அத்தியாயம்

6

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துக் கொள்ள இயலும்

- தேவை மற்றும் அளிப்பு என்பனவற்றின் கருத்துருக்கள்.
- செலவு, வருவாய் மற்றும் இலாபச் சார்பு என்பதன் பொருள் மற்றும் பயன்கள்.
- சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை எனும் கருத்துருக்கள்.
- தேவை மற்றும் அளிப்பு நெகிழ்ச்சிகள்
- சராசரி வருவாய், இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் தேவை நெகிழ்ச்சிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு.
- கூடும் மற்றும் குறையும் சார்பின் பயன்பாடுகள்
- பெருமம் மற்றும் சிறுமங்களின் பயன்பாடுகள்
- மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு எனும் கருத்துரு
- பகுதி வகையீடுகளின் கருத்துருக்கள்
- பொருளாதாரத்தில் பகுதி வகையீடுகளின் பயன்பாடுகள்
- பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சிகள்.

அறிமுகம்

நவீன பொருளாதார கருத்தியல்கள் வகை நுண்கணிதம் மற்றும் தொகை நுண் கணிதத்தின் தத்துவங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டது. பொருளாதாரத்தில் வகை நுண்கணிதமானது இறுதிநிலைச் செலவு, இறுதிநிலை வருவாய், பெருமம் மற்றும் சிறுமம், நெகிழ்ச்சிகள், பகுதி நெகிழ்ச்சி களைக் கணக்கிடுவதற்குப் பயன்படுகிறது. மேலும் இது ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பில் மீப்பெரு இலாபத்தை அல்லது மீச்சிறு நட்டத்தைக் கணிக்க பொருளாதார வல்லுநர்களுக்கு உதவுகிறது. இந்த அத்தியாயத்தில், நாம் வகையீடுகளின் வாயிலாக வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரம் பற்றிய சில முக்கியமானக் கருத்துருக்கள் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள் பற்றி இங்கு பயில்வோம்.

லியோனார்டு ஆய்லர்

PSSDJU

பொருளாதாரத்தில் ஆய்லரின் தேற்றம்

ஒரு உற்பத்தி சார்பின் காரணிகள் அதனுடைய இறுதி நிலை உற்பத்தி காரணிகளின் பெருகற்பலனாகக் கணக்கிடப் பட்டால் அவற்றின் மொத்த உற்பத்தியானது உற்பத்தி சார்பு மற்றும் அதனுடைய ஓர்நிலைத்தன்மைப் படியின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமமாகும்.

6.1 வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரத்தில் வகையீடுகளின் பயன்பாடுகள் (Applications of differentiation in business and economics)

ஒரு பொருளாதாரச் சூழ்நிலையில், விலை மற்றும் அளவு என்பன மாறிகள் எனக் கருதுக. p என்பது ஒரு பொருளின் அலகு விலை ரூபாயிலும் மற்றும் x என்பது நுகர்வோரால் கோரப்பட்ட (அல்லது) உற்பத்தியாளரால் வழங்கப்பட்ட அப்பொருளின் உற்பத்தி (வெளியீடு / அளவு) என்க.

6.1.1 தேவை, அளிப்பு, செலவு, வருவாய் மற்றும் இலாபச் சார்புகள் (Demand, supply, cost, revenue and profit functions)

தேவைச் சார்பு: (Demand function)

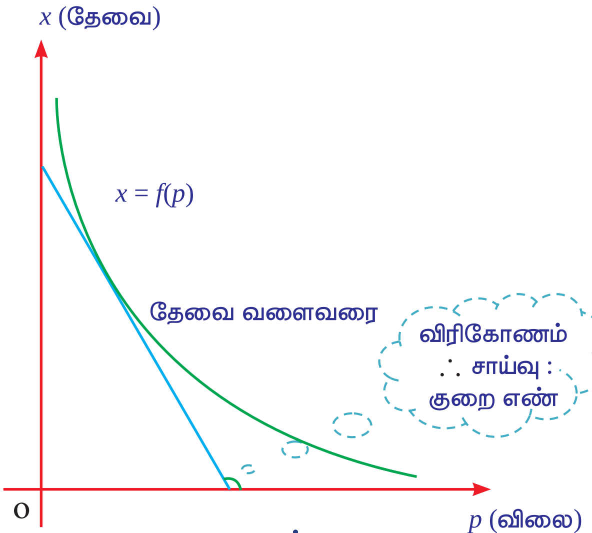
சந்தையில், நுகர்வோரால் கோரப்பட்ட ஒரு பொருளின் அளவானது, அப்பொருளின்

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 134 20-04-2020 04:55:48 PM

விலையைச் சார்ந்துள்ளது. எனவே பொருளின் விலை அதிகரிக்கும் பொழுது, கோரப்படும் அளவு குறைகிறது மற்றும் பொருளின் விலை குறையும் பொழுது கோரப்படும் அளவு அதிகரிக்கிறது.

நுகர்வோர்களால் கோரப்பட்ட ஒரு பொருளின் அளவுக்கும் அதன் அலகு விலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு **தேவைச் சார்பு** எனப்படும். மேலும் இது $x = f(p)$ அல்லது $p = f(x)$, $x > 0$ மற்றும் $p > 0$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x = f(p)$ என்ற தேவைச் சார்பின் வரைபடம்:



படம் : 6.1

> **உங்களுக்கு தெரியுமா?**
> "தேவை – விலை" தொடர்பு வளைவரையானது விலை மற்றும் கோரப்படும் அளவு ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள எதிர்மறை தொடர்பை விளக்குகிறது.

கூர்நோக்கு : (Observations)

(i) தேவைச் சார்பில், விலை மற்றும் அளவு எதிர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

(ii) தேவைச் சார்பின் வளைவரை முதல் கால் பகுதியில் மட்டுமே அமையும்.

(iii) தேவை வளைவரையில், எந்த ஒரு தொடுகோட்டுக்கும், அதன் மிகை திசைக் கான x–அச்சுக்கும், இடையேயுள்ள கோணம் எப்பொழுதும் விரிகோணம் ஆகும்.

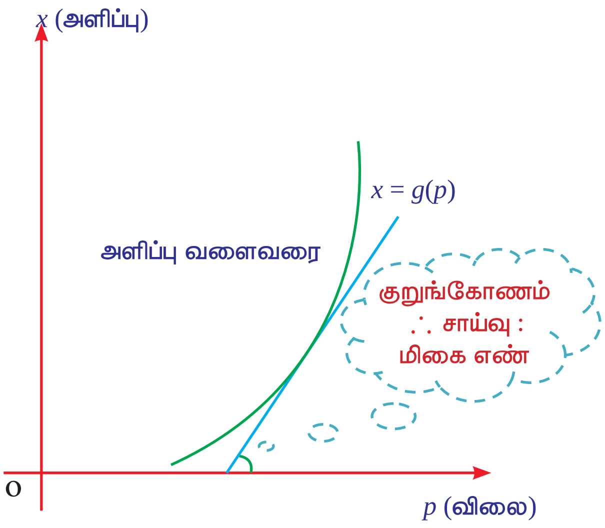
(iv) தேவை வளைவரையின் சாய்வு, ஒரு குறை எண் (–ve) ஆகும்.

அளிப்புச் சார்பு: (Supply function)

சந்தையில், உற்பத்தியாளரால் வழங்கப் பட்ட ஒரு பொருளின் அளவானது அப்பொருளின் விலையைச் சார்ந்துள்ளது. எனவே பொருளின் விலை அதிகரிக்கும்பொழுது, வழங்கப்படும் அளவானதும் அதிகரிக்கிறது மற்றும் பொருளின் விலை குறையும்பொழுது வழங்கப்படும் அளவானதும் குறைகிறது.

உற்பத்தியாளரால் வழங்கப்படும் ஒரு பொருளின் அளவுக்கும் அதன் அலகு விலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு **அளிப்புச் சார்பு** எனப்படும். மேலும் இது $x = g(p)$ (அல்லது) $p = g(x)$, $x > 0$ மற்றும் $p > 0$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x = g(p)$ எனும் அளிப்புச் சார்பின் வரைபடம்:



படம் : 6.2

கூர்நோக்கு : (Observations)

(i) அளிப்பு சார்பில், விலை மற்றும் அளவு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும்.

(ii) அளிப்பு சார்பின் வளைவரை முதல் கால் பகுதியில் மட்டுமே அமையும்.

(iii) அளிப்பு வளைவரையில், எந்த ஒரு தொடுகோட்டுக்கும் அதன் மிகை திசைக்காண x–அச்சுக்கும், இடையே யுள்ள கோணம் எப்பொழுதும் குறுங் கோணம் ஆகும்.

(iv) அளிப்பு வளைவரையின் சாய்வு, ஒரு மிகை எண் (+ve) ஆகும்.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 135 20-04-2020 04:55:49 PM

உங்களுக்கு தெரியுமா?

"அளிப்பு – விலை" தொடர்பு வளைவரையானது விலை மற்றும் வழங்கப்படும் அளவு ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள நேர்மறை தொடர்பை விளக்குகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

தேவை / அளிப்பு விதியானது மாற்றத்தின் திசையை தான் நமக்குச் சொல்கிறது, அதில் நடைபெறுகின்ற மாற்றத்தின் விகிதத்தை அல்ல.

சமன்நிலை விலை: (Equilibrium Price)

ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அதன் அளிப்பு சமநிலையை அடையும்பொழுது கிடைக்கப்பெறும் விலையே சமன்நிலை விலையாகும். மேலும் இதனை p_E எனக் குறிக்கலாம்.

சமன்நிலை அளவு: (Equilibrium Quantity)

ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அதன் அளிப்பு சமநிலையை அடையும்பொழுது கிடைக்கப்பெறும் அளவே சமன்நிலை அளவாகும். மேலும் இதனை x_E எனக் குறிக்கலாம்.

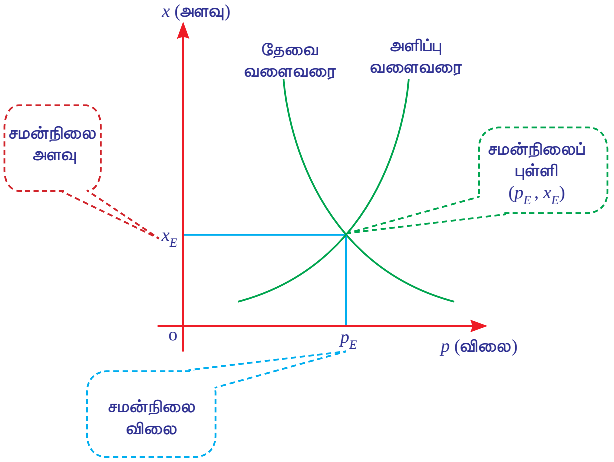
குறிப்பு:

பொதுவாக, தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகளில், அளவு x ஆனது விலை p –ன் வாயிலாக வெளிப்படுத்தப்படுகிறது. எனவே சமன்நிலை விலை p_E - யை தேவைச் சார்பு (அல்லது) அளிப்புச் சார்பில் பிரதியிட்டு சமன்நிலை அளவானது பெறப்படுகிறது.

சமன்நிலைப் புள்ளி: (Equilibrium Point)

தேவை மற்றும் அளிப்பு வளைவரைகளின் வெட்டுப் புள்ளி, (p_E, x_E)–ஐ சமன்நிலைப் புள்ளி என்போம்.

சமன்நிலை விலை, சமன்நிலை அளவு மற்றும் சமன்நிலைப் புள்ளிக்கான விளக்கப்படம்: (Diagrammatical explanation of equilibrium price, equilibrium quantity and equilibrium point)



படம் : 6.3

சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை கருத்துருக்கள்: (Average and Marginal concepts)

பொதுவாக 'x' எனும் சாரா மாறியின் அளவைப் பொறுத்து 'y' என்ற சார்ந்த மாறியின் அளவில் ஏற்படும் மாறுபாட்டை இரு கருத்துருக்களின் அடிப்படையில் விவரிக்கலாம், அவையாவன:

(i) சராசரி கருத்துரு

(ii) இறுதிநிலை கருத்துரு

(i) சராசரியின் கருத்துரு: (Average concept)

சராசரி கருத்துருவானது x இன் முழு வீச்சு மீதான y இன் மாறுபாடாகும். இதனை $\frac{y}{x}$ எனக் குறிக்கலாம்.

(ii) இறுதிநிலையின் கருத்துரு: (Marginal concept)

இறுதிநிலை கருத்துருவானது x – ஐ பொறுத்து y இல் ஏற்படக்கூடிய உடனடி மாறுவீதமாகும். இதனை $\frac{dy}{dx}$ எனக் குறிக்கலாம்.

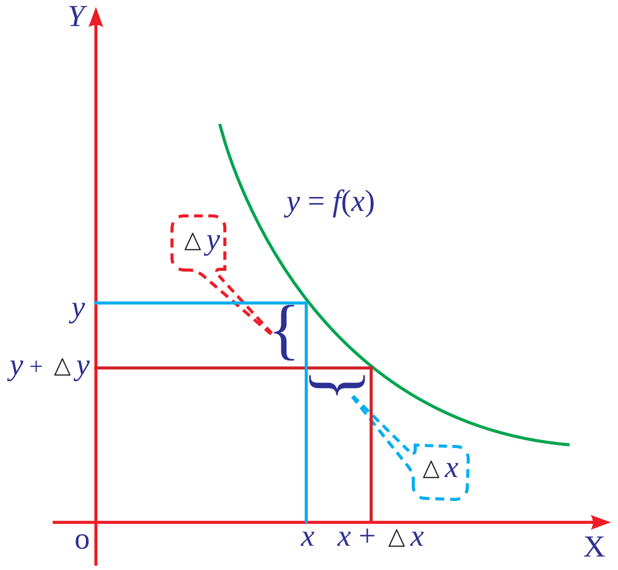
06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 136 20-04-2020 04:55:50 PM

மேற்குறிப்பு:

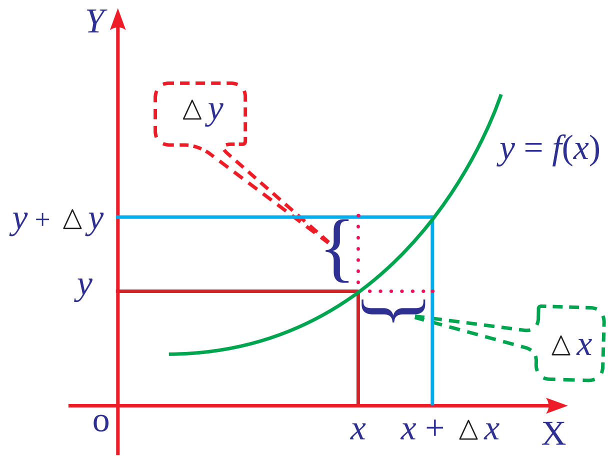
$y = f(x)$ என்ற சார்பில் Δx என்பது x இல் ஏற்படும் ஒரு சிறு மாற்றம் எனவும் Δy என்பது அதன் தொடர்பாக y இல் ஏற்படும் மாற்றம் எனில் $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ஆகும்.

x –ஐ பொறுத்து y இல் ஏற்படக்கூடிய உடனடி மாறுவீதமானது வரம்பிடப்பட்ட எல்லையில் ஏற்படும் y இன் மாற்றத்திற்கும், x இன் மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதமாகும்.

அ.து. $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$



படம் : 6.4 (a)



படம் : 6.4 (b)

செலவுச் சார்பு : (Cost function)

ஒரு பொருளை உற்பத்தி செய்வதற்காக செலவிடப்படும் தொகை செலவுச் சார்பு எனப்படும்.

பொதுவாக, மொத்த செலவுச் [TC] சார்பானது, இரு பகுதிகளை உள்ளடக்கியது. அவை

(i) மாறும் செலவு

(ii) மாறாச் செலவு (நிலையான செலவு)

மாறும் செலவு: (Variable cost)

மாறும் செலவு என்பது, கிட்டத்தட்ட உற்பத்தி அளவுக்கு நேர் விகிதத்தில் மாறுகின்ற செலவு ஆகும்.

மாறாச் செலவு: (Fixed cost)

மாறாச் செலவு என்பது உற்பத்தி அளவுடன் நேரடியாக தொடர்பு அல்லாதச் செலவு ஆகும்.

x அலகுகள் உற்பத்திக்கான ஒரு பொருளின் மாறும் செலவு $f(x)$ மற்றும் மாறாச் செலவு k எனில் மொத்த செலவுச் சார்பானது $C(x)=f(x)+k,\ x > 0$ ஆகும்.

குறிப்பு

(i) மாறும் செலவு $f(x)$ ஆனது உற்பத்தியின் ஒரு மதிப்பு உடையச் சார்பாகும்.

(ii) மாறாச் செலவு k ஆனது உற்பத்தி அளவைச் சார்ந்தது அல்ல.

(iii) $f(x)$ மாறிலி உறுப்பைக் கொண்டிருக்காது.

சில திட்டமான முடிவுகள்: (Some standard results)

$C(x) = f(x) + k$ என்பது மொத்த செலவுச் சார்பு எனில்

(i) சராசரி செலவு $[AC] = \frac{\text{மொத்த செலவு}}{\text{உற்பத்தி}} = \frac{C(x)}{x} = \frac{f(x)+k}{x}$

(ii) சராசரி மாறும் செலவு $[AVC] = \frac{\text{மாறும் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}} = \frac{f(x)}{x}$

(iii) சராசரி மாறாச் செலவு $[AFC] = \frac{\text{மாறாச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}} = \frac{k}{x}$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 137 20-04-2020 04:55:50 PM

(iv) இறுதி நிலைச் செலவு $[MC]$

$$= \frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}[C(x)] = C'(x)$$

(v) இறுதி நிலைச் சராசரிச் செலவு $[MAC]$

$$= \frac{d}{dx}(AC)$$

(vi) மொத்தச் செலவு [$[TC]$

= சராசரிச் செலவு × உற்பத்தி

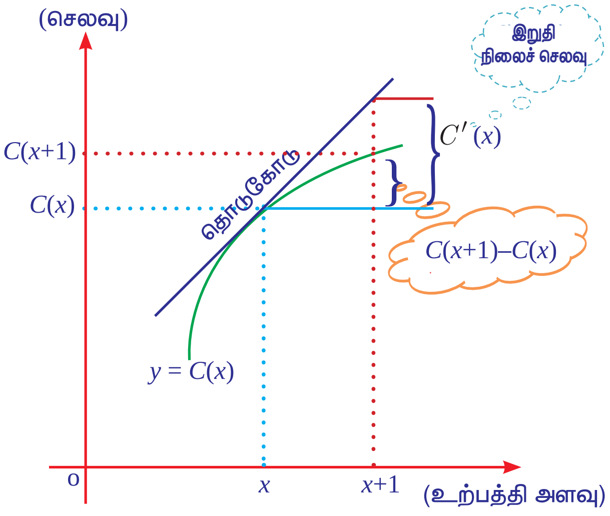
(vii) $MC = AC$ எனும்போது சராசரி [AC] செலவானது சிறுமத்தை அடையும்.

மேற்குறிப்பு:

இறுதிநிலைச் செலவு $[MC]$ என்பது தோராயமாக உற்பத்தியின் அளவு x அலகுகளாக இருக்கும்போது $(x+1)$ வது அலகின் உற்பத்திச்செலவு ஆகும்.

இறுதிநிலைச் செலவுக்கான வரைபட விளக்கம் (Diagrammatical explanation of marginal cost [MC])

உற்பத்தி வெளியீட்டின் அளவில் ஒரு அலகு அதிகரிக்கப்படும் போது அல்லது ஒரு அலகு குறைக்கப்படும் போது மொத்தச் செலவில் ஏற்படும் மாற்றமே இறுதிநிலைச் செலவு ஆகும்.



படம் : 6.5

வருவாய்ச் சார்பு: (Revenue function)

ஒரு பொருள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டு, விற்கப்படும் போது கிடைக்கக்கூடிய தொகை வருவாய் எனப்படும். உற்பத்தி செய்யப்பட்ட x அலகுப் பொருளை, ஒரு அலகு p என்ற விலையில் விற்கப்படும் போது கிடைக்கும் தொகையானது மொத்த வருவாய் $R(x) = px$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு x மற்றும் p என்பன மிகை எண்களாகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

உற்பத்தியாளர், அதிக விலையில் அதிக அளவை வழங்கும் போது வருவாய் அதிகரிக்கும்.

சில திட்டமான முடிவுகள்: (Some standard results)

$R(x) = px$ என்பது வருவாய்ச் சார்பு எனில்

(i) சராசரி வருவாய் $[AR]$ =

$$\frac{\text{மொத்த வருவாய்}}{\text{உற்பத்தி}} = \frac{R(x)}{x} = p$$

(ii) இறுதி நிலை வருவாய் $[MR]$ =

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(R(x)) = R'(x)$$

(iii) இறுதி நிலைச் சராசரி வருவாய் $[MAR]$

$$= \frac{d}{dx}(AR) = AR'(x)$$

மேற்குறிப்பு:

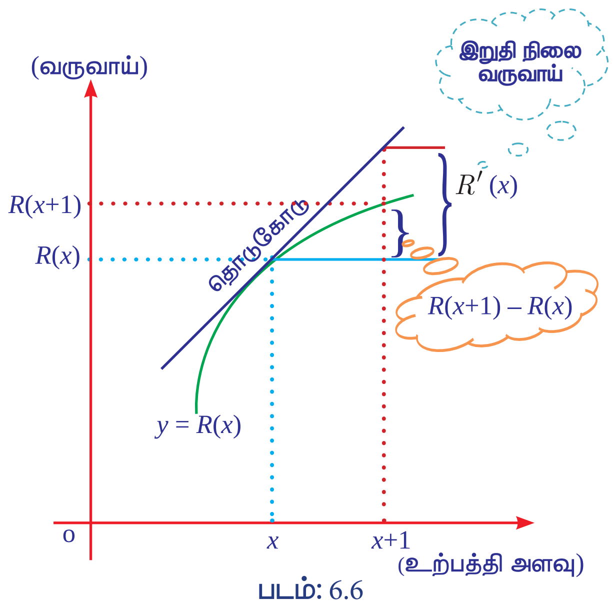
(i) சராசரி வருவாயும் $[AR]$ மற்றும் விலையும் (p) ஒன்றே. (அ.து. $AR=p$)

(ii) விற்பனை அளவு x அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது, $(x+1)$ வது அலகு உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்பட்டதால் கிடைக்கும் தோராயமான கூடுதல் வருவாயே இறுதி நிலை வருவாய் $[MR]$ ஆகும்.

இறுதிநிலை வருவாய்க்கான வரைபட விளக்கம் [(Diagrammatical explanation of Marginal Revenue [MR])]

விற்பனை அளவின் அலகுகளில் ஒரு அலகு அதிகரிக்கும்போது மொத்த வருவாயில் எற்படும் மாற்றமே இறுதிநிலை வருவாய் ஆகும்.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 138 20-04-2020 04:55:52 PM



படம்: 6.6

இலாபச் சார்பு: (Profit function)

மொத்த உற்பத்தி வருவாயில், மொத்தச் செலவுக்கும் மேல் உள்ள உபரித் தொகையே, இலாபம் எனப்படும். $R(x)$ என்பது மொத்த வருவாய், $C(x)$ என்பது மொத்தச் செலவு எனில், இலாபச் சார்பு $P(x)$ என்பது $P(x) = R(x) - C(x)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

சில திட்டமான முடிவுகள்:

$P(x) = R(x) - C(x)$ என்பது இலாபச் சார்பு எனில்

(i) சராசரி இலாபம் $[AP] = \dfrac{\text{மொத்த இலாபம்}}{\text{உற்பத்தி}}$

$$= \frac{P(x)}{x}$$

(ii) இறுதி நிலை இலாபம் $[MP]$

$$= \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}(P(x)) = P'(x)$$

(iii) இறுதி நிலை சராசரி இலாபம் $[MAP]$

$$= \frac{d}{dx}(AP) = AP'(x)$$

(iv) $MR = MC$ எனும்போது இலாபச் சார்பு $[P(x)]$ பெருமத்தை அடையும்.

6.1.2 நெகிழ்ச்சி: (Elasticity)

x என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சி 'η' ஆனது, y –ன் சார் மாற்றத்திற்கும், x –ன் சார் மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தின் வரம்பிடப்பட்ட எல்லை என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \eta = \frac{E_y}{E_x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} \Rightarrow \eta = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\eta = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{x \text{ –ஐ பொறுத்த } y \text{ –ன் இறுதி நிலை அளவு}}{x \text{ –ஐ பொறுத்த } y \text{ –ன் சராசரி அளவு}}$$

(i) விலையின் தேவை நெகிழ்ச்சி (Price elasticity of demand)

விலையின் தேவை நெகிழ்ச்சி என்பது விலை மாற்றத்தினால், கோரப்பட்ட அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் பிரதிபலிப்பு அளவு ஆகும்.

தேவைச் சார்பு $x = f(p)$ –ல், x என்பது தேவை மற்றும் p என்பது அலகு விலை எனில் விலையைப்பொறுத்ததேவைநெகிழ்ச்சியானது $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(ii) விலையின் அளிப்பு நெகிழ்ச்சி (Price elasticity of supply)

விலையின் அளிப்பு நெகிழ்ச்சி என்பது விலை மாற்றத்தினால், வழங்கப்பட்ட அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் பிரதிபலிப்பு அளவு ஆகும்.

அளிப்பு சார்பு $x = g(p)$ –ல், x என்பது அளிப்பு மற்றும் p என்பது அலகு விலை எனில் விலையைப் பொறுத்த அளிப்பு நெகிழ்ச்சியானது $\eta_s = \frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$. என வரையறுக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

நெகிழ்ச்சி முக்கியமாக விலை மாற்றத்தின் விளைவாக ஏற்படும் நுகர்வோர் தேவை மாற்றத்தை மதிப்பீடு செய்யப் பயன்படுகிறது.

குறிப்பு

'நெகிழ்ச்சி' என்பது 'விலையின் நெகிழ்ச்சி' என்பதன் சுருக்கமாகும்.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 139 20-04-2020 04:55:54 PM

விலை நெகிழ்ச்சியின் முக்கிய முடிவுகள்: (Some important results on price elasticity)

(i) $|\eta|>1$, எனும்போது, தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது மீள்த்தன்மைக் கொண்டது எனலாம்.

(ii) $|\eta|=1$, எனும்போது, தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது அலகு மீள்த்தன்மை கொண்டது எனலாம்.

(iii) $|\eta|<1$, எனும்போது, தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது மீள்த்தன்மையற்றது எனலாம்.

மேற்குறிப்பு:

(i) **மீள்த்தன்மை :** ஒரு தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது அதன் விலையின் மாற்றங்களை பெரிதும் பிரதிபலிக்கிறது எனில், அளவு மீள்த்தன்மைக் கொண்டது எனலாம்.
உதாரணம்: வெங்காயத்தின் நுகர்வும் அதன் விலையும்.

(ii) **மீள்த்தன்மையற்றது :** ஒரு தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது அதன் விலையின் மாற்றங்களை மிகக் சிறிய அளவில் பிரதிபலிக்கிறது எனில், அளவு மீள்த்தன்மையற்றது எனலாம்.
உதாரணம்: அரிசியின் நுகர்வும் அதன் விலையும்.

(iii) **அலகு மீள்த்தன்மை :** ஒரு தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது அதன் விலையின் மாற்றத்தை சமவிகிதத்தில் பிரதி பலிக்கிறது எனில், அளவு அலகு மீள்த்தன்மைக் கொண்டது எனலாம்.

இறுதி நிலை வருவாய் [MR], சராசரி வருவாய் [AR] மற்றும் தேவை நெகிழ்ச்சி [η_d] களுக்கு இடையே உள்ளத் தொடர்பு: (Relationship among Marginal revenue [MR], Average revenue [AR] and Elasticity of demand [η_d])

$$R(x)=px$$

அதாவது, $R = px$

மற்றும் $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

இப்போது, $MR = \frac{d}{dx}(R)$

$$= \frac{d}{dx}(px) = p + x\frac{dp}{dx}$$

$$= p\left[1+\frac{x}{p}\cdot\frac{dp}{dx}\right]$$

$$= p\left[1+\frac{1}{\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}}\right]$$

$$= p\left[1-\frac{1}{-\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}}\right]$$

$$= p\left[1-\frac{1}{\eta_d}\right]$$

அதாவது, $MR = AR\left[1-\frac{1}{\eta_d}\right]$ (அல்லது)

$$\eta_d = \frac{AR}{AR-MR}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.1

x அலகுகள் உற்பத்திக்கான ஒரு பொருளின் மொத்த செலவுச் சார்பு $C(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 25x + 7$ எனில்,

(i) சராசரிச் செலவுச் சார்பு
(ii) சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு
(iii) சராசரி மாறாச் செலவுச் சார்பு
(iv) இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு
(v) இறுதி நிலைச் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 25x + 7$$

(i) சராசரிச் செலவு $(AC) = \frac{C}{x}$

$$= \frac{1}{3}x^2 + 4x - 25 + \frac{7}{x}$$

(ii) சராசரி மாறும் செலவு $(AVC) = \frac{f(x)}{x}$

$$= \frac{1}{3}x^2 + 4x - 25$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 140 20-04-2020 04:55:55 PM

(iii) சராசரி மாறாச் செலவு $(AFC) = \frac{k}{x}$

$$= \frac{7}{x}$$

(iv) இறுதி நிலைச் செலவு (MC)

$$= \frac{dC}{dx} \text{ (அல்லது) } \frac{d}{dx}(C(x))$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 25x + 7\right]$$

$$= x^2 + 8x - 25$$

(v) இறுதிநிலைச் சராசரிச் செலவு (MAC)

$$= \frac{d}{dx}[AC] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^2 + 4x - 25 + \frac{7}{x}\right]$$

$$= \frac{2}{3}x + 4 - \frac{7}{x^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.2

x அலகுகள் கொண்ட ஒரு பொருளின் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு C ரூபாயில், $C(x) = 50 + 4x + 3\sqrt{x}$ எனில், 9 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவு யாது?

தீர்வு

$$C(x) = 50 + 4x + 3\sqrt{x}$$

இறுதிநிலைச் செலவு $(MC) = \frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}[C(x)]$

$$= \frac{d}{dx}\left[50 + 4x + 3\sqrt{x}\right] = 4 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$x = 9$, எனும்போது, $\frac{dC}{dx} = 4 + \frac{3}{2\sqrt{9}}$

$$= 4\frac{1}{2} = ₹\ 4.50$$

$\therefore$ 9 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவு ₹ 4.50.

எடுத்துக்காட்டு 6.3

பின்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளைக் கொண்டு சமன்நிலை விலை மற்றும் சமன்நிலை அளவு காண்க.

தேவை: $x = \frac{1}{2}(5 - p)$ மற்றும் அளிப்பு: $x = 2p-3$

தீர்வு

சமன்நிலையில், தேவை = அளிப்பு

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(5 - p) = 2p-3$$

$$5-p = 4p-6$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{11}{5}$$

$\therefore$ சமன்நிலை விலை: p_E=₹ $\frac{11}{5}$

இப்போது, $p = \frac{11}{5}$ –ஐ $x = 2p-3$ –ல் பிரதியிட

நாம் பெறுவது, $x = 2\left(\frac{11}{5}\right) - 3 = \frac{7}{5}$

$\therefore$ சமன் நிலை அளவு: $x_E = \frac{7}{5}$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 6.4

$x = \frac{20}{p+1}$ என்ற தேவைச் சார்புக்கு, $p = 3$ –ல் விலையைப் பொறுத்து தேவை நெகிழ்ச்சியை காண்க. மேலும் இது $p = 3$ –ல் மீள்த்தன்மை கொண்டதா என ஆராய்க .

தீர்வு:

$$x = \frac{20}{p+1}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-20}{(p+1)^2}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= -\frac{p}{\left(\frac{20}{(p+1)}\right)}\cdot\frac{-20}{(p+1)^2}$$

$$= \frac{p}{p+1}$$

$$p = 3 \text{ –ல், } \eta_d = \frac{3}{4} \text{ (அ) } 0.75$$

இங்கு, $|\eta_d| < 1$. $\therefore$ தேவை மீள்த்தன்மையற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 6.5

$x = 2p^2 - 5p + 1$ என்ற அளிப்புச் சார்புக்கு அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு:

$$x = 2p^2 - 5p + 1$$

$$\frac{dx}{dp} = 4p - 5$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 141 20-04-2020 04:56:06 PM

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி: $\eta_s = \frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= \frac{p}{2p^2-5p+1}\cdot(4p-5) = \frac{4p^2-5p}{2p^2-5p+1}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.6

$y = \frac{2x+1}{3x+2}$ எனில், $x=1$–ல் இதன் நெகிழ்ச்சியை காண்க.

தீர்வு:

$$y = \frac{2x+1}{3x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x+2)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

நெகிழ்ச்சி: $\eta = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)}\cdot\frac{1}{(3x+2)^2}$

$$= \frac{x}{(2x+1)(3x+2)}$$

$x = 1$ –ல், $\eta = \frac{1}{15}$

எடுத்துக்காட்டு 6.7

$xp^n = k$ என்ற தேவைச் சார்பில் n மற்றும் k என்பன மாறிலிகள் எனில், தேவை நெகிழ்ச்சி எப்போதும் ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$xp^n = k$$

$$x = kp^{-n}$$

$$\frac{dx}{dp} = -nkp^{-n-1}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= -\frac{p}{kp^{-n}}\left(-nkp^{-n-1}\right)$$

$= n$, ஒரு மாறிலி

எடுத்துக்காட்டு 6.8

$p = 40-x$ என்ற தேவைச் சார்பில் தேவை நெகிழ்ச்சி (η_d) ஆனது 1 எனில் உற்பத்தி அளவை காண்க.

தீர்வு:

$$p = 40-x$$

$$\therefore \quad x = 40-p$$

$$\frac{dx}{dp} = -1$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= \frac{40-x}{x}$$

கணக்கின் படி, $\eta_d = 1$

$$\therefore \frac{40-x}{x} = 1$$

$$2x = 40$$

$\therefore$ உற்பத்தி அளவு $(x) = 20$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 6.9

$p = (a-bx)^{\frac{1}{2}}$ என்ற தேவை விதிக்கு, x –ன் வாயிலாக (x–ஐ பொறுத்து) தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. மேலும் தேவை நெகிழ்ச்சி 1 எனும்போது உற்பத்தி (x) –ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு:

$$p = (a-bx)^{\frac{1}{2}}$$

'p' -ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$1 = \frac{1}{2}(a-bx)^{\frac{-1}{2}}(-b)\cdot\frac{dx}{dp}$$

$$\therefore \frac{dx}{dp} = \frac{2(a-bx)^{\frac{1}{2}}}{-b}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= -\frac{(a-bx)^{\frac{1}{2}}}{x}\cdot\frac{2(a-bx)^{\frac{1}{2}}}{-b}$$

$$= \frac{2(a-bx)}{bx}$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 142 20-04-2020 04:56:17 PM

$\eta_d = 1$ எனும்போது, $\dfrac{2(a-bx)}{bx} = 1$

$2(a-bx) = bx$

$\therefore$ உற்பத்தி $(x) = \dfrac{2a}{3b}$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 6.10

$p = 50 - 3x$ என்ற தேவை விதியைக் கொண்டு தேவை நெகிழ்ச்சி, சராசரி வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை வருவாய்க்கு இடையேயுள்ள தொடர்பினைச் சரிபார்.

தீர்வு:

$$p = 50 - 3x$$

$$\frac{dp}{dx} = -3$$

$$\therefore \frac{dx}{dp} = -\frac{1}{3}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\dfrac{p}{x}\cdot\dfrac{dx}{dp}$

$$= -\frac{50-3x}{x}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{50-3x}{3x} \quad \ldots (1)$$

இப்போது, வருவாய் : $R = px$

$$= (50-3x)x$$

$$= 50x - 3x^2$$

சராசரி வருவாய் : $AR = p$

$$= 50-3x$$

இறுதிநிலை வருவாய் : $MR = \dfrac{dR}{dx}$

$$= 50-6x$$

$$\therefore \frac{AR}{AR-MR} = \frac{50-3x}{(50-3x)-(50-6x)}$$

$$= \frac{50-3x}{3x} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$\eta_d = \frac{AR}{AR-MR}$$

எனவே, சரி பார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 6.11

$x = \dfrac{p}{p+5}$ என்ற அளிப்பு விதிக்கு $p = 20$–ல் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. மேலும் விடைக்கு விளக்கம் தருக.

தீர்வு:

$$x = \frac{p}{p+5}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{(p+5)-p}{(p+5)^2}$$

$$= \frac{5}{(p+5)^2}$$

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி: $\eta_s = \dfrac{p}{x}\cdot\dfrac{dx}{dp}$

$$= (p+5)\frac{5}{(p+5)^2}$$

$$= \frac{5}{p+5}$$

$p = 20$ எனில், $\eta_s = \dfrac{5}{20+5} = 0.2$

பொருள் விளக்கம்: (Interpretation)

- p = ₹ 20–லிருந்து விலையானது 1% அதிகரித்தால், அளிப்பின் அளவு தோராயமாக 0.2% அதிகரிக்கிறது.
- p = ₹ 20–லிருந்து விலையானது 1% குறைந்தால் அளிப்பின் அளவு தோரயமாக 0.2% குறைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.12

செலவுச் சார்பு $C = 2x\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)+7$ –ல் உற்பத்தி அளவு x ஆனது தொடர்ச்சியாக அதிகரிக்கும் பொழுது இறுதி நிலைச் செலவானது [MC] தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$C = 2x\left(\frac{x+5}{x+2}\right)+7$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 143 20-04-2020 04:56:26 PM

$$= \frac{2x^2 + 10x}{x+2} + 7$$

இறுதி நிலைச் செலவு:

$$MC = \frac{dC}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{2x^2 + 10x}{x+2} + 7\right]$$

$$= \frac{(x+2)(4x+10) - (2x^2 + 10x)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + 4x + 10)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2\left[(x+2)^2 + 6\right]}{(x+2)^2}$$

$$= 2\left[1 + \frac{6}{(x+2)^2}\right]$$

$\Rightarrow$ x ஆனது தொடர்ச்சியாக அதிகரிக்கும் பொழுது, இறுதி நிலைச் செலவு $[MC]$ ஆனது தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.13

உற்பத்திக்கானச் சராசரி செலவு சார்பு $\overline{C} = 0.05x^2 + 16 + \frac{100}{x}$. உற்பத்தி அளவு 50 அலகுகள் எனும்போது இறுதி நிலைச் செலவு யாது? மற்றும் விடைக்கு விளக்கம் தருக.

தீர்வு:

மொத்தச் செலவு $C = AC \times x$

$= \overline{C} \times x$

$= 0.05x^3 + 16x + 100$

இறுதி நிலைச் செலவு : $MC = \frac{dC}{dx}$

$= 0.15x^2 + 16$

$$\left(\frac{dC}{dx}\right)_{x=50} = 0.15(50)^2 + 16$$

$= 375 + 16 = ₹\ 391$

பொருள் விளக்கம்: (Interpretation)

உற்பத்தி அளவானது $x = 50$ –லிருந்து ஒரு அலகு அதிகரிக்கும் பொழுது, கூடுதல் அலகுக்கான உற்பத்திச் செலவு தோராயமாக ₹ 391 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.14

$y = x^3 + 19$ என்ற சார்பின் இறுதி நிலை மதிப்பானது 27–க்கு சமமெனில், x–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$y = x^3 + 19$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \qquad \ldots (1)$$

கணக்கின் படி, $\frac{dy}{dx} = 27$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) விருந்து, நாம் பெறுவது

$$3x^2 = 27$$

$$\therefore\ x = \pm 3$$

எடுத்துக்காட்டு 6.15

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = \frac{4}{x}$ – ல் 'p' என்பது அலகு விலையாகும். விலை $p = 4$ எனில் விலையைப் பொறுத்து, தேவையின் உடனடி மாறுவீதம் காண்க. மேலும் விடைக்கு விளக்கம் தருக.

தீர்வு:

$$p = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{p}$$

$$\therefore \frac{dx}{dp} = -\frac{4}{p^2}$$

$p = 4$ –ல், $\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{4} = -0.25$

$\therefore\ p = ₹\ 4$ –ல் விலையைப் பொறுத்து தேவையின் உடனடி மாறுவீதம் – 0.25 ஆகும்.

பொருள் விளக்கம்: (Interpretation)

$p = ₹\,4$–லிருந்து விலையானது 1% அதிகரிக்கும் பொழுது, தேவை 0.25% குறைகிறது.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 144 20-04-2020 04:56:35 PM

எடுத்துக்காட்டு 6.16

ஒரு நிறுவனத்தின் தேவை மற்றும் செலவுச் சார்புகள் முறையே $p = 497 - 0.2x$ மற்றும் $C = 25x+10000$ ஆகும். இலாபம் பெருமத்தை அடையும்பொழுது உற்பத்தி அளவு மற்றும் விலையைக் காண்க.

தீர்வு:

இறுதி நிலை வருவாய் $[MR]$ = இறுதி நிலைச் செலவு $[MC]$ எனும்போது, இலாபமானது பெருமத்தை அடையும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

வருவாய் : $R = px$

$= (497-0.2x)x$

$= 497x-0.2x^2$

$MR = \frac{dR}{dx}$

$\therefore MR = 497-0.4x$

செலவு $C = 25x+10000$

$\therefore MC = 25$

$MR = MC \Rightarrow 497-0.4x = 25$

$\Rightarrow 472-0.4x = 0$

$\Rightarrow x = 1180$ அலகுகள்.

இப்போது, $p = 497-0.2x$

$x=1180$ –ல் $p = 497-0.2(1180)$

$= ₹\,261$

எடுத்துக்காட்டு 6.17

ஒரு நிறுவனத்தின் செலவுச் சார்பு $C=\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$. சராசரி செலவு சிறுமத்தை அடையும் பொழுது அதன் உற்பத்தி அளவை $(x > 0)$காண்க.

தீர்வு:

சராசரி செலவு $[AC]$ = இறுதிநிலைச் செலவு $[MC]$ எனும் பொழுது சராசரி செலவானது சிறுமத்தை அடையும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

செலவு: $C = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$

$\therefore AC = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 9$ மற்றும்

$MC = x^2 - 6x + 9$

இப்போது,

$AC = MC \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$

$\Rightarrow 2x^2 - 9x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{9}{2}$ அலகுகள் $[\because x > 0]$

பயிற்சி 6.1

1. ஒரு நிறுவனம் x டன்கள் உற்பத்தி செய்யும் பொழுது அதன் மொத்தச் செலவு $C(x) = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 - 20x + 7$ எனில்
   (i) சராசரிச் செலவுச் சார்பு
   (ii) சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு
   (iii) சராசரி மாறாச் செலவுச் சார்பு
   (iv) இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு
   (v) இறுதி நிலை சராசரிச் செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஒரு நிறுவனத்தின் x அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்தச் செலவு $C = \frac{2}{3}x + \frac{35}{2}$ எனில்,
   (i) உற்பத்தி 4 அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது அதன் செலவு
   (ii) உற்பத்தி 10 அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது அதன் சராசரிச் செலவு
   (iii) உற்பத்தி 3 அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது அதன் இறுதி நிலைச் செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $R = 14x - x^2$ மற்றும் $C = x(x^2 - 2)$ என்பன முறையே வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் செலவுச் சார்பு எனில்,
   (i) சராசரிச் செலவுச் சார்பு
   (ii) இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 145 20-04-2020 04:56:38 PM

(iii) சராசரி வருவாய்ச் சார்பு மற்றும்

(iv) இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. $p = 10e^{-\frac{x}{2}}$ என்ற தேவை விதிக்கு, தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

5. கீழ்க்காணும் தேவை விதிகளுக்கு x –ன் வாயிலாக தேவை நெகிழ்ச்சிக் காண்க. மேலும் தேவை நெகிழ்ச்சியை ஒன்று எனக் கொண்டு உற்பத்தி (x)–ஐ காண்க.

   (i) $p=(a-bx)^2$ (ii) $p=a-bx^2$

6. $p=3$ –ல் $x=2p^2+5$ என்ற அளிப்பு சார்பின் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

7. ஒரு பொருளின் தேவை வளைவரை $p=\frac{50-x}{5}$, உற்பத்தி அளவான எந்த ஒரு x–க்கும் இறுதி நிலை வருவாய் காண்க. மேலும் $x=0$ மற்றும் $x=25$–ல் இறுதி நிலை வருவாயைக் காண்க.

8. ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $x=a\sqrt{p-b}$, $p>b$ ஆகும், இதில் p என்பது அலகு விலை, a மற்றும் b என்பன மாறிலிகள். $p = 2b$ –ல் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

9. p–ஐ அலகு விலையாகவும், x–ஐ உற்பத்தி அளவாகவும் கொண்ட தேவைச் சார்பு $p=400-2x-3x^2$ க்கு $MR=p\left[1-\frac{1}{\eta_d}\right]$ எனக் காட்டுக.

10. p–ஐ அலகு விலையாகவும், x–ஐ உற்பத்தி அளவாகவும் கொண்ட தேவைச் சார்பு $p = 550-3x-6x^2$-ல் $MR=p\left[1-\frac{1}{\eta_d}\right]$ எனக் காட்டுக.

11. $x=\frac{25}{p^4}$, $1\le p\le 5$ என்ற தேவைச் சார்புக்கு தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

12. ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அதன் செலவுச் சார்புகள் முறையே $p=200-\frac{x}{100}$ மற்றும் $C=40x+120$ ஆகும். இங்கு p என்பது அலகு விலை ரூபாயில் மற்றும் x என்பது உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்பட்ட அளவு எனில்,

   (i) இலாபச் சார்பு

   (ii) உற்பத்தி அளவு 10 அலகுகள் எனும்போது சராசரி இலாபம்

   (iii) உற்பத்தி அளவு 10 அலகுகள் எனும்போது இறுதி நிலை இலாபம்

   (iv) உற்பத்தி அளவு 10 அலகுகள் எனும்போது இறுதி நிலைச் சராசரி இலாபம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

13. $y=x^3+10x^2-48x+8$ என்ற சார்பின் இறுதி நிலையானது x –ஐ போல் இருமடங்கு எனில் x –ன் மதிப்புகள் யாது?

14. x அலகுகளுக்கான மொத்த செலவுச் சார்பு $y=3x\left(\frac{x+7}{x+5}\right)+5$ –ல் உற்பத்தி அளவு (x) ஆனது தொடர்ச்சியாக அதிகரிக்கும் பொழுது, இறுதி நிலைச் செலவானது [MC] தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது எனக் காட்டுக

15. $x = 10 - p$ என்ற தேவைச் சார்புக்கு விலையைப் பொறுத்து, தேவை நெகிழ்ச்சி காண். இங்கு p விலையையும், x தேவையையும் குறிக்கும். மேலும் $p = 6$-ல் தேவையானது மீள்த்தன்மை கொண்டதா, மீள்த்தன்மையற்றதா அல்லது அலகு மீள்த் தன்மைக் கொண்டதா என்பதனை ஆராய்க.

16. பின்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகளைக் கொண்டு அதன் சமன்நிலை விலை மற்றும் சமன்நிலை அளவு காண்க.

   தேவை: $x=100-2p$ மற்றும்

   அளிப்பு: $x=3p-50$

17. ஒரு நிறுவனத்தின் தேவை மற்றும் செலவு சார்புகள் முறையே $x=6000-30p$ மற்றும் $C = 72000+60x$ ஆகும். இலாபம் பெருமத்தை அடையும்பொழுது உற்பத்தி அளவு மற்றும் விலையைக் காண்க.

18. ஒரு நிறுவனத்தின் செலவுச் சார்பு $C = x^3 - 12x^2 + 48x$ எனில், சராசரிச் செலவு சிறுமத்தை அடையும்பொழுது அதன் உற்பத்தி அளவு $(x > 0)$ காண்க.

6.2 பெருமம் மற்றும் சிறுமம் (Maxima and minima)

பெருமம் மற்றும் சிறுமம் ஆகியவற்றை அன்றாட வாழ்க்கையிலும், இயற்பியல், வேதியியல், பொறியியல் மற்றும் பொருளாதாரம் ஆகியபலதுறைகளிலும்நாம்பயன்படுத்துகிறோம்.

குறிப்பாக கீழ்க்காணும் நிலைகளில் நாம் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் ஆகியவற்றின் பயன்பாடுகளைக் காணலாம்.

(i) இலாபம், திறன், நிறுவனத்தின் உற்பத்தி போன்ற பயன்தரத்தக்க மதிப்புகளை பெருமம் அடையச் செய்வதற்கு.

(ii) செலவுகள், உழைப்பு போன்றவற்றைக் குறைப்பதற்கு.

(iii) சரக்குநிலைக் கட்டுப்பாடு, மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு போன்றவற்றைக் கற்றறிவதற்கு.

6.2.1 கூடும் மற்றும் குறையும் சார்புகள்: (Increasing and decreasing functions)

பெருமம் மற்றும் சிறுமம் என்ற கருத்துருக்களை அறிந்துகொள்வதற்கு முன் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்புக்கான வளைவரையின் தன்மையை வகையீடல் மூலம் எவ்வாறு காண்பது என்பதை பயில்வோம்.

(i) கூடும் சார்பு: (Increasing function)

$y = f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில்

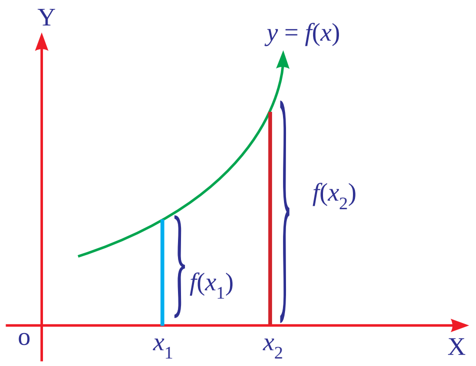
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$

என அமையுமானால், அது கூடும் சார்பு எனப்படும்.

$y = f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில்

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$

என இருப்பின், அது திட்டமாகக் கூடும் சார்பு எனப்படும்.



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

திட்டமாகக் கூடும் சார்பு

படம்: 6.7

(ii) குறையும் சார்பு: (Decreasing function)

$y = f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில்

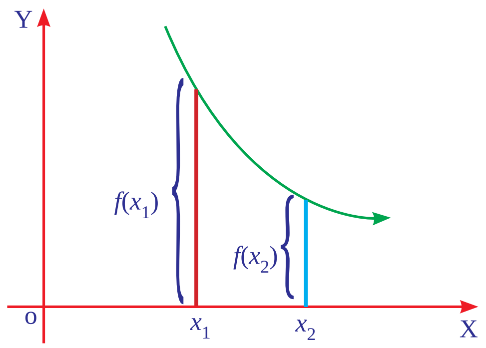
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$

என இருப்பின், அது குறையும் சார்பு எனப்படும்.

$y = f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில்

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$

என இருப்பின், அது திட்டமாகக் குறையும் சார்பு எனப்படும்.



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

திட்டமாகக் குறையும் சார்பு

படம்: 6.8

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 147 20-04-2020 04:56:45 PM

குறிப்பு

கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளி முழுவதும் ஒரு சார்பு கூடும் சார்பாகவோ அல்லது குறையும் சார்பாகவோ இருந்தால் அது ஓரியல்புச் சார்பு என அழைக்கப்படும்.

கூடும் மற்றும் குறையும் சார்புக்கான வகைக்கெழுச் சோதனை : (Derivative test for increasing and decreasing function)

தேற்றம்: 6.1 (நிரூபணமின்றி)

f என்ற ஒரு சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதாகவும் (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத் தக்கதாகவும் இருந்து, மேலும்

(i) $f'(x) \geq 0$ எனில் f ஆனது $[a.b]$ யில் கூடும் சார்பு அல்லது ஏறும் சார்பு எனப்படும்.

(ii) $f'(x) \leq 0$ எனில் f ஆனது $[a.b]$ யில் குறையும் சார்பு அல்லது இறங்கும் சார்பு எனப்படும்.

மேற்குறிப்பு

(i) (a,b)–ல் உள்ள x–ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f'(x) > 0$ எனில் (a,b)–ல் f ஒரு திட்டமான கூடும் சார்பு எனப்படும்.

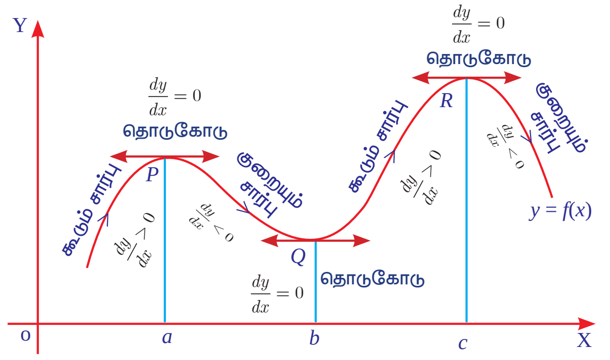
(ii) (a,b)–ல் உள்ள x –ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f'(x) < 0$ எனில் (a,b)–ல் f ஒரு திட்டமான குறையும் சார்பு எனப்படும்.

(iii) $f'(x) = 0$ எனில் $f(x)$ ஒரு மாறிலிச் சார்பு எனப்படும்.

6.2.2 சார்பின் தேக்கநிலை மதிப்பு (Stationary Value of a function)

$f(x)$ என்ற சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதாகவும் (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத் தக்கதாகவும் கொள்க.

$x = a$ –ல் $f(x)$ தேக்கநிலையை அடைகிறது எனில் $f'(a)=0$ என அமைய வேண்டும். $f(x)$ –ன் தேக்கநிலை மதிப்பு $f(a)$ எனவும், $(a, f(a))$ என்பது தேக்கநிலைப் புள்ளி எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.



P, Q, R என்பன தேக்க நிலைப் புள்ளிகள்

படம் 6.9

வரைபடம் 6.9 –ல் $y = f(x)$என்ற சார்பு $x = a$, $x = b$ மற்றும் $x = c$ என்ற மதிப்புகளில் தேக்க நிலை அடைகிறது. அந்த புள்ளிகளில் $f'(x) = 0$ என இருக்கும். அவற்றின் வழியாக வரையப்படும் தொடுகோடுகள் x–அச்சுக்கு இணையாக அமையும்.

குறிப்பு:

பொருளாதார புள்ளி விவரங்களுக்கு தொடர்புடைய வரைபடத்தின் மூலம், வியாபாரத்தின் போக்கை அறிந்து கொண்டு முன்னேற்பாடுடன் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.18

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x,\ x \in R$ என்ற சார்பு R – ல் திட்டமாக கூடும் சார்பு என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$= 3x^2 - 6x + 3 + 1$$

$$= 3(x-1)^2 + 1 > 0, \text{ அனைத்து } x \in R$$

அதாவது, இங்கு அனைத்து $x \in R$ –க்கும் $f'(x) > 0$ ஆகும்.

$\therefore f$ என்ற சார்பு $(-\infty,\infty)$ என்ற இடைவெளியில் திட்டமாகக் கூடும் சார்பாகும்.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 148 20-04-2020 04:56:46 PM

எடுத்துக்காட்டு 6.19

$f(x) = x^2 - 4x + 6$ என்ற சார்பு எந்தெந்த இடைவெளிகளில் திட்டமாகக் கூடும் அல்லது திட்டமாகக் குறையும் எனக் காண்க.

தீர்வு :

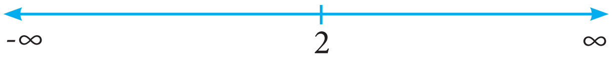
$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

x –ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த,

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2.$$



படம் : 6.10

$x = 2$ என்ற புள்ளி மெய்யெண் கோட்டை $(-\infty, 2)$ மற்றும் $(2, \infty)$ என பிரிக்கின்றது.

[இடைவெளிகளில் $f'(x)$ –க்கான குறியீடு (+அல்லது–)யைக்காண,அவ்விடைவெளிகளில் இருந்து x–க்கான ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை $f'(x)$ -ல் பிரதியிட்டு காணலாம்.]

இடை வெளிகள்	$f'(x) = 2x - 4$ –ன் குறியீடு	சார்பின் தன்மை
$(-\infty, 2)$	< 0	$f(x)$ ஆனது $(-\infty, 2)$ –ல் திட்டமாகக் குறையும் சார்பு
$(2, \infty)$	> 0	$f(x)$ ஆனது $(2, \infty)$ –ல் திட்டமாகக் கூடும் சார்பு

அட்டவணை:6.1

எடுத்துக்காட்டு 6.20

$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ என்ற சார்பு எந்தெந்த இடைவெளிகளில் கூடும் அல்லது குறையும் சார்பு எனக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$$

$$= 12(x^2 - x - 6)$$

$$= 12(x-3)(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3 \text{ (or) } x = -2$$

$x = 3$ மற்றும் $x = -2$ என்ற புள்ளிகளில் $f(x)$ தேக்கநிலையை அடையும்.

படம்: 6.11

இங்கு மெய்யெண் கோடு $(-\infty, -2), (-2, 3)$ மற்றும் $(3, \infty)$ என மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

இடைவெளிகள்	$f'(x)$ –ன் குறியீடு	கூடும் / குறையும் இடைவெளி
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	இடைவெளி $(-\infty, -2]$ –ல் கூடும் சார்பு
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	இடைவெளி $[-2, 3]$ –ல் குறையும் சார்பு
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	இடைவெளி $[3, \infty)$ –ல் கூடும் சார்பு

அட்டவணை: 6.2

எடுத்துக்காட்டு 6.21

$f(x) = x^2 + 2x - 5$ என்ற சார்பின் தேக்கநிலைப் புள்ளி மற்றும் தேக்கநிலை மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 \qquad \ldots (1)$$

x– ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தும் போது நாம் பெறுவது

$$f'(x) = 2x + 2$$

தேக்கநிலைப் புள்ளியில், $f'(x) = 0$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 149 20-04-2020 04:56:47 PM

$\Rightarrow\ 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow\ x = -1$

$x = -1$ –ல் $f(x)$ ஆனது தேக்கநிலை மதிப்பை பெற்றிருக்கும்

$x = -1$, எனில், சமன்பாடு (1) –ல் இருந்து

$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 5$

$= -6$

$f(x)$ இன் தேக்கநிலை மதிப்பு $= -6$

எனவே தேக்கநிலைப் புள்ளி $(-1,-6)$ மற்றும் தேக்கநிலை மதிப்பு -6 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.22

$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$ என்ற சார்பின் தேக்கநிலைப் புள்ளி மற்றும் தேக்கநிலை மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1.$$

x –ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தும் போது நாம் பெறுவது

$$f'(x) = 6x^2 + 18x + 12$$

$$= 6(x^2 + 3x + 2)$$

$$= 6(x+2)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6\,(x+2)(x+1) = 0$$

$\Rightarrow x + 2 = 0$ (அ) $x + 1 = 0.$

$x = -2$ (அ) $x = -1$

$x = -2$ மற்றும் $x = -1$ ல் $f(x)$ ஆனது தேக்கநிலைப் புள்ளிகளை பெறுகிறது.

$x = -2$ மற்றும் $x = -1$ என $f(x)$ இல் பிரதியிடும் போது தேக்கநிலை மதிப்புகள் கிடைக்கிறது.

$x = -2$ எனில்,

$$f(-2) = 2(-8) + 9(4) + 12(-2) + 1$$

$$= -3$$

$x = -1$ எனில்,

$$f(-1) = 2(-1) + 9(1) + 12(-1) + 1$$

$$= -4$$

தேக்கநிலைப் புள்ளிகள் $(-2,-3)$ மற்றும் $(-1,-4)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.23

ஒரு நிறுவனம் x அலகுகள் உற்பத்தி செய்வதற்கான இலாபச் சார்பு $P(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x.$ அந்த நிறுவனம் இலாபத்தில் இயங்குகிறதா, இல்லையா என கணிக்கவும்.

தீர்வு :

$$P(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x.$$

$$P'(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$= (x+1)^2$$

x –ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $P'(x) > 0$ என்பது தெளிவாகிறது.

$\therefore$ நிறுவனமானது இலாபத்தில் இயங்குகிறது.

> **முக்கியக் குறிப்பு :**
>
> $R(x)$ மற்றும் $C(x)$ என்பன முறையே x அலகுகள் உற்பத்தி செய்வதற்கான வருவாய் மற்றும் செலவுச் சார்பு என்க. அனைத்து $x > 0$ –க்கும் $P(x) = R(x) - C(x)$ என்பது பெரும மதிப்பை அடையும்பொழுது இறுதி நிலை வருவாய் = இறுதி நிலைச் செலவு என அமையும், அதாவது $R'(x) = C'(x)$ எனும் பட்சத்தில் மேற்கூறிய கருத்து உண்மையாகும். தேக்க நிலைப் புள்ளியில் இலாபம் பெருமத்தை அடைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.24

$C(x) = \frac{x^2}{6} + 5x + 200$ மற்றும் $p(x) = 40 - x$ என்பது x அலகுகள் உற்பத்தி செய்வதற்கான மொத்த செலவு சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு எனில் பெரும லாபம் கிடைப்பதற்கான உற்பத்தியின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$C(x) = \frac{x^2}{6} + 5x + 200 \qquad \ldots (1)$$

மற்றும் $p(x) = 40 - x \qquad \ldots (2)$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 150 20-04-2020 04:56:47 PM

இறுதிநிலை வருவாய் $[R'(x)]$ = இறுதிநிலை செலவு $[C'(x)]$ என இருக்கும்பொழுது, இலாபம் பெருமமாகிறது.

சமன்பாடு (1)–லிருந்து $C'(x) = \frac{2x}{6} + 5$

$= \frac{x}{3} + 5$

சமன்பாடு (2)–லிருந்து $R = p \cdot x$

$= 40x - x^2$

$R'(x) = 40 - 2x$

எனவே $40 - 2x = \frac{x}{3} + 5$

$x = 15$

$x = 15$ – ல் இலாபம் பெருமத்தை அடைகிறது.

6.2.3 இடம் சார்ந்த பெருமம் மற்றும் சிறுமம் , மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறுமம்: (Local and Global (Absolute) Maxima and Minima)

வரையறை 6.1:(Definition)

இடம் சார்ந்த பெருமம் மற்றும் இடம்சார்ந்த சிறுமம்

c–ஐ உள்ளடக்கிய ஏதேனும் ஒரு திறந்த இடைவெளி (a,b)–ல் $f(c) \geq f(x)$ அனைத்து $x \in (a,b)$ எனுமாறு அமைந்தால் f ஆனது இடம்சார்ந்த பெருமம் (அல்லது சார்ந்த பெருமம்) பெற்றிருக்கிறது எனலாம்.

c–ஐ உள்ளடக்கிய ஏதேனும் ஒரு திறந்த இடைவெளி (a,b) –ல் $f(c) \leq f(x)$ அனைத்து $x \in (a,b)$ எனுமாறு அமைந்தால் f ஆனது இடம்சார்ந்த சிறுமம் (அல்லது சார்ந்த சிறுமம்) பெற்றிருக்கிறது எனலாம்.

வரையறை : 6.2 (Definition)

மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மற்றும் மீச்சிறு சிறுமம்:

f –ன் அரங்கத்திலுள்ள அனைத்து x–க்கும், $f(c) \geq f(x)$ என இருக்குமானால் f ஆனது c–யில் **மீப்பெரு பெருமத்தை** அடைகிறது என்போம். $f(c)$ என்பது f–ன் அரங்கத்தில் f–ன் மீப்பெரு மதிப்பு ஆகும்.

இதேபோல் f –ன் அரங்கத்திலுள்ள அனைத்து x –க்கும், $f(c) \leq f(x)$ என அமையுமானால் f ஆனது c–ல் **மீச்சிறு சிறுமத்தை** அடைகிறது எனலாம். $f(c)$ என்பது f –ன் அரங்கத்தில் f–ன் மீச்சிறு மதிப்பாகும். f –ன் மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகள் என்பன முறையே முகட்டுப் புள்ளிகள்(அறுதி நிலைப் புள்ளிகள்) எனப்படும்.

குறிப்பு:

(a,b) –ல் f என்ற சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகள் முழுதளாவிய பெருமம் மற்றும் முழுதளாவிய சிறுமம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

இடம்சார்ந்த பெருமம் மற்றும் இடம் சார்ந்த சிறுமம் ஆகியவற்றிற்கான நிபந்தனைகள்:

c –ஐ உள்ளடக்கிய (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் f என்ற சார்பானது வகையிடத்தக்கது மற்றும் $f''(c)$ காணத்தக்கது என்க.

(i) $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) > 0$, எனில் f ஆனது c –ல் இடம் சார்ந்த சிறுமத்தை அடைகிறது.

(ii) $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) < 0$, எனில் f ஆனது c –ல் இடம் சார்ந்த பெருமத்தை அடைகிறது.

குறிப்பு:

பொருளாதாரத்தில், $y = f(x)$ என்பது செலவுச் சார்பு அல்லது வருவாய் சார்பை குறிக்கும் எனில், $\frac{dy}{dx} = 0$, என்ற புள்ளியில், செலவு அல்லது வருவாய் பெருமம் அல்லது சிறுமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.25

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ என்ற சார்பிற்கு அறுதி நிலை (முகட்டு) மதிப்புகளைக் காண்க.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 151 20-04-2020 04:56:48 PM

தீர்வு :

$f(x) = 2x^3+3x^2-12x$ … (1)

$f'(x) = 6x^2+6x-12$

$f''(x) = 12x + 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2+6x-12 = 0$

$\Rightarrow 6(x^2+x-2) = 0$

$\Rightarrow 6(x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = -2 ; x = 1$

$x = -2$ எனில்

$f''(-2) = 12(-2) + 6$

$= -18 < 0$

$x=-2$ –ல் $f(x)$ ஆனது இடம் சார்ந்த பெருமத்தை அடைகிறது.

மேலும் (1) –ல் $x = -2$-ஐ பிரதியிட, இடம் சார்ந்த பெருமத்தை அடையலாம்.

$f(-2) = 2(-2)^3+3(-2)^2-12(-2)$

$= -16+12+24$

$= 20.$

$x = 1$ எனில்

$f''(1) = 12(1) + 6$

$= 18 > 0$

$x = 1$–ல் $f(x)$ ஆனது இடம் சார்ந்த சிறுமத்தை அடைகிறது.

மேலும் (1)–ல் $x = 1$ –ஐப் பிரதியிட, இடம் சார்ந்த சிறுமத்தை அடையலாம்.

$f(1) = 2(1) + 3(1) - 12(1)$

$= -7$

அறுதி நிலை (முகட்டு) மதிப்புகள் – 7 மற்றும் 20 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.26

$[-2,1]$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)=3x^5-25x^3+60x+1$ என்ற சார்பிற்கு முழுதளாவிய பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$f(x) = 3x^5-25x^3+60x+1$ … (1)

$f'(x) = 15x^4-75x^2+60$

$= 15(x^4-5x^2+4)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 15(x^4-5x^2+4) = 0$

$\Rightarrow (x^2-4)(x^2-1) = 0$

$x = \pm 2$ (அ) $x = \pm 1$

$-2, \pm 1 \in [-2, 1]$ மற்றும் $2 \notin [-2,1]$

$x = -2$ எனில்

$f(-2) = 3(-2)^5 - 25(-2)^3 + 60(-2) + 1$

$= -15$

$x = 1$ எனில்

$f(1) = 3(1)^5 - 25(1)^3 + 60(1) + 1$

$= 39$

$x = -1$ எனில்

$f(-1) = 3(-1)^5 - 25(-1)^3 + 60(-1) + 1$

$= -37.$

மீப்பெரு பெருமம் = 39

மீச்சிறு சிறுமம் = –37

6.3 பெருமம் மற்றும் சிறுமம் ஆகியவற்றின் பயன்பாடுகள் (Applications of maxima and minima)

6.3.1 பெரும இலாபம் மற்றும் சிறுமச்செலவு சார்ந்த கணக்குகள்: (Problems on profit maximization and minimization of cost function)

எடுத்துக்காட்டு 6.27

குறிப்பிட்ட செலவுச் சார்பு $C = 56 - 8x + x^2$ ஆகும். இங்கு C என்பது ஒரு அலகிற்கான செலவு மற்றும் x என்பது உற்பத்தி செய்யப்படும்

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 152 20-04-2020 04:56:49 PM

மொத்த அலகுகள் என்க. உற்பத்திச் செலவின் மீச்சிறு மதிப்பினையும் அதற்குத் தகுந்த உற்பத்தி அளவுகளின் எண்ணிக்கையும் காண்க

தீர்வு:

$C = 56 - 8x + x^2$

x – ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dC}{dx} = -8 + 2x$$

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 2$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow -8 + 2x = 0$$

$\therefore\ x = 4$

$x = 4$ எனில் $\frac{d^2C}{dx^2} = 2 > 0$

$\therefore\ x = 4$–ல் C ஆனது பெருமத்தை அடைகிறது.

$\therefore$ உற்பத்தி செலவின் மீச்சிறு மதிப்பு

$$C(4) = 56-32+16 = 40$$

மேலும் அதற்கான உற்பத்தி அளவு $x = 4$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 6.28

ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்தச் செலவுச் சார்பானது $C(x) = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 28x + 10$, இங்கு x ஆனது உற்பத்தி ஆகும். உற்பத்தியின் ஒவ்வொரு அலகிற்கும் ₹ 2 வீதம் விதிக்கப்பட்ட வரியை உற்பத்தியாளர் தன் செலவோடு இணைத்துக் கொள்கிறார். வியாபாரச் சந்தைக்கான தேவைச் சார்பு $p = 2530 - 5x$, என கொடுக்கப்பட்டால், பெரும இலாபம் அடைவதற்கான உற்பத்தியின் அளவையும், விலையையும் காண்க. இங்கு p என்பது உற்பத்தியின் ஒவ்வொரு அலகின் விலையைக் குறிகிறது.

தீர்வு:

x அலகுகள் உற்பத்திற்கான மொத்த வருவாய்: $R = p\,x$

$$= (2530 - 5x)x$$

$$= 2530x - 5x^2$$

அலகிற்கான வரி ₹ 2 வீதம் செலுத்தப்பட்ட வரித் தொகை $= 2x$.

$\therefore$ வரி விதிக்கப்பட்ட பின் மொத்தச் செலவு

$$C(x) + 2x = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 28x + 10 + 2x$$

இலாபம் = மொத்தவருவாய்–(மொத்தசெலவு + வரி)

$$P = (2530-5x)x - \left(\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 28x + 10 + 2x\right)$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2500x - 10$$

$$\frac{dP}{dx} = -x^2 + 2500$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2x$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow 2500 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 2500$$

$\therefore\ x = 50$ (-50 ஏற்புடையதல்ல)

$x = 50$ எனில், $\frac{d^2P}{dx^2} = 2 \times 50 < 0$

$x = 50$ –ல் P ஆனது பெருமம் அடைகிறது

$$P = 2530 - 5(50)$$

$$= ₹\ 2280$$

எடுத்துக்காட்டு 6.29

உற்பத்திக்கான மேற்பார்வை செலவு ₹ 1600. ஒரு அலகிற்கான பொருட்செலவு ₹ 30 மற்றும் x அலகுகள் உற்பத்தி செய்வதற்கான ஊதியம் ₹$\left(\frac{x^2}{100}\right)$ ஆகும். சராசரி செலவு சிறுமமாக இருக்க எத்தனை அலகுகள் உற்பத்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தகவலின்படி, ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் x அலகுகள் தயாரிப்பதற்கான மொத்த செலவு $C(x)$ = (உற்பத்தி செய்வதற்கான ஊதியம்) + (பொருட்செலவு) + (உற்பத்திக்கான மேற்பார்வைச் செலவு)

$$C(x) = \frac{x^2}{100} + 30x + 1600$$

$$AC = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{100} + 30x + 1600}{x}$$

$$= \frac{x}{100} + 30 + \frac{1600}{x}$$

$$\frac{d(AC)}{dx} = \frac{1}{100} - \frac{1600}{x^2}$$ மற்றும்

$$\frac{d^2(AC)}{dx^2} = \frac{3200}{x^3}$$

$$\frac{d(AC)}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{1600}{x^2} + \frac{1}{100} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{1600}{x^2} \Rightarrow x^2 = 160000$$

$\therefore \quad x = 400$ (–400 ஏற்புடையதல்ல)

$x = 400$ எனில், $\frac{d^2(AC)}{dx^2} = \frac{3200}{400^3} > 0$

அதாவது, $x = 400$ எனில் AC ஆனது சிறுமத்தை அடைகிறது.

சராசரி செலவு சிறுமமாக இருக்க 400 அலகுகள் உற்பத்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

பயிற்சி 6.2

1. x அலகுகள் கொண்ட ஒரு பொருளுக்கான உற்பத்தி மற்றும் சந்தைப்படுத்தலுக்கான சராசரிச் செலவுச் சார்பு $AC = 2x - 11 + \frac{50}{x}$. AC ஆனது கூடும் சார்பாக அமைவதற்கான உற்பத்தி அளவு (x) ஏற்கும் மதிப்புகளைக் காண்க.

2. ஒரு தொலைக்காட்சி உற்பத்தியாளர் x எண்ணிக்கை கொண்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்வதற்கும், சந்தைப்படுத்துவதற்குமான செலவுச் சார்பு $C(x) = 300x^2 + 4200x + 13,500$. ஒவ்வொரு தொலைக்காட்சி பெட்டியும் ₹ 8,400–க்கு விற்பனை செய்யப்படுகிறது எனில், நிறுவனத்தின் இலாபம் அதிகமாகிறது என நிறுவுக.

3. ஒரு முற்றுரிமையாளரின் தேவைப்பாட்டின் வளைவரை $x = 106 - 2p$ மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பின் வளைவரை $AC = 5 + \frac{x}{50}$. இங்கு p என்பது உற்பத்திற்கான ஒரு அலகு விலை மற்றும் x என்பது உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை ஆகும். மொத்த வருவாய் $R = px$, எனில் அதிகப்படியான இலாபம் தரும் உற்பத்தி அளவு மற்றும் மீப்பெரு இலாபம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. ஒரு சுற்றுலா ஏற்பாட்டாளர் ஒரு பயணிக்கு ₹ 136 வீதத்தில் 100 பயணிகளுக்கு மேற்பட்ட ஒவ்வொரு பயணிகளுக்கும் 40 பைசாக்கள் வீதம் தள்ளுபடி தருகிறார். குறைந்தது 100 பயணிகள் கலந்து கொண்டால்தான் சுற்றுலா மேற்கொள்ளப்படும். அவர் மீப்பெரு தொகையைப் பெறுவதற்கான பயணிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

5. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ –க்கு இடம் சார்ந்த சிறுமம் மற்றும் இடம் சார்ந்த பெருமம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. x எனும் ஒரு பொருளின் மொத்த வருவாய் சார்பானது $R = 15x + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{36}x^4$ எனில், சராசரி வருவாயின் மீப்பெரு புள்ளியில் சராசரி வருவாயானது இறுதி நிலை வருவாய்க்குச் சமம் என நிறுவுக.

6.3.2 சரக்கு நிலைக் கட்டுப்பாடு (Inventory control)

நடைமுறை மற்றும் எதிர்கால தேவைக்கேற்ப மூலப்பொருட்களைக் கையிருப்பு செய்வதே சரக்குநிலைக் கட்டுப்பாடு ஆகும். மூலப்பொருட்கள், மற்றும் முழுமையடைந்த உற்பத்தி பொருட்கள் என்பன சரக்கு இருப்பிற்கான எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

தேவையான மூலப்பொருட்களில் தேவையான அளவை சீரான இடைவெளியில் கோருதல் மற்றும் பெறுதல் மூலம், கோருதல் செலவை குறைப்பதே சரக்குநிலைக் கணக்கின் உள் நோக்கமாகும்.

சரக்கு நிலைத் தீர்மானங்கள்: (An inventory decisions)

ஒவ்வொரு முறையும் சரக்கின் அளவானது,

1. எவ்வளவு கோரப்பட வேண்டும்?
2. அவை எப்பொழுது கோரப்பட வேண்டும்?

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 154 20-04-2020 04:56:55 PM

சரக்கு நிலை கணக்கில் விலைக் காரணிகளின் பங்கு (Costs involved in an inventory problems)

(i) தக்க வைத்தல் செலவு (அல்லது) இருப்புச் செலவு (அல்லது) சரக்குத் தேக்கச் செலவு C_1 (Holding cost or storage cost or inventory carrying cost)

ஒரு அலகு அளவு கொண்ட பொருட்களை ஒரு அலகு கால அளவிற்கு தேக்கிவைப்பது (அல்லது) கையிருப்பு செய்வதின் தொடர்பாக ஏற்படும் செலவே சரக்கு தேக்கச் செலவாகும்.

(ii) பற்றாக்குறை விலை: (Shortage cost : C_2)

சரக்கு இருப்பு வைப்பதற்கான கொள்முதல் பொருளின் பற்றாக்குறையால் ஏற்படும் அதிகப்படிச் செலவு பற்றாக்குறைச் செலவாகும்.

(iii) உட்கட்டமைப்புச் செலவு (அல்லது) கோருதல் செலவு (அல்லது) கொள்முதல் செலவு C_3 (Setup cost or ordering cost or procurement cost)

பொருட்களை வாங்குவதற்கான கோருதல் வைப்புச் செலவு அல்லது உற்பத்தியின் வசதிக்காக, உற்பத்தி உபகரணங்களை மாற்றி அமைப்பதற்கான ஆரம்ப கட்டச் செலவு.

6.3.3 மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு (Economic Order Quantity (EOQ)):

வருடாந்திர சரக்குத் தேக்க செலவு மற்றும் நிச்சயிக்கப்பட்ட சூழ்நிலையில், வருடாந்திர தேவைக்கேற்ப நிறுவன அமைப்புச் செலவு போன்றவைகளை குறைப்பதற்குத் ஏற்ற வகையில் கோருதல் அளவை, சீர்படுத்துவதே மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு ஆகும்.

> சூத்திரத்தை தருவிக்கும் முறை கற்றல் திறனை மேம்படுத்துவதற்காகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தருவிக்கும் முறை தேர்வில் கேட்கப்படமாட்டாது.

தேவை தெரிந்தும், குறைபாடுகளின்றியும், சீரானதாகவும் உள்ள பொழுது, பொருளாதார நோக்கின் கீழ் அமைந்த கோருதல் அளவையும், அடுத்தடுத்த சாதகமான இடைவெளிகளில் கோருதல் அளவைத் தீர்மானிப்பதற்கும், இந்த வாய்பாடு பயன்படுகிறது.

EOQ ஐப் பெற பின்வருவனவற்றைக் கருதுவோம்.

(i) ஒரு கால அளவிற்குச் சீரான தேவை R அலகுகள் என்க.

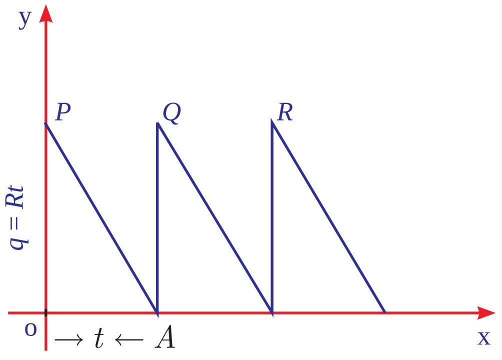
(ii) சரக்கு நிலை உருப்படிகளின் அளிப்பு அல்லது உற்பத்தி உடனடியாகப் பெறப்படுகிறது என்க.

(iii) சரக்குத் தேக்கச் செலவு ₹C_1 என்க.

(iv) ஒரு ஆண்டில் கோரப்படும் எண்ணிக்கை 'n' எனவும், ஒவ்வொரு முறையும் 'q' அலகுகள் கோரப்படுகின்றன (உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன) என்க.

(v) ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் கோருதல் செலவு ₹C_3 எனவும், அடுத்தடுத்த இரு கோருதல்களுக்கு இடைப்பட்ட கால அளவு 't' என்க.

இந்த கட்டமைப்பின் விளக்கப் படமானது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது (Model)



படம். 6.12

ஓர் உற்பத்தி ஓட்டமானது t இடைவெளியில் அமைகிறது எனில், ஒரு தேவையின் அளவு $q = Rt$ யானது ஒவ்வொரு ஓட்டத்திற்கும் உற்பத்தி செய்ய வேண்டும். சிறிய கால அளவு dt –ல் கையிருப்பானது $Rt\,dt$, என்பதால் கால அளவு t –ல் கையிருப்பானது

$$\int_0^t Rt\,dt = \frac{1}{2}Rt^2$$

$$= \frac{1}{2}qt \quad (\because Rt = q)$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 155 20-04-2020 04:56:57 PM

= சரக்கு நிலை முக்கோணம் OAP–ன் பரப்பளவு (படம் 6.12 –ஐ பார்க்க)

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் சரக்குத் தேக்கச் செலவு = $\frac{1}{2}C_1Rt^2$

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் கோருதல் செலவு = C_3

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் மொத்த செலவு = $\frac{1}{2}C_1Rt^2 + C_3$

ஒரு கால அளவிற்கான மொத்த சராசரி செலவு

$$C(t) = \frac{1}{2}C_1Rt + \frac{C_3}{t} \quad ..(1)$$

$$\frac{d}{dt}C(t) = \frac{1}{2}C_1R - \frac{C_3}{t^2} \quad ...(2)$$

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = \frac{2C_3}{t^3} \quad ...(3)$$

$C(t)$ ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெற,

$\frac{d}{dt}C(t) = 0$ அல்லது $\frac{d^2}{dt^2}C(t) > 0$

$$\frac{d}{dt}C(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}C_1R - \frac{C_3}{t^2} = 0$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$$

$t = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$ எனும்போது,

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = \frac{2C_3}{\left(\frac{2C_3}{C_1R}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

இவ்வாறாக, உகந்த (optimum) கால இடைவெளி $t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$ –ல் $C(t)$ ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

∴ மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு :

$$EOQ = q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$$

இதுவே வில்சனின் உகந்த கோருதல் அளவைக் கணக்கிடும் சூத்திரமாகும்.

(i) ஒரு ஆண்டிற்கு, உகந்த கோருதலின் எண்ணிக்கை

$$n_0 = \frac{\text{தேவை}}{EOQ} = R\sqrt{\frac{C_1}{2C_3R}} = \sqrt{\frac{RC_1}{2C_3}} = \frac{1}{t_0}$$

(ii) ஓர் அலகு காலத்தில், சிறும சரக்கு நிலைச் செலவு, $C_0 = \sqrt{2C_1C_3R}$

(iii) சரக்குத் தேக்கச் செலவு $= \frac{q_0}{2} \times C_1$ மற்றும்

கோருதல் செலவு $= \frac{R}{q_0} \times C_3$

(iv) EOQ –ல், கோருதல் செலவு = சரக்கு தேக்கச் செலவு.

(v) மொத்த உகம செலவு $= Rp + \sqrt{2C_1C_3R}$.

எடுத்துக்காட்டு 6.30

ஒரு நிறுவனம் வருடத்திற்கு 48000 அலகுகள் கச்சாப் பொருட்களைப் பயன்படுத்துகிறது. அவற்றின் ஓர் அலகின் விலை ₹ 2.50 ஒரு கோருதலுக்கானக் கோருதல் செலவு ₹ 45. ஓர் ஆண்டிற்கு தேக்கச் செலவு ஓர் அலகு விலையில் 10.8 % ஆகும் எனில் மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு, ஒரு ஆண்டிற்கான கோருதல்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் இடைப்பட்ட கால அளவு ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவில், சரக்கு தேக்கச் செலவும், கோருதல் செலவும் சமம் என்பதை சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு:

இங்கு, தேவை $R = 48000$

தேக்கச் செலவு $C_1 = 2.50$ இல் 10.8%

$$= \frac{10.8}{100} \times 2.50 = 0.27$$

கோருதல் செலவு $C_3 = 45$

மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு $q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 45 \times 48000}{0.27}} = 4000 \text{ அலகுகள்}$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 156 20-04-2020 04:57:07 PM

ஒரு ஆண்டுக்கான கோருதல்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{R}{q_0}$

$$= \frac{48000}{4000} = 12$$

ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் இடைப்பட்டக் கால அளவு : $t_0 = \dfrac{q_0}{R}$

$$= \frac{1}{12} = 0.083 \text{ ஆண்டு}$$

மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவில், சரக்கு தேக்கச் செலவு $= = \dfrac{q_0}{2} \times C_1$

$$= \frac{4000}{2} \times 0.27 = ₹\ 540$$

மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவில், சரக்கு கோருதல் செலவு $= \dfrac{R}{q_0} \times C_3$

$$= \frac{48000}{4000} \times 45 = ₹\ 540$$

எனவே மிகு ஆதாய கோருதல் அளவில், சரக்கு தேக்கச் செலவும், கோருதல் செலவும் சமம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.31

ஒரு உற்பத்தியாளர் தன்னுடைய வாடிக்கையாளர்களுக்கு வருடந்தோறும் 12,000 அலகுகள் வழங்குவதற்கு ஒத்துக் கொண்டுள்ளார். கோருதல் செலவு (C_3) ₹ 100 மற்றும் சரக்குத் தேக்கச் செலவு, ஒரு அலகிற்கு, ஒருமாதத்திற்கு ₹0.80 எனக்கணக்கிடப்படுகிறது. பற்றாக்குறை அனுமதிக்கப் படுவதில்லை மற்றும் கோருதலுக்கான வழங்கல் உடனுக்குடன் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது எனில்,

(i) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு காண்க.

(ii) இரண்டு கோருதலுக்கு இடைப்பட்டக் கால அளவு

(iii) ஆண்டு ஒன்றுக்கு வழங்கப்படும் கோருதலின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

R = வருடத் தேவை = 12,000 அலகுகள்

C_3= கோருதல் செலவு = ₹ 100 கோருதல் ஒன்றிற்கு

C_1= சரக்குத் தேக்கச் செலவு = ₹ 0.80 /லிட்டர் / மாதம் ஒன்றிற்கு

= ₹ 0.80×12 வருடத்திற்கு

= ₹ 9.6 வருடத்திற்கு

(i) EOQ = மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு

$$= \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 12000}{9.6}}$$

= 500 அலகுகள்

(ii) ஒரு வருடத்திற்கான உகந்த கோருதலின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{\text{தேவை}}{EOQ} = \dfrac{12,000}{500} = 24$

(iii) உகந்த நேரம், வருடம் ஒன்றிற்கு

$$= \frac{1}{t_0} = \frac{1}{24} \text{ வருடம்} = \frac{12}{24} \text{ மாதம்}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ மாதம்} = 15 \text{ நாட்கள்}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.32

ஒரு நிறுவனம் மாதம் ஒன்றிற்கு 1000 அலகுகள் சீரான விலையில் வழங்குகிறது மற்றும் ஒவ்வொரு முறையும் உற்பத்தி செலவு ₹ 200–ல் ஆரம்பிக்கிறது. ஒரு பொருளுக்கு ஒரு மாதத்திற்கு தேக்க நிலைச் செலவு ₹ 20 ஒரு ஓட்டத்திற்கு உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை உறுதி செய்யப்பட வேண்டும். 500, 600, 700 மற்றும் 800 ஆகிய ஓட்ட அளவிற்கு மொத்த உள்கட்டமைப்புச் செலவு மற்றும் சரக்கு நிலைத் தேக்கச் செலவுகளைக் காண்க. மேலும் EOQ சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, உற்பத்தி ஓட்டச் செலவைக் காண்க.

தீர்வு:

தேவை: $R = 1000$ அலகுகள் / மாதம்

கோருதல் செலவு : $C_3 =$ ₹ 200 ஒரு கோருதலுக்கு

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 157 20-04-2020 04:57:11 PM

சரக்குத் தேக்கச் செலவு : C_1= ₹ 20 / உருப்படி/ மாதம்

ஓட்ட அளவு q	கோருதல் செலவு $\frac{R}{q}\times C_3$	சரக்கு நிலைத் தேக்கச் செலவு $\frac{q}{2}\times C_1$	மொத்த சரக்கு நிலைச் செலவு
500	$\frac{1000}{500}\times 200 = 400$	$\frac{500}{2}\times 20 = 5000$	5400
600	$\frac{1000}{600}\times 200 = 333.3$	$\frac{600}{2}\times 20 = 6000$	6333.3
700	$\frac{1000}{700}\times 200 = 285.7$	$\frac{700}{2}\times 20 = 7000$	7285.7
800	$\frac{1000}{800}\times 200 = 250$	$\frac{800}{2}\times 20 = 8000$	8250

அட்டவணை : 6.3

$$EOQ = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}} = \sqrt{\frac{2\times 1000\times 200}{20}}$$

$$= \sqrt{20000}$$

= 141 அலகுகள் (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 6.33

ஒரு தயாரிப்பு நிறுவனம், சீரான விலையில் 4000 அலகுகள் உற்பத்தியினை வழங்குவதற்கு ஒத்துக்கொண்டுள்ளது. இருப்புச் செலவு அலகு ஒன்றிற்கு ஒரு ஆண்டிற்கு ₹ 50 மற்றும் சரக்கு இருப்புச் செலவு ஒரு ஓட்ட உற்பத்திற்கு ₹160 என தீர்மானிக்கப்பட்டுள்ளது. உற்பத்தியானது உடனடியாக தொடங்குவதற்கு ஒத்துக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது மற்றும் பற்றாக் குறை அனுமதிக்கப்படுவதில்லை எனில், ஓட்டம் ஒன்றுக்கு மொத்த சரக்கு நிலைச் செலவு, சிறுமம் அடைவதற்கு எத்தனை அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய வேண்டும் எனக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

வருடத் தேவை : $R = 4000$ அலகுகள்

இருப்புச் செலவு : $C_1 =$ ₹ 50

ஒரு உற்பத்திக்கு கோருதல் செலவு: $C_3 =$ ₹160

$$EOQ = \sqrt{\frac{2Rc_3}{c_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times 4000\times 160}{50}}$$ = 160 அலகுகள்.

∴ உற்பத்தி செலவினைக் குறைப்பதற்கு ஓட்டம் ஒன்றிக்கு 160 அலகுகள் உற்பத்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.34

ஒரு நிறுவனமானது 500 பெட்டிகளை மூன்று மாதங்களில் வாங்கியுள்ளது. ஒரு பெட்டியின் விலை ₹ 125, கோருதல் செலவு ₹150 ஆகும். ஓர் அலகிற்கு ஆண்டு சரக்கு நிலைச் தேக்கச் செலவு 20% –ஆக மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

(i) தற்போதைய சரக்கு நிலைக் கொள்கைக்கான மொத்த சரக்கு நிலை செலவுத் தொகையைக் காண்க.

(ii) EOQ –ன், அளவினை அலகு மதிப்பில் காண்க

(iii) மிகு ஆதாய கோருதல் அளவைப் பயன்படுத்தி வேலை செய்வதன் மூலம் எவ்வளவு பணம் சேமிக்க இயலும்?

தீர்வு:

கணக்கின்படி,

ஒரு கோருதலின் கோருதல் செலவு : $C_3 =$ ₹150

ஓர் அலகு கோருதலின் எண்ணிக்கை : $q = 500$ அலகுகள்

வருடத் தேவை $= 500 \times 4 = 2000$ அலகுகள்

தேக்கச் செலவு = ஓர் அலகுக்கு 20%

$$C_1 = \frac{20}{100}\times 125 = ₹25$$

(i) தற்போதைய சரக்குநிலை கொள்கைக்கான மொத்த சரக்கு நிலைச் செலவு

$$= \frac{R}{q}\times C_3 + \frac{q}{2}C_1$$

$$= \frac{2000}{500}\times 150 + \frac{500}{2}\times 25$$

= ₹ 6850

(ii) $$EOQ = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times 2000\times 150}{25}}$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 158 20-04-2020 04:57:14 PM

$= \sqrt{12 \times 2000}$

≈ 155 அலகுகள்.

(iii) சிறும சரக்கு நிலைச் செலவு $= \sqrt{2RC_3C_1}$

$= \sqrt{2 \times 2000 \times 150 \times 25}$

$=$ ₹ 3873.

மிகு ஆதாய கோருதல் அளவினைப் பயன்படுத்தி, நிறுவனம் சேமித்த பணம்

$= 6850 - 3873 =$ ₹2977

பயிற்சி 6.3

1. வருடாந்திர தேவை மற்றும் 3 பொருட்களின் ஓரலகு விலை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பொருட்கள்	வருடத் தேவை (அலகுகளில்)	அலகு விலை (ரூபாயில்)
A	800	0.02
B	400	1.00
C	13,800	0.20

கோருதல் செலவு ஒரு கோருதருலுக்கு ₹ 5 மற்றும் ஆண்டு இருப்புச் செலவு அலகு ஒன்றிற்கு ₹ 10 ஆகும் எனில்,

(i) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவினை அலகு மதிப்பில் காண்க.

(ii) சிறும சரக்கு நிலைச் செலவு.

(iii) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவைப் ரூபாயில் காண்க.

(iv) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவை வருட வழங்கல் அடிப்படையில் காண்க.

(v) ஒரு வருடத்திற்கான கோருதல்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

2. ஒரு விற்பனையாளர் தன்னுடைய வாடிக்கையாளருக்கு ஒரு வாரத்திற்கு 400 அலகுகள் கொண்ட பொருட்களை வழங்குகிறார். விற்பனையாளர் உற்பத்தியாளரிடமிருந்து ஓர் அலகு பொருளை ₹ 50 –க்கு வாங்குகிறார். உற்பத்தியாளரிடமிருந்து வாங்கப்படும் கோருதல் செலவு, ஒரு கோருதலுக்கு ₹ 75 ஒரு வருடத்திற்கான சரக்கு நிலை தேக்கச் செலவானது உற்பத்தி செலவின் 7.5 % எனில்

(i) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு (EOQ)

(ii) மொத்த உகமச் செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

6.4 பகுதி வகையிடல்: (Partial Derivatives)

பல மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு சார்பின் பகுதி வகையிடல் என்பது மாறிகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பொறுத்து (மற்ற மாறிகளை மாறிலிகளாகக் கொண்டு) சார்பின் வகையிடல் ஆகும். **இப்பகுதியில் நாம் இரண்டு சாரா மாறிகளை கொண்ட சார்புகளை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் வகையீடுகளை காண்போம்.**

$u = f(x, y)$ என்பது x , y என்ற இரண்டு சாரா மாறிகளைக் கொண்ட சார்பு என்க.

y –ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு x –ஐ பொறுத்து $u = f(x, y)$ –யை வகையீடு செய்து கிடைப்பது x –ஐ பொறுத்து u –ன் பகுதி வகைக்கெழு ஆகும். இதை $\frac{\partial u}{\partial x}$ அல்லது u_x எனும் குறியீட்டில் குறிப்பது வழக்கம்

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

என்ற எல்லை இருக்கும்போது, y என்பது மாறாதது, Δx என்பது x –ல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும். x –ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு y –ஐப் பொறுத்து $u = f(x, y)$ –ஐ வகையீடு செய்து கிடைப்பது y –ஐ பொறுத்த u –ன் பகுதி வகையிடல் ஆகும். இதை $\frac{\partial u}{\partial y}$ அல்லது u_y எனும் குறியீட்டில் குறிப்பது வழக்கம்

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 159 20-04-2020 04:57:16 PM

என்ற எல்லை இருக்கும்போது, x என்பது மாறாதது, $\triangle y$ என்பது y –ல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும்.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ –ஐ $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ (அல்லது) $\frac{\partial f}{\partial x}$ என எழுதலாம். இதே போல் $\frac{\partial u}{\partial y}$ –ஐ $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ (அல்லது) $\frac{\partial f}{\partial y}$ என எழுதலாம். பகுதி வகைக்கெழுக்களைக் காணும் முறையை பகுதி வகையிடல் என்கிறோம்.

6.4.1 தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழுக்கள்: (Successive partial derivatives)

$u = f(x,y)$ என்ற சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம். இதிலிருந்து $\frac{\partial u}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y}$ காணலாம். $\frac{\partial u}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y}$ என்பன, y–ன் சார்புகளாக இருந்தால் அவற்றை x மற்றும் y–ஐ பொறுத்து மீண்டும் பகுதி வகையிடலாம். இந்தப் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் $u(x, y)$–ன் இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்கள் ஆகும். அதாவது $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ஆகியவை இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்கள்.

இதேபோல் மூன்றாம் வரிசை, நான்காம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்களை (காண முடியுமானால்) நாம் காணலாம். தொடர்ச்சியாக பகுதி வகைக்கெழு காணும் முறையை தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழுக்கள் என்போம்.

$u = f(x,y)$ –ஐ x –ஐ பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்து மீண்டும் y, ஐ பொறுத்து பகுதி வகைப்படுத்தினால் நாம் பெறுவது $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ அதாவது $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ஆகும்.

அதே போல் $u = f(x,y)$–ஐ y–ஐ பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்து மீண்டும் x–ஐ பொறுத்த பகுதி வகையிடலை $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ அதாவது $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ என்று குறிப்போம்.

குறிப்பு:

$u(x,y)$ என்பது x மற்றும் y–ல் தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

சமபடித்தான சார்புகள்: (Homogeneous functions)

$u=f(x,y)$ என்பது x ,y என்ற இரு சாரா மாறிகளைக்கொண்ட சார்பு என்க.

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y),\ t > 0.$$

எனில் $u=f(x,y)$ என்பது 'n' படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனப்படும்.

6.4.2 ஆய்லரின் தேற்றம் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள் (Euler's theorem and its applications) இரு மாறிகளை கொண்ட ஆய்லரின் தேற்றம்: (Euler's theorem for two variables)

$u = f(x,y)$ என்பது x,y –ல் அமைந்த 'n', படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில்

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$$

எடுத்துக்காட்டு 6.35

$u = x^2(y-x) + y^2(x-y)$, எனில் $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-y)^2$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$u = x^2y - x^3 + xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 3x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

$$= -2\left(x^2 + y^2 - 2xy\right)$$

$$= -2(x-y)^2$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 160 20-04-2020 04:57:21 PM

எடுத்துக்காட்டு 6.36

$u = \log(x^2+y^2)$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$$u=\log(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}(2x)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot 2-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}(2y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)\cdot 2-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

எடுத்துக்காட்டு 6.37

$u = xy+\sin(xy)$, எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$u = xy+\sin(xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y+y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x+x\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= 1+x\left(-\sin\left(xy\right)\cdot y\right)+\cos\left(xy\right)$$

$$= 1-xy\sin(xy)+\cos(xy) \quad \text{.... (1)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y+y\cos\left(xy\right)\right)$$

$$= 1+\cos\left(xy\right)+y\left(-\sin\left(xy\right)x\right)$$

$$= 1-xy\sin\left(xy\right)+\cos\left(xy\right)\ldots \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.38

$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ என்ற சார்பிற்கு ஆய்லரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

$$u(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u(tx,ty)=\left(t^2x^2+t^2y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=t^{-1}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ u என்ற சமப்படித்தான சார்பின் படி -1 ஆகும்.

ஆய்லரின் தேற்றத்தின் படி,

$$x.\frac{\partial u}{\partial x}+y.\frac{\partial u}{\partial y}=(-1)u=-u$$

சரிபார்த்தல்:(Verification)

$$u=\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=\frac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\ x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$=(-1)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=(-1)u=-u$$

எனவே ஆய்லரின் தேற்றம் சரிப்பார்க்கபட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 6.39

$u=\log\frac{x^4+y^4}{x+y}$ என்க. ஆய்லரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=3$ எனக் காட்டுக.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 161 20-04-2020 04:57:28 PM

தீர்வு:

$$u = \log\frac{x^4+y^4}{x+y}$$

$$e^u = \frac{x^4+y^4}{x+y} = f(x,y) \qquad \ldots (1)$$

$f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x+y}$ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$f(tx,ty) = \frac{t^4x^4+t^4y^4}{tx+ty} = t^3\left(\frac{x^4+y^4}{x+y}\right) = t^3 f(x,y)$$

$\therefore$ f என்ற சமப்படித்தான சார்பின் படி 3 ஆகும்.

ஆய்லரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 3f$$

$f(x,y) = e^u$ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$x\cdot\frac{\partial e^u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial e^u}{\partial y} = 3e^u$$

$$\therefore e^u x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+e^u y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 3e^u$$

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 3$$

பயிற்சி 6.4

1. $z = (ax+b)(cy+d)$, எனில் $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ மற்றும் $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ என்பனவற்றைக் காண்க.
2. $u = e^{xy}$, எனில் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u(x^2+y^2)$ எனக்காட்டுக.
3. $u = x\cos y + y\cos x$ எனில், $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ என்பதைச் சரி பார்க்க.
4. $u = x^3+y^3+3xy^2$ என்ற சார்பிற்கு ஆய்லரின் தேற்றத்தைச் சரி பார்க்க.
5. $u = x^2y^3\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ என்க. ஆய்லரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $x.\dfrac{\partial u}{\partial x}+y.\dfrac{\partial u}{\partial y} = 5u$ எனக் காட்டுக.

6.5 பகுதி வகையிடலின் பயன்பாடுகள் (Applications of partial derivatives)

தொழில் துறையில் நேரடி பங்கு வகிக்கக் கூடிய கணக்குகளை பகுதி வகையிடல் மூலம் இங்கு காணலாம்.

6.5.1 இரு மாறிகளின் உற்பத்திச் சார்பு, இறுதி நிலை உற்பத்தித் திறன் (Production function and marginal productivities of two variables)

(i) உற்பத்திச் சார்பு: (Production function)

P என்ற ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தியானது, மூலதனம் (K), ஊதியம் (L), மூலப்பொருள்கள் (R), இயந்திரங்கள் (M) போன்ற பல பொருளாதாரக்காரணிகளைச்சார்ந்திருக்கிறது. எனவே $P = f(K,L,R,M,\ldots)$ என்பது உற்பத்திச் சார்பு எனப்படும். P என்பது முதலீடு மற்றும் ஊதியம் மட்டுமே சார்ந்து இருப்பின் $P=f(L,K)$ என எழுதலாம்.

(ii) இறுதி நிலை உற்பத்தித் திறன்: (Marginal productivities)

$P = f(L,K)$ என்பது உற்பத்திச் சார்பு எனில் $\dfrac{\partial P}{\partial L}$ என்பது ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்திச் சார்பு எனவும், $\dfrac{\partial P}{\partial K}$ என்பது மூலதனம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்திச் சார்பு எனவும் அழைக்கப்படும்.

$P(L,K)$ என்ற ஒரு படி சீரான உற்பத்திச் சார்பிற்கான ஆயிலரின் தேற்றமானது

$$L\frac{\partial P}{\partial L}+K\frac{\partial P}{\partial K} = P \text{ ஆகும்.}$$

6.5.2 பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சிகள் (Partial elasticity of demand)

A, B ஆகிய பொருள்களின் விலைகள் முறையே p_1, p_2 எனில் A என்ற பொருளின் தேவை $q = f(p_1,p_2)$ ஆகும்.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 162 20-04-2020 04:57:33 PM

p_1 ஐப் பொறுத்து q–ன் தேவையின் பகுதி நெகிழ்ச்சி

$$\eta_{qp_1} = \frac{Eq}{Ep_1} = \frac{-p_1}{q}\frac{\partial q}{\partial p_1}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

p_2 ஐப் பொறுத்து q –ன் தேவையின் பகுதி நெகிழ்ச்சி

$$\eta_{qp_2} = \frac{Eq}{Ep_2} = \frac{-p_2}{q}\frac{\partial q}{\partial p_2}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.40

$$P = 10L + 0.1L^2 + 5K - 0.3K^2 + 4KL$$

என்ற உற்பத்திச் சார்புக்கு K = L = 10 எனில் மூலதனம் (K) மற்றும் ஊதியம் (L) ஆகியவற்றினை சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்திகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$P = 10L + 0.1L^2 + 5K - 0.3K^2 + 4KL$$

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 10 + 0.2L + 4K$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 5 - 0.6K + 4L$$

$K = L = 10$ அலகுகள் எனில்

ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial L}\right)_{(10,10)} = 10 + 2 + 40 = 52 \text{ அலகுகள்}$$

மூலதனம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial K}\right)_{(10,10)} = 5 - 6 + 40 = 39 \text{ அலகுகள்}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.41

ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்திச் சார்பு $P = 10L - 0.1L^2 + 15K - 0.2K^2 + 2KL$ இங்கு L என்பது ஊதியம் மற்றும் K என்பது மூலதனத்தைக் குறிக்கிறது.

(i) ஊதியம் மற்றும் மூலதனம் ஒவ்வொன்றும் 10 அலகுகள் எனில் இறுதிநிலை உற்பத்திச் சார்புகளைக் கணக்கிடுக.

(ii) மூலதனத்தில் 10 அலகுகள் பயன்படுத்தப்பட்டால் ஊதியத்திற்கான உச்ச வரம்பைக் காண்க.

தீர்வு:

(i) $P = 10L - 0.1L^2 + 15K - 0.2K^2 + 2KL$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 10 - 0.2L + 2K$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 15 - 0.4K + 2L$$

$L = K = 10$ அலகுகள் எனில்,

ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial L}\right)_{(10,10)} = 10 - 2+20=28 \text{ அலகுகள்}$$

மூலதனம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial K}\right)_{(10,10)} = 15-4+20=31 \text{ அலகுகள்}$$

(ii) $K=10$ எனும் போது ஊதியத்திற்கான உச்ச வரம்பு $\left(\frac{\partial P}{\partial L}\right) \geq 0$ ஆகும்.

$$10 - 0.2L + 20 \geq 0$$

$$30 \geq 0.2L$$

அதாவது, $L \leq 150$

∴ ஊதியத்திற்கான உச்ச வரம்பானது 150 அலகுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.42

ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்திச் சார்பு $P = 4L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$ எனில், மூலதனம் சார்ந்த இறுதி நிலை உற்பத்தி மற்றும் ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி ஆகியவற்றைக் காண்க.

மேலும் $L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = P$ என நிரூபி.

தீர்வு:

$$P = 4L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$$

ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி :

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 4 \times \frac{3}{4} L^{\frac{-1}{4}} K^{\frac{1}{4}} = 3\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{4}}$$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 163 20-04-2020 04:57:41 PM

மூலதனம் பொறுத்த இறுதி நிலை உற்பத்தி:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 4L^{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{4}K^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = 3L\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{4}} + K\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$= 3L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}} + L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$$

$$= 4L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}} = P$$

எடுத்துக்காட்டு 6.43

x என்ற பொருளின் தேவை $q = 5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2$ எனில் $\frac{Eq}{EP_1}$ மற்றும் $\frac{Eq}{EP_2}$ என்ற பகுதி நெகிழ்ச்சிகளை $p_1=3$ மற்றும் $p_2=7$ எனும் பொழுது காண்க.

தீர்வு:

$$q = 5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2$$

$$\frac{\partial q}{\partial p_1} = -2 - 2p_1 p_2$$

$$\frac{\partial q}{\partial p_2} = 1 - p_1^2$$

$$\frac{Eq}{Ep_1} = -\frac{P_1}{q}\frac{\partial q}{\partial p_1}$$

$$= \frac{-p_1}{5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2}(-2 - 2p_1p_2)$$

$$= \frac{2p_1 + 2p_1^2 p_2}{5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2}$$

இங்கு $p_1 = 3$ மற்றும் $p_2 = 7$

$$\frac{Eq}{Ep_1} = \frac{2(3) + 2(9)(7)}{5 - 6 + 7 - (9)(7)} = \frac{132}{-57} = \frac{-132}{57}$$

$$\frac{Eq}{Ep_2} = -\frac{P_2}{q}\frac{\partial q}{\partial p_2} = \frac{-p_2(1 - p_1^2)}{5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2}$$

$$= \frac{-p_2 + p_2 p_1^2}{5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2}$$

இங்கு $p_1 = 3$ மற்றும் $p_2 = 7$

$$\frac{Eq}{Ep_2} = \frac{-7 + 7(9)}{5 - 6 + 7 - (9)(7)} = \frac{56}{-57} = \frac{-56}{57}$$

பயிற்சி 6.5

1. $P = 8L - 2K + 3K^2 - 2L^2 + 7KL$ என்ற உற்பத்திச் சார்பிற்கு $K = 3$ மற்றும் $L = 1$ என்ற மதிப்புகளின் மூலதனம் (K) மற்றும் ஊதியம் (L) சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்திகளைக் காண்க.

2. ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்திச் சார்பு $P = 4LK - L^2 + K^2$, $L>0$, $K>0$, எனில் $L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = 2P$ என நிரூபி.

3. $z = 3x^2 - 4xy + 3y^2$ என்பது ஒரு உற்பத்திச் சார்பு. இங்கு x என்பது ஊதியம் மற்றும் y என்பது மூலதனம் ஆகும். $x = 1, y = 2$ எனில் இறுதிநிலை உற்பத்தி சார்புகளைக் காண்க

4. $P = 3(L)^{0.4}(K)^{0.6}$ என்பது ஒரு உற்பத்திச் சார்பு இங்கு L என்பது ஊதியம் மற்றும் K என்பது மூலதனம் எனில் $L = 10$ மற்றும் $K = 6$ என இருக்கும்பொழுது இறுதிநிலை உற்பத்திகளை காண்க.

   $[(0.6)^{0.6} = 0.736, (1.67)^{0.4} = 1.2267]$

5. A என்ற பொருளின் தேவை $q = 13 - 2p_1 - 3p_2^2$ எனில் $p_1 = p_2 = 2$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $\frac{Eq}{Ep_1}$ மற்றும் $\frac{Eq}{Ep_2}$ என்ற பகுதி நெகிழ்ச்சிகளைக் காண்க.

6. A என்ற பொருளின் தேவை $q = 80 - p_1^2 + 5p_2 - p_1p_2$ எனில் $p_1=2$ மற்றும் $p_2=1$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $\frac{Eq}{Ep_1}$ மற்றும் $\frac{Eq}{Ep_2}$ என்ற பகுதி நெகிழ்ச்சிகளைக் காண்க.

பயிற்சி 6.6

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $C(x) = 2x^3 + 5x^2 - 14x + 21$ என்ற செலவு சார்பின் சராசரி மாறாச் செலவானது

   (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{x}$ (c) $-\frac{14}{x}$ (d) $\frac{21}{x}$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 164 20-04-2020 04:57:51 PM

2. $p = 20-3x$ என்ற தேவைச் சார்பின் இறுதி நிலை வருவாய்

(a) $20-6x$ (b) $20-3x$

(c) $20+6x$ (d) $20+3x$

3. ஒரு நிறுவனத்தின் தேவை மற்றும் அதன் செலவுச் சார்பு முறையே $p = 2-x$ மற்றும் $C = -2x^2 + 2x + 7$ எனில், இதன் இலாபச் சார்பானது

(a) $x^2 + 7$ (b) $x^2 - 7$

(c) $-x^2 + 7$ (d) $-x^2 - 7$

4. தேவைச் சார்பு மீள்தன்மை கொண்டது எனில்,

(a) $|\eta_d| > 1$ (b) $|\eta_d| = 1$

(c) $|\eta_d| < 1$ (d) $|\eta_d| = 0$

5. $x = \frac{1}{p}$ என்ற தேவை சார்பின் தேவை நெகிழ்ச்சி

(a) 0 (b) 1

(c) $-\frac{1}{p}$ (d) ∞

6. MR, AR மற்றும் η_d க்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பானது

(a) $\eta_d = \frac{AR}{AR - MR}$

(b) $\eta_d = AR - MR$

(c) $MR = AR = \eta_d$

(d) $AR = \frac{MR}{\eta_d}$

PSXLXK

7. $C = \frac{1}{25}e^{5x}$ என்ற செலவுச் சார்புக்கான இறுதிநிலைச் செலவு

(a) $\frac{1}{25}$ (b) $\frac{1}{5}e^{5x}$

(c) $\frac{1}{125}e^{5x}$ (d) $25e^{5x}$

8. $x = 2$ –ல் x –ஐப் பொறுத்து $y = 2x^2 + 5x$ –ன் உடனடி மாறு வீதம்

(a) 4 (b) 5

(c) 13 (d) 9

9. ஒரு குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தின் சராசரி வருவாய் ₹ 50 மற்றும் அதன் தேவை நெகிழ்ச்சி 2 எனில் அதனுடைய இறுதி நிலை வருவாய்

(a) ₹ 50 (b) ₹ 25

(c) ₹ 100 (d) ₹ 75

10. $P(x)$ என்ற இலாபச் சார்பானது பெருமத்தை அடைய தேவையான கட்டுப்பாடு

(a) $MR = MC$ (b) $MR = 0$

(c) $MC = AC$ (d) $TR = AC$

11. $f(x) = \sin x$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பானது

(a) 1 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. $f(x,y)$ என்பது n, படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில் $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ –க்குச் சமமானது

(a) $(n-1)f$ (b) $n(n-1)f$

(c) nf (d) f

13. $u = 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ –ன் மதிப்பு

(a) $8x + 4y + 4$ (b) 4

(c) $2y + 32$ (d) 0

14. $u = x^3 + 3xy^2 + y^3$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ –ன் மதிப்பு

(a) 3 (b) $6y$

(c) $6x$ (d) 2

15. $u = e^{x^2}$ எனில் $\frac{\partial u}{\partial x}$ –ன் மதிப்பு

(a) $2xe^{x^2}$ (b) e^{x^2}

(c) $2e^{x^2}$ (d) 0

16. சராசரிச் செலவு சிறுமம் எனில்

(a) இறுதி நிலைச் செலவு = இறுதி நிலை வருவாய்

(b) சராசரிச் செலவு = இறுதி நிலைச் செலவு

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 165 20-04-2020 04:57:56 PM

(c) சராசரிச் செலவு = இறுதி நிலை வருவாய்

(d) சராசரி வருவாய் = இறுதி நிலைச் செலவு

17. ஒரு நிறுவனம் லாபத்தை அடைவது

(a) மீப்பெரு புள்ளியில்

(b) சமபாட்டுப் புள்ளியில்

(c) தேக்கநிலைப் புள்ளியில்

(d) சீரான புள்ளியில்

18. தேவைச் சார்பு எப்பொழுதும்

(a) கூடும் சார்பு ஆகும்.

(b) குறையும் சார்பு ஆகும்.

(c) குறையற்ற சார்பு ஆகும்.

(d) வரையறுக்கப்படாத சார்பு ஆகும்.

19. $q = 1000 + 8p_1 - p_2$ எனில், $\frac{\partial q}{\partial p_1}$ இன் மதிப்பு

(a) –1 (b) 8

(c) 1000 (d) $1000 - p_2$

20. R = 5000 அலகுகள்/வருடம் $C_1 = 20$ பைசாக்கள், C_3 = ₹20 எனில் EOQ இன் மதிப்பு

(a) 5000 (b) 100

(c) 1000 (d) 200

இதர கணக்குகள்

1. x அலகுகள் உற்பத்திக்கான ஒரு பொருளின் மொத்தச் செலவு சார்பு $C = 10 - 4x^3 + 3x^4$ எனில்

(i) சராசரிச் செலவுச் சார்பு

(ii) இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு

(iii) இறுதி நிலை சராசரிச் செலவுச் சார்பு ஆகியவனவற்றை காண்க.

2. பின்வரும் சார்புகளுக்கு குறிப்பிடப்பட்டுள்ள நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

(i) $p = xe^x$, $x > 0$ –ல் அளிப்பு நெகிழ்ச்சி

(ii) $p = 10e^{-\frac{x}{3}}$, $x > 0$ –ல் தேவை நெகிழ்ச்சியை காண்க.

3. $p = 1$ –ல் $x = 2p^2 + 5$ எனும் அளிப்பு சார்புக்கான அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

4. $p = 100 - 6x^2$ எனும் தேவைச் சார்புக்கு இறுதி நிலை வருவாய் காண்க. மேலும் $MR = p\left[1 - \frac{1}{\eta_d}\right]$ என்பதனையும் சரிபார்க்க.

5. மொத்த செலவுச் சார்பு $y = 4x\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + 6$ –ல் உற்பத்தி அளவு x ஆனது தொடர்ச்சியாகக் அதிகரிக்கும் பொழுது அதன் இறுதி நிலை செலவானது [MC] தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது என நிறுவுக.

6. செலவுச் சார்பு $C = 2000 + 1800x - 75x^2 + x^3$ –க்கு எப்பொழுது அதன் மொத்த செலவு கூடுகிறது மற்றும் எப்பொழுது குறைகிறது என்பதைக் காண்க.

7. ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் மொத்த செலவுச் சார்பு $C = 15 + 9x - 6x^2 + x^3$. எனில் மொத்த செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறுவதற்கான x–ஐ காண்க.

8. $u = \log\frac{x^4 - y^4}{x - y}$ என்ற சார்புக்கு ஆய்லரின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3$ எனக் காட்டுக.

9. $u = x^3 + 3x^2y^2 + y^3$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என்பதனை சரிபார்க்க.

10. $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 7$ எனில் $f_{yy}(1,1) = 18$ எனக்காட்டுக.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 166 20-04-2020 04:58:02 PM

தொகுப்புரை

- தேவை என்பது ஒரு பொருளின் தேவை அளவுக்கும் அதன் விலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு ஆகும்.
- அளிப்பு என்பது ஒரு பொருளின் அளிப்பு அளவுக்கும் அதன் விலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு ஆகும்.
- செலவு என்பது ஒரு பொருளின் மீது உற்பத்திக்காகச் செலவிடப்பட்டத் தொகை ஆகும்.
- வருவாய் என்பது உற்பத்தி செய்யப்பட்டப் பொருளை விற்கும்பொழுது கிடைக்கும் தொகை ஆகும்.
- இலாபம் என்பது வருவாயில் செலவு போக கிடைக்கும் உபரித் தொகை ஆகும்.
- $y = f(x)$ என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சி என்பது y இன் சார் மாற்றத்திற்கும், x இன் சார் மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தின் வரம்பிடப்பட்ட எல்லையாகும்
- ஒரு பொருளின் சமன்நிலை விலை என்பது தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் சமன்நிலையை அடையும்பொழுது பெறப்படும் விலையாகும்.
- இறுதி நிலைச் செலவின் பொருள் விளக்கமானது, உற்பத்தியின் அளவு x அலகுகளிலிருந்து $(x+1)$ அலகுகளாக மாறும்போது உற்பத்தி செலவில் ஏற்படும் தோராயமான மாற்றம் ஆகும்.
- இறுதிநிலை வருவாயின் பொருள் விளக்கமானது, விற்பனை அளவு x அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது, $(x+1)$ ஆவது அலகு உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்பட்டதால் கிடைக்கும் தோராயமான வருவாயே இறுதி நிலை வருவாய் ஆகும்.
- $y=f(x)$ என்ற சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$ என அமையுமானால், **அது கூடும் சார்பு** எனப்படும்.
- $y=f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$ என இருப்பின், அது **திட்டமாகக் கூடும் சார்பு** எனப்படும்.
- $y= f(x)$ என்ற சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$ என இருப்பின், அது **குறையும் சார்பு** எனப்படும்.
- $y=f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$ என இருப்பின், அது **திட்டமாகக் குறையும் சார்பு** எனப்படும்.
- c–ஐ உள்ளடக்கிய (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் f என்ற சார்பானது வகையிடத்தக்கது மற்றும் $f'(c)$ காணத்தக்கது என்க.

  (i) $f'(c)=0$ மற்றும் $f''(c)>0$, எனில் f ஆனது c–ல் இடம் சார்ந்த சிறுமத்தை அடைகிறது.

  (ii) $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) < 0$, ஆனது c–ல் இடம் சார்ந்த பெருமத்தை அடைகிறது.
- $u = f(x,y)$ என்பது x, y என்ற இரு சாரா மாறிகளைக்கொண்ட சார்பு என்க. மேலும் $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$, $t>0$ எனில் $u=f(x, y)$ என்பது 'n' படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனப்படும்.
- $u = f(x,y)$ என்பது x, y –ல் அமைந்த 'n', படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில் $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$ ஆகும்.
- p_1 –ஐ பொறுத்து q–ன் தேவை பகுதி நெகிழ்ச்சி $\eta_{qp_1} = \frac{Eq}{Ep_1} = \frac{-p_1}{q}\frac{\partial q}{\partial p_1}$ ஆகும்.
- p_2 –ஐப் பொறுத்து q–ன் தேவை பகுதி நெகிழ்ச்சி $\eta_{qp_2} = \frac{Eq}{Ep_2} = \frac{-p_2}{q}\frac{\partial q}{\partial p_2}$ ஆகும்.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 167 20-04-2020 04:58:06 PM

முக்கியமான சூத்திரங்கள்(Some standard results)

1. மொத்தச் செலவு $C(x) = f(x) + k$

2. சராசரிச் செலவு: $AC = \frac{f(x)+k}{x} = \frac{c(x)}{x}$

3. சராசரி மாறும் செலவு: $AVC = \frac{f(x)}{x}$

4. சராசரி மாறாச் செலவு: $AFC = \frac{k}{x}$

5. இறுதி நிலைச் செலவு: $MC = \frac{dC}{dx}$

6. இறுதி நிலைச் சராசரி செலவு: $MAC = \frac{d}{dx}(AC)$

7. மொத்தச் செலவு: $C(x) = AC \times x$

8. வருவாய்: $R = px$

9. சராசரி வருவாய்: $AR = \frac{R}{x} = p$

10. இறுதி நிலை வருவாய்: $MR = \frac{dR}{dx}$

11. இலாபம்: $P(x) = R(x) - C(x)$

12. நெகிழ்ச்சி: $\eta = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$

13. தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

14. அளிப்பு நெகிழ்ச்சி: $\eta_s = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

15. MR, AR மற்றும் η_d –களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு $MR = AR\left[1 - \frac{1}{\eta_d}\right]$ அல்லது $\eta_d = \frac{AR}{AR - MR}$ ஆகும்.

16. x –ஐ பொறுத்து y இன் இறுதி நிலை சார்பானது (அல்லது) x –ஐ பொறுத்து y இன் உடனடி மாறுவீதமானது $\frac{dy}{dx}$ ஆகும்.

17. $MC = AC$ எனும்பொழுது சராசரிச் செலவு $[AC]$ சிறுமத்தை அடையும்.

18. $MR = 0$ எனும்பொழுது மொத்த வருவாய் $[TR]$ பெருமத்தை அடையும்.

19. $MR = MC$ எனும் பொழுது இலாபம் $[P(x)]$ பெருமத்தை அடையும்.

20. சார்பின் விலையைப் பொறுத்த நெகிழ்ச்சியில்
   (a) $|\eta| > 1$, எனில் சார்பு மீள்த்தன்மைக் கொண்டது.
   (b) $|\eta| = 1$, எனில் சார்பு அலகு மீள்த்தன்மைக் கொண்டது .
   (c) $|\eta| < 1$, எனில் சார்பு மீள்த்தன்மை அற்றது.

21. $EOQ = q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$

22. ஓர் ஆண்டிற்கான உகந்த கோருதலின் எண்ணிக்கை :

$$n_0 = \frac{\text{தேவை}}{\text{EOQ}} = R\sqrt{\frac{C_1}{2C_3R}} = \sqrt{\frac{RC_1}{2C_3}} = \frac{1}{t_0}$$

23. ஓர் அலகு காலத்தில், சிறும சரக்கு நிலைச் செலவு, $C_0 = \sqrt{2C_1C_3R}$

24. சரக்குத் தேக்கச் செலவு $= \frac{q_0}{2} \times C_1$ மற்றும் கோருதல் செலவு $= \frac{R}{q_0} \times C_3$

25. EOQ–ல், கோருதல் செலவு = சரக்கு தேக்கச் செலவு

26. $u(x,y)$ என்பது x மற்றும் y–ல் தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ஆகும்.

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 168 20-04-2020 04:58:14 PM

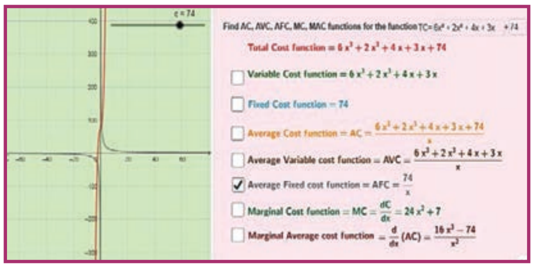
கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
அளவு	Quantity
அளிப்பு	Supply
இலாபம்	Profit
இறுதிநிலை / விளிம்பு	Marginal
உற்பத்தி வெளியீடு	Production Output
உற்பத்தியாளர்	Producer
ஒரே விலை / மாறா விலை	Fixed cost
சமநிலை	Equilibrium
சராசரி	Average
சார்ந்த மாற்றம்	Relative change
சிறுமம்	Minimum
செலவுச் சார்பு	Cost function
தேவை	Demand
தோராயமான	Approximately
நுகர்வோர்	Consumer
நெகிழ்ச்சி	Elasticity
பெருமம்	Maximum
பொருள்	Commodity
மாறும் விலை	Variable cost
மாறுவீதம்	Rate of change
மிகுதியான	Excess
வருவாய் சார்பு	Revenue function
விகிதம்	Ratio

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 169 20-04-2020 04:58:14 PM

இணையச் செயல்பாடு

படி – 1

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



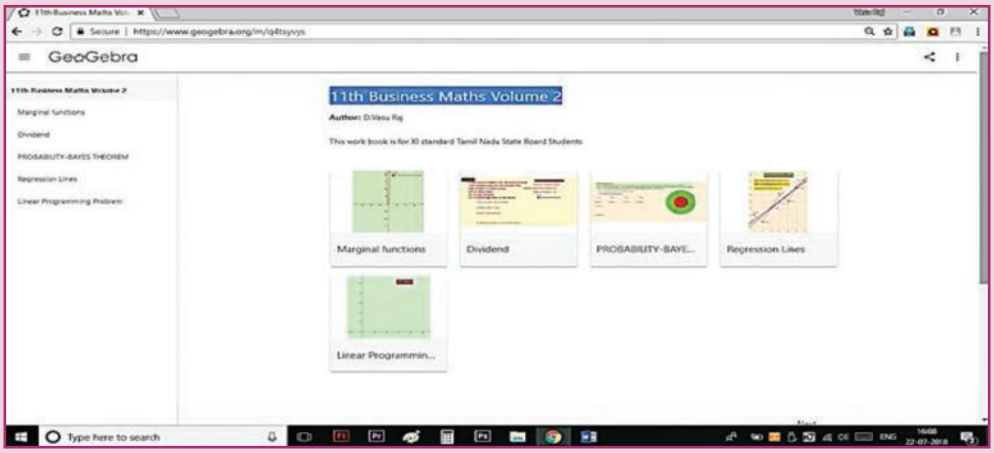
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் இருக்கும்.

படி - 2

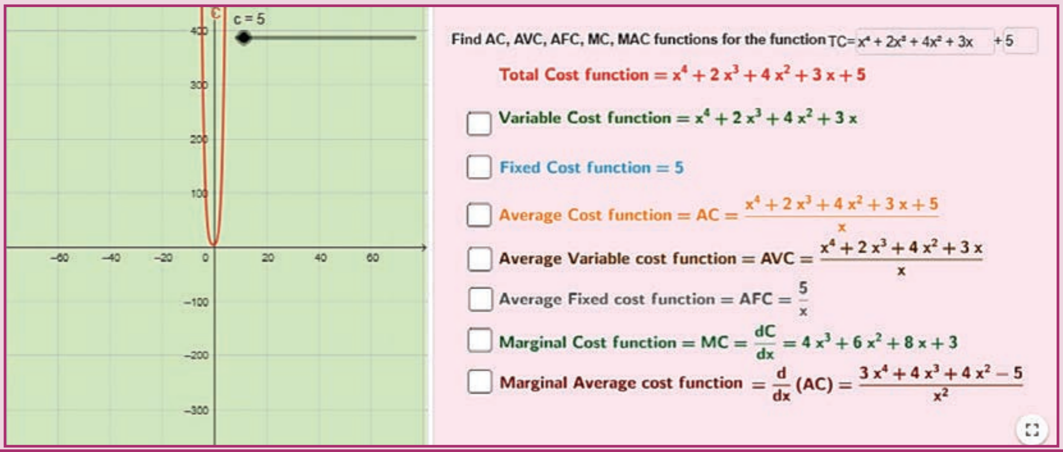
"Marginal function" என்பதைத் தேர்வு செய்யவும். பொருத்தமான கட்டத்தைத் தேர்வு செய்து இடப்பக்கத்தில் வரைபடங்களைக் காண்க.

மேலும் "Total cost function" மதிப்புகளை வலப்பக்கம் மேற்புறம் உள்ள கட்டத்தில் உள்ளீடு செய்து கணக்குகளைத் தொடரவும்..

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/q4tsyvys (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 170 20-04-2020 04:58:14 PM