ ∠A = ∠B

अतः ∠A = ∠B तथा ∠C = ∠D
इति सिद्धम्।

प्रश्न 27. E, एक ∆ABC की माध्यिका AD का मध्य बिन्दु है तथा BE को AC को F पर मिलने के लिए बढ़ाया गया है। दर्शाइए कि AF = $\frac{1}{3}$ AC है।

हल:

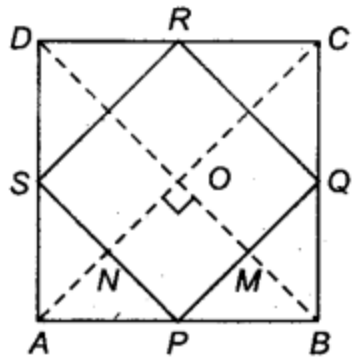


बिन्दु D से BF के समान्तर रेखा DP खींची जो रेखा AC को बिन्दु P पर मिलती है।
त्रिभुज ADP में, E, AD का मध्य बिन्दु है तथा EF || DP
F, AP का मध्य बिन्दु है।
⇒ AF = FP...(1)
∆BCF में,
D, BC का मध्य बिन्दु है तथा PD || BF है।
P, FC को मध्य बिन्दु होगा।
⇒ CP = PF ...(2)
समीकरण (1) तथा (2) से,
AF = PF = CP
AC = AF + PF + CP
⇒ AC = AF + AF + AF = 3AF
⇒ AF = $\frac{1}{3}$ AC
इति सिद्धम्।

प्रश्न 28. दर्शाइए कि किसी वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर बना चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।

हल: दिया है : एक वर्ग ABCD जिसकी भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q, R तथा S हैं।

PQ, QR, RS तथा PS को मिलाया।
सिद्ध करना है : PQRS एक वर्ग है।



रचना : विकर्ण AC तथा BD को मिलाया जो कि बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।
उपपत्ति : ∆ABC में,
बिन्दु P तथा Q, भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।
PQ || AC तथा PQ = $\frac{1}{2}$ AC ...(1)
∆ADC में,
बिन्दु R तथा S भुजाओं CD तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।
RS || AC तथा RS = $\frac{1}{2}$ AC ...(2)
समीकरण (1) तथा (2) से,
PQ || RS तथा PQ = RS
⇒ PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।
ABCD एक वर्ग है।
AB = BC = CD = AD
⇒ $\frac{1}{2}$ AD = $\frac{1}{2}$ BC
AS = BQ .....(3)
∆SAP तथा ∆QBP में,
AS = BQ [समी. (3) से]
AP = PB [P, AB का मध्य बिन्दु है।]
∠A = ∠B [प्रत्येक 90° है।]
∆SAP = ∆QBP [SAS नियम से]
⇒ SP = PQ [CPCT]
∆ABD में, बिन्दु P तथा S भुजाओं AB तथा AD के मध्य बिन्दु हैं।
PS || BD ⇒ PN || OM ...(4)
PQ || AC ⇒ PM || ON ... (5)
समीकरण (4) तथा (5) से,
PN || OM तथा PM || ON
⇒ OMPN एक समान्तर चतुर्भुज है।
वर्ग के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।
∠NOM = 90° [∵ AC ⊥ BD]
⇒ ∠NPM = ∠NOM (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)
⇒ ∠NPM = 90°
समान्तर चतुर्भुज PQRS में,

∠P = 90° तथा PS = PQ
अत: PQRS एक वर्ग होगा।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 29. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजकों द्वारा बना चतुर्भुज एक आयत होता है।

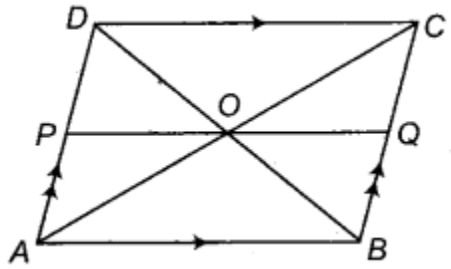
हल: पृष्ठ 174 पर प्रश्न 7 का संकेत देखें।

प्रश्न 30. P और Q क्रमश: एक समान्तर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख AD और BC भुजाओं पर स्थित बिन्दु इस प्रकार हैं कि PQ विकर्ण AC और BD के प्रतिच्छेद बिन्दु O से होकर जाता है। सिद्ध कीजिए कि PQ बिन्दु O पर समद्विभाजित हो जाता है।

हल: दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AD और BC पर क्रमशः P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि PQ विकर्ण AC और BD के प्रतिच्छेद बिन्दु O से होकर जाता है।

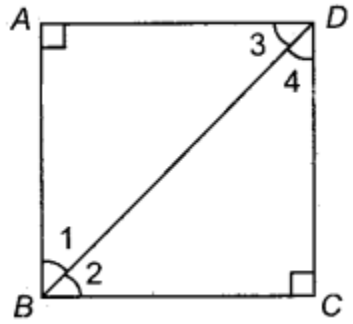
सिद्ध करना है :

PQ, बिन्दु O पर समद्विभाजित हो जाता है।



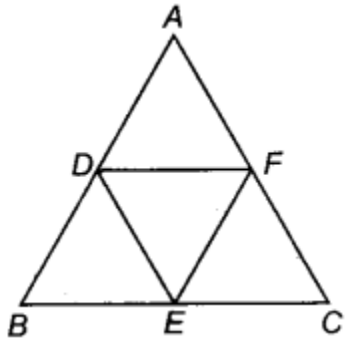
उपपत्ति : समान्तर चतुर्भुज ABCD में,
AD || BC तथा AC एक तिर्यक रेखा है।
∠CAD = ∠ACB (एकान्तर कोण)
⇒ ∠OAP = ∠OCQ ...(1)
ΔAOP तथा ΔCOQ में,
∠AOP = ∠COQ (शीर्षाभिमुख कोण)
OA = OC (समान्तर चतुर्भुज में विकर्ण समद्विभाजित होते हैं।)
∠OAP = ∠OCQ (समी. (1) से)
ΔAOP = ΔOCQ (ASA नियम से)
OP = OQ
अतः PQ बिन्दु O पर समद्विभाजित हो जाता है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 31. ABCD एक आयत है, जिसका विकर्ण BD कोण ∠B को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि ABCD एक वर्ग है।



हल: आयत ABCD का विकर्ण BD, ∠B को समद्विभाजित करता है।
$\angle 1 = \angle 2 = \frac{90}{2} = 45°$ ...(1)
BC || AD तथा BD एक तिर्यक रेखा है।
∠2 = ∠3 = 45° ...(2) (एकान्तर कोण)
AB || CD तथा BD एक तिर्यक रेखा है।
∠1 = ∠4 = 45° ...(3) (एकान्तर कोण)
समीकरण (1) तथा (2) से
∠1 = ∠3 = 45°
⇒ AB = AD [समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं]
BC = AD, CD = AD
⇒ AB = BC = CD = AD
अत: ABCD एक वर्ग है।
इति सिद्धम्।

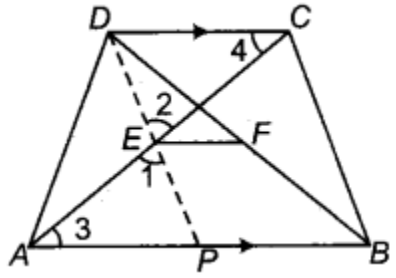
प्रश्न 32. D, E और F क्रमश: एक त्रिभुज ABC की AB, BC और CA भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए D, E और F बिन्दुओं को मिलाने से त्रिभुज ABC चार सर्वांगसम त्रिभुजों में बँट जाता है।



हल: त्रिभुज ABC में, D और E, भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।
DE || AC और $DE = \frac{1}{2} AC$

DE = FC [∵ F, AC का मधु बिन्दु है।]
DE || FC तथा DE = FC
DEFC एक समान्तर चतुर्भुज है और EF इसका विकर्ण है।
समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसको दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
∆DEF = ∆CEF ....(1)
इसी प्रकार BEFD एक समान्तर चतुर्भुज है तथा DE इसका विकर्ण है।
अत: ∆DEF = ∆DEB ...(2)
इसी प्रकार ADEF समान्तर चतुर्भुज है। DF इसका विकर्ण है।
अत: ∆DEF = ∆FAD ... (3)
समीकरण (1), (2) तथा (3) से।
∆DEF = ∆CEF = ∆DEB = ∆FAD
इति सिद्धम

प्रश्न 33. सिद्ध कीजिए कि किसी समलंब के विकर्णो के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसे समलंब की समांतर भुजाओं के समांतर होती है।

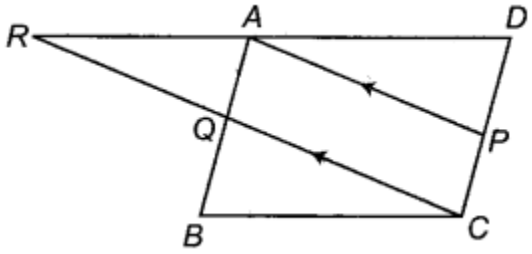


हल: दिया है : एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD, जिसमें AB || BC तथा बिन्दु E तथा F क्रमशः विकर्णो AC तथ BD के मध्य बिन्दु हैं।
सिद्ध करना है : EF || AB तथा EF || CD
रचना : DE को मिलाया तथा इसे आगे इस प्रकार बढ़ाया कि AB को बिन्दु P पर मिले।
उपपत्ति : समलम्ब चतुर्भुज ABCD में,
AB || CD तथा AC एक तिर्यक रेखा है।
∠3 = ∠4 (एकान्तर कोण) ...(1)
∆AEP तथा ∆CED में,
∠3 = ∠4 (समी. (1) से]
AE = CE [E, AC का मध्य बिन्दु है।]
∠1 = ∠2 [शीर्षाभिमुख कोणा।]
∆AEP = ∆CED [ASA नियम से]
DE = EP (CPCT)
∆BDP में, बिन्दु E तथा F भुजाओं DP तथा BD के मध्य बिन्दु हैं।
EF || PB
⇒ EF || AB ....(2)
CD|| AB ...(3)

समीकरण (2) तथा (3) से,
EF || CD, EF || AB तथा EF || CD
इति सिद्धम्।

प्रश्न 34. P एक समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा CD का मध्य-बिन्दु हैं। C से होकर PA के समांतर खींची गई रेखा AB को Q पर तथा बढ़ाई हुई DA को R पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि DA = AR और CQ = QR है।

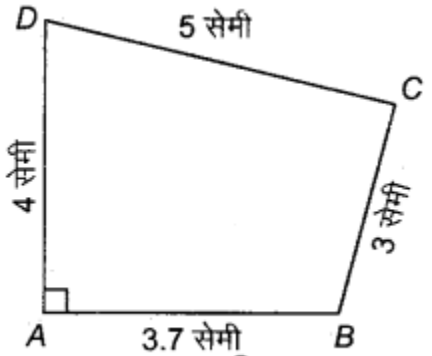
हल: त्रिभुज RCD में,
बिन्दु P, CD का मध्य बिन्दु है तथा AP || CR
A, RD का मध्य बिन्दु है।
⇒ AR = AD
⇒ DA = AR
समान्तर चतुर्भुज ABCD में,



AB || CD ⇒ AQ || CD
पुन: ∆RCD में,
A, भुजा RD का मध्य बिन्दु है तथा AQ || CD
Q, भुजा CR का मध्य बिन्दु होगा।
⇒ CQ = QR
अतः DA = AR तथा CQ = CR
इति सिद्धम्।

प्रश्न 35. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3.7 सेमी, BC = 3 सेमी, CD = 5 सेमी, AD = 4 सेमी और ∠A = 90° है।

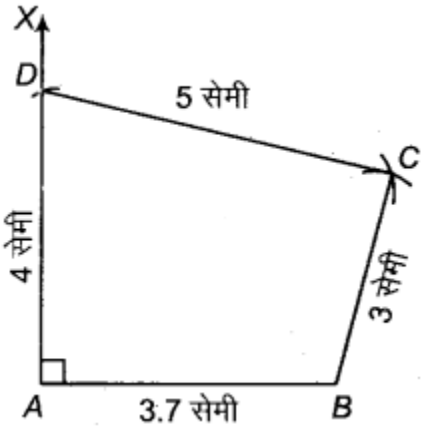
हल: प्रश्नानुसार दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं। हैं, जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

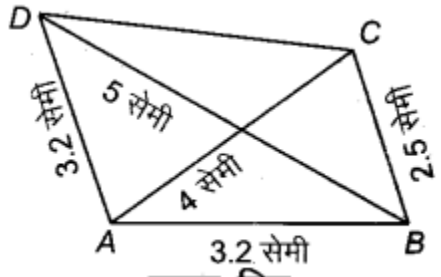
रचना के पदः

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 3.7 सेमी का एक रेखाखण्डं खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड AB के बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AX खींची। हैं|
3. बिन्दु A को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का चाप लगाते हैं जो रेखा AX को बिन्दु D पर काटता है।
4. बिन्दु B तथा D से क्रमशः 3 सेमी तथा 5 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु C पर काटते हैं।
5. B को C से तथा C को D से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 36. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = AD = 3.2 सेमी, BC = 2.5 सेमी, AC = 4 सेमी और BD = 5 सेमी है।

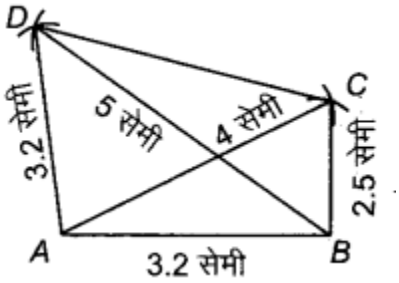
हल: प्रश्नानुसार दी मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं, जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 3.2 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. बिन्दु A तथा B से क्रमशः 4 सेमी तथा 2.5 सेमी के दो चाप है। लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु C पर A काटते हैं।
3. A को C तथा B को C से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज ABC प्राप्त होता है।
4. पुनः बिन्दु A तथा B से क्रमशः 3.2 सेमी तथा 5 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु D पर काटते हैं।
5. A को D, B को D तथा C को D से मिलाया। इस प्रकार चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 37. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 3.5 सेमी, QR = 3.5 सेमी, ∠P = 60°, ∠Q = 105° तथा ∠S = 75°

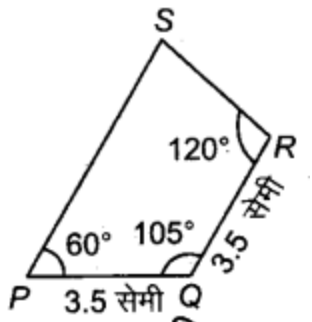
हल: प्रश्नानुसार दी गई मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं जो कि इस प्रकार है-

∠R = 360° – (∠P + ∠Q + ∠S)

= 360° – (60° + 105° + 75°)

= 360° – 240°

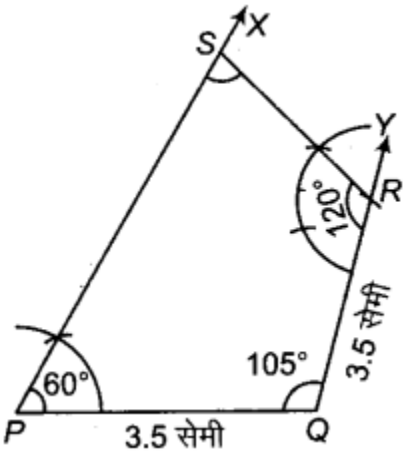
= 120°



कच्चा चित्र

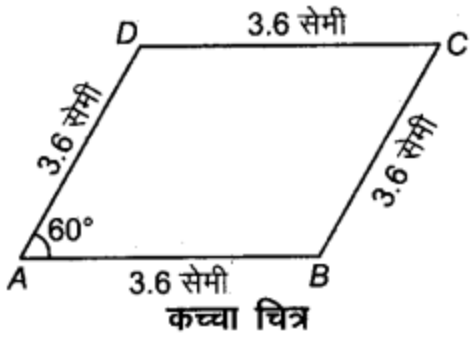
रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार PQ = 35 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखा PR के बिन्दु P तथा Q पर क्रमशः 60° तथा 105° के कोण बनाती हुई रेखाएँ PX तथा QY खींची।
3. रेखा QY में से QR = 3.5 सेमी काटा।
4. रेखाखण्ड QR के बिन्दु R से 120° का कोण बनाती हुई रेखा खींची जो कि रेखा PX को बिन्दु S पर मिलती है।
5. इस प्रकार अभीष्ट चर्तुभुज PQRS प्राप्त होता है।



प्रश्न 38. समचतुर्भुज की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 3.6 सेमी और एक कोण 60° है।

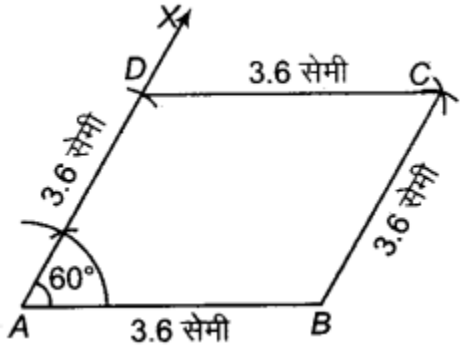
हल: समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ समान माप की होती है।
माना कि समचतुर्भुज ABCD है जिसकी भुजा की माप 3.6 सेमी तथा एक 60° है।
प्रश्न में दी मापों का कच्चा चित्र इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

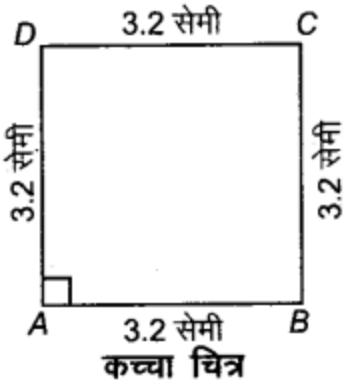
रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 3.6 सेमी को एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड AB के बिन्दु A पर 60° का कोण बनाती हुई रेखा AX खींची।
3. रेखा AX में से AD = 3.6 सेमी कांटा।
4. बिन्दु B तथा D से क्रमशः 3.6 सेमी 36 सेमी तथा 3.6 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे में को बिन्दु C पर काटते हैं।
5. B को C तथा D को C से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 39. वर्ग ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB + BC + CD + DA = 12.8 सेमी है।

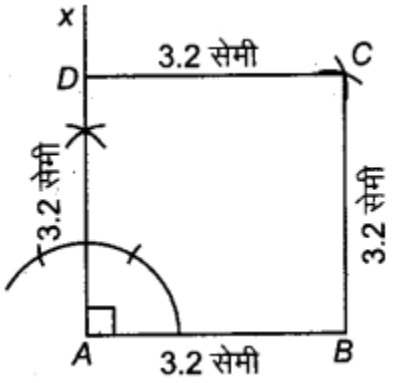
हल: वर्ग की प्रत्येक भुजा समान माप की होती है तथा प्रत्येक कोण का मान 90° होता है।
AB = BC = CD = DA
तथा ∠A = ∠B = ∠C = ∠D = 90°
AB + BC + CD + DA = 12.8 सेमी
⇒ AB + AB + AB + AB = 12.8
⇒ 4AB = 12.8
⇒ AB = $\frac{12.8}{4}$ = 3.2 सेमी
प्रश्न में दी मापों का कच्चा चित्र इस प्रकार है।



कच्चा चित्र

रचना के पदः

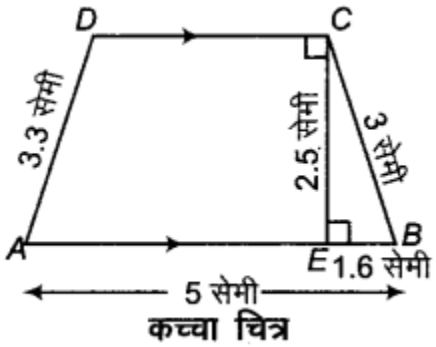
1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 3.2 सेमी की एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड AB के बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AX खींची।
3. रेखा AX में से AD = 3.2 सेमी काटा।
4. बिन्दु B तथा D से है। क्रमशः 3.2 सेमी तथा 3.2 सेमी के दो चाप लगाए जो कि एक दूसरे को बिन्दु C पर काटते हैं।
5. B को C तथा D को C से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 40. एक समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें AB || CD, AB = 5 सेमी, BC = 3 सेमी, AD = 3.3 सेमी और समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी 2.5 सेमी हो।

हल: समान्तर चतुर्भुज ABCD में,
AB || CD, CE = 2.5 सेमी, BC = 3 सेमी
समकोण ∆BCE में,
$BC^2 = BE^2 + CE^2$
$\Rightarrow 3^2 = BE^2 + 2.5^2$
$\Rightarrow 9 = BE^2 + 6.25$
$\Rightarrow 9 - 6.25 = BE^2$
$\Rightarrow BE = \sqrt{2.75}$
$\Rightarrow$ BE = 1.66 सेमी (लगभग)

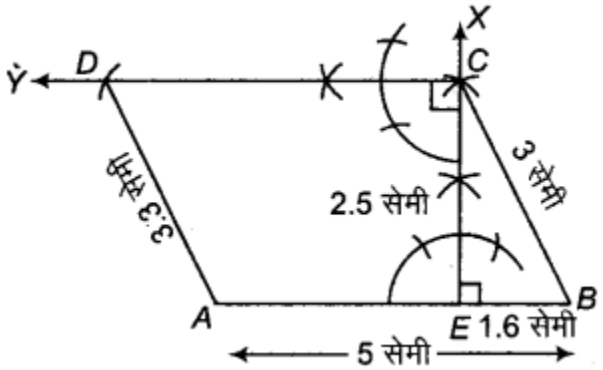
AB || CD
∠AEC + ∠ECD = 180°
⇒ 90° + ∠ECD = 180°
⇒ ∠ECD = 90°
प्रश्न में दी मापों का कच्चा चित्र है इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

रचना के पद

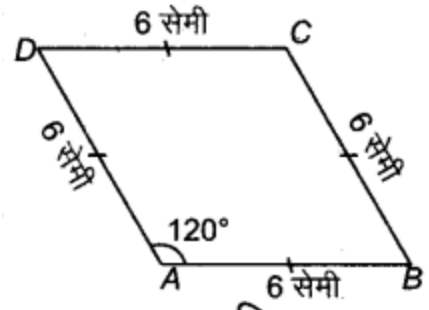
1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 5 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड AB में से BE = 1.6 सेमी काटा।
3. रेखा AB के बिन्दु E परे 90° का कोण बनाती हुई रेखा EX खींची।



4. रेखा EX में से CE = 2.5 सेमी काटा।
5. रेखा CE के बिन्दु C पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा CY खींची।
6. बिन्दु A से 3.3 सेमी का चाप लगाया जो रेखा CY को बिन्दु D पर काटता है।
7. A को D से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट समलम्ब ABCD प्राप्त होता है।

प्रश्न 41. एक समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 6 सेमी और ∠A = 120°

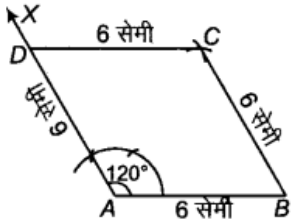
हल: समचतुर्भुज की सभी भुजाओं की माप समान होती है।
अत: AB = BC = CD = DA = 6 सेमी
प्रश्न में दी मापों के अनुसार कच्चा चित्रं बनाते हैं जो कि इस प्रकार है-



कच्चा चित्र

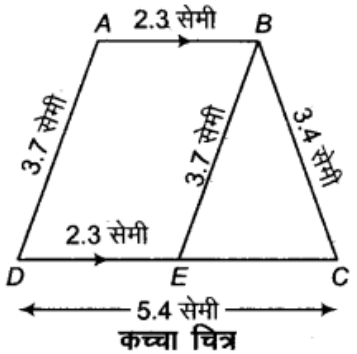
रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 6 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड AB के बिन्दु A से 120° का D कोण बनाती हुई रेखा AX खींची।
3. रेखा AX में से AD = 6 सेमी काटा।
4. बिन्दु B तथा D से क्रमशः 6 सेमी तथा 6 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु C पर काटते हैं।
5. B को C तथा C को D से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट समचतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 42. एक समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें AB = 2.3 सेमी, BC = 3.4 सेमी, CD = 5.4 सेमी, DA = 3.7 सेमी और AB || CD

हल: प्रश्नानुसार, दी मापों को कच्चा चित्र बनाते हैं जो कि इस प्रकार है-

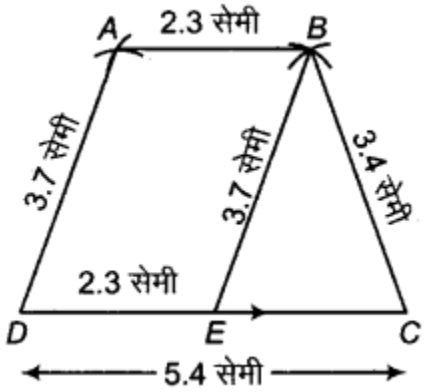


कच्चा चित्र

रचना के पद

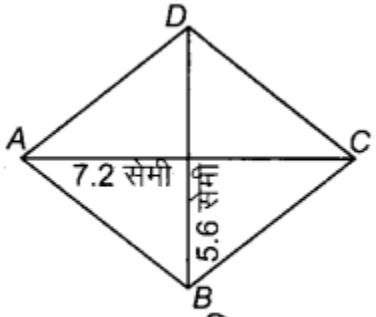
1. कच्चे चित्र के अनुसार, CD = 5.4 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड CD में से DE = AB = 2.3 सेमी पर E बिन्दु अंकित किया।

3. बिन्दु E और C से क्रमशः 3.7 सेमी (रेखा AD के बराबर) तथा 3.4 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु B पर काटते हैं।
4. E को B तथा C को B से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज CEB प्राप्त होता है।
5. बिन्दु B तथा D से क्रमश: 2.3 सेमी तथा 3.7 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे को बिन्दु A पर कांटते हैं।
6. D को A तथा B को D से मिलाया। इस प्रकार समलम्ब चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 43. समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसके विकर्ण 5.6 सेमी और 7.2 सेमीं हों।

हल: प्रश्नानुसार, दी मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं जो कि इस प्रकार हैं-

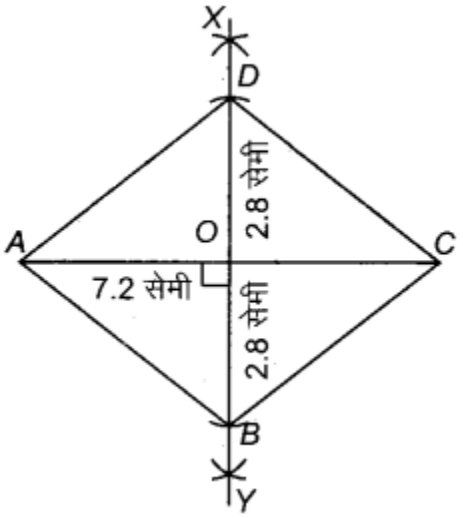


कच्चा चित्र

रचना के पद

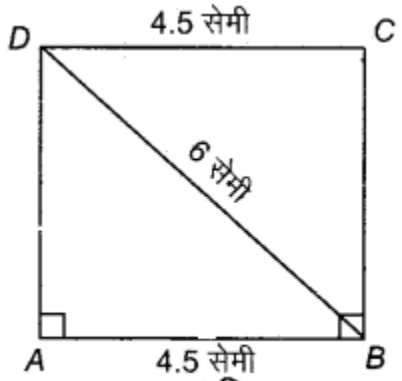
1. कच्चे चित्र के अनुसार AC = 7.2 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड AC को लम्ब समद्विभाजक XY खींचा जो रेखाखण्ड AC को बिन्दु O पर मिलता है।
3. बिन्दु O से विकर्ण BD का आधा अर्थात $\frac{5.6}{2}$ = 2.8 सेमी के दो चाप रेखाखण्ड AC के दोनों तरफ लगाए जो लम्ब अर्धक को D तथा B पर काटता है।

4. AB, BC, CD तथा AD को मिलाया। इस प्रकार समचतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



प्रश्न 44. आयत ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4.5 सेमी और BD = 6 सेमी हो।

हल: प्रश्नानसार, दी मापों का कच्चा चित्र बनाते हैं जो कि इस प्रकार है-

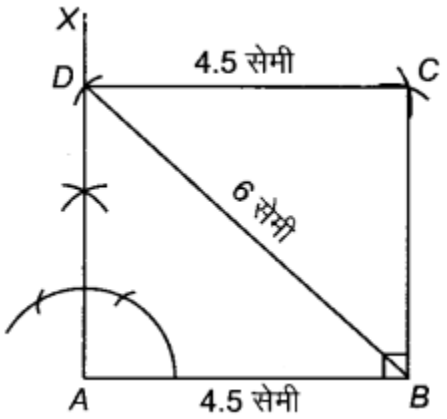


कच्चा चित्र.

रचना के पद

1. कच्चे चित्र के अनुसार AB = 4.5 सेमी। सेमी का एक रेखाखण्ड खींचते हैं।
2. रेखाखण्ड AB के बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AX खींची।
3. रेखाखण्ड AB के बिन्दु B से 6 सेमी का चाप लगाया जो रेखा AX को बिन्दु D पर काटता है।
4. B को D से मिलाया। इस प्रकार त्रिभुज ABD प्राप्त होता है।
5. बिन्दु B तथा D से क्रमशः AD के बराबर तथा त्रिज्या 4.5 सेमी के दो चाप लगाए जो एक दूसरे की बिन्दु C पर काटते हैं।

6. B को C तथा C को D से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट आयत ABCD प्राप्त होता है।



Additional Questions

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न 1. वर्ग की भुजा और विकर्ण का अनुपात है :
(A) 2 : 1
(B) 1 : 2
(C) 1 : 3
(D) 3 : 1

प्रश्न 2. यदि समान्तर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाएँ समान हैं, तो वह है :
(A) एक आयत
(B) एक वर्ग
(C) एक पतंग
(D) एक समचतुर्भुज

प्रश्न 3. यदि किसी चतुर्भुज के तीन कोण बराबर हैं, तो वह है, एक :
(A) समान्तर चतुर्भुज
(B) समचतुर्भुज

(C) पतंग
(D) कोई नहीं

प्रश्न 4. यदि चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब है तो वह है,
(A) समान्तर चतुर्भुज
(B) वर्ग
(C) आयत
(D) पतंग

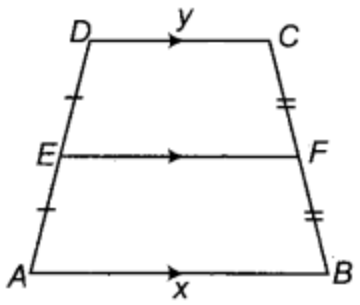
प्रश्न 5. यदि वर्ग के विकर्ण बिन्दु O पर समद्विभाजित होते हैं, तब त्रिभुज AOB है:
(A) एक समद्विबाहु परन्तु समकोण त्रिभुज नहीं
(B) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज
(C) एक समबाहु त्रिभुज
(D) एक समकोण त्रिभुज परन्तु समद्विबाहु नहीं।

प्रश्न 6. एक चतुर्भुज एक आयत है, परन्तु एक वर्ग नहीं, जब :
(A) इसके विकर्ण समद्विभाजित नहीं होते हैं।
(B) इसके विकर्ण बराबर नहीं हैं।
(C) इसके विकर्ण परस्पर लम्ब नहीं हैं।
(D) सभी कोण बराबर नहीं हैं।

प्रश्न 7. समान्तर चतुर्भुज के किन्हीं दो सलंग्न कोणों के समद्विभाजक प्रतिच्छेद करते हैं:
(A) 90° पर
(B) 80° पर
(C) 45° पर
(D) 100° पर

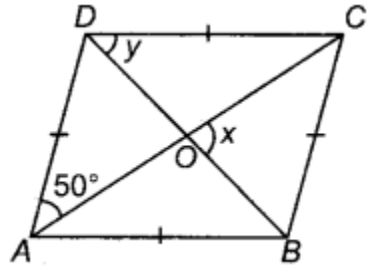
प्रश्न 8. यदि समचतुर्भुज का एक विकर्ण उसकी एक भुजा के बराबर है, तब संलग्न कोणों का मान है:
(A) 100°, 80°
(B) 60°, 120°
(C) 90°, 90°
(D) 70°, 110°

प्रश्न 9. समलम्ब ABCD की भुजाओं AD और BC के मध्यबिन्दु क्रमश: E और F हैं। यदि AB = x तथा CD = y है, तब, EF बराबर है:



(A) $\frac{1}{2}$ (x + y)
(B) $\frac{1}{2}$ (x – y)
(C) $\frac{2xy}{x+y}$
(D) $\frac{x+y}{2xy}$

प्रश्न 10. संलग्न चित्र में, ABCD एक स्मचतुर्भुज है। (x – y) का मान है:



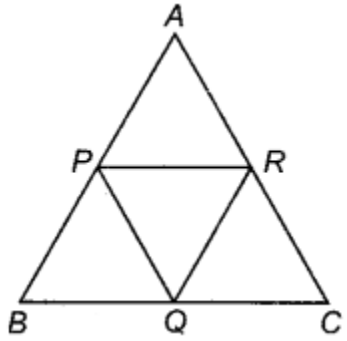
(A) 40°
(B) 60°
(C) 10°
(D) 50°

उत्तरमाला

1. (B)
2. (D)
3. (D)
4. (D)
5. (B)
6. (C)
7. (A)
8. (B)
9. (A)
10. (D)

अतिलघूय/लघूतटीय प्रश्न

प्रश्न 1. चित्र में, त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC तथा AC के मध्य बिन्दु क्रमश: P, Q तथा R हैं। यदि PQ = 2.5 सेमी, QR = 3.0 सेमी तथा PR = 3.5 सेमी हैं, तो ∆ABC का परिमाप ज्ञात करो।



हल: बिन्दु P तथा ७, भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।

$PQ = \frac{1}{2} AC$

$\Rightarrow 2.5 = \frac{1}{2} AC$

$\Rightarrow AC = 5$ सेमी

बिन्दु Q तथा R भुजाओं BC तथा AC के मध्य बिन्दु हैं,

$QR = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow 3.0 = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow AB = 6$ सेमी

बिन्दु P तथा R भुजाओं AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं।

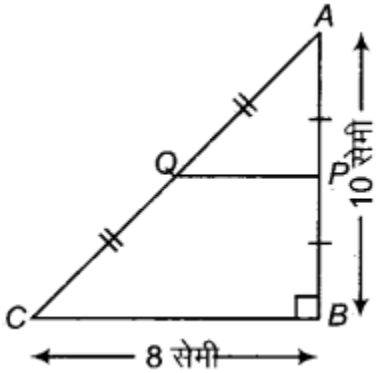
$PR = \frac{1}{2} BC$

$\Rightarrow 3.5 = \frac{1}{2} BC$

$\Rightarrow BC = 7$ सेमी

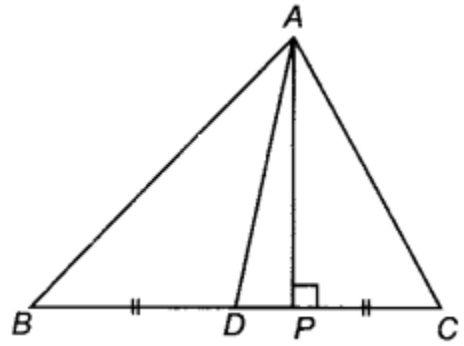
∆ABC का परिमाप = AB + BC + AC = 6 + 7 + 5 = 18 सेमी

प्रश्न 2. चित्र में, ABC समकोण त्रिभुज है। बिन्दु P तथा Q त्रिभुज की भुजाओं AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं। यदि AB = 10 सेमी। तथा BC = 8 सेमी, तो ∆APQ का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



हल: बिन्दु P तथा Q भुजाओं AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं।
PQ = $\frac{1}{2}$ BC
⇒ PQ = $\frac{1}{2}$ × 8 = 4 सेमी
PQ || BC
अब AP = $\frac{1}{2}$ AB (∵ P, AB का मध्य बिन्दु है)
⇒ AP = $\frac{1}{2}$ × 10 = 5 सेमी
समकोण त्रिभुज का ∠B समकोण है।
∠ABC = 90°
PQ || BC तथा AB एक त्रिर्यक रेखा है।
∠APQ = ∠ABC (संगत कोण)
⇒ ∠APQ = 90°
अतः त्रिभुज APQ कोण P पर समकोण है। समकोण ∆APQ को क्षेत्रफल
= $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई
= $\frac{1}{2}$ × 4 × 5
= 10 वर्ग सेमी
अत: त्रिभुज APQ का क्षेत्रफल = 10 वर्ग सेमी

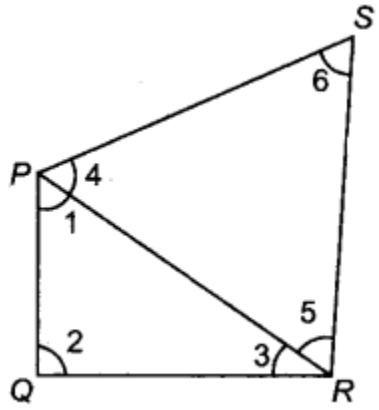
प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की माध्यिका उसको समन क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।



हल: दिया है : त्रिभुज ABC में, AD भुजा BC पर माध्यिका है।
सिद्ध करना है : ∆ABD का क्षेत्रफल = ∆ADC का क्षेत्रफल
रचना : भुजा BC पर लम्ब AP खींचा।
उपपत्ति : त्रिभुज ABC में,
BD = CD (∵ AD माध्यिका है)
∆ABD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × BD × AP ...(1)
तथा ∆ACD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × CD × AP
∆ACD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × BD × AP ...(2) [∵ CD = BD]
समीकरण (1) तथा (2) से,

∆ABD का क्षेत्रफल = ∆ACD का क्षेत्रफल
इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योगफल चार समकोण के बराबर होता है।



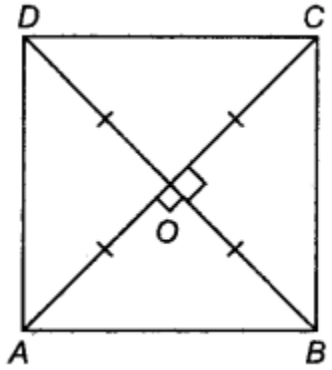
हल: चित्र में, PQRS एक चतुर्भुज है। इसके चारे कोण ∠P, ∠Q, ∠R एवं ∠S हैं।
PR रेखा चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँट रही है।
∆PQR में,
∠1 + ∠2 + ∠3 = 180° ...(i)
एवं ∆PSR में,
∠4 + ∠5 + ∠6 = 180° ...(ii)
समीकरण (i) तथा (ii) से, को जोड़ने पर।
∠1 + ∠2 + ∠3 + ∠4 + ∠5 + ∠6 = 360°
या (∠1 + ∠4) + ∠2 + (∠3 + ∠5) + ∠6 = 360°
या ∠P + ∠Q + ∠R + ∠S = 4 × 90°
∠P + ∠Q + ∠R + ∠S = 4 समकोण
अतः चतुर्भुज के चारों कोणों का योगफल चार समकोण के बराबर होता है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. एक चतुर्भुज के कोण 3 : 5 : 9 : 13 के अनुपात में हैं। इसे चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल: माना चतुर्भुज के चारों कोण 3x, 5x, 9x और 13x है।
अत: 3x + 5x + 9x + 13x = 360°
⇒ 30x = 360°
⇒ x = 12°
पहला कोण = 3 × 12° = 36°
दूसरा कोण = 5 × 12° = 60°
तीसरा कोण = 9 × 12° = 108°

चौथा कोण = 13 × 12° = 156°
अतः चार कोण 36°, 60°, 108° और 156° हैं।

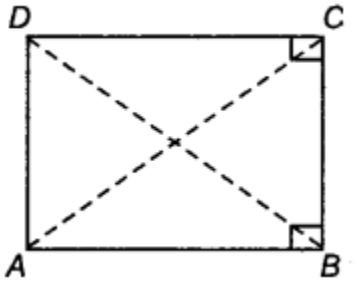
प्रश्न 6. किसी समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर और लम्बवत् हों तो वह एक वर्ग होता है।



हल: दिया है: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD हैं जो O बिन्दु पर मिलते हैं।
तथा (i) AC = BD
और (ii) ∠AOB = 90°
सिद्ध करना है: ABCD एक वर्ग है।
उपपत्तिः AC = BD (दिया हुआ है)
$\Rightarrow \frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ BD
⇒ AO = BO = CO = DO (समान्तर चतुर्भुज च० के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।)
ΔAOB में,
AO = BO
⇒ ∠BAO = ∠ABO
∠AOB + ∠BAO + ∠ABO = 180°
⇒ 90° + ∠BAO + ∠BAO = 180°
⇒ 2∠BAO = 90°
⇒ ∠BAO = 45°
⇒ ∠BAO = ∠ABO = 45° .....(1)
इसी प्रकार ΔBOC में,
∠CBO = ∠BCO = 45° ...(2)
⇒ ∠ABO + ∠CBO = 45° + 45°
⇒ ∠B = 90° .....(3)
⇒ ∠BAO + ∠CBO = 45° + 45° = 90° = ∠B ...(4)
समी (3) तथा (4) को जोड़ने पर
∠B + ∠B = 90° + 90°
⇒ 2∠B = 180°
⇒ ∠B = 90° ...(5)
ΔABO और ΔADO में,

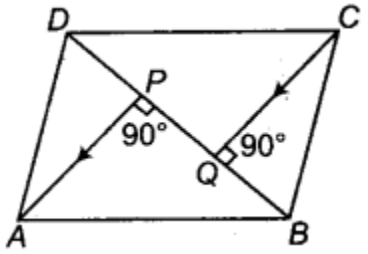
BO = OD
∠AOB = ∠AOD = 90° (दिया है)
तथा AO = OA (उभयनिष्ठ भुजा)
ΔABO = ΔADO (ASA नियम से)
AB = AD ...(6)
(5) और (6) से, ABCD एक वर्ग है।

प्रश्न 7. यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइये कि वह एक आयत है।



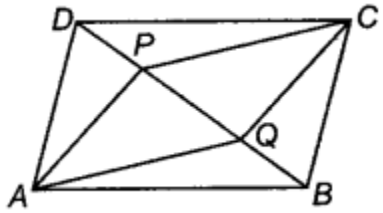
हलः दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD में, AC = BD
सिद्ध करना है : ABCD एक आयत है।
उपपत्ति: ΔABC और ΔDCB में ज्ञात है।
AB = DC (सम्मुख भुजाएँ)
BC = BC (उभयनिष्ठ भुजा)
AC = DB (दिया है)
सर्वांगसमता के SSS गुण द्वारा,
ΔABC = ΔDCB
⇒ ∠ABC = ∠DCB ...(i)
(सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं)
लेकिन AB || DC और BC उनको काटती है।
∠ABC + ∠DCB = 180° ...(ii)
(क्रमागत अन्त: कोणों का योग 180° होता है)
⇒ 2∠ABC = 180° [∵ ∠DCB = ∠ABC]
⇒ ∠ABC = 90°
अतः ∠ABC = ∠DCB = 90°
ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसका एक कोण 90° है।
अत: ABCD एक आयत है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 8. समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर A और C से डाले गए लम्ब क्रमश: AP तथा CQ हैं। सिद्ध कीजिए कि AP = CQ



हल: सिद्ध करना है : AP = CQ
उपपत्तिः समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण, समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल को दो समान भागों में बाँटता है।
ΔABD का क्षेत्रफल = ΔBDC का क्षेत्रफल
हम जानते हैं कि त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई
⇒ $\frac{1}{2}$ × BD × AP = $\frac{1}{2}$ × BD × CQ
⇒ AP = CQ
इति सिद्धम्।

प्रश्न 9. समान्तर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DP = BQ सिद्ध कजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।



हल: दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो। बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DP = BQ.
सिद्ध करना है : APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।
उपपत्ति : ΔAPD और ΔCQB में,
AD = BC (सम्मुख भुजाएँ)
∠ADP = ∠CBQ (एकान्तर कोण)
DP = BQ (दिया है)
अतः भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,
ΔAPD = ΔCQB
अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।
अतः AP = CQ ...(1)
इसी प्रकार ΔCPD और ΔAQB में, हम सिद्ध कर सकते हैं कि CP = AQ ...(2)
समीकरण (1) और (2) से,

APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।
इति सिद्धम्।