12
वृत्त (Circle)

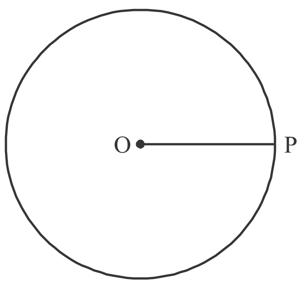
12.01 प्रस्तावना (Introduction)

बचपन से आपने ऐसी अनेक वस्तुऐं देखी है या उन्हें काम में लिया है जिन का आकार गोल हैं जैसे चूड़ियाँ, सिक्के, गाडी का पहिया, थाली, कमीज का बटन आदि। घर में लगे पंखे को चालू करके देखोगे तो उसकी पंखुड़ियाँ तेजी से गोल–गोल चक्कर लगाने लगेगी ऐसी स्थिति में आपको पंखुड़ियाँ अलग–अलग दिखाई देने की अपेक्षा एक नई आकृति में दिखाई देती है। आप एक काम कीजिए धागे के लगभग 1 मीटर टुकडे के एक छोर पर छोटा पत्थर बान्धकर दूसरे छोर को पकड कर घुमाइए और गति तेज कीजिए तथा अपना ध्यान पत्थर पर रखिए, आप अनुभव करेंगे कि पत्थर के स्थान पर एक वलय (रिंग) दिखने लगा है, यही वृत्त है। इस अध्याय में आप वृत्त एवं वृत्त में नीहित गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे।

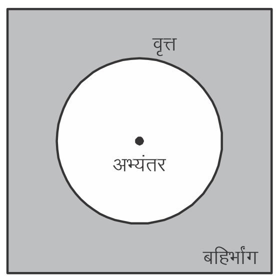
12.02 वृत्त और उसके भाग

परकार के एक भाग पर पेंसिल लगाकर कागज के पृष्ठ पर दूसरे नुकीले भाग के सापेक्ष एक चक्कर पूरा होने तक घुमाइए तो आप देखेंगे, कागज पर एक आकृति बनेगी यह आकृति एक वृत्त है। आपको ध्यान होगा पेंसिल की नोक से उभरी आकृति बिन्दु होता है। वास्तव में एक वृत्त परकार को घुमाने पर पेंसिल के नोक से अनवरत अंकित अनन्त बिन्दुओं का समूह (समुच्चय) है। अर्थात् एक तल पर उन सभी बिन्दुओं का समूह जो तल के एक स्थिर बिन्दु से एक अचर दूरी पर स्थित हों, एक वृत्त कहलाता है।

स्थिर बिन्दु को वृत्त का केन्द्र और अचर दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं। आकृति 12.01 में O वृत्त का केन्द्र और OP वृत्त की त्रिज्या है।



आकृति 12.01



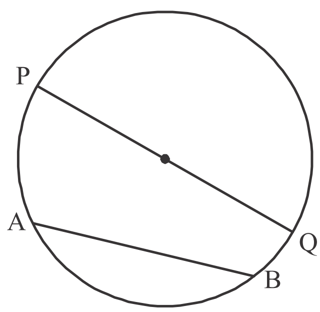
आकृति 12.02

एक वृत्त किसी तल को जिस पर वह स्थित है, उसे तीन भागों में विभाजित करता है।

देखिए आकृति 12.02 (i) अभ्यन्तर– वृत्त के अन्दर का भाग (ii) वृत्त (iii) बहिर्भाग–वृत्त के बाहर का भाग 1 वृतीय क्षेत्र– वृत्त एवं अभ्यन्तर मिलकर वृत्त क्षेत्र बनाते हैं।

जीवा एवं व्यास– वृत्त पर स्थित दो बिन्दु A व B को स्केल की सहायता से मिलाने पर प्राप्त रेखाखण्ड AB वृत्त की जीवा कहलाती है।

यदि कोई जीवा वृत्त के केन्द्र से गुजरती है तो वह उस वृत्त का व्यास कहलाती है। देखिए आकृति 12.03, जीवा PQ वृत्त का व्यास है।

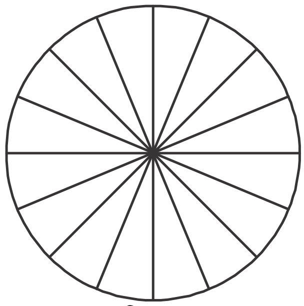


आकृति 12.03

क्रिया कलाप–

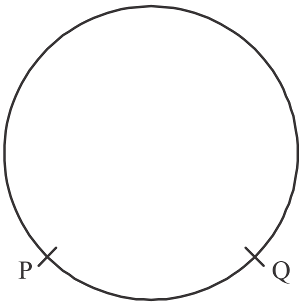
(i) अपनी अभ्यास पुस्तिका में भिन्न–भिन्न त्रिज्या लेकर वृत्त बनाइए और प्रत्येक वृत्त में दो से अधिक जीवाएँ खीचिएँ। सभी जीवाओं को मापिए। क्या व्यास से बड़ी जीवा कोई अन्य है? निः सन्देह नहीं है। अर्थात् प्रत्येक वृत्त में व्यास सबसे बड़ी जीवा होती है। वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या के माप का दो गुना होता है।

(ii) एक वृत्त बनाइए और देखिए कि उसमें कितने व्यास खींचे जा सकते हैं। क्या एक से अधिक व्यास होंगे? हाँ, अनन्त व्यास खींचे जा सकते हैं। देखिए आकृति 12.04

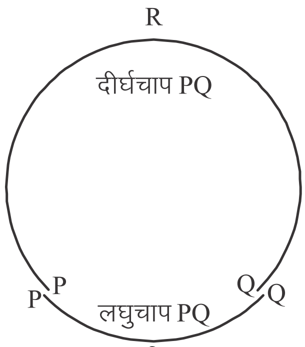


आकृति 12.04

चाप– आकृति 12.05 में वृत्त पर दो बिन्दु P व Q दिखाए गए हैं जो वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है। दोनों भागों में से एक भाग बड़ा व दूसरा छोटा दिखाई देता है।



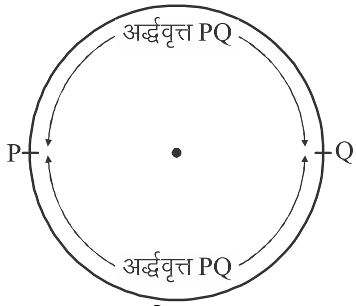
आकृति 12.05



आकृति 12.06

यदि दोनों चाप को आकृति 12.06 के अनुसार अलग–अलग करके देखें तो लघु चाप PQ को चाप PQ से व्यक्त करते हैं। परन्तु दीर्घ चाप PQ के लिए चाप पर कोई अन्य बिन्दु R लेकर चाप PRQ द्वारा व्यक्त करेंगे।

P और Q जब व्यास पर स्थित हो तो दोनो चाप समान होते हैं तो, प्रत्येक चाप को अर्द्धवृत्त कहते हैं। देखिए आकृति 12.07



आकृति 12.07

प्रश्नमाला 12.1

1. खाली स्थान भरिए:
   (i) वृत्त का केन्द्र वृत्त के . . . में स्थित है। (बहिर्भाग/अभ्यन्तर)।
   (ii) एक बिन्दु, जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक हो, वृत्त के . . . में स्थित होता है। (बहिर्भाग/अभ्यन्तर)
   (iii) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त की . . . होती है।
   (iv) एक चाप . . . होता है, जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हो।
   (v) एक वृत्त जिस तल पर स्थित होता है, उसे . . . भागों में विभाजित करता है।
2. सत्य/असत्य लिखिए। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।
   (i) केन्द्र को वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु को मिलाने वाला रेखा खण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है।
   (ii) एक वृत्त में समान लम्बाई के चाप जीवाएँ होती है।
   (iii) यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बांट दिया जाए, तो प्रत्येक भाग दीर्घ चाप होता है।

(iv) वृत्त की एक जीवा, जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दोगुनी हो, वृत्त का व्यास है।

(v) वृत्त एक समतलीय आकृति है।

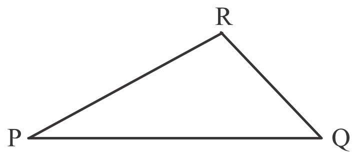
(vi) एक तल पर स्थित उन बिन्दुओं का समूह जो उसी तल के एक के स्थिर बिन्दु से अचर दूरी पर होते है एक व्यास कहलाता है।

(vii) वह जीवा जिस पर केन्द्र स्थित होता है, त्रिज्या कहलाती है।

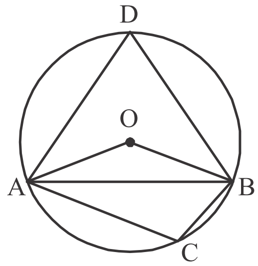
12.03 जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अन्तरित कोण

PEX282

यदि P, Q एवं R तीन बिन्दु किसी तल पर एक सरल रेखा में नहीं है को मिलाने पर $\angle PRQ$ रेखाखण्ड PQ द्वारा अन्तरित कोण कहलाता है। (देखिए चित्र 12.08) इसी प्रकार आकृति 12.09 में $\angle AOB$ जीवा AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, $\angle ADB$ दीर्घ चाप AB पर जीवा AB द्वारा अन्तरित कोण तथा $\angle ACB$ लघुचाप AB पर जीवा AB द्वारा अन्तरित कोण है।

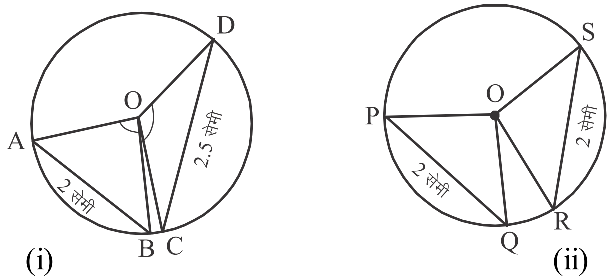


आकृति 12.08



आकृति 12.09

क्रिया कलाप– आइए अब हम जीवा के माप और उसके द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण के मध्य सम्बन्ध पर विचार करते हैं।



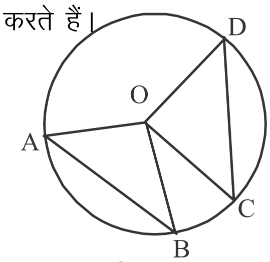
आकृति 12.10

आकृति 12.10 (i) में 2 सेमी एवं 2.5 सेमी नाप की जीवाएँ AB एवं CD दर्शाई हुई हैं। यहाँ AB < CD तो AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle AOB$ तथा CD द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle COD$ में आपको कोई सम्बन्ध दिखाई देता है? हाँ $\angle AOB < \angle COD$ परन्तु आकृति 12.10 (ii) में आप क्या देख रहे हैं? आप देख रहे हैं

$PQ = RS$ तो $\angle POQ = \angle ROS$ है

अर्थात् एक वृत्त में बड़ी जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, छोटी जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण से बड़ा होता है। बराबर नाप की जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं।

आइए इस परिणाम को हम प्रमेय के रूप में लिखकर पूर्व प्राप्त परिणामों के माध्यम से सिद्ध करते हैं।



आकृति 12.11

प्रमेय–12.1 एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अन्तरित करती है।

दिया हुआ है: $AB = CD$

सिद्ध करना: $\angle AOB = \angle COD$

उपपत्ति: ΔAOB व ΔCOD में

$OA = OC$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

$OB = OD$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

$AB = CD$ दिया हुआ है

अतः $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SSS नियम से)

अतः $\angle AOB = \angle COD$ इति सिद्धम

अब हम इसका विलोम भी सिद्ध करते है।

प्रमेय–12.2 यदि एक वृत्त की जीवाओ द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण बराबर हों तो वे जीवाएँ भी बराबर होती है।

दिया हुआ है: $\angle AOB = \angle COD$

सिद्ध करना: $AB = CD$

उपपत्ति: ΔAOB व ΔDOC में

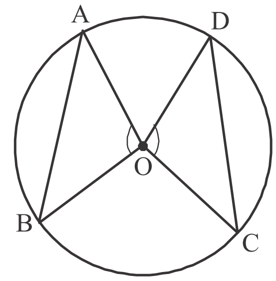
$OA = OD$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

$\angle AOB = \angle COD$ दिया हुआ है

$OB = OC$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

अतः $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (SAS नियम से)

अतः $AB = CD$ इति सिद्धम



आकृति 12.12

चूंकि दो सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर होती है अतः प्रमेय 12.1 एवं 12.2 को दो सर्वांगसम वृत्तें के लिए भी सिद्ध कर सकते है।

12.04 केन्द्र से जीवा पर लम्ब

PF6X9P

प्रमेय–12.03 एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा का समद्विभाजन करता है।

दिया हुआ है: $OM \perp AB$, AB एक जीवा है

सिद्ध करना है: $AM = BM$

रचना: O को A व B से मिलाया

उपपत्ति: ΔOAM व ΔOBM में

$OA = OB$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

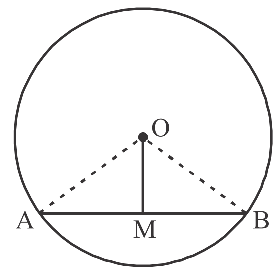
$\angle AMO = \angle OMB = 90^\circ$, $OM \perp AB$ दिया हुआ है

OM उभयनिष्ठ

अर्थात् ΔOAM एवं ΔOBM दोनों समकोण त्रिभुज है

अतः $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (RHS नियम से)

अतः $AM = BM$ इति सिद्धम



आकृति 12.13

प्रमेय–12.4 किसी वृत्त की एक जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

दिया हुआ है: $AM = BM$

सिद्ध करना है: $OM \perp AB$

रचना: O को A व B से मिलाया

उपपत्ति: ΔOMA एवं ΔOMB में

$OA = OB$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

OM उभयनिष्ठ

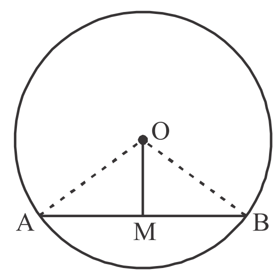
$AM = BM$ दिया हुआ है।

अतः $\Delta OMA \cong \Delta OMB$ (SSS नियम से)

अतः $\angle OMA = \angle OMB$ जो रैखिक कोण युग्म है

अर्थात् $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$

अतः $OM \perp AB$ इति सिद्धम

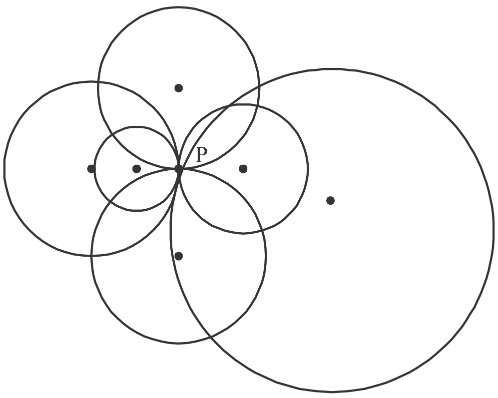


आकृति 12.14

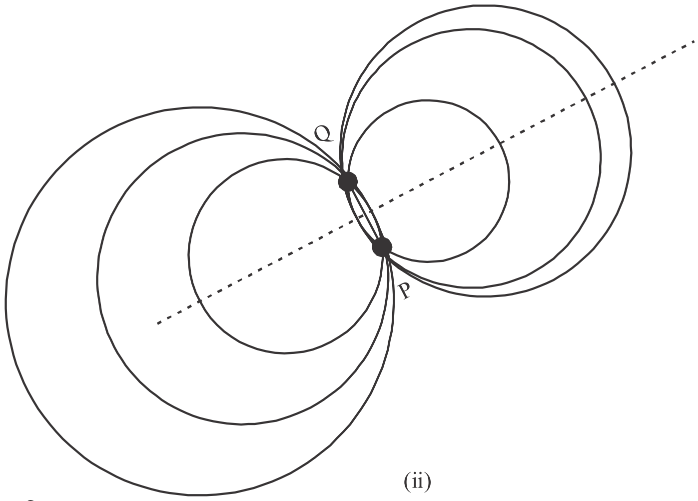
12.05 तीन बिन्दुओं से जाने वाला वृत्त

जिस प्रकार आपने कक्षा 9 में अभिगृहीत के अन्तर्गत पढ़ा है कि, दो बिन्दुओं से गुजरती हुई एक और केवल एक ही सरल रेखा खींची जा सकती है। उसी प्रकार क्या आप नहीं जानना चाहेंगे कि एक तल पर कितने बिन्दु ऐसे उपस्थित हो सकते हैं, जिनमें से एक और केवल एक ही वृत्त गुजर सके।

सर्व प्रथम एक बिन्दु P लेकर देखते हैं। आप देखेंगे कि एक बिन्दु से गुजरने वाले आप जितने चाहे उतने वृत्त खींच सकते हैं (देखिए आकृति 12.19 (i)) अब दो बिन्दु P व Q लेकर देखिए। आप पुनः देखेंगे कि इन दो बिन्दुओं से होकर गुजरने वाले वृत्त भी अनेक खींच सकते हैं परन्तु यहाँ आप देखेगे कि प्रत्येक वृत्त के केन्द्र एक सरल रेखा पर होंगे और वह रेखा PQ का लम्ब समद्विभाजक है (देखिए आकृति 12.19 (ii))



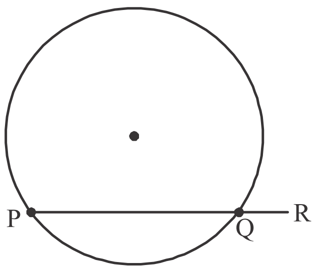
(i)



(ii)

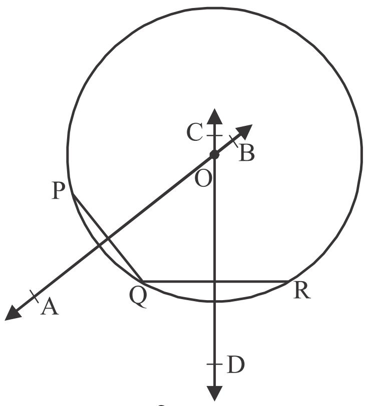
आकृति 12.19

इसी क्रम में तीन बिन्दु PQ व R ऐसे लें जो संरेख हैं। क्या आप इन तीनों बिन्दुओं से गुजरने वाला एक वृत्त खींच सकते हैं? नहीं। यदि तीन बिन्दु एक ही रेखा पर हो तो तीसरा बिन्दु दो बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त के बाहर या अन्दर होगा (देखिए आकृति 12.20)।



आकृति 12.20

आइए अब हम तीन बिन्दु PQ व R इस तरह के लेते हैं, जो एक रेखा पर नहीं हैं (देखिए आकृति 12.21)



आकृति 12.21

आप आकृति 12.19 (ii) में देख चुके हैं कि दो बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों के केन्द्र दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के लम्ब समद्विभाजकों पर स्थित होते हैं। यहाँ भी P,Q और R से गुजरने वाले वृत्तों के केन्द्र PQ तथा QR रेखा खण्डों के लम्ब समद्विभाजकों पर स्थित होंगे। अतः हमें PQ व QR के लम्ब समद्विभाजक खींचने होंगे। आकृति 12.21 में PQ व QR के लम्ब समद्विभाजक क्रमशः AB एवं CD हैं।

आप देख रहे हैं AB और CD परस्पर O पर प्रतिच्छेद कर रहे हैं अतः O से बिन्दु P,Q एवं Q,R से गुजरने वाले वृत्त खींचे जाने चाहिए। क्यों?

चूंकि कक्षा 9 में हम पढ़ चुके हैं कि किसी रेखा खण्ड के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित बिन्दु उस रेखा खण्ड केअन्तिम बिन्दुओं से समान दूरी पर होते हैं। इसलिए OP = OQ – (1) एवं OQ = OR – (2)

(1) व (2) से OP = OQ = OR

अतः 'O' से OP के बराबर त्रिज्या लेकर यदि कोई वृत्त खींचे तो वह निश्चित ही P, Q व R बिन्दुओं से होकर गुजरेगा।

अर्थात् तीन बिन्दु जो एक सरल रेखा में नहीं है, से होकर जाने वाला एक ही वृत्त है।

आप जानते है कि दो रेखा खण्डों के लम्ब समद्विभाजक एक और केवल एक बिन्दु पर ही प्रतिच्छेद करते है अतः P, Q व R बिन्दुओं से समान दूरी पर रहने वाला बिन्दु O भी एक ही होगा। अर्थात् दूसरे शब्दो में P, Q और R से होकर जाने वाला एक अद्वितीय वृत्त है।

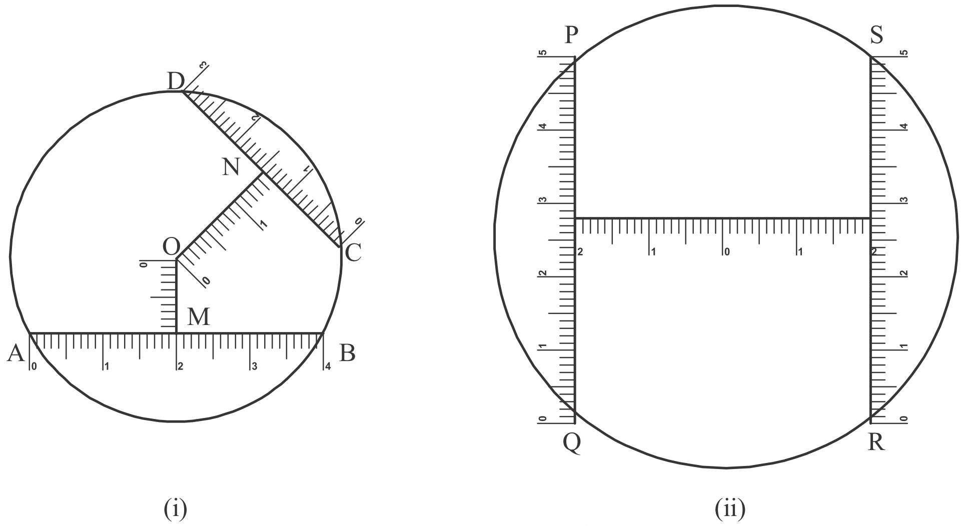
इस परिणाम को हम निम्न प्रमेय के रूप में लिख सकते हैं।

प्रमेय–12.5 तीन दिए हुए असंरेखी बिन्दुओं से होकर जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है।

12.06 समान जीवाएँ और उनके केन्द्र से दूरियाँ

आपने कक्षा 9 में पढ़ा है कि किसी रेखा खण्ड पर बाह्य बिन्दु से खींचे गये सभी रेखा खण्डों में लम्ब सबसे छोटा होता है और यही उस बाह्य बिन्दु की दिये गये रेखा खण्ड से दूरी का माप होता है।

नोटः यदि बिन्दु रेखा खण्ड पर स्थित हो, तो रेखा खण्ड की उससे दूरी शून्य होती है।



आकृति 12.22

एक वृत्त में अनेक जीवाएँ खींची जा सकती हैं। आप को भी एक वृत्त की रचना करके उसमें एक से अधिक जीवाएँ खींचनी है। प्रत्येक जीवा की केन्द्र से दूरी ज्ञात करनी है। आप क्या देखतें है?

आइए एक क्रिया कलाप पर विचार करतें हैं।

आकृति 12.22 (i) में दो जीवाएँ 4 सेमी और 3 सेमी की हैं। उनकी केन्द्र से दूरी क्रमशः 1 सेमी एवं 1.6 सेमी है। अर्थात् एक वृत्त में लम्बी जीवा छोटी जीवा की तुलना में केन्द्र के निकट होती है।

आकृति 12.22 (ii) में दोनों जीवाएँ समान माप 5-5 सेमी की है जो केन्द्र से 2-2 सेमी दूरी पर स्थित है। अर्थात् एक वृत्त में समान नाप की जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती हैं।

चलिए अब हम इन्हें एक वृत्त और दो सर्वांगसम वृत्तों के लिए निम्न प्रमेय द्वारा सिद्ध करते हैं।

प्रमेय–12.6 वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समदूरस्त होती हैं

दिया हुआ हैः जीवा AB = जीवा CD

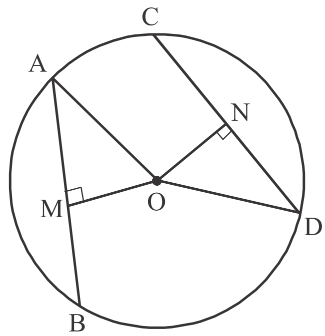
सिद्ध करनाः OM = ON

रचनाः OA एवं OD को मिलाया

उपपत्तिः $AM = BM = \frac{1}{2}AB \ldots$ (केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा का समद्विभाजन करता है)

$DN = CN = \frac{1}{2}CD$ (केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा का समद्विभाजन करता है)

परन्तु AB = CD दिया हुआ है।



आकृति 12.23

अतः AM = DN . . . (i)

ΔOMA एवं ΔOND में

AM = DN [(i) से]

OA = OD (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\angle OMA = \angle OND = 90^o$

अतः RHS नियम से

$\Delta OMA \cong \Delta OND$

अतः OM = ON इतिसिद्धम

इसी प्रकार सर्वांगसम वृत्तों के लिए भी निम्न कथन सत्य है।

उपप्रमेयः सर्वांगसम वृत्तों में समान जीवाएँ संगत केन्द्रों से सम दूरस्त होती हैं।

प्रमेय–12.7 (प्रमेय का विलोम) किसी वृत्त की जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर हो तो वे परस्पर बराबर होती हैं।

दिया हुआ हैः जीवाएँ AB व CD केन्द्र 'O' से समान दूरी पर स्थित हैं अर्थात् OM = ON

सिद्ध करनाः AB = CD

रचनाः O को A व D से मिलाया

उपपत्तिः ΔOMA व ΔOND में

OM = ON (दिया हुआ)

OA = OD (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OMA = \angle OND$ ($OM \perp AB$ एवं $ON \perp CD$)

अतः RHS नियम से

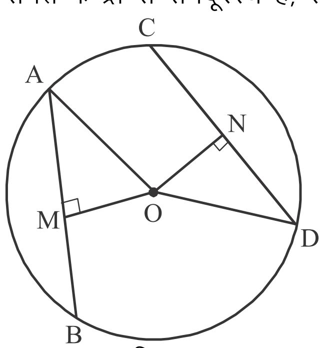
$\Delta OMA \cong \Delta OND$

$\therefore$ AM = ND

या 2 AM = 2 ND

या AB = CD इतिसिद्धम

उपप्रमेयः सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ जो संगत केन्द्रों से समदूरस्थ है, समान होती हैं।

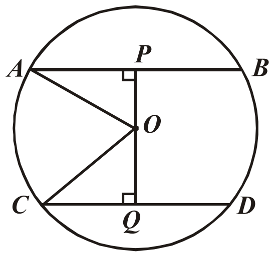


आकृति 12.24

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. आकृति 12.25 में, वृत्त का केन्द्र O एवं त्रिज्या 5 सेमी है। यदि $OP \perp AB$, $OQ \perp CD$, AB|| CD, AB = 8 सेमी और CD = 6 सेमी हों, तो PQ ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है कि $OP \perp AB$, एवं $OQ \perp CD$



आकृति 12.25

अतः $AP = PB = \frac{1}{2}AB = 4$ सेमी

$CQ = QD = \frac{1}{2}CD = 3$ सेमी

और $OA = OC = 5$ सेमी (त्रिज्या)

ΔOPA में, बौधायन प्रमेय से,

$OP^2 = OA^2 - AP^2$

या $OP^2 = 5^2 - 4^2$

$= 25 - 16 = 9$

$\therefore$ $OP = 3$ सेमी

इसी प्रकार ΔOQC में,

$OQ^2 = OC^2 - CQ^2$

$OQ^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore$ $OQ = 4$ सेमी

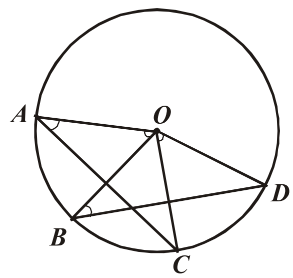
अर्थात् $PQ = OP + OQ = 3 + 4 = 7$ सेमी

उदाहरण-2. आकृति 12.26 में, चाप AB = चाप CD है, सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$ है।

हल: दिया है: चाप AB = चाप CD है,

सिद्ध करना है: $\angle A = \angle B$

उपपत्ति: हम जानते हैं कि समान चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण समान होते हैं



आकृति 12.26

अतः $\angle AOB = \angle COD$

दोनों पक्षों में $\angle BOC$ जोड़ने पर

$\angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD$

या $\angle AOC = \angle BOD$ . . . (1)

अब ΔAOC और ΔBOD में,

$OA = OB$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OC = OD$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle AOC = \angle BOD$ [(1)से]

$\Delta AOC \cong \Delta BOD$ (SAS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle A = \angle B$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-3. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि वृत्त का केन्द्र $\angle BAC$ के समद्विभाजक पर स्थित होगा।

हल: दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, जिसकी जीवाएँ AB और AC समान हैं।

सिद्ध करना है: केन्द्र O, कोण BAC के समद्विभाजक पर स्थित है।

रचना: CO और BO को मिलाया।

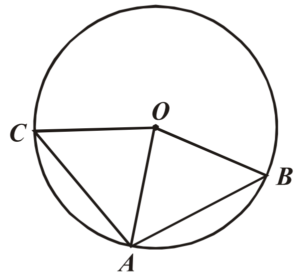
उपपत्तिः ΔAOB और ΔAOC में,

BO = OC (वृत्त की त्रिज्याएँ)

OA = OA (उभयनिष्ठ भुजा)

AB = AC (दिया है)

$\Delta AOB \cong \Delta AOC$ (SSS से)



आकृति 12.27

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle OAB = \angle OAC$

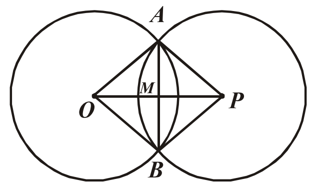
अर्थात केन्द्र O, कोण BAC के समद्विभाजक पर स्थित है। ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-4. यदि दो वृत्त**,** एक दूसरे को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करते हों**,** तो सिद्ध कीजिए कि उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा का लम्ब समद्विभाजक होती है।

हलः दिया हैः आकृति 12.28 में दो वृत्त, जिनके केन्द्र क्रमशः *O* एवं *P* है, जो *A* और *B* बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना हैः *OP,* जीवा *AB* का लम्बसमद्विभाजक है।

रचनाः *OA, OB, PA* और *PB* को मिलाया।



आकृति 12.28

उपपत्तिः ΔOAP और ΔOBP में,

$AO = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$PA = PB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$ (SSS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होंगे।

$\angle AOP = \angle BOP$

या $\angle AOM = \angle BOM$ .....(1)

अबः ΔAOM और ΔBOM में

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle AOM = \angle BOM$ [(1)से]

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ)

$\Delta AOM \cong \Delta BOM$ (SAS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ एवं कोण समान होंगे।

अर्थात् $AM = BM$ ....(2)

और $\angle AMO = \angle BMO$ .....(3)

परन्तु $\angle AMO + \angle BMO = 180^\circ$

या $\angle AMO = \angle BMO = 90^\circ$ .....(4)

समीकरण (2) और (4) से,

OP, जीवा *AB* का लम्ब समद्विभाजक है। ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-5. 10 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त में, दो जीवाएँ AB = AC = 12 सेमी हों, तो जीवा BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हलः आकृति 12.29 में, ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। $\angle BAC$ का समद्विभाजक AD है, अतः AD जीवा BC का लम्ब-समद्विभाजक है।

यहाँ AC = AB =12 सेमी

OA = OC = 10 सेमी

और BD = CD

∵ ΔADC में, बौधायन प्रमेय से

$CD^2 = AC^2 - AD^2$

$CD^2 = 144 - AD^2$ .....(1)

इसी प्रकार ΔOCD में $CD^2 = OC^2 - OD^2$

$CD^2 = 100 - (OA - AD)^2 = 100 - (10 - AD)^2$

$CD^2 = 20\,AD - AD^2$ .....(2)

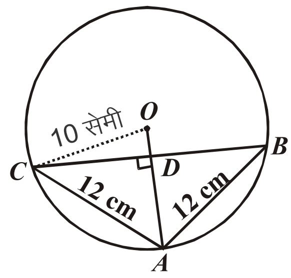
(1) और (2) से $144 - AD^2 = 20\,AD - AD^2$

या $AD = 7.2$ सेमी

AD का मान (1) में रखने पर

$CD^2 = 144 - (7.2)^2$ या $CD = 9.6$ सेमी

अतः जीवा $BC = 2CD = 2\times 9.6 = 19.2$ सेमी



आकृति 12.29

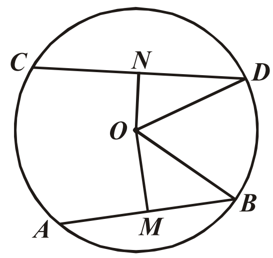
उदाहरण-6. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की दो जीवाओं में से बड़ी जीवा केन्द्र के निकट होती है।

हल: दिया है: आकृति 12.30 में, एक वृत्त जिसका केन्द्र O है और जीवा CD > जीवा AB

सिद्ध करना है: ON < OM

रचना: OB और OD को मिलाया

उपपत्तिः OM और ON क्रमश AB और CD पर लम्ब हैं,



आकृति 12.30

अतः $MB = \frac{1}{2}AB$ और $ND = \frac{1}{2}CD$ .....(1)

अब ΔOMB में

$MB^2 = OB^2 - OM^2$ .....(2)

और ΔOND में

$ND^2 = OD^2 - ON^2$ .....(3)

दिया है कि $AB < CD$

या $\frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}CD$

या $MB < ND$ [(1)से]

या $MB^2 < ND^2$ .....(4)

समीकरण (2), (3) और (4) से

$(OB^2 - OM^2) < (OD^2 - ON^2)$

परन्तु OB = OD (वृत्त की त्रिज्या) है

अतः $-OM^2 < -ON^2$

या $OM^2 > ON^2$

या $OM > ON$

या $ON < OM$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-7. आकृति 12.31 में, एक वृत्त में जीवा AB = जीवा CD हों, तो सिद्ध कीजिए कि DQ = BQ

हल: दिया है: जीवा AB = जीवा CD

सिद्ध करना है: DQ = BQ

रचना: $OL \perp AB$ और $OM \perp CD$ खीचें और OQ को मिलाया।

उपपत्तिः AB = CD (दिया हुआ है)

या $OL = OM$ .....(1)

अब ΔOMQ और ΔOLQ में,

$OQ = OQ$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$OM = OL$ [(1) से]

$\angle OMQ = \angle OLQ$ (समकोण)

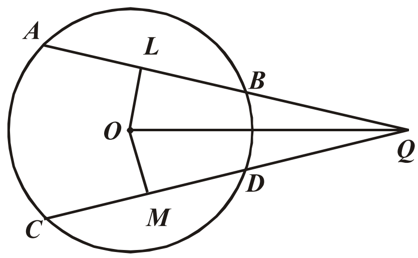
$\angle OMQ \cong \Delta OLQ$ (RHS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $MQ = LQ$ .....(2)

परन्तु $MD = \frac{1}{2}CD$ और $LB = \frac{1}{2}AB$

$AB = CD \Rightarrow MD = LB$ .....(3)



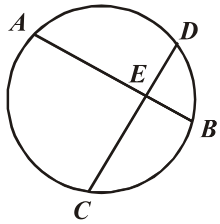
आकृति 12.31

समीकरण (2) में से (3) को घटाने पर $MQ - MD = LQ - LB$

अतः $DQ = BQ$ ''इतिसिद्धम्''।

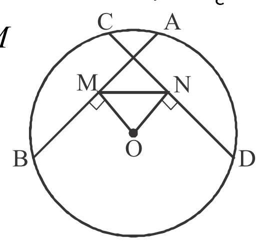
प्रश्नमाला 12.2

1. निम्न में सत्य/असत्य लिखिए और अपने उत्तर का कारण सम्भव हो तो बताइए।
   (i) एक वृत्त की AB व CD क्रमशः 3 सेमी एवं 4 सेमी माप की जीवाएं है जिनके द्वारा केन्द्र पर क्रमशः 70^o एवं 50^o के कोण निर्मित हैं।
   (ii) एक वृत्त की जीवाएँ जिनकी लम्बाईयाँ 10 सेमी और 8 सेमी हैं केन्द्र से क्रमशः 8 सेमी और 5 सेमी दूरियों पर स्थित है।
   (iii) एक वृत्त की दो जीवाएँ AB व CD में से प्रत्येक केन्द्र से 4 सेमी दूरी पर है तब AB = CD है।
   (iv) O और O' केन्द्रों वाले दो सर्वांगसम वृत्त A और B दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं। तब $\angle AOB = \angle AO'B$ है।
   (v) तीन संरेख बिन्दुओं से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।
   (vi) दो बिन्दुओं A और B से होकर 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचा जा सकता है, यदि AB = 8 सेमी है।
2. यदि वृत्त की त्रिज्या 13 सेमी है और इसकी एक जीवा की लम्बाई 10 सेमी हो, तो इस जीवा की वृत्त के केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिए।
3. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD जिनकी लम्बाइयाँ क्रमशः 6 सेमी और 12 सेमी हैं, एक दूसरे के समान्तर हैं तथा वे वृत्त के केन्द्र के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच 3 सेमी की दूरी हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
4. आकृति 12.32 में, दो समान जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि चाप DA = चाप CB



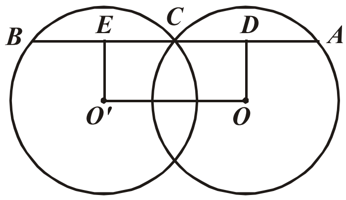
आकृति 12.32

5. आकृति 12.33 में, AB और CD एक वृत्त की समान जीवाएँ हैं। वृत्त का केन्द्र O है। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle OMN = \angle ONM$



आकृति 12.33

6. आकृति 12.34 में, O और O' दिए गए वृत्तों के केन्द्र हैं। $AB||OO'$ हैं। सिद्ध कीजिए कि $AB = 2OO'$.



आकृति 12.34

7. AB और CD वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि $AB = 10$ सेमी, $CD = 24$ सेमी और $AB || CD$ है। AB एवं CD के बीच की दूरी 17 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

8. 10 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त में, दो समान्तर जीवाओं की लम्बाई क्रमशः 12 सेमी एवं 16 सेमी है। AB और CD के मध्यदूरी ज्ञात कीजिए, यदि जीवाएँ

(क) केन्द्र के एक ही ओर हों, (ख) केन्द्र के विपरीत ओर हों।

9. एक चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष वृत्त पर इस प्रकार स्थित हैं कि, $AB = CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AC = BD$

10. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हों, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के क्रमित भाग क्रमशः दूसरी जीवा के संगत भागों के बराबर होते हैं।

PFPPCZ

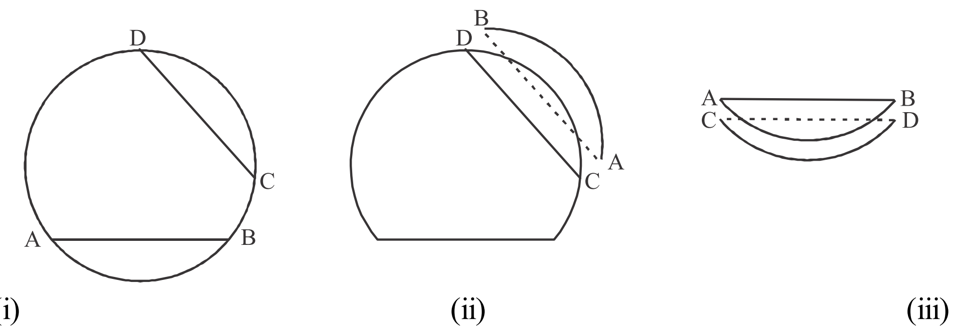
11. सिद्ध कीजिए कि दो समान्तर जीवाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

12.07 एक वृत्त के चाप द्वारा अन्तरित कोण

आपने पिछले अनुच्छेदों में पढ़ा है कि जीवा के अन्तिम बिन्दु वृत्त को दो चापों में विभाजित करते हैं। यदि आप बराबर माप की दो जीवाएँ लें तो उनके चापों के माप के बारे में क्या कह सकते है? क्या एक जीवा द्वारा बना चाप दूसरी जीवा द्वारा बने चाप के बराबर है?

आइए इस पहेली को सुलझातें है।

क्रिया कलाप– एक वृत्त एक कागज पर बनाइए। उसमें दो समान माप की दो जीवाएँ AB व CD खींचिए तो हमें चाप AB एवं चाप CD प्राप्त होंगे। (देखिए आकृति 12.35 (i))



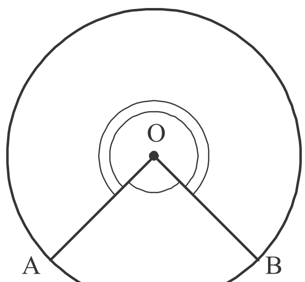
आकृति 12.35

आकृति 12.35 (ii) के अनुसार जीवा AB के अनुदिश काट कर जीवा CD पर रखकर AB द्वारा बने चाप से CD द्वारा बने चाप को ढकने का प्रयत्न कीजिए। आप क्या देखतें?

. अब जीवा CD के अनुदिश भी काट लीजिए और दोनों को (आकृति 12.35(iii)) के अनुसार परस्पर ढकने का प्रयत्न करें।

आप देखेंगें, कि चाप CD एवं चाप AB एक दूसरे को पूरा–पूरा ढक लेते है। अर्थात् बराबर जीवाएँ सर्वांगसम चाप बनाती है।

अतः यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हो तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोम यदि दो चाप सर्वांगसम हों तो उनकी संगत जीवाएँ भी बराबर होती हैं।



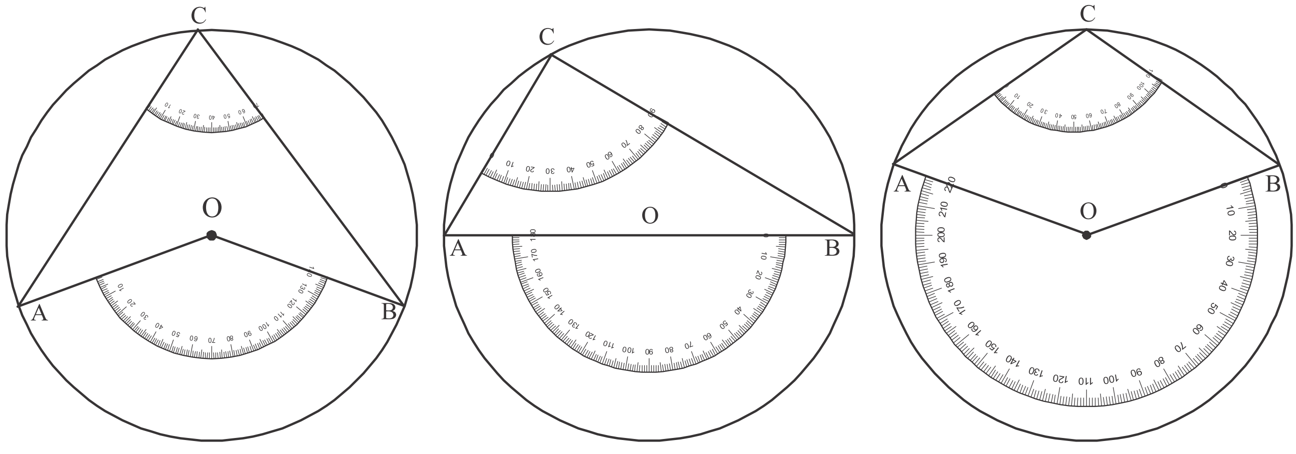
आकृति 12.36

यहाँ चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण भी संगत जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण के अर्थ में ही परिभाषित किया जा सकता है। यानि, लघु चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle AOB$ तथा दीर्घ चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित वृहत $\angle AOB$ से व्यक्त कर सकते हैं (देखिए आकृति 12.36) इस परिभाषा और प्रमेय 12.1 द्वारा हम कहे सकते हैं कि–

किसी वृत्त के सर्वांगसम चाप (या बराबर चाप) केन्द्र पर बराबर कोण अन्तरित करतें हैं।

आइए अब हम एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण एवं वृत्त के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोणों में निम्न क्रियाकलाप द्वारा उनमें क्या सम्बन्ध होता है? देखते हैं।

क्रिया कलाप–



(i) (ii) (iiii)

आकृति 12.37

आकृति 12.37 (i) (ii) एवं (iii) में आपको क्रमशः लघु चाप AB अर्द्ध वृत्त AB तथा दीर्घ चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण और शेष वृत्त पर अन्तरित कोण ''चान्दे की फोटो प्रतियों के द्वारा मापन करते हुए दिखाई दे रहे होंगे।

आपको प्रत्येक आकृति को ध्यान से देखना है। उन सभी में चाप AB, द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle AOB$ एवं वृत्त के शेष भाग ACB पर अन्तरित $\angle ACB$ में क्या सम्बन्ध दिखाई देता है? चान्दे द्वारा दर्शाया माप पढ़िए।

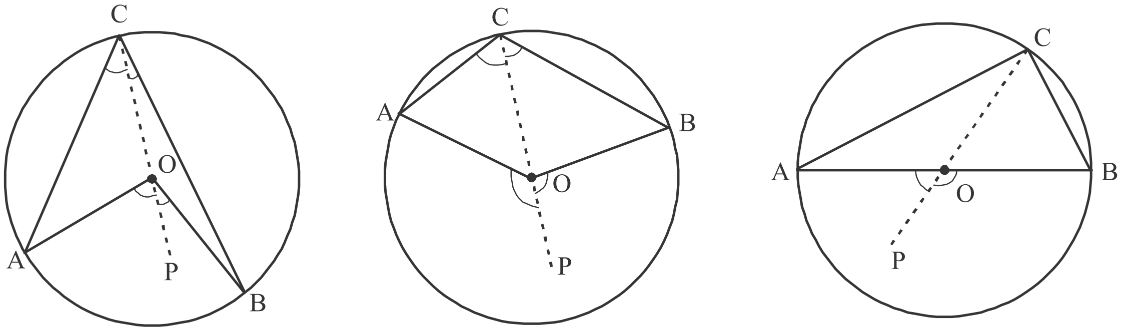
आकृति 12.37 (i) में $\angle AOB = 140^o$ एवं $\angle ACB = 70^o$ (ii) में $\angle AOB = 180^o$ एवं $\angle ACB = 90^o$ तथा (ii) में वृहत $\angle AOB = 220^o$ एवं $\angle ACD = 110^o$ है।

सभी आकृतियों से स्पष्ट होता है कि केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेष भाग पर बने कोण का दोगुना है।

इस क्रिया कलाप को आप भी अन्य माप के कोण लेकर दोहराइए।

चलिए अब इस प्राप्त परिणाम को उपपत्ति द्वारा सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 12.8 एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दोगुना होता है।



(i) (ii) (iii)

आकृति 12.38

दिया हुआः चाप AB द्वारा केन्द्र O पर अन्तरित $\angle AOB$ और शेष भाग पर अन्तरित $\angle ACB$ है।

सिद्ध करनाः $\angle AOB = 2\angle ACB$

रचनाः C को O से मिलाते हुए P तक बढ़ावा

उपपत्तिः ΔAOC एक समद्विबाहू त्रिभुज है, क्योंकि $OA = OC$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ है।

अतः $\angle ACO = \angle OAC$ (त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।) . . . (1)

ΔAOC का $\angle AOP$ बहिष्कोण है अतः

$\angle AOP = \angle ACO + \angle OAC$ ($\angle ACO = \angle OAC$ (1) से)

$\angle AOP = \angle ACO + \angle ACO$

या $\angle AOP = 2\angle ACO$ . . . (2)

इसी प्रकार $\angle BOP = 2\angle BCO$ . . . (3)

(2) व (3) को जोड़ने पर

$\angle AOP + \angle BOP = 2\angle ACO + 2\angle BCO$

या $\angle AOP + \angle BOP = 2(\angle ACO + \angle BCO)$

या $\angle AOB = 2\angle ACB$

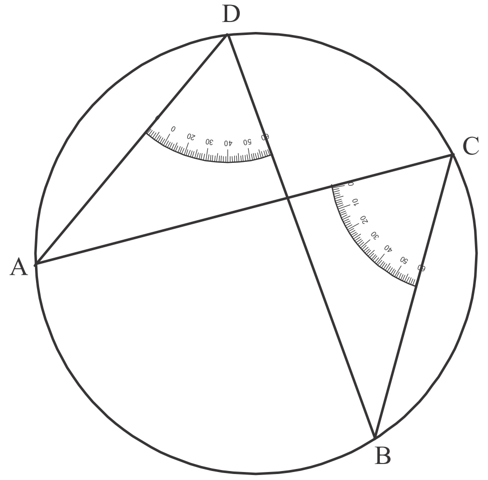
(आकृति 12.39(i), (ii) व (iii) से) इति सिद्धम

आकृति 12.39(iii) में $\angle ACB$ अर्द्ध वृत्त पर बनने वाला कोण है

यहाँ $\angle AOB = 180^o$ है अतः $\angle ACB = 90^o$ होगा, अर्थात्
उपप्रमेय अर्द्ध वृत्त समकोण अन्तरित करता है।

आइए अब हम एक ही चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में अन्तरित कोणों पर विचार निम्न क्रिया कलाप द्वारा करते हैं
क्रिया कलाप– एक वृत्त बनाकर AC एवं AD दो जीवाएँ खींचिए। चान्दे की छाया प्रतियाँ (समान कोणों की) काटकर आकृति 12.39 के अनुसार आधार रेखा CA व DA लेकर C व D पर चिपकाइए। आप देखेंगे उक्त चान्दे की छाया प्रतियों में बने कोण की दूसरी भुजाएँ बढ़ाने पर वे परस्पर वृत्त पर ही B बिन्दु पर मिलेंगे। आकृति में $\angle ADB = \angle ACB = 60^o$ हैं।

अर्थात् एक ही चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में अन्तरित सभी कोण बराबर होते हैं।



आकृति 12.39

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. आकृति 12.40 में, वृत्त का व्यास AB है और $\angle DAB = 40^\circ$ हो,तो $\angle DCA$ ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त का व्यास AB है अतः

$$\angle ADB = 90^\circ$$

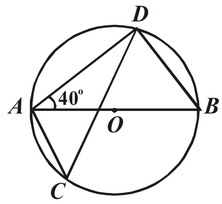
अब $\angle DBA = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ)$

$\Rightarrow$ $\angle DBA = 50^\circ$

$\therefore$ $\angle DBA$ और $\angle DCA$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं

अतः $\angle DCA = \angle DBA = 50^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle DCA = 50^\circ$



आकृति 12.40

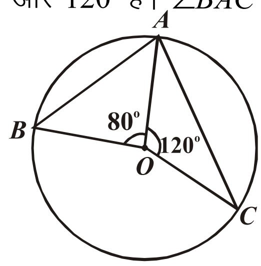
उदाहरण-2. आकृति 12.41 में, चाप AB और चाप AC द्वारा केन्द्र O पर अन्तरित कोण क्रमश 80^o और 120^o हैं। $\angle BAC$ और $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

हल: $\angle BOC = 360^\circ - (120^\circ + 80^\circ)$

अतः $\angle BOC = 160^\circ$

एवं $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\times 160^\circ$

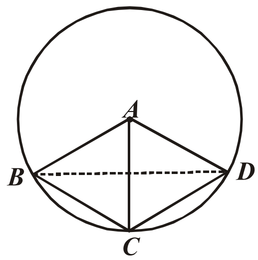
अतः $\angle BAC = 80^\circ$



आकृति 12.41

उदाहरण-3. एक चतुर्भुज ABCD में AB=AC=AD हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle BAD = 2(\angle BDC + \angle CBD)$.

हल: दिया है कि $AB = AC = AD$ अर्थात् बिन्दु B, C और D बिन्दु A से समान दूरी पर है, अतः वृत्त का केन्द्र A है।



आकृति 12.42

अब चाप BC केन्द्र पर $\angle BAC$ और वृत्त के शेष भाग पर $\angle BDC$ बनाता है।

$\therefore$ $\angle BAC = 2\angle BDC$ . . . (1)

इसी प्रकार चाप CD केन्द्र पर $\angle CAD$ और वृत्त के शेष भाग $\angle CBD$ बनाता है।

$\therefore$ $\angle CAD = 2\angle CBD$ . . . (2)

समीकरण (1) और (2) का योग करने पर

$$\angle BAC + \angle CAD = 2(\angle BDC + \angle CBD)$$

$\Rightarrow$ $\angle BAD = 2(\angle BDC + \angle CBD)$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-4. सिद्ध कीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज की एक समान भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, त्रिभुज की असमान भुजा को समद्विभाजित करता है।

हल: दिया है: आकृति 12.43 में, एक समद्विबाहु ΔABC जिसमें $AB=AC$ और व्यास AC पर खींचा गया वृत्त BC को D पर काटता है।

सिद्ध करना है: $BD = DC$

उपपत्तिः AC को व्यास मानकर वृत्त खींचा गया है और $\angle ADC$ अर्द्धवृत्त का कोण है,

अतः $\angle ADC = 90^\circ$

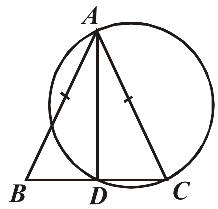
अब, ΔABD और ΔACD में,

$AB = AC$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADB = \angle ADC$ (समकोण)

$\Delta ABC \cong \Delta ACD$ (RHS से)



आकृति 12.43

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $BD = CD$

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तखण्ड का कोण न्यूनकोण होता है।

हलः दिया हैः आकृति में एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, दीर्घवृत्तखण्ड ACB है।

सिद्ध करना हैः $\angle ACB < 90^\circ$

रचनाः OA, OB एवं AB को मिलाया।

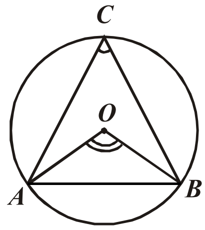
उपपत्तिः चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $\angle AOB$ और शेष भाग पर अन्तरित कोण $\angle ACB$ है, अतः

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB \quad \ldots (1)$$

परन्तु $\angle AOB < 180^\circ$ (ΔAOB का एक कोण)

$\therefore$ $\frac{1}{2}\angle AOB < \frac{1}{2}\times 180^\circ$

अर्थात $\frac{1}{2}\angle AOB < 90^\circ \quad \ldots (2)$



आकृति 12.44

समीकरण (1) और (2) से $\angle ACB < 90^\circ$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण-6. AOC वृत्त का एक व्यास है तथा चाप $AXB = \frac{1}{2}$ चाप BYC है। $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

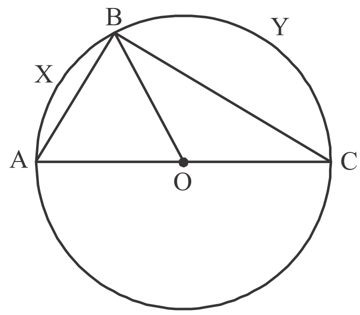
हलः क्योंकि चाप $AXB = \frac{1}{2}$ चाप BYC है, इसलिए,

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\angle BOC$$

साथ ही, $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$

अतः, $\frac{1}{2}\angle BOC + \angle BOC = 180^\circ$

या $\angle BOC = \frac{2}{3}\times 180^\circ = 120^\circ$



आकृति 12.45

उदाहरण-7. आकृति 12.46 में x का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\angle DAC = \angle DBC = 30^\circ$ (एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण) . . . (i)

Δ DBC में

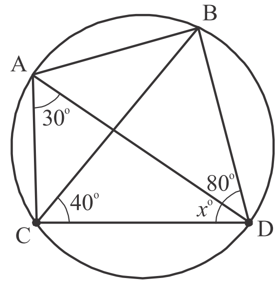
$$\angle DBC + \angle DCB + \angle BDC = 180^\circ$$

या $\quad 30^\circ + 40^\circ + \left(x + 80^\circ\right) = 180^\circ$ (आकृति एवं (i) से)

या $\quad x + 80 = 180 - 70$

या $\quad x = 110 - 80$

या $\quad x = 30^\circ$



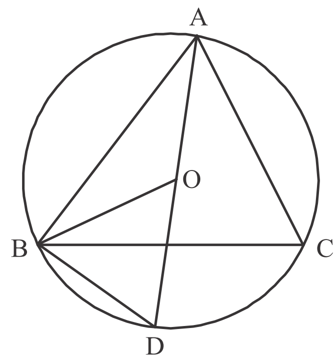
आकृति 12.46

उदाहरण-8. आकृति 12.47 में, Δ ABC एक समबाहू त्रिभुज है। O इसका केन्द्र है। यदि A को O से मिलाते हुए आगे बढ़ाया तो वह वृत्त को D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए Δ OBD एक समबाहू त्रिभुज है।

हलः दिया हुआ हैः Δ ABC एक समबाहू त्रिभुज है। O, Δ ABC का केन्द्र है।

AO को आगे बढ़ाने पर वृत्त से D पर मिलता है।

सिद्ध करनाः Δ OBD समबाहू त्रिभुज है।



आकृति 12.47

उपपत्तिः OB एवं OD (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

अतः $\quad \angle OBD = \angle ODB$ . . . (i)

$\because$ $\quad \Delta$ ABC एक समबाहू त्रिभुज है

अतः $\quad \angle C = 60^\circ$ . . . (ii)

$\angle ADB = \angle C$ ((ii) से एक ही वृत्त खण्ड पर बने कोण)

अतः $\quad \angle ADB = 60^\circ$ [(i) से]

परन्तु $\quad \angle ADB$ एवं $\angle ODB$ एक ही कोण को दर्शाता है

अतः $\quad \angle ODB = 60^\circ$

$\therefore$ $\quad \angle OBD = 60^\circ$ ((i) से)

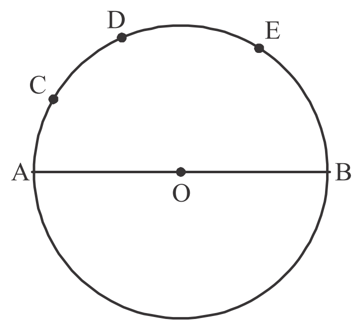
परन्तु Δ में तीनों कोणों का योग 180° होता है।

अतः Δ OBD का तीसरा कोण $\angle BOD$ भी 60° का होगा

अतः Δ OBD एक समबाहू त्रिभुज है इतिसिद्धम

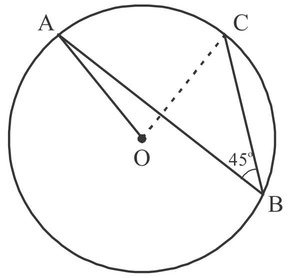
प्रश्नमाला 12.3

1. प्रत्येक के लिए सत्य/असत्य लिखिए और अपने उत्तर कारण भी लिखिए।
   (i) किसी जीवा द्वारा वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं पर अन्तरित कोण बराबर होते है।
   (ii) आकृति 12.48 में, AB एक वृत्त का व्यास है और C वृत्त पर कोई बिन्दु है तब $AC^2 + BC^2 = AB^2$ है।
   (iii) आकृति 12.48 में, यदि $\angle ADE = 120^\circ$ है तो $\angle EAB = 30^\circ$ है
   (iv) आकृति 12.48 में, $\angle CAD = \angle CED$ है।



आकृति 12.48

2. आकृति 12.49 में $\angle ABC = 45^\circ$ है तो सिद्ध कीजिए $OA \perp OC$ है।



आकृति 12.49

3. O त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र है तथा D आधार BC का मध्य–बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BOD = \angle A$ है।

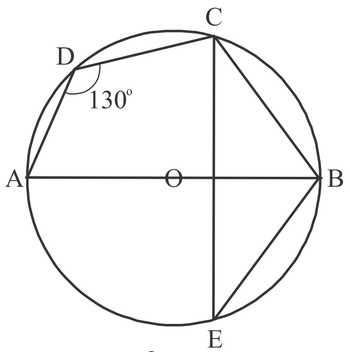
4. एक उभयनिष्ठ कर्ण AB पर दो समकोण त्रिभुज ACB और ADB इस प्रकार खींचे गए हैं कि वे विपरीत ओर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC = \angle BDC$ है।

5. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC उसके केन्द्र पर क्रमशः 90^o और 150^o के कोण अंतरित करती हैं। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए, यदि AB और AC केन्द्र के विपरीत ओर स्थित हैं।

6. एक त्रिभुज ABC का परिकेंद्र O है। सिद्ध कीजिए कि $\angle OBC + \angle BAC = 90^o$ है।

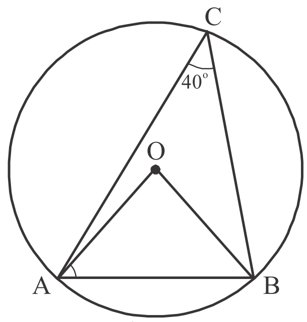
7. किसी वृत्त की एक जीवा उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखंड में किसी बिन्दु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

8. आकृति 12.50 में, $\angle ADC = 130^o$ और जीवा BC = जीवा BE है। $\angle CBE$ ज्ञात कीजिए।



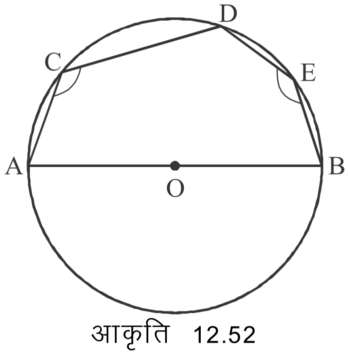
आकृति 12.50

9. आकृति 12.51 में, $\angle ACB = 40^o$ है। $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.51

10. आकृति में AOB वृत्त का व्यास है तथा C, D और E अर्धवृत्त पर स्थित कोई तीन बिन्दु हैं। $\angle ACD + \angle BED$ का मान ज्ञात कीजिए।

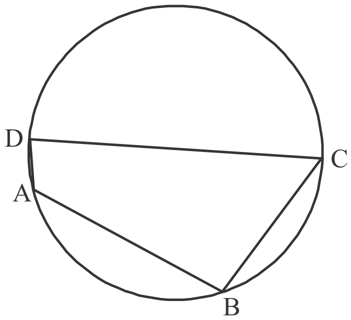


आकृति 12.52

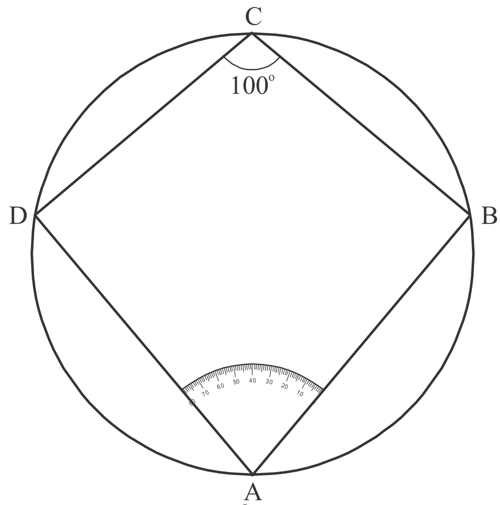
12.08 चक्रीय चतुर्भुज

ऐसा चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हो चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है। (देखिए आकृति 12.65 में) इन चतुर्भुजों में एक विशेष गुण होता है उसके लिए आइए एक क्रिया कलाप पर ध्यान देते हैं।

क्रिया कलाप–



आकृति 12.53



आकृति 12.54

1. एक वृत्त अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाइए।
2. वृत्त के किसी बिन्दु पर अपनी इच्छा से चान्दे की छाया प्रति में से एक कोण (यहाँ 80° का कोण काट कर चिपकाया है) काट कर चिपका दीजिए जैसा आकृति 12.54 में $\angle A$ है।
3. इस कोण की दोनों भुजाओं को इतना बढ़ाइए कि वृत्त को किन्ही दो बिन्दुओं पर मिले इस प्रकार $\angle BAD$ प्राप्त होगा।
4. चाप DAB को छोड़कर वृत्त के शेष भाग पर कोई बिन्दु C लीजिए और चतुर्भुज पूरा कीजिए।
5. $\angle A$ के सम्मुख $\angle C$ है। $\angle C$ का मान कितना होगा? इसको चाँदे की सहायता से नापिए आप देखेंगे कि यहा $\angle BCD = 100^o$ प्राप्त होता है। अर्थात् $\angle A + \angle C = 180^o$ है।

शेष दोनों कोणों का योग भी 180° का होगा, क्योंकि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।

अर्थात् चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं। इस परिणाम को निम्न उपपत्ति द्वारा भी सिद्ध करेंगे।

प्रमेय–12.8 चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण युग्म सम्पूरक या उनका योग 180° होता है।

दिया हुआ हैः ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

सिद्ध करनाः $\angle A + \angle C = 180^o$

$\angle B + \angle D = 180^o$

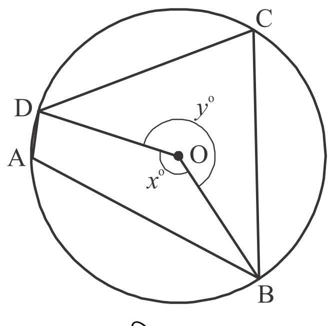
रचनाः O को B व D से मिलाया

उपपत्तिः चाप DAB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण x^o और वृत्त के शेष भाग पर अन्तरित कोण $\angle C$ है।

अतः $\angle C = \frac{1}{2}x^o$ . . . (1)

इसी प्रकार चाप DCB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण y^o और वृत्त के शेष भाग पर अन्तरित कोण $\angle A$ है।

अतः $\angle A = \frac{1}{2}y^o$ . . . (2)



आकृति 12.55

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$\angle C + \angle A = \frac{1}{2}\left(x^o + y^o\right)$$

या $\angle C + \angle A = \frac{1}{2} \times 360^o = 180^o$ . . . (3)

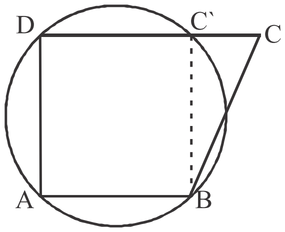
चूंकि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है

अतः $\angle B + \angle D = 360^{\circ} - (\angle A + \angle C)$

या $\angle B + \angle D = 360^{\circ} - 180^{\circ} = 180^{\circ}$ . . . (3) से इतिसिद्धम्

इस प्रमेय का विलोम जिसका कथन निम्न प्रकार है भी सत्य है।

प्रमेय–12.9 (प्रमेय 12.08 का विलोम) यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक हो तो वह एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।



आकृति 12.56

दिया हुआ हैः ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें $\angle BAD + \angle BCD = 180^{\circ}$ एवं $\angle ABD + \angle ADC = 180^{\circ}$

सिद्ध करनाः ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्तिः माना कि एक वृत्त जो A, B एवं D से गुजरता है परन्तु C के स्थान पर C' से गुजरता है तब C'B को मिलाने पर ABC'D एक चक्रीय चतुर्भुज बन जाता है।

अतः $\angle BAD + \angle BC'D = 180^{\circ}$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं) . . . (i)

परन्तु $\angle BAD + \angle BCD = 180^{\circ}$ (दिया हुआ हैं।) . . . (ii)

(i) व (ii) से $\angle BAD + \angle BC'D = \angle BAD + \angle BCD$

या $\angle BC'D + \angle BCD$ . . . (iii)

परन्तु $\angle BC'D$, $\Delta BCC'$ का बहिष्कोण है।

अर्थात् $\angle BC'D = \angle BCD \angle CBC'$ (Δ का बहिष्कोण अन्तराभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है)

या $\angle BC'D > \angle BCD$ . . . (iv)

(iii) एवं (iv) से स्पष्ट होता है कि $\angle BC'D > \angle BCD$ तभी सम्भव है जब BC एवं BC' सम्पाती हो। या बिन्दु C एवं C' सम्पाती हो

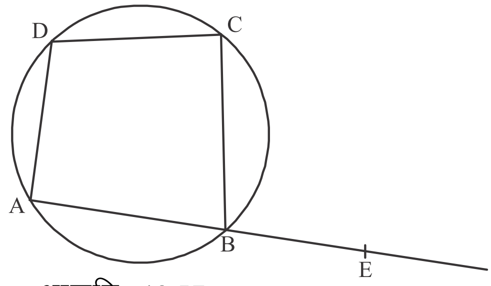
अर्थात् ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज हो

अतः ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है इतिसिद्धम्

12.09 चक्रीय चतुर्भुज के अन्तराभिमुख कोण

PFYKEH

किसी चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा को बढ़ाने पर जो कोण बनता है,उसे उस चतुर्भुज का बहिष्कोण कहते हैं। (देखिए आकृति 12.57) $\angle CBE$ चक्रीय चतुर्भुज ABCD का बहिष्कोण है। इस प्रकार आप प्रत्येक शीर्ष पर एक–एक बहिष्कोण बना सकते हैं।



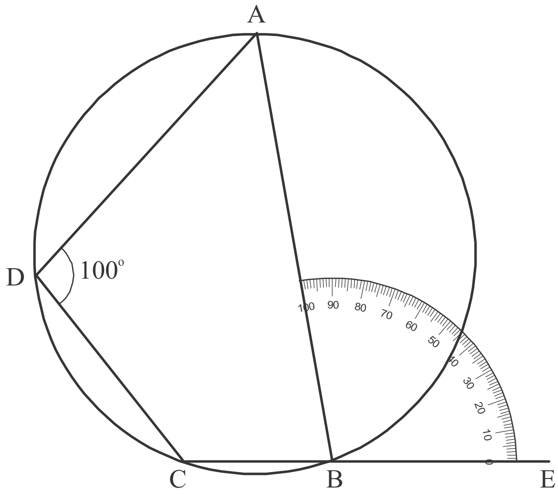
आकृति 12.57

$\angle ABC$ एवं $\angle ADC$ बहिष्कोण $\angle CBE$ के क्रमशः अन्तः आसन्न कोण एवं अन्तराभिमुख कोण कहलाते हैं।

आइए अब हम बहिष्कोण एवं अन्तराभिमुख कोणों में क्या सम्बन्ध होता है? जानकारी करते हैं। इसके लिए एक क्रिया कलाप को करने का प्रयत्न करते हैं।

क्रिया कलाप–

1. एक वृत्त की रचना कीजिए।
2. आकृति 12.57 की तरह वृत्त पर कोई दो बिन्दु A व B लेकर दोनों को मिलाते हुए E तक बढ़ाइए।



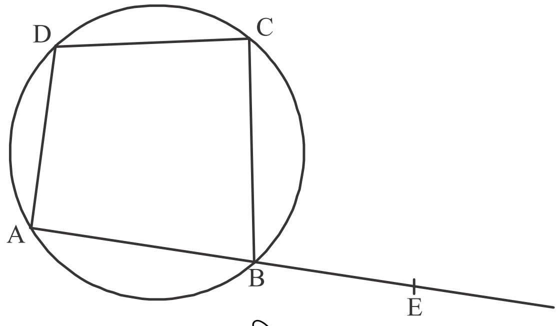
आकृति 12.58

3. चान्दे की छाया प्रति में से आप अपनी इच्छा से एक किसी भी माप का कोण काट लीजिए (यहाँ 100^o का कोण है) और उसे बिन्दु B पर इस प्रकार चिपकाइए कि काटे गये कोण की आधार रेखा और BE सम्पाती हो जाए।
4. कोण की भुजा EB को आगे इतना बढ़ाइए कि वह वृत्त को किसी बिन्दू C पर मिले
5. वृत्त के चाप ABC को छोड़ कर शेष भाग पर एक बिन्दु D लीजिए। चक्रीय चतुर्भुज ABCD को पूरा कीजिए।
6. $\angle ADC$ को चांदे की सहायता से मापिए। आप पाएंगे कि $\angle ADC = 100^o$ प्राप्त हो रहा है।

अर्थात् चक्रीय चतुर्भुज के एक बहिष्कोण का माप उसके अन्तराभिमुख कोण के माप के बराबर होता है।

आइए इस परिणाम को निम्नानुसार उपपत्ति के चरण देकर सिद्ध करते है।

प्रमेय–12.10 चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा बढ़ाने पर बनने वाला बहिष्कोण उसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होता है।



आकृति 12.59

दिया हुआ हैः चक्रीय चतुर्भुज ABCD की भुजा AB को E तक बढ़ाया गया है।

सिद्ध करना हैः $\angle CBE = \angle ADC$

उपपत्तिः ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है

अतः $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$ . . . (i)

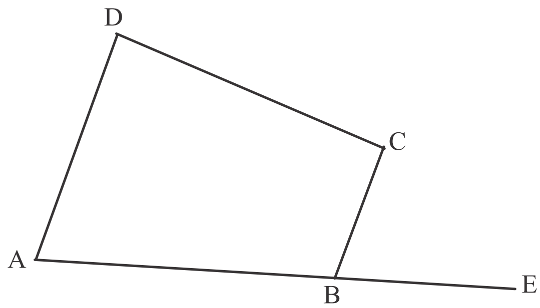
$\angle ABC + \angle CBE = 180^o$ रैखिक कोण युग्म . . . (ii)

(i) व (ii) से $\angle ABC + \angle ADC = \angle ABC + \angle CBE$

या $\angle ADC = \angle CBE$ इति सिद्धम

क्या आप इस प्रमेय का विलोम यानि किसी चतुर्भुज का बहिष्कोण व उसका अन्तराभिमुख कोण बराबर हो तो वह एक चक्रीय चतुर्भुज है, सिद्ध कर सकते हैं?

प्रमेय–12.11 किसी चतुर्भुज की एक भुजा बढ़ाने पर बनने वाला बहिष्कोण अपने अन्तराभिमुख कोण के बराबर हो, तो वह एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।



आकृति 12.60

दिया हुआ है: चतुर्भुज ABCD का $\angle CBE$ बहिष्कोण है।

तथा $\angle ADC = \angle CBE$

सिद्ध करना है: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति: $\angle ADC = \angle CBE$ . . . (दिया हुआ है)

दोनों ओर $\angle ABC$ जोडने पर

$\angle ABC + \angle ADC = \angle ABC + \angle CBE$

या $\angle ABC + \angle CBE = 180^o$ (रैखिक कोण युग्म)

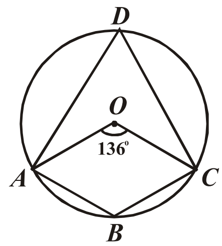
अतः $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$

चूंकि $\angle ABC$ व $\angle ADC$ चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण है अतः प्रमेय 12.12 के अनुसारABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. आकृति 12.61 में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle AOC = 136^\circ$ हो,तो $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए।

हल: चाप ABC द्वारा केन्द्र O और शेष भाग पर अन्तरितकोण क्रमशः $\angle AOC$ और $\angle ADC$ हैं।



आकृति 12.61

अतः $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\times 136^\circ$

या $\angle ADC = 68^\circ$

$\therefore$ $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है अतः सम्मुख कोणों का योग 180^o होगा

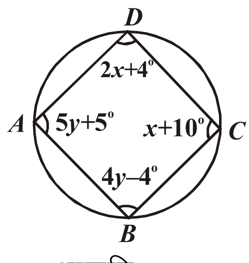
$\therefore$ $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$

या $\angle ABC = 180^\circ - 68^\circ$

या $\angle ABC = 112^\circ$

उदाहरण-2. आकृति 12.62 में $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। x और y ज्ञात कीजिए।

हल: चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं।



आकृति 12.62

$\left(2x^\circ + 4^\circ\right) + \left(4y^\circ - 4^\circ\right) = 180^\circ$

या $2x^\circ + 4y^\circ = 180^\circ$

या $x^\circ + 2y^\circ = 90^\circ$ . . . (1)

इसी प्रकार $(x^\circ + 10^\circ) + (5y^\circ + 5^\circ) = 180^\circ$

या $x^\circ + 5y^\circ = 165^\circ$ . . . (2)

(1) और (2) को हल करने पर

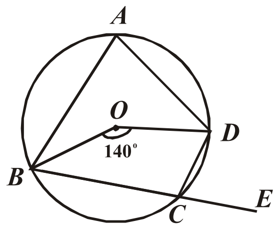
$x^\circ = 40^\circ, \quad y^\circ = 25^\circ$

अतः $x^\circ = 40^\circ$ और $y^\circ = 25^\circ$

उदाहरण-3. आकृति 12.63 में, वृत्त का केन्द्र O है और चाप BCD द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 140^o है। $\angle BAD$ और $\angle DCE$ ज्ञात कीजिए।

हल: चाप BCD द्वारा केन्द्र एवं शेष भाग पर अन्तरित कोण क्रमशः $\angle BOD$ एवं $\angle BAD$ हैं।

अतः $\angle BAD = \frac{1}{2} \times \angle BOD = \frac{1}{2} \times 140^\circ$



आकृति 12.63

या $\angle BAD = 70^\circ$

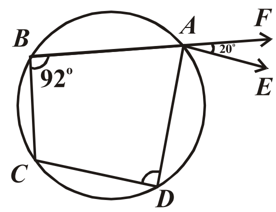
परन्तु $\angle DCE$, चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ का बहिष्कोण है जो इसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होगा।

$\angle DCE = \angle BAD$

या $\angle DCE = 70^\circ$

उदाहरण-4. आकृति 12.64 में $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। CD के समान्तर रेखा AE खींची गई है। BA को F तक आगे बढ़ाया गया है। यदि $\angle ABC = 92^\circ$ और $\angle FAE = 20^\circ$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।

हल: $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है अतः



आकृति 12.64

$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$

या $\angle CDA = 180^\circ - 92^\circ$

या $\angle CDA = 88^\circ$

परन्तु $CD \parallel AE$

या $\angle DAE = \angle CDA$ (एकान्तर कोण)

या $\angle DAE = 88^\circ$

यहाँ $\angle DAF = \angle FAE + \angle DAE = 20^\circ + 88^\circ$

या $\angle DAF = 108^\circ$

$\angle DAB = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$

अब $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$

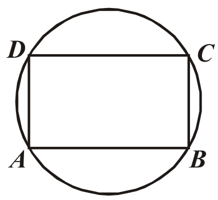
या $\angle BCD = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 72^\circ$

या $\angle BCD = 108^\circ$

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज एक आयत होता है।

हल: दिया है: $ABCD$ एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है: $ABCD$ एक आयत है।



आकृति 12.65

उपपत्ति: $ABCD$ एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज है

अतः $\angle B + \angle D = 180^\circ$ . . . (1)

और $\angle B = \angle D$ . . . (2)

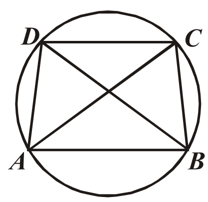
समीकरण (1) और (2) से $\angle B = \angle D = 90^\circ$ इसी प्रकार $\angle A = \angle C = 90^\circ$

अतः $ABCD$ एक आयत है। ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-6. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज की दो भुजाएँ समान्तर हों, तो सिद्ध कीजिए कि शेष भुजाएँ बराबर होंगी और विकर्ण भी बराबर होंगे।

हल: दिया है: चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ में,

$AB \parallel DC$ है।



आकृति 12.66

सिद्ध करना है: (i) $AD = BC$

(ii) $AC = BD$

उपपत्ति: $\therefore$ $AB \parallel DC$ और BC एक तिर्यक रेखा है,

अतः $\angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$ . . . (1)

परन्तु $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है,

अतः $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ . . . (2)

समीकरण (1) और (2) से

$\angle DCB = \angle ADC$ . . . (3)

अब $\Delta\, ADC$ और $\Delta\, BCD$ में,

$\angle ADC = \angle DCB$ [(3)से]

$\angle DAC = \angle DBC$ (एक ही वृत्त खण्ड के कोण)

और $DC = DC$ (उभयनिष्ठ)

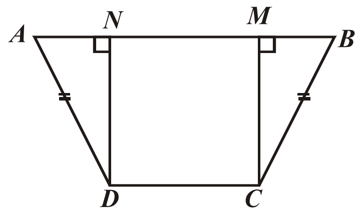
$\therefore$ $\Delta ADC \cong \Delta BCD$ (ASA से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी,

अर्थात $AD = BC$

और $AC = BD$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-7 आकृति 12.67 में, $ABCD$ एक चतुर्भुज है, जिसमें $AD = BC$ और $\angle ADC = \angle BCD$ है। सिद्ध कीजिए $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।



आकृति 12.67

हल: दिया है: चतुर्भुज $ABCD$ में $AD = BC$, और $\angle ADC = \angle BCD$ है।

सिद्ध करना है: $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

रचना: $DN \perp AB$ और $CM \perp AB$ खींचे।

उपपत्ति: दिया है कि

$\angle ADC = \angle BCD$ . . . (1)

$\therefore$ $\angle ADN = \angle ADC - 90^\circ$

$= \angle BCD - 90^\circ$ [(1)से]

$\angle ADN = \angle BCM$ . . . (2)

अब ΔAND और ΔBMC में

$\angle AND = \angle BMC$ (समकोण)

$\angle ADN = \angle BCM$ [(2)से]

और $AD = BC$ (दिया है)

$\therefore$ $\Delta AND \cong \Delta BMC$ (AAS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे,

अर्थात $\angle A = \angle B$ . . . (3)

इसी प्रकार $\angle C = \angle D$ . . . (4)

परन्तु $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

समीकरण (3) और (4) से, $2\angle B + 2\angle D = 360^\circ$

$\therefore$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$\therefore$ $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम्''।

प्रश्नमाला 12.4

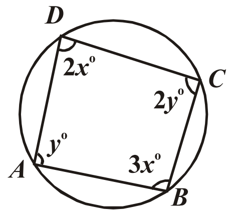
1. एक चक्रीय चतुर्भुज का एक कोण दिया गया है। सम्मुख कोण ज्ञात कीजिए।

(i) 70° (ii) 135° (iii) $112\frac{1}{2}^\circ$ (iv) $\frac{3}{5}$ समकोण (v) 165°

2. चक्रीय चतुर्भुज का सम्मुख कोण ज्ञात कीजिए यदि उसमें से एक कोण

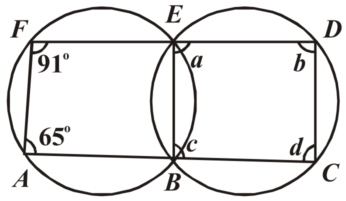
(i) दूसरे का $\frac{2}{7}$ हो (ii) दूसरे का $\frac{11}{4}$ हो।

3. आकृति 12.68 में, चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ के चारों कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.68

4. आकृति 12.69 में कुछ कोणों को a, b, c और d से चिह्नित किया गया है। इन कोणों के माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.69

5. यदि चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ में, $AD \parallel BC$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle D$

6. $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।AB और DC बढ़ाये जाने E पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि ΔEBC और ΔEDA समरूप है।

7. सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजकों द्वारा बनाया चतुर्भुज भी चक्रीय चतुर्भुज होता है।

विविध प्रश्नमाला–12

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 10 तक)

1. 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी दूर स्थित जीवा की लम्बाई है–

(क) 16 सेमी (ख) 8 सेमी (ग) 4 सेमी (घ) 5 सेमी

2. 13 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त में 24 सेमी लम्बी जीवा खीची गई है। जीवा की वृत्त के केन्द्र से दूरी है–

(क) 12 सेमी (ख) 5 सेमी (ग) 6.5 सेमी (घ) 12 सेमी

3. लघुचाप का डिग्री माप होता है–

(क) 180° से कम (ख) 180° से अधिक (ग) 360° (घ) 270°

4. दीर्घचाप का डिग्री माप होता है–

(क) 180° से कम (ख) 180° से अधिक (ग) 360° (घ) 90°

5. एक वृत्त में केन्द्र से समान दूरी पर स्थित जीवाएँ एक दूसरे की होती हैं–

(क) दुगुनी (ख) तिगुनी (ग) आधी (घ) बराबर

6. एक वृत्त के किसी चाप का डिग्रीमाप 180° है, वह चाप है–

(क) दीर्घ चाप (ख) लघुचाप (ग) वृत्त (घ) अर्द्धवृत्त

7. तीन संरेखीय बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों की संख्या है–

(क) एक (ख) दो (ग) शून्य (घ) अनन्त

8. यदि किसी वृत्त में चाप AB = चाप BA हों, तो चाप है–

(क) दीर्घ चाप (ख) लघुचाप (ग) अर्द्ध वृत्त (घ) वृत्त

9. यदि वृत्त का व्यास दो जीवाओं में से प्रत्येक को समद्विभाजित करे तो जीवाएँ होंगी–

(क) समान्तर (ख) लम्बवत (ग) प्रतिच्छेदी (घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

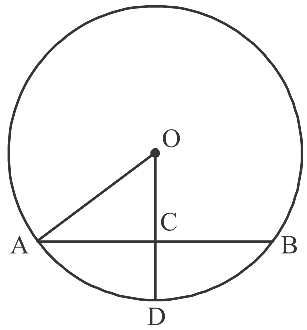
10. यदि सर्वांगसम वृत्तों में दो चाप बराबर हों, तो उनकी संगत जीवाएँ होंगी–

(क) समान्तर (ख) समान (ग) लम्बवत (घ) प्रतिच्छेदी

11. किसी वृत्त का AD एक व्यास है और AB एक जीवा है। यदि AD = 34 cm, AB = 30 cm हैं, तो वृत्त के केन्द्र से AB की दूरी है–

(क) 17 सेमी (ख) 15 सेमी (ग) 4 सेमी (घ) 8 सेमी

12. आकृति 12.70 में, यदि OA = 5 सेमी, AB = 8 सेमी तथा OD जीवा AB पर लंब हैः तो CD बराबर है–



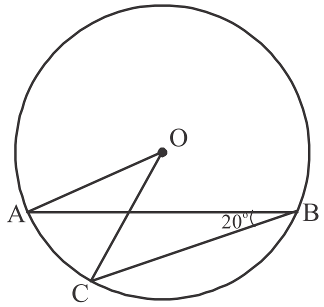
आकृति 12.70

(क) 2 सेमी (ख) 3 सेमी (ग) 4 सेमी (घ) 5 सेमी

13. यदि AB = 12 सेमी, BC = 16 सेमी और AB रेखाखंड BC पर लंब है, तो A, B और C से होकर जाने वाले वृत्त की त्रिज्या है–

(क) 6 सेमी (ख) 8 सेमी (ग) 10 सेमी (घ) 12 सेमी

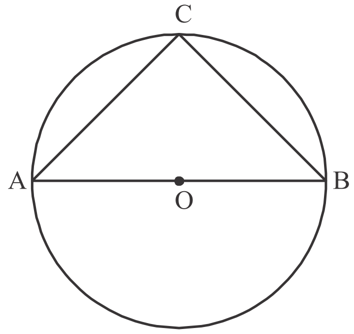
14. आकृति 12.71 में, यदि $\angle ABC = 20^\circ$ है, तो $\angle AOC$ बराबर है–



आकृति 12.71

(क) 20° (ख) 40° (ग) 60° (घ) 10°

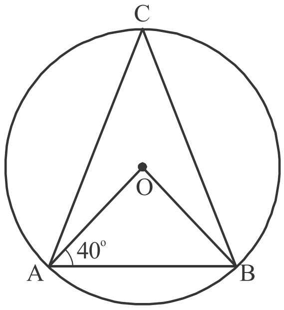
15. आकृति 12.72 में, यदि AOB वृत्त का एक व्यास तथा AC = BC है, तो $\angle CAB$ बराबर है–



आकृति 12.72

(क) 30° (ख) 60° (ग) 90° (घ) 45°

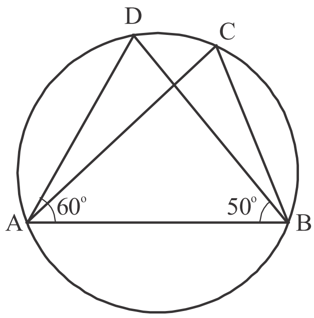
16. आकृति 12.73 में, यदि $\angle OAB = 40^o$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है–



आकृति 12.73

(क) 50^o (ख) 40^o (ग) 60^o (घ) 70^o

17. आकृति 12.74 में, यदि $\angle DAB = 60^o$, $\angle ABD = 50^o$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है–



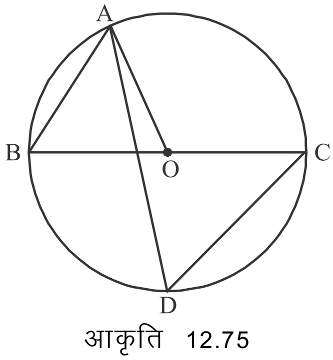
आकृति 12.74

(क) 60^o (ख) 50^o (ग) 70^o (घ) 80^o

18. चतुर्भुज की एक भुजा AB उसके के परिगत वृत्त का एक व्यास है तथा $\angle ADC = 140^o$ है। तब, $\angle BAC$ बराबर है–

(क) 80^o (ख) 50^o (ग) 40^o (घ) 30^o

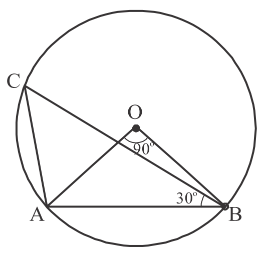
19. आकृति 12.75 में, BC वृत्त का व्यास है तथा $\angle BAO = 60^o$ है। तब, $\angle ADC$ बराबर है–



आकृति 12.75

(क) 30^o (ख) 45^o (ग) 60^o (घ) 120^o

20. आकृति 12.76 में, $\angle AOB = 90^o$ और $\angle ABC = 30^o$ है। तब, $\angle CAO$ बराबर है–



आकृति 12.76

(क) 30^o (ख) 45^o (ग) 90^o (घ) 60^o

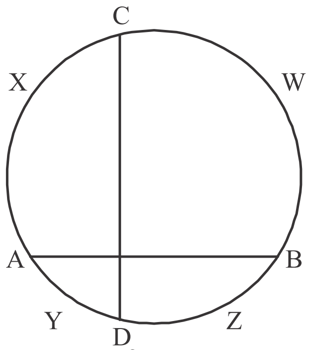
21. यदि एक वृत्त की दो बराबर जीवाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के दो भाग दूसरी जीवा के दोनों भागों के पृथक–पृथक बराबर होते हैं।

22. यदि P, Q और R क्रमशः एक त्रिभुज की BC, CA और AB भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं तथा AD शीर्ष A से BC पर लंब है, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P, Q, R और D चक्रीय हैं।

23. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A और B से होकर एक वृत्त इस प्रकार खींचा जाता है कि वह AD को P पर और BC को Q पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P, Q, C और D चक्रीय हैं।

24. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक और उसकी सम्मुख भुजा का लंब समद्विभाजक, यदि प्रतिच्छेद करते हैं, तो उस त्रिभुज के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करते हैं।

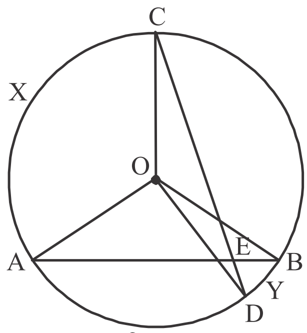
25. यदि किसी वृत्त AYDZBWCX की दो जीवाएँ AB और CD समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 12.77 देखिए), तो सिद्ध कीजिए कि चाप CXA + चाप DZB = चाप AYD + चाप BWC = एक अर्धवृत्त है।



आकृति 12.77

26. यदि ABC किसी वृत्त के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है तथा P लघु चाप BC पर स्थित कोई बिन्दु है, जो B या C के संपाती नहीं है, तो सिद्ध कीजिए कि PA कोण BPC का समद्विभाजक है।

27. आकृति 12.78 में, AB और CD एक वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEC = \frac{1}{2}$ (चाप CXA द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण + चाप DYB द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण) है।



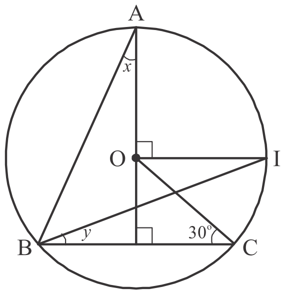
आकृति 12.78

28. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोणों के समद्विभाजक इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त को P और Q, बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि PQ इस वृत्त का व्यास है।

29. एक वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{2}$ cm है। 2 cm लंबाई वाली जीवा द्वारा यह वृत्त दो वृत्त–खंडों में विभाजित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्त–खंड के किसी बिन्दु पर बना कोण 45^o है।

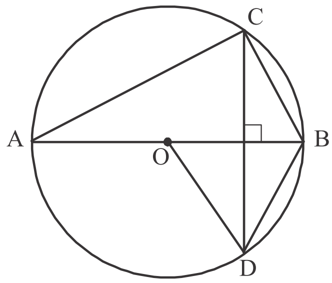
30. AB और AC त्रिज्या r वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि AB = 2AC है। यदि p और q क्रमशः केन्द्र से AB और AC की दूरियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $4q^2 = p^2 + 3r^2$ है।

31. आकृति 12.79 में, O वृत्त का केन्द्र है और $\angle BCO = 30^{o}$ है। x और y ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.79

32. आकृति 12.80 में, O वृत्त का केन्द्र है, BD = OD और $CD \perp AB$ है। $\angle CAB$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.80

33. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के अन्दर किसी बिन्दु से होकर जाने वाली सभी जीवाओं में से वह जीवा सबसे छोटी होती है। जो उस बिन्दु से होकर जाने वाले व्यास पर लम्ब होती है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक वृत्त किसी तल के उन सभी बिन्दुओं का समूह होता है, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर हों।
2. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र (या संगत केन्द्रों) पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
3. यदि किसी वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) दो जीवाएँ केन्द्र पर (या संगत केन्द्रों पर) बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।
4. किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।
5. केन्द्र से होकर जाने वाली और किसी जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।
6. तीन असरेखीय बिन्दुओं से जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है।
12. एक वृत्त की (या सर्वांगम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या संगत केन्द्रों से) समान दूरी पर होती है।
8. एक वृत्त के केन्द्र (या सर्वांगम वृत्तों के केन्द्रों) से समान दूरी पर स्थित जीवाएं बराबर होती हैं।
9. यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं और विलोमतः यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप (लघु, दीर्घ) सर्वांगसम होते हैं।
10. किसी वृत्त की सर्वांगसम चाप केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।
11. किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।
12. एक वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते हैं।
13. अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।
14. यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं। स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोणअंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं।
15. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180^{o} होता है।
16. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180^{o} हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।
17. चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाले बहिष्कोण का मान उसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होता है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 12.1

1. (i) अभ्यन्तर (ii) बहिर्भाग (iii) व्यास (iv) अर्द्धवृत्त (v) तीन

2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य (vi) असत्य (vii) असत्य

प्रश्नमाला 12.2

1. (i) असत्य–क्योंकि बड़ी जीवा छोटी जीवा की अपेक्षा केन्द्र पर बड़ा कोण अन्तरित करती है।

(ii) असत्य–क्योंकि बड़ी जीवा केन्द्र से कम दूरी पर स्थित होती है।

(iii) सत्य–क्योंकि केन्द्र से दोनों जीवाओं की दूरियाँ बराबर है।

(iv) सत्य–क्योंकि सर्वांगसम वृत्तें की बराबर जीवाएँ संगत केन्द्रों पर बराबर कोण अन्तरित करती है।

(v) असत्य–क्योंकि दो बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त उन दोनों बिन्दुओं के संरेख तीसरे बिन्दु से होक़र नहीं जा सकता।

(vi) सत्य–क्योंकि AB व्यास है।

2. 12 सेमी   3. $3\sqrt{5}$ सेमी   7. 13 सेमी   8. (i) 2 सेमी (ii) 14 सेमी

प्रश्नमाला 12.3

1. (i) असत्य–यदि दोनों बिन्दु एक ही वृत्त खण्ड (दीर्घ या लघु) में स्थित हों तभी बराबर होते हैं। अन्यथा नहीं।

(ii) असत्य–क्योंकि $\angle C$ एक समकोण है। अतः $AB^2 = AC^2 + BC^2$

(iii) सत्य–AD, DE, DB और EB को मिलाने के बाद $\angle ADB = 90^\circ$ तो $\angle BDE = 120 - 90 = 30^\circ$ यहाँ $\angle BDE$ एवं $\angle EAB$ एक ही चाप खण्ड पर बने होने से $\angle BDE = \angle EAB = 30^\circ$ होंगे।

(iv) सत्य–क्योंकि सर्वांगसम वृत्तें की बराबर जीवाएँ संगत केन्द्रों पर बराबर कोण अन्तरित करती है।

(v) असत्य–क्योंकि दो बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त उन दोनों बिन्दुओं के संरेख तीसरे बिन्दु से होक़र नहीं जा सकता।

(vi) सत्य–AC, CD, AD, DE व CE को मिलाने पर $\angle CAD$ एवं $\angle CED$ एक ही चाप खण्ड में बनने वाले कोण है अतः $\angle CAD = \angle CED$ है

2. 120° 6. 60° 9. 100° 10. 50° 11. 270°

प्रश्नमाला 12.4

1. (i) 110° (ii) 45° (iii) $67\frac{1}{2}^\circ$ (iv) 126° (v) 15° 2. (i) $45^\circ, 40^\circ$ (ii) $132^\circ, 48^\circ$

3. $\angle A = 60^\circ, \angle B = 108^\circ, \angle C = 120^\circ, \angle D = 72^\circ$ 5. $a = 65^\circ, b = 89^\circ, c = 91^\circ, d = 115^\circ$

विविध प्रश्नमाला–12

1. (क)	2. (ख)	3. (क)	4. (ख)	5. (घ)	6. (घ)	7. (क)
8. (ग)	9. (क)	10. (ख)	11. (घ)	12. (क)	13. (ग)	14. (ख)
15. (घ)	16. (क)	17. (ग)	18. (ख)	19. (ग)	20. (घ)	