प्राथमिक क्षेत्रमिति – I
(Elementary Mensuration - I)

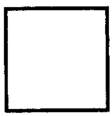
क्षेत्रमिति (Mensuration) के अन्तर्गत किसी समतल आकृति के क्षेत्रफल से संबंधित प्रश्नों को हल करना पड़ता है। इस अध्याय में हम ऐसे ही कुछ प्रश्नों की चर्चा करेंगे और उन्हें हल करने की संक्षिप्त विधियाँ भी तलाशेंगे।

पर इसके पूर्व कुछ परिभाषाओं पर एक नजर डाल लें।

कुछ प्राथमिक परिभाषाएँ

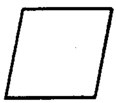
1. ***आयत* (Rectangle)** : एक ऐसा चतुर्भुज, जिसके आमने-सामने की भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक कोण 90° हो।

2. ***वर्ग* (Square)** : एक ऐसा चतुर्भुज, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक कोण समकोण (90°) हो।

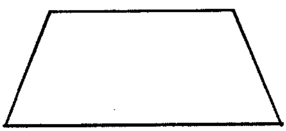


3. ***समानांतर चतुर्भुज* (Parallelogram)** : एक ऐसा चतुर्भुज, जिसकी आमने-सामने की भुजाएँ एक-दूसरे के समानांतर एवं बराबर हों।

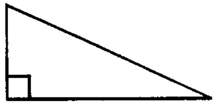
4. ***समचतुर्भुज* (Rhombus)** : एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज, जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों।



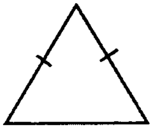
5. ***समलंबचतुर्भुज* (Trapezium)** : एक ऐसा चतुर्भुज, जिसके सम्मुख भुजाओं का कोई एक जोड़ा समानांतर हो।



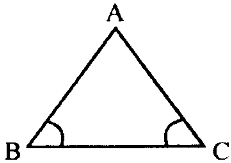
6. ***समकोण त्रिभुज* (Right-angled triangle)** : एक त्रिभुज, जिसका एक कोण 90° के बराबर हो।



7. **_समद्विबाहु त्रिभुज_ (Isosceles triangle)** : एक ऐसा त्रिभुज, जिसकी कोई दो भुजा आपस में बराबर हो।

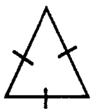


उपप्रमेय: किसी समद्विबाहु त्रिभुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

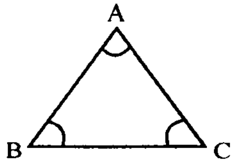


$\angle B = \angle C$

8. **_समबाहु त्रिभुज_ (Equilateral triangle)** : एक ऐसा त्रिभुज, जिसकी तीनों भुजाएँ आपस में बराबर हों।

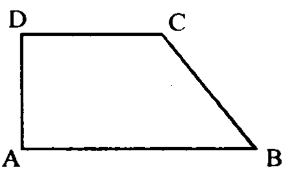


उपप्रमेय: किसी समबाहु त्रिभुज के तीनों कोण समान होते हैं और इनमें से प्रत्येक कोण का मान 60° के बराबर होता है।



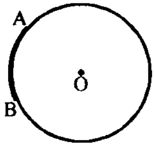
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

9. **_परिमिति_ (Perimeter)** : ज्यामितीय आकृति के बाह्य सीमा रेखा की लंबाई परिमिति या Perimeter कही जाती है।



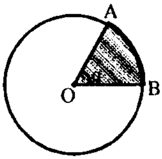
ABCD की परिमिति = AB + BC + CD + DA

10. ***किसी वृत्त का चाप* (Arc of a circle) :** वृत्त की परिमिति (वक्र रेखा का एक हिस्सा) का एक खंड चाप कहलाता है।



चाप AB = AB लंबाई

11. ***वृत्त का त्रिज्याखंड* (Sector of a circle) :** वृत्त के चाप उसके केन्द्र एवं दो त्रिज्याओं से घिरा क्षेत्र त्रिज्याखंड कहलाता है।



छायांकित भाग = त्रिज्याखंड AOB

महत्वपूर्ण सूत्रों की सूची:

1. (i) आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

   (ii) लंबाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$; चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}}$

   (iii) $(\text{विकर्ण})^2 = (\text{लंबाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2$

   (iv) परिमिति = 2(लंबाई + चौड़ाई)

2. (i) वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = \frac{1}{2}(\text{विकर्ण})^2$

   (ii) वर्ग की परिमिति = 4 × भुजा

3. कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2 × (लंबाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

4. समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

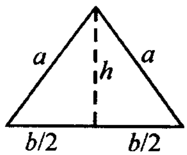
5. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × (विकर्णों का गुणनफल)

   यदि d_1 एवं d_2 दोनों विकर्ण हों तो, समचतुर्भज की भुजा = $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

6. (i) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

   (ii) समबाहु त्रिभुज की परिमिति = 3 × भुजा

7. समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$



$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$$

8. यदि a, b, c त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयां हों और

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ तो,

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

9. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

10. समलम्ब चतुर्भज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समानांतर भुजाओं का योग × इन भुजाओं के बीच की लंबवत दूरी)

$$= \frac{1}{2}(a+b)h$$

(जहाँ a एवं b समलंब चतुर्भुज की समानांतर भुजाएँ हैं तथा h, भुजाएँ a एवं b के बीच की लंबवत दूरी है।)

$$h = \frac{2}{k}\sqrt{s(s-k)(s-c)(s-d)}$$

(जहाँ, $k = (a-b)$ अर्थात समानांतर भुजाओं के बीच का अंतर तथा c एवं d समलंब चतुर्भुज की असमानांतर भुजाएँ हैं एवं

$s = \frac{k+c+d}{2}$)

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{a+b}{k}\sqrt{s(s-k)(s(s-k)(s-c)(s-d)}$

11. (i) वृत्त की परिधि = $2\pi r$

(ii) वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

(iii) चाप AB = $\frac{2\pi r\theta}{360°}$ जहाँ $\angle AOB = \theta$ एवं 'O' केन्द्र है।

(iv) त्रिज्याखंड AOB का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2\theta}{360°}$ (पिछले पृष्ठ पर चित्र देखें)

(v) त्रिज्याखंड AOB का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × चाप AB × r

12. एक समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

जहाँ, a एवं b दो आसन्न भुजाएँ (adjacent sides) हैं तथा d विकर्ण है जो दोनों भुजाओं a एवं b को जोड़ता है।

क्षेत्रफल से संबंधित प्रश्नों को हल करना

क्षेत्रफल से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिए ऊपर दिए गए सूत्र पर्याप्त हैं। पर कुछ खास तरह के प्रश्नों के लिए हम संक्षिप्त विधि विकसित करने का भी प्रयत्न करेंगे। इन सभी संभावनाओं की व्याख्या निम्नलिखित उदाहरणों के प्रसंग में की जाएगी।

चतुर्भुज पर प्रश्न

उदा. 1: यदि किसी चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ (adjacent sides) क्रमशः 5 से. मी. एवं 4 से. मी. हैं तथा दोनों भुजाओं का विकर्ण 7 से. मी. है तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-D)}$

जहाँ $S = \frac{a+b+D}{2} = \frac{5+4+7}{2} = 8$

$$= 2\sqrt{8(8-5)(8-4)(8-7)}$$

$$= 2\sqrt{8\times 3\times 4} = 8\sqrt{6} = 19.6$$ वर्ग से. मी.

उदा. 2: एक चतुर्भुज में आसन्न भुजाओं की लंबाई क्रमशः 12 से. मी. एवं 14 से. मी. है। यदि एक विकर्ण की लंबाई 16 से. मी. हो तो दूसरे विकर्ण की लंबाई ज्ञात करें।

हल: एक चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग = 2 × दो आसन्न भुजाओं के वर्गों का योग

या, $D_1{}^2 + D_2{}^2 = 2(a^2 + b^2)$

या, $16^2 + x^2 = 2(12^2 + 14^2)$

या, $256 + x^2 = 2(144 + 196)$

या, $x^2 = 680 - 256 = 424$

$\therefore\ x = \sqrt{424} = 20.6$ से. मी.

समलम्ब चतुर्भुज पर प्रश्न

उदा. 1: एक समलंब चतुर्भुज (trapezium) में समानांतर भुजाएँ क्रमशः 60 से. मी. एवं 90 से. मी. हैं एवं असमानांतर भुजाएँ क्रमशः 40 से. मी. एवं 50 से. मी. हैं। क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: k = समानान्तर भुजाओं के बीच का अंतर = 90 − 60 = 30 से. मी.

माना कि c = 40 से. मी. तो d = 50 से. मी.

अब, $s=\frac{k+c+d}{2}=\frac{30+40+50}{2}=\frac{120}{2}=60$ से. मी.

$\therefore$ क्षेत्रफल $=\frac{a+b}{k}\sqrt{s(s-k)(s-c)(s-d)}$

$$=\frac{60+90}{30}\sqrt{60(60-30)(60-40)(60-50)}$$

$$=5\sqrt{60\times30\times20\times10}=5\times600=3000 \text{ वर्ग से. मी.}$$

उदा. 2: उपर्युक्त प्रश्न में समलंब चतुर्भुज के दो समानांतर भुजाओं के बीच की लंबवत दूरी ज्ञात करें।

हल: $h=\frac{2}{k}\sqrt{s(s-k)(s-c)(s-d)}$

$$=\frac{2}{30}\times\sqrt{60\times30\times20\times10}=\frac{1}{15}\times600=40 \text{ से. मी.}$$

नोट: हम इस क्षेत्रफल की जाँच कर सकते हैं।

$$=\frac{1}{2}(a+b)h=\frac{1}{2}\times(60+90)\times40=150\times20=3000 \text{ वर्ग से. मी.}$$

उदा. 3: एक 5100 वर्ग से. मी. क्षेत्रफल वाला समलंब चतुर्भुज के दो समानान्तर भुजाओं के बीच की लंबवत दूरी 60 से. मी. है। यदि एक समानान्तर भुजा की लंबाई 40 से. मी. हो तो दूसरी समानान्तर भुजा की लंबाई ज्ञात करें।

$$A=\frac{1}{2}(a+b)h \quad \text{या,} \quad 5100=\frac{1}{2}(40+x)\times60 \quad \text{या,} \quad 170=40+x$$

$\therefore$ अभीष्ट दूसरी समानान्तर भुजा = 170−40 = 130 मी.

आयत और वर्ग पर आधारित प्रश्न

टाइप I: ऐसे प्रश्न, जिनमें केवल सूत्रों का अनुप्रयोग निहित होता है

उदा. 1: उस आयत का क्षेत्रफल निकालें जिसकी भुजाएँ क्रमश: 25 मी. 7 डेसीमीटर लंबी एवं 14 मीटर 4 डेसीमीटर 8 सेंटीमीटर चौड़ी हों।

हल: लंबाई = 23.70 मीटर

चौड़ाई = 14.48 मीटर

$\therefore$ क्षेत्रफल = (23.70 × 14.48) वर्ग मीटर = 343.18 वर्ग मीटर; उत्तर

उदा. 2: उस आयत का विकर्ण बताएँ जिसकी भुजाएँ 12 मीटर एवं 5 मीटर हों।

हल: विकर्ण की लंबाई = $\sqrt{12^2+5^2}$ मीटर

= $\sqrt{169}$ मीटर = 13 मीटर; उत्तर

टाइप* II: *फर्श पर दरी लगवाना

उदा. 3: 20 मी. लंबे एवं 12 मीटर चौड़े फर्श पर दरी बिछाने के लिए कितने मीटर दरी चाहिए होगी, यदि दरी की चौड़ाई 75 सेंटीमीटर हो?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

$$\text{अभीष्ट लंबाई} = \frac{\text{कमरे की लंबाई} \times \text{कमरे की चौड़ाई}}{\text{दरी की चौड़ाई}}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट लंबाई} = \frac{20\times12}{0.75} = 320 \text{ मीटर}$$

उपप्रमेय: यदि दरी 20 रु. प्रति मीटर हो तो इसे फर्श पर डलवाने में कितनी लागत आएगी?

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

$$\text{अभीष्ट राशि} = \text{दर प्रति मीटर} \times \frac{\text{कमरे की (लम्बाई} \times \text{चौड़ाई)}}{\text{दरी की चौड़ाई}}$$

$$= 20 \times \frac{20\times12}{0.75} = 6400 \text{ रु.}$$

टाइप* III: *यदि किसी आंगन में टाइलें बिछवानी हो

उदा. 4: 30 मी. लंबे एवं 16.5 मी. चौड़े आंगन के फर्श में पत्थर डलवाने के लिए पत्थर के कितने टुकड़े चाहिए, यदि पत्थर की माप 2.5 मीटर × 2 मीटर हो?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

$$\text{अभीष्ट पत्थर के टुकड़ों की संख्या} = \frac{\text{लंबाई} \times \text{आंगन की चौड़ाई}}{\text{लंबाई} \times \text{प्रत्येक पत्थर के टुकड़े की चौड़ाई}}$$

$$= \frac{30\times16.5}{2.5\times2} = 99$$

उपप्रमेय: यदि उपर्युक्त माप की टाइल 1 रु. प्रति टाइल की दर से उपलब्ध हो तो आंगन में टाइल बिछवाने में कुल कितनी राशि खर्च होंगे ?

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

$$\text{अभीष्ट राशि} = \frac{\text{(एक टाइल की कीमत)} \times \text{आंगन की (लंबाई} \times \text{चौड़ाई)}}{\text{पत्येक टाइल की (लंबाई} \times \text{चौड़ाई)}}$$

$$= 1 \times \frac{30\times16.5}{2.5\times2} = 99 \text{ रु.}$$

टाइप IV: *वर्गाकार टाइल बिछाना: सबसे बड़ा टाइल*

उदा. 5: 39 मी. 10 सेंटीमीटर लंबे एवं 35 मीटर 70 सेंटीमीटर चौड़े एक हॉल में समान आकार वाले वर्गाकार टाइल बिछाने हैं। सबसे बड़े टाइल की माप बताएँ ताकि टाइलें पूर्णतया हॉल में फिट हो जाएँ तथा टाइल की कुल संख्या भी बताएँ।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

सबसे बड़े टाइल (संभावित) की भुजा = कमरे की लंबाई एवं चौड़ाई का महत्तम समापवर्तक

= 39.10 एवं 35.70 मीटर का महत्तम समापवर्तक

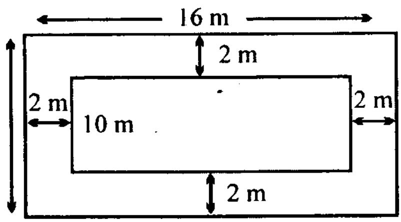
= 1.70 मीटर

$$\text{अभीष्ट टाइलों की संख्या} = \frac{\text{कमरे की (लंबाई} \times \text{चौड़ाई)}}{(\text{कमरे की लंबाई एवं चौड़ाई का महत्तम समापवर्तक})^2}$$

$$= \frac{39.10 \times 35.70}{1.70 \times 1.70} = 483$$

टाइप V: *बगीचे के चारों ओर का रास्ता तथा कमरे के चारों ओर का बरामदा*

उदा. 6: 12 मीटर लंबे एवं 10 मीटर चौड़े एक हॉल के चारों ओर 2 मीटर चौड़ा बरामदा है। बरामदे का क्षेत्रफल निकालें।



हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

ऐसी स्थितियों में,

(I) ***जब बरामदा, कमरे के बाहर चारों ओर से घेरता हो***

बरामदे का क्षेत्रफल = 2(बरामदे की चौड़ाई) × [कमरे की लंबाई + चौड़ाई + 2(बरामदे की चौड़ाई)] ***(याद रखें)***

(II) ***जब रास्ता बगीचे के अंदर चारों ओर बना हुआ हो***

रास्ते का क्षेत्रफल = 2(रास्ते की चौड़ाई) × [बगीचे की लंबाई + चौड़ाई – 2(रास्ते की चौड़ाई)] ***[याद रखें]***

दिए गए प्रश्न के लिए,

सूत्र-I से, (चूँकि बरामदा कमरे के बाहर है, इसलिए सूत्र-I का प्रयोग किया जाएगा)

बरामदे का क्षेत्रफल $= 2 \times 2 \times (10 + 12 + 2 \times 2)$

$= 4 \times 26 = 104$ वर्ग मीटर

उदा. 7: किसी आयताकार घास के मैदान की माप 112 मीटर × 78 मीटर है। इस मैदान के अंदर 2.5 मीटर चौड़ा कंकड़ का एक रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल निकालें तथा 2 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से इसे बनाने की लागत बताएँ।

हल: ऊपर दिए गए सूत्र-II से (चूँकि रास्ता मैदान के अंदर है, इसलिए सूत्र-II ही इस्तेमाल किया जाएगा),

रास्ते का क्षेत्रफल $= 2 \times 2.5 \times (112 + 78 - 2 \times 2.5)$

$= 5 \times 185 = 925$ वर्गमीटर

$\therefore$ निमार्ण कार्य की लागत = दर × क्षेत्रफल = $2 \times 925 = 1850$ रु.

रास्ते पर आधारित कुछ और स्थितियाँ

A. जब रास्ते का क्षेत्रफल दिया गया हो तो बगीचे का क्षेत्रफल निकालना (बगीचा वर्गाकार है)

उदा. 8: किसी वर्गाकार बगीचे के चारों ओर स्थित 2 मीटर चौड़े रास्ते का क्षेत्रफल 9680 वर्ग मीटर है। तो रास्ते से घिरे बगीचे का क्षेत्रफल निकालें।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

$$\text{वर्गाकार बगीचे का क्षेत्रफल} = \left[\frac{\text{रास्ते का क्षेत्रफल} - 4 \times (\text{रास्ते की चौड़ाई})^2}{4 \times \text{रास्ते की चौड़ाई}}\right]^2$$

(याद रखें)

$\therefore$ दिए गए प्रश्न में,

$$\text{बगीचे का क्षेत्रफल} = \left(\frac{9680 - 4 \times (2)^2}{4 \times 2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{9664}{8}\right)^2 = (1208)^2$$

$= 1459264$ वर्ग मी.

B. जब रास्ते का क्षेत्रफल दिया गया हो, तो रास्ते की चौड़ाई निकालना

उदा. 9: 37 मी. लंबे और 30 मीटर चौड़े आयताकार पार्क के अंदर स्थित रास्ते का क्षेत्रफल 570 वर्ग मीटर है। रास्ते की चौड़ाई बताएँ।

हल: ***द्रुत विधि (सूत्र-II, उदा. 6 देखें)***

रास्ते का क्षेत्रफल = 2 × रास्ते की चौड़ाई × [बगीचे की (लंबाई + चौड़ाई) − 2×(रास्ते की चौड़ाई)]

$\Rightarrow 570 = 2 \times x \times [37 + 30 - 2x]$ (x रास्ते की चौड़ाई है)

$\Rightarrow 570 = 134x - 4x^2$

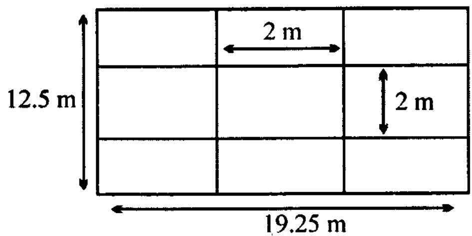
$\Rightarrow 4x^2 - 134x + 570 = 0$

∴ इस समीकरण को हल करने पर

$x = 5$ मीटर

C. *जब रास्ते एक-दूसरे को काटते हों (महत्वपूर्ण)*

उदा. 10: किसी आयताकार मैदान की माप 19 मीटर 2.5 डेसीमीटर × 12 मीटर 5 डेसीमीटर है। प्रत्येक भुजा के केन्द्र से 2 मीटर चौड़ा रास्ता गुजरता है और ये दोनों रास्ते एक-दूसरे को काटते भी हैं। रास्ते का क्षेत्रफल निकालें। 1.32 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से, इन पर पत्थर बिछाने में कितना खर्च आएगा ?



हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल करें:

I. *रास्ते का क्षेत्रफल* = (रास्ते की चौड़ाई) [बगीचे की (लंबाई + चौड़ाई) – रास्ते की चौड़ाई] ***(याद रखे)***

II. *रास्ते को छोड़कर, शेष बगीचे का क्षेत्रफल* = (बगीचे की लंबाई – रास्ते की चौड़ाई) × (बगीचे की चौड़ाई – रास्ते की चौड़ाई) ***(स्मरणीय)***

दिए गए प्रश्न के संदर्भ में,

रास्ते का क्षेत्रफल $= 2 \times (19.25 + 12.5 - 2)$

$= 2 \times 29.75 = 59.5$ वर्ग मीटर

∴ पत्थर बिछाने में आने वाला खर्च = दर × क्षेत्रफल

$= (59.5 \times 1.32)$ रु. $= 78.54$ रु.

टाइप VI: *क्षेत्रफल और अनुपात*

उदा. 11: किसी आयताकार मैदान का क्षेत्रफल 726 वर्ग मीटर है। तथा उसकी भुजाएँ 3:2 के अनुपात में हैं तो भुजाओं की माप क्या है ?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

भुजा $= \sqrt{\text{क्षेत्रफल} \times \text{अनुपात}}$

दूसरी भुजा $= \sqrt{\text{क्षेत्रफल} \times \text{व्युत्क्रमानुपात (inverse ratio)}}$

∴ दिए गए प्रश्न में,

पहली भुजा $= \sqrt{726 \times \frac{3}{2}} = \sqrt{1089} = 33$ मीटर

तथा, दूसरी भुजा = $\sqrt{726 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{484} = 22$ मीटर

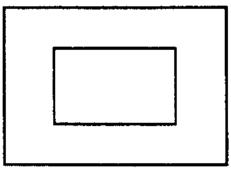
टाइप **VII:** *विविधि उदाहरण*

टर्की कारपेट एवं ऑयल क्लॉथ

उदा.: 12. 10 वर्ग मीटर वाले किसी कमरे के केन्द्र में टर्की कारपेट का एक वर्ग है तथा फर्श के बचे हुए हिस्से पर ऑयल क्लॉथ बिछा हुआ है। कारपेट एवं ऑयल क्लॉथ की कीमतें क्रमशः 15 रु. एवं 6.50 रु. प्रति वर्ग मीटर हैं तथा टर्की कारपेट एवं ऑयल क्लॉथ की कुल लागत 1338.50 रु. है। ऑयल क्लॉथ के बोर्डर की चौड़ाई बताएँ।

हल: वर्गाकार कमरे का क्षेत्रफल = 100 वर्ग मीटर

औसत खर्च प्रति वर्ग मीटर = $\frac{1338.50}{100}$ = 13.385 रु.



कारपेट   ऑयलक्लॉथ

15   6.50

        13.385

6.885   1.615

= 81 : 19

मिश्रण-विधि (Rule of Alligation) से, वर्गाकार कारपेट का क्षेत्रफल = 81 वर्ग मीटर

∴ कारपेट की लंबाई एवं चौड़ाई = 9 मीटर

लेकिन कमरे की लंबाई एवं चौड़ाई = 10 मी.

∴ बोर्डर की चौड़ाई का दुगुना = (10 – 9 =) 1 मीटर

∴ बोर्डर की चौड़ाई = $\frac{1}{2}$ मीटर = 5 डेसीमीटर; उत्तर

विकर्ण

उदा. 13: 2 वर्ग किलोमीटर क्षेत्रफल वाला एक वर्गाकार मैदान घेरा(fence) के सहारे दो बराबर हिस्सों में विभाजित किया जाना है। यह घेरा (fence) विकर्ण के सम्पाती (coincide) होता है। घेरा की लंबाई बताएँ।

हल: वर्ग का क्षेत्रफल = 2 वर्ग किलोमीटर

∴ विकर्ण = $\sqrt{2 \times 2} = 2$ किलोमीटर; उत्तर

उदा. 14: 31684 वर्ग मीटर माप वाले किसी वर्गाकार मैदान को तार से घेरना है। ये तार जमीन से क्रमश: 1,2,3, एवं 4 मीटर की ऊँचाई पर लगाए जाने हैं। यदि एक बार घेरने में मैदान की परिमिति से 5% अधिक लंबाई का तार चाहिए होता हो तो कुल मिलाकर कितना लंबा तार चाहिए होगा?

हल: मैदान का क्षेत्रफल = 31684 वर्ग मीटर

परिमिति $= \sqrt{31684} \times 4$ मीटर

$= 178 \times 4$ मीटर

$\therefore$ तार के प्रत्येक घेरे की लंबाई $= 178 \times 4 \times \frac{105}{100}$ मीटर

$\because$ तार के चार घेरे डाले जाते हैं; इसलिए अभीष्ट तार की कुल लंबाई

$$= 178 \times 4 \times \frac{105}{100} \times 4$$

$= 2990.4$ मीटर ***(उत्तर)***

त्रिभुज पर आधारित प्रश्न

टाइप I: सूत्रों का साधारण प्रयोग

उदा. 15: किसी त्रिभुजाकार मैदान का आधार 880 मीटर है एवं ऊँचाई 550 मीटर है। इस मैदान का क्षेत्रफल निकालें। इस मैदान में 24.25 रु. प्रति वर्ग हेक्टोमीटर की दर से जल की आपूर्ति का खर्च भी बताएँ।

हल: मैदान का क्षेत्रफल $= \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{2}$

$$= \frac{880 \times 550}{2} \text{ वर्ग मीटर}$$

$$= \frac{440 \times 550}{100 \times 100} \text{ वर्ग हेक्टोमीटर}$$

$= 24.20$ वर्ग हेक्टोमीटर (उत्तर)

1 वर्ग हेक्टोमीटर में पानी की आपूर्ति का खर्च = 24.25 रु.

$\therefore$ पूरे मैदान में पानी की आपूर्ति का खर्च $= (24.20 \times 24.25)$ रु.

$= 586.85$ रु. (उत्तर)

उदा. 16: किसी त्रिभुजाकार खेत का आधार उसकी ऊँचाई का तिगुना है। यदि 36.72 रु. प्रति हेक्टेयर की दर से इसमें खेती करने की लागत 495.72 रु. हो तो खेत का आधार एवं ऊँचाई बताएँ।

हल: खेत का क्षेत्रफल $= \frac{495.72}{36.72}$ हेक्टेयर

$$= \frac{27}{2} \text{ हेक्टेयर}$$

खेत का क्षेत्रफल (दूसरे तरीके से) $= \frac{1}{2} \times 3 \times$ ऊँचाई $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{3}{2} (\text{ऊँचाई})^2$$

$$\therefore \frac{3}{2} (\text{ऊँचाई})^2 = \frac{27}{2} \text{ हेक्टेयर}$$

$$\therefore (\text{ऊँचाई})^2 = \frac{27}{2} \times \frac{2}{3} \text{ हेक्टेयर}$$

= 9 हेक्टेयर

= 90,000 वर्ग मीटर

$\therefore$ ऊँचाई $= \sqrt{90,000}$ मी. = 300 मी. (उत्तर)

आधार = 3 × ऊँचाई = 900 मीटर; उत्तर

उदा. 17: उस त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालें, जिसकी भुजाएँ क्रमशः 50 मीटर, 78 मीटर और 112 मीटर हैं। सम्मुख कोण से 112 मीटर लंबी भुजा पर डाले गए लम्ब की लंबाई बताएँ।

हल: यहाँ a = 50 मीटर, b = 78 मीटर, c = 112 मीटर

$$\therefore s = \frac{1}{2}(50 + 78 + 112) \text{ मीटर}$$

$$= \frac{1}{2} \times 240 \text{ मीटर} = 120 \text{ मीटर}$$

$\therefore (s - a) = (120 - 50)$ मीटर = 70 मीटर

$(s - b) = (120 - 78)$ मीटर = 42 मीटर

$(s - c) = (120 - 112)$ मीटर = 8 मीटर

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \sqrt{120 \times 70 \times 42 \times 8}$ वर्ग मीटर

= 1680 वर्ग मीटर (उत्तर)

$$\therefore \text{लंब की लंबाई} = \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{1680 \times 2}{112}$$

= 30 मीटर (उत्तर)

***टाइप II: त्रिभुज पर आधारित प्रश्नों के लिए संक्षित विधि* (Quicker Method)**

उदा. (18 – 20): उपर्युक्त तीनों उदाहरणों (उदा.–15–17) को द्रुत-विधि (Quicker Method) से हल करें।

हल: ***उदा.-18:*** चूँकि उदा. 15 में सीधे सूत्र का उपयोग किया गया है, इसलिए प्रयुक्त विधि ा से भी संक्षिप्त विधि हो ही नहीं सकता।

उदा. 19. उदा.-16 में आधार एवं ऊँचाई के बीच का अनुपात 3 : 1 है। ऐसे प्रश्नों के लिए

निम्नलिखित नियम का प्रयोग करें:

$$\text{आधार} = \sqrt{2 \times \text{क्षेत्रफल} \times \text{अनुपात}}$$

$$\text{ऊँचाई} = \sqrt{2 \times \text{क्षेत्रफल} \times \text{अनुपात का व्युत्क्रम}}$$

दिया गया है कि आधार : ऊँचाई = 3 : 1

$\because$ आधार के साथ जुड़ा हुआ अनुपात 3 है तथा ऊँचाई के साथ जुड़ा हुआ अनुपात 1 है।

$$\therefore \text{ आधार} = \sqrt{2 \times \frac{27}{2} \times \frac{3}{1}} = 900 \text{ मीटर}$$

$$\text{ऊँचाई} = \sqrt{2 \times \frac{27}{2} \times \frac{1}{3}} = 300 \text{ मीटर}$$

उदा. 20. उदा.–17 में सीधे सूत्र का ही इस्तेमाल किया गया है, इसलिए इससे अधिक संक्षिप्त विधि ढूँढ़ पाना मुश्किल है।

समानांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज एवं समलम्ब चतुर्भुज पर आधारित प्रश्न

टाइप I: प्रश्न, जिनमें सूत्रों का सीधा उपयोग हो

उदा. 21: समानांतर चतुर्भुज के आकार वाले धातु के उस टुकड़े का क्षेत्रफल निकालें, जिसका आधार 10 सेंटीमीटर है और ऊँचाई 6.4 सेंटीमीटर।

हल: सतह का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

$= 6.4 \times 10$

$= 64$ वर्ग सेंटीमीटर

उदा. 22: उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालें, जिसके दोनों विकर्णों की लंबाई क्रमश: 8 सेंटीमीटर एवं 10 सेंटीमीटर हो।

हल: क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 10 = 40$ वर्ग सेंटीमीटर।

उदा. 23: किसी समलम्ब चतुर्भुज की दोनों समानांतर भुजाओं के बीच की दूरी बताएँ यदि क्षेत्रफल 250 वर्ग मीटर हो तथा दोनों समानांतर भुजाएँ क्रमश: 15 मी. एवं 10 मीटर लंबी हैं।

हल: यहाँ,

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ ऊँचाई × (समानांतर भुजाओं का योग)

या, $250 = \frac{1}{2} \times$ ऊँचाई $\times (15 + 10)$

या, ऊँचाई = $\frac{250 \times 2}{25}$

∴ ऊँचाई = 20 मीटर

टाइप II: कुछ संक्षिप्त विधियाँ

A. ***किसी ऐसे समचतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना जिसकी एक भुजा एवं एक विकर्ण दिया हुआ हो।***

उदा. 24: उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालिए जिसकी एक भुजा 20 सेंटीमीटर हो तथा एक विकर्ण 24 सेंटीमीटर हो।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

$$\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \text{विकर्ण} \times \sqrt{(\text{भुजा})^2 - \left(\frac{(\text{विकर्ण})}{2}\right)^2}$$ ***(याद रखें)***

∴ दिए गए प्रश्न में

$$\text{क्षेत्रफल} = 24 \times \sqrt{(20)^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2}$$

$$= 24 \times \sqrt{400 - 144}$$

$$= 24 \times 16 = 384 \text{ वर्ग सेंटीमीटर}$$

उदा. 25: किसी समचतुर्भुज की परिमिति 146 सेंटीमीटर है तथा इसके एक विकर्ण की लंबाई मात्र 55 सेंटीमीटर है। दूसरा विकर्ण एवं समचतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालें।

हल: ***द्रुत विधि*(Quicker Method) :**

$$\text{दूसरा विकर्ण} = 2 \times \sqrt{(\text{भुजा})^2 - \left(\frac{(\text{विकर्ण})}{2}\right)^2}$$ ***(याद रखें)***

$$\text{समचतुर्भुज की एक भुजा} = \frac{146}{4} = 36.5 \text{ से. मी.}$$

$$\therefore \text{ दूसरा विकर्ण} = 2 \times \sqrt{(36.5)^2 - \left(\frac{55}{2}\right)^2} = 48 \text{ सेंटीमीटर}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times (\text{विकर्णों का गुणनफल})$$

$$= \frac{1}{2} \times 48 \times 55 = 1320 \text{ वर्ग से. मी.}$$

समबहुभुज पर आधारित समस्याएँ (Problems on Regular Polygon)

***समबहुभुज* (Regular Polygon)** एक ऐसा बहुभुज, (त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षट्भुज, सप्तभुज, अष्टभुज आदि) है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। ऐसे समबहुभुजों के मामलें में निम्नलिखित सूत्र उपयोगी सिद्ध होते हैं :

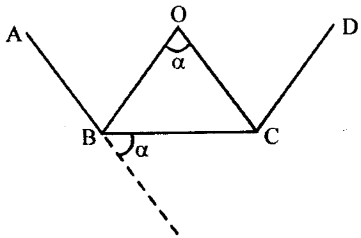
A. किसी समबहुभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times$ भुजाओं की संख्या × अंतर्वृत्त (inscribed circle) की त्रिज्या

B. षट्भुज (Hexagon) का क्षेत्रफल = $\frac{3\sqrt{3}}{2}\times(\text{भुजा})^2$

C. अष्टभुज (Octagon) का क्षेत्रफल = $2\left(\sqrt{2}+1\right)\times(\text{भुजा})^2$

D. सम बहुभुज में कोणों का माप

(i) समबहुभुज की प्रत्येक भुजा द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण उसके बाह्य कोण (exterior angle) के बराबर होता है।



(ii) यदि किसी समबहुभुज का प्रत्येक बाह्य कोण दिया हुआ हो तो उस बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात की जा सकती है।

$$\text{भुजाओं की संख्या} = \frac{360}{\text{प्रत्येक बाह्य कोण}}$$

(iii) n भुजाओं वाले किसी समबहुभुज का प्रत्येक अंत:कोण (interior angle) = $180\left(\frac{n-2}{n}\right)$ तथा किसी n भुजाओं वाले समबहुभुज के सभी कोणों का योग = $180°(n-2)$.

उदा. 26: उस समषट्भुज (regular hexagon) का क्षेत्रफल निकालें जिसकी प्रत्येक भुजा 9 सेंटीमीटर है।

हल: किसी समषट्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

यहाँ, $a = 9$ सेंटीमीटर

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \frac{3\sqrt{3}\times 9^2}{2}$ वर्ग सेंटीमीटर

$= 210.4$ वर्ग सेंटीमीटर (लगभग)

उदा. 27: उस समअष्टभुज की भुजा (मीटर में) निकालें जिसका क्षेत्रफल 1 हेक्टेयर है।

हल: समअष्टभुज का क्षेत्रफल $= 2(1+\sqrt{2})a^2$

प्रश्नानुसार, $2(1+\sqrt{2})a^2 = 1$ हेक्टेयर

$\therefore\ a^2 = \frac{10,000}{2(1+\sqrt{2})}$ वर्ग मीटर

या, $a^2 = 2071$ वर्ग मीटर (लगभग)

$\therefore\ a = 46$ मीटर (लगभग); उत्तर

कमरे एवं दीवारों पर आधारित प्रश्न

उदा. 28: 8 मीटर लंबे, 6 मीटर चौड़े और 3 मीटर ऊँचे किसी कमरें में $1\frac{1}{2}$ मीटर $\times$ 1 मीटर आकार की दो खिड़कियाँ हैं एवं 2 मीटर $\times\ 1\frac{1}{2}$ मीटर आकार का एक दरवाजा है। दीवारों पर पेपर बिछाने में कितना खर्च आएगा यदि 50 सेंटीमीटर चौड़ा पेपर 25 पैसे प्रति मीटर हो?

हल: दीवारों का क्षेत्रफल $= 2(8+6)\times 3 = 84$ वर्ग मीटर

1 दरवाजा एवं दो खिड़कियों का क्षेत्रफल $= 2\times\left(1\frac{1}{2}\times 1\right)+\left(2\times 1\frac{1}{2}\right) = 6$ वर्ग मीटर

$\therefore$ पेपर बिछाए जाने वाले सतह का क्षेत्रफल $= 84 - 6 = 78$ वर्ग मीटर

$\therefore$ पेपर की लंबाई $= \frac{78\times 100}{50}$ मी. $= 156$ मी.

$\therefore$ लागत $= \frac{156\times 25}{100} = 39.0$ रु.

कमरे की ऊँचाई

उदा. 29: किसी कमरे की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः 7 मीटर एवं 5 मीटर हैं। दरवाजे एवं खिड़कियाँ इसके 5 वर्ग मीटर स्थान को घेरे हुए हैं। दीवार के शेष सतह पर 75 से. मी. चौड़ा पेपर 4.20 रु. प्रति 13 मी. लंबा टुकड़ा की दर से चढ़ाने में कुल मिलाकर 39.20 रु. का खर्च आता है, कमरे की ऊँचाई बताएँ।

हल: पेपर की लंबाई $= \frac{39.20\text{ रु.}}{4.20\text{ रु.}}\times 13$ मीटर $= \frac{364}{3}$ मीटर

$\therefore$ पेपर का क्षेत्रफल = $\frac{364}{3} \times \frac{75}{100}$ = 91 वर्ग मीटर

$\therefore$ दीवारों को क्षेत्रफल = 91 + 5 = 96 वर्ग मीटर

दीवारों का क्षेत्रफल = 2(7 + 5) × ऊँचाई = (24 × ऊँचाई) वर्ग मीटर

$\therefore$ 24 × ऊँचाई = 96

$\therefore$ ऊँचाई = $\frac{96}{24} = 4$ मीटर (उत्तर)

उदा. 30: एक हॉल, जिसकी लंबाई 16 मीटर है तथा चौड़ाई, ऊँचाई की दुगुनी है, के चारों दीवारों पर पेपर बिछवाने में 2 मीटर चौड़े पेपर का 168 मीटर लंबा टुकड़ा चाहिए होता है। फर्श का क्षेत्रफल निकालें।

हल: मान लिया कि चौड़ाई = $2h$ मीटर

$\therefore$ ऊँचाई = h मीटर

दीवारों का क्षेत्रफल = $2(16 + 2h)h$ वर्ग मीटर

पेपर का क्षेत्रफल = 168 × 2 वर्ग मीटर

$\therefore 2(16+2h)\times h = 168 \times 2$

$\therefore (8 + h) \times h = 84$

हल करने पर, $h = 6$ एवं, -14 (-14 स्वीकार्य नहीं है)

$\therefore h = 6$ एवं चौड़ाई = 12

फर्श का क्षेत्रफल = 16 × 12 वर्गमीटर = 192 वर्ग मीटर; उत्तर

किसी बक्से की सतह पर धातु की कलई (लेप) चढ़ाना

उदा. 31: किसी बंद बक्से की बाहरी माप 9 डेसीमीटर × 6 डेसीमीटर × $4\frac{1}{2}$ डेसीमीटर है, और $\frac{5}{2}$ संटीमीटर मोटे लकड़ी से निर्मित है। 6 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से इसके अंदरूनी सतह पर धातु की कलई चढ़ाने में कितना खर्च आएगा ?

हल: आंतरिक माप क्रमशः $8\frac{1}{2}$ डेसीमीटर, $5\frac{1}{2}$ डेसीमीटर एवं 4 डेसीमीटर है।

चारों भुजाओं का क्षेत्रफल = $2\left(8\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}\right)\times 4$ वर्ग डेसीमीटर

= 112 वर्ग डेसी मीटर

नीचे एवं ऊपर की सतह का क्षेत्रफल = $2\times 8\frac{1}{2}\times 5\frac{1}{2}$ वर्ग डेसीमीटर

= $\frac{187}{2}$ वर्ग डेसीमीटर

$\therefore$ कलई किए जानेवाले सतह का क्षेत्रफल = $\left(112+\frac{187}{2}\right)$ वर्ग डेसीमीटर

= $\frac{411}{2}$ वर्ग डेसीमीटर

$\therefore$ लागत = $\frac{411}{2} \times 6$ पैसे = 12.33 रु. (उत्तर)

वृत्त पर आधारित प्रश्न

उत्तर तक शीघ्रता से पहुँचने के लिए निम्नलिखित सूत्रों को उपयोग किया जा सकता है :

(i) क्षेत्रफल = $\pi \times (\text{त्रिज्या})^2$

(ii) त्रिज्या = $\sqrt{\left(\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}\right)}$

(iii) व्यास = $2\sqrt{\left(\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}\right)}$

(iv) क्षेत्रफल = $\pi\left(\frac{\text{व्यास}}{2}\right)^2$

(v) परिमिति = 2π (त्रिज्या)

(vi) त्रिज्या = $\frac{\text{परिमिति}}{2\pi}$

(vii) परिमिति = π(व्यास)

(viii) व्यास = $\left(\frac{\text{परिमिति}}{\pi}\right)$

(ix) किसी त्रिज्याखंड का चाप = $\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) \times$ परिधि

(x) किसी त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल = $\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) \times \pi \times (\text{त्रिज्या})^2$

आइए, अब कुछ उदाहरणों को देखें।

I: *सूत्रों के सरल उपयोग पर आधारित प्रश्न*

उदा. 32:

(a) उस वृत्त की परिधि निकालें, जिसकी त्रिज्या 42 मीटर है।

(b) उस वृत्ताकार क्षेत्र की त्रिज्या निकालें, जिसकी परिधि $5\frac{1}{2}$ कि.मी. के बराबर है।

$\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

हल: (a) $C = 2\pi r$

$\therefore$ अभीष्ट परिधि $= 2 \times \frac{22}{7} \times 42$ मीटर $= 264$ मीटर (उत्तर)

(b) $r = \frac{C}{2\pi}$

$\therefore$ अभीष्ट त्रिज्या $= \dfrac{\frac{11}{2} \times 1000}{2\pi}$ मीटर

$= \dfrac{\frac{11}{2} \times 1000 \times 7}{2 \times 22}$ मीटर

$= 875$ मीटर (उत्तर)

उदा. 33: किसी वृत्ताकार पहिए की त्रिज्या $1\frac{3}{4}$ मीटर है। 11 किलोमीटर की यात्रा करने के लिए इसे कितने चक्कर लगाने होंगे ?

हल: तय की जानेवाली दूरी = 11 किलोमटर = 11000 मीटर

पहिए की त्रिज्या $= 1\frac{3}{4}$ मीटर

$\therefore$ पहिए की परिधि $= 2 \times \frac{22}{7} \times 1\frac{3}{4} = 11$ मीटर

$\therefore$ 11 मीटर की यात्रा पूरी करने में पहिए को 1 चक्कर काटना पड़ता है।

$\therefore$ 11000 मीटर की यात्रा करने के लिए $\frac{1}{11} \times 11000$ चक्कर

= 1000 चक्कर काटने पड़ते हैं।

सूत्र (Direct Formula):

चक्करों की संख्या $= \dfrac{\text{दूरी}}{2\pi r} = \dfrac{11000}{2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4}} = 1000$

II. *कुछ संक्षिप्त विधियाँ*(Some Quicker Methods) :

A. *घेरा (Ring) का क्षेत्रफल*

उदा. 34: किसी वृत्ताकार बगीचे की परिधि 1012 मीटर है। क्षेत्रफल निकालें। बगीचे के बाहर इसके चारों ओर 3.5 मीटर चौड़ी एक सड़क है। इस सड़क का क्षेत्रफल निकालें तथा 32 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से इस पर कंकड़ बिछाने में होने वाले खर्च की गणना करें।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{(\text{परिधि})^2}{4\pi}$$ ***(याद रखें)***

$$= \frac{(1012)^2}{4 \times \frac{22}{7}} = 81466 \text{ वर्ग मीटर}$$

वृत्ताकार घेरा (ring) का क्षेत्रफल

$$= \pi\,[(\text{घेरा की चौड़ाई})\,(2 \times \text{अंदर की त्रिज्या} \times \text{घेरा की चौड़ाई})]$$

(याद रखें)

$$\text{अंदर की त्रिज्या} = \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}} = \sqrt{\frac{81466 \times 7}{22}} = 161 \text{ मीटर}$$

वृत्ताकार घेरा के आकार वाले सड़क (ring-shaped road) का क्षेत्रफल

$$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times (3.5 + 2 \times 161)$$

$$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times (3.5 + 322) = 3580.5 \text{ वर्ग मीटर}$$

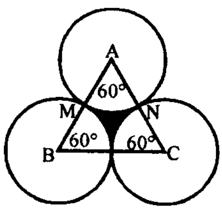
कंकड़ बिछाने में आनेवाली लागत = 3580.5 × 0.32 = 1145.76 रु.

B. *यदि एक जैसे वृत्त साथ-साथ रखे गए हों* (Identical Circles Placed Together)

उदा. 35: किसी समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा 2 मीटर के बराबर है। इस त्रिभुज के तीनों कोणों को केन्द्र बनाकर 1 मीटर की त्रिज्या वाले तीन वृत्त खींचे जाते हैं।

(i) इन सभी वृत्तों एवं त्रिभुज में सर्वनिष्ठ हिस्से का क्षेत्रफल निकालें।

(ii) त्रिभुज के शेष हिस्से का भी क्षेत्रफल निकालें।



हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

जब किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा वृत्त के त्रिज्या की दुगुनी हो तो सभी वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। ऐसी स्थिति में निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल किया जा सकता है।

प्रत्येक त्रिज्याखंड(sector) का क्षेत्रफल = $= \frac{1}{6} \times \pi \times$ (त्रिज्या)^2

शेष या छायांकित(shaded) हिस्से का क्षेत्रफल = $\left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right]$ (त्रिज्या)^2

= (0.162) (त्रिज्या)^2

(याद रखें)

दिए गए प्रश्न में,

(i) सभी वृत्तों एवं त्रिभुज के बीच सर्वनिष्ठ हिस्से का क्षेत्रफल = त्रिज्याखंड AMN, BML एवं CLN के क्षेत्रफलों का योगफल

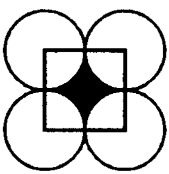
$$= \frac{1}{6}\pi r^2 + \frac{1}{6}\pi r^2 + \frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (1)^2 = 1.57 \text{ वर्ग मीटर}$$

(ii) त्रिभुज के शेष हिस्से का क्षेत्रफल = छायांकित हिस्से का क्षेत्रफल

= (0.162) × (1)^2 = 0.162 वर्ग मीटर

उदा. 36: किसी सिक्के का व्यास 1 सेंटीमीटर है। यदि चारों सिक्कों को किसी मेज पर इस प्रकार रखा जाए ताकि प्रत्येक सिक्के का किनारा अन्य दो सिक्कों के किनारे को स्पर्श करे तो उनके बीच के खाली स्थान का क्षेत्रफल निकालें।



($\pi = 3.1416$)

हल: ***द्रुत विधि*(Quicker Method) :**

यदि वृत्त इस ढ़ंग से सजाए जाएँ कि एक-दूसरे को स्पर्श करें तो इस प्रकार निर्मित वर्ग की भुजा त्रिज्या की दुगुनी होती है। ऐसी स्थिति में निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल किया जा सकता है।

प्रत्येक त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \pi \times$ (त्रिज्या)^2 ***(याद रखें)***

शेष हिस्से (छायांकित हिस्सा) का क्षेत्रफल = $(4 - \pi)$ (त्रिज्या)^2

= (0.86) (त्रिज्या)^2 ***(याद रखें)***

अब, दिए गए प्रश्न में

खाली हिस्से का क्षेत्रफल = (0.86) (त्रिज्या)^2

$$= (0.86)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.215 \text{ वर्ग सेंटीमीटर}$$

विविध उदाहरण

उदा. 37: किसी आयत की लंबाई 60% बढ़ा दी जाती है। इसकी चौड़ाई में कितने प्रतिशत की कमी की जाए ताकि क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन न हो?

हल: मान लिया कि आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः x एवं y है। $\therefore$ क्षेत्रफल $= xy$

नई लंबाई $= x\left(\frac{160}{100}\right) = \frac{8x}{5}$

$\because$ क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है, इसलिए आयत की नई चौड़ाई $= \frac{xy}{\frac{8x}{5}} = \frac{5y}{8}$

$\therefore$ चौड़ाई में कमी $= y - \frac{5y}{8} = \frac{3y}{8}$

$\therefore$ चौड़ाई में प्रतिशत कमी $= \frac{3y \times 100}{8 \times y} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}\%$

***द्रुत विधि*(Quicker Method) :**

'प्रतिशत' वाले अध्याय में आपको ऐसे तमाम प्रश्नों से निबटना पड़ा होगा। यदि आप स्मरण-शक्ति पर जोर डालें तो आप सूत्र कुछ इस तरह का पाएँगे:

चौड़ाई में अभीष्ट प्रतिशत कमी $= 60\left(\frac{100}{100+60}\right) = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}\%$

उदा. 38: यदि किसी आयत की लंबाई में 20% की कमी कर दी जाए तो उसकी चौड़ाई में कितने प्रतिशत की वृद्धि करने से क्षेत्रफल यथावत रहेगा?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

चौड़ाई में अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि $= 20\left[\frac{100}{100-20}\right] = 25\%$

नोट: उपर्युक्त सूत्र प्राप्त करने के लिए हमने भिन्न के नियम (Rule of Fraction) का इस्तेमाल किया है।

प्रमेय: यदि किसी आयत की लंबाई एवं चौड़ाई में क्रमशः x एवं y प्रतिशत की वृद्धि कर दी जाए तो क्षेत्रफल में $\left(x + y + \frac{xy}{100}\right)\%$ की वृद्धि हो जाती है।

प्रमाण: 'प्रतिशत' वाला अध्याय देखिए। वहाँ ऐसा ही एक प्रमेय का प्रमाण मिल जाएगा।

नोट: यदि आयत की दोनों भुजाओं में से किसी की भी माप में कमी आती है तो दिए गए सूत्र में उस माप के लिए ऋण चिह्न का इस्तेमाल करना न भूलें।

उदा. 39: यदि किसी आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः 5% एवं 4% बढ़ा दी जाती है तो उसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

हल: **सूत्र से (Direct Formula):**

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि} = 5 + 4 + \frac{5 \times 4}{100} = 9 + 0.2 = 9.2\%$$

उदा. 40: यदि किसी आयत की लंबाई में 10% की वृद्धि होती है और चौड़ाई में 12% की कमी आती है तो कुल मिलाकर क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का परिवर्तन आता है?

हल: चूँकि चौड़ाई में 12% की कमी आती है। इसलिए $y = -12$

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत परिवर्तन} = 10 - 12 + \frac{10 \times (-12)}{100}$$

$$= -2 - 1.2 = -3.2\%$$

$\therefore$ यहाँ चिह्न ऋणात्मक है, इसलिए क्षेत्रफल में होने वाली प्रतिशत कमी = 3.2%

उदा. 41: यदि किसी आयत की लंबाई में 4% की कमी हो तथा चौड़ाई में 6% की वृद्धि हो तो क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का परिवर्तन आएगा?

हल: स्वयं प्रयास कीजिए। (उत्तर 1.76% वृद्धि)

उदा. 42: यदि किसी वर्ग की भुजाएँ 10% बढ़ा दी जाएँ तो इसके क्षेत्रफल में ...... % की वृद्धि होगी।

हल: हमलोग उपर्युक्त सूत्र में $x = y = 10\%$ रखकर क्षेत्रफल में होने वाले प्रतिशत वृद्धि की गणना कर सकते हैं।

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि} = 10 + 10 + \frac{10 \times 10}{100} = 21\%$$

प्रमेय: यदि किसी द्विविमीय ज्यामितीय आकृति की सभी भुजाएँ $x\%$ बदल दी जाएँ तो इसके क्षेत्रफल में $\left(2x + \frac{x^2}{100}\right)\%$ का परिवर्तन आता है।

प्रमाण: उपर्युक्त प्रमेय किसी भी प्रकार की द्विविमीय आकृतियों (जैसे, सप्तभुज, षट्भुज, पंचभुज, चतुर्भुज, त्रिभुज, वृत्त आदि) पर लागू होता है।

हमलोग, त्रिभुज, आयत और वृत्त के संदर्भ में इस प्रमेय को प्रमाणित करेंगे। इसके बाद सभी प्रकार की द्विविमीय आकृतियों के लिए इसका सामान्यीकरण किया जाएगा।

त्रिभुज के संदर्भ में : मान लिया कि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमश a, b एवं c हैं।

$$\therefore \text{क्षेत्रफल } A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{जहाँ, } s = \frac{a+b+c}{2}$$

सभी भुजाओं में x% की वृद्धि होने पर भुजाएँ क्रमशः $\frac{a(100+x)}{100}, \frac{b(100+x)}{100}$ एवं $\frac{c(100+x)}{100}$ हो जाती हैं।

अब, $s_1 = \frac{100+x}{100}\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{100+x}{100}(s)$

$\therefore$ नया क्षेत्रफल

$$A_1 = \sqrt{s_1\left(s_1 - \frac{a\,(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{b\,(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{c\,(100+x)}{100}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{100+x}{100}\right)^4 s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A_1 = \left(\frac{100+x}{100}\right)^2 A$$

क्षेत्रफल में % वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \frac{\left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]A}{A} \times 100$$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100$$

$$= \left[1 + \frac{x^2}{(100)^2} + \frac{2x}{(100)} - 1\right] \times 100 = \left[2x + \frac{x^2}{100}\right]$$

इस प्रकार त्रिभुज के संदर्भ में प्रमेय प्रमाणित हो गया।

आयत के संदर्भ में : मान लिया कि आयत की भुजाएँ a और b हैं। भुजाओं में x% का परिवर्तन आने पर इनका मान बदलकर क्रमशः $\frac{a(100+x)}{100}$ एवं $\frac{b(100+x)}{100}$ हो जाता है।

अब, नया क्षेत्रफल $= A_1 = ab\left[\frac{100+x}{100}\right]^2$

$$= \left[\frac{100+x}{100}\right]^2 \times A$$

क्षेत्रफल में % वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100$$

$$= \left[2x + \frac{x^2}{100}\right]$$

इस प्रकार यह प्रमेय आयत के लिए भी सही है।

***वृत्त के संदर्भ में* :** वृत्त की दो भुजाएँ एक समान होती हैं और वह प्रत्येक भुजा त्रिज्या कहलाती है ($\because$ क्षेत्रफल = πr^2, r का उपयोग दुबारा किया जाता है)

क्षेत्रफल = $A = \pi r^2$

जब इसकी त्रिज्या में x% का बदलाव (बढ़त) आता है तो, त्रिज्या

$\frac{r(100+x)}{100}$ हो जाती है।

$\therefore$ नया क्षेत्रफल $A_1 = \pi\left[\frac{r(100+x)}{100}\right]^2$

$$= \pi r^2 \left[\frac{100+x}{100}\right]^2$$

$$= \left[\frac{100+x}{100}\right]^2 A$$

क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2\right] \times 100 = \left[2x + \frac{x^2}{100}\right]$$

इस प्रकार यह प्रमेय वृत्त के लिए भी सही है।

***निष्कर्ष* :** इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि दिया गया प्रमेय सभी प्रकार की द्विविमीय आकृतियों के लिए सही है।

नोट: 1. जब कभी माप में कमी हो तो x के ऋणात्मक मान का प्रयोग करें। इसी तरह जब उत्तर ऋणात्मक आए तो यह कहते हुए बिल्कुल न हिचकिचाएँ कि क्षेत्रफल में कमी आई है।

2. इस प्रमेय का प्रयोग उदा.–42 के लिए किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में क्षेत्रफल में प्रतिशत

$$\text{वृद्धि} = 2\times10+\frac{(10)^2}{100}=21\%$$

उदा. 43: यदि वृत्त की त्रिज्या में 5% की वृद्धि होती हो तो इसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: ***प्रमेय से* (By Theorem):**

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि} = 2\times5+\frac{5^2}{100}=10+0.25=10.25\%$$

उदा. 44: यदि किसी षट्भुज की प्रत्येक भुजा में 2% की वृद्धि होती हो तो क्षेत्रफल में होने वाली प्रतिशत वृद्धि बताएँ।

हल: $\text{अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि} = 2\times2+\frac{2^2}{100}=4+0.04=4.04\%$

नोट: यदि उपर्युक्त प्रश्न में भुजा के माप में वृद्धि के बजाय इसमें कमी आए तो क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की कमी होगी ?

उत्तर: (उदा.–43 = 9.75%, उदा.–44 = 3.96%)

प्रमेय: यदि किसी द्विविमीय ज्यामितीय आकृति की प्रत्येक भुजा में $x\%$ का बदलाव (वृद्धि या कमी) आता हो तो इसकी परिमिति में भी $x\%$ का ही बदलाव आता है।

प्रमाण: इसे प्रमाणित करना आसान है। स्वयं प्रयत्न कीजिए।

उदा. 45: यदि किसी वृत्त के व्यास में 12% की वृद्धि होती हो तो इसकी परिधि में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: हालाँकि व्यास को वृत्त की भुजा के माप के रूप में इस्तेमाल नहीं किया जाता, पर यहाँ भी उपर्युक्त प्रमेय सही ढ़ंग से लागू होता है।

∴ परिधि में वृद्धि = 12%

प्रमेय: यदि किसी चतुर्भुज की सभी भुजाएँ $x\%$ बढ़ा दी जाएँ तो उनके संगत विकर्णों में भी $x\%$ की वृद्धि हो जाती है।

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें।

उदा. 46: यदि किसी आयत की भुजाएँ 10% बढ़ा दी जाएँ तो इनके विकर्णों में कितने प्रतिशत की वृद्धि होती है?

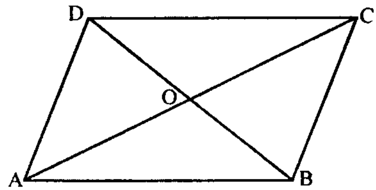
हल: विकर्णों में प्रतिशत वृद्धि = 10%

उदा. 47: यदि किसी आयत की लंबाई एवं दोनों विकर्णों में 9% की वृद्धि की जाए तो चौड़ाई में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: उपर्युक्त प्रमेय से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि चौड़ाई में भी 9% की ही वृद्धि होगी।

उदा. 48: किसी समानांतर चतुर्भुज की भुजाएँ 12 से.मी. तथा 8 सेंटीमीटर हैं। इसका एक विकर्ण 10 सेंटीमीटर लंबा है। दूसरे विकर्ण की लंबाई बताएँ।

हल:



किसी समानांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

मान लिया कि BD = 10 सेंटीमीटर

एवं OB = 5 सेंटीमीटर

त्रिभुज ABC में, O, AC का मध्य बिन्दु है।

समतल ज्यामिति (plane geometry) के एक महत्वपूर्ण प्रमेय से, ΔABC में,

$AB^2 + BC^2 = 2(OB^2 + AO^2)$

$\Rightarrow 12^2 + 8^2 = 2(5^2 + AO^2)$

$\Rightarrow 144 + 64 = 50 + 2AO^2$

$\Rightarrow AO^2 = 79 \therefore AO = 8.9$ (लगभग)

दूसरा विकर्ण = $AC = 2AO = 2 \times 8.9 = 17.8$ से.मी.

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

उपर्युक्त प्रमेय से,

$AB^2 + BC^2 = 2(OB^2 + AO^2)$

या, $2AO^2 = AB^2 + BC^2 - 2(OB^2)$

$$\therefore AO = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{AB^2 + BC^2 - 2(OB)^2\right\}}$$

$$\therefore \text{ दूसरा विकर्ण } = 2 \times AO = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left\{AB^2 + BC^2 - 2(OB)^2\right\}}$$

$$\text{या, दूसरा विकर्ण } = \sqrt{2\left\{AB^2 + BC^2 - 2(OB)^2\right\}}$$

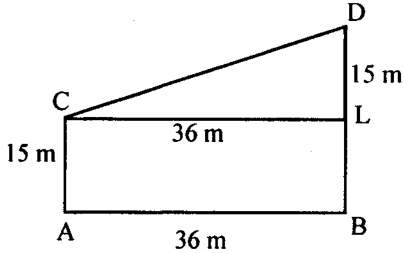
$\therefore$ इस प्रश्न के लिए,

दूसरा विकर्ण $= \sqrt{2\{144 + 64 - 2 \times 25\}} = \sqrt{2 \times 158}$

$= \sqrt{316} = 17.8$ (लगभग)

उदा. 49: खेल के किसी मैदान में 15 मी. एवं 30 मी. लंबे दो खंभे गड़े हैं। यदि इनके आधार(feet) के बीच की दूरी 36 मीटर हो तो इनके शीर्ष के बीच की दूरी बताएँ।

हल:



चित्र से स्पष्ट है कि हमें CD की लंबाई निकालनी है।

यहाँ, $CA = LB = 15$ मीटर

$\therefore\ LD = BD - LB = 15$ मीटर

$\therefore CD = \sqrt{CL^2 + DL^2} = \sqrt{36^2 + 15^2}$

$= \sqrt{1521} = 39$ सेंटीमीटर

उदा. 50: 2 मीटर लंबी भुजा वाले एक वर्ग की चारों भुजाओं पर अर्द्धवृत्त बनाए जाते हैं। पूरी आकृति का क्षेत्रफल निकालें।

हल: कुल क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल + 4 × (अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल)

$= 2^2 + 4\left[\frac{1}{2}\pi r^2\right]$ (त्रिज्या $= \frac{2}{2} = 1$)

$= (4 + 2\pi)$ वर्ग मीटर

उदा. 51: किसी वृत्त की त्रिज्या में n की कमी करने से वृत्त का क्षेत्रफल घटकर आधा हो जाता है। इसकी त्रिज्या निकालें।

हल: प्रश्नानुसार, $\frac{\pi(r-n)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{2}$

या, $\pi r^2 = 2\pi(r-n)^2$

या, $r^2 - \left\{\sqrt{2}(r-n)\right\}^2 = 0$

या, $\left\{r - \sqrt{2}(r-n)\right\}\left\{r + \sqrt{2}(r-n)\right\} = 0$

$\because\ r + \sqrt{2}(r-n) \neq 0,$

$\therefore\ r - \sqrt{2}(r-n) = 0$

या, $r\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{2}n$

$\therefore\ r = \frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{2} - 1}$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

$$\frac{\pi(r-n)^2}{\pi r^2}=\frac{1}{2}$$

या, $\left\{\frac{\sqrt{2}(r-n)}{r}\right\}^2=1$

या, $\frac{\sqrt{2}(r-n)}{r}=1$

या, $r(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}n$

$\therefore\ r=\frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{2}-1}$

उदा. 52: रस्सी का एक टुकड़ा यदि वर्ग की शक्ल में है और यह 22 वर्ग सेंटीमीटर का क्षेत्रफल घेरता है। यदि उसी रस्सी की शक्ल बदलकर वृत्त जैसा कर दिया जाए तो इसके द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल क्या होगा?

हल: वर्ग का क्षेत्रफल = 22 वर्ग सेंटीमीटर

वर्ग की परिमिति = $4\sqrt{22}$ सेंटीमीटर

अब, यही परिमिति वृत्त की परिधि है।

$\therefore$ वृत्त की परिधि = $2\pi r = 4\sqrt{22}$

$\therefore\ r=\frac{2\sqrt{22}}{\pi}$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$=\pi\left(\frac{2\sqrt{22}}{\pi}\right)^2$$

$$=\frac{\pi\times4\times22}{\pi^2}$$

$$=\frac{4\times22}{\pi}=\frac{4\times22\times7}{22}=28$$ वर्ग से.मी.

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

यदि किसी वर्ग का क्षेत्रफल x वर्ग सेंटीमीटर हो तो उसी परिमिति से निर्मित वृत्त का क्षेत्रफल

$=\frac{4x}{\pi}$ वर्ग सेंटीमीटर। ***(स्मरणीय)***

$\therefore$ उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में, वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{4\times22\times7}{22}=28$ वर्ग सेंटीमीटर

इस सूत्र का प्रमाण, प्रश्न को हल करने की विस्तृत विधि में ढूँढ़ा जा सकता है।

प्रमेय: r त्रिज्या वाले किसी वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग का क्षेत्रफल = $2r^2$

(स्मरणीय)

प्रमाण: यदि त्रिज्या = r तो व्यास = 2r

हम जानते हैं कि वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग का विकर्ण, व्यास की लंबाई के बराबर होता है।

$\therefore$ वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग का विकर्ण = 2r

$\therefore$ वर्ग का क्षेत्रफल = $\frac{(\text{विकर्ण})^2}{2}=\frac{(2r)^2}{2}=2r^2$

उपप्रमेय: वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग की भुजा $\sqrt{2}r$ के बराबर होता है।

प्रमाण: दिए गए प्रमेय से, वर्ग का क्षेत्रफल = $2r^2$

$\therefore$ भुजा = $\sqrt{2r^2}=\sqrt{2}r$

नोट: ऐसा वर्ग वृत्त के अंदर निर्मित सबसे बड़ा चतुर्भुज होता है।

उदा. 53: किसी वृत्त की परिधि 100 से. मी. है। वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग की भुजा ज्ञात करें।

हल: वृत्त की परिधि = $2\pi r=100$

$\therefore r=\frac{50}{\pi}$

$\therefore$ वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग की भुजा = $\sqrt{2}r=\sqrt{2}\times\frac{50}{\pi}$

प्रमेय: r त्रिज्या वाले अर्द्धवृत्त के अंदर निर्मित सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल r^2 के बराबर होता है।

(स्मरणीय)

प्रमाण: ऐसा सबसे बड़ा त्रिभुज समद्विबाहु (Isosceles अर्थात् ऐसा त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर होती हैं) होता है, जिसका आधार होता है व्यास एवं ऊँचाई होती है त्रिज्या।।

$\therefore$ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$\frac{1}{2}\times2r\times r=r^2$

उदा. 54: 14 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले किसी अर्द्धवृत्त के अंदर सबसे बड़े आकार का त्रिभुज बनाया जाता है। अर्द्धवृत्त के उस हिस्से का क्षेत्रफल निकालें जो त्रिभुज की सीमा से बाहर स्थित है।

हल: ऐसे क्षेत्रफल = अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल – ऐसे सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$=\frac{\pi}{2}r^2-r^2$$

$$= r^2\left[\frac{\pi}{2}-1\right]=14^2\times\frac{22-14}{14}=112 \text{ वर्ग सेंटीमीटर}$$

प्रमेय: x भुजा वाले वर्ग के अंदर निर्मित सबसे बड़े वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$

प्रमाण: ऐसे वृत्त का व्यास वर्ग की भुजा के बराबर होता है।

$\therefore$ ऐसे सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या = $\frac{x}{2}$

$\therefore$ क्षेत्रफल = $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$

उदा. 55: 14 सेंटीमीटर भुजा वाले वर्ग के अंदर निर्मित सबसे बड़े वृत्त का क्षेत्रफल क्या होगा?

हल: ***सूत्र से* (By the Formula):**

अभीष्ट क्षेत्रफल = $\pi\left(\frac{14}{2}\right)^2=\frac{22}{7}\times 7^2=154$ वर्ग से.मी.

उदा. 56: एक चतुर्भुज में किसी एक विकर्ण की लंबाई 23 से. मी. है तथा इस विकर्ण पर अन्य दो शीर्षों (vertices) से खींचे गए लंब की लंबाई क्रमश: 17 से. मी. एवं 7 से. मी. है। चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: किसी चतुर्भुज में,

चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times$ कोई विकर्ण $\times$ (दो शीर्षों से विकर्ण पर खींचे गए लंबों का योगफल)

$$=\frac{1}{2}\times D\times(P_1+P_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times 23\times(17+17)=12\times 23=276 \text{ वर्ग से. मी.}$$

उदा. 57: (a) एक समबाहु त्रिभुज एवं उसके परिवृत्त (circumcirle) के बीच का संबंध क्या है?

(b) एक समबाहु त्रिभुज एवं उसके अंत:वृत्त (incircle) के बीच का संबंध क्या है?

(c) एक समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त (circumcircle) एवं उसके अंत:वृत्त (incircle) के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात करें।

हल: प्रमेयों को याद रखें:

(a) x भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त का क्षेत्रफल $\frac{\pi}{3}x^2$ होता है।

(b) x भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के अंत:वृत्त का क्षेत्रफल $\frac{\pi}{12}x^2$ होता है।

(c) उपर्युक्त दो प्रमेयों से हम कह सकते हैं कि अभीष्ट अनुपात

$$= \frac{\pi}{3}x^2 : \frac{\pi}{12}x^2 = \frac{1}{3} : \frac{1}{12} = 4:1$$

उदा. 58: किसी समबहुभुज (regular polygon) के भुजाओं की संख्या एवं विकर्णों की संख्या के बीच क्या कोई संबंध है?

हल: हाँ। निम्नलिखित संबंध है।

विकर्णों की संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$; जहाँ n = समबहुभुज की भुजाओं की संख्या

उदाहरण के लिए, एक षट्भुज (Hexagon) के विकर्णों की संख्या = $\frac{6(6-3)}{2} = 9$

नोट: उपर्युक्त कथन को बड़ी आसानी से प्रमाणित किया जा सकता है। स्वयं कोशिश करें। यदि आप प्रमाणित नहीं कर सकते हैं तो निम्नलिखित संकेत को देखें।

किसी n भुजाओं वाली समबहुभुज में n कोनें (corners) होते हैं। दो आसन्न (adjacent) कोनों को छोड़कर प्रत्येक कोना दूसरे कोने के साथ मिलकर एक विकर्ण का निर्माण कर सकता है। इसका तात्पर्य है कि एक कोना $(n-3)$ विकर्ण बना सकता है। इसलिए n कोनों के द्वारा बनाया गया कुल विकर्ण $n(n-3)$ है। यदि आप ध्यान से देखेंगे तो पाएँगे कि यदि हम विकर्ण खींचने के लिए दूसरे कोनों को लेते हैं तो प्रत्येक विकर्ण को दोबारा गणना में शामिल कर लिया जाता है। इसलिए विकर्णों की सही संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$