8 സംഭാവ്യത (Probability)

ആമുഖം

അനിശ്ചിതത്വം നമ്മുടെ ജീവിതത്തിന്റെ ഭാഗമാണ്. 'നാളെ മഴയുണ്ടാകുമോ?', നാളെ ഒരു പ്രത്യേക വ്യക്തിയെ കണ്ടു മുട്ടുവാൻ സാധ്യതയുണ്ടോ? ഒരു ജോലി കിട്ടുവാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ഒരു പ്രത്യേക പഠനപദ്ധതിയിൽ പ്രവേശനം ലഭിക്കുന്നതിന് ഉള്ള സാധ്യതകൾ എന്താണ്? തുടങ്ങിയ ചോദ്യങ്ങൾ നമുക്ക് പരിചിതമാണ്. വ്യക്തികൾ ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശതമാനകണക്കിലോ അനുപാതത്തിലോ അല്ലെങ്കിൽ പകുതിപ്പകുതി പോലുള്ള പ്രസ്താവനകളിലോ ഉത്തരം നൽകുന്നു. സാധ്യത എന്നതിന് വ്യക്തമായ വ്യാഖ്യാനം നൽകേണ്ടത് ശാസ്ത്രപരമായ കാര്യങ്ങൾക്ക് അത്യാവശ്യമാണ്. ഇത് വളരെ സങ്കീർണമായതും നൂറ്റാണ്ടുകളോളം ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരെ വൈഷമ്യപ്പെടുത്തിയതുമാണ്.

ജയിംസ് ബർണോളി (1654 - 1705)

അബ്രഹാം ഡിമോറി (1667 - 1754)

16 - ാം ശതകത്തിൽ ഇറ്റലിയിലെ ഭിഷഗ്വരനും ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ ജെ. കാർട്ടൻ അദ്ദേഹത്തിന്റെ 'ദ ബുക്ക് ഓൺ ഗെയിംസ് ഓഫ് ചാൻസ്' എന്ന പുസ്തകത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നതോടെയാണ് സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം ആവിർഭവിച്ചത്. അന്നു മുതൽ സംഭാവ്യത പഠനം പ്രശസ്തരായ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരെ ആകർഷിച്ചിരുന്നു. ജയിംസ് ബർണോളി (1654 - 1705), ഡി മോറി(1667 - 1754), പിയറിസിമൺ ലാപ്ലേസ് (1749 - 1827) തുടങ്ങിയവർ ഇതിലേക്ക് മികച്ച സംഭാവന നൽകിയ ചിലരാണ്. ലാപ്ലേസ് രചിച്ച 'Theorie Analytique des probabilities' (1812) എന്ന പുസ്തകമാണ് സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന് ഒരു വ്യക്തി നൽകിയ ഏറ്റവും മികച്ച സംഭാവനയായി കരുതുന്നത്. പിന്നീട് എ.എൻ. കോൾമോഗോറോവ് (1903 - 1987) എന്ന റഷ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ 1933 ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച 'ഫൗണ്ടേഷൻ ടു പ്രോബബിലിറ്റി' എന്ന പുസ്തകത്തിൽ സംഭാവ്യതയെ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നതിനായി ചില സ്വയം പ്രമാണതത്ത്വങ്ങൾ നിർദ്ദേശിക്കുകയുണ്ടായി. ഇതു പ്രകാരം സംഭാവ്യതയെ ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലങ്ങളുടെ ഏകദങ്ങളായിട്ടാണ് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്. അടുത്ത കാലത്തായി ജീവശാസ്ത്രം, ആരോഗ്യം, സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രം, ജനിതക ശാസ്ത്രം, ഭൗതിക ശാസ്ത്രം, സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം, ഇൻഷുറൻസ് തുടങ്ങിയ എല്ലാ മേഖലകളിലും സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നു.

സംഭാവ്യത (Probability)

സാധ്യത എന്ന പദം അനിശ്ചിതത്ത്വത്തിന്റെ സൂചനയാണ്. ചിലപ്പോൾ അടുത്ത നിമിഷം എന്ത് സംഭവിക്കുമെന്ന് പറയാനാവില്ല. എങ്കിലും ചില കാര്യങ്ങൾ സംഭവിക്കാൻ മറ്റുള്ള വയെക്കാൾ കൂടുതൽ സാധ്യതയുണ്ട്. അവിടെയാണ് സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം വരുന്നത്. ഫലങ്ങൾ (outcomes) വിലയിരുത്തുന്നതിലൂടെ ഭാവി പ്രവചിക്കുന്നതിനും തീരുമാനം എടുക്കുന്നതിനും സംഭാവ്യത നമ്മെ സഹായിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. അനിശ്ചിതത്ത്വവും അപകട സാധ്യതയും സംഖ്യാരൂപത്തിൽ കണക്കാക്കുന്നതിന് സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന് കഴിയുന്നു. അങ്ങനെ ഒരു കാര്യം നടക്കുവാനുള്ള സാധ്യത അളക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗമാണ് സംഭാവ്യത ശാസ്ത്രം. ഒരു കാര്യം സംഭവിക്കുവാനോ, സംഭവിക്കാതിരിക്കുവാനോ എത്രമാത്രം സാധ്യതയുണ്ട് എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുവാൻ നമുക്ക് ഇത് ഉപയോഗിക്കാം. അനുമാന സാംഖ്യകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനമാണ് സംഭാവ്യത. സംഭാവ്യതയ്ക്ക് വ്യത്യസ്തമായ സമീപനങ്ങൾ ഉണ്ട്. സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു. 0 മുതൽ 1 വരെയുള്ള തോതിലാണ് സംഭാവ്യത അളക്കുന്നത്. അസാധ്യമായ സംഭവങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത പൂജ്യവും ഉറപ്പായ സംഭവങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത ഒന്നും ആണ്. മിക്കവാറും പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യതയുമായാണ് നാം വ്യവഹരിക്കുന്നത്.

ഒരു നാണയം കറക്കുന്ന പരീക്ഷണം നിരീക്ഷിക്കാം. ഒരു നാണയം കറക്കിയാൽ സാധ്യമായ രണ്ട് ഫലങ്ങളുണ്ട്.

- തല (H)
- വാല് (T)

തല കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{2}$ ഉം വാൽ കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{2}$ ഉം ആണെന്ന് നമുക്ക് കാണാം.

മറ്റൊരു പരീക്ഷണം നോക്കൂ:

ഒരു പകിട (die) എറിയുമ്പോൾ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നിങ്ങനെ 6 സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് സംഭവിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{6}$ ആണ്.

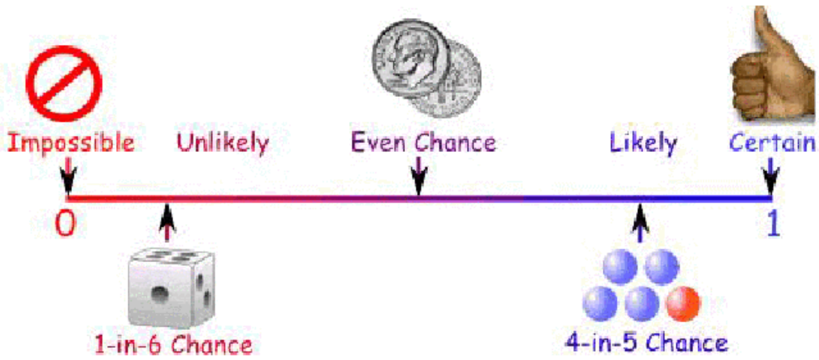
ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി നോക്കൂ:

ഒരു സഞ്ചിയിലുള്ള 5 പന്തുകളിൽ 4 എണ്ണം നീലയും ഒരെണ്ണം ചുവപ്പും ആണ്. അതിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് തിരഞ്ഞെടുത്താൽ അത് നീലയാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്തായിരിക്കും.

നീല പന്ത് ലഭിക്കാനുള്ള രീതികൾ = 4

ആകെ പന്തുകൾ = 5

അതുകൊണ്ട് സംഭാവ്യത = $\frac{4}{5}$ = 0.8



അതായത് സംഭാവ്യതയുടെ വില പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന പ്രത്യേകതകൾ

- സംഭാവ്യതയുടെ വില എപ്പോഴും പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലായിരിക്കും.
- അസാധ്യമായ കാര്യത്തിന്റെ സംഭാവ്യത പൂജ്യമാണ്.
- ഉറപ്പായ കാര്യത്തിന്റെ സംഭാവ്യത ഒന്നാണ്
- സംഭാവ്യത ഒരിക്കലും ന്യൂനസംഖ്യ ആകില്ല.

ശരിയായ വിശകലനത്തിന്റെയും യുക്തിയുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ സംഭാവ്യത മനസ്സിലാക്കുന്നതിന്, സാധാരണ ഉപയോഗത്തിലുള്ളതും എന്നാൽ യാദൃശ്ചിക പ്രതിഭാസങ്ങളെകുറിച്ച് പറയുമ്പോൾ പ്രത്യേക അർഥം വരുന്നതുമായ പദങ്ങളെക്കുറിച്ച് വ്യക്തത ഉണ്ടാകേണ്ടതുണ്ട്.

അനിയതഫല പരീക്ഷണം (Random Experiment)

ഒരു പരീക്ഷണം ഒരു കൂട്ടം ഉദ്യമങ്ങൾ ചേർന്നതാണ്. ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് 10 എണ്ണം എടുക്കുക, ഒരു നാണയം രണ്ട് തവണ കറക്കുക തുടങ്ങിയവ അനിയത ഫല പരീക്ഷണങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. ഒരു പരീക്ഷണം അനിയതഫല പരീക്ഷണം ആകുന്നതിന് ചുവടെ പറയുന്ന വ്യവസ്ഥകൾ പാലിക്കണം.

1. ഇതിന് ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം.
2. ഫലം മുൻകൂട്ടി പ്രവചിക്കുവാൻ സാധിക്കുകയില്ല

3. സമാന സാഹചര്യത്തിൽ ഈ പരീക്ഷണം എത്ര തവണ വേണമെങ്കിലും ആവർത്തിക്കുവാൻ സാധിക്കണം.

മറ്റ് നിർവചനങ്ങൾ നൽകിയിട്ടില്ലെങ്കിൽ ഈ അധ്യായത്തിൽ, പരീക്ഷണമെന്നത് അനിയതഫല പരീക്ഷണമെന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദ്യമം (Trial)

ഒരു ഉദ്യമം എന്നത് ഒന്നിലധികം സാധ്യമായ ഫലങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒന്ന് മാത്രം സംഭവിക്കുന്ന ഒരു പ്രവർത്തനമാണ്. ഒരു നാണയം കറക്കുക, ഒരു പകിട ഉരുട്ടുക, ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് ഒരു ചീട്ട് തിരഞ്ഞെടുക്കുക തുടങ്ങിയവ ഉദ്യമങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

ഫലം (Outcome)

ഒരു അനിയതഫല പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഒരു ഉദ്യമത്തിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന സാധ്യമായ ഒരു ഫലത്തെ 'ഫലം' എന്ന് പറയുന്നു.

സാമ്പിൾ മേഖല (Sample Space)

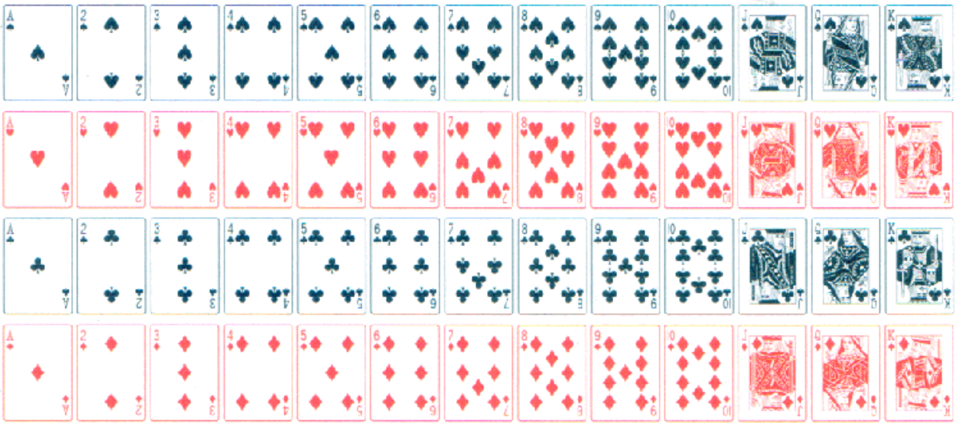
ഒരു അനിയത ഫല പരീക്ഷണത്തിലെ സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും കൂട്ടത്തെ സാമ്പിൾ മേഖല എന്നു പറയുന്നു. സാമ്പിൾ മേഖലയിലെ അംഗങ്ങളെ സാധാരണയായി { } നകത്ത് എഴുതും.

സാമ്പിൾ ബിന്ദു (Sample Point)

സാമ്പിൾ മേഖലയിലെ ഒരംഗത്തെ സാമ്പിൾ ബിന്ദു എന്നു പറയുന്നു.

നമുക്കു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.

പരീക്ഷണങ്ങൾ	സാമ്പിൾ മേഖല
ഒരു നാണയം കറക്കുന്നു	{തല, വാൽ} അല്ലെങ്കിൽ {H,T}
ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു	{ 1, 2, 3, 4, 5, 6}
ശരി, തെറ്റ് എന്നീ ഉത്തരങ്ങളുള്ള ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം നൽകുന്നു.	{ശരി, തെറ്റ്}
രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഒരേസമയം കറക്കുന്നു	{ HH, HT, TH, TT}



ഒരു സെറ്റ് ചീട്ടിൽ നിന്നും ഒന്നെടുക്കുമ്പോഴുള്ള സാമ്പിൾ മേഖല

പ്രവർത്തനം

രണ്ട് പകിടകൾ എറിയുമ്പോഴുള്ള സാമ്പിൾ മേഖല എഴുതുക.

8.2. ഇവന്റ് (Event)

ഒന്നോ അതിലധികമോ ഫലങ്ങളെയാണ് ഇവന്റ് എന്ന വാക്കുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവ ഇവന്റുകൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

- ഒരു നാണയം കറക്കുമ്പോൾ 'വാൽ' കിട്ടുന്നത്
- ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ അതിൽ 5 എന്ന സംഖ്യ കിട്ടുന്നത്.

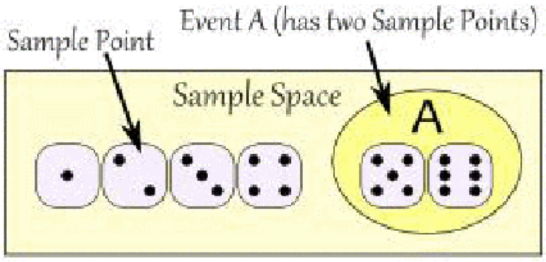
ഒരു ഇവന്റ് ഒന്നിലധികം ഫലങ്ങളെ ഉൾക്കൊള്ളാം:

- ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് ഒരു രാജാവ് എന്ന ചീട്ട് എടുക്കുന്നതിന് (4 രാജാവ് ചീട്ടുകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന്)
- ഒരു പകിട എറിയുമ്പോൾ ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നത്. {2,4,6}

അങ്ങനെ പ്രത്യേക സവിശേഷതകൾ ഉള്ള കൂട്ടത്തെ ഇവന്റ് എന്നു പറയുന്നു. ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ അഞ്ചിൽ കുറവാകുന്നത്, ഒരു കൂട്ടം പകിടകളിൽ നാല് ചീട്ടുകൾ എടുക്കുമ്പോൾ കറുത്ത ചീട്ടോ മുഖചിത്ര ചീട്ടോ കിട്ടുന്നത് തുടങ്ങിയവ ഇവന്റുകളാണ്.

ഒരു ഫലം മാത്രം ഉള്ള ഇവന്റിനെ 'സിമ്പിൾ ഇവന്റ്' എന്നു പറയുന്നു. ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഫലങ്ങൾ ഉള്ള ഇവന്റിനെ **'കോമ്പൗണ്ട് ഇവന്റ്'** എന്നു പറയുന്നു. അതായത് കോമ്പൗണ്ട് ഇവന്റുകളിൽ രണ്ടോ അതിലധികമോ സിമ്പിൾ ഇവന്റുകൾ ഉണ്ട്.

സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന സവിശേഷതകൾ
• സംഭാവ്യതയിലെ എല്ലാ സാധ്യമായ ഫലങ്ങളുടെയും കൂട്ടമാണ് സാമ്പിൾ മേഖല.
• സാമ്പിൾ ബിന്ദു എന്നത് സാധ്യമായ ഒറ്റ ഫലമാണ്.
• ഒരു ഇവന്റിൽ ഒന്നോ അതിലധികമോ സാധ്യമായ ഫലങ്ങളുണ്ട്.



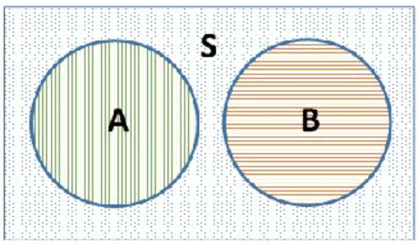
ഒരു ഇവന്റ് സംഭവിക്കുവാനുള്ള സാധ്യതയുടെ അളവാണ് സംഭാവ്യത. സംഭാവ്യത ചുമത്തപ്പെട്ട ഒരു ഫലത്തെ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കൂട്ടം ഫലങ്ങളെ ഇവന്റ് എന്നു പറയുന്നു.

തുല്യസാധ്യതാ ഇവന്റുകൾ (Equally likely events)

രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകൾ സംഭവിക്കുവാനുള്ള സാധ്യത തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയെ തുല്യസാധ്യതാ ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി, നാണയം കറക്കുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ തലയും വാലും കിട്ടുന്നതിന് തുല്യ സാധ്യതയാണ് ഉള്ളത്. അതു കൊണ്ട് അവയെ തുല്യസാധ്യതാ ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു.

പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ (mutually exclusive events)

ഒരേ സമയം സംഭവിക്കുവാൻ സാധ്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഇവന്റുകളെ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി, ഒരു നാണയം കറക്കിയാൽ ഒന്നുകിൽ തല കിട്ടും അല്ലെങ്കിൽ വാൽ കിട്ടും ഇവ രണ്ടും ഒരുമിച്ച് കിട്ടുകയില്ല. ഇതുപോലെ ഒരു നവജാതശിശു ആൺകുട്ടിയോ പെൺകുട്ടിയോ ആയിരിക്കും. ഇങ്ങനെ നാണയം കറക്കുന്ന ഉദ്യമത്തിൽ തല വരുന്നത് വാൽ വരുന്നതിനെ ഒഴിവാക്കുന്നു. അതുപോലെ ഒരു നവജാത ശിശു ആൺകുട്ടി ആകുന്നത് പെൺകുട്ടി ആകുന്നതിനെ ഒഴിവാക്കുന്നു.

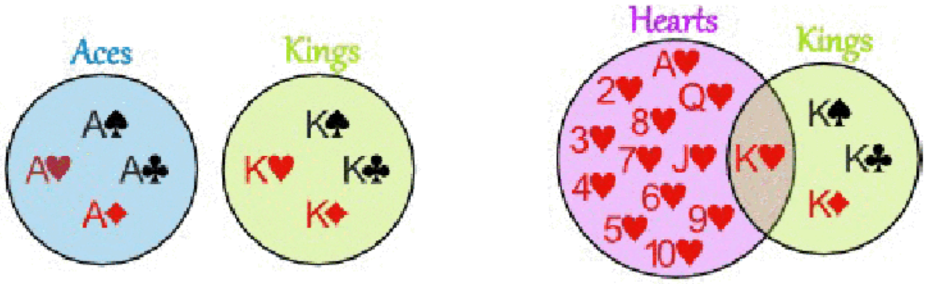


ചുവടെ പറയുന്ന ജോഡികൾ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണ്.

- ഒരാൾ 'വലത്തോട്ട് തിരിയുന്നതും' , 'ഇടത്തോട്ട് തിരിയുന്നതും' (ഇടത്തോട്ടും വലത്തോട്ടും ഒരാൾക്ക് ഒരേ സമയം തിരിയുവാൻ പറ്റില്ല.)
- ഒരു നാണയം എറിയുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ 'തല കിട്ടുന്നതും', 'വാൽ കിട്ടുന്നതും'
- ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് ഒരു ചീട്ട് എടുത്താൽ അത് 'രാജാവ് ചീട്ട്' ആകുന്നതും, 'എയിസ് ചീട്ട്' ആകുന്നതും

പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ലാത്തവ ഏതൊക്കെയാണ്?

ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് ഒരു ചീട്ട് എടുക്കുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ 'രാജാവ് ചീട്ട് ആകുന്നത്', 'ഹൃദയ ചീട്ട് ആകുന്നത്' എന്നീ രണ്ട് ഇവന്റുകൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ ഈ രണ്ട് ഇവന്റുകളും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ല, കാരണം ചീട്ടുകളിൽ ഒന്ന് ഒരേ സമയം 'രാജാവും', 'ഹൃദയവും' ആകാവുന്നതാണ്.



'എയ്സ്' ചീട്ടും 'രാജാവ്' ചീട്ടും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണ്. എന്നാൽ 'ഹൃദയ' ചീട്ടും 'രാജാവ്' ചീട്ടും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ല.

> ഒരേ സമയം സംഭവിക്കാൻ സാധ്യമല്ലാത്ത ഇവന്റുകളെ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് മാത്രം സംഭവിക്കുന്നു, രണ്ടും ഒരുമിച്ച് സംഭവിക്കുന്നില്ല.

സമഗ്ര ഇവന്റുകൾ (Exhaustive Events)

ഒന്നിലധികം ഇവന്റുകൾ കൂടിച്ചേർന്നാൽ സാമ്പിൾ മേഖല കിട്ടുമെങ്കിൽ അത്തരം ഇവന്റുകളെ സമഗ്ര ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് പകിട ഉരുട്ടുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ സാമ്പിൾ മേഖല, S={1,2,3,4,5,6} ആണ്. A={1,3,5}, B= {2,4,6} എന്നീ ഇവന്റുകൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ A യിലെയും B യിലെയും എല്ലാ ഫലങ്ങളും ചേർന്നാൽ സാമ്പിൾ മേഖലയായ {1,2,34,5,6} കിട്ടും. അതുകൊണ്ട് A യും B യും സമഗ്ര ഇവന്റുകളാണ്.

8.3 സംഭാവ്യതയുടെ പ്രാമാണിക നിർവചനം (Classical definition of probability)

ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഖ്യാപരമായ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നതിന് പ്രാമാണിക നിർവചനത്തിൽ സാമ്പിൾ മേഖല ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരാൾക്ക് ഈ രീതിയിൽ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നതിന് പരീക്ഷണം നടത്തേണ്ട ആവശ്യമില്ല. പ്രാമാണിക നിർവചനത്തിൽ സാമ്പിൾ മേഖലയിലെ എല്ലാ ഫലങ്ങളും തുല്യ സാധ്യതയുള്ളതും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളുമാണ് എന്ന് അനുമാനിക്കുന്നു.

പ്രാമാണിക സംഭാവ്യതയുടെ സൂത്രവാക്യം

> A എന്ന ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത എന്നത്
>
> $\dfrac{\text{A യിലുള്ള അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{S \text{ ലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$ ആകുന്നു.
>
> അതായത് $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(S)}$ ഈ സംഭാവ്യതയെ 'പ്രാമാണിക സംഭാവ്യത' എന്നു പറയുന്നു.

വിവരണം 8.1

ഒരു ചക്രത്തിന് മഞ്ഞ, നീല, പച്ച, ചുവപ്പ് എന്നീ നിറങ്ങളിലുള്ള നാല് തുല്യമായ വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. ഈ ചക്രം കറക്കിവിട്ടാൽ നീല നിറം സൂചകത്തിൽ വന്ന് നിൽക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്? ചുവപ്പ് നിറം വന്ന് നിൽക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം:

$$P(\text{മഞ്ഞ}) = \frac{\text{മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{നീല}) = \frac{\text{നീല നിറത്തിലുള്ള വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{പച്ച}) = \frac{\text{പച്ച നിറത്തിലുള്ള വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{ചുവപ്പ്}) = \frac{\text{ചുവപ്പ് നിറത്തിലുള്ള വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{4}$$

വിവരണം 8.2

ആറ് മുഖങ്ങളുള്ള ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. ഓരോ മുഖത്തിന്റെയും സംഭാവ്യത എന്താണ്? ഇരട്ട സംഖ്യയുള്ള മുഖം മുകളിൽ വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്? ഒറ്റ സംഖ്യയുള്ള മുഖം മുകളിൽ വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം

ഈ പരീക്ഷണത്തിലെ സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നിവയാണ്.

$$P(1) = \frac{1 \text{ കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(2) = \frac{2 \text{ കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(3) = \frac{3 \text{ കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(4) = \frac{4 \text{ കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(5) = \frac{5 \text{ കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(6) = \frac{6 \text{ കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{ഇരട്ട സംഖ്യ}) = \frac{\text{ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{ഒറ്റ സംഖ്യ}) = \frac{\text{ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

വിവരണം (8.2)ൽ നിന്ന് നമുക്ക് ഫലത്തിന്റെയും ഇവന്റിന്റെയും വ്യത്യാസം അറിയുവാൻ സാധിക്കും. ഈ പരീക്ഷണത്തിൽ പകിടയുടെ മുഖത്ത് ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയാകുന്നത് ഒരു ഫലവും ഇവന്റും ആണ്. എന്നാൽ മുഖത്തിലെ സംഖ്യ ഒറ്റ സംഖ്യയാകുന്നതും (1,3 അല്ലെങ്കിൽ 5) ഇരട്ടസംഖ്യയാകുന്നതും (2,4, അല്ലെങ്കിൽ 6) ഇവന്റുകളാണ്. വിവരണം (8.1)ൽ ഓരോ ഫലത്തിന്റെയും സംഭാവ്യത തുല്യമാണ്. ഓരോ നിറവും സൂചകത്തിൽ നിൽക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 1/4 ആണ്. വിവരണം (8.2)ൽ, പകിടയിലെ ഓരോ മുഖത്തിന്റെയും സംഭാവ്യത 1/6 ആണ്. ഈ രണ്ട് പരീക്ഷണങ്ങളിലും ഇവന്റുകൾ തുല്യ സാധ്യത ഇവന്റുകളാണ്.

തുല്യ സാധ്യതയില്ലാത്ത ഇവന്റുകൾ വരുന്ന ഒരു പരീക്ഷണം നമുക്ക് നോക്കാം.

വിവരണം 8.3

ഒരു ഗ്ലാസ് ജാറിൽ 6 ചുവപ്പ്, 5 പച്ച, 8 നീല, 3 മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് യാദൃശ്ചികമായി എടുത്താൽ,

- ചുവന്ന പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?
- പച്ച പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?
- നീല പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?
- മഞ്ഞ പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?

പരിഹാരം

ഈ പരീക്ഷണത്തിലെ സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ ചുവപ്പ്, പച്ച, നീല, മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളാണ്.

$$P(\text{ചുവപ്പ് നിറത്തിലുള്ള പന്ത്}) = \frac{\text{ചുവന്ന നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

$$P(\text{പച്ച നിറത്തിലുള്ള പന്ത്}) = \frac{\text{പച്ച നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{5}{22}$$

$$P(\text{നീല നിറത്തിലുള്ള പന്ത്}) = \frac{\text{നീല നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{8}{22}$$

$$P(\text{മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്ത്}) = \frac{\text{മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{3}{22}$$

ഈ പരീക്ഷണത്തിലെ ഇവന്റുകൾ തുല്യ സാധ്യതയില്ലാത്തവയാണ്. നീല നിറത്തിലുള്ള പന്ത് കിട്ടുവാനുള്ള സാധ്യത മറ്റ് ഏതെങ്കിലും നിറത്തിലുള്ള പന്ത് കിട്ടുന്നതിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തു കിട്ടുവാനുള്ള സാധ്യത മറ്റു നിറത്തിലുള്ള പന്ത് കിട്ടുവാനുള്ള സാധ്യതയേക്കാൾ കുറവാണ്.

വിവരണം 8.4

1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ നിന്നും ഒരു സംഖ്യ യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഓരോ സംഖ്യയും കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത എന്ത്? തെരഞ്ഞെടുത്ത സംഖ്യ ഇരട്ട സംഖ്യ ആകുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത എന്ത്? തെരഞ്ഞെടുത്ത സംഖ്യ ഒറ്റ സംഖ്യയാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം

ഈ പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങൾ 1, 2, 3, 4, 5 എന്നിവയാണ്.

$$P(1) = \frac{\text{1 തെരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(2) = \frac{\text{2 തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(3) = \frac{\text{3 തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(4) = \frac{\text{4 തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(5) = \frac{\text{5 തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{ഇരട്ടസംഖ്യ}) = \frac{\text{ഇരട്ടസംഖ്യ തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{ഒറ്റ സംഖ്യ}) = \frac{\text{ഒറ്റ സംഖ്യ തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{3}{5}$$

1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ ഫലങ്ങൾ വരുവാനുള്ള സാധ്യത തുല്യമാണ്. എന്നാൽ ഒറ്റ സംഖ്യയും ഇരട്ടസംഖ്യയും വരുവാനുള്ള സാധ്യത തുല്യമല്ല. കാരണം ഇതിൽ 3 ഒറ്റ സംഖ്യകളും 2 ഇരട്ട സംഖ്യകളും ഉണ്ട്.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ കറക്കുന്നു. സാമ്പിൾ മേഖല എഴുതുക. മൂന്ന് തലകൾ കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

2. ഒരു സ്കൂളിൽ 100 ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥികളും 100 വാണിജ്യ ശാസ്ത്രവിദ്യാർഥികളും 150 മാനവിക ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥികളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു കുട്ടിയെ അനിയതമായി നേതാവായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ വിദ്യാർഥി മാനവികശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥി ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

3. ഒരു പകിടയുടെ രണ്ട് മുഖങ്ങളിൽ 1 എന്നും വേറെ രണ്ട് മുഖങ്ങളിൽ 5 എന്നും ബാക്കിയുള്ള രണ്ട് മുഖങ്ങളിൽ 6 എന്നും രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഈ പകിട ഉരുട്ടിയാൽ അതിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്ത് വരുന്ന സംഖ്യ ഇരട്ട സംഖ്യയാകുന്നതിനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?

4. 50 ൽ കുറവായ എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ഒരു സംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.

   (a) ഇരട്ടസംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (b) 10 ന്റെ ഗുണിതം ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (c) ഒരു പൂർണ വർഗം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പ്രവർത്തനം

തുല്യ സാധ്യതാ ഇവന്റുകൾക്ക് 5 ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക

നമ്മൾ ഇതുവരെ പഠിച്ച കാര്യങ്ങളെ സംഗ്രഹിക്കാം.

- ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഇവന്റുകളുടെ സാധ്യതയുടെ അളവാണ് ആ ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത
- ഒരു ഇവന്റ് A യുടെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കാൻ A വരുവാൻ സാധ്യതയുള്ള ഫല ങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ മതി.
- A എന്ന ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യതയെ P(A) എന്ന് ചുരുക്കി എഴുതാം. P(A) യുടെ വില 0 ത്തിനും 1നും ഇടയിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയായിരിക്കും (0 ഉം 1 ഉം ഉൾപ്പെടെ) P(A) >P(B) ആണെങ്കിൽ A എന്ന ഇവന്റ് സംഭവിക്കുവാനുള്ള സാധ്യത B എന്ന ഇവന്റ് സംഭവിക്കാനുള്ള സാധ്യതയേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. P(A) = P(B) ആണെ ങ്കിൽ Aയും Bയും തുല്യസാധ്യതാ ഇവന്റുകളാണ്.

ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ നിർണയിക്കാനുള്ള എണ്ണൽ നിയമങ്ങൾ (Counting rules for determine the number of out comes)

ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സാധാരണയായി ആ ഇവന്റിൽ ഉള്ള ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണവും ആകെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണവും കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതാണ്. ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രധാനപ്പെട്ട ചില നിയമങ്ങൾ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

ബഹുഘട്ട പരീക്ഷണങ്ങളിലെ എണ്ണൽ നിയമം (Counting rule for multi step experiments)

ബഹുഘട്ട പരീക്ഷണങ്ങളിലെ എണ്ണൽ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു പരീക്ഷണ ത്തിലെ ഫലങ്ങൾ എത്രയുണ്ടെന്ന് എണ്ണി നോക്കാതെ കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ സഹായി ക്കും. നിയമം ഇപ്രകാരമാണ് " ഒരു പരീക്ഷണം k ഘട്ടങ്ങളിലൂടെയാണ് നിർവഹിക്കു ന്നത്. അതിൽ ആദ്യത്തെ ഘട്ടം 'n_1', രീതികളിലും രണ്ടാമത്തെ ഘട്ടം 'n_2' രീതികളിലും മൂന്നാമത്തെ ഘട്ടം n_3 രീതികളിലും ...k-ാമത്തെ ഘട്ടം n_k രീതികളിലും പൂർത്തിയാക്കു ന്നു.

അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ ഈ പരീക്ഷണം പൂർത്തിയാക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$

ഒരു ആളിന് നഗരം A യിൽ നിന്ന് നഗരം B യിലേക്ക് 3 വഴികൾ ഉണ്ട്, നഗരം B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്ക് 4 വഴികളും നഗരം C യിൽ നിന്ന് D യിലേക്ക് 3 വഴികളും ഉണ്ട്. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ നഗരം A യിൽ നിന്ന് നഗരം D യിലേക്ക് സഞ്ചരിക്കുവാനുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം (A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കും B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്കും C യിൽ നിന്ന് D യിലേക്കും സഞ്ചരിച്ചു കൊണ്ട്) = $3 \times 4 \times 3 = 36$ വഴികൾ.

രണ്ട് നാണയങ്ങൾ കറക്കുന്ന പരീക്ഷണം രണ്ട് ഘട്ടങ്ങൾ ഉള്ള പരീക്ഷണമായി കണക്കാക്കാം. ഇതിൽ ഓരോ നാണയം രണ്ട് രീതികളിൽ വീഴുന്നു. തലയും (H) വാലും (T). അതിനാൽ നമുക്ക് $2 \times 2 = 4$ ഫലങ്ങൾ കിട്ടും.

ക്രമമാറ്റവും ചേർത്തു വയ്ക്കലും (Permulation and Combination)

ക്രമമാറ്റം (Permulation) എന്ന പദം ക്രമീകരണത്തെയും ചേർത്തുവയ്ക്കൽ (Combination) എന്ന പദം കൂട്ടത്തെയും അർഥമാക്കുന്നു. ക്രമമാറ്റം എന്ന പദം ഒരു കൂട്ടത്തിലുള്ള വിവിധ വസ്തുക്കളുടെ വ്യത്യസ്തങ്ങളായ ക്രമീകരണത്തെ പരാമർശിക്കുന്നു. ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യമില്ലാതെ ഒരു കൂട്ടം വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും നിശ്ചിത എണ്ണം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന രീതിയാണ് ചേർത്തുവയ്ക്കൽ എന്നു പറയുന്നത്. വസ്തുക്കളുടെ കൂട്ടത്തെ വിവിധ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

അതായത്

- ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യം ഉണ്ടെങ്കിൽ അത് ക്രമമാറ്റം ആകുന്നു.
- ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യം ഇല്ലെങ്കിൽ അത് ചേർത്തുവയ്ക്കൽ ആകുന്നു.

അടിസ്ഥാനപരമായി പ്രധാനമായും രണ്ട് തരത്തിലുള്ള ക്രമമാറ്റങ്ങൾ ഉണ്ട്.

1. ആവർത്തനം ഉള്ള ക്രമമാറ്റം.
2. ആവർത്തനം ഇല്ലാത്ത ക്രമമാറ്റം

ആവർത്തനം ഉള്ള ക്രമമാറ്റം (Permulation with repetition)

നമ്മുടെ കൈവശമുള്ള 'n' വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് r വസ്തുക്കൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ ഒരെണ്ണത്തിനെ നമുക്ക് 'n' രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാൻ സാധിക്കുമല്ലോ? ആവർത്തനം അനുവദിക്കുന്നതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ വസ്തുവിനേയും 'n' രീതിയിൽ തന്നെ തെരഞ്ഞെടുക്കാം. ഈ രീതി തുടരുകയാണെങ്കിൽ r വസ്തുക്കളെ നമുക്ക് $n \times n \times ... \times n$ (r തവണ) $= n^r$ രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യപൂട്ട് പരിഗണിക്കുക.

ഇവിടെ 0,1,2,...,9 തുടങ്ങിയ 10 അക്കങ്ങൾ ഓരോ ചുറ്റിലും ഉണ്ട്. ഓരോ ചുറ്റിൽ നിന്നും ഒരു അക്കം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു മൂന്നക്കസംഖ്യ നിർമിക്കുന്നതിന് 10^3=1000 ക്രമമാറ്റങ്ങളുണ്ട്.

ആവർത്തനം ഇല്ലാത്ത ക്രമമാറ്റം (Permulation without repetition)

ഇവിടെ n വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും r വസ്തുക്കൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ ഒന്നാമത്തെ വസ്തു n രീതിയിലും, ആവർത്തനമില്ലാത്തതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ വസ്തു n-1 രീതിയിലും തുടങ്ങി r-ാമത്തെ വസ്തു n-r+1 രീതിയിലും തെരഞ്ഞെടുക്കാം. ആകെ ക്രമമാർഗങ്ങൾ $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1)$ ആണ്.

ഫാക്ടോറിയൽ (Factorial)

ഒരു ഫാക്ടോറിയൽ എന്നത് ആ സംഖ്യയുടെയും അതിനേക്കാൾ ചെറിയ മുഴുവൻ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെയും ഗുണനഫലമാണ്. ഫാക്ടോറിയലിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ '!' ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

അതായത് $n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

ഉദാഹരണമായി

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

$1! = 1$

കുറിപ്പ്: പൊതുവെ $0!=1$ എന്ന് അംഗീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. സംഖ്യകൾ ഒന്നും തമ്മിൽ ഗുണിക്കാതെ 1 കിട്ടുന്നത് ചിലപ്പോൾ വിചിത്രമായി തോന്നാം. എന്നാൽ ഇത് ധാരാളം സമവാക്യങ്ങൾ ലഘൂകരിക്കുന്നതിന് സഹായിക്കുന്നു.

n വസ്തുക്കളിൽ നിന്നുള്ള r വസ്തുക്കളുടെ ക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ സാധാരണയായി ^nP_r എന്നോ $P_{(n,r)}$ എന്നോ സൂചിപ്പിക്കും.

$$^nP_r = P_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

r = n ആണെങ്കിൽ, $$^np_n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

ഇവന്റുകൾ ഏതെല്ലാം രീതിയിൽ സംഭവിക്കാം എന്ന് കണക്കാക്കുന്നതിന് ക്രമമാറ്റം ഉപയോഗിക്കാം.

ചേർത്തുവയ്ക്കലുകൾ (Combinations)

'n' വ്യത്യസ്തങ്ങളായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും 'r' $[r \leq n]$ വ്യത്യസ്തങ്ങളായ വസ്തുക്കളുടെ ചേർത്തു വയ്ക്കലുകളുടെ എണ്ണത്തെ ^nC_r അല്ലെങ്കിൽ C(n,r) അല്ലെങ്കിൽ $\binom{n}{r}$ എന്ന് എഴുതാം.

$$^nC_r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{n(r-1)\times\ldots 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

അതായത് ഈ സമവാക്യം $$^nC_r = \binom{n}{r} = C(n,r) = = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

10 ചോദ്യങ്ങളുള്ള ഒരു പട്ടികയിൽ നിന്നും 4 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതണം. എത്ര തരത്തിലുള്ള വിവിധ തെരഞ്ഞെടുപ്പുകൾ ആകാം?

തെരഞ്ഞെടുപ്പുകളുടെ എണ്ണം = ${}^{10}C_4 = \frac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4} = 210$

കുറിപ്പ്

$${}^{n}C_r = {}^{n}C_{n-r}$$

$${}^{n}C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = {}^{n}C_{n-r}$$

ഉദാഹരണമായി : $\binom{16}{3} = \binom{16}{13}$

$$\binom{16}{3} = \frac{16!}{3!13!}$$

$$\binom{16}{13} = \frac{16!}{13!3!}$$

'n' വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും എത്രയെങ്കിലും എണ്ണം വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളുടെ ചേർത്തുവയ്ക്കലുകളുടെ എണ്ണം (കുറച്ച് അല്ലെങ്കിൽ എല്ലാ വസ്തുക്കളും എടുക്കുവാനുള്ള എണ്ണം)

$${}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 + {}^{n}C_3 + \ldots + {}^{n}C_n = 2^n - 1 \text{ ആണ്.}$$

നിയന്ത്രണത്തോടെയുള്ള ചേർത്തുവയ്ക്കൽ (Combinations with restrictions)

'n' വസ്തുക്കൾ ഉള്ള ഒരു കൂട്ടത്തിൽ നിന്നും r വസ്തുക്കൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ ചില വസ്തുക്കൾ ഉൾപ്പെടുത്തുകയോ ഒഴിവാക്കുകയോ വേണ്ടി വന്നേക്കാം. k പ്രത്യേക വസ്തുതകളെ ഉൾപ്പെടുത്തണമെങ്കിൽ നമുക്ക് ${}^{n-k}C_{r-k}$ ചേർത്തുവയ്ക്കലുകൾ ഉണ്ട്.

k പ്രത്യേക വസ്തുതകളെ ഒഴിവാക്കണമെങ്കിൽ ചേർത്തുവയ്ക്കലുകളുടെ എണ്ണം ${}^{n-k}C_r$ ആണ്.

വിവരണം 8.5

രണ്ട് പുരുഷന്മാരും രണ്ട് സ്ത്രീകളും ഉൾപ്പെട്ട ഒരു ഗ്രൂപ്പിൽ ഉള്ളതിൽ നിന്ന് രണ്ടു പേർ അടങ്ങുന്ന ഒരു സമിതി രൂപീകരിക്കണം. ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

a) സമിതിയിൽ പുരുഷന്മാരില്ലാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

b) സമിതിയിൽ ഒരു പുരുഷൻ ഉണ്ടാവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

c) സമിതിയിൽ രണ്ടു പുരുഷന്മാർ ഉണ്ടാവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം

ആകെ ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം = 2+2=4. ഈ 4 പേരിൽ നിന്നും 2 പേരെ $^4C_2 = \frac{4\times3}{1\times2} = 6$ രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

(a) സമിതിയിൽ പുരുഷന്മാരില്ല എന്നതുകൊണ്ട് സമിതിയിൽ ഉൾപ്പെടേണ്ട രണ്ട് സ്ത്രീകളാണ് അവരെ $^2C_2=1$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

അതുകൊണ്ട്, P (പുരുഷന്മാരില്ല)= $\frac{1}{6}$

b) പുരുഷന്മാരുടെ എണ്ണം ഒന്ന് എന്നത് സമിതിയിൽ ഒരു പുരുഷനും ഒരു സ്ത്രീയും ഉണ്ട് എന്നാണ്. 2 പുരുഷന്മാരിൽ നിന്നും ഒരാളെ $2C_1=2$ രീതിയിലും 2 സ്ത്രീകളിൽ നിന്നും ഒരാളെ $2C_1=2$ രീതിയിലും തിരഞ്ഞെടുക്കാം. ഒരുമിച്ച് അവരെ $2C_1 \times 2C_1=4$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം

അതുകൊണ്ട് P (ഒരു പുരുഷൻ) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

c) രണ്ട് പുരുഷന്മാരിൽ നിന്ന് രണ്ടു പേരെ $2C_2=1$രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം

അതുകൊണ്ട് P (2 പുരുഷൻമാർ) = $\frac{1}{6}$

വിവരണം 8.6

ഒരു സഞ്ചിയിൽ 7 ചുവപ്പ്, 9 നീല നിറത്തിലുള്ള പന്തുകൾ ഉണ്ട്. 3 പന്തുകൾ ഒരുമിച്ച് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത എന്ത്?

a) എല്ലാ പന്തുകളും നീല നിറത്തിലുള്ളവയാകുന്നതിന്.

b) എല്ലാ പന്തുകളും ചുവപ്പ് നിറത്തിലുള്ളവയാകുന്നതിന്.

c) ഒരു ചുവപ്പ് പന്തും രണ്ടുനീല നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളും ആകുന്നതിന്

d) രണ്ട് ചുവപ്പ് പന്തുകളും ഒരു നീലപന്തും ആകുന്നതിന്

പരിഹാരം

ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം = 16

16 പന്തുകളിൽ നിന്നും 3 പന്തുകളെ $^{16}C_3 = \frac{16\times15\times14}{1\times2\times3} = 560$ രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

a) 9 നീല പന്തുകളിൽ നിന്ന് 3 പന്തുകൾ $^9C_3 = \frac{9\times8\times7}{1\times2\times3} = 84$ രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

P(എല്ലാ പന്തുകളും നീല നിറത്തിലുള്ളതാകുന്നത്) $= \frac{84}{560} = \frac{3}{20}$

b) 7 ചുവപ്പ് പന്തുകളിൽ നിന്ന് 3 പന്തുകളെ ${}^7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

P(എല്ലാ പന്തുകളും ചുവപ്പ് നിറത്തിലുള്ളതാകുന്നത്) $= \frac{35}{560} = \frac{1}{16}$

c) ഒരു ചുവപ്പ് പന്തും രണ്ട് നീല പന്തുകളും ${}^7C_1 \times {}^9C_2 = \frac{7}{1} \times \frac{9 \times 8}{1 \times 2} = 252$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

P(ഒരു ചുവപ്പ്, 2നീല പന്തുകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്) $= \frac{252}{560} = \frac{9}{20}$

d) രണ്ട് ചുവപ്പ് പന്തുകളും ഒരു നീല പന്തും ${}^7C_2 \times {}^9C_1 = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} \times \frac{9}{1} = 189$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

P(ഒരു ചുവപ്പ്, 2നീല പന്തുകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്) $= \frac{189}{560} = \frac{27}{80}$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു ക്ലാസിൽ 20 ആൺകുട്ടികളും 10 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. 5 പേരടങ്ങുന്ന വ്യത്യസ്തങ്ങളായ എത്ര ടീമുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കാം? 5 പേരടങ്ങിയ ഒരു ടീം തെരഞ്ഞെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിൽ 3 ആൺകുട്ടികളും 2 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ടാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
2. ഒരു കമ്പനിയിലെ ജോലിക്കാർക്ക് അവരുടെ ഇഷ്ടത്തിനനുസരിച്ച് പ്രതിവാരം രണ്ട് അവധിയെടുക്കുന്നതിന് അനുവദിച്ചിട്ടുണ്ട്. യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു ജോലിക്കാരൻ തിങ്കളാഴ്ചയും ചൊവ്വാഴ്ചയും അവധി എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
3. 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന മൂന്ന് വളയങ്ങളുള്ള ഒരു പൂട്ട് നിങ്ങൾ തുറക്കുവാൻ ശ്രമിക്കുന്നു. ഇതിൽ വിജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്? (സൂചന: ഇവിടെ സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യമുണ്ട്.)

ഇവന്റുകളുടെ ബീജഗണിതം (Algebra of events)

A അല്ല എന്ന ഇവന്റ് അഥവാ A യുടെ പൂരക ഇവന്റ് (complement of A) എന്ന ആശയം സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിൽ വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ടതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു പകിട എറിയുമ്പോൾ സാമ്പിൾ മേഖല {1,2,3,4,5,6} ആണ്. ഒറ്റ സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള A എന്ന ഇവന്റിൽ 1,3,5 എന്നീ ഫലങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒറ്റ സംഖ്യ ലഭിക്കാതിരിക്കുവാനുള്ള ഇവന്റിനെ A യുടെ പൂരക ഇവന്റ് എന്നു പറയുന്നു. ഇതിൽ 2,4,6 എന്നീ ഫലങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ പൂരക ഇവന്റുകൾ കാണുക.

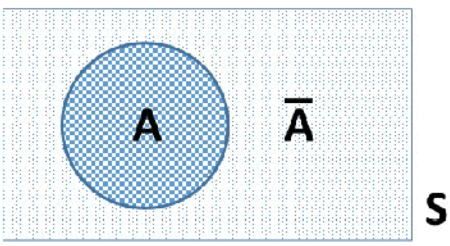
1. പകിട എറിയുമ്പോൾ 6 കിട്ടുന്നത്.
2. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നഅക്ഷരം വ്യഞ്ജനാക്ഷരമാകുന്നത്.
3. അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു മാസത്തിൽ 31 ദിവസങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത്
4. ഒരു ആഴ്ചയിലെ തെരഞ്ഞെടുത്ത ദിവസം ഞായറാഴ്ച ആകുന്നത്.

ഈ ഇവന്റുകളുടെ പൂരക ഇവന്റുകളാണ്.

1. 1,2,3,4 അല്ലെങ്കിൽ 5 കിട്ടുന്നത്.
2. സ്വരാക്ഷരമാകുന്നത്.
3. മാസം ഫെബ്രുവരി, ഏപ്രിൽ, ജൂൺ, സെപ്റ്റംബർ അല്ലെങ്കിൽ നവംബറാകുന്നത്.
4. ദിവസം തിങ്കളാഴ്ച, ചൊവ്വാഴ്ച, ബുധനാഴ്ച, വ്യാഴാഴ്ച, വെള്ളിയാഴ്ച അല്ലെങ്കിൽ ശനിയാഴ്ച ആകുന്നത്.

> ഇവന്റ് A അല്ലെങ്കിൽ A യുടെ പൂരകം എന്നത് സാമ്പിൾ മേഖലയിലുള്ളതും എന്നാൽ A യിൽ ഇല്ലാത്തതുമായ ഫലങ്ങളുടെ കൂട്ടമാണ്. A യുടെ പൂരക ഇവന്റ്, $\overline{A}$ അല്ലെങ്കിൽ A' അല്ലെങ്കിൽ A^c എന്നെഴുതാം.

പൂരക ഇവന്റുകളുടെ വെൻ ചിത്രം (Venn diagram for complementery events)



പൂരക ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്ന നിയമം

$$P(A)+P(\overline{A}) = 1$$

$$\therefore\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത അറിയാമെങ്കിൽ പൂരക ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് 1 ൽ നിന്ന് ഈ സംഭാവ്യത കുറച്ചാൽ മതി.

വിവരണം 8.7

സംഗീത, ഹരിത എന്നീ രണ്ട് കളിക്കാർ തമ്മിൽ ഒരു ടെന്നീസ് മത്സരം നടക്കുന്നു. സംഗീത ഈ മത്സരം വിജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.6 ആണ്. എങ്കിൽ ഹരിത ഈ മത്സരം വിജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?

പരിഹാരം

H, S എന്നിവ യഥാക്രമം ഹരിത വിജയിക്കുന്നതിനും സംഗീത വിജയിക്കുന്നതിനുള്ള ഇവന്റുകൾ ആയാൽ.

$P(S) = 0.6$

$P(H) = 1 - P(S)$ [H ഉം S ഉം പൂരകങ്ങളാണ്]

$= 1 - 0.6$

$= 0.4$

വിവരണം 8.8

ബേബി രണ്ട് നാണയങ്ങൾ കറക്കുന്നു. കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം

സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ (H,H), (T,T), (H,T), (T,H) എന്നിവയാണ്. ഇവിടെ നാല് ഫലങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒരു തലയും കിട്ടാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത = $\frac{1}{4}$

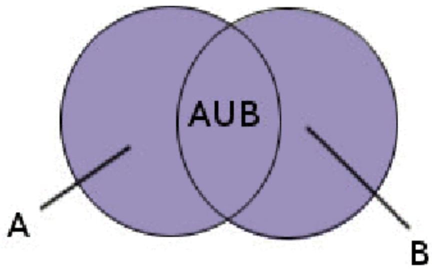
ഒരു തലയെങ്കിലും കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത

$= 1 -$ ഒരു തലയും കിട്ടാതിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

[ഇവിടെ 3 ഫലങ്ങളിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും ഉണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ഒരു തലയെങ്കിലും ലഭിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{3}{4}$ ആണ്]

'A അല്ലെങ്കിൽ B' എന്ന ഇവന്റ് (Event A or B)

A, B എന്നീ രണ്ട് ഇവന്റുകൾ ഉപയോഗിച്ച് 'A അല്ലെങ്കിൽ B' (A യോ B യോ) എന്ന പുതിയ ഇവന്റ് നമുക്ക് നിർവചിക്കാം. ഇതിൽ "A എന്ന ഇവന്റോ' 'B എന്ന ഇവന്റോ' ആകാം. അല്ലെങ്കിൽ ഇവ രണ്ടുമോ" ആകാം. അതല്ലെങ്കിൽ "ഇവയിൽ ഒരു ഇവന്റെ ങ്കിലും" സംഭവിക്കുന്നത് എന്നും നിർവചിക്കാം. ഈ ഇവന്റിനെ A or B അല്ലെങ്കിൽ AUB [A യോഗം B] എന്ന് എഴുതാം. ഇതിൽ A യിലുള്ളതോ B യിലുള്ളതോ അല്ലെങ്കിൽ A യിലും B യിലും ഉള്ളതോ ആയ ഫലങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.



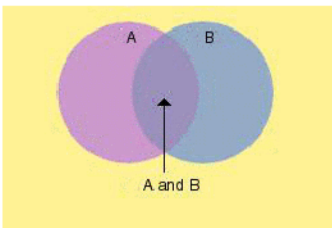
'A അല്ലെങ്കിൽ B' യുടെ വെൻ ചിത്രം

'A യും B യും' എന്ന ഇവന്റ് (Event A and B)

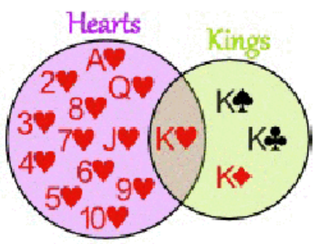
'Aയും B യും' എന്ന ഇവന്റ് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് A എന്ന ഇവന്റും B എന്ന ഇവന്റും ഒരുമിച്ചു സംഭവിക്കുക എന്നതാണ്.

ഈ ഇവന്റിനെ Aയും B യും അല്ലെങ്കിൽ A &B അല്ലെങ്കിൽ $A \cap B$ (A സംഗമം B) എന്ന് എഴുതാം. A &B എന്ന ഇവന്റിൽ A യിലും B യിലും പൊതുവായുള്ള എല്ലാ ഫലങ്ങളും ഉണ്ട്.

'A യും B യും' എന്ന ഇവന്റിന്റെ വെൻ ചിത്രം.



ഉദാഹരണമായി



ഹാർട്ടും രാജാവും ഒരുമിച്ച് സംഭവിക്കുന്നത് ഒരു ചീട്ടിലാണ്. (ഹാർട്ട് ചീട്ടുകളിൽ ഒന്ന് രാജാവ് ചീട്ട് ആണ്).

ഇവന്റുകളുടെ ബീജഗണിതം (Algebra of Events)	
1.	$\overline{A}$ → A അല്ലാത്തത്
2.	A അല്ലെങ്കിൽ B → A യിലും B യിലും കുറഞ്ഞത് ഒന്നിലെങ്കിലും
3.	A യും B യും → രണ്ട് ഇവന്റുകളും (A യും B യും ഒരുമിച്ച് സംഭവിക്കുന്നത്)
4.	$\overline{A}$ യും $\overline{B}$ ഉം → A യിലും ഇല്ല B യിലും ഇല്ല.
5.	A യും $\overline{B}$ ഉം → A യിൽ ഉണ്ട് B യിൽ ഇല്ല.
6.	(A യും $\overline{B}$ ഉം) അല്ലെങ്കിൽ ($\overline{A}$ ഉം B യും) → A, B എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിൽ മാത്രം

8.4. സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന നിയമങ്ങൾ (Addition Rules for probability)

ചില പ്രശ്നങ്ങളിൽ പലപ്പോഴും രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകളുടെ സംഭാവ്യത ഉൾപ്പെടാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, സർവ്വകലാശാല വിദ്യാർഥികളുടെ ഒരു വലിയ കൂട്ടം ഉണ്ട് എന്ന് വിചാരിക്കുക. അതിൽ നിന്നും ഒരു വിദ്യാർഥിയെ അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ താഴെപറയുന്ന സംഭാവ്യതകൾ ഒരാൾക്ക് കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ.

1. ഒരു വാണിജ്യശാസ്ത്ര ബിരുദവിദ്യാർഥി ആകുന്നത്.
2. ആ വിദ്യാർഥി ഒരു പെൺകുട്ടി ആകുന്നത്.
3. ആ വിദ്യാർഥി ഒരു പെൺകുട്ടിയും ഒപ്പം ഒരു വാണിജ്യശാസ്ത്രബിരുദവിദ്യാർഥി ആകുന്നത്.

ഇനി മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. ഒരു കൂട്ടത്തിൽ വാണിജ്യ ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥികളും ഗണിത ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥികളും ഉണ്ട് എന്ന് വിചാരിക്കുക. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു വിദ്യാർഥിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ വാണിജ്യശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥിയാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?

ഇവിടെ ഒരു വിദ്യാർഥി ഒന്നുകിൽ വാണിജ്യശാസ്ത്രവിദ്യാർഥിയാകാം അല്ലെങ്കിൽ ഗണിതശാസ്ത്രവിദ്യാർഥി ആകാം.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേതിൽ ഒരു വിദ്യാർഥിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ഒരേ സമയം വാണിജ്യ ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥിയും പെൺകുട്ടിയും ആകാം. രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ ഒരു വിദ്യാർഥിക്ക് ഒരേ സമയത്ത് വാണിജ്യ ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥിയും ഗണിത ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥിയും ആകുവാൻ സാധിക്കില്ല. രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ ഇവന്റുകൾ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണ്. ആദ്യ ഉദാഹരണത്തിൽ ഇവന്റുകൾ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ അല്ല.

രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകളുടെ യോഗത്തിന്റെ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നതിന് (രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകളിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു ഇവന്റ് എങ്കിലും സംഭവിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുന്നതിന്) സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന നിയമം ഉപയോഗിക്കാം.

A യും B യും രണ്ട് ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ A യോ B യോ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത,

P(A അല്ലെങ്കിൽ B) = P(A)+P(B) - P(A യും B യും)

A യും B യും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ P(A അല്ലെങ്കിൽ B)= P(A)+P(B)

വിവരണം 8.9

ആറ് മുഖങ്ങളുള്ള ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. 2 അല്ലെങ്കിൽ 5 എന്ന മുഖം ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?

പരിഹാരം

A എന്നത് '2 എന്ന മുഖവും' B എന്നത് '5 എന്ന മുഖവും' ആയ ഇവന്റുകളാണ്. ഈ ഇവന്റുകൾക്ക് ഒരുമിച്ച് സംഭവിക്കുവാൻ സാധിക്കുകയില്ല. അതുകൊണ്ട് ഇവ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണ്.

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

P(A അല്ലെങ്കിൽ B) = P(A)+P(B)

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

വിവരണം 8.10

ഒരു ചക്രത്തിന് മഞ്ഞ, നീല, പച്ച, ചുവപ്പ് എന്നീ നിറങ്ങളിലുള്ള തുല്യമായ 4 വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. ഈ ചക്രം കറക്കി വിട്ടാൽ സൂചകം ചുവപ്പിലോ നീലയിലോ വന്ന് നിൽക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം

P (ചുവപ്പ്) $= \frac{1}{4}$

P (നീല) $= \frac{1}{4}$

P (ചുവപ്പ് അല്ലെങ്കിൽ നീല) $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

വിവരണം 8.11

ഒരു സ്ഫടിക ഭരണിയിൽ 1 ചുവപ്പ്, 3 പച്ച, 2 നീല, 4 മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും അനിയതമായി ഒരു പന്ത് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ പന്ത് മഞ്ഞയോ പച്ചയോ നിറത്തിൽ ഉള്ള പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം

$$P\,(\text{മഞ്ഞ}) = \frac{4}{10} \qquad P\,(\text{പച്ച}) = \frac{3}{10}$$

$$P\,(\text{മഞ്ഞ അല്ലെങ്കിൽ പച്ച}) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ പരീക്ഷണങ്ങളിൽ ഇവന്റുകൾ പരസ്പര കേവലങ്ങളാണ്. ഇനി പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ലാത്ത ചില പരീക്ഷണങ്ങൾ നോക്കാം.

വിവരണം 8.12

52 ചീട്ടുകളിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു ചീട്ട് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. രാജാവ് അല്ലെങ്കിൽ ഹാർട്ട് ചീട്ട് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

പരിഹാരം

$$P\,(\text{രാജാവ്}) = \frac{4}{52}$$

$$P\,(\text{ഹാർട്ട്}) = \frac{13}{52}$$

$$P\,(\text{രാജാവും ഹാർട്ടും}) = \frac{1}{52}$$

$$P\,(\text{രാജാവ് അല്ലെങ്കിൽ ഹാർട്ട്}) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

ഇവിടെ ഇവന്റുകൾ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ല.

A , B എന്നീ ഇവന്റുകൾക്ക്

$P(\text{A അല്ലെങ്കിൽ B}) \le P(A) + P(B)$ അതായത് $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$

$P(\text{A യും Bയും}) \le P(A)$ അതായത് $P(A \cap B) \le P(A)$

$P(\text{A യും Bയും}) \le P(B)$ അതായത് $P(A \cap B) \le P(B)$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരാൾ 4 പ്രാവശ്യം നിറയൊഴിച്ചാൽ 3 എണ്ണം ലക്ഷ്യത്തിൽ കൊള്ളുമെന്ന് അറിയാം. വേറൊരാൾ 4 പ്രാവശ്യം നിറയൊഴിച്ചാൽ 2 എണ്ണം ലക്ഷ്യത്തിൽ കൊള്ളും. രണ്ട് പേരും ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്ത് നിറയൊഴിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{3}{8}$ ആണ്. ഇവർ ഓരോരുത്തരും ഒരു തവണ നിറയൊഴിച്ചാൽ, ഇവരിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരാളെങ്കിലും ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്ത് നിറയൊഴിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

2. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 1 മുതൽ 30 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ രേഖപ്പെടുത്തിയ 30 പന്തുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. പന്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ സംഖ്യ

   (a) 5 ന്റെയോ 7 ന്റെയോ ഗുണിതമാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

   (b) 3ന്റെയോ 7ന്റെയോ ഗുണിതമാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

8.5 സംഭാവ്യതയുടെ ആവൃത്തി സമീപനം (Frequency Approach to Probability)

ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ നിന്നുള്ള സംഭാവ്യത

ഒരു ഗവേഷകൻ ഒരു പ്രത്യേക ഇനം തേയിലയുടെ രുചി ഇഷ്ടപ്പെട്ടോയെന്ന് 50 പേരോട് ചോദിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ പ്രതികരണങ്ങൾ 'അതെ', 'അല്ല', 'തീരുമാനിച്ചില്ല' എന്നിങ്ങനെയാണ്.

പ്രതികരണം	ആവൃത്തി
അതെ	30
അല്ല	16
തീരുമാനിച്ചില്ല	4

വിവിധ പ്രതികരണങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത ഇവിടെ കണക്കാക്കാം. ഒരാളുടെ പ്രതികരണം അതെയെന്ന് ആകാവുന്ന സംഭാവ്യത $\frac{30}{50}$ ആണ്.

(50 പേരിൽ 30 പേർ 'അതെ' യെന്ന് പ്രതികരിക്കുന്നു)

ഒരു ആവൃത്തി പട്ടിക തന്നിരുന്നാൽ, സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നത്

$$P(A) = \frac{A \text{ യുടെ ആവൃത്തി}}{\text{ആവൃത്തികളുടെ ആകെ എണ്ണം}}$$

വിവരണം 8.13

100 പേരുടെ ഒരു സാമ്പിളിൽ 42 പേരുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് O യും 44 പേരുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് A യും 10 പേരുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് B യും 4 പേരുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് AB യും ആണ്. ഇതിൽ നിന്നും

ഒരാളെ അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അയാളുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് ചുവടെ പറയുന്നത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

a) O ആകുന്നത്

b) A അല്ലെങ്കിൽ B ആകുന്നത്

c) A യും അല്ല O യും അല്ല.

d) AB അല്ലാത്തത്

പരിഹാരം

ഗ്രൂപ്പ്	ആവൃത്തി
A	44
B	10
AB	4
O	42

$$P(O) = \frac{42}{100} = 0.42$$

$$P(\text{A അല്ലെങ്കിൽ B}) = \frac{44}{100} + \frac{10}{100} = 0.54$$

$$P(\text{A യും അല്ല O യും അല്ല}) = \frac{10+4}{100} = \frac{14}{100} = 0.14$$

$$P(\text{AB അല്ലാത്തത്}) = 1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100} = 0.96$$

ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങൾ തുല്യസാധ്യതയുള്ളവയാണെങ്കിൽ സംഭാവ്യത ആപേക്ഷികാവൃത്തി (Relative frequency) യ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

സാംഖ്യകാനുക്രമം (Statistical Regularity)

ഒരു നാണയം കറക്കിയാൽ, തല കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത നമ്മുടെ അറിവിൽ $\frac{1}{2}$ ആണ്. എന്നാൽ ഒരു നാണയം 50 തവണ എറിഞ്ഞാൽ തലകളുടെ എണ്ണം 25 ആകുമോ? സാധാരണയായി ഈ പരീക്ഷണത്തിൽ തലകളുടെ എണ്ണം 25 ആണ് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്. എന്നാൽ യാദൃശ്ചിക കാരണങ്ങൾ കൊണ്ട് മിക്കവാറും 25 തലകൾ കിട്ടാറില്ല.

തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് നടത്തുന്ന ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം ചെറുതാണെങ്കിൽ സംഭാവ്യത സാധാരണയായി കൃത്യം $\frac{1}{2}$ ആകണമെന്നില്ല. എന്നാൽ

ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം വർധിപ്പിച്ചാൽ, തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തപ്രകാ cap̸ f k wn nh yX b nb $\frac{1}{2}$ നോട് അടുക്കുന്നതായി കാണാം.

ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം 'n' തവണയും ഒരു ഇവന്റ് സംഭവിക്കുന്ന എണ്ണം 'f' തവണയും ആണെന്നും വിചാരിക്കുക. 'n' ന്റെ വലിയ വിലകൾക്ക് ആവൃത്തി അംശബന്ധം, $\frac{f}{n}$ ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയിലേക്ക് അടുക്കുന്നു ഈ പ്രതിഭാസത്തെ സാംഖ്യകാനുക്രമം അല്ലെങ്കിൽ വലിയ സംഖ്യകളുടെ നിയമം (law of large numbers) എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

സംഭാവ്യതയുടെ ആവൃത്തി നിർവചനം (frequency definition of probability) അല്ലെങ്കിൽ സംഭാവ്യതയുടെ അനുഭവസിദ്ധ നിർവചനം (empirial definition of probability)

'n' ന്റെ വില വലുതാകുമ്പോഴുള്ള ആവൃത്തി അംശബന്ധത്തിന്റെ പരിധിയാണ് സംഭാവ്യത.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f}{n}$$

സംഭാവ്യതയുടെ പ്രാമാണിക നിർവചനവും അനുഭവസിദ്ധ നിർവചനവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്തെന്നാൽ പ്രാമാണിക നിർവചനത്തിൽ ഫലങ്ങളെല്ലാം തുല്യസാധ്യതയുള്ളവയാണെന്ന് അനുമാനിക്കുന്നു. എന്നാൽ അനുഭവസിദ്ധ നിർവചനത്തിൽ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് യഥാർഥ പരീക്ഷണത്തിൽ കിട്ടുന്ന ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ ആശ്രയിച്ചാണ്. സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്, ഒരാൾക്ക് ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം വളരെ കൂട്ടുകയും അതിലെ ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി കണക്കാക്കുകയും വേണം. അനുഭവസിദ്ധ സംഭാവ്യത ഫലങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും.

പ്രവർത്തനം

നിങ്ങൾ താമസിക്കുന്ന പ്രദേശത്തെ തദ്ദേശസ്വയം ഭരണസ്ഥാപനത്തിൽ നിന്നും കഴിഞ്ഞ 20 വർഷത്തെ ജനനം രേഖപ്പെടുത്തിയ ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുക. പത്ത്, ഇരുപത് വർഷത്തെ സ്ത്രീ - പുരുഷജനനത്തിന്റെ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

8.6. സംഭാവ്യതയിലെ സ്വയം പ്രമാണങ്ങൾ (Axioms on probability)

ഒരു അനിയത പരീക്ഷണത്തിലെ സാമ്പിൾ മേഖല S ഉം അതിലെ ഒരു ഇവന്റ് A യും ആണെങ്കിൽ P(A) എന്ന സംഖ്യ ഇവന്റ് A യുടെ സംഭാവ്യതയാകുന്നത് താഴെ പറയുന്ന പ്രമാണങ്ങൾക്ക് വിധേയമായാണ്.

പ്രമാണം – 1 ന്യൂനസംഖ്യ അല്ലാത്തത് (Non- negativity)

ഏതൊരു ഇവന്റ് A - യ്ക്കും $P(A) \geq 0$. ഈ പ്രമാണം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് സംഭാവ്യത ഒരിക്കലും ന്യൂനസംഖ്യ ആകില്ല എന്നും സംഭാവ്യതയുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില പൂജ്യമാണ് എന്നും ആണ്.

പ്രമാണം–2 നിശ്ചിതമായത് (Certainity)

S ഒരു സാമ്പിൾ മേഖല ആണെങ്കിൽ $P(S) = 1$. ഈ പ്രമാണം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് സാമ്പിൾ മേഖലക്ക് തുല്യമായി ഒരു ഇവന്റ് നിർവചിച്ചാൽ ആ ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത 1 ആണ്. സംഭാവ്യതയുടെ പരമാവധി വില 1 ആണ്.

പ്രമാണം–3 സങ്കലനത (Additivity)

A_1, A_2 എന്നീ ഇവന്റുകളിൽ പൊതുവായ അംഗങ്ങൾ ഇല്ലായെങ്കിൽ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ അതായത് A_1, A_2 എന്നീ ഇവന്റുകൾക്ക് പൊതുവിൽ അംഗങ്ങളില്ലായെങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു ഇവന്റിന്റെയെങ്കിലും സംഭാവ്യത, ഇവന്റുകളുടെ സംഭാവ്യതയുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

> പ്രമാണം 3 ന്റെ സാമാന്യവൽക്കരണം
>
> $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ എന്നിവ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ
>
> $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_K)$$

ആത്മനിഷ്ഠ സംഭാവ്യത (Subjective Probability)

ചില ഊഹങ്ങളുടെയോ അഭിപ്രായപ്രകടനങ്ങളുടെയോ കൃത്യതയില്ലാത്ത വിവരങ്ങളുടേയോ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് ആത്മനിഷ്ഠ സംഭാവ്യത പറയുന്നത്. ഇത് വ്യക്തിയുടെ പരിചയവും ഒരു പ്രശ്നപരിഹാരത്തിലുള്ള കഴിവിനെയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു ഭിഷഗ്വരൻ രോഗിയെ പരിശോധിച്ചതിന് ശേഷം ശസ്ത്രക്രിയ വേണ്ടിവരാനുള്ള സാധ്യത 30% ആണ് എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ലേഖകൻ അടുത്ത FIFA ലോകകപ്പ് ബ്രസീൽ നേടുവാനുള്ള സാധ്യത 80% ആണ് എന്ന് പറയുന്നു.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

ഈ അധ്യായത്തിൽ സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ പരിചയപ്പെടുത്തുകയും തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുന്നതിൽ സംഭാവ്യത എങ്ങനെ സഹായകരമാണെന്നും വിശദീകരിച്ചു. സംഭാവ്യത ഒരു ഇവന്റ് സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള സാംഖ്യാപരമായ അളവായി എങ്ങനെ വിശകലനം ചെയ്യാമെന്നും വിശദീകരിച്ചും നമ്മൾ ക്ലാസിക്കൽ സംഭാവ്യത എന്ന പദം പരിചയപ്പെട്ടു. കൂടാതെ ഇവന്റുകളുടെ ബീജഗണിതത്തിലൂടെയും സങ്കലന നിയമത്തിലൂടെയും എണ്ണൽ നിയമങ്ങളിലൂടെയും സംഭാവ്യത കണക്കാക്കാമെന്നും മനസ്സിലാക്കി. അനുഭവസിദ്ധ സംഭാവ്യത, ആത്മനിഷ്ഠ സംഭാവ്യത, സംഭാവ്യതയുടെ സ്വയം പ്രമാണതത്ത്വങ്ങൾ എന്നിവ അവതരിപ്പിച്ചു.

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്:

- പ്രധാന തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുന്നതിന് മുമ്പ് അതിലുൾപ്പെട്ട അനിശ്ചിതത്ത്വങ്ങളുടെ അളവ് തിരിച്ചറിയുന്നു.

- അനിയതഫല പരീക്ഷണങ്ങൾ, സാമ്പിൾ മേഖല, സാമ്പിൾ ബിന്ദു, ഇവന്റ് എന്നിവ തിരിച്ചറിയുന്നു.
- സംഭാവ്യതയുടെ വിവിധ സമീപനങ്ങൾ വിവരിക്കുന്നു.
- പ്രാമാണിക നിർവചനം ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.
- സങ്കലന നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ഇവന്റുകളുടെ സംയുക്ത സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ അനിയതഫല പരീക്ഷണം ഏത്?

   (a) നാണയം കറക്കുന്നു.

   (b) 6 മുഖങ്ങളുള്ള ഒരു പകിട എറിയുന്നു.

   (c) വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളിലുള്ള പന്തുകൾ ഉള്ള ഒരു ഭരണിയിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു

   (d) മുകളിൽ പറഞ്ഞവയെല്ലാം

2. രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം കറക്കുകയും അവയുടെ മുഖങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ചുവടെ പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് പ്രാഥമിക ഇവന്റ്?

   (a) കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും കിട്ടുന്നത്

   (b) കൃത്യം ഒരു തല കിട്ടുന്നത്

   (c) പരമാവധി ഒരു തല കിട്ടുന്നത്.

   (d) ഒരു തലയും കിട്ടാതിരിക്കുന്നത്

3. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ അക്ഷരങ്ങളിൽ നിന്നും അനിയതമായി ഒരു അക്ഷരം എടുത്താൽ അത് സ്വരാക്ഷരം ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (a) $\frac{21}{26}$ (b) $\frac{5}{26}$ (c) $\frac{14}{26}$ (d) 0

4. ഒന്നു മുതൽ 11 വരെയുള്ള (രണ്ടും ഉൾപ്പെടെ) എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ഒരു സംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഇത് ഒറ്റ സംഖ്യയാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (a) $\frac{1}{11}$ (b) $\frac{6}{11}$ (c) 0 (d) 1

5. ഒരാഴ്ചയിലെ ഒരു ദിവസം അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. അത് തിങ്കളാഴ്ചയോ ചൊവ്വാഴ്ചയോ ആകുന്നതിന് ഉള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{1}{7}$ (d) 0

6. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 6 നീല, 9 പച്ച, 4 ചുവപ്പ്, 7 മഞ്ഞ പന്തുകളുണ്ട്. അനിയതമായി ഒരു പന്ത് തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ആ പന്ത് നീലയോ, മഞ്ഞയോ ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

(a) $\frac{21}{26}$ (b) $\frac{5}{26}$ (c) $\frac{13}{26}$ (d) 0

7. ആറ് മുഖങ്ങളുള്ള ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. മുകളിൽ വരുന്ന സംഖ്യ 3 ൽ കൂടുതലോ ഇരട്ട സംഖ്യയോ ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

(a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{2}{6}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) 0

8. P(A അല്ലെങ്കിൽ B)= P(A)+P(B) എന്നത് അർഥമാക്കുന്നത് A യും B യും

(a) സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾ (b) പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ

(c) തുല്യ സാധ്യതയുള്ള ഇവന്റുകൾ (d) ഇതൊന്നുമല്ല

9. P(A അല്ലെങ്കിൽ B) നൽകുന്ന സംഭാവ്യത

(a) A എന്ന ഇവന്റിന്റെ (b) കുറഞ്ഞത് ഒരു ഇവന്റിന്റെയെങ്കിലും

(c) കൃത്യം ഒരു ഇവന്റിന്റെ (d) A യുടെയും B യുടെയും

10. ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങൾ തുല്യ സാധ്യതയുള്ളവയാണെങ്കിൽ സംഭാവ്യത ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതിന് തുല്യമായിരിക്കും.

(a) ആവൃത്തി (b) ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി

(c) സഞ്ചിതാവൃത്തി (d) ആകെ ആവൃത്തി

ഉത്തരങ്ങൾ

1-d, 2-d, 3-b, 4-b, 5-b, 6-c, 7-a, 8-b, 9-b, 10-b

11. ഒരു നാണയം രണ്ട് തവണ കറക്കുന്നു. കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും ലഭിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം 3/4

12. ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഇവന്റുകളുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

(a) അഭാജ്യ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്.

(b) മൂന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ ആയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്.

(c) 6 ൽ കൂടിയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്.

(d) 6 ൽ കുറവായ ഒരു സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്.

ഉത്തരങ്ങൾ

a) 3/6, b) 4/6, c) 0, d) 5/6

13. 52 ചീട്ടുകൾ ഉള്ള ഒരു കൂട്ടത്തിൽ നിന്നും ഒരു ചീട്ട് എടുക്കുന്നു.

(a) സാമ്പിൾ മേഖലയിൽ എത്ര ഫലങ്ങളാണ് ഉള്ളത്.

(b) എടുത്ത ചീട്ട് സ്പെയിഡിലെ ഏസ് ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

(c) ചീട്ട് ചുവന്ന നിറത്തിലുള്ളതാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

(d) ചീട്ട് ഏസ് ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

ഉത്തരം

a) 52, b) 1/52, c) 1/2, d) 1/13.

14. ഒരു ഉപദേശസമിതിയിൽ 4 ആൺകുട്ടികളും 6 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. ഈ ഉപദേശക സമിതിയിൽ നിന്നും ഒരാളെ അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ, പെൺകുട്ടി ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം 3/5

15. മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് കറക്കുന്നു. ചുവടെ പറയുന്ന ഫലങ്ങൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

(a) 3 തലകൾ

(b) 2 തലകൾ

(c) കുറഞ്ഞത് 2 തലകളെങ്കിലും

(d) പരമാവധി 2 തലകൾ

(e) ഒരു തലയും ഇല്ല

(f) കൃത്യം രണ്ട് വാലുകൾ

(g) പരമാവധി രണ്ട് വാലുകൾ

ഉത്തരം: (a) 1/8 (b) 3/8 (c) 1/2 (d) 7/8 (e) 1/8 (f) 3/8 (g) 7/8

16. A എന്ന ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത 2/13 ആണ്. എങ്കിൽ 'A അല്ല' എന്ന ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം: $\frac{11}{13}$

17. 'Assassination' എന്ന വാക്കിൽ നിന്നും ഒരു അക്ഷരം തെരഞ്ഞെടുത്തു. ഈ അക്ഷരം

(a) സ്വരാക്ഷരം ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

(b) വ്യഞ്ജനാക്ഷരം ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

ഉത്തരം: (a) $\frac{6}{13}$ (b) $\frac{7}{13}$

18. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഭാവ്യതകൾ ശരിയായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടതാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

1) P(A) = 0.5, P(B) = 0.7, P(A യും B യും) = 0.6

2) P(A) = 0.5, P(B) = 0.4 P(A അല്ലെങ്കിൽ B) = 0.8

ഉത്തരം:

1) അല്ല. കാരണം P(A യും B യും)യുടെ വില P(A) യുടെ വിലയേക്കാൾ കൂടുതൽ ആകുവാൻ സാധിക്കില്ല.

2) ആണ്. കാരണം P(A അല്ലെങ്കിൽ B) $\leq$ P(A)+P(B)

19. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക

നമ്പർ	P(A)	P(B)	P(A യും B യും)	P(A അല്ലെങ്കിൽ B)
1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	-
2)	0.35	-	0.25	0.6
3)	0.5	0.35	-	0.7

ഉത്തരം:

1) 7/15 2) 0.5 3) 0.15

20. P(A) = 3/5 ഉം P(B) = 1/5 ആണ്. A യും B യും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ P(A അല്ലെങ്കിൽ B) കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: 4/5

21. E യും F യും രണ്ട് ഇവന്റുകളാണ്. P(E) = 1/4, P(F) = 1/2, P(E യും F ഉം) = 1/8

i) P(E അല്ലെങ്കിൽ F) കണ്ടുപിടിക്കുക.

ii) P(E യും അല്ല F ഉം അല്ല) കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: i) $\frac{5}{8}$ ii) $\frac{3}{8}$

22. P(A) = 0.42 ഉം P(B) = 0.48 ഉം വരുന്ന രണ്ട് ഇവന്റുകളാണ് A യും B യും. P(A യും B യും) = 0.16 ആണ്. ചുവടെ പറയുന്നവ കണക്കാക്കുക.

i) P(A അല്ലാത്തത്) ii) P(B അല്ലാത്തത്) iii) P(A അല്ലെങ്കിൽ B)

ഉത്തരം: i) 0.58 ii) 0.52 iii) 0.74

23. ഒരു വിദ്യാലയത്തിലെ 40% വിദ്യാർഥികൾ സംഗീതവും 30% വിദ്യാർഥികൾ ആയോധനകലയും പഠിക്കുന്നവരാണ്. 20% വിദ്യാർഥികൾ ഇവ രണ്ടും പഠിക്കുന്നു. ഈ വിദ്യാലയത്തിൽനിന്നും ഒരു വിദ്യാർഥിയെ അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ആ വിദ്യാർഥി സംഗീതമോ ആയോധനകലയോ പഠിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   ഉത്തരം: 0.5

24. രണ്ടു പരീക്ഷകളെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണ് ഒരു പ്രവേശന പരീക്ഷയുടെ ഫലം നിർണയിക്കുന്നത്. അനിയതമായി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ഒരു വിദ്യാർഥി ഒന്നാമത്തെ പരീക്ഷ ജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.8 ഉം രണ്ടാമത്തെ പരീക്ഷ ജയിക്കുന്നതിന് ഉള്ള സംഭാവ്യത 0.7 ഉം ആണ്. രണ്ട് പരീക്ഷകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് എങ്കിലും ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.95 ആണ്. എങ്കിൽ ഒരു വിദ്യാർഥി രണ്ട് പരീക്ഷയും ജയിക്കുന്നതിന് ഉള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   ഉത്തരം: 0.55

25. ഒരു ഡ്രൈവിങ് പരീക്ഷയിൽ ഒരു അപേക്ഷകൻ H ടെസ്റ്റും 8 ടെസ്റ്റും ജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.5 ഉം ഇതിൽ ഒന്നും ജയിക്കാതിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.1 ഉം ആണ്. H-ടെസ്റ്റ് ജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.75 ആണെങ്കിൽ, 8 ടെസ്റ്റ് ജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   ഉത്തരം: 0.65

26. ഒരു വാണിജ്യ ശാസ്ത്ര ക്ലാസിലെ 60 വിദ്യാർഥികളിൽ 30 പേർക്ക് B.Com നോടും 32 പേർക്ക് B.B.A യോടും 24 പേർക്ക് രണ്ടിനോടും താൽപ്പര്യമുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു വിദ്യാർഥിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

   1) വിദ്യാർഥിക്ക് താൽപ്പര്യം B.Com നോടോ B.B.A യോടോ ആകുന്നതിന്

   2) വിദ്യാർഥിക്ക് B.Com നോടും B.B.A യോടും താൽപ്പര്യമില്ല.

   3) വിദ്യാർഥിക്ക് BBA യോട് താൽപ്പര്യമുണ്ട് എന്നാൽ B.Com നോട് താൽപ്പര്യമില്ല.

   ഉത്തരം: 1) $\frac{19}{30}$ 2) $\frac{11}{30}$ 3) $\frac{4}{30}$

27. ഒരു പെട്ടിയിൽ 10 ചുവന്ന നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളും 20 നീലനിറത്തിലുള്ള പന്തുകളും 30 പച്ച നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളും ഉണ്ട്. 5 പന്തുകൾ പെട്ടിയിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

   a) എല്ലാ പന്തുകളും നീലനിറത്തിലുള്ളതാകാൻ

   b) കുറഞ്ഞത് ഒരു പന്തെങ്കിലും പച്ച നിറത്തിലുള്ളതാകാൻ.

   ഉത്തരം: a) $\frac{^{20}C_5}{^{60}C_5}$ b) $1-\frac{^{30}C_5}{^{60}C_5}$

28. നന്നായി കശക്കിയ 52 ചീട്ടുകളിൽ നിന്നും 4 ചീട്ടുകൾ എടുക്കുന്നു. അവയിൽ 3 സ്പേഡും ഒരു ഡയമണ്ടും ഉണ്ടാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം : $\frac{{}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1}{{}^{52}C_4}$

29. ഒരു ആശുപത്രിയിൽ ഗർഭിണികൾ തങ്ങിയ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന പട്ടിക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

തങ്ങിയ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം	ഗർഭിണികളുടെ എണ്ണം
3	15
4	32
5	56
6	19
7	5
ആകെ	127

ചുവടെ പറയുന്ന സംഭാവ്യതകൾ കാണുക.

1) ഒരു ഗർഭിണി കൃത്യം അഞ്ച് ദിവസം തങ്ങിയതിന്

2) ഒരു ഗർഭിണി തങ്ങിയ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം 6 ൽ കുറവാകുന്നതിന്

3) ഗർഭിണി പരമാവധി 4 ദിവസം തങ്ങുന്നതിന്

4) ഗർഭിണി കുറഞ്ഞത് 5 ദിവസമെങ്കിലും തങ്ങുന്നതിന്

ഉത്തരം: $\frac{56}{127}, \frac{103}{127}, \frac{47}{127}, \frac{80}{127}$

30. ഒരു സ്കൂളിലെ സുവർണ്ണ ജൂബിലി കമ്മിറ്റിയിലെ ആളുകളുടെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

നമ്പർ	പേര്	പുരുഷൻ/സ്ത്രീ	വയസ്സ്(വർഷത്തിൽ)
1	ആലിസ്	സ്ത്രീ	28
2	ഹരി	പുരുഷൻ	30
3	ഫൈസൽ	പുരുഷൻ	41
4	മോഹൻ	പുരുഷൻ	33
5	ഹരിത	സ്ത്രീ	46

ഇതിൽ നിന്നും ഒരാളെ വക്താവായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. വക്താവ് ഒരു പുരുഷനോ 35 വയസ്സിൽ കൂടുതൽ ഉള്ള ആളോ ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം: $\frac{4}{5}$