बहुपद

Exercise 3.1

प्रश्न 1. निम्न व्यंजकों में से कौन-से बहुपद हैं? बहुपदों के चरों की संख्या ज्ञात कीजिए-

(i) $3x^2 - 5x + 13$
(ii) $y^2 + 2\sqrt{3}$
(iii) $y + \frac{3}{y}$
(iv) 3
(v) $2\sqrt{x} + \sqrt{3}\,x$
(vi) $x^{12} + y^3 + t^{20}$

हल:

(i) व्यंजक $3x^2 - 5x + 13$ में x की सभी घात पूर्ण संख्या हैं। इसलिए यह एक चर को बहुपद है।
(ii) $y^2 + 2\sqrt{3} = y^2 + 2\sqrt{3}\,y^0$ व्यंजक में y की सभी घात पूर्ण संख्या हैं। अतः यह व्यंजक एक चर का बहुपद है।
(iii) $y + \frac{3}{y} = y + 2y^{-1}$, यह व्यंजक बहुपद नहीं है।
(iv) 3 यह एक अचर बहुपद है।
(v) $2\sqrt{x} + \sqrt{3}\,x = 2x^{1/2} + \sqrt{3}\,x$; यहाँ व्यंजक में पहले पद की घात $\frac{1}{2}$ है, जोकि पूर्ण संख्या नहीं है। इसलिए व्यंजक बहुपद नहीं है।
(vi) $x^{12} + y^3 + t^{20}$; यहाँ व्यंजक में x, y, t तीन चर हैं, अतः यह व्यंजक एक चर का नहीं हैं, बल्कि यह व्यंजक तीन चर का बहुपद है।

प्रश्न 2. निम्न व्यंजकों में प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए-

(i) $12 + 3x + 5x^2$
(ii) $7 - 11x + x^3$
(iii) $\sqrt{3}\,x - 7$
(iv) $\frac{\pi}{2}\,x^2 + x$

हल: (i) 5 (ii) 0 (iii) 0 (iv) $\frac{\pi}{2}$

प्रश्न 3. 45 घात के एक द्विपद का उदाहरण लिखो।

हल: $x^{45} + 2x$ (अन्य बहुपद भी संभव है।)

प्रश्न 4. 120 घात के एकपदी का उदाहरण लिखो।

हल: $3x^{120}$ (अन्य बहुपद भी संभव है।)

प्रश्न 5. 8 घात के एक त्रिपदी का उदाहरण लिखो।

हल: $x^8 + 5x^4 + 2$ (अन्य बहुपद भी संभव है।)

प्रश्न 6. प्रश्न संख्या 3, 4 व 5 में दिए गए उदाहरणों के अतिरिक्त पद भी क्या आप लिख सकते हैं? यदि हाँ तो प्रत्येक के दो उदाहरण लिखिए।

हल: हाँ। प्रश्न 3, 4 व 5 के हल के आधार पर छात्र स्वयं करें।

प्रश्न 7. निम्न बहुपदों में प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए
(i) $12 – 3x + 2x^3$
(ii) $5y – \sqrt{2}$
(ii) 9
(iv) $3 + 4t^2$

हल: (i) 3 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 2

Exercise 3.2

प्रश्न 1. बहुपद $2x^3 – 13x^2 + 17x + 12$ के मान x के निम्नलिखित मानों पर ज्ञात कीजिए।
(i) $x = 2$
(ii) $x = -3$
(iii) $x = 0$
(iv) $x = -1$

हल: माना, $p(x) = 2x^3 – 13x^2 + 17x + 12$ ....(i)
(i) समीकरण (i) में = 2 रखने पर,
$p(2) = 2(2)^3 – 13(2)^2 + 17(2) + 12$
$=2 \times 8 – 13 \times 4 + 34 + 12$
$= 16 – 52 + 34 + 12$
$= 10$
(ii) समीकरण (i) में $x = -3$ रखने, पर,
$p(-3) = 2(-3)^3 – 13(-3)^2 + 17(-3) + 12$
$= 2 \times (-27) – 13 \times 9 – 17 \times 3 + 12$
$= -54 – 117 – 51 + 12$
$= -210$

(iii) समीकरण (i) में $x = 0$ रखने पर,
$p(0) = 2(0)^3 – 13(0)^2 + 17(0) + 12$
$= 0 – 0 + 0 + 12$
$= 12$
(iv) समीकरण (i) में $x = -1$ रखने पर
$p(-1) = 2(-1)^3 – 13(-1)^2 + 17(-1) + 12$
$= -2 – 13 – 17 + 12$
$= -20$

प्रश्न 2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए P(2), P(1) और P(0) का मान ज्ञात कीजिए।
(i) $p(x) = x^2 – x + 1$
(ii) $p(y) = (y + 1)(y – 1)$
(iii) $p(x) = x^3$
(iv) $p(t) = 2 + t + t^2 – t^3$

हल:
(i) $p(x) = x^2 – x + 1$
$p(2) = 2^2 – 2 + 1 = 4 – 2 + 1 = 3$
$p(1) = 1^2 – 1 + 1 = 1 – 1 + 1 = 1$
$p(0) = 0^2 – 0 + 1 = 0 – 0 + 1 = 1$
(ii) $p(y) = (y + 1)(y – 1)$
$p(2) = (2 + 1)(2 – 1) = 3 \times 1 = 3$
$p(1) = (1 + 1)(1 – 1) = 2 \times 0 = 0$
$p(0) = (0 + 1)(0 – 1) = 1 \times (-1) = -1$
(iii) $p(x) = x^3$
$p(1) = 1^3 = 1$
$p(2) = 2^3 = 8$
$p(0) = 0^3 = 0$
(iv) $p(t) = 2 + t + t^2 – t^3$
$p(2) = 2 + 2 + 2^2 – 2^3 = 2 + 2 + 4 – 8 = 0$
$p(1) = 2 + 1 + 1^2 – 1^3 = 2 + 1 + 1 – 1 = 3$
$p(0) = 2 + 0 + 0^2 – 0^3 = 2 + 0 + 0 – 0 = 2$

प्रश्न 3. निम्नलिखित बहुपदों के सम्मुख अंकित मान बहुपद के शून्यक हैं, सत्यापित कीजिए।

(i) $p(x) = x^2 - 1;\ x = 1, -1$

(ii) $p(x) = 2x + 1;\ x = -\frac{1}{2}$

(iii) $p(x) = 4x + 5;\ x = \frac{-5}{4}$

(iv) $p(x) = 3x^2;\ x = 0$

(v) $p(x) = (x-3)(x+5);\ x = 3, -5$

(vi) $p(x) = ax + b;\ x = -\frac{b}{a}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 3x + 2;\ x = \frac{-2}{3}$

हल:

(i) $p(x) = x^2 - 1$

$p(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

अत: $1, -1$ बहुपद $p(x)$ के शून्यक हैं।

(ii) $p(x) = 2x + 1$

$$p(-1/2) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

अत: $-\frac{1}{2}$, $p(x)$ का शून्यक है।

(iii) $p(x) = 4x + 5$

$$p\left(-\frac{5}{4}\right) = 4 \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 5 = -5 + 5 = 0$$

अत: $-\frac{5}{4}$, $p(x)$ का शून्यक है।

(iv) $p(x) = 3x^2$

$$p(0) = 3(0)^2 = 0$$

अत: 0, $p(x)$ का शून्यक है।

(v) $p(x) = (x-3)(x+5)$

$$p(3) = (3-3)(3+5) = 0 \times 8 = 0$$

पुन: $x = -5$ रखने पर,

$p(-5) = (-5-3)(-5+5) = -8 \times 0 = 0$

अत: $3, -5$; $p(x)$ के शून्यक हैं।

(vi) $p(x) = ax + b$

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$$

अत: $-\frac{b}{a}$; $p(x)$ का शून्यक है।

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1$

$$p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$$

$$= 3 \times \frac{1}{3} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$p\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{1}{3} - 1$$

$$= 1 - 1 = 0$$

अत: $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$; $p(x)$ के शून्यक हैं।

(viii) $p(x) = 3x + 2$

$$p\left(-\frac{2}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = -2 + 2 = 0$$

अत: $\frac{-2}{3}$; $p(x)$ का शून्यक है।

प्रश्न 4. निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए।

(i) p(x) = x – 4
(ii) p(x) = 4x
(iii) p(x) = bx, b ≠ 0
(iv) p(x) = x + 3
(v) p(x) = 2x – 1
(vi) p(x) = 3x + 7
(vii) p(x) = cx + d, c ≠ 0, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं।

हल: बहुपद p(x) के शून्यक ज्ञात करने के लिए, p(x) = 0

(i) दिया व्यंजक, p(x) = x – 4
p(x) = 0 ⇒ x – 4 = 0 ⇒ x = 4
अतः p(x) का शून्यक 4 है।

(ii) दिया व्यंजक, $p(x) = 4x$
$p(x) = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$
अतः $p(x)$ को शून्यक 0 है।

(iii) दिया व्यंजक, $p(x) = bx, b \neq 0$
$p(x) = 0 \Rightarrow bx = 0 \Rightarrow x = 0$
अत: $p(x)$ का शून्यक 0 है।

(iv) दिया व्यंजक, $p(x) = x + 3$
$p(x) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$
अत: $p(x)$ का शून्यक -3 है।

(v) दिया व्यंजक, $p(3) = 2x - 1$
$p(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
अत: $p(3)$ का शून्यक $\frac{1}{2}$ है।

(vi) दिया व्यंजक, $p(x) = 3x + 7$
$p(x) = 0 \Rightarrow 3x + 7 = 0 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = \frac{-7}{3}$
अत: $p(x)$ का शून्यक -7/3 है।

(vii) दिया व्यंजक, $p(x) = cx + d, c \neq 0$, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं।
$p(x) = 0 \Rightarrow cx + d = 0 \Rightarrow cx = -d$
$\Rightarrow x = \frac{-d}{c}$
अत: $p(x)$ का शून्यक $\frac{-d}{c}$ है।

Exercise 3.3

प्रश्न 1. बहुपद $x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ में निम्नलिखित एक घातीय व्यंजक से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।
(i) $x - 1$
(ii) $x - \frac{1}{2}$
(iii) $x + \pi$
(iv) $3 + 2x$
(v) x

हल: माना $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
(i) $p(3)$ में $(x - 1)$ का भाग देने पर शेषफल $p(1)$ के बराबर होगा।
$p(1) = 1^4 + 1^3 - 3(1)^2 + 3(1) + 1 = 1 + 1 - 3 + 3 + 1 = 3$ = शेषफल

(ii) p (x) में $(x - \frac{1}{2}$ का भाग देने पर शेषफल $p(\frac{1}{2})$ के बराबर होगी।

$$\therefore p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1$$

$$= \frac{1 + 2 - 12 + 24 + 16}{16} = \frac{31}{16} = \text{शेषफल}$$

(iii) $p(x)$ में $(x + \pi)$ का भाग देने पर शेषफल $p(-\pi)$ के बराबर होगा।

$$\therefore p(-\pi) = (-\pi)^4 + (-\pi)^3 - 3(-\pi)^2 + 3(-\pi) + 1$$

$$= \pi^4 - \pi^3 - 3\pi^2 - 3\pi + 1 = \text{शेषफल}$$

(iv) $p(x)$ में $(3 + 2x)$ का भाग देने पर शेषफल $p\left(-\frac{3}{2}\right)$ के बराबर होगा।

$$\therefore p\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{81}{16} - \frac{27}{8} - \frac{27}{4} - \frac{9}{2} + 1$$

$$= \frac{81 - 54 - 108 - 72 + 16}{16} = -\frac{137}{16} = \text{शेषफल}$$

(v) $p(x)$ में x का भाग देने पर शेषफल $p(0)$ के बराबर होगा।

$$p(0) = (0)^4 + (0)^3 - 3(0)^2 + 3(0) + 1 = 1$$

प्रश्न 2. $2x^3 + 2ax^2 - 5x + a$ को $x + a$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना, $p(x) = 2x^3 + 2ax^2 - 5x + a$
p (x) में (x + a) का भाग देने पर शेषफल p (-a) के बराबर होगा।
$p(-a) = 2(-a)^3 + 2a(-a)^2 - 5(-a) + a = -2a^3 + 2a^3 + 5a + a = 6a$ = शेषफल

प्रश्न 3. जाँच कीजिए कि $x + 1$, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं।

हल: (x + 1) दिए गए व्यजंक का एक गुणनखण्ड होगा यदि व्यजंक को (x + 1) से भाग देने पर शेषफल शून्य हो।

$x + 1 = 0. = x = -1$
माना $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 + 3 – 3 + 1 = 0$
चूंकि, शेषफल शून्य है, अतः $(x + 1)$, दिए गए।
व्यजंक का एक गुणनखण्ड है।

प्रश्न 4. यदि बहुपद $x^3 + x^2 – 4x + a$ और $2x^3 + ax^2 + 3x – 3$ को -2 से भाग देने पर समान शेषफल प्राप्त होता है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $p(x) = x^3 + x^2 – 4x + a$
तथा $q(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x – 3$
$p(x)$ तथा $q(3)$ में $(x – 2)$ से भाग देने पर शेषफल $p(2)$ तथा $q(2)$ के बराबर होगा।
$p(2) = 2^3 + 2^2 – 4(2) + a = 8 + 4 – 8 + 2 = 4 + 2 =$ शेषफल
पुनः $q(2) = 2(2)^3 + a(2)^2 + 3(2) – 3$
$= 2 \times 8 + a \times 4 + 6 – 3$
$= 16 + 4a + 3$
$= 19 + 4a =$ शेषफल
अतः $p(2) = q(2)$
$\Rightarrow 4 + a = 19 + 4a$
$\Rightarrow 4a – a = 4 – 19$
$\Rightarrow 3a = -15$
$\Rightarrow a = -5$

Exercise 3.4

प्रश्न 1. x – 1 निम्न में किस-किस बहुपद का एक गुणनखण्ड है?

(i) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 2$

(iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{3})\, x + \sqrt{3}$

हल:

$(x-1)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड होगा, यदि $p(1) = 0$

(i) माना, $p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

$$p(1) = 1^4 - 2(1)^3 - 3(1)^2 + 2(1) + 2$$
$$= 1 - 2 - 3 + 2 + 2 = 5 - 5 = 0$$

अत: $(x-1)$, $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ का एक गुणनखण्ड है।

(ii) माना, $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$$p(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

अत: $(x-1)$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ का एक गुणनखण्ड नहीं है।

(iii) माना $p(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 2$

$$p(1) = 1^4 + 3(1)^3 - 3(1)^2 + 1 - 2$$
$$= 1 + 3 - 3 + 1 - 2 = 0$$

अत: $(x-1)$, $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 2$ का एक गुणनखण्ड है।

(iv) माना $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$

$$p(1) = 1^3 - 1^2 - (2 + \sqrt{3}) \times 1 + \sqrt{3}$$
$$= 1 - 1 - (2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}$$
$$= -2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = -2 \neq 0$$

अत: $(x-1)$, $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$ का एक गुणनखण्ड नहीं है।

प्रश्न 2. गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए कि क्या g(x), p(x) का एक गुणनखण्ड है?

(i) $p(x) = 3x^3 - x^2 - 3x + 1$; $g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = 2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 45$; $g(x) = x - 1$
(iii) $p(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $g(x) = x + 2$
(iv) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$; $g(x) = 2x + 1$

हल:

(i) यह सिद्ध करने के लिए कि $g(x) = x+1$, $p(x) = 3x^3 - x^2 - 3x + 1$ का एक गुणनखण्ड है, हमें $p(-1) = 0$ सिद्ध करना होगा।

अब, $p(-1) = 3(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1$

$= 3 \times (-1) - 1 + 3 + 1 = 0$

अत: $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

(ii) यह सिद्ध करने के लिए कि $g(x) = x-1$, $p(x) = 2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 45$ का एक गुणनखण्ड है, हमें $p(1) = 0$ सिद्ध करना होगा।

अब, $p(1) = 2(1)^4 - 7(1)^3 - 13(1)^2 + 63(1) - 45$

$= 2 \times 1 - 7 \times 1 - 13 \times 1 + 63 \times 1 - 45$

$= 2 - 7 - 13 + 63 - 45 = 65 - 20 - 45 = 0$

अत: $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

(iii) यह सिद्ध करने के लिए कि $g(x) = x+2$, $p(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ का एक गुणनखण्ड है, हमें $p(-2) = 0$ सिद्ध करना होगा।

अब, $p(-2) = 3(-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$

$= 3 \times (-8) + 3 \times 4 - 6 + 1 = -24 + 12 - 6 + 1 = -17$

अत: $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड नहीं है।

(iv) यह सिद्ध करने के लिए कि $g(x) = 2x+1$, $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ का एक गुणनखण्ड है, हमें $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ सिद्ध करना होगा।

अब, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1$

$= 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

अत: $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

प्रश्न 3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि (x – 5) बहुपद $x^3 – 3x^2 + kx – 10$ का एक गुणनखण्ड है।

हल: माना $p(x) = x^3 – 3x^2 + kx – 10$
यदि (x – 5), p(x) का एक गुणनखण्ड है तो
$p(5) = 0$
$\Rightarrow (5)^3 – 3(5)^2 + k(5) – 10 = 0$
$\Rightarrow 125 – 75 + 5k – 10 = 0$
$\Rightarrow 40 + 5k = 0$
$\Rightarrow 5k = -40$
$\Rightarrow k = -8$

प्रश्न 4. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि (x – 1) बहुपद $2x^2 + kx + \sqrt{2}$ का एक गुणनखण्ड है।

हल: माना $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$
यदि (x – 1), p (x) का गुणनखण्ड है तो,
$p(1) = 0$
$\Rightarrow 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$
$\Rightarrow 2 \times 1 + k + \sqrt{2} = 0$
$\Rightarrow 2 + k + \sqrt{2} = 0$
$\Rightarrow k + (2 + \sqrt{2}) = 0$
$\Rightarrow k = -(2 + \sqrt{2})$

प्रश्न 5. यदि (x + 1) और (x – 1) बहुपद $x^4 + ax^3 – 3x^2 + 2x + b$ के गुणखण्ड हों तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।

हल- माना $p(x) = x^4 + ax^3 – 3x^2 + 2x + b$.
(x + 1), p(x) का गुणनखण्ड है।
अतः $p(-1) = 0$
$(-1)^4 + a(-1)^3 – 3(-1)^2 + 2(-1) + b = 0$
$\Rightarrow 1 – a – 3 – 2 + b = 0$
$\Rightarrow -a + b – 4 = 0$
$\Rightarrow -a + b = 4 \ldots(1)$
(x – 1), p(x) का गुणनखण्ड है। अत: $p(1) = 0$
$\Rightarrow (1)^4 + a(1)^3 – 3(1)^2 + 2(1) + b = 0$
$\Rightarrow 1 + a – 3 + 2 + b = 0$
$\Rightarrow a + b = 0 \ldots(2)$
समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर
$(-a + b) + (a + b) = 4 + 0 \Rightarrow b = 2$

समीकरण (2) में b = 2 रखने पर
a + 2 = 0 ⇒ a = -2

प्रश्न 6. गुणनखण्ड कीजिए:
(i) $3x^2 + 7x + 2$
(ii) $4x^2 – x – 3$
(iii) $12x^2 – 7x + 1$
(iv) $6x^2 + 5x – 6$

हल: (i) x^2 का गुणांक = 3, x का गुणांक = 7
स्थिर (अचर) पद = 2, अत: 3 x 2 = + 6
6 के ऐसे दो हिस्से करने हैं जिनका योग 7 और गुणन 6 हो।
ऐसी संख्या 6 व 1 हैं।
$3x^2 + 7x + 2$
$= 3x^2 + 6x + x + 2$
$= (3x^2 + 6x) + (x + 2)$
$= 3x (x + 2) + 1 (x + 2)$
$= (x + 2) (3x + 1)$
(ii) x2 का गुणांक = 4, x का गुणांक = -1
स्थिर (अचर) पद = -3, अतः 4 x (-3) = -12
-12 के ऐसे दो हिस्से करने हैं जिनका योग -1 और गुणन -12 हो।
ऐसी संख्या -4 व 3 हैं।
$4x^2 – x – 3$
$= 4x^2 – 4x + 3x – 3$
$= (4x^2 – 4x) + (3x – 3)$
$= 4x (x – 1) + 3 (x – 1)$
$= (x – 1) (4x + 3)$
$4x^2 – x – 3 = (x – 1)(4x + 3)$
(iii) x^2 का गुणांक = 12, x का गुणांक = -7
स्थिर (अचर) पद = 1 अतः 12 x 1 = + 12
12 के ऐसे दो हिस्से करने हैं जिनका योग -7 और गुणन 12 हो।
ऐसी संख्या -4 व -3 हैं।
$12x^2 – 7x + 1$
$= 12x^2 – 4x – 3x + 1$
$= (12x^2 – 4x) – (3x – 1)$
$= 4x (3x – 1) – 1 (3x – 1)$
$= (3x – 1) (4x – 1)$
$12x^2 – 7x + 1 = (3x – 1) (4x – 1)$
(iv) x^2 का गुणांक = 6, x का गुणांक = 5
स्थिर (अचर) पद = -6, अत: 6 x (-6) = -36

-36 के ऐसे दो हिस्से करने हैं जिनका योग 5 और गुणन -36 हो।
ऐसी संख्याएँ 9 व -4 हैं।

$6x^2 + 5x - 6$

$= 6x^2 + 9x - 4x - 6$

$= (6x + 9x) - (4x + 6)$

$= 3(2x + 3) - 2(2x + 3)$

$= (2x + 3)(3x - 2)$

अत: $6x^2 + 5x - 6 = (2x + 3)(3x - 2)$

प्रश्न 7. बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए:

(i) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

(ii) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

(iii) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

(iv) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(v) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(vi) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

हल:

(i) माना $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

अचर पद 6 के गुणनखण्ड $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ व ± 6 हैं।

$p(1) = 1^3 + 6(1)^2 + 11(1) + 6 = 24$

$p(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = 0$

$\therefore -1$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

$p(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6$

$= -8 + 24 - 22 + 6 = -30 + 30 = 0$

$\therefore -2$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

$p(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 11(-3) + 6$

$= -27 + 54 - 33 + 6 = 0$

$\therefore -3$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

(ii) माना $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

अचर पद -2 के गुणनखण्ड $\pm 1, \pm 2$ हैं।

$p(1) = 1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$

$p(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$

$p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = 0$

$\therefore 1, -1, -2$, $p(x)$ के शून्यक हैं।

(iii) माना $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

अचर पद 12 के गुणनखण्ड हैं $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$p(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 7(-1)^2 + 8(-1) + 12$

$= 1 - 2(-1) - 7(1) - 8 + 12 = 0$

$p(2) = 2^4 - 2(2)^3 - 7(2)^2 + 8(2) + 12$

$= 2^4 - 2^4 - 28 + 16 + 12 = 0$

$p(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^3 - 7(-2)^2 + 8(-2) + 12$

$= 16 + 16 - 28 - 16 + 12 = 28 - 28 = 0$

$p(3) = 3^4 - 2(3)^3 - 7(3)^2 + 8(3) + 12$

$= 81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 117 - 117 = 0$

$\therefore$ $-1, 2, -2, 3$; $p(x)$ के शून्यक हैं।

(iv) माना $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

अचर पद 2 के गुणनखण्ड $\pm 1, \pm 2$ हैं।

$p(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

$p(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$

$p(2) = 2^3 - 2(2)^2 - 2 + 2 = 2^3 - 2^3 - 2 + 2 = 0$

$\therefore$ $1, -1, 2$; $p(x)$ के शून्यक हैं।

(v) माना $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

अचर पद -5 के गुणनखण्ड $\pm 1, \pm 5$ हैं।

$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$= -1 - 3 + 9 - 5 = 0$

अत: गुणनखण्ड प्रमेय से $(x + 1)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड है।

अब, $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर,

$$
\begin{array}{r|l}
(x+1) & x^2 - 4x - 5 \\
\hline
 & x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & \text{– \quad –} \\
\hline
 & -4x^2 - 9x - 5 \\
 & -4x^2 - 4x \\
 & \text{+ \quad +} \\
\hline
 & -5x - 5 \\
 & -5x - 5 \\
 & \text{+ \quad +} \\
\hline
 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

अत: $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)(x^2 - 4x - 5)$

$= (x+1)(x^2 - 5x + x - 5)$

$= (x+1)[x(x-5) + 1(x-5)]$

$= (x+1)(x+1)(x-5)$

$\therefore \quad -1, 5;\ p(x)$ के शून्यक हैं।

(vi) माना $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

अचर पद -120 के गुणनखण्ड $\pm 1, \pm 10, \pm 12$ हैं।

(इसके अलावा और भी गुणनखण्ड हैं)

$p(1) = 1^3 - 23(1)^2 + 142(1) - 120$

$= 1 - 23 + 142 - 120 = 143 - 143 = 0$

$p(10) = (10)^3 - 23(10)^2 + 142(10) - 120$

$= 1000 - 2300 + 1420 - 120 = 0$

$p(12) = (12)^3 - 23(12)^2 + 142(12) - 120$

$= 1728 - 23 \times 144 + 1704 - 120$

$= 1728 - 3312 + 1704 - 120 = 0$

$\therefore$ 1, 10 और 12; $p(x)$ के शून्यक हैं।

Exercise 3.5

प्रश्न 1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) (x + 3) (x + 7)

(ii) (x – 5) (x + 8)

(iii) (2x + 7) (3x – 5)

(iv) (5 – 3x) (3 + 2x)

(v) $(x^2 + \frac{3}{5})$ $(x^2 - \frac{3}{5})$

(vi) (x + 2) (x – 5)

हल:

(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b) x+ ab से

(i) (x + 3) (x + 7) = x + 10x + 21

(ii) (x – 5) (x + 8) = {x + (-5)} (x + 8)

= x^2 + (-5 + 8) x + (-5) x 8

= x^2 + 3x – 40

(iii) $(2x+7)(3x-5)$

$$=2\left(x+\frac{7}{2}\right)\times 3\left(x-\frac{5}{3}\right)=6\left(x+\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{-5}{3}\right)$$

$$=6\left[x^2+\left(\frac{7}{2}-\frac{5}{3}\right)x+\frac{7}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)\right]$$

$$=6\left[x^2+\left(\frac{21-10}{6}\right)x+\frac{(-35)}{6}\right]$$

$$=6\times\frac{1}{6}(6x^2+11x-35)=6x^2+11x-35$$

(iv) $(5-3x)(3+2x)=-(3x-5)(2x+3)$

$$=-3\left(x-\frac{5}{3}\right)\times 2\left(x+\frac{3}{2}\right)=-6\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$=-6\left[\left\{x+\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}\left\{x+\frac{3}{2}\right\}\right]$$

$$=-6\left[x^2+\left(-\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\right)x+\left(-\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$=-6\left[x^2+\left(\frac{-10+9}{6}\right)x-\frac{5}{2}\right]=-6\left[x^2-\frac{x}{6}-\frac{5}{2}\right]$$

$$=-6x^2+6\times\frac{x}{6}+6\times\frac{5}{2}=-6x^2+x+15$$

(v) $\left(x^2+\frac{3}{5}\right)\left(x^2-\frac{3}{5}\right)=(x^2)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=x^4-\frac{9}{25}$

(vi) $(x+2)(x-5)=(x+2)\{x+(-5)\}$

$$=x^2+(2-5)x+2\times(-5)=x^2-3x-10$$

प्रश्न 2. बीजीय सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) 104 x 109

(ii) 94 x 97
(iii) 103 x 97

हल:
(i) 104 x 109 = (100 + 4) (100 + 9) = $(100)^2$ + (4 + 9) 100 + 4 x 9 = 11336
(ii) 94 x 97
= (100 – 6) (100 – 3)
= [100 + (-6)] [100 + (-3)]
= $(100)^2$ + (-6 – 3) 100+ (-6) x (-3)
= 10000 – 900 + 18
= 9118
(iii) 103 x 97
= (100 + 3) (100 – 3)
= $(100)^2 – (3)^2$
= 10000 – 9
= 9991

प्रश्न 3. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके गुणनखण्ड कीजिए।
(i) x^2 + 6xy + 9y
(ii) x^2 – 4x + 4
(ii) $\frac{x^2}{100} - y^2$

हल

$$\text{(i)}\ x^2+6xy+9y^2 = x^2+2\times x\times 3y+(3y)^2$$
$$= (x+3y)^2 = (x+3y)\,(x+3y)$$
$$\text{(ii)}\ x^2-4x+4 = x^2-2\times x\times 2+2^2$$
$$= (x-2)^2 = (x-2)\,(x-2)$$
$$\text{(iii)}\ \frac{x^2}{100}-y^2 = \left(\frac{x}{10}\right)^2-y^2 = \left(\frac{x}{10}+y\right)\left(\frac{x}{10}-y\right)$$

प्रश्न 4. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके निम्नलिखित का विस्तार कीजिए।

(i) $(2a-3b-c)^2$ (ii) $(2+x-2y)^2$
(iii) $(a+2b+4c)^2$ (iv) $(m+2n-5p)^2$
(v) $(3a-7b-c^2)^2$ (vi) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2$

हल

$\because (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ से

(i) $(2a-3b-c)^2$

$= (2a)^2 + (-3b)^2 + (-c)^2 + 2(2a)(-3b)$
$+ 2(-3b)(-c) + 2(-c)(2a)$

$= 4a^2 + 9b^2 + c^2 - 12ab + 6bc - 4ca$

(ii) $(2+x-2y)^2 = \{2 + x + (-2y)\}^2$

$= 2^2 + x^2 + (-2y)^2 + 2\times2\times x + 2\times x$
$\times(-2y) + 2\times(-2y)\times2$

$= 4 + x^2 + 4y^2 + 4x - 4xy - 8y$

(iii) $(a+2b+4c)^2$

$= a^2 + (2b)^2 + (4c)^2 + 2\times a\times2b + 2\times2b\times4c$
$+ 2\times4c\times a$

$= a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 4ab + 16bc + 8ca$

(iv) $(m+2n-5p)^2 = \{m + 2n + (-5p)\}^2$

$= m^2 + (2n)^2 + (-5p)^2 + 2m\times2n + 2(2n)$
$(-5p) + 2\times(-5p)\times m$

$= m^2 + 4n^2 + 25p^2 + 4mn - 20np - 10pm$

(v) $(3a-7b-c^2)^2 = \{3a + (-7b) + (-c^2)\}^2$

$= (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c^2)^2 + 2(3a)(-7b)$
$+2(-7b)(-c^2) + 2(-c^2)(3a)$

$= 9a^2 + 49b^2 + c^4 - 42ab + 14bc^2 - 6c^2a$

(vi) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2$

$= \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\times\frac{y}{z}\right) + 2\left(\frac{y}{z}\times\frac{z}{x}\right)$
$+ 2\left(\frac{z}{x}\times\frac{x}{y}\right)$

$= \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{2x}{z} + \frac{2y}{x} + \frac{2z}{y}$

प्रश्न 5. गुणनखण्ड कीजिए-

(i) $9x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 12xy - 16yz + 24xz$

(ii) $x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 2\sqrt{2}\,xy - 8yz - 4\sqrt{2}xz$

हल

(i) $9x^2+4y^2+16z^2-12xy-16yz+24xz$

$=(3x)^2+(-2y)^2+(4z)^2+2(3x)(-2y)$

$+2(-2y)(4z)+2(4z)(3x)=(3x-2y+4z)^2$

(ii) $x^2+2y^2+8z^2+2\sqrt{2}\,xy-8yz-4\sqrt{2}\,xz$

$=x^2+(\sqrt{2}y)^2+(-2\sqrt{2}z)^2+2(x)(\sqrt{2}y)$

$+2(\sqrt{2}y)(-2\sqrt{2}z)+2(-2\sqrt{2}z)(x)$

$=(x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}z)^2$

प्रश्न 6. निम्न घनों का विस्तार कीजिए-

(i) $(3a-2b)^3$ (ii) $(1+2x)^3$

(iii) $\left(\frac{2}{5}x+3\right)^3$ (iv) $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3$

हल

$\because (x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

तथा $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$

(i) $(3a-2b)^3$

$=(3a)^3-(2b)^3-3\times 3a\times 2b(3a-2b)$

$=27a^3-8b^3-18ab(3a-2b)$

$=27a^3-8b^3-54a^2b+36ab^2$

(ii) $(1+2x)^3=1^3+(2x)^3+3\times 1\times 2x(1+2x)$

$=1+8x^3+6x(1+2x)=1+8x^3+6x+12x^2$

(iii) $\left(\frac{2}{5}x+3\right)^3=\left(\frac{2}{5}x\right)^3+3^3+3\frac{2}{5}x\times 3\left(\frac{2}{5}x+3\right)$

$=\frac{8}{125}x^3+27+\frac{18x}{5}\left(\frac{2}{5}x+3\right)$

$=\frac{8x^3}{125}+27+\frac{36x^2}{25}+\frac{54x}{5}$

(iv) $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3=x^3-\left(\frac{2}{3}y\right)^3-3\times x\times\frac{2}{3}y\left(x-\frac{2}{3}y\right)$

$=x^3-\frac{8}{27}y^3-2xy\left(x-\frac{2}{3}y\right)$

$=x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$

प्रश्न 7. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके माने ज्ञात कीजिए-

(i) $(98)^3$

(ii) $(103)^3$

(iii) $(999)^3$

हल

(i) $(98)^3 = (100-2)^3$

[सर्वसमिका $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\ (x-y)$ से]

$= 100^3 - 2^3 - 3\,(100)\,(2)\,(100-2)$

$= 1000000 - 8 - 600 \times 98$

$= 1000000 - 8 - 58800$

$= 1000000 - 58808 = 941192$

(ii) $(103)^3 = (100+3)^3$

[सर्वसमिका $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\ (x+y)$ से]

$= (100)^3 + (3)^3 + 3\,(100)\,(3)\,(100+3)$

$= 1000000 + 27 + 900 \times 103$

$= 1000000 + 27 + 92700 = 1092727$

(iii) $(999)^3 = (1000-1)^3$

[सर्वसमिका $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\ (x-y)$ से]

$= (1000)^3 - 1^3 - 3 \times 1000 \times 1\,(1000-1)$

$= 1000000000 - 1 - 3000 \times 999$

$= 1000000000 - 1 - 2997000 = 997002999$

प्रश्न 8. गुणनखण्ड कीजिए

(i) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$

(ii) $27a^3 - 8b^3 - 54a^2b + 36ab^2$

(iii) $27 - 125x^3 - 135x + 225x^2$

(iv) $125x^3 - 64y^3 - 300x^2y + 240xy^2$

हल

$\because x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = (x+y)^3$

तथा $x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = (x-y)^3$

(i) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$

$= x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$

$= x^3 + (2y)^3 + 3 \times x \times 2y(x+2y)$

$= (x+2y)^3 = (x+2y)(x+2y)(x+2y)$

(ii) $27a^3 - 8b^3 - 54a^2b + 36ab^2$

$= (3a)^3 - (2b)^3 - 18ab(3a-2b)$

$= (3a)^3 - (2b)^3 - 3 \times 3a \times 2b(3a-2b)$

$= (3a-2b)^3 = (3a-2b)(3a-2b)(3a-2b)$

(iii) $27 - 125x^3 - 135x + 225x^2$

$= (3)^3 - (5x)^3 - 45x(3-5x)$

$= (3)^3 - (5x)^3 - 3 \times 3 \times 5x(3-5x)$

$= (3-5x)^3 = (3-5x)(3-5x)(3-5x)$

(iv) $125x^3 - 64y^3 - 300x^2y + 240xy^2$

$= (5x)^3 - (4y)^3 - 60xy(5x-4y)$

$= (5x)^3 - (4y)^3 - 3 \times 5x \times 4y(5x-4y)$

$= (5x-4y)^3 = (5x-4y)(5x-4y)(5x-4y)$

प्रश्न 9. गुणनखण्ड कीजिए

(i) $64a^3 + 27b^3$

(ii) $125x^3 - 8y^3$

हल

(i) $64a^3 + 27b^3 = (4a)^3 + (3b)^3$

$[(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ से]

$= (4a+3b)[(4a)^2 - (4a)(3b) + (3b)^2]$

$= (4a+3b)(16a^2 - 12ab + 9b^2)$

(ii) $125x^3 - 8y^3 = (5x)^3 - (2y)^3$

$[(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$ से]

$= (5x-2y)[(5x)^2 + (5x)(2y) + (2y)^2]$

$= (5x-2y)(25x^2 + 10xy + 4y^2)$

प्रश्न 10. सत्यापित कीजिए-

(i) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$

(ii) $27a^3 + b^3 + c^3 - 9abc = (3a+b+c)[9a^2 + b^2 + c^2 - 3ab - bc - 3ac]$

हल

(i) दायाँ पक्ष $= \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2)]$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$\left[\because (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\right]$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

= बायाँ पक्ष **इति सिद्धम**

(ii) बायाँ पक्ष =

$= 27a^3 + b^3 + c^3 - 9abc$

$= (3a)^3 + b^3 + c^3 - 3(3a)(b)(c)$

$= (3a+b+c)[(3a)^2 + b^2 + c^2 - (3a)b - bc - c(3a)]$

$\left[\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\right]$

$= (3a+b+c)(9a^2 + b^2 + c^2 - 3ab - bc - 3ac]$

= दायाँ पक्ष **इति सिद्धम**

प्रश्न 11. यदि x + y + z = 0 हो तो सत्यापित कीजिए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

हल: दिया है, $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z$
दोनों पक्षों का घन करने पर,
$(x + y)^3 = (-z)^3$
$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y) = -z^3$
$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(-z) = -z^3$ ($\because x + y = -z$)
$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$
इति सिद्धम्

प्रश्न 12. उपयुक्त बीजीय सर्वसमिका का प्रयोग करते हुए गणना कीजिए-
(i) $(30)^3 + (20)^3 + (-50)^3$
(ii) $(-15)^3 + (28)^3 + (-13)^3$
[संकेत : सर्वसमिका का प्रयोग करें, यदि $x + y + z = 0$ हो तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$]

हल:
(i) $30 + 20 - 50 = 0$
यदि $x + y + z = 0$ है तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ से
$(30)^3 + (20)^3 + (-50)^3$
$= 3 \times 30 \times 20 \times (50)$
$= 1800 \times (-50)$
$= -90000$

(ii) $-15 + 28 - 13 = 0$
यदि $x + y + z = 0$ है तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ से
$(-15)^3 + (28)^3 + (-13)^3$
$= 3 \times (-15) \times 28 \times (-13)$
$= -45 \times 28 \times (-13)$
$= -1260 \times -13$
$= 16380$

Additional Questions

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न 1. बहुपद $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ में $x = 1$ रखने पर बहुपद का मान होगा:
(A) 9
(B) 11
(C) 12
(D) 3

प्रश्न 2. $p(x) = 2x + 1$ का एक शून्यक होगा:
(A) $\frac{1}{2}$
(B) 3
(C) $\frac{-1}{2}$
(D) 1

प्रश्न 3. $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $x - 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल होगाः
(A) 0
(B) 2
(C) 1
(D) -2

प्रश्न 4. व्यंजक $(x - 3)$ बहुपद $p(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$ का गुणनखण्ड होगा, यदिः
(A) p (3) = 0
(B) p(-3) = 0
(C) p(-3) = 3
(D) p(-3) = -3

प्रश्न 5. $x^3 - y^3$ का एक गुणनखण्ड है:
(A) x + y
(B) $x^2 + y^2$
(C) $x^2 - xy + y^2$
(D) x – y

प्रश्न 6. $x^4 + 8x$ का एक गुणनखण्ड है:
(A) x + 2
(B) x – 2

(C) $x^2 + 8$
(D) $x^2 + 2x + 2$

प्रश्न 7. $x^3 - 8$ का एक गुणनखण्ड है:
(A) $x + 2$
(B) $x - 4$
(C) $x^2 + 2x + 4$
(D) $x^2 - 2x - 4$

प्रश्न 8. $3y^3 + 8y^2 - 1$ का पूर्णांक शून्य है:
(A) 1
(B) -1
(C) 0
(D) विद्यमान नहीं

उत्तरमाला

1. (A)
2. (C)
3. (B)
4. (A)
5. (D)
6. (A)
7. (C)
8. (D)

अतिलघूतटीय/लघूत्तरीय प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सत्यापित कीजिए कि 2 और 0 बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

हल: माना $p(x) = x^2 - 2x$
$p(2) = 2^2 - 2\ (2)$
$\Rightarrow p(2) = 4 - 4 = 0$
एवं $p(0) = 0 - 0 = 0$
अतः 2 और 0 दोनों ही बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

प्रश्न 2. जाँच कीजिए कि बहुपद $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$, $2t + 1$ का $(2t + 1)$ एक गुणज है।

हल: बहुपद q (t), (2t + 1) का गुणज केवल तब होगा जब (2t + 1) से q(t) को भाग देने पर शेषफल शून्य आता हो

$\therefore\ 2t+1=0 \Rightarrow\ t=-\frac{1}{2}$ अत: $q\left(\frac{-t}{2}\right)=0$ होगा।

$$q\left(-\frac{1}{2}\right)=4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)-1$$

$$=-4\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1\ =-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-1=0$$

अत: $2t+1$ दिए गए बहुपद $q\ (t)$ का एक गुणज है।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि 5 बहुपद $2x^3 – 7x^2 – 16x + 5$ का शून्यक है।

हल: 5, माना $p\ (x) = 2x^3 – 7x^2 – 16x + 5$ का शून्यक है।
बहुपद में x = 5 रखने पर,
$p\ (5) = 2\ (5)^3 – 7\ (5)^2 – 16\ (5) + 5$
$= 2 \times 125 – 7\ (25) – 80 + 5$
$= 250 – 175 – 80 + 5$
$= 255 – 255$
$= 0$
x = 5 रखने पर बहुपद का मान शून्य प्राप्त होता है।
अतः 5 बहुपद का शून्यक होगा।

प्रश्न 4. a के किस मान के लिए बहुपद $f(x) = x^3 + 2x^2 – 3ax – 8$ में व्यंजक (x – 4) का पूरा-पूरा भाग जाता है?

हल: हम जानते हैं कि x – 4 को भाग देने पर शेषफल f(4) प्राप्त होता है।
$f(x) = x^3 + 2x^2 – 3ax – 8$
$f(4) = (4)^3 + 2\ (4)^2 – 3a\ (4) – 8$
$= 64 + 2 \times 16 – 12a – 8$
$= 64 + 32 – 12a – 8$
$= 96 – 12a – 8$
$= 88 – 12a$
पूरा-पूरा भाग जाने के लिए शेषफल शून्य होगा अर्थात
f(4) = 0
$\Rightarrow 88 – 12d = 0$
$\Rightarrow 12a = 88$

$\Rightarrow a = \frac{88}{12} = \frac{22}{3}$

अतः $a = \frac{22}{3}$ होगा।

प्रश्न 5.

यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 48$ हो, तब $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ का मान ज्ञात करो।

हल:

सूत्र से, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 48 + 2 = 50 \quad \left[\because x^2 + \frac{1}{x^2} = 48\right]$

$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{50} \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{1}{x}\right) = 5\sqrt{2}$

प्रश्न 6. यदि $x^3 + a^3$ में $x + a$ का भाग दिया जाए, तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल:

$x^3 + a^3$ में $x + a$ से भाग देने पर

$$
\begin{array}{r}
x^2 - xa + a^2 \\
x + a \overline{)\, x^3 + a^3} \\
x^3 + x^2a \\
\hline
-x^2a + a^3 \\
-x^2a - xa^2 \\
\hline
+xa^2 + a^3 \\
+xa^2 + a^3 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$\therefore$ शेषफल $= 0$ होगा।

प्रश्न 7. $(2x + 3)^3 + (3x – 2)^3 – (5x + 1)^3$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल: माना $2x + 3 = a$, $3x – 2 = b$ और $– (5x + 1) = c$
अब $a + b + c = (2x + 3) + (3x – 2) – (5x + 1)$
$= 2x + 3 + 3x – 2 – 5x – 1$
$= 5x – 5x + 3 – 3$
$= 0$
अतः $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
a, b तथा c के मान रखने पर।
$(2x + 3)^3 + (3x – 2)^3 – (5x + 1)^3$
$=3 \times (2x + 3) \times (3x – 2) \times [-(5x + 1)]$
$= -3 (2x + 3) (3x – 2) (5x + 1)$

प्रश्न 8. सिद्ध करो कि $x^2 + 6x + 15$ का कोई शून्य नहीं होता।

हल: माना कि $f(x) = x^2 + 6x + 15$
$f (x) = \{ x^2 + 2 (3) x + 9\} + 6$
$= (x + 3)^2 + 6$
यहाँ हम देखते हैं कि x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए $(x + 3)^2$ कभी भी ऋणात्मक मान ग्रहण नहीं कर सकता।
अतः $(x + 3)^2$ का मान सदैव शुन्य से बड़ा ही रहेगा।
परिणामस्वरूप f(x) का मान भी 6 या उससे अधिक होगा।
इसलिए f(x) का कोई शून्य विद्यमान नहीं है।

प्रश्न 9. गुणनखण्ड कीजिए|
(i) $x^3 – 64$
(ii) $(2x – 1)^3 – (x – 1)^3$

हुल:

$$\text{(i) } x^3 - 64 = (x)^3 - (4)^3$$
$$= (x-4)\,[(x)^2 + (x)(4) + (4)^2] = (x-4)\,(x^2 + 4x + 16)$$
$$\text{(ii) } (2x-1)^3 - (x-1)^3$$
$$= [(2x-1) - (x-1)]\,([(2x-1)^2 + (2x-1)\,(x-1) + (x-1)^2]$$
$$= x\,[4x^2 - 4x + 1 + 2x^2 - 3x + 1 + x^2 - 2x + 1]$$
$$= x\,(7x^2 - 9x + 3)$$

प्रश्न 10. $(3a + 4b + 5c)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल:

$$\because (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$
$$\therefore (3a+4b+5c)^2 = (3a)^2+(4b)^2+(5c)^2$$
$$+2(3a)(4b)+2(4b)(5c)+2(5c)(3a)$$
$$= 9a^2+16b^2+25c^2+24ab+40bc+30ac$$

प्रश्न 11. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए-
(i) $(104)^3$
(ii) $(999)^3$

हल:

(i) यहाँ $(104)^3 = (100+4)^3$
$$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4)$$
(सर्वसमिका $(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$ से)
$$= 1000000 + 64 + 124800 = 1124864$$

(ii) यहाँ $(999)^3 = (1000-1)^3$
$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$$
(सर्वसमिका $(x-y)^3 = x^3-y^3-3xy(x-y)$ से)
$$= 1000000000 - 1 - 2997000 = 997002999$$

प्रश्न 12. $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल: दिया व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है-
$$8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$$
$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$$
$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$$
$$= (2x+3y)^3 = (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$$

प्रश्न 13. $(4a - 2b - 3c)^2$ का प्रसार कीजिए।

हल: सर्वसमिका से हम जानते हैं कि

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$
$$\therefore (4a-2b-3c)^2 = [4a+(-2b)+(-3c)]^2$$
$$= (4a)^2+(-2b)^2+(-3c)^2+2(4a)(-2b)$$
$$+2(-2b)(-3c)+2(-3c)(4a)$$
$$= 16a^2+4b^2+9c^2-16ab+12bc-24ac$$

प्रश्न 14.

यदि $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 5$ तो $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ का मान ज्ञात करो।

हल:

सूत्र, $(A-B)^2 = A^2+B^2-2AB$ से,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}-2\times x\times\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \quad 5 = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2 \quad \Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2} = 7$$

प्रश्न 15. प्रदर्शित कीजिए कि बहुपद $x^{10}-1$ और $x^{11}-1$ का एक गुणनखण्ड $(x-1)$ है।

हल: माना $p(x) = x^{10}-1 \Rightarrow q(x) = x^{11}-1$
यदि $(x-1)$, $P(x)$ व $q(x)$ का एक गुणनखण्ड है, तो $p(x) = 0$ तथा $q(x) = 0$

$$\therefore \quad p(x) = x^{10}-1 \text{ तथा } q(x) = x^{11}-1$$
$$\Rightarrow \quad p(1) = (1)^{10}-1 \text{ तथा } q(1) = (1)^{11}-1$$
$$\Rightarrow \quad p(1) = 1-1 = 0 \text{ तथा } q(1) = 1-1 = 0$$

अत: $(x-1)$, बहुपद $p(x)$ तथा $q(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

प्रश्न 16. व्यंजक x^8-y^8, के गुणनखण्ड कीजिए।

हल:

सर्वसमिका $A^2 + B^2 = (A + B)(A - B)$ से,

$$(x^4)^2 - (y^4)^2 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4)$$
$$= [(x^2)^2 - (y^2)^2[[x^4 + y^4]$$
$$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$$
$$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$$

प्रश्न 17.

यदि $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 83$ तो $\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$ का मान ज्ञात करो।

हल:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \times x \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 83 - 2 = 81 \quad \left[\because x^2 + \frac{1}{x^2} = 83\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{x}\right) = 9 \text{ (वर्गमूल लेने पर)} \qquad \text{(i)}$$

घन करने पर, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = (9)^3$

$$\Rightarrow \quad x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \times x \times \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 729$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - \frac{1}{x^3} - 3(9) = 729$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 27 = 729 \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = 756$$

प्रश्न 18. गुणनखण्ड कीजिए $a^3 (b - c)^3 + b^3 (c - a)^3 + c^3 (a - b)^3$

हल:

माना $a(b - c) = x,\ b(c - a) = y,\ c(a - b) = z$

तब $x + y + z = a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$

$$= ab - ac + bc - ba + ca - cb = 0$$

$\therefore \quad x + y + z = 0 \quad \therefore \ x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

$$\therefore \ a^3 (b - c)^3 + b^3 (c - a)^3 + c^3 (a - b)^3$$
$$= 3a(b - c).\, b(c - a).\, c(a - b)$$
$$= 3abc(a - b)(b - c)(c - a)$$