2 தொகை நுண்கணிதம்–I

GSYIFR

பெர்ன்ஹார்டு ரீமான்
(செப்டம்பர் 17, 1826 - ஜூலை 20, 1866)

அறிமுகம்

ஜார்ஜ் ஃபிரடெரிக் பெர்ன்ஹார்டு ரீமான் (பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டு) ஒரு எழுச்சியூட்டும் ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் ஆவார். இவர் நுண்கணிதத்திற்கான தனது பங்களிப்பிற்காக அனைவராலும் மிகவும் அங்கீகரிக்கப்பட்டவர் ஆவார்.

நுண்கணிதமானது பொதுவாக இரு பிரிவுகளைக் கொண்டுள்ளது. அவையாவன (1) வகை நுண்கணிதம் மற்றும் (2) தொகை நுண்கணிதம் ஆகும். ஒரு சார்பினுடைய வகைக்கெழுக்களை காண உதவும் செயல் முறைகளை பற்றி விவரிப்பது வகை நுண்கணிதம் ஆகும். அதே சமயத்தில் தொகை நுண்கணிதமானது வருவித்தச் சார்பின் எதிர்மறையான வகையிடலை விவரிப்பதாகும். அதாவது காணப்பட வேண்டிய சார்புக்கான உடனடி மாறுவீதத்தை (அல்லது) இறுதி நிலையைக் கொண்டு, அச்சார்பினைக் காண்பதாகும். எனவே தொகையிடல் என்பது வருவித்தச் சார்பிலிருந்து அதன் தொடக்க நிலைச் (அசல்) சார்பை கண்டறியும் உத்தியாகும். இவ்வாறாக பெறப்பட்ட சார்பானது வரையறாத் தொகையீடு என அழைக்கப்படுகிறது. வரையறுத்த தொகையீடு என்பது குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகளுக்கு இடையில் காணப்படும் வரையறாத் தொகையீட்டின் மதிப்பீடு ஆகும். மேலும் இது குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகள், சார்புக்கான வளைவரை மற்றும் அச்சு ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட பரப்பு ஆகும். மேலும் இப்பரப்பானது தோராயமாக அதில் வரையப்படும் ஏராளமான உள்வரை செவ்வகங்களினுடைய பரப்புகளின் கூடுதலுக்கு சமமாகும். இவ்வாறாக வரையறுக்கப்பட்ட உள்வரை செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கையின் எல்லை முடிவிலி எனக் கொண்டு, தோராய மதிப்பானது துல்லிய மதிப்பாகக் கணக்கிடப்படுகிறது. ஆகையால் வகை நுண்கணிதமும் மற்றும் தொகை நுண்கணிதமும் எல்லைக் கோட்பாட்டின் அடிப்படையிலானது.

"ஒருங்கிணைப்பு" (integrate) என்ற சொல்லுக்கான எழுத்தியல் ரீதியான பொருள் "கூட்டுத்தொகை காணல்" என்பதாகும். ஆகையால்தான் "தொகை நுண்கணிதம்" என்ற பெயரானது இவ்வகையான கூட்டுத் தொகை செயல் முறையிலிருந்து பெறப்பட்டதாக நம்பப்படுகிறது. நுண்கணிதம் என்பது இப்பிரபஞ்சத்தின் தோற்றம், புயல் மற்றும் சூறாவளிகளின் வளர்ச்சி போன்ற கோட்பாடுகளை சோதிக்கும் கணிதவியல் உத்தியாகும். மேலும் இது வணிகப் பயன்பாட்டில் நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளரின் உபரிகளை பெறவும், ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை அடையாளம் காணவும், இறுதி நிலைச் சார்பிலிருந்து அதன் தொடக்க நிலைச் சார்பினை பெறவும் மற்றும் இது போன்றவைகளை காணப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் தொகையீடு எனும் கருத்துரு, சில வகையைச் சார்ந்த வரையறாத் தொகையீடுகள் மற்றும் வரையறுத்த தொகையீடுகளுக்கான வழிமுறைகளை பற்றி பயில்வோம்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 27 3/5/2020 11:03:02 AM

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்னர் பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்களால் புரிந்துக் கொள்ள இயலும்.

- வரையறாத் தொகையீடு.
- கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் மாறிலியின் மடங்குகள் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு சார்புக்கான வரையறாத் தொகையீட்டினை எவ்வாறு காண்பது.
- பிரதியிடல் எனும் உத்தியை எங்கு மற்றும் எவ்வாறு வரையறாத் தொகையீடுகளில் பயன்படுத்துவது.
- பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடல் மற்றும் சில சிறப்பு வகையை சார்ந்த தொகையீடு களுக்கான உத்திகள்.
- தொகை நுண்கணிதத்தினுடைய அடிப்படைத் தேற்றங்கள்.
- வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகள் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள்.
- காமா தொகையிடலிலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட வகையின் பயன்பாடு.
- காமா சார்பின் பண்புகள்.
- வரையறுத்த தொகையீடுக்கான கூட்டல் எல்லை.

2.1 வரையறாத் தொகையீடுகள் (Indefinite Integrals)

2.1.1 வரையறாத் தொகையீட்டின் கருத்துரு (Concept of Indefinite Integral)

வகை நுண்கணிதத்தில், கொடுக்கப்பட்டச் சார்பு $f(x)$-க்கான x -ஐ பொறுத்த வகைக் கெழுவான $f'(x)$-ஐ எவ்வாறு கணக்கிடப் படவேண்டும் என்ற செயல் முறையினை அறிந்துக் கொண்டோம். இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கொடுக்கப்பட்ட வருவித்த சார்பான $f'(x)$-க்கு [சார்பின் வகையீட்டிலிருந்து] அதன் தொடக்க நிலை சார்பு $f(x)$-ஐ [அசல் சார்பை] எவ்வாறு காண்பது என்பதனை பற்றி தெரிந்துக் கொள்வோம். வகையிடலின் எதிர்மறையானச் செயல் முறையையே தொகையிடல் அல்லது எதிர் வகையிடல் என்போம்.

∴ தொகையிடல் என்பது வகையிடலின் எதிர் மறைச் செயல் முறையாகும்.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$ என்பதனை நாம் நன்கு அறிவோம். இதில் $\cos x$ என்பது வருவித்தச் சார்பு மற்றும் $\sin x$ என்பது தொடக்க நிலைச் சார்பு ஆகும். [தொடக்க நிலைச் சார்பானது எதிர்மறை வகையீட்டுச் சார்பு அல்லது தொகைச் சார்பு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது].

வரையறை 2.1

வருவித்தச் சார்பு $f(x)$-க்கான தொடக்க நிலைச் சார்பு $F(x)$ எனில் $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]= f(x)$ ஆகும்.

இனி நாம், நமக்கு நன்கு தெரிந்த பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2, \qquad \frac{d}{dx}\left(x^3+5\right)= 3x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3-\tfrac{3}{2}\right)= 3x^2, \qquad \frac{d}{dx}\left(x^3+e\right)= 3x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3-\pi\right)= 3x^2, \qquad \ldots$$

மேலே கொடுக்கப்பட்ட அனைத்து எடுத்துக்காட்டுகளிலும் $3x^2$ ஆனது x^3, x^3+5, $x^3-\frac{3}{2}$, x^3+e, $x^3-\pi$, ... போன்ற தொடக்க நிலைச் சார்புகளுக்கான வருவித்த சார்பு என்பதை கவனியுங்கள். மேலும் இதிலிருந்து, வருவித்த சார்பானது ஒருமைத் தன்மையை கொண்டுருப்பினும் அதன் தொடக்க நிலைச் சார்பானது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்ததாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதை நம்மால் உணர முடிகிறது. ஆகையால், $3x^2$ என்ற வருவித்த சார்புக்கான தொடக்க நிலைச் சார்பு x^3+c என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு வருவித்த சார்புக்கான எண்ணற்ற தொடக்க நிலைச் சார்புகள், $\mathbb{R}$ எனும் மெய்யெண்களின் தொகுப்பிலிருந்து c -ஐ தன்னிச்சையாக தேர்வு செய்யப்படுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது. இவ்வகையான தொகையீடுகள் வரையறாத் தொகையீடுகள் என அழைக்கப்படுகிறது.

பொதுவாக,

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x)+c,$$

இதில் c ஆனது தொகையிடல் மாறிலி என அழைக்கப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 28 3/5/2020 11:03:08 AM

குறிப்புகள்

- $F(x)$ மற்றும் $G(x)$ என்ற இருவேறு தொடக்க நிலைச் சார்புகளானது $f(x)$ எனும் ஒரே வருவித்த சார்பை பெற்றிருக்கும் எனில், அவை மாறிலி உறுப்பில் மட்டும் வேறுபடும்.
- $\int f(x)\,dx$ என்பது வரையறாத் தொகையீடு என அழைக்கப்படுகிறது.
- தொகையிடலுக்கான குறியீடு [$\int$] -ஆனது "summation" என்ற சொல்லின் முதல் எழுத்தான S -ஐ மேலும் கீழுமாக நீட்டித்து பெறப்பட்ட வடிவம் ஆகும்.
- $\int f(x)\,dx$ என்பதனை x-ஐ பொறுத்த $f(x)$ இன் தொகையீடு எனப் படிக்க வேண்டும்.
- $\int f(x)\,dx$ இல் $f(x)$ [அதாவது தொகையிடுதலில் தொகையை காண வேண்டியச் சார்பு] ஆனது தொகைக்காண்பான் [தொகைக்காண் சார்பு] என அழைக்கப்படுகிறது..
- $\int f(x)\,dx$ இல் x என்பது தொகையிடல் மாறி என்போம்.
- "தொகையீடுக்கானசெயல்முறையையே" தொகையிடல் என்போம்.
- மாறிலிச் சார்பாக கருதப்படும் எந்த ஒரு மெய்யெண் c-ம் தொகையிடல் மாறிலி ஆகும்.

வரையறை 2.2

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்புக்கான தொகையீட்டை காணும் செயல்வழிமுறை, சார்பின் தொகையிடல் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

2.1.2 தொகை நுண்கணிதத்தின் இரு முக்கிய பண்புகள் (Two important properties of Integral Calculus)

(i) k என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலி எனில், $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ ஆகும்.

(ii) $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன இரு தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் எனில், $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ ஆகும்.

தொகையிடல் வழிமுறைகள் (Methods of Integration)

தொகையிடல் வழி முறைகளில் முதன்மையான நான்கு முறைகள் பின்வருமாறு,

(i) பிரித்துத் தொகையிடல்.

(ii) பகுதிப்படுத்தி தொகையிடல்.

(iii) பிரதியிடல் முறையில் தொகையிடல்.

(iv) அடுக்குகளை படிப்படியாகக் குறைத்து தொகையிடல்.

நினைவில் கொள்க!

சார்பு $f(x)$ –ஐ தொகையிடுக என்பது $\frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right]=f(x)$ எனுமாறு $F(x)$ எனும் சார்பை காண்பது ஆகும்.

குறிப்பு

இங்கு நாம் மேலுள்ள முதல் மூன்று தொகையிடல் முறைகளை மட்டுமே விவாதிப்போம். ஏனெனில் அடுக்குகளை படிப்படியாகக் குறைத்து தொகையிடும் முறையானது இப்பாடத்திட்டத்தின் நோக்கத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

2.1.3 பிரித்துத் தொகையிடல் (Integration by decomposition)

சில தொகைக்காண்பான்களுக்கு [தொகைக் காண் சார்புகளுக்கு] நேரடியாக அதன் தொகை யீட்டை காண இயலாது, ஆனால் அவற்றை கூட்டல் அல்லது கழித்தல் சார்புகளாக பிரித்து தொகையிடுதலுக்கு ஏதுவாக மாற்றியமைத்து, நமக்கு ஏற்கனவே தெரிந்த திட்டமான தொகையீடுகள் வாயிலாக தொகையிட இயலும். அவ்வகையான சார்புகளுக்கு இம் முறையை பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பு

எதிர் வகையிடல் என்ற செயல்முறையால் நேரடியாக பெறப்படும் தொகையீடுகள், தொகையிடலுக்கான திட்டமான முடிவுகள் எனப்படும்.

தொகையிடல்களுக்கான சில திட்டமான முடிவுகள் (Some standard results of integration)

வகை: I

(i) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 29 3/5/2020 11:03:12 AM

(ii) $\int (ax+b)^n \, dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \,, n \neq -1$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$y = \int f(x) \; dx \; = F(x) + c$$

என்ற சார்பைக் கொண்டு அமையும் வளைவரைகளின் தொகுதிக்கு $x = k$ இல் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் இணையாகவே இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}} dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}} dx = \int \left(ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{1}{2}} + cx^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= a\int x^{\frac{3}{2}} dx + b\int x^{\frac{1}{2}} dx + c\int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{2ax^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3} + 2c\,x^{\frac{1}{2}} + k$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int dx = x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.2

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int a(ax+b)^n \, dx = \int (ax+b)^n \, d(ax+b)$$

$$= \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{(2x+3)^2} = \int (2x+3)^{-2} dx$$

$$= -\frac{1}{2(2x+3)} + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c \;,\; n \neq 1$

(ii) $\displaystyle\int \frac{a}{(ax+b)^n} dx = \int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^n}$

$$= -\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + c,\; n \neq 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.4

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx$

தீர்வு:

$$\int \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int x^2 dx + 2\int dx + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

மதிப்பிடுக $\int (x^3+7)(x-4)\, dx$

தீர்வு:

$$\int (x^3+7)(x-4)\, dx = \int (x^4 - 4x^3 + 7x - 28)\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{7x^2}{2} - 28x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.6

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int \frac{2x^2-14x+24}{x-3} dx$

தீர்வு:

காரணிகளாக மாற்றியமைக்க,

$$2x^2 - 14x + 24 = (x-3)(2x-8)$$

$$\int \frac{2x^2-14x+24}{x-3} dx = \int \frac{(x-3)(2x-8)}{x-3} dx$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 30 3/5/2020 11:03:21 AM

$$= \int (2x-8)\,dx$$
$$= x^2 - 8x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.7

மதிப்பிடுக $\int \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}\,dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\frac{x+2}{\sqrt{2x+3}} = \frac{\frac{1}{2}(2x+4)}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x+3)+1}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(2x+3)^{\frac{1}{2}} + (2x+3)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{2}\left\{(2x+3)^{\frac{1}{2}} + (2x+3)^{-\frac{1}{2}}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} + (2x+3)^{\frac{1}{2}}\right\} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

மதிப்பிடுக $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\,dx$

தீர்வு:

காரணக்காரிய முறையில்,

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$$
$$= \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\,dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\left\{(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x-2)^{\frac{3}{2}}\right\} + c$$

பயிற்சி 2.1

பின்வருவனவற்றை x-ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $\sqrt{3x+5}$
2. $\left(9x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^2$
3. $(3+x)(2-5x)$
4. $\sqrt{x}\,(x^3-2x+3)$
5. $\frac{8x+13}{\sqrt{4x+7}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
7. $f'(x) = x+b,\ f(1)=5$ மற்றும் $f(2)=13$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.
8. $f'(x) = 8x^3 - 2x$ மற்றும் $f(2)=8$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.

வகை: II

(i) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

(ii) $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c$

எடுத்துக்காட்டு 2.9

மதிப்பிடுக $\int \frac{3x^2+2x+1}{x}\,dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x}\,dx = \int \left(3x+2+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \frac{3x^2}{2} + 2x + \log|x| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

மதிப்பிடுக $\int \frac{2}{3x+5}\,dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{2}{3x+5}\,dx = 2\int \frac{1}{3x+5}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\log|3x+5| + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \int \frac{d(ax+b)}{ax+b}$$
$$= \log|ax+b| + c$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 31 3/5/2020 11:03:30 AM

எடுத்துக்காட்டு 2.11

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^2+2x+3}{x+1}\,dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\frac{x^2+2x+3}{x+1} = \frac{(x^2+2x+1)+2}{x+1} = (x+1)+\frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x+1}\,dx = \int\left\{(x+1)+\frac{2}{x+1}\right\}dx = \frac{x^2}{2}+x+2\log|x+1|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.12

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^3+5x^2-9}{x+2}\,dx$

தீர்வு:

எளிய வகுத்தல் முறையில்,

$$\frac{x^3+5x^2-9}{x+2} = x^2+3x-6+\frac{3}{x+2}$$

$$\int \frac{x^3+5x^2-9}{x+2}\,dx = \int\left[x^2+3x-6+\frac{3}{x+2}\right]dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-6x+3\log|x+2|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.13

மதிப்பிடுக $\int \frac{7x-1}{x^2-5x+6}\,dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{20}{x-3}-\frac{13}{x-2}$$

$$\int \frac{7x-1}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left[\frac{20}{x-3}-\frac{13}{x-2}\right]dx$$

$$= 20\int\frac{dx}{x-3}-13\int\frac{dx}{x-2}$$

$$= 20\log|x-3|-13\log|x-2|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.14

மதிப்பிடுக $\int \frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)}\,dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,

$$\frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)} = -\frac{11}{(x-2)}-\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{11}{(x-3)}$$

$$\int \frac{3x+2}{(x-2)^2(x-3)}\,dx$$

$$= \int\left[-\frac{11}{(x-2)}-\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{11}{(x-3)}\right]dx$$

$$= -11\int\frac{dx}{(x-2)}-8\int\frac{dx}{(x-2)^2}+11\int\frac{dx}{(x-3)}$$

$$= -11\log|x-2|+\frac{8}{x-2}+11\log|x-3|+c$$

$$= 11\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+\frac{8}{x-2}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.15

மதிப்பிடுக $\int \frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)}\,dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,

$$\frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{A}{(x+3)}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{1}{(x+3)}+\frac{2x}{(x^2+1)}$$

$$\int \frac{3x^2+6x+1}{(x+3)(x^2+1)}\,dx = \int\left[\frac{1}{(x+3)}+\frac{2x}{(x^2+1)}\right]dx$$

$$= \int\frac{dx}{(x+3)}+\int\frac{2x}{(x^2+1)}dx$$

$$= \log|x+3|+\log|x^2+1|+c$$

$$= \log|(x+3)(x^2+1)|+c$$

$$= \log|x^3+3x^2+x+3|+c$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 32 3/5/2020 11:03:39 AM

பயிற்சி 2.2

பின்வருவனவற்றை x-ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $\left(\sqrt{2x}-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2$
2. $\dfrac{x^4-x^2+2}{x-1}$
3. $\dfrac{x^3}{x+2}$
4. $\dfrac{x^3+3x^2-7x+11}{x+5}$
5. $\dfrac{3x+2}{(x-2)(x-3)}$
6. $\dfrac{4x^2+2x+6}{(x+1)^2(x-3)}$
7. $\dfrac{3x^2-2x+5}{(x-1)(x^2+5)}$
8. $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ மற்றும் $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.

வகை: III

(i) $\int e^x\,dx = e^x + c$

(ii) $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+c$

(iii) $\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x + c$, $a>0$ மற்றும் $a\neq 1$

(iv) $\int a^{mx+n}dx = \frac{1}{m\log a}a^{mx+n}+c$, $a>0$

மற்றும் $a\neq 1$

எடுத்துக்காட்டு 2.16

மதிப்பிடுக $\int 3^{2x+3}\,dx$

தீர்வு:

$$\int 3^{2x+3}\,dx = \int 3^{2x}\cdot 3^3\,dx$$
$$= 3^3\int 3^{2x}dx$$
$$= 27\frac{3^{2x}}{2\log 3}+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int m a^{mx+n}\,dx = \int a^{mx+n}\,d(mx+n)$$
$$=\frac{1}{\log a}a^{mx+n}+c,$$
$a>0$ மற்றும் $a\neq 1$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

மதிப்பிடுக $\int \frac{e^x+7}{e^x}dx$

தீர்வு:

$$\int\frac{e^x+7}{e^x}dx = \int\left(1+7e^{-x}\right)dx$$
$$= x-7e^{-x}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.18

மதிப்பிடுக $\int\frac{5+5e^{2x}}{e^x+e^{-x}}dx$

தீர்வு:

$$\int\frac{5+5e^{2x}}{e^x+e^{-x}}dx = 5\int\frac{e^x\left(e^{-x}+e^x\right)}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$= 5\int e^x dx$$
$$= 5e^x+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.19

மதிப்பிடுக $\int\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2 dx$

தீர்வு:

$$\int\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \int\left(e^{2x}+\frac{1}{e^{2x}}+2\right)dx$$
$$= \int\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right)dx$$
$$= \frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^{-2x}}{2}+2x+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}\,dx$$
$$=\int e^{ax^2+bx+c}\,d\left(ax^2+bx+c\right)$$
$$=e^{ax^2+bx+c}+k$$

பயிற்சி 2.3

பின்வருவனவற்றை x -ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $e^{x\log a}+e^{a\log a}-e^{n\log x}$
2. $\dfrac{a^x-e^{x\log b}}{e^{x\log a}\,b^x}$
3. $\left(e^x+1\right)^2 e^x$
4. $\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^x}$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 33 3/5/2020 11:03:49 AM

5. $\dfrac{e^{3x}+e^{5x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 6. $\left[1-\frac{1}{x^2}\right]e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

7. $\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ 8. $f'(x) = e^x$ மற்றும் $f(0)=2$ எனில், $f(x)$ -ஐ காண்க.

வகை: IV

(i) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

(ii) $\int \sin(ax+b)\, dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+c$

(iii) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

(iv) $\int \cos(ax+b)\, dx = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+c$

(v) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(vi) $\int \sec^2(ax+b)\, dx = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b)+c$

(vii) $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

(viii) $\int \text{cosec}^2(ax+b)\, dx = -\dfrac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

எடுத்துக்காட்டு 2.20

மதிப்பிடுக $\int (2\sin x - 5\cos x)\, dx$

தீர்வு:

$$\int (2\sin x - 5\cos x)\, dx = 2\int \sin x\, dx - 5\int \cos x\, dx$$
$$= -2\cos x - 5\sin x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.21

மதிப்பிடுக $\int \sin^2 x\, dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$$
$$\therefore \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos 2x\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.22

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\, dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \text{cosec}^2 x - \sec^2 x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\, dx = \int (\text{cosec}^2 x - \sec^2 x)\, dx$$
$$= -\cot x - \tan x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.23

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$1+\sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x$$
$$= (\sin x + \cos x)^2$$

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\, dx$$
$$= \int (\sin x + \cos x)\, dx$$
$$= -\cos x + \sin x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

மதிப்பிடுக $\int \cos^3 x\, dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}[\cos 3x + 3\cos x]$$
$$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{4}\int \cos 3x\, dx + \frac{3}{4}\int \cos x\, dx$$
$$= \frac{\sin 3x}{12} + \frac{3\sin x}{4} + c$$

பயிற்சி 2.4

பின்வருவனவற்றை x-ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $2\cos x - 3\sin x + 4\sec^2 x - 5\,\text{cosec}^2 x$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 34 3/5/2020 11:04:00 AM

2. $\sin^3 x$

3. $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

4. $\dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ [குறிப்பு : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$]

5. $\sqrt{1-\sin 2x}$

2.1.4 பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடல் (Integration by parts)

வகை: V

1. u மற்றும் v என்பன x -ல் அமைந்த வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில் $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ என்பது நமக்கு தெரிந்ததே.

இருபுறமும் x -ஐ பொறுத்து தொகையிட,

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx$$

$$\Rightarrow \int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$\therefore \int udv = uv - \int vdu$$

பொதுவாக, தொகைக்காண்பானை இரு வெவ்வேறு சார்புகளின் பொருக்கலாகவோ அல்லது நேரடியாக தொகையிட முடியாத சார்பாகவோ அமையும்பொழுது, இம்முறையானது மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். இம்முறையை சரியாக கையாள்வது என்பது u என்ற சார்பை தெரிவு செய்வதில் உள்ளது.

எனவே, பின்வரும் வழிகாட்டுதல்களைப் பயன்படுத்தி u என்ற சார்பை தெரிவு செய்யலாம்.

(i) தொகைக்காண்பான் ஆனது நேரடியாக தொகையிட இயலாத ஒரே ஒரு சார்பை மட்டும் கொண்டு அமையுமானால், அத்தொகைக்காண்பானை u எனக் கொள்க.

(ii) தொகைக்காண்பான் ஆனது நேரடியாக தொகையிட இயலாத சார்ப்புப்பகுதி மற்றும் தொகையிடக் கூடிய சார்ப்புப்பகுதி எனக் கொண்டு அமையும்பொழுது, தொகையிட இயலாத சார்ப்புப்பகுதியை u எனக் கொள்க.

(iii) தொகைக்காண்பான் ஆனது இரு நேரடியாக தொகையிடக் கூடிய சார்ப்புப்பகுதிகளை கொண்டும், அதில் ஒன்றின் வடிவமானது x^n, n ஒரு மிகை முழு எண் என அமையும்பொழுது, அந்த x^n எனும் சார்புப்பகுதியை u எனக் கொள்க.

(iv) மற்ற அனைத்து நிலைகளுக்கும் u-ன் தேர்வானது நம் விருப்பத்தைப் பொறுத்தது.

(அல்லது) நாம் “I L A T E” எனும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் வரிசையின்படி முதலில் வரும் சார்ப்புப்பகுதியை u எனும் சார்பாக நிர்ணயம் செய்யலாம்.

இதில்,

I என்பது நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்பையும் [Inverse trigonometric function],

L என்பது மடக்கைச் சார்பையும் [Logarithmic function],

A என்பது இயற்கணிதச் சார்பையும் [Algebraic function],

T என்பது திரிகோணமிதிச் சார்பையும் [Trigonometric function],

E என்பது அடுக்கைச் சார்பையும் [Exponential function] குறிக்கின்றது.

மேலும், மீதமுள்ள சார்பையும் மற்றும் dx –ஐயும் சேர்த்து dv என எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

2. u மற்றும் v என்பன x -ல் அமைந்த இரு சார்புகள் எனில், $\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$ ஆகும்.

இதில் $u', u'', u''', \ldots$ என்பன u -ன் அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள் ஆகும்.

மற்றும் $v_1, v_2, v_3, \ldots$ என்பன v -ல் மீண்டும் மீண்டும் செய்கின்ற தொகையீடுகள் ஆகும்.

குறிப்பு

- 2 –ல் குறிப்பிடப்பட்ட சூத்திரமானது பெர்னோலியின் சூத்திரம் ஆகும்.
- பெர்னோலியின் சூத்திரமானது $u = x^n$, n ஒரு மிகை முழு எண் எனும் போது பயன்படுத்தப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.25

மதிப்பிடுக $\int xe^x\,dx$

தீர்வு:

$u = x$ வகையிட $du = dx$	$dv = e^x dx$ தொகையிட $v = e^x$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 35 3/5/2020 11:04:04 AM

$$\int xe^x\,dx = \int udv$$
$$= uv - \int vdu$$
$$= xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + c$$
$$= e^x\,(x-1)+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.26

மதிப்பிடுக $\int x^3 e^x dx$

தீர்வு:

அடுத்தடுத்து வகையிட	மீண்டும் மீண்டும் தொகையிட
$u = x^3$ $u' = 3x^2$ $u'' = 6x$ $u''' = 6$	$dv = e^x dx$ $v = e^x$ $v_1 = e^x$ $v_2 = e^x$ $v_3 = e^x$

$$\int x^3 e^x dx = \int udv$$
$$= uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$
$$= e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.27

மதிப்பிடுக $\int x^3 \log x\; dx$

தீர்வு:

$u = \log x$ வகையிட $du = \frac{1}{x}dx$	$dv = x^3 dx$ தொகையிட $v = \frac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \log x\; dx = \int udv$$
$$= uv - \int vdu$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right) + c$$
$$= \frac{x^4}{4}\left[\log x - \frac{1}{4}\right] + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.28

மதிப்பிடுக $\int (\log x)^2\; dx$

தீர்வு:

$u = (\log x)^2$ வகையிட $du = (2\log x)\left(\frac{1}{x}dx\right)$	$dv = dx$ தொகையிட $v = x$

$$\int (\log x)^2\; dx = \int udv$$
$$= uv - \int vdu$$
$$= x(\log x)^2 - 2\int \log x\, dx \ldots (*)$$

$(*)$ -ல் உள்ள $\int \log x\, dx$ -க்கு	
$u = \log x$ வகையிட $du = \frac{1}{x}dx$	$dv = dx$ தொகையிட $v = x$

$$= x(\log x)^2 - 2\int udv$$
$$= x(\log x)^2 - 2\left[uv - \int vdu\right]$$
$$= x(\log x)^2 - 2\left[x\log x - \int dx\right]$$
$$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + c$$
$$= x\left[(\log x)^2 - \log x^2 + 2\right] + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.29

மதிப்பிடுக $\int \left(x^2 - 2x + 5\right)e^{-x} dx$

தீர்வு:

அடுத்தடுத்து வகையிட	மீண்டும் மீண்டும் தொகையிட
$u = x^2 - 2x + 5$ $u' = 2x - 2$ $u'' = 2$	$dv = e^{-x} dx$ $v = -e^{-x}$ $v_1 = e^{-x}$ $v_2 = -e^{-x}$

$$\int \left(x^2 - 2x + 5\right)e^{-x} dx = \int udv$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 36 3/5/2020 11:04:17 AM

$$= uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$$

$$= \left(x^2 - 2x + 5\right)\left(-e^{-x}\right) - \left(2x - 2\right)e^{-x}$$

$$+ 2\left(-e^{-x}\right) + c$$

$$= e^{-x}\left(-x^2 - 5\right) + c$$

பயிற்சி 2.5

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. xe^{-x} 2. $x^3 e^{3x}$ 3. $\log x$

4. $x \log x$ 5. $x^n \log x$ 6. $x^5 e^{x^2}$

2.1.5 பிரதியிடல் முறையில் அல்லது மாறியை மாற்றி அமைக்கும் முறையில் தொகையிடல் (Integration by substitution (or) change of variable method)

குறிப்பிட்ட சில சார்புகளுக்கான தொகையிடலில் அதற்கான தொகையீட்டை நேரடியாக பெற இயலாது, ஏனெனில் அவை மேலே விவாதிக்கப்பட்ட எந்த ஒரு திட்டமான வடிவத்தையும் பெற்றிருக்காது. ஆனால் பொருத்தமான ஒன்றை பிரதியிடுவதன் மூலமாக ஒரு திட்டமான வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்கலாம். பொருத்தமான பிரதியிடல் மூலமாக ஒரு திட்டமான வடிவத்திற்கு மாற்றி தொகையீடு செய்யும் முறையானது **பிரதியிடல் முறையில் தொகையிடல்** எனப்படும்.

வகை: VI

1. $\int \left[f(x)\right]^n f'(x)\,dx = \dfrac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

2. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log\left|f(x)\right| + c$

3. $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

4. $\int e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = e^x f(x) + c$

5. $\int e^{ax}\left[a\,f(x) + f'(x)\right]dx = e^{ax} f(x) + c$

எடுத்துக்காட்டு 2.30

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{x}{x^2+1}\,dx$

தீர்வு:

$f(x) = x^2 + 1$ என்க.

$\therefore\ f'(x) = 2x$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[f(x)\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{nax^{n-1}}{ax^n + b}\,dx = \int \frac{d\left(ax^n + b\right)}{ax^n + b}$$

$$= \log\left|ax^n + b\right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.31

மதிப்பிடுக $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

தீர்வு:

$f(x) = x^2 + 1$ என்க.

$\therefore\ f'(x) = 2x$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{f(x)}\right] + c$$

$$= \sqrt{x^2+1} + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{nax^{n-1}}{\sqrt{ax^n + b}}\,dx = \int \frac{d\left(ax^n + b\right)}{\sqrt{ax^n + b}}$$

$$= 2\sqrt{ax^n + b} + c$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 37 3/5/2020 11:04:25 AM

எடுத்துக்காட்டு 2.32

மதிப்பிடுக $\int x\sqrt{x^2+1}\ dx$

தீர்வு:

$f(x)=x^2+1$ என்க.

$\therefore\quad f'(x)\ =2x$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ dx\ =\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}(2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[f(x)\right]^{\frac{1}{2}}f'(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\left[f(x)\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.33

மதிப்பிடுக $\int\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx$

தீர்வு:

$z=x^2+1$

$\therefore x^2=z-1$

$dz\ =\ 2x\,dx$

$\Rightarrow\ \frac{dz}{2}\ =\ x\,dx$

$$\int\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx\ =\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^3}x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{z-1}{z^3}dz$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\right]dz$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}\right]+c$$
$$=\frac{1}{4\left(x^2+1\right)^2}-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.34

மதிப்பிடுக $\int\frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}$

தீர்வு:

$z=x^3$ $\therefore\ dz\ =\ 3x^2\,dx$ $\Rightarrow\ \frac{dz}{3}\ =\ x^2\,dx,$	பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில், $\frac{1}{z\left(z+1\right)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}$ $\Rightarrow\frac{1}{z\left(z+1\right)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}$

$$\int\frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}\ =\int\frac{x^2}{x^3\left(x^3+1\right)}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z\left(z+1\right)}$$
$$=\frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right]dz$$
$$=\frac{1}{3}\left[\log|z|-\log|z+1|\right]+c$$
$$=\frac{1}{3}\log\left|\frac{z}{z+1}\right|+c$$
$$=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.35

மதிப்பிடுக $\int x^3e^{x^2}\,dx$

தீர்வு:

$z=x^2$

$\therefore\ dz=2x\,dx$

$\Rightarrow\ \frac{dz}{2}=x\,dx$

$$\int x^3e^{x^2}\,dx\ =\ \int x^2e^{x^2}\,(x\,dx)$$
$$=\ \frac{1}{2}\int z\,e^z dz$$

$=\frac{1}{2}\left[e^z\,(z-1)\right]+c$ [பகுதிப்படுத்தித் தொகையிடுவதன் மூலமாக]

$$=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\,(x^2-1)\right]+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.36

மதிப்பிடுக $\int e^x\left(x^2+2x\right)dx$

தீர்வு:

$$f(x)=x^2$$
$$\therefore \quad f'(x)=2x$$

$$\int e^x\left(x^2+2x\right)dx=\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx$$
$$= e^x f(x)+c$$
$$= e^x x^2+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.37

மதிப்பிடுக $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,	
$\frac{x}{(1+x)^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{(1+x)^2}$	$f(x)=\frac{1}{1+x}$
$\Rightarrow \frac{x}{(1+x)^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{-1}{(1+x)^2}$	$\therefore \quad f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$$
$$=\int e^x\left[\frac{1}{1+x}+\frac{-1}{(1+x)^2}\right]dx$$
$$=\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx$$
$$= e^x f(x)+c$$
$$= \frac{e^x}{1+x}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.38

மதிப்பிடுக $\int e^{2x}\left[\frac{2x-1}{4x^2}\right]dx$

தீர்வு:

$\frac{2x-1}{4x^2}=\frac{1}{2x}+\frac{-1}{4x^2}$	$a=2,$
$=\frac{1}{4}\left[2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{-1}{x^2}\right]$	$f(x)=\frac{1}{x}$
	$\therefore f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$$\int e^{2x}\left[\frac{2x-1}{4x^2}\right]dx$$
$$=\frac{1}{4}\int e^{2x}\left[2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{-1}{x^2}\right]dx$$
$$=\frac{1}{4}\int e^{ax}\left[a\,f(x)+f'(x)\right]dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[e^{ax}\;f(x)\right]+c$$
$$=\frac{1}{4x}\,e^{2x}+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.39

மதிப்பிடுக $\int\left[\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$

தீர்வு:

$$z=\log x$$
$$\therefore dz=\frac{1}{x}dx$$
$$\Rightarrow dx=e^z dz \quad \left[\because x=e^z\right]$$
$$f(z)=\frac{1}{z}$$
$$\therefore f'(z)=-\frac{1}{z^2}$$

$$\int\left[\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right]dx=\int\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right]e^z dz$$
$$=\int e^z\left[\,f(z)+f'(z)\right]dz$$
$$=e^z f(z)+c$$
$$=e^z\left[\frac{1}{z}\right]+c$$
$$=\frac{x}{\log x}+c$$

பயிற்சி 2.6

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து தொகையிடுக.

1. $\frac{2x+5}{x^2+5x-7}$
2. $\frac{e^{3\log x}}{x^4+1}$
3. $\frac{e^{2x}}{e^{2x}-2}$
4. $\frac{(\log x)^3}{x}$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 39 3/5/2020 11:04:47 AM

5. $\dfrac{6x+7}{\sqrt{3x^2+7x-1}}$ 6. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$

7. $x^8\left(1+x^9\right)^5$ 8. $\dfrac{x^{e-1}+e^{x-1}}{x^e+e^x}$

9. $\dfrac{1}{x\log x}$ 10. $\dfrac{x}{2x^4-3x^2-2}$

11. $e^x(1+x)\log\left(xe^x\right)$ 12. $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$

13. $e^x\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right]$ 14. $e^x\left[\dfrac{x-1}{(x+1)^3}\right]$

15. $e^{3x}\left[\dfrac{3x-1}{9x^2}\right]$

2.1.6 சில சிறப்பு வகைத் தொகையீடுகள் (Some special types of Integrals)

வகை: VII

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}\ ,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

மற்றும் $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ஆகிய வடிவில் உள்ள தொகையீடுகளை மதிப்பிட, முதலாவதாக நாம் ax^2+bx+c -ஐ இரு வர்க்கங்களின் கூடுதலாகவோ அல்லது கழித்தலாகவோ [வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்] விவரித்து, அதாவது $(x+\alpha)^2+\beta^2$ (அல்லது) $(x+\alpha)^2-\beta^2$ (அல்லது) $\beta^2-(x+\alpha)^2$ என மாற்றியமைத்து கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரங்களில் இருந்து பொருத்தமான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி தொகையீடு காண வேண்டும்.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

5. $\displaystyle\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

6. $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

எடுத்துக்காட்டு 2.40

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int\frac{dx}{16-x^2}$

தீர்வு:

$$\int\frac{dx}{16-x^2}=\int\frac{dx}{4^2-x^2}$$
$$=\frac{1}{2(4)}\log\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+c$$
$$=\frac{1}{8}\log\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.41

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int\frac{dx}{1-25x^2}$

தீர்வு:

$$\int\frac{dx}{1-25x^2}=\frac{1}{25}\int\frac{dx}{\left(\frac{1}{5}\right)^2-x^2}$$
$$=\frac{1}{25}\left[\frac{1}{2\left(\frac{1}{5}\right)}\log\left|\frac{\frac{1}{5}+x}{\frac{1}{5}-x}\right|\right]+c$$
$$=\frac{1}{10}\log\left|\frac{1+5x}{1-5x}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int\frac{m}{a^2-(mx)^2}\,dx=\int\frac{d(mx)}{a^2-(mx)^2}$$
$$=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+mx}{a-mx}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.42

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int\frac{dx}{2+x-x^2}$

தீர்வு:

$$\int\frac{dx}{2+x-x^2}=\int\frac{dx}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 40 3/5/2020 11:04:57 AM

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்,

$$2+x-x^2 = 2-\left[x^2-x\right]$$
$$= 2-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)}\log\left|\frac{\frac{3}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right|+c$$
$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{2+2x}{4-2x}\right|+c$$
$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{1+x}{2-x}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.43

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{4x^2-1}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{4x^2-1} = \int \frac{dx}{4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\log\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right|\right]+c$$
$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{m}{(mx)^2-a^2}\,dx = \int \frac{d(mx)}{(mx)^2-a^2}$$
$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{mx-a}{mx+a}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.44

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^2}{x^2-25}dx$

தீர்வு:

$$\int \frac{x^2}{x^2-25}dx = \int \frac{\left(x^2-25\right)+25}{x^2-25}dx$$
$$= \int\left\{1+\frac{25}{x^2-25}\right\}dx$$
$$= \int dx + 25\int \frac{dx}{x^2-25}$$
$$= x+25\left[\frac{1}{2(5)}\log\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\right]+c$$
$$= x+\frac{5}{2}\log\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.45

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

தீர்வு:

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்

$$x^2-3x+2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2$$
$$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$
$$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\log\left|\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right|+c$$
$$= \log\left|\frac{2x-4}{2x-2}\right|+c$$
$$= \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.46

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 41 3/5/2020 11:05:05 AM

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left[x^2-\frac{9}{4}\right]}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right|+c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}\right|+c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+c$$

குறிப்பு

$m\log n \pm k = c$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{m}{\sqrt{(mx)^2-a^2}}dx = \int \frac{d(mx)}{\sqrt{(mx)^2-a^2}}$$

$$= \log\left|mx+\sqrt{(mx)^2-a^2}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.47

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

தீர்வு:

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்
$x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2$
$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\log\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|+c$$

$$=\log\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.48

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5^2}}$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2+5^2}\right|+c$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2+25}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.49

மதிப்பிடுக $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

தீர்வு:

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்
$x^2+4x+8=(x+2)^2-4+8$
$=(x+2)^2+2^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2^2}}$$

$$=\log\left|(x+2)+\sqrt{(x+2)^2+2^2}\right|+c$$

$$=\log\left|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+8}\right|+c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int \frac{m}{\sqrt{(mx)^2+a^2}}dx = \int \frac{d(mx)}{\sqrt{(mx)^2+a^2}}$$

$$= \log\left|mx+\sqrt{(mx)^2+a^2}\right|+c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.50

மதிப்பிடுக $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+1}}$

தீர்வு:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{(x^4)^2+1^2}}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 42 3/5/2020 11:05:14 AM

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4 + \sqrt{\left(x^4\right)^2 + 1^2}\right| + c$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4 + \sqrt{x^8 + 1}\right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.51

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{x^2 - 16}\ dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{x^2 - 16}\ dx \ = \int \sqrt{x^2 - 4^2}\ dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4^2} - \frac{4^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - 4^2}\right| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 16} - 8\log\left|x + \sqrt{x^2 - 16}\ \right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.52

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{x^2 + 5}\ dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{x^2 + 5}\ dx = \int \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}\ dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} + \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{2}\ \log\left|x + \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}\right| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 5} + \frac{5}{2}\ \log\left|x + \sqrt{x^2 + 5}\right| + c$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\int m\sqrt{(mx)^2 + a^2}\ dx = \int \sqrt{(mx)^2 + a^2}\ d(mx)$$

$$= \frac{mx}{2}\sqrt{(mx)^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ \log\left|mx + \sqrt{(mx)^2 + a^2}\right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.53

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{4x^2 + 9}\ dx$

தீர்வு:

$$\int \sqrt{4x^2 + 9}\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{(2x)^2 + 3^2}\ d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{2}\sqrt{(2x)^2 + 3^2} + \frac{3^2}{2}\ \log\left|2x + \sqrt{(2x)^2 + 3^2}\right|\right] + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4x^2 + 9} + \frac{9}{4}\ \log\left|2x + \sqrt{4x^2 + 9}\right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.54

மதிப்பிடுக $\int \sqrt{x^2 - 4x + 3}\ dx$

தீர்வு:

வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையில்,

$$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3$$

$$= (x-2)^2 - 1^2$$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{(x-2)^2 - 1^2}$$

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 3}\ dx = \int \sqrt{(x-2)^2 - 1^2}\ dx$$

$$= \frac{(x-2)}{2}\ \sqrt{(x-2)^2 - 1^2} - \frac{1}{2}\ \log\left|(x-2) + \sqrt{(x-2)^2 - 1^2}\ \right| + c$$

$$= \frac{(x-2)}{2}\ \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \frac{1}{2}\ \log\left|(x-2) + \sqrt{x^2 - 4x + 3}\ \right| + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2.55

மதிப்பிடுக $\int \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\ dx$

தீர்வு:

காரணக்காரிய முறையில்,

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\ dx \ = \int \left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] dx$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 43

3/5/2020 11:05:23 AM

$$=\int x dx+\int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$$

பயிற்சி 2.7

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து தொகையிடுக:

1. $\frac{1}{9-16x^2}$
2. $\frac{1}{9-8x-x^2}$
3. $\frac{1}{2x^2-9}$
4. $\frac{1}{x^2-x-2}$
5. $\frac{1}{x^2+3x+2}$
6. $\frac{1}{2x^2+6x-8}$
7. $\frac{e^x}{e^{2x}-9}$
8. $\frac{1}{\sqrt{9x^2-7}}$
9. $\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}}$
10. $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$
11. $\frac{x^3}{\sqrt{x^8-1}}$
12. $\sqrt{1+x+x^2}$
13. $\sqrt{x^2-2}$
14. $\sqrt{4x^2-5}$
15. $\sqrt{2x^2+4x+1}$
16. $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

2.2 வரையறுத்த தொகையீடுகள் (Definite integrals)

இதுவரை நாம் வரையறாத் தொகையிடல்களில் அடிப்படை இயற்கணிதச் சார்பு, அடுக்கைச் சார்பு, திரிகோணமிதிச் சார்பு மற்றும் மடக்கைச் சார்பு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி தொகையீடு காணும் முறைகளைப் பற்றித் தெரிந்துக் கொண்டோம். இனி நாம் வரையறுத்த தொகையீடுகளைப் பற்றி படிக்கலாம்.

வடிவியலில், வரையறுத்த தொகையீடான $\int_a^b f(x)\,dx$ ஆனது ஒரு கூட்டுத் தொகையின் எல்லை மதிப்பாகக் குறிக்கப்படுகிறது. மேலும் இது, $y=f(x)$ என்ற சமன்பாட்டிற்குறிய வளைவரை, x -அச்சு மற்றும் $x=a,\ x=b$ எனும் குத்தாயங்களால் அடைபடும் பரப்பளவு எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது.

2.2.1 தொகை நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றங்கள் (The fundamental theorems of Integral Calculus)

தேற்றம் 2.1 நுண்கணிதத்தின் முதல் அடிப்படைத் தேற்றம் (First fundamental theorem of Integral Calculus):

சார்பு $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியுடையதாகவும் மற்றும் $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ எனில், $F'(x)=f(x)$ ஆகும்.

தேற்றம் 2.2 நுண்கணிதத்தின் இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றம் (Second fundamental theorem of Integral Calculus):

$f(x)$ என்ற சார்பு [a,b] என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும், மேலும் $f(x)$-ன் எதிர்மறை வகையீடானது $F(x)$ எனில் $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ஆகும்.

இங்கு a மற்றும் b என்பன வரையறுத்த தொகையீட்டின் கீழ் எல்லை மற்றும் மேல் எல்லை எனப்படும்.

குறிப்பு

$\int_a^b f(x)\,dx$ ஆனது ஒரு திட்டவட்டமான மாறிலியாகும், அதேசமயத்தில் $\int_a^x f(t)\,dt$ ஆனது ஒரு மாறிச் சார்பாகும்.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

$$\int f(x)\,dx=F(x)+c$$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.56

மதிப்பிடுக $\int_0^1\left(x^3+7x^2-5x\right)dx$

தீர்வு:

இதற்கு முந்தைய பகுதியில் $\int\left(x^3+7x^2-5x\right)dx$ –ஐ எவ்வாறு தொகையிடுவது என்பதைப் பற்றி தெரிந்துக் கொண்டோம்.

$$\therefore \int\left(x^3+7x^2-5x\right)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{7x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+c$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 44 3/5/2020 11:05:30 AM

இப்போது, $\int_0^1 \left(x^3+7x^2-5x\right)dx$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{7x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{4}+\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\right]-\left[\frac{0}{4}+\frac{0}{3}-\frac{0}{2}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{4}+\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.57

0 மற்றும் 1 -ஐ எல்லை மதிப்புகளாகக் கொண்டு $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{5x^2+1}$ எனும் சார்பை தொகையிடுக.

தீர்வு:

இங்கு, $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{5x^2+1}$

$$\therefore y = \int_0^1 \frac{2x}{5x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{10x}{5x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\left[\log\left(5x^2+1\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{5}\left[\log 6-\log 1\right]$$

$$=\frac{1}{5}\log 6$$

எடுத்துக்காட்டு 2.58

மதிப்பிடுக $\int_0^1 \left(e^x-4a^x+2+\sqrt[3]{x}\right)dx$

தீர்வு:

$$\int_0^1 \left(e^x-4a^x+2+\sqrt[3]{x}\right)dx$$

$$=\left[e^x-4\frac{a^x}{\log a}+2x+3\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1$$

$$=e-\frac{4a}{\log a}+2+\frac{3}{4}-1+\frac{4}{\log a}$$

$$=e+\frac{4(1-a)}{\log a}+\frac{7}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.59

மதிப்பிடுக $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx$

தீர்வு:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.60

மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$

தீர்வு:

எளியச் சார்புகளாக பிரித்தெழுத,

$$\cos 2x = 2\cos^2 x-1$$

$$\therefore \cos^2 x=\frac{1}{2}[1+\cos 2x]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[1+\cos 2x]\, dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0\right] = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.61

மதிப்பிடுக $\int_0^1 \left[e^{a\log x}+e^{x\log a}\right]dx$

தீர்வு:

$$\int_0^1 \left[e^{a\log x}+e^{x\log a}\right]dx = \int_0^1 \left(x^a+a^x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}+\frac{a^x}{\log a}\right]_0^1$$

குறிப்பு

$e^{a\log x}=x^a$

$$=\left(\frac{1}{a+1}+\frac{a}{\log a}\right)-\left(0+\frac{1}{\log a}\right)$$

$$=\frac{1}{a+1}+\frac{a}{\log a}-\frac{1}{\log a}$$

$$=\frac{1}{a+1}+\frac{(a-1)}{\log a}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.62

மதிப்பிடுக $\int_2^3 \frac{x^4+1}{x^2}dx$

தீர்வு:

$$\int_2^3 \frac{x^4+1}{x^2}dx = \int_2^3 \left(x^2+x^{-2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right]_2^3$$

$$=\left(9-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.63

மதிப்பிடுக $\int_{-1}^1 \left(x^3+3x^2\right)^3\left(x^2+2x\right)dx$

தீர்வு:

$$\int_{-1}^1 \left(x^3+3x^2\right)^3\left(x^2+2x\right)dx = \left[\frac{1}{3}\frac{\left(x^3+3x^2\right)^4}{4}\right]_{-1}^1$$

$$\left[\because \int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c\right]$$

$$=\frac{1}{3}(64-4)$$

$$=20$$

எடுத்துக்காட்டு 2.64

மதிப்பிடுக $\int_a^b \frac{\sqrt{\log x}}{x}dx \quad a,b>0$

தீர்வு:

$$\int_a^b \frac{\sqrt{\log x}}{x}dx = \int_a^b (\log x)^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x}$$

$$\left[\because \int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c\right]$$

$$=\left[\frac{2(\log x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_a^b$$

$$=\frac{2}{3}\left[(\log b)^{\frac{3}{2}}-(\log a)^{\frac{3}{2}}\right]$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$\log b^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log b$ ஆனால்,

$(\log b)^{\frac{3}{2}} \neq \frac{3}{2}\log b$ மற்றும்,

$(\log b)^{\frac{3}{2}}-(\log a)^{\frac{3}{2}} \neq \left(\log\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 2.65

மதிப்பிடுக $\int_{-1}^1 x\sqrt{x+1}\,dx$

$t=x+1$ என்க.
$dt=dx$

x	-1	1
t	0	2

தீர்வு:

$$\int_{-1}^1 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_0^2 (t-1)\sqrt{t}\,dt$$

$$=\int_0^2\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\left[\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^2$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{15}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 46 3/5/2020 11:05:47 AM

எடுத்துக்காட்டு 2.66

மதிப்பிடுக $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

தீர்வு:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty$$

$$= -2[0-1] = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.67

மதிப்பிடுக $\int_0^\infty x^2 e^{-x^3}\,dx$

தீர்வு:

$x^3 = t$ $3x^2\,dx = dt$ $\Rightarrow x^2\,dx = \frac{dt}{3}$		
x	0	∞
t	0	∞

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^3}\,dx = \int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-e^{-t}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{-1}{3}[0-1]$$

$$= \frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.68

மதிப்பிடுக $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக்கல் முறையில்,
$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ $\Rightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right] dx$$

$$= \left[\log|x+1| - \log|x+2|\right]_1^2$$

$$= \log\frac{3}{4} - \log\frac{2}{3}$$

$$= \log\frac{9}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.69

மதிப்பிடுக $\int_1^e \log x\,dx$

தீர்வு:

$u = \log x$ வகையிட, $du = \frac{1}{x}dx$	$dv = dx$ தொகையிட $v = x$

$$\int_1^e \log x\,dx = \int_1^e u\,dv = [uv]_1^e - \int_1^e v\,du$$

$$= [x\log x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx$$

$$= (e\log e - 1\log 1) - [x]_1^e$$

$$= (e-0) - (e-1)$$

$$= 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.70

மதிப்பிடுக $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

தீர்வு:

$u = x$ வகையிட $du = dx$	$dv = \sin x\,dx$ தொகையிட $v = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,dv$$

$$= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v\,du$$

$$= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.71

$\int_1^a 3x^2\,dx = -1$ எனில், $a \in R$ எனுமாறு a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு: $\int_1^a 3x^2\,dx = -1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\left[x^3\right]_1^a = -1$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 47 3/5/2020 11:05:58 AM

$$a^3 - 1 = -1$$
$$a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.72

$\int_a^b dx = 1$ மற்றும் $\int_a^b x\,dx = 1$ எனில், a மற்றும் b-ன் மதிப்புகளைக் காண்க

தீர்வு:

$\int_a^b dx = 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$[x]_a^b = 1$$
$$b - a = 1 \quad \ldots (1)$$

மேலும், $\int_a^b x\,dx = 1$ எனவும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = 1$$
$$b^2 - a^2 = 2$$
$$(b+a)(b-a) = 2$$
$$b + a = 2 \quad \ldots (2) \quad [\because b - a = 1]$$
$$(1)+(2) \Rightarrow 2b = 3$$
$$\therefore b = \frac{3}{2}$$

இப்போது, $\frac{3}{2} - a = 1$ $\quad [\because (1)$ லிருந்து$]$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.73

$f(x) = \begin{cases} 7x+3, & 1 \le x \le 3 \\ 8x, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$ எனில், $\int_1^4 f(x)\,dx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$$
$$= \int_1^3 (7x+3)\,dx + \int_3^4 8x\,dx$$
$$= \left[\frac{7x^2}{2} + 3x\right]_1^3 + \left[\frac{8x^2}{2}\right]_3^4$$
$$= \frac{63}{2} + 9 - \frac{13}{2} + 64 - 36$$
$$= 62$$

எடுத்துக்காட்டு 2.74

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \le x < 1 \\ x, & 1 \le x < 2 \\ x-4, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

எனக்கொண்டு பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ (ii) $\int_1^2 f(x)dx$ (iii) $\int_2^3 f(x)dx$

(iv) $\int_{-2}^{1.5} f(x)dx$ (v) $\int_1^3 f(x)dx$

தீர்வு:

(i) $\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) = 3$$

(ii) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(iii) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x-4)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4x\right]_2^3$

$$= \left(\frac{9}{2} - 12\right) - \left(\frac{4}{2} - 8\right) = -\frac{15}{2} + 6 = \frac{-3}{2}$$

(iv) $\int_{-2}^{1.5} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_1^{1.5} f(x)dx$

$= 3 + \int_1^{1.5} xdx$ (i) லிருந்து

$$= 3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{1.5} = 3 + \frac{2.25}{2} - \frac{1}{2} = 3 + \frac{1.25}{2} = 3.625$$

(v) $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$

$= \frac{3}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right) = 0$ (ii) மற்றும் (iii) லிருந்து

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 48 3/5/2020 11:06:10 AM

பயிற்சி 2.8

I. பின் வருவனவற்றை இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக.

1. $\int_0^1 e^{2x}dx$
2. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1-4x}\ dx$
3. $\int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1}$
4. $\int_0^3 \frac{e^x dx}{1+e^x}$
5. $\int_0^1 xe^{x^2}\ dx$
6. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\log x)^3}$
7. $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\ \ dx$
9. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\ dx$

II. பின் வருவனவற்றை தீர்க்க.

1. $f(x)=\begin{cases}4x+3, 1\leq x\leq 2\\ 3x+5, 2<x\leq 4\end{cases}$ எனும்பொழுது $\int_1^4 f(x)\ dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.
2. $f(x)=\begin{cases}3-2x-x^2,\ x\leq 1\\ x^2+2x-3,\ 1<x\leq 2\end{cases}$ எனும்பொழுது $\int_0^2 f(x)\ dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.
3. $f(x)=\begin{cases}x\ ,\ x\geq 0\\ -x,\ x<0\end{cases}$ எனும்பொழுது $\int_{-1}^1 f(x)\ dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.
4. $f(x)\ =\ \begin{cases}cx,\ \ 0<x<1\\ 0, \text{ மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$ மற்றும் $\int_0^1 f(x)dx\ \ =2$ எனில், c -ன் மதிப்பைக் காண்க.

2.2.2 வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகள் (Properties of definite integrals)

(i) $\int_a^b f(x)dx\ =\ \int_a^b f(t)dt$

(ii) $\int_a^b f(x)dx\ =\ -\int_b^a f(x)dx$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$\int_a^b dx = b-a$

(iii) $[a\ ,b]$ இல் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன தொடர்ச்சியான சார்புகள் எனில்,

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

(iv) $f(x)$ ஆனது $[a\ ,b]$ இல் தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $a<c<b$ எனில்,

$$\int_a^b f(x)dx\ =\ \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

(v) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$

நிரூபணம் :

$a-x=t$ என்க $dx=-dt$		
x	0	a
t	a	0

வ.ப. [R.H.S.] $=\int_0^a f(a-x)dx$

$=\int_a^0 f(t)(-dt)$

$=\int_0^a f(t)dt$

$=\int_0^a f(x)dx$ [பண்பு (i) இன் படி]

= இ.ப. [L.H.S.]

(vi) (அ) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில்,

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

(ஆ) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில்,

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0$$

நிரூபணம் :

(அ) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில்

$f(x)=f(-x)$ ...(1)

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 49 3/5/2020 11:06:21 AM

$$= \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad (1) \text{ -ன் படி}$$

$-x = t$ என்க. $dx = -dt$		
x	$-a$	0
t	a	0

பிரதியிடலை வலது பக்கத்தில் [R.H.S.] உள்ள முதல் தொகையிடலில் மட்டும் பயன்படுத்த,

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(t)(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

[பண்பு (i) இன் படி]

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(ஆ) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில்

$$f(-x) = -f(x) \qquad \ldots(2)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-a}^{0} -f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(2) –ன் படி

$-x = t$ என்க. $dx = -dt$		
x	$-a$	0
t	a	0

பிரதியிடலை வலது பக்கத்தில் [R.H.S.] உள்ள முதல் தொகையிடலில் மட்டும் பயன்படுத்த,

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \text{ [பண்பு (i) இன் படி]}$$

$$= 0$$

(vii) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$

நிரூபணம் :

$a+b-x = t$ மற்றும்

$$-dx = dt$$

$$dx = -dt$$

$t = a+b-x$		
x	a	b
t	b	a

$$\therefore \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

[பண்பு (i) இன் படி]

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$$

பின்வருவனவற்றை வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக:

எடுத்துக்காட்டு 2.75

மதிப்பிடுக $\int_{-1}^{1} \frac{x^5\,dx}{a^2 - x^2}$

தீர்வு:

$f(x) = \frac{x^5}{a^2 - x^2}$ என்க.

$$f(-x) = \frac{(-x)^5}{a^2 - (-x)^2} = \frac{-x^5}{a^2 - x^2} = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{x^5\,dx}{a^2 - x^2} = 0$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 50 3/5/2020 11:06:32 AM

எடுத்துக்காட்டு 2.76

மதிப்பிடுக $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

தீர்வு:

$f(x) = \cos x$ என்க.

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$\therefore f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு ஆகும்.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= 2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= 2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.77

மதிப்பிடுக $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + x\right) dx$

தீர்வு:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+x\right)dx = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx + \int_{-1}^{1} x \, dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} x^2 \, dx + 0 \quad [\because x^2$$ ஓர்

இரட்டைச் சார்பு மற்றும் x ஓர் ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்]

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3} - 0\right]$$

$$= \frac{2}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.78

மதிப்பிடுக $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

தீர்வு:

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$ என்க. ... (1)

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$$

$$\left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \quad \ldots(2)$$

$(1)+(2) \Rightarrow$

$$2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right] dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.79

மதிப்பிடுக $\int_{2}^{5} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} dx$

தீர்வு:

$$I = \int_{2}^{5} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} dx$$ என்க ...(1)

$$I = \int_{2}^{5} \frac{\sqrt{2+5-x}}{\sqrt{2+5-x} + \sqrt{7-(2+5-x)}} dx$$

$$\left[\because \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx\right]$$

$$I = \int_{2}^{5} \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} + \sqrt{x}} dx \quad \ldots(2)$$

$(1)+(2) \Rightarrow$

$$2I = \int_{2}^{5} \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} + \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} + \sqrt{x}}\right] dx$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 51 3/5/2020 11:06:41 AM

$$= \int_2^5 \left[\frac{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{7-x}} \right] dx$$

$$= \int_2^5 dx = [x]_2^5 = 3$$

$$\therefore \text{I} = \frac{3}{2}$$

பயிற்சி 2.9

பின் வருவனவற்றை வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி மதிப்பிடுக,

1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3 \cos^3 x dx$ 2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) dx$ 4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^7 x}{\sin^7 x + \cos^7 x} dx$

5. $\displaystyle\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$ 6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{4}}} dx$

2.2.3 காமா தொகையீடு (Gamma Integral)

முறைச் சாரா வரையறுத்த தொகையீடுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையை சார்ந்த தொகையீடுகளின் தொகையை மதிப்பிட உதவும் மிகவும் பயனுள்ள மற்றும் முக்கியமான முடிவு காமா தொகையீடு ஆகும்.

முதலில், நாம் வரையறாத் தொகையீடு, முறைசார்ந்த வரையறுத்த தொகையீடு மற்றும் முறைச்சாரா வரையறுத்த தொகையீடுகளுக்கான கருத்துருக்களை அறிந்துக் கொள்வோம்.

வரையறாத் தொகையீடு (Indefinite integral)

ஒரு தன்னிச்சையான மாறிலியை உள்ளடக்கி, எல்லைகள் இல்லாமல் வெளிப்படுத்தப் படும் தொகையிடலுக்கான செயல் முறையை வரையறாத் தொகையீடு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int e^{-t} dt$

முறைசார்ந்த வரையறுத்த தொகையீடு (Proper definite integral)

தொகைக்காண் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும், a மற்றும் b என்ற எல்லை மதிப்புகளை முடிவுறு எண்களாகவும் கொண்டு அமையும் தொகையிடல்களை முறைசார்ந்த வரையறுத்த தொகையீடு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_0^1 e^{-t} dt$

முறைசாரா வரையறுத்த தொகையீடு (Improper definite integral)

ஒரு எல்லை a அல்லது b அல்லது இரு எல்லை மதிப்புகள் a மற்றும் b யையும் முடிவிலியாகக் கொண்டு அமையும் தொகையிடல்கள், அல்லது தொகைக்காண் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ என்ற எல்லைகளுக்குள் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகளில் காண இயலாததாகவும் அமையும் தொகையிடல்களை முறைசாரா வரையறுத்த தொகையீடு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_0^\infty e^{-t} dt$

வரையறை 2.3

$n > 0$ எனும் போது, $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ –ஐ காமா சார்பு என்போம். இதனை $\Gamma(n)$ [காமா n] எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

குறிப்பு

n ஒரு மிகை முழு எண் எனில், $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ ஆனது காமா தொகையிடலில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலை ஆகும்.

பண்புகள் :

1. $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1), n > 1$
2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), n > 0$
3. $\Gamma(n+1) = n!,$ n ஒரு மிகை முழு எண்
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$\Gamma(1) = 1$

எடுத்துக்காட்டு 2.80

மதிப்பிடுக (i) $\Gamma(6)$ (ii) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$

(iii) $\int_0^\infty e^{-2x} x^5 dx$ (iv) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 52 3/5/2020 11:06:47 AM

தீர்வு:

(i) $\Gamma(6) = 5!$

$= 120$

(ii) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

(iii) $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ என்பதை நாம் அறிவோம்

$\therefore \int_0^\infty e^{-2x} x^5\, dx = \frac{5!}{2^{5+1}} = \frac{5!}{2^6}$

(iv) $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

இதில் $t = x^2$ என $dt = 2x dx$ ஆகும்.

$\therefore \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x^2} \left(x^2\right)^{n-1} 2x\, dx$

$= \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-2} 2x\, dx$

$= 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1}\, dx$

$n = \frac{1}{2}$ என, நாம் பெறுவது

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

$\Rightarrow \sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

$\therefore \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

பயிற்சி 2.10

1. பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\Gamma(4)$ (ii) $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$ (iii) $\int_0^\infty e^{-mx} x^6 dx$

(iv) $\int_0^\infty e^{-4x} x^4 dx$ (v) $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^5 dx$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-2x}, x \geq 0 \\ 0, \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$ எனில், $\int_0^\infty f(x) dx$ –ஐ மதிப்பிடுக.

2.2.4 வரையறுத்த தொகையீடுக்கான கூட்டல் எல்லை (Definite integral as the limit of a sum)

$[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்புகளைக் கொண்ட சார்பு என்க. இவ்விடைவெளியானது "h" எனும் சம அகலத்தைக் கொண்ட "n" உள்இடைவெளிகளாக பிரிக்கப்படுமானால்,

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} h\left[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots.. + f(a+(n-1)h)\right]$ ஆகும்.

இங்கு $h = \frac{b-a}{n}$ (அல்லது)

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} \sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh)$ ஆகும்.

இங்கு $h = \frac{b-a}{n}$

வரையறுத்த தொகையீட்டுக்கான கூட்டல் எல்லையை மதிப்பிட பின்வரும் முடிவுகள் மிகவும் உதவிகரமாக அமையும்.

(i) $1+2+3+\ldots\ldots n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{r=1}^{n} r$

(ii) $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{r=1}^{r=n} r^2$

(iii) $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \sum_{r=1}^{r=n} r^3$

எடுத்துக்காட்டு 2.81

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு, $\int_0^1 x\, dx$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} \sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh) \quad \ldots(1)$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 53 3/5/2020 11:06:59 AM

இங்கு $a=0,\ b=1,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$

மற்றும் $f(x)=x$

இப்போது $f(a+rh)=f\left(0+\frac{r}{n}\right)=f\left(\frac{r}{n}\right)=\frac{r}{n}$

இதை (1) -இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{r}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n} r$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}$$
$$= \frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.82

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு $\int_1^2 (2x+1)\,dx$ –ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\h\to 0}}\sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh) \quad ...(1)$$

இங்கு $a=1,\ b=2,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$

மற்றும் $f(x)=2x+1$

$$f(a+rh) = f\left(1+\frac{r}{n}\right)$$
$$= 2\left(1+\frac{r}{n}\right)+1$$
$$= 2+\frac{2r}{n}+1$$
$$f(a+rh) = 3+\frac{2r}{n}$$

இதை (1) -இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\int_1^2 (2x+1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\left(3+\frac{2r}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{3}{n}+\frac{2r}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\sum_{r=1}^{n}1+\frac{2}{n^2}\sum_{r=1}^{n}r\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}n+\frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$= 3+\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$\therefore \int_1^2 (2x+1)\,dx = 3+1 = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 2.83

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு, $\int_1^2 x^2\,dx$ –ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\h\to 0}}\sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh)$$

இங்கு $a=1,\ b=2,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$

மற்றும் $f(x)=x^2$

இப்போது $f(a+rh) = f\left(1+\frac{r}{n}\right)$

$$= \left(1+\frac{r}{n}\right)^2 = 1+\frac{2r}{n}+\frac{r^2}{n^2}$$

$$\therefore \int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2r}{n}+\frac{r^2}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2r}{n^2}+\frac{r^2}{n^3}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}1+\frac{2}{n^2}\sum_{r=1}^{n}r+\frac{1}{n^3}\sum_{r=1}^{n}r^2\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}(n)+\frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right]$$

$$=\left[1+1+\frac{(1)(2)}{6}\right]$$

$$\therefore \int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$$

பயிற்சி 2.11

வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டலின் எல்லை எனக் கொண்டு கீழ் காணும் தொகையீடுகளை மதிப்பிடுக.

1. $\int_0^1 (x+4)\,dx$
2. $\int_1^3 x\,dx$
3. $\int_1^3 (2x+3)\,dx$
4. $\int_0^1 x^2\,dx$

பயிற்சி 2.12

எற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. $\int \frac{1}{x^3}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\frac{-3}{x^2}+c$

   (b) $\frac{-1}{2x^2}+c$

   (c) $\frac{-1}{3x^2}+c$ (d) $\frac{-2}{x^2}+c$

Z8CXG9

2. $\int 2^x dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $2^x\log 2+c$ (b) 2^x+c

   (c) $\frac{2^x}{\log 2}+c$ (d) $\frac{\log 2}{2^x}+c$

3. $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\sin x+c$ (b) $\frac{1}{2}\sin x+c$

   (c) $\cos x+c$ (d) $\frac{1}{2}\cos x+c$

4. $\int \frac{\sin 5x-\sin x}{\cos 3x}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $-\cos 2x+c$ (b) $-\cos 2x+c$

   (c) $-\frac{1}{4}\cos 2x+c$ (d) $-4\cos 2x+c$

5. $\int \frac{\log x}{x}dx\ (x>0)$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\frac{1}{2}(\log x)^2+c$ (b) $-\frac{1}{2}(\log x)^2$

   (c) $\frac{2}{x^2}+c$ (d) $\frac{2}{x^2}+c$

6. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}+c$ (b) $2\sqrt{1+e^x}+c$

   (c) $\sqrt{1+e^x}+c$ (d) $e^x\sqrt{1+e^x}+c$

7. $\int \sqrt{e^x}\,dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\sqrt{e^x}+c$ (b) $2\sqrt{e^x}+c$

   (c) $\frac{1}{2}\sqrt{e^x}+c$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{e^x}}+c$

8. $\int e^{2x}[2x^2+2x]dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $e^{2x}x^2+c$ (b) $xe^{2x}+c$

   (c) $2x^2e^2+c$ (d) $\frac{x^2e^x}{2}+c$

9. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\log\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+c$ (b) $\log\left|\frac{e^x+1}{e^x}\right|+c$

   (c) $\log\left|e^x\right|+c$ (d) $\log\left|e^x+1\right|+c$

10. $\int\left[\frac{9}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right]dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

   (a) $\log|x-3|-\log|x+1|+c$

   (b) $\log|x-3|+\log|x+1|+c$

   (c) $9\log|x-3|-\log|x+1|+c$

   (d) $9\log|x-3|+\log|x+1|+c$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 55 3/5/2020 11:07:26 AM

11. $\int \frac{2x^3}{4+x^4}\,dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

(a) $\log\left|4+x^4\right|+c$ (b) $\frac{1}{2}\log\left|4+x^4\right|+c$

(c) $\frac{1}{4}\log\left|4+x^4\right|+c$ (d) $\log\left|\frac{2x^3}{4+x^4}\right|+c$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-36}}$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

(a) $\sqrt{x^2-36}+c$

(b) $\log\left|x+\sqrt{x^2-36}\right|+c$

(c) $\log\left|x-\sqrt{x^2-36}\right|+c$

(d) $\log\left|x^2+\sqrt{x^2-36}\right|+c$

13. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ -ன் மதிப்புச் சார்பு

(a) $\sqrt{x^2+3x+2}\ +c$

(b) $2\sqrt{x^2+3x+2}+c$

(c) $\log\left(x^2+3x+2\right)+c$

(d) $\frac{2}{3}\left(x^2+3x+2\right)^{\frac{3}{2}}+c$

14. $\int_0^1 (2x+1)\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

15. $\int_2^4 \frac{dx}{x}$ -ன் மதிப்பு

(a) log 4 (b) 0 (c) log 2 (d) log 8

16. $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

17. $\int_{-1}^1 x^3 e^{x^4}\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) $2\int_0^1 x^3 e^{x^4}\,dx$ (c) 0 (d) e^{x^4}

18. $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $a<c<b$ எனில் $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ -க்கு சமமான தொகையிடல்,

(a) $\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^c f(x)\,dx$

(b) $\int_a^c f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$

(c) $\int_a^b f(x)\,dx$

(d) 0

19. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) 4

20. $\int_0^1 \sqrt{x^4(1-x)^2}\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{-7}{12}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) $\frac{-1}{12}$

21. $\int_0^1 f(x)\,dx=1,\ \int_0^1 x\,f(x)\,dx=a$ மற்றும் $\int_0^1 x^2\,f(x)\,dx=a^2$ எனில், $\int_0^1 (a-x)^2\,f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $4a^2$ (b) 0 (c) $2a^2$ (d) 1

22. $\int_2^3 f(5-x)\,dx-\int_2^3 f(x)\,dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 0 (c) −1 (d) 5

23. $\int_0^4 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{21}{3}$

(c) $\frac{28}{3}$ (d) $\frac{1}{3}$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx$ -ன் மதிப்பு

(a) $\log 2$ (b) 0

(c) $\log \sqrt{2}$ (d) $2 \log 2$

25. காமா சார்புக்கான காரணிய பெருக்க அடிப்படையில் $n = 8$ எனும்பொழுது $\Gamma(n)$ -ன் மதிப்பு

(a) 5040 (b) 5400 (c) 4500 (d) 5540

26. $\Gamma(n)$ -ன் மதிப்பு

(a) $(n-1)!$ (b) $n!$

(c) $n\Gamma(n)$ (d) $(n-1)\Gamma(n)$

27. $\Gamma(1)$ -ன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) $n!$

28. $n > 0$ எனில், $\Gamma(n)$ –க்கு சமமான தொகையீடு

(a) $\int_0^1 e^{-x} x^{n-1} dx$ (b) $\int_0^1 e^{-x} x^{n} dx$

(c) $\int_0^\infty e^{x} x^{-n} dx$ (d) $\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$

29. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ –ன் மதிப்பு

(a) $\sqrt{\pi}$ (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(c) $2\sqrt{\pi}$ (d) $\frac{3}{2}$

30. $\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx$ -ன் மதிப்பு

(a) 12 (b) 4 (c) $4!$ (d) 64

இதர கணக்குகள்

பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக:

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}} dx$
2. $\int \frac{dx}{2 - 3x - 2x^2}$
3. $\int \frac{dx}{e^x + 6 + 5e^{-x}}$
4. $\int \sqrt{2x^2 - 3} \, dx$
5. $\int \sqrt{9x^2 + 12x + 3} \, dx$
6. $\int (x+1)^2 \log x \, dx$
7. $\int \log\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) dx$
8. $\int_0^1 \sqrt{x(x-1)} \, dx$
9. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-2x} dx$
10. $\int_0^3 \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 57 3/5/2020 1:45:35 PM

தொகுப்புரை

- **வருவித்தச் சார்பு மற்றும் தொடக்க நிலைச் சார்புக்கான தொடர்பு:**

  வருவித்தச் சார்பு $f(x)$-க்கான தொடக்க நிலைச் சார்பு $F(x)$ எனில், $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]=f(x)$ ஆகும்.

- **சார்பின் தொகையீடு:**

  கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பினுடைய தொகையிடலை நிர்ணயிக்கும் செயல்பாடானது அச்சார்பின் தொகையீடு என வரையறுக்கப்படுகிறது

- **வரையறாத் தொகையீட்டின் பண்புகள்:**

  $$\int a\,f(x)\;dx = a\int f(x)\;dx$$

  $$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\;dx \pm \int g(x)\;dx$$

- **வரையறாத் தொகையீட்டின் சில திட்டமான முடிவுகள்:**

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\; n\neq -1$
2. $\int \frac{1}{x}dx \;=\; \log|x|+c$
3. $\int e^x\,dx = e^x + c$
4. $\int a^x\;dx = \frac{1}{\log a}\,a^x + c, a>0$ மற்றும் $a\neq 1$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
7. $\int \sec^2 x\,dx \;=\; \tan x + c$
8. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
9. $\int\left[f(x)\right]^n f'(x)\,dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}+c, n\neq -1$
10. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|+c$
11. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+c$
12. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
13. $\int u\,dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \ldots$
14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$
15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$
18. $\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx \;=\; e^x f(x)+c$
19. $\int e^{ax}\left[a\,f(x)+f'(x)\right]dx = e^{ax} f(x)+c$
20. $\int \sqrt{x^2-a^2}\;dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$
21. $\int \sqrt{x^2+a^2}\;dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 58 3/5/2020 11:07:53 AM

- **வரையறுத்த தொகையீடு:**

  $f(x)$ என்ற சார்பு [a,b] என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும், மேலும் $f(x)$-ன் எதிர்மறை வகையீடானது $F(x)$ எனில், $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ஆகும்.

- **வரையறுத்த தொகையீட்டின் பண்புகள்:**

  (i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ (ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

  (iii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ (iv) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

  (v) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ (vi) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

  (vii) a) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

  b) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

- **காமா தொகையீட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலை:**

  n ஒரு மிகை முழு எண் எனில், $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

- **காமா சார்பின் பண்புகள்:**

  (i) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1),\ n > 1$ (ii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),\ n > 0$

  (iii) $\Gamma(n+1) = n!$, n ஒரு மிகை முழு எண் (iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

- **வரையறுத்த தொகையீட்டின் கூட்டல் எல்லை :**

  $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்புகளைக் கொண்ட சார்பு என்க. இவ்விடைவெளியானது "h" எனும் சம அகலத்தைக் கொண்ட n உள்இடைவெளிகளாக பிரிக்கப்படுமானால்

  $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{r=1}^{n} h\, f(a+rh)$$ ஆகும். இங்கு $h = \frac{b-a}{n}$

- **முடிவுகள் :**

  (i) $1+2+3+......n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{r=1}^{n} r$

  (ii) $1^2+2^2+3^2+......n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{r=1}^{r=n} r^2$

  (iii) $1^3+2^3+3^3+......n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \sum_{r=1}^{r=n} r^3$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 59 3/5/2020 11:08:00 AM

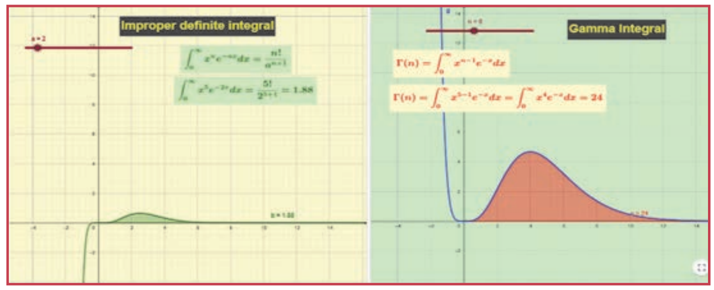
கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
அடுக்கு விதி	Power rule
அடுக்கைச் சார்பு / அடுக்குகுறிச் சார்பு	Exponential function
அடுத்தடுத்த / தொடர்ச்சியான	Successive
அணுகுதல் / நெருங்குதல்	Approaches
அறமச் சார்பு / இயற் கணிதச் சார்பு	Algebraic function
அறுதியிடப்படாத தொகையீடு / வரையறாதத் தொகையீடு	Indefinite integral
இணைத் தொடுகோடுகள்	Parallel tangents
இயல் மடக்கை	Natural logarithm
இறுதிநிலைச் சார்பு	Marginal function
உடனடியாக	Instantaneous
உத்தி / நுட்பம்	Technique
உள்வரை	Inscribe
எதிர் மறை செயல்	Reverse process
எதிர்மறை வகையீடு	Anti derivative
ஏதேனுமொரு / தன்னிச்சையான	Arbitrary
ஏற்புடைய / பொருத்தமான	Suitable
ஒருமைத் தன்மை கொண்ட சார்பு	Unique function
கணியம் / அளவு	Quantity
கருத்துரு	Concept
காரணக்காரிய முறை	Rationalisation method
கீழ் எல்லை	Lower limit
குத்தாயம் / நிலைத் தூரம்	Ordinate
குறிப்பிடப்பட்ட எல்லைகளுக்குள்	Between the specified limits
குறைப்பு / சுருக்கல்	Reduction
கூடுதல் / கூட்டல் தொகை	Summation
திட்ட வடிவம்	Standard form
திறந்த இடைவெளி	Open interval
தொகை / தொகையீடு	Integral
தொகைக்காண் சார்பு / தொகைக் காண்பான்	Integrand
தொகைப்பான்	Integrator
தொகையிடத்தக்கச் சார்பு	Integrable function
தொகையிடல்	Integration
தொகையிடல் மாறி	Variable of integration

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 60 3/5/2020 11:08:00 AM

தொகையிடல் மாறிலி	Constant of integration
தொகையிடு / தொகையிட	Integrate
தொடர் முறைத் தொகையீடு / மீண்டும் மீண்டும் தொகையிடப்பட்ட	Repeated integral
தொடர் வகையிடல்கள் / அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள்	Successive derivatives
தொடர்ச்சியான சார்பு	Continuous function
தோராயமாக	Approximate
நிச்சயமான / உறுதியான	Certain
நுண்ம மதிப்பு / புலனாகாத மதிப்பு	Abstract value
நேரிடையாக தொகையிட	Directly integrate
நேர் மாற்று கோணவியல் சார்பு / நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்பு	Inverse trigonometric function
பகுதிப் படுத்தித் தொகையிடல் / பகுதித் தொகையிடல்	Integration by parts
பகுதிப் பின்னம்	Partial fraction
பிரதியிடல் / ஈடு செய்தல்	Substitution
பிரதியிட்டுத் தொகையிடல்	Integration by substitution
பிரித்தல் / கூறாக்கல்	Decomposition
மடக்கை சார்பு	Logarithmic function
மட்டாயம் / கிடை தூரம்	Abscissa
மாறா உறுப்பு	Constant term
மாறியின் மாற்றம்	Change of variable
மிகை முழு எண்	Positive integer
முக்கோண கணிப்பு சார்பு / திரிகோணமிதிச்சார்பு	Trigonometric function
முடிவிலி / கந்தழி / எண்ணிலி	Infinity
மூடிய இடைவெளி	Closed interval
மூலமுதலான சார்பு / தொடக்க நிலைச் சார்பு	Primitive function
மேல் எல்லை	Upper limit
வகைக்கெழு / வகையீட்டு கெழு	Differential coefficient
வகையிடத்தக்கச் சார்பு	Differentiable function
வகையிடல்	Differentiation
வரம்புள்ள பகுதி	Bounded region
வருவித்தச் சார்பு	Derived function
வரையறுத்த தொகை / வரையறுத்த தொகையீடு	Definite integral
வர்க்க நிறைவாக்கல்	Completing the square
வளைவரைகளின் தொகுதி	Family of curves

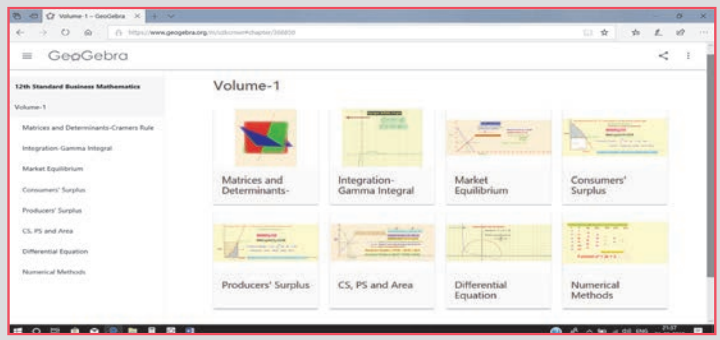
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



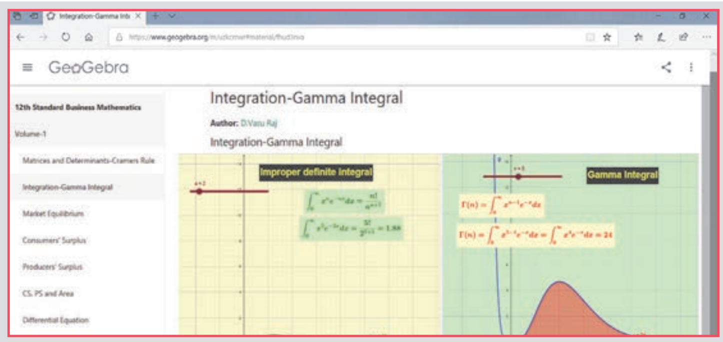
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Integration–Gamma Integral" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவுசெய்துகொள்ளவும். பின்பு திரையில் தோன்றும் வரைபடத்தில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள நழுவானை (slider) பயன்படுத்தி n மதிப்பினை நகர்த்தினால் வரைபடத்தின் தோன்றும் மாற்றத்தை தெரிந்துகொள்ளலாம்.



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 2.indd 62 3/5/2020 11:08:01 AM