p1bekfmafs1nask3 h1gc84uupp7

PRAGATI-2

2016-2017

MATHEMATICS

Class VII

NOT FOR SALE

SPONSORED BY :
DELHI BUREAU OF TEXT BOOKS

स्वाध्यायान्मा प्रमदः
State Council of
Educational Research and Training

Directorate of Education
Govt. of NCT of Delhi

SCERT, DELHI
December 2016
No. of Copies 250

Published by State Council of Educational Research and Training, Delhi
Printed at Star Forms, Delhi - 07, Mob. No.: - 9810520802

Note

Delhi Government took a decision to involve all its teachers to look at children's books of classes 6 to 8 in small groups and create supplementary learning material based on the topics in their prescribed text books. The objective of this exercise was to provide a platform to teachers to discuss among themselves and create teaching learning material for children of their own classes based on the understanding of their existing learning level. In other words, it was an attempt to create material which is simple and contextual for children. Accordingly, workshop was organized by SCERT, Delhi during May-June 2016 involving about 20,000 teachers of the Directorate of Education teaching five subjects- Hindi, English, Maths, Social Science and Science. The sessions ofthis workshop was facilitated by Mentor Teachers with the assistance of Cluster Resource Coordinators (CRCs) of SSA. Apart from the content, the teachers also discussed about different methods of classroom transaction.

Thus, the core content for supplementary learning material of this subject was created by about 4000 {Science} Trained Graduate Teachers (TGTs). Subsequently, a sub group of Mentor Teachers, TGTs in {Science}, edited material of their respective subjects that was created during this workshop. The edited material was reviewed by Senior Lecturers of DIETs. This entire process has generated supplementary learning material which is aligned with the topics of prescribed textbooks.

This process and material should be viewed as "work in progress". This is not a substitute for prescribed text books; it is an additional material to support, assist and strengthen teaching and learning.

We encourage teachers and educators to give their feedback after using this material with children as well as give specific inputs for improvement and strengthening of such initiatives. Do send your feedback via an online feedback/input form which is available at the homepage of SCERT, Delhi.

Reviewed by:	Dr.	Anil Teotia, Principal, DIET Dilshad Garden.
	Mr.	Ajay Choubey, Vice Principal, Govt. Boys Sr. Sec. School, Dhaka, Delhi.
Editorial Group of: Mentor Teachers	Mrs.	Anju Pathak (20081047), JDSKV Mayur Vihar, Pkt 2, Phase I
	Dr.	Ashok Kumar (Tiwari) (19900432), ACC Govt. SBV, Jhilmil Colony
	Mr.	Gaurav Sharma (20081628), SBVM GSV, Shankracharya Marg
	Mrs.	Jaspal Kaur (20100095), SKV, Prahladpur
	Mrs.	Neeta Batra (20130835), S(Co-Ed.)S, Mangolpuri, C- Block
	Mr.	Rakesh Gujral (20050846), GSBV, Ramesh Nagar
	Mr.	Rakesh Kumar (20130834), GBSSS, Kair
	Mrs.	Shalini (20111699), SKV No. 1, Narela
	Mrs.	Supriya (20102300), RPSKV, Rithala
	Mrs.	Sunila Bhatia (19930502), VSSKV No. 1, Kalkaji
	Dr.	Sushma Singh (19930796), GGSSS, Shahbad dairy
	Mr.	Umashankar (20072427), GBSSS, Prem Nagar
	Mrs.	Vinod Bala (20072429), GGSSS Sector 3, Dwarka
Incharge Publication:	Ms.	Sapna Yadav, SCERT, Delhi
Publication Team:	Mr.	Navin Kumar, Ms. Radha and Jai Bhagwan

ऐसे में गणित जैसे विषय के मुश्किल लगने या उबाऊ लगने के बारे में अगर हम किसी से पूछते हैं तो अमूमन एक ही तरह का उत्तर मिलता है कि पढ़ाई की शुरूआत से ही गणित से एक तरह का डर लगने लगा। डर क्यों? बच्चे केअंदर ये डर पैदा होने के लिए क्या सिर्फ़ बच्चा ज़िम्मेदार है। या इसकी ज़िम्मेदारी विद्यालय की भी बनती है, जहां वह गणित नाम से परिचित हुआ, मगर उसे ठीक से सीख और समझ नहीं पाया।

अमूमन ये मान लिया जाता है कि गणित के अंदर गतिविधि कराने की कोई गुंजाइश नहीं है या बहुत ही कम है। हम अगर ध्यान से देखें तो गणित हमारी रोज़मर्रा की ज़िंदगी का हिस्सा होता है। संख्याओं का खेल कहीं न कहीं हमारी अपनी ज़िंदगी का खेल है। इसमें भी उतना ही रस है जितना किसी और विषय में। सवाल है उसके बारे में बनी सारी भ्रांतियों को तोड़ने का और उसे अपनी ज़िंदगी से जोड़ने का।

इस बार गणित में 'रोल प्ले' का इस्तेमाल करते हुए विषयवस्तु को और अधिक रोचक बनाने का प्रयास किया गया है। किसी भी विषय या प्रसंग के बारे में संक्षिप्त नाट्य प्रस्तुति अगर हम देखते हैं तो वह हम सबको बांधती है। जिससे विषय पर आना और उसके बारे में अवधारणा को स्पष्ट करना अपेक्षाकृत आसान तो हो ही जाता है बल्कि वह बच्चों के साथ भी सीधे-सीधे जुड़ता है। इस तरह गणित शिक्षण में 'थियेटर इन एजुकेशन' की शिक्षाशास्त्रीय नीति को अच्छे से अपनाया जा सकता है। 'रोल प्ले' उसी का एक अंग है।

हम सभी शिक्षक अगर सुझाए गए 'रोल प्ले' का इस्तेमाल ही करें, ये ज़रूरी नहीं है। इसके लिए शिक्षक को संपूर्ण स्वायत्तता है कि वो अपने अनुसार काम करे। इसके अंदर इंप्रोवाइज़ेशन की पूरी छूट है, बशर्ते ये इंप्रोवाइज़ेशन शिक्षक की देख-रेख में हों। हमारी कोशिश हो कि हम कक्षा के ज़्यादातर बच्चों को इसमें शरीक़ कर पाएँ। उनकी सहभागिता पूरी गतिविधि को जीवंत बना देगी। इसके लिए हम कक्षा के छात्रों के चार से पांच ग्रुप बना सकते हैं। सभी ग्रुप 'रोल प्ले' को अपने-अपने हिसाब से खेलेंगे। हाँ, इस बात का ध्यान रहे कि जब एक ग्रुप अपनी प्रस्तुति दे रहा होतो बाकी सभी ग्रुप उस प्रस्तुति को ध्यान से देखें। और उसके बारे में जो भी उनकी राय बने, उसे कापी के अंदर नोटकर लें। ताकि सभी प्रस्तुतियों के बाद जब सभी प्रस्तुतियों का मूल्यांकन किया जाए तो उन राय और मशविरों को सबके सामने रखा जाय। सुधार की हर संभावना का हमेशा स्वागत किया जाय।

'रोल प्ले' से कक्षा के प्रत्येक छात्र के विषय से जुड़ने की संभावना बढ़ जाती है। इस गतिविधि से एक और जो प्रत्यक्ष लाभ होगा, वो होगा छात्रों का शिक्षकों के साथ एक तरह से घुलना-मिलना जो हमारी सीखने की प्रवृत्ति को और मज़बूत करता है। और यहीं से उन बच्चों के अंदर गणित के प्रति डर के भाव ख़त्म होने की संभावना बढ़ेगी।

संभावनाओं की तलाश करते हुए, आइए प्रयास करते हैं।

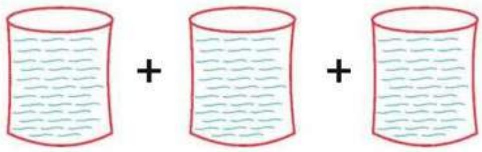
विषय -सूची

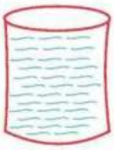
अध्याय 1	सरल समीकरण	1–16
अध्याय 2	रेखा एवं कोण	17–34
अध्याय 3	त्रिभुज और उसके गुण	35–49
अध्याय 4	त्रिभुजों की सर्वांगसमता	50–63
अध्याय 5	राशियों की तुलना	64–78
अध्याय 6	प्रायोगिक ज्यामिति	79–97
अध्याय 7	परिमाप और क्षेत्रफल	98–116
अध्याय 8	बीजीय व्यंजक	117–128
अध्याय 9	घातांक और घात	129–141
अध्याय 10	सममिति	142–168
अध्याय 11	ठोस आकारों का चित्रण	169–199

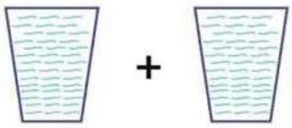
अध्याय 1 – सरल समीकरण

बच्चो, हम छठी कक्षा में बीजगणित के बारे में पढ़ चुके हैं। हम यह भी जान चुके हैं कि चर और अचर क्या होते हैं। हम बीजीय व्यंजकों को बनाना भी सीख चुके हैं। अब हम इसी विषय पर और अधिक जानकारी प्राप्त करने की कोशिश करते हैं।

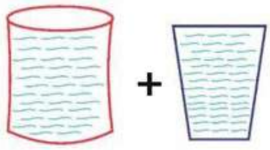
नीचे दिए गए बर्तनों में तरल पदार्थ भरा हुआ है। दी गई स्थितियों को (a,b,c) को देखते हैं तथा हल करने की कोशिश करते हैं।

(a)  **= 24 लीटर**

 = ...लीटर

(b)  **= 12 लीटर**

= ....लीटर

(c)  = ...लीटर

आओ देखें, हम क्या जानते हैं?

प्र.1 बॉक्स में से चर तथा अचर संख्याओं को छाँटकर संबंधित आकृतियों में लिखें।

x, y, 1, a,
6, z, 10, b,
12, c

अचर संख्याएँ

चर संख्याएँ

प्र.2 निम्नलिखित व्यंजकों को कथनों के रूप में व्यक्त कीजिए :-

i) x+7 = x में 7 जोड़िए।

ii) y-8 = ...

iii) t+10 = ...

iv) 3s = ...

v) z/2 = ...

प्र.3 दिए गए कथन का उससे संबंधित व्यंजक से मिलान कीजिए।

मिलान कीजिए -	**व्यंजक**
i) y में 3 जोड़िए	a) 5y-7
ii) x में से 5 घटाइए	b) 2z
ii) z का 2 गुणा कीजिए	c) y+3
iv) a का एक तिहाई कीजिए	d) 3x+6
v) x को 3 से गुणा करके 6 जमा कीजिए	e) x-5
vi) y को 5 से गुणा करके 7 घटाइए	f) $\frac{a}{3}$

प्र.4 दी गई परिस्थितियों के व्यंजकों का निर्माण कीजिए:-

(a) यदि रीना के पास x कि.ग्रा. चावल हैं और दुकानदार से उसने 7 कि.ग्रा. चावल और ले लिए तो कुल मिलाकर उसके पास कितने कि.ग्रा. चावल हो गए ?........

(b) यदि मोहन के पास y रुपये हैं और राजीव ने उससे 10 रुपये ले लिए तो अब मोहन के पास कितनी रुपये बचे ? ....

(c) यदि टीना ने x टॉफ़ियाँ खा लीं और मीना ने उससे दो गुनी टॉफी खाईं तो दोनों ने कुल मिलाकर कितनी टॉफ़ियाँ खाईं ?......................

प्र.5 मिलान कीजिए :-

$s+t = t+s$	गुणा की क्रम विनिमेयता
$a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)$	योग की क्रम विनिमेयता
$m\times n = n\times m$	वितरणता

आओ हम एक लड़की अनुजा और उसकी अध्यापिका के बीच हुई बातचीत सुनें।

अध्यापिका : अनुजा आप एक संख्या सोच लो।

अनुजा : ठीक है। सोच ली।

अध्यापिका : अब इस संख्या को 2 से गुणा करो।

अनुजा : कर दिया।

अध्यापिका : अब इस संख्या में 7 जमा कर दो।

अनुजा : ठीक है मैडम कर दिया!

अध्यापिका : अब जो आपका उत्तर आया मुझे केवल वही बता दो।

अनुजा : 15

अध्यापिका : आपने 4 सोचा था!!

क्या हम बता सकते हैं कि अध्यापिका को किस प्रकार उत्तर पता चला ? अपने साथियों से चर्चा करें।

आओ हम अनुजा और उसकी अध्यापिका के बीच हुई बातचीत को बीजगणितीय रूप में लिखने का प्रयास करते हैं।

माना अनुजा ने संख्या सोची होगी = x

संख्या को दो से गुणा किया होगा = 2x

अब इस संख्या में 7 जमा किया होगा = 2x+7

अनुजा का उत्तर आया = 15

x को 2 से गुणा किया और 7 जमा किया तो वह 15 के बराबर आया।

बीजगणितीय रूप या समीकरण

$$2x+7 = 15$$

आइए, हम एक नई परिस्थिति को देखते हैं।

आइए, इस स्थिति को चर और अक्षर में प्रयोग करते हुए पहले व्यंजक बनाते हैं।

माना रमेश के पास K कंचे हैं।

अब शाहिद से मिलने वाले कंचे = 5

रमेश के पास अब कुल कंचे हो जाएँगे = _____

परंतु रमेश के पास कुल कंचे हैं = 20

क्या हम कह सकते हैं कि K+5 20 के बराबर होगा? ◯ हाँ/नहीं

ऊपर दी गई परिस्थिति को हम बीजगणितीय रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\boxed{K+5 = 20}$$

समीकरण

समीकरण
में हमेशा समता यानी
'=' का चिन्ह होता है।

'=' चिन्ह के बाईं ओर बाएं पक्ष
का व्यंजक तथा दाईं ओर दाएं पक्ष
का व्यंजक के मान होते हैं।

समीकरण में
बायां पक्ष = दायां पक्ष
या
Left Hand Side (L.H.S.)
=
Right Hand Side (R.H.S.)

बताओ मैं समीकरण हूँ या नहीं

	हाँ/नहीं		हाँ/नहीं
(1) $x + 7 = 19$		(4) $s + 3 < 0$	
(2) $t - 7 > 5$		(5) $3z = 7$	
(3) $z - 2 = 0$		(6) $\frac{p}{2} = 9$	

दिए गए समीकरणों को कथनों के रूप में लिखिए :-

1. $y - 5 = 8$ y में से 5 घटाने पर 8 प्राप्त हुआ।
2. $3s + 5 = 4$ ....
3. $\frac{t}{3} - 2 = 5$ ....
4. $3g + 4 = 6$ ....

नीचे दी गई परिस्थितियों के समीकरण बनाइए:-

प्र.1 एक पेड़ पर कुछ तोते बैठे हुए थे। उनमें से 4 तोते उड़ गए तो पेड़ पर 20 तोते बचे।

उ. माना पेड़ पर तोते बैठे थे = x

तोते उड़ गए = ___

बचे हुए तोते = ___

दी गई परिस्थिति का समीकरण = [ ]

प्र.2 यदि रमेश, शाहिद से 5 कंचे ले ले तो रमेश के पास 20 कंचे हो जाएँगे।

उ. माना रमेश के पास शुरूआत में कंचे = ___

रमेश ने शहिद से कंचे लिए = z

रमेश के पास कुल कंचे = ___

दी गई परिस्थिति का समीकरण =

[ ]

प्र.3 माहिरा के पास कुछ टॉफ़ियाँ थीं। यदि उनमें से उसने आधी टॉफ़ियाँ राहुल को दे दीं तो माहिरा के पास 10 टॉफ़ियाँ बचीं।

उ. माना माहिरा के पास टॉफ़ियाँ थी = ___

उसने राहुल को टॉफ़ियाँ दे दी = y

माहिरा के पास अब टॉफ़ियाँ बचीं = ___

दी गई परिस्थिति का समीकरण =

[ ]

आओ एक समीकरण को हल करते हैं।

समीकरण :- $x+5=7$

क्या हम समीकरण में चर (x) का वह मान निकाल सकते हैं जिसे x की जगह रखने पर समीकरण के दोनों पक्ष बराबर रहते हैं।

मतलब दिए गए समीकरण में 5 में क्या जोड़ें कि 7 आ जाए?

$2+5=7$

जी हाँ, हमारा उत्तर 2 आया।

x की जगह समीकरण में 2 रखने पर भी समीकरण बराबर रहता है।

$2+5=7$

हम कह सकते हैं कि x=2 समीकरण को संतुष्ट करता है।

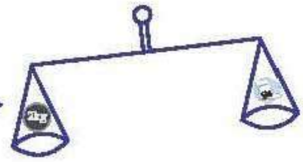
इसे समीकरण को हल करना भी कहते हैं।

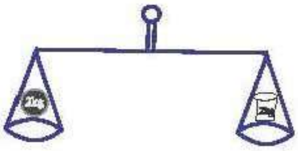
अब तालिका को पूरा करते हैं

समीकरण	हल	हल समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं
$x+4 = 10$	$x = 6$	संतुष्ट करता है।
$y - 1 = 7$	$y = 10$	
$3p = 10$	$p = 3$	
$4q = 8$	$q = 2$	
$\frac{z}{3} = 2$	$z = 6$	
$\frac{r}{5} = 3$	$r = 10$	

तराजू की मदद से समीकरण का हल

इसमें कितनी चीनी और डालें कि तराजू के दोनों पलड़े बराबर हो जाएँ......................

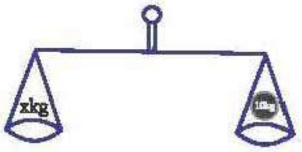


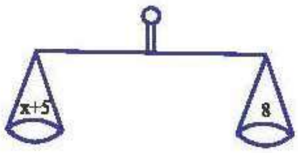


तो समानता के लिए दाईं ओर कितनी चीनी होगी ....

अब एक और परिस्थिति देखते हैं।

यहाँ x का मान क्या होगा?
x=............. Kg.

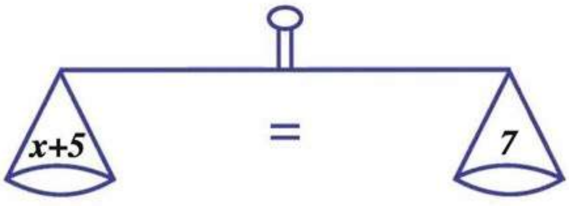




यहाँ (x+5) का मान क्या होगा?
x+5 = ...

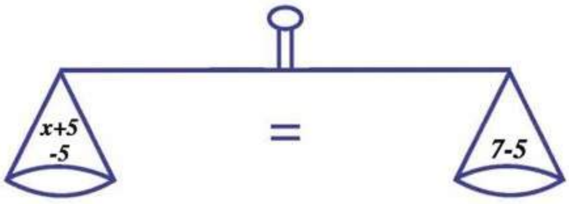
x+5=7 को तराजू की मदद से हल करें।

चरण-1 हमें दोनो पलड़ों को बराबर रखते हुए बाएं पलड़े में केवल x को रखना है।

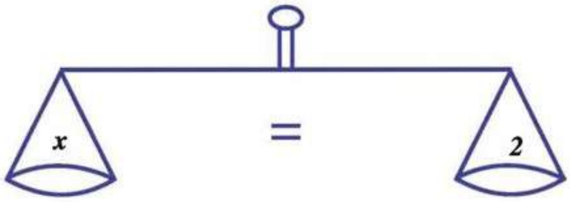


दोनों पक्षों में से 5 घटाने पर-

चरण-2

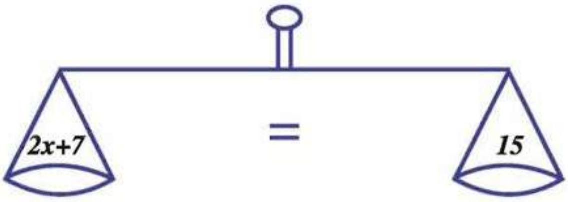


चरण-3

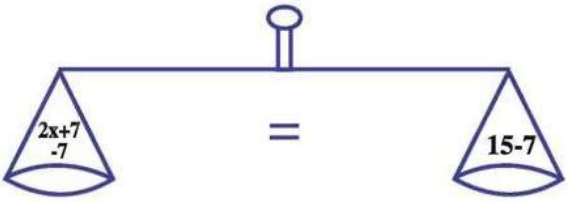


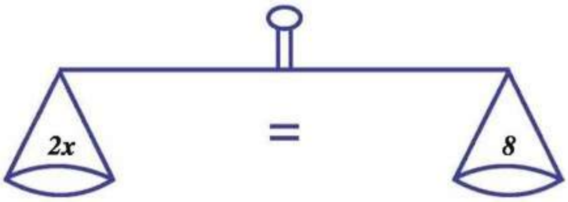
$x=2$

$2x+7=15$ को हल करो।

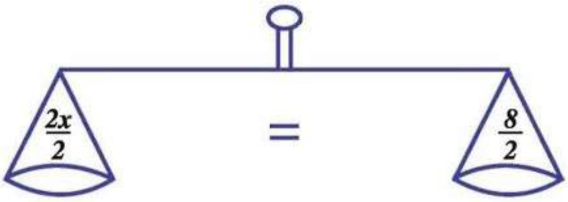


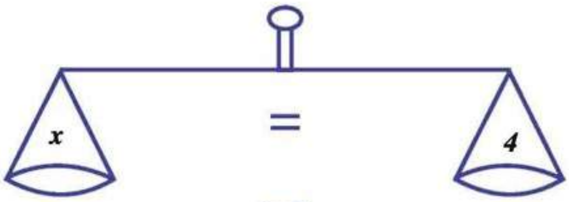
दोनों पक्षों में से 7 घटाने पर-





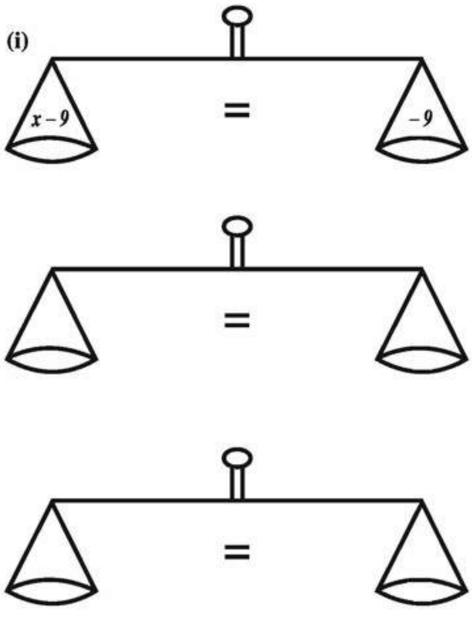
दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर-

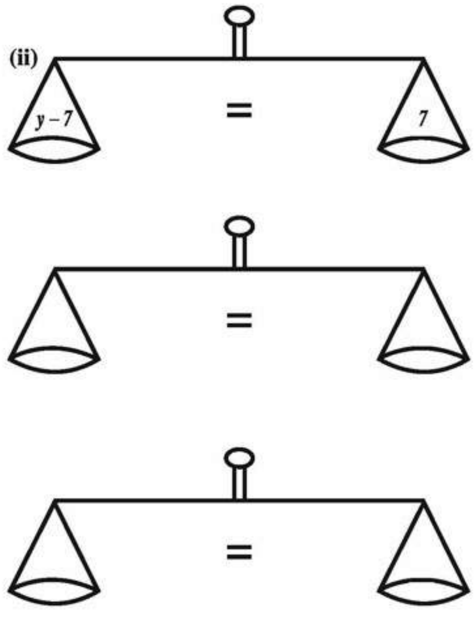




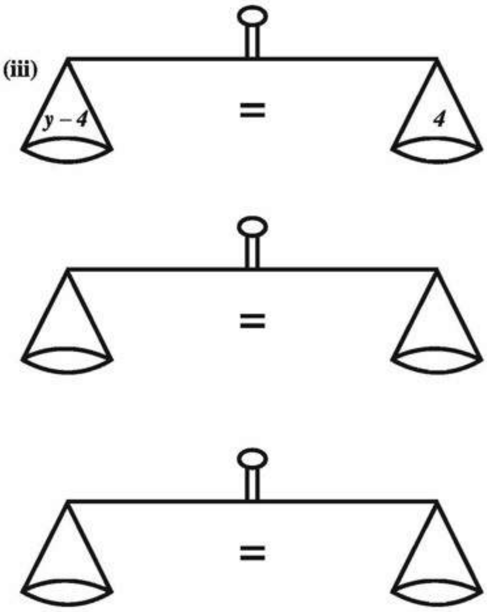
समीकरण का बायां पक्ष	समीकरण का दायां पक्ष
1. यदि बाएं पक्ष में किसी संख्या को जोड़ते हैं	1. तो दाएं पक्ष में भी उसी संख्या को जोड़ना होगा
2. यदि हम बाएं पक्ष से 3 हटाते हैं	2. तो दाएं पक्ष से भी 3 ही हटाना होगा।
3. यदि हम बाएं पक्ष को 4 से गुणा करते हैं	3. तो दाएं पक्ष को भी 4 से गुणा करना होगा।
4. इसी प्रकार यदि हम बाएं पक्ष को 5 से भाग करते हैं	4. तो दाएं पक्ष को भी 5 से ही भाग करना होगा।

आओ नीचे दी गई समीकरणों को हल करें

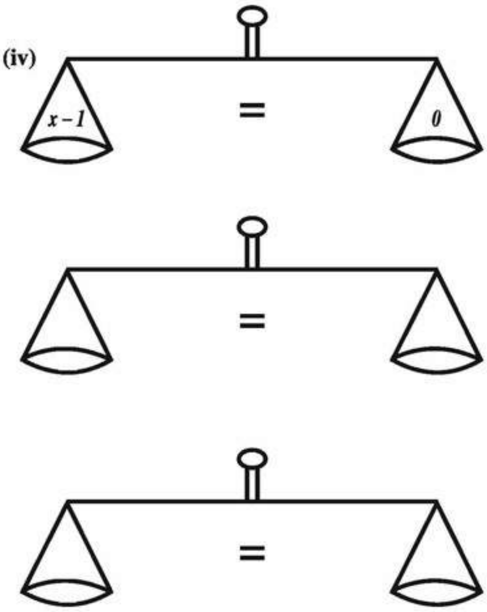




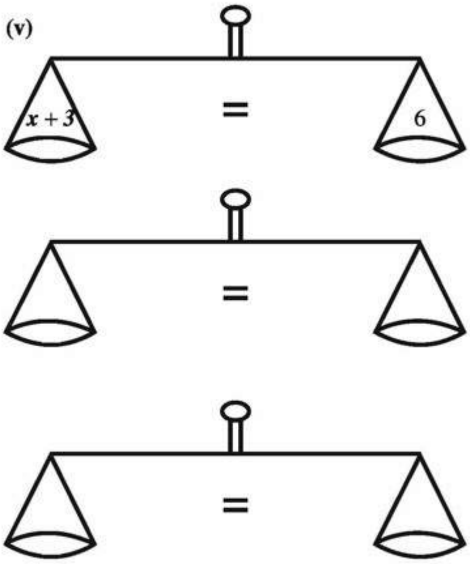
(iii)



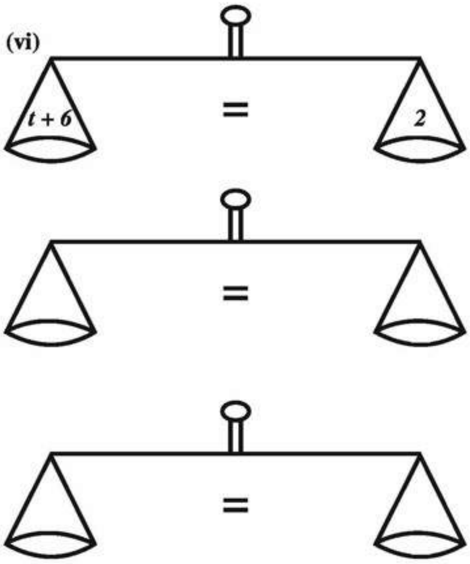
(iv)



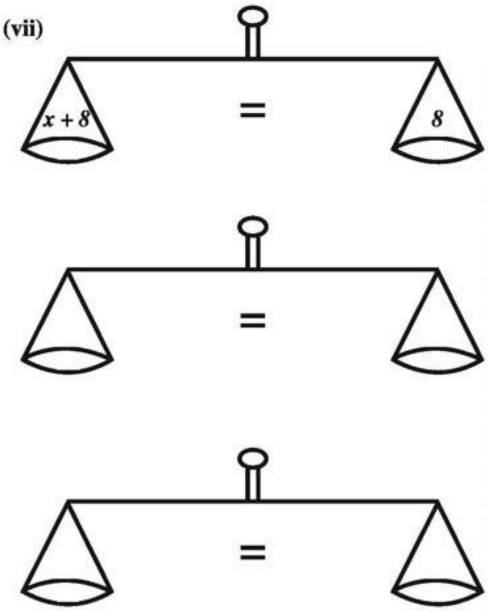
(v)



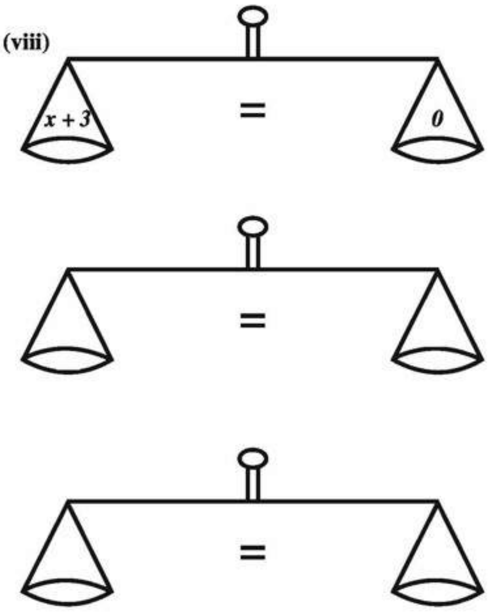
(vi)



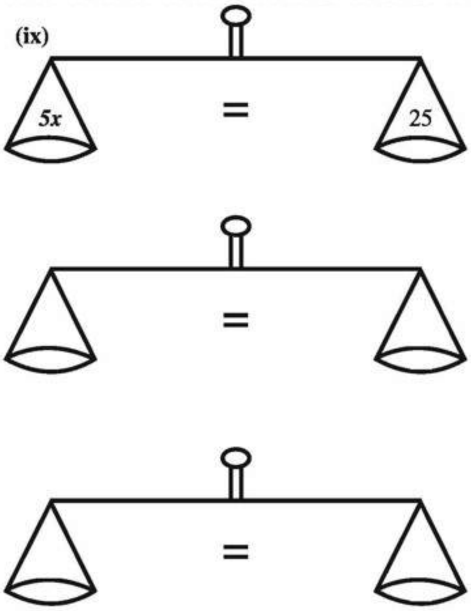
(vii)



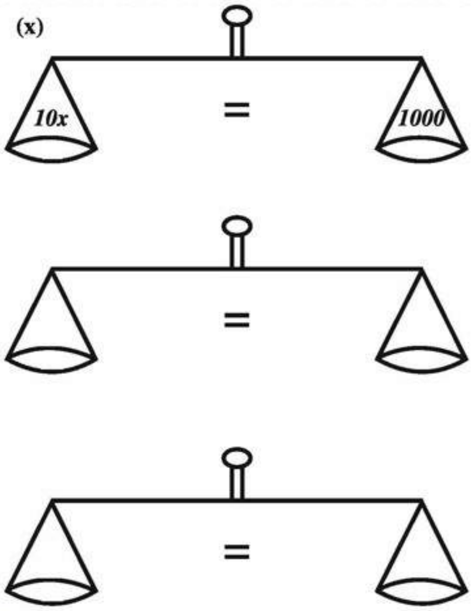
(viii)



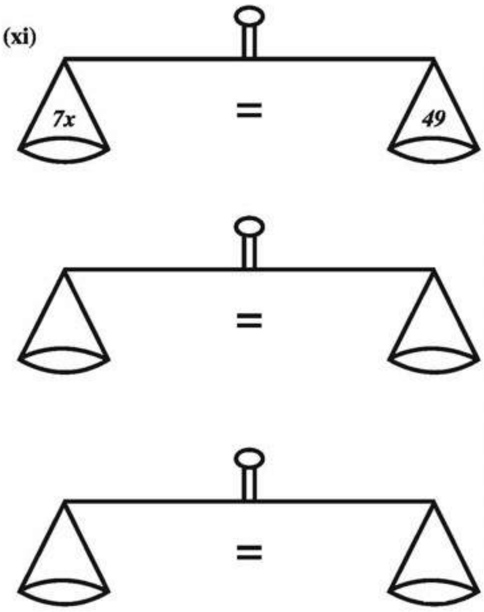
(ix)



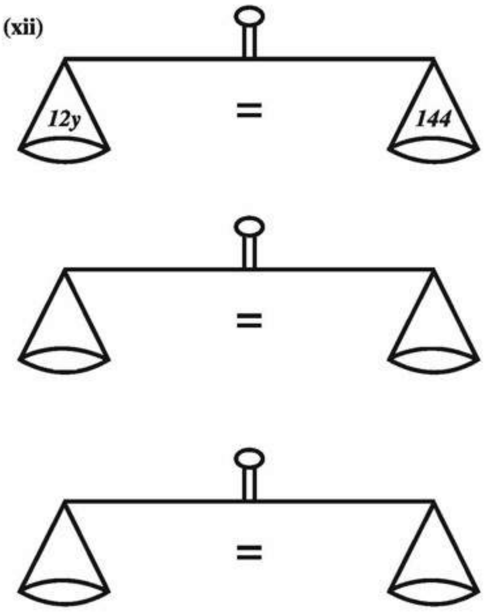
(x)



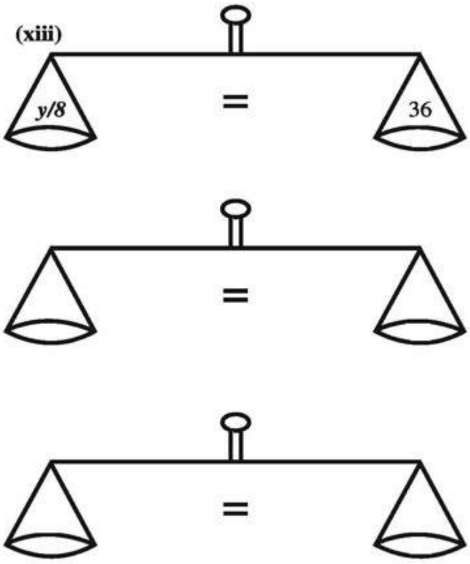
(xi)



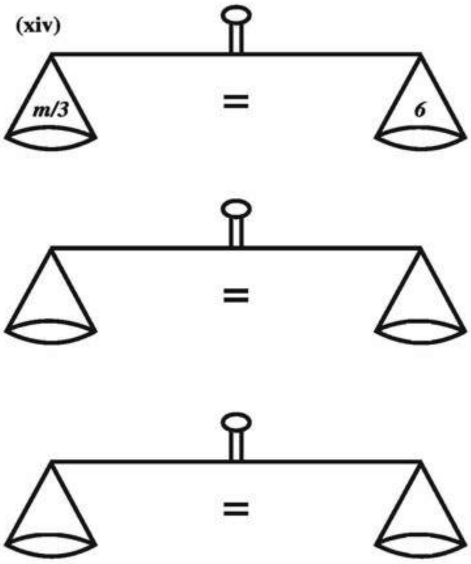
(xii)

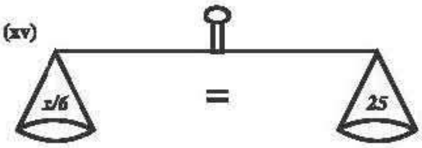


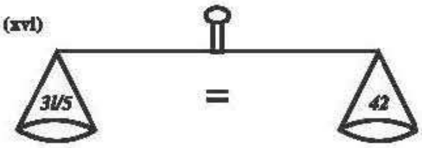
(xiii)

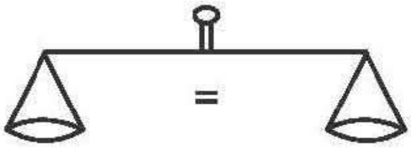


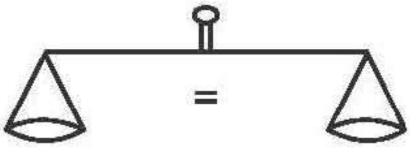
(xiv)

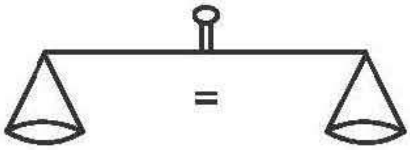


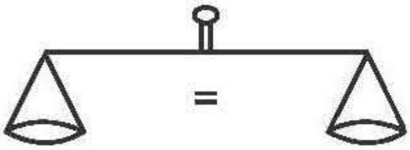
(xv)


(xvi)




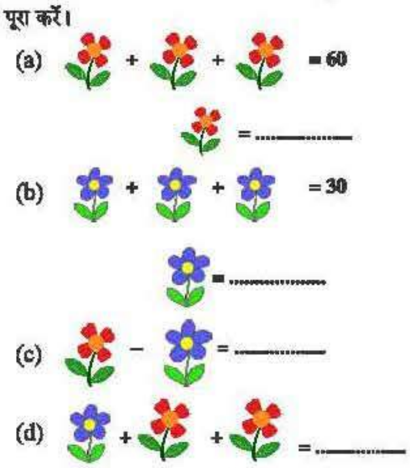






क्या आप इसे कर सकते हैं?

यदि एक फूल किसी चर संख्या को दिखाता है तथा दूसरा फूल एक दूसरी चर संख्या को दिखाता है तो निम्नलिखित समीकरणों को पूरा करें।



पिंकी से संबंधित जानकारियों का पता लगाइए तथा दिए गए स्थान पर उसे लिखिए।

उदाहरण

यदि मेरी उम्र x वर्ष है।
तो समीकरण $x+4=14$
की सहायता से मेरी उम्र बताइए।

हल: $x+4=14$

$x+4-4=14-4$

$x=10$

10 वर्ष

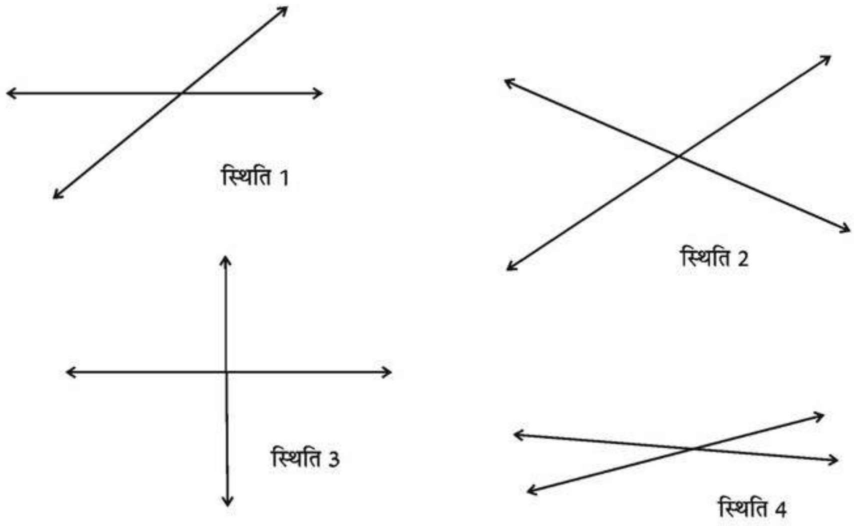
यदि मेरे जूते का नंबर y है।
तो समीकरण $y-5=2$
की सहायता से मेरे जूते का
नंबर बताइए।

यदि मेरे परिवार के सदस्यों की
संख्या p है। तो समीकरण $p \times 10 = 50$
की सहायता से मेरे परिवार
के सदस्यों की संख्या बताइए।

यदि मेरा वज़न t kg है।
तो समीकरण $t + 5 = 3$
की सहायता से मेरा वज़न
बताइए।

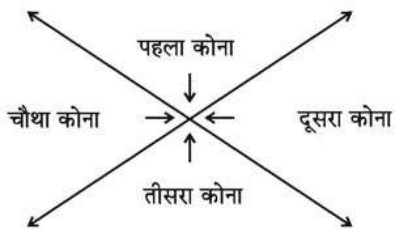
अध्याय 2 – रेखाएँ एवं कोण

अपनी आँखें बंद करके सोचिए कि दो रेखाएँ एक–दूसरे को काट रहीं हैं। अब जो आपने सोचा, उसे कॉपी पर बनाएँ। आप देखेंगे कि दो रेखाएँ किसी भी तरह एक–दूसरे को काटें तो कुछ निम्न प्रकार की स्थितियाँ उभरती हैं।



क्या आपकी बनाई गई आकृतियाँ ऊपर दी गई आकृतियों से भिन्न हैं? यदि हाँ, तो अपने दोस्तों से इस बारे में चर्चा करें।

ऊपर दी गई आकृतियों में हम देखते हैं कि जहाँ रेखाएँ एक–दूसरे को काटती हैं, उस बिंदु के आसपास चार कोने बन गए हैं। क्या आप उन कोनों को देख सकते हैं? यदि नहीं, तो अपने दोस्तों एवं अध्यापक की मदद लें।



इन्हीं कोनों को हम कोण कहते हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि जब दो रेखाएँ/ रेखाखंड/ किरण एक–दूसरे को काटते (प्रतिच्छेद) हैं, तो कोण बनते हैं। कोणों को हम दो रेखाओं के एक–दूसरे से झुकाव द्वारा भी समझते हैं।

क्या आप अपने आसपास ऐसे कोणों को ढूँढ़ सकते हैं ? ऐसे कोणों को ढूंढ़ें और उन्हें अपनी कॉपी में बनाएँ।

कोण बनाने के लिए हम एक ही बिंदु से दो अलग-अलग दिशाओं में किरण ले सकते हैं। आप भी अलग-अलग तरह के कोण बनाएँ और अपने दोस्तों को दिखाएँ।

कोणों का मापन

जिस प्रकार हम लंबाई को स्केल की सहायता से नापते हैं, वज़न के लिए तराजू का इस्तेमाल करते हैं, उसी प्रकार कोण के लिए चाँदा (कोणमापक) का इस्तेमाल होता है। जैसे लंबाई को मीटर/से.मी. में, वज़न को किलोग्राम या ग्राम में मापा जाता है, उसी प्रकार कोण को डिग्री में मापते हैं। हम डिग्री में कोण को नापने के लिए चाँदा (कोणमापक) का इस्तेमाल करते हैं। आपने पुरानी कक्षा में चाँदे (protractor) का इस्तेमाल सीखा होगा। यदि नहीं, तो अपने अध्यापक से इसके इस्तेमाल के बारे में चर्चा करें।

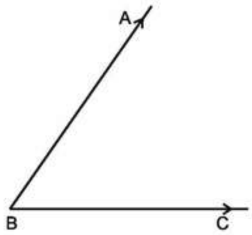
अपने क्लासरूम में आप कहाँ-कहाँ समकोण देखते हैं ?

____

____

कोण को हम दो रेखाओं के झुकाव से भी समझते हैं।

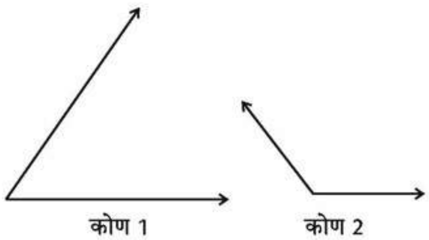
कोणों का नामकरण



हम दी गई आकृति में देख सकते हैं कि दो किरणें $\overrightarrow{BA}$ तथा $\overrightarrow{BC}$ एक कोण बना रही हैं। इसको हम $\angle ABC$ या $\angle CBA$ या फिर $\angle B$ के नाम से जानते हैं।

क्या हम कोणों के माप के आधार पर उनका वर्गीकरण जानते हैं जैसे न्यूनकोण, अधिककोण, समकोण। अपने साथियों एवं अध्यापक से इसके बारे में चर्चा करें।

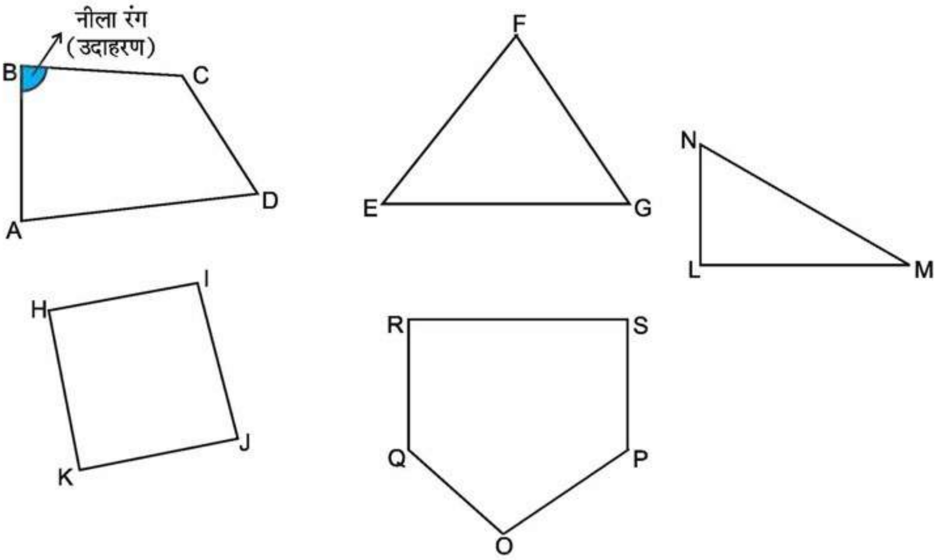
क्या हम नीचे दिए गए कोणों में बता सकते हैं कि किस कोण की माप ज्यादा है ?



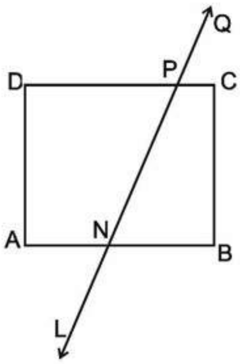
अपने अध्यापक से चर्चा करें कि क्या कोण की भुजाओं के छोटा या बड़ा होने से कोण की माप में कोई अंतर आता है ?

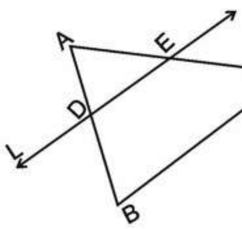
आओ कोणों को पहचानें

निम्नलिखित आकृतियों में बने कोणों में **न्यूनकोण** के लिए नीला, **समकोण** के लिए पीला तथा **अधिककोण** के लिए लाल रंग भरें।

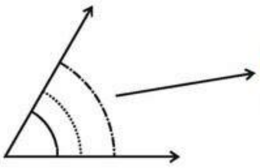


नीचे दी गई आकृति में आप कितने कोण ढूँढ़ सकते हो? उन सभी के नाम लिखो।



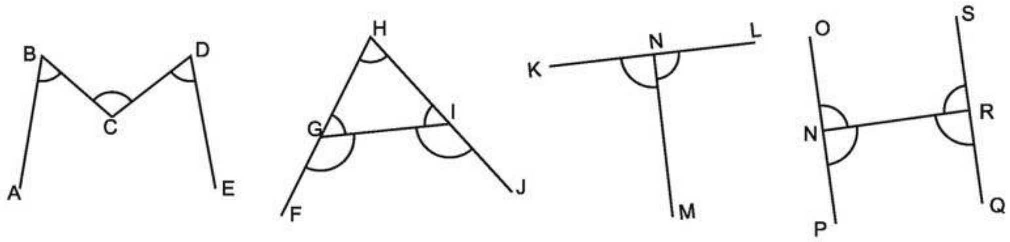


कोण की माप को हम घुमाव से भी दिखाते हैं। इस घुमाव को दिखाने के लिए हम चाप का इस्तेमाल करते हैं।

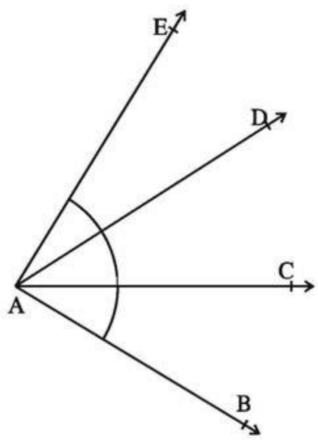


दी गई आकृति में हम देख सकते हैं कि एक ही कोण को दिखाने के लिए हम अलग-अलग त्रिज्या वाली चाप का प्रयोग कर सकते हैं।

नीचे दिए गए प्रत्येक alphabet के कोणों को मापो और लिखो।



नीचे दी गई आकृति में कितने कोण बन रहे हैं? उन सभी कोणों के नाम लिखो।



आओ एक रोल प्ले पढ़ते हैं इसे अपने अध्यापक के मदद से खेलते है।

आओ कोणों को जाने।

(8 छात्र)

क्लास में टीचर लकड़ी के विभिन्न लंबाइयों के कुछ स्केल लेकर बच्चों के साथ खेल कराता है. स्केल्स को लेकर तरह-तरह की मुद्राओं में आकृति बनवाने की कोशिश करता है सभी आँखें बंद करके दायरे में चारों ओर बैठ जाते हैं और जो-जो निर्देश दिए जाते हैं उन्हें ध्यानपूर्वक सुनते हुए एक्शन करते हैं।)

विनोद (टीचर): सभी के हाथ में तरह तरह की लंबाइयों के स्केल हैं. आप कल्पना कीजिये कि कोई दो स्केल्स आपस में एक दूसरे को काटते हैं. तो कैसी आकृति उभरती है?

मनोज: सर ये प्रतिच्छेदी रेखाओं की तरह एक दूसरे को काटती हैं।

विनोद: हाँ, ये ठीक है। कोई भी दो या दो से ज़्यादा रेखाएं एक दूसरे को आगे-पीछे बढ़ाने पर या तो काटेंगी या नहीं काटेंगी। जब काटेंगी तो प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाएँगी, और अगर नहीं काटेंगी तो वे समांतर रेखाएँ कहलाएँगी।

आलम : कितना आगे पीछे बढ़ाएँ सर?

विनोद : जितना भी बढ़ा सकते हो।

(छात्रों को आँख खोलने को कहा जाता है। वे आँख खोलते हैं। छात्रों को अब दीवार पर लगे खाली चार्ट्स के पास जाने को कहा जाता है और कल्पना में बनाई गई आकृतियों को चार्ट के ऊपर बनाने को कहा जाता है।)

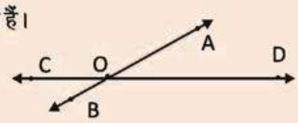
विनोद : जब दो रेखाएं एक-दूसरे को काटती हैं, तो उनके बीच में बनने वाला झुकाव क्या कहलाता है?

असलम : कोण सर।

विनोद : बिल्कुल सही, दो रेखाओं के काटने पर उन रेखाओं के बीच के झुकाव को कोण कहते हैं। क्या आप अपने शरीर के किसी हिस्से से कोण बनाकर दिखा सकते हैं।

(ममता अपनी उँगलियों से कोण बनाने का इशारा करती है। असलम कुहनियों का इस्तेमाल करते हुए दोनों हाथों से कोण बनाने का इशारा करता है। व्योमेश अपनी टांगों से कोण बनता हुआ खड़ा होता है। विनोद सर सभी बच्चों को बारी-बारी से देखते हुए चलते हैं)

विनोद: आप अगर ध्यान से देखें तो पता चलेगा कि इन कोणों को बनाने में दो किरणों का इस्तेमाल हुआ है जो एक बिंदु पर मिलती हैं।



मनोज: जिस तरह चार्ट पर बने एक चित्र में AB और CD रेखाएं एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करती हैं तो उसमें से अगर AOD भाग को अलग करके देखें तो क्या यही कोण कहलाएगा?

विनोद: बिल्कुल सही मनोज।

ग़ज़ल : जिस बिंदु पर वे दोनों किरणें मिलती हैं, उस बिंदु को क्या कहते हैं? सर

विनोद : इस बिंदु को शीर्ष कहा जाता है। और उन किरणों को जिनसे कोण बना है कोण बनाने वाली भुजाएँ कहा जाता है। अच्छा बताओ, ऊपर की आकृतियों में शीर्ष कौन सा होगा।

विप्लव : O

विनोद : और भुजाएँ?

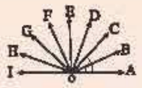
आलम : OA और OD

विनोद : बिल्कुल ठीक।

ग़ज़ल : सर कोण तो छोटे-बड़े भी होते हैं। है न?

विनोद : क्या बात है ग़ज़ल, तुमने तो मेरे मुँह की बात छीन ली। कोणों को समझने के लिए हमें ये भी समझना होगा कि कोई चीज़ कैसे बढ़ती है।

(विनोद सर चार्ट पर जाते हैं।)



अच्छा अगर हम किरण OA से होते हुए OB और OC की ओर बढ़ते हैं तो देखते हैं कि तमाम किरणों का OA से झुकाव धीरे धीरे बढ़ रहा है।

आलम : ये तो बहुत सारे कोण बन रहे हैं।

विनोद :सही कहा तुमने आलम, इनमें छोटे-बड़े किस्म के बहुत से कोण बन रहे हैं। किसी भी खास कोण को जानने के लिए क्या हम कोई नाम दे सकते हैं ताकि हम अलग अलग कोणों को पहचान सकें।

ग़ज़ल: कोण तो कोण हैं सर, उन्हें नाम देने की क्या ज़रूरत?

विप्लव: ज़रूरत क्यों नहीं। अरे भाई जिस तरह अलग-अलग इंसानों को हम नाम देकर पुकारते हैं, उसी तरीके से इन कोणों को भी नामों से पुकारा जाना चाहिए, जिनमें कोई छोटा है कोई बड़ा।

विनोद : बिल्कुल सही कहा विप्लव ने। इन कोणों की खास पहचान के लिए हम उन्हें नाम देंगे।

आलम : सर इन्हें हम नाम कैसे देंगे?

विनोद: अभी जानते हैं आलम। कई बार तुम बहुत जल्दी करते हो।

मनोज: हाँ सर, आज लंच पीरियड में इसने एक पूड़ी एक साथ अपने मुँह में रख ली थी।

आलम: सर इसने शर्त लगाई थी कि अपना लंच कौन जल्दी खत्म करेगा।

विनोद: ये गलत बात है आलम कि तुम शर्त में जल्दी-जल्दी खाना खाते हो। इससे हमें कोई भी नुकसान हो सकता है। खाने और पढ़ने के समय पूरी तरह इत्मीनान रखना चाहिए। बहरहाल कोणों के बारे में जानें ...

आलम : यस सर!

विनोद: तो ऊपर की इस आकृति में किरण OA और OB से एक कोण बन रहा है। इस कोण का क्या नाम होगा ?

विकास: (जो काफी देर चुपचाप बैठा था) मैं बताऊँ सर?

विनोद: अरे वाह! विकास, शाबाश, बताओ!

विकास: सर इसे कहेंगे कोण AOB

आलम : मगर सर मैं तो इसे कोण BOA पढूंगा।

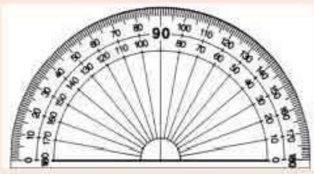
विनोद: तुम दोनों ही सही हो विकास और आलम। हम इसे कोण AOB और BOA दोनों ही पढ़ सकते हैं।

मनोज : सर अगला कोण है BOC, है न सर?

विनोद: बिल्कुल सही मनोज। अब क्या इन दोनों कोणों को मिलाकर हम एक कोण बनाकर पढ़ सकते हैं?

आलम: कोण AOC या COA।

विनोद: बहुत अच्छे। इन कोणों को ही मापने के लिए हमने चांदा बनाया। जो 0 से 180 अंश/डिग्री में विभाजित होता है। इसके ज़रिए हम कोणों का सही माप न केवल जान सकते हैं बल्कि बना भी सकते हैं।

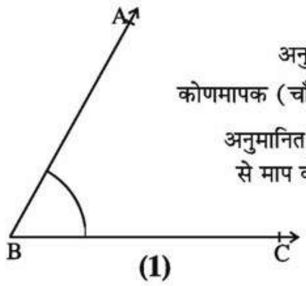


अब हम तमाम कोणों को बनाकर नाप सकते हैं और बना सकते हैं। क्या हम इसके लिए घर पर बार-बार अभ्यास (प्रक्टिस) करेंगे?

सभी बच्चे हँसते हुए यस सर, यस सर कहते हैं। विनोद सर भी उन्हें उतनी ही गर्माहट के साथ सबको गले लगाते हैं।

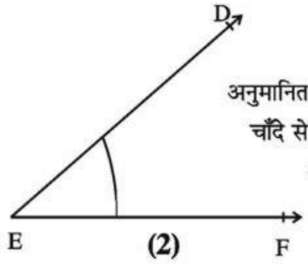
आइए, अनुमान लगाएँ

नीचे दिए गए कोणों की माप पहले अनुमान से बताएँ। फिर उसे कोणमापक की सहायता से मापें और लिखें।



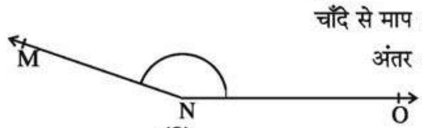
(1)

अनुमानित माप = 55°
कोणमापक (चाँदे) से माप = 60°
अनुमानित माप व चाँदे से माप के बीच अंतर = 5°



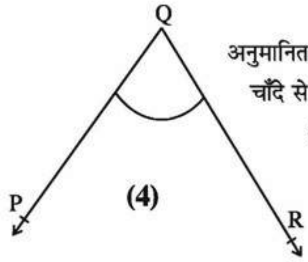
(2)

अनुमानित माप = ____
चाँदे से माप = ____
अंतर = ____



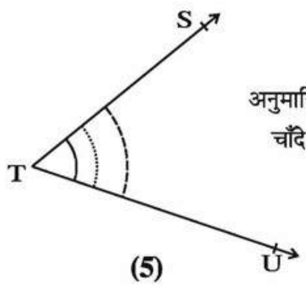
(3)

अनुमानित माप = ____
चाँदे से माप = ____
अंतर = ____



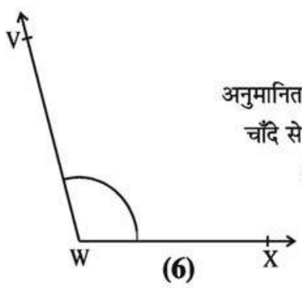
(4)

अनुमानित माप = ____
चाँदे से माप = ____
अंतर = ____



(5)

अनुमानित माप = ____
चाँदे से माप = ____
अंतर = ____



(6)

अनुमानित माप = ____
चाँदे से माप = ____
अंतर = ____

आकृति 5 में हम देखते हैं कि कोण STU में तीन अलग-अलग चाप लगी हैं। क्या इन चाप के अलग-अलग होने से कोण के मान में भी अंतर आता है? अपने अध्यापक से चर्चा करें।

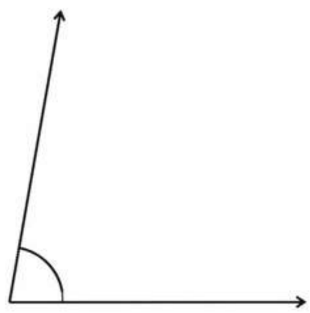
पूरक कोण

जब दो कोणों का योग 90° हो तो उन्हें एक–दूसरे का पूरक कोण कहते हैं, जैसे (63°, 27°), (46°, 44°) इत्यादि

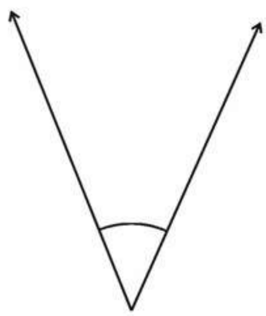
संपूरक कोण

जब दो कोणों का योग 180° हो तो उन्हें एक–दूसरे का संपूरक कोण कहते हैं।

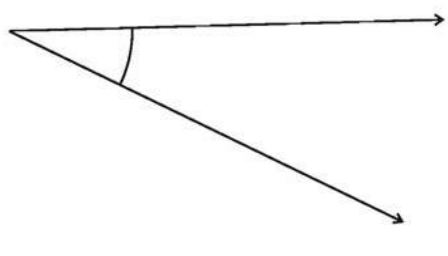
अब निम्नलिखित कोणों को मापो तथा उनके पूरक व संपूरक कोण बताओ।



कोण की माप = 80°
पूरक कोण की माप = 10°
संपूरक कोण की माप = 100°



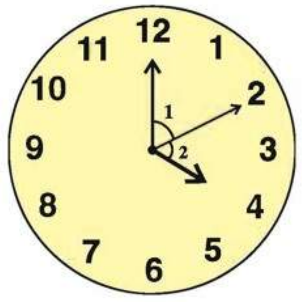
कोण की माप =.............
पूरक कोण की माप =.............
संपूरक कोण की माप =.............



कोण की माप =.............
पूरक कोण की माप =.............
संपूरक कोण की माप =.............

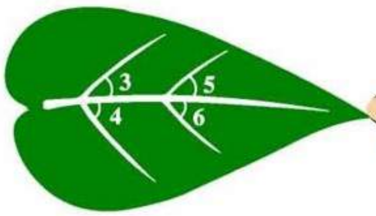
कोण की माप =.............
पूरक कोण की माप =.............
संपूरक कोण की माप =.............

नीचे दी गई घड़ी में क्या हम बता सकते हैं कि कितना समय हुआ है? ____________



अब हम घंटे और सेकंड की सुई के बीच के कोण तथा सेकंड और मिनट की सुई में बीच कोणों को देखते हैं।

$\angle 1$ तथा $\angle 2$ में कौन सी सुई कॉमन (उभयनिष्ठ) है?
आपका उत्तर ____________



$\angle 3$ तथा $\angle 4$ में क्या कोई भुजा कॉमन (उभयनिष्ठ) है?
सोचिए

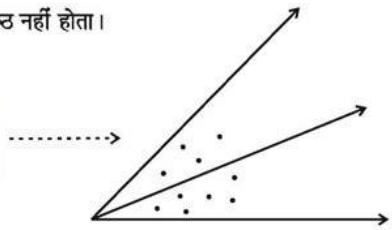
ऊपर हम देखते हैं कि कोणों के तीनों जोड़ों ($\angle 1, \angle 2$) ($\angle 3, \angle 4$) ($\angle 5, \angle 6$) में

- शीर्ष एक ही है (उभयनिष्ठ शीर्ष)
- एक भुजा दोनों में कॉमन (उभयनिष्ठ) है
- जो भुजाएँ कॉमन नहीं हैं, वे भुजाएँ कॉमन भुजा के एक-दूसरे की उल्टी तरफ हैं।

ऐसे कोणों के युग्म को आसन्न कोण कहते हैं।

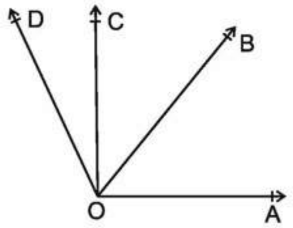
आसन्न कोणों के अभ्यंतर कोई बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होता।

हम देख सकते हैं कि आकृति में दिए गए आसन्न कोणों में कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है।



आओ पहचानें

नीचे दी गई आकृतियों में हम आसन्न कोणों के कितने जोड़े बना सकते हैं?



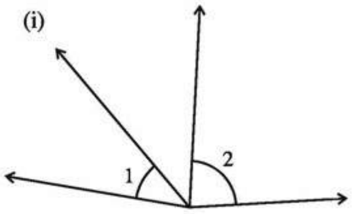
____

____

____

नीचे दी गई आकृतियों में बताएँ कि $\angle 1$ तथा $\angle 2$ आसन्न कोण हैं या नहीं। कारण भी लिखें।

(i)



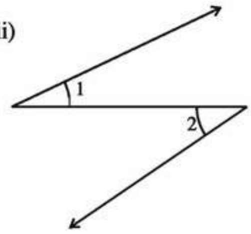
क्या कोण 1 और कोण 2 में-

शीर्ष उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)_________

भुजा उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)_________

क्या कोण 1 और कोण 2 आसन्न कोण हैं (हाँ/नहीं)_________

(ii)



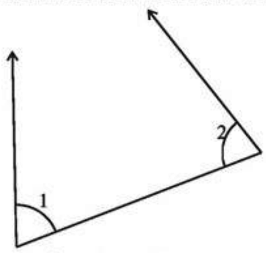
क्या कोण 1 और कोण 2 में-

शीर्ष उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)_________

भुजा उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)_________

क्या कोण 1 और कोण 2 आसन्न कोण हैं (हाँ/नहीं)_________

(iii)



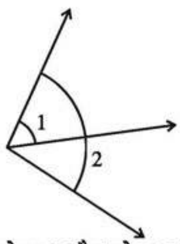
क्या कोण 1 और कोण 2 में-

शीर्ष उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)_________

भुजा उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)_________

क्या कोण 1 और कोण 2 आसन्न कोण हैं (हाँ/नहीं)_________

(iv)



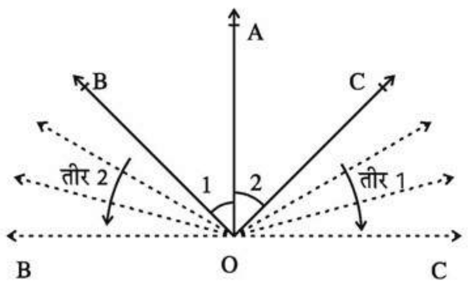
क्या कोण 1 और कोण 2 में-

शीर्ष उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)_________

भुजा उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)_________

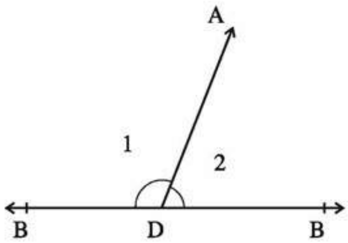
क्या कोण 1 और कोण 2 आसन्न कोण हैं (हाँ/नहीं)_________

आओ कुछ सोचें



ऊपर हम देखते हैं कि किरण OC को तीर 1 की दिशा में घुमाएँ तथा किरण OB को तीर 2 की दिशा में घुमाएँ तो एक स्थिति ऐसी होगी जब $\overrightarrow{OC}$ तथा $\overrightarrow{OB}$ एक-दूसरे की विपरीत दिशा में होंगी। मतलब BOC एक सरल रेखा होगी।

कुछ इस तरह



इस स्थिति में आसन्न कोण 1 और 2 को रैखिक युग्म भी कह सकते हैं।

इन दोनों कोणों का योग 180° होता है।

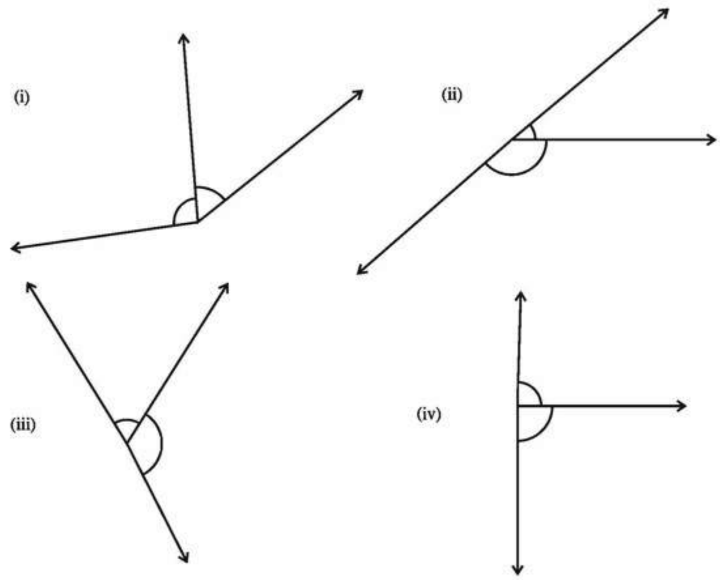
ऊपर दी गई आकृति में कोण 1 तथा कोण 2 को मापें तथा उनका योग ज्ञात करें।

कोण 1 = ____________________

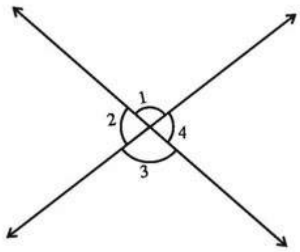
कोण 2 = ____________________

कोण 1 + कोण 2 = ____________________

नीचे दी गई आकृति में देखकर बताएँ कि कौन से आसन्न कोण एक रैखिक युग्म बनाते हैं?



नीचे दी गई आकृति में कोणों को चाँदे से मापें।



$\angle 1$ = ______

$\angle 2$ = ______

$\angle 3$ = ______

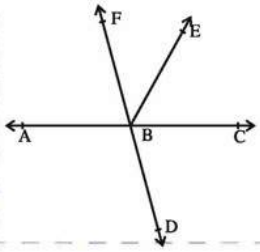
$\angle 4$ = ______

क्या $\angle 1$ तथा $\angle 3$ का मान बराबर है?

क्या $\angle 2$ तथा $\angle 4$ का मान बराबर है?

कोणों के इन युग्मों ($\angle 1$, $\angle 3$) तथा ($\angle 2$, $\angle 4$) को, हम शीर्षाभिमुख या उर्ध्वाधर सम्मुख कोण कहते हैं। शीर्षाभिमुख कोण हमेशा बराबर होते हैं।

अब नीचे दी आकृति में बताएँ



1) कोई तीन आसन्न कोणों के जोड़े ________ ________ ________

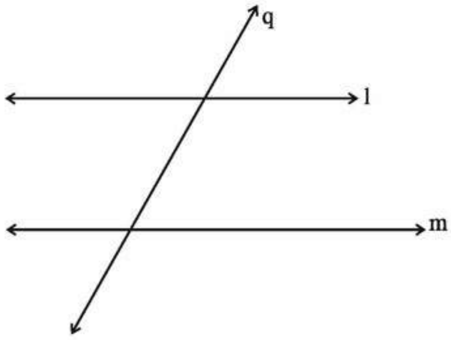
2) कोई तीन रैखिक युग्म ________ ________ ________

3) शीर्षाभिमुख उर्ध्वाधर सम्मुख कोण के दो जोड़े ________ ________

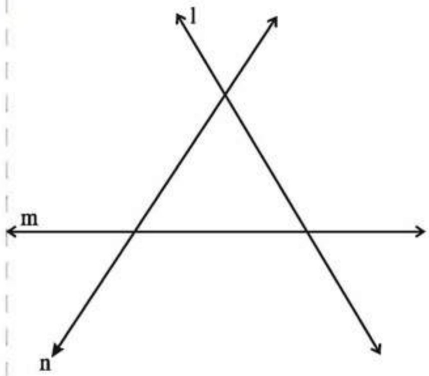
आओ, तिर्यक छेदी रेखाओं के बारे में जानें

ऐसी रेखा जो दो अथवा दो से अधिक रेखाओं को अलग–अलग बिंदुओं पर काटे उसे **तिर्यक छेदी रेखा** कहते हैं।

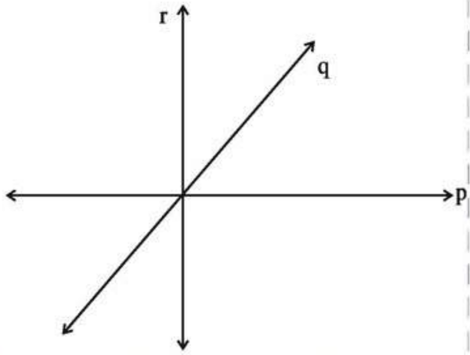
जैसे नीचे दी गई आकृति में रेखा **q** तिर्यक छेदी रेखा है। क्योंकि यह रेखा **l** तथा रेखा **m** को दो अलग–अलग बिंदुओं पर काटती है।



क्या हम बता सकते हैं कि नीचे दी गई आकृति में कौन–कौन सी रेखाएँ तिर्यक छेदी रेखाएँ हैं?

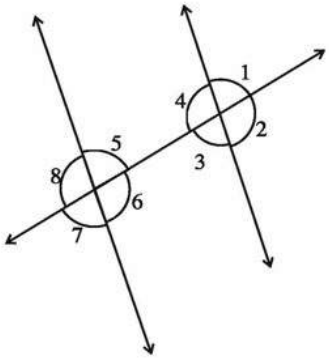


आपका उत्तर ____________________



आपका उत्तर ____________________

एक तिर्यक रेखा जब दो रेखाओं को अलग–अलग बिंदुओं पर काटती है तो आठ कोण बनते हैं।

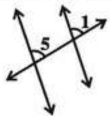


इन कोणों को हम कुछ विशेष नाम देते हैं।

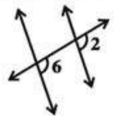
अन्तः कोण – $\angle 4, \angle 3, \angle 5, \angle 6$

बाह्य कोण – $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$

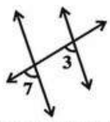
संगत कोण के जोड़े (युग्म) → $\angle 1$ और $\angle 5$



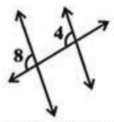
$\angle 2$ और $\angle 6$



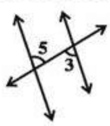
$\angle 3$ और $\angle 7$



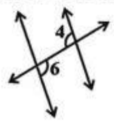
$\angle 4$ और $\angle 8$



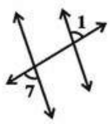
एकांतर अंतः कोणों के युग्म → $\angle 3$ और $\angle 5$



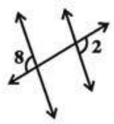
$\angle 4$ और $\angle 6$



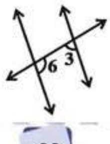
एकांतर बाह्य कोण → $\angle 1$ और $\angle 7$



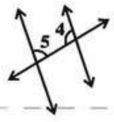
$\angle 2$ और $\angle 8$



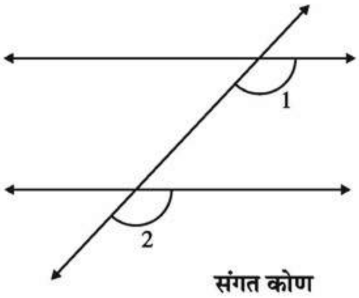
तिर्यक रेखा के एक ओर
के अन्तः कोणों का युग्म → $\angle 3$ और $\angle 6$



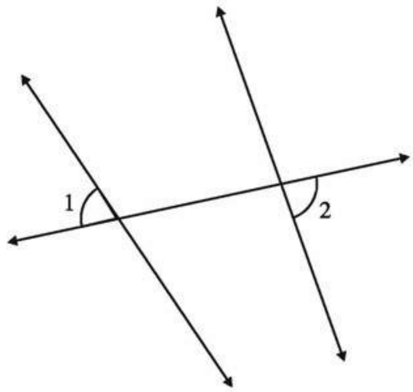
$\angle 4$ और $\angle 5$



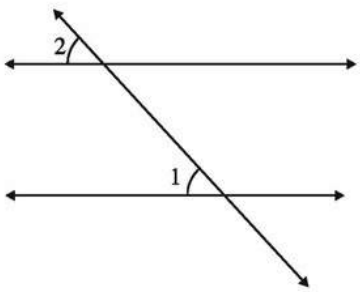
पीछे दी गई तालिका के आधार पर नीचे दी गई आकृतियों में बने कोण 1 तथा कोण 2 के युग्म के विशिष्ट नाम लिखें।



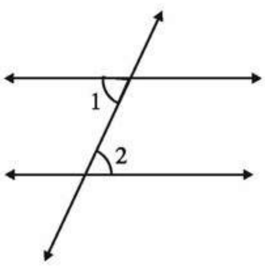
संगत कोण



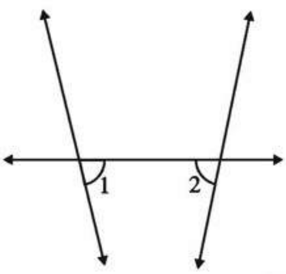
....



....

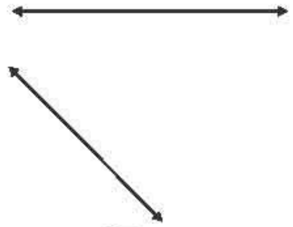


....



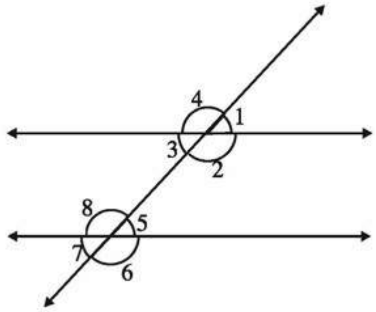
....

नीचे दी गई रेखाएं क्या प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं?



नीचे दी गई आकृति में दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद कर रही है।

इस प्रकार बने कोणों को मापें तथा उनका मान लिखें।



$\angle 1$ = ___	$\angle 2$ = ___	$\angle 3$ = ___	$\angle 4$ = ___
$\angle 5$ = ___	$\angle 6$ = ___	$\angle 7$ = ___	$\angle 8$ = ___

क्या $\angle 1$, $\angle 3$, $\angle 5$, $\angle 7$ बराबर हैं?

क्या $\angle 2$, $\angle 4$, $\angle 6$, $\angle 8$ बराबर हैं?

हम देखते है कि दो समांतर देखाओं को तिर्यक रेखा के काटने पर बने :

→ संगत कोण बराबर होते हैं।

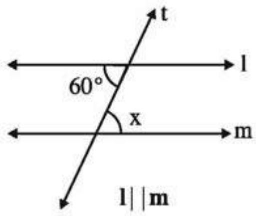
→ अंत: एवं बाह्य एकांतर कोण बराबर होते हैं।

→ तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने कोणों का योग 180° होता है।

दो रेखाओं के समांतर होने को गणितीय रूप में चिन्ह || से दिखाते हैं।

आओ करें

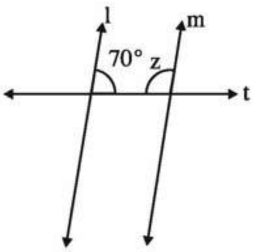
(i)



l||m

x का मान ज्ञात करो— ________

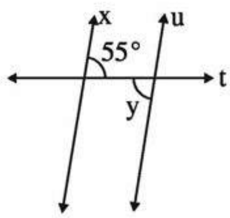
(ii)



l||m है।

z = ?

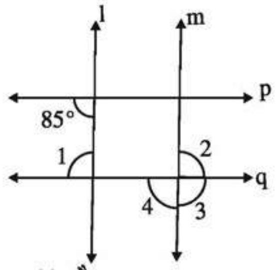
(iii)



x||u है।

y = ?

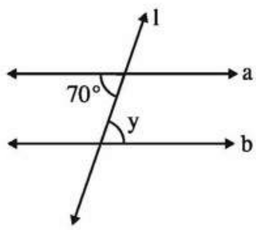
(iv)



l||m तथा p||q है।

∠1, ∠2, ∠3, ∠4 का मान ज्ञात करो—

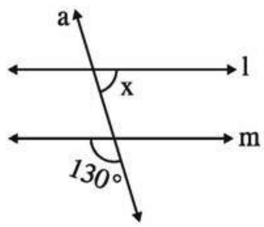
(v)



a||b

y = ?

(vi)



l||m

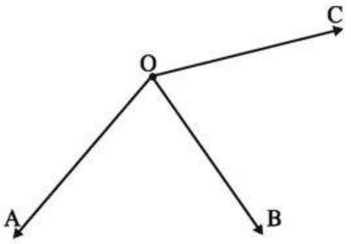
x = ?

अध्याय 3 – त्रिभुज और उसके गुण

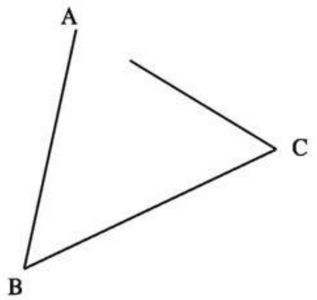
दोस्तो, पिछली कक्षा में हमने त्रिभुज के बारे में जाना था। आइए, आगे बढ़ने से पहले नीचे दी गई आकृतियों को देखें और यह बताएँ कि किस आकृति में त्रिभुज बन रहा है।
मज़ेदार बात यह है कि सभी आकृतियाँ तीन-तीन रेखाखंडों से मिलकर बनी हैं।

क्या आकृति त्रिभुज है (हाँ या नहीं)

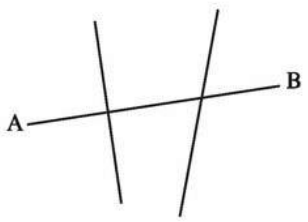
(i)



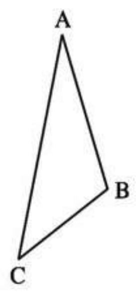
(ii)



(iii)

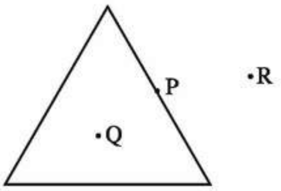


(iv)



पीछे दी गई आकृतियों के आधार पर क्या हम सोच सकते हैं कि एक त्रिभुज कब बना है तथा त्रिभुज की पहचान कैसे करेंगे?

आओ, अब त्रिभुज के अंदर के भाग के बारे में सोचें। नीचे दिए गए त्रिभुज में रंग भरें।



दिए गए त्रिभुज के बाहर के भाग के बारे में सोचें।

यदि हमसे त्रिभुज के बाहर के भाग में रंग भरने के लिए कहा जाए तो हम कहाँ-कहाँ रंग भरेंगे? अपने साथियों एवं अध्यापक से चर्चा करें।

त्रिभुज के अंदर के बंद भाग को अभ्यंतर भाग तथा बाहर वाले भाग से बहिर्भाग कहते हैं।

अब बताएँ।

बिंदु Q कहाँ स्थित है? : त्रिभुज के अन्दर (अभ्यंतर)

बिंदु R कहाँ स्थित है? : त्रिभुज के _____

बिंदु P कहाँ स्थित है? : त्रिभुज के _____

क्या हम सोचकर बता सकते हैं कि एक त्रिभुज के अभ्यंतर भाग में कितने कोण में होते हैं?

त्रिभुज को कुछ लोग त्रिकोण भी कहते हैं।

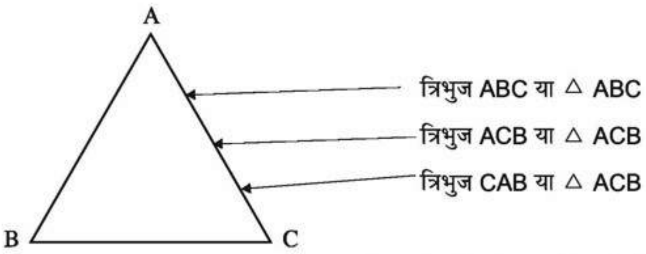
हम देख सकते हैं कि त्रिभुज के तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ और तीन कोण होते हैं।

क्या हम जानते हैं कि एक शीर्ष कब बनता है? अपने साथियों एवं अध्यापक से इसकी चर्चा करें।

आइए, त्रिभुज का उसके शीर्ष बिंदुओं के नामों की सहायता से उसका नामकरण करते हैं।

जैसे:–

△ चिन्ह
त्रिभुज को दर्शाता है।



क्या त्रिभुज के और भी नाम हो सकते हैं?
लिखने का प्रयास कीजिए।

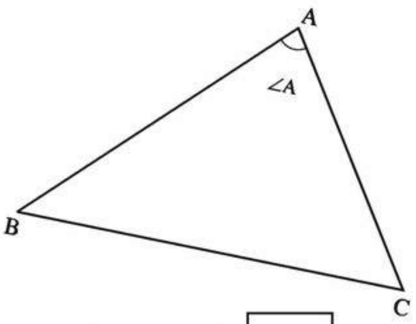
हम देखते है कि त्रिभुज को 6 नाम से संबोधित कर सकते हैं।

त्रिभुज ________ या ________

________ या ________

________ या ________

आइए, त्रिभुज को समझते हैं।



ΔABC में कितने कोण हैं? ☐

कोणों के नाम लिखो –

(1) ∠A या ∠BAC या ∠CAB

(2) ________

(3) ________

ΔABC में कितनी भुजाएँ हैं? ☐

भुजाओं के नाम लिखने का प्रयास करते हैं –

(1) <u>AB</u>

(2) ________

(3) ________

आइए एक रोल प्ले पढ़ते हैं। इसे अपने अध्यापक की मदद से खेल सकते हैं।

8 छात्र

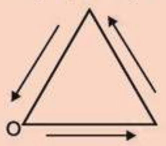
है प्रीत जहाँ की रीत सदा, ज्योमेट्री पढ़ने वाले हैं
बिंदु पढ़ा है कोण पढ़ा अब त्रिभुज समझने वाले हैं ......

(7 बच्चे आँख बंद करके अपनी जगह पर बैठ जाते हैं। टीचर की हिदायतों के मुताबिक बच्चे प्रतिक्रिया व्यक्त करते हैं।

पवन (टीचर): सभी ध्यानपूर्वक कल्पना करें। एक लम्बा रास्ता चलता ही जाता है, चलता ही जाता है। एक दूसरा रास्ता बाएँ से आकर उससे मिलता है। वो भी आगे चलता ही जाता है, चलता ही जाता है। थोड़ी दूरी पर बाई ओर एक और रास्ता उससे मिलता है और अगर हम वहीं पहुँच जाते हैं जहाँ से चले थे। इसके क्या मायने हैं ?

शबनम : इसके मायने ये है कि लौटकर हम वहीं आ गए जहाँ से चले थे मतलब अपने घर आ गए। (सभी हँसते है)

पवन : बिल्कुल सही। अब अपनी आँखें खोल लीजिए और इधर चार्ट पर देखिए। इसे हम ऐसे समझ सकते हैं।



विकास: अरे वाह ! ये तो एक बंद आकृति बन गई।

पवन: हाँ, तो इस बंद आकृति में कितनी भुजाएँ हैं ?

हरी: (झिझकते हुए) 3

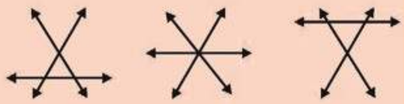
पवन: बिल्कुल सही हरी। जिन रास्तों पर हम चले वो तीन ही तो थे, जिनसे हमारी इस आकृति की भुजाएँ बनीं।

(एक बार फिर से बच्चों को आँखें बंद करने को कहा जाता है।)

पवन: अब माना कि तीन रेखाएँ हैं जो एक दूसरे को काटती हैं। सोचकर देखो! इस सूरत में कैसी-कैसी आकृतियाँ बनेंगी ?

कुछ देर बाद कई बच्चे बंद आँखों के साथ ही हाथ उठाते हैं। पवन सभी बच्चों को आँखें खोलने के लिए कहता है।)

पवन: अब बच्चे चार्ट पेपर पर आकर उन आकृतियों को बनाने की कोशिश करें जो उन्होंने बंद आँखों से बनती हुई महसूस कीं।



(बच्चे चार्ट पेपर पर विभिन्न आकृतियाँ बनाते हैं। सामान्यतौर पर तीन तरह की आकृति उभरकर आती हैं।)

पवन: अब इन तीनों आकृतियों में पहली और तीसरी आकृति में बंद आकृति बन रही हैं। ठीक। इन दोनों ही आकृतियों में क्या खास बात है ?

सुलेख: सर ये दोनों ही बंद हैं।

बिपाशा: ये दोनों ही तीन भुजाओं से बनी हैं।

पवन: शाबाश सुलेख और बिपाशा। तुम दोनों को मैंने पहली बार क्लास में बोलते हुए देखा है।

आमिर: सर इसका नाम मैं बताऊँ ?

पवन: किसका नाम ?

आमिर: इस आकृति का।

पवन: हाँ हाँ बताओ।

आमिर: त्रिभुज।

पवन: अरे वाह ! तुमने इसका नाम कैसे जाना ?

आमिर: सर मेरे बड़े भैया ने मुझे बताया था ?

पवन: अच्छा, और क्या बताया तुम्हारे बड़े भैया ने ?

आमिर: उन्होंने ये भी बताया कि तीन भुजाओं से घिरी

आकृति को त्रिभुज कहते हैं।

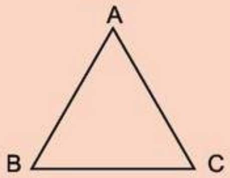
पवन: शाबाश आमिर, तुमने सही कहा। त्रिभुज दरअसल त्रि और भुज दो शब्दों से जुड़कर बना है। कोई त्रि का मतलब बता सकता है?

(कई बच्चे एक साथ हाथ उठाते हैं। पवन बिपाशा को बताने के लिए कहते हैं।)

बिपाशा: त्रि का मतलब होता है तीन।

हरी: और तीन भुजाएँ होती हैं इसीलिए इसे त्रिभुज कहते हैं।

पवन: क्या बात है!! बहुत बढ़िया हरी।



अच्छा, इस आकृति में त्रिभुज का नाम क्या होगा?

सुलेख : त्रिभुज ABC

पवन: बिल्कुल सही। इसकी भुजाएँ कौन-कौन सी हैं?

हरी: भुजा AB, भुजा BC, भुजा CA

पवन: इसमें शीर्ष कितने हैं?

बिपाशा: सर ये शीर्ष क्या होते हैं?

पवन: शीर्ष वे बिंदु होते हैं जिन पर भुजाएँ एक दूसरे से मिलती हैं।

बिपाशा: तो इसके शीर्ष हुए सर .. A, B और C

पवन: गिरि तुम शुरू से ही चुपचाप बैठे हो। क्या तुम बता सकते हो कि इस त्रिभुज में कितने कोण बन रहे हैं। कोणों के नाम क्या- क्या हैं?

गिरि: तीन सर।

शबनम: अरे भाई सर तो एक ही हैं ....कोण तीन हैं।

(हँसी का ठहाका फूटता है।)

पवन: हाँ हाँ शबनम, गिरि का मतलब यही था। है न गिरि?

गिरि: यस सर।

पवन: अच्छा तो अब कोणों के नाम बताओ?

गिरि: कोण A, कोण B और कोण C

पवन: बहुत बढ़िया गिरि। इन कोणों को और स्पष्ट करने के लिए हम कह सकते हैं कोण BAC, कोण ABC और कोण BCA

पवन: अब मुझे ये बताओ कि कोई भी बंद आकृति बनाने के लिए कम से कम कितनी भुजाओं की ज़रूरत होती है?

(बच्चे कुछ देर सोचते हैं।)

शबनम: सर तीन की, तीन से कम में तो बंद आकृति बन ही नहीं सकती।

पवन: बिल्कुल सही। अब क्यों न हम सब स्पोर्ट्स रूम में चलकर त्रिभुज आकृतियों को पहचानें?

गिरि: हम कैरम बोर्ड भी खेलेंगे।

पवन: बिल्कुल बिल्कुल, चलो।

हरी: सर आप भी हमारे साथ खेलेंगे न?

पवन: क्यों नहीं! मैं भी बहुत दिनों से कैरम नहीं खेला, मेरी भी प्रैक्टिस हो जाएगी। तुम्हें पता है, मैं अपने स्कूल के दिनों में कैरम चैंम्पियन था। मैं तुम्हें इस खेल की कुछ ख़ास ट्रिक्स बता सकता हूँ।

भी : यस सर, यस सर ...हम भी सीखेंगे।

बिपाशा: सर प्लीज मेरे साथ भी खेलिएगा।

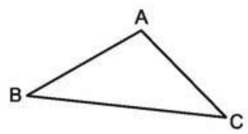
पवन: ठीक है मेरे बच्चो, अब चलो। (सभी का प्रस्थान)

त्रिभुजों को उनके कोणों तथा भुजाओं की विशेषताओं के आधार पर बाँटा जा सकता है।

भुजाओं के आधार पर

- समबाहु (तीनों भुजाओं की माप बराबर)
- समद्विबाहु (किन्हीं दो भुजाओं की माप बराबर)
- विषमबाहु (तीनों भुजाओं की अलग-अलग माप)

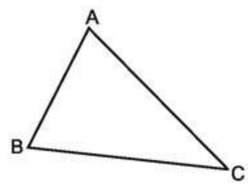
उदाहरण: दिए गए त्रिभुज में हम देख सकते हैं इसकी दो भुजाओं AB तथा AC की लंबाई बराबर है, इसलिए यह समद्विबाहु त्रिभुज होगा।



कोण के आधार पर

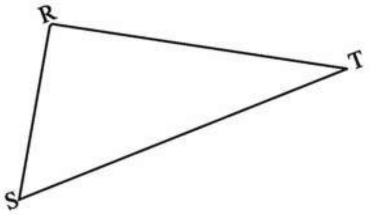
- न्यूनकोण (तीनो कोण 90° से कम)
- समकोण (कोई भी एक कोण 90° के बराबर)
- अधिककोण (कोई एक कोण 90° से ज्यादा)

उदाहरण: दिए गए त्रिभुज में हम देख सकते हैं कि इसके तीनों कोण 90° से कम हैं। इसलिए यह न्यूनकोण त्रिभुज होगा।



आइए कुछ सवालों के ज़वाब देते हैं।

त्रिभुज RST में देखकर उत्तर दीजिए।

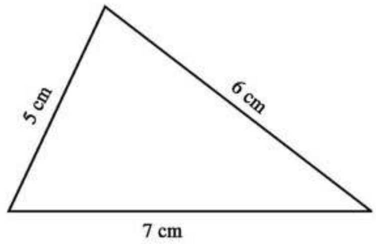


1. तीनों भुजाओं के नाम ______, ______, ______
2. तीनों कोणों के नाम ______, ______, ______
3. तीनों शीर्षों के नाम ______, ______, ______
4. ∠R के सामने (सम्मुख) वाली भुजा का नाम ____________
5. भुजा RT के सामने वाला शीर्ष ____________

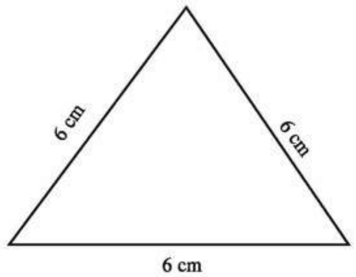
2. त्रिभुजों की भुजाएँ व कोण देखकर त्रिभुजों के नाम लिखिए।

(समबाहु त्रिभुज/ समद्विबाहु/ विषमबाहु/)

(न्यूनकोण, समकोण,अधिककोण)



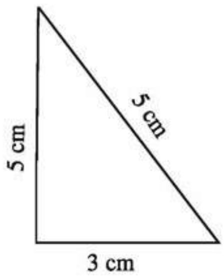
विषमबाहु व न्यूनकोण त्रिभुज



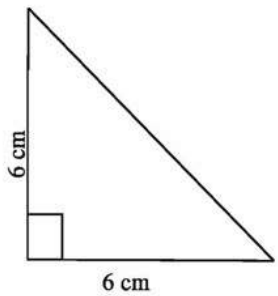
____

आकृति (समबाहु त्रिभुज/ समद्विबाहु/ विषमबाहु/)

(न्यूनकोण, समकोण, अधिककोण)

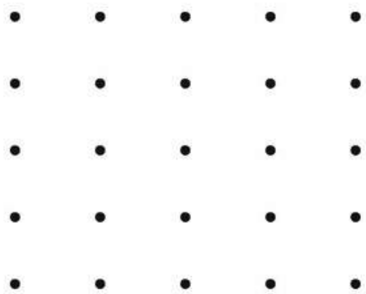


____



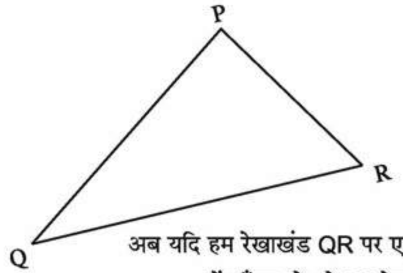
____

नीचे हमें कुछ बिंदु दिए गए हैं, उन बिंदुओं की सहायता से अलग-अलग प्रकार के न्यूनकोण, समकोण और अधिककोण त्रिभुज बनाकर देखिए।



त्रिभुज की माध्यिका

त्रिभुज की माध्यिका, त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसके सामने वाली भुजा के मध्यबिंदु से मिलाने वाला रेखाखंड होती है।

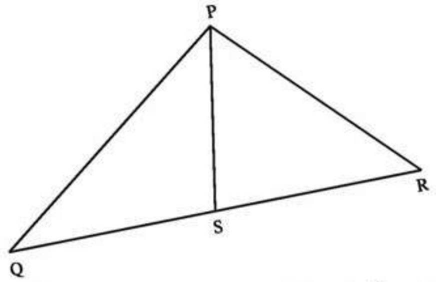


शीर्ष P की सम्मुख भुजा =QR

शीर्ष Q की सम्मुख भुजा = ___

शीर्ष R की सम्मुख भुजा = ___

अब यदि हम रेखाखंड QR पर एक बिंदु S पता कर लें जो QR को दो बराबर भागों में बाँटता हो, तो PS रेखाखंड त्रिभुज PQR की माध्यिका होगी।



क्या हम बता सकते हैं कि त्रिभुज की कितनी माध्यिकाएँ होंगी? ....

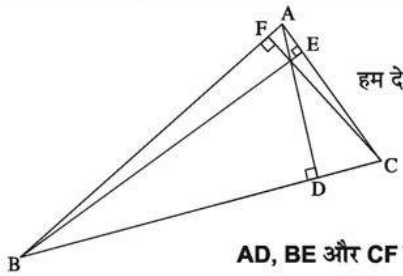
सभी माध्यिकाओं को Δ PQR में दिखाइए।

त्रिभुज के शीर्षलंब **शीर्षलंब** $\xrightarrow{\text{शाब्दिक अर्थ}}$ **शीर्ष से खींचा गया लंब**

क्या हम किसी त्रिभुज की ऊँचाई के बारे में सोच सकते हैं? अपने अध्यापक से चर्चा करें।

हम देखेंगे कि त्रिभुज की ऊँचाई इस बात पर निर्भर करती है कि हम त्रिभुज की कौन सी भुजा को आधार मानते हैं।

यदि हम किसी त्रिभुज के किसी शीर्ष से उसके सामने वाली भुजा पर बनाया गया रेखाखंड 90° का कोण बनाए तो वह रेखाखंड शीर्षलंब कहलाता है।



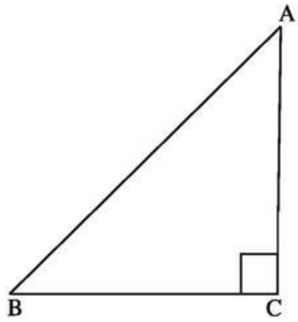
हम देख सकते हैं AD लंब है BC पर

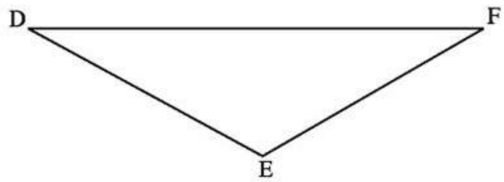
BE लंब है _____ पर

EF लंब है _____ पर

AD, BE और CF तीन शीर्षलंब है।

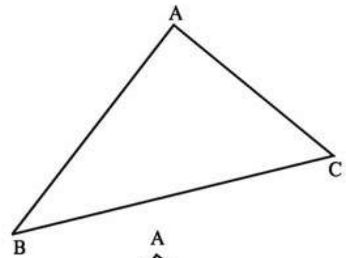
नीचे दिए गए त्रिभुजों के शीर्षलंब अनुमान से बनाइए तथा उनका नाम दीजिए।



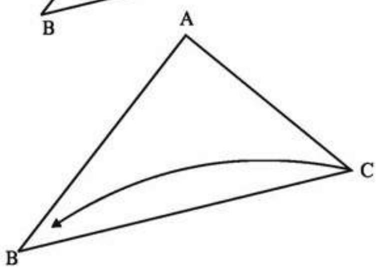


पेपर को मोड़कर माध्यिका बनाना

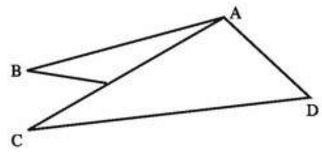
(1) पेपर पर एक त्रिभुज बनाएँ और काट लें।



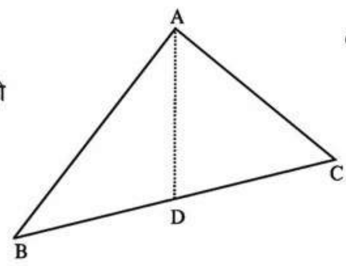
(2) अब त्रिभुज के किन्हीं भी दो शीर्ष को मिला दें।



(3) बिंदु D, BC का मध्य बिंदु है। अब पेपर को खोलकर A और D को पेंसिल से मिला दें।

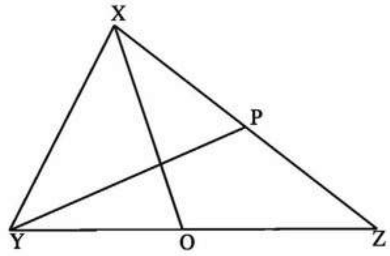


इसी प्रकार त्रिभुज की बाकी बची दो माध्यिकाएँ भी निकालिए।



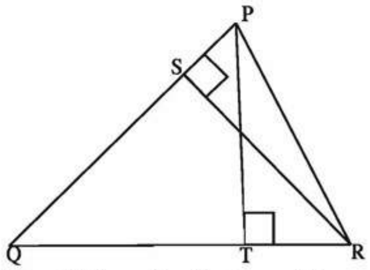
आओ, कुछ प्रश्नों के जवाब दें

आकृति में दोनों माध्यिकाओं को पहचानकर नाम लिखिए।



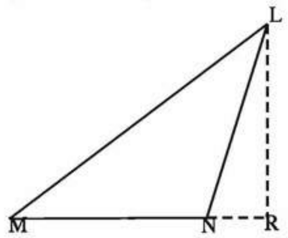
____

आकृति में दोनों शीर्षलंबों को पहचानकर नाम लिखिए।



____

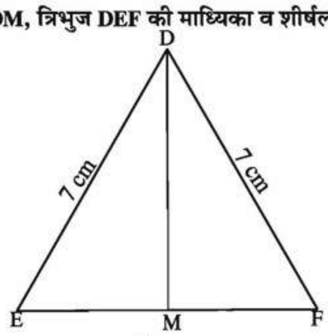
दी गई आकृति में पहचानिए कि LR क्या है?



____

नीचे दी गई आकृति EM तथा MF को मापिए तथा कोण DMF को मापिए।

क्या DM, त्रिभुज DEF की माध्यिका व शीर्षलंब दोनों हैं।



DM - _______________

कोई भी एक त्रिभुज बनाइए। उसके तीनों कोणों का माप निकालिए। तीन कोणों को योग ज्ञात करो तथा अपने साथियों के बनाए त्रिभुज के कोणों के योग से उसकी तुलना कीजिए।

हम देखेंगे कि सभी त्रिभुजों के कोणों का योग 180° आता है।

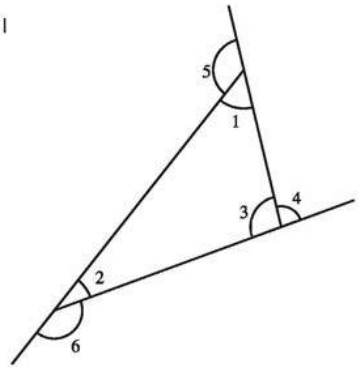
बाह्य कोण (बहिष्कोण)

त्रिभुज के अंदर के भाग में बनने वाले कोणों के नाम $\angle 1, \angle 2, \angle 3$

त्रिभुज के बाहरी भाग में बनने वाले कोणों के नाम ......, ..., ...

वे कोण जो किसी त्रिभुज के बाहरी भाग में बनते हैं उसे बाह्य कोण कहते हैं।

कोणों के माप ज्ञात कीजिए।



$\angle 1$ =.......... $\angle 2$ =..........

$\angle 3$ =.......... $\angle 4$ =..........

$\angle 5$ =.......... $\angle 6$ =..........

हाँ/नहीं

क्या $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ है? ....

क्या $\angle 6 = \angle 1 + \angle 3$ है? ....

क्या $\angle 5 = \angle 2 + \angle 3$ है? ....

हम देख सकते हैं कि किसी भी त्रिभुज की कोई भी भुजा को बढ़ाने पर बना कोण उसके सम्मुख अंत: कोणों के योग के बराबर होता है।

$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

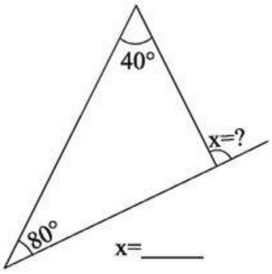
$\angle 5 = \angle 2 + \angle 3$

$\angle 6 = \angle 1 + \angle 3$

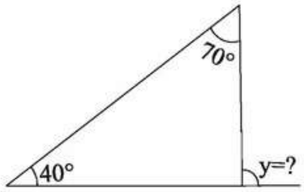
उत्तर दीजिए

1. क्या एक त्रिभुज में तीनों कोण न्यूनकोण हो सकते हैं? ....
2. क्या एक त्रिभुज में तीनों कोण समकोण हो सकते हैं? ....
3. क्या एक त्रिभुज के दो समकोण हो सकते हैं?...............
4. एक त्रिभुज के ज़्यादा से ज़्यादा कितने कोण 90° के हो सकते हैं? ....
5. क्या एक त्रिभुज में दो कोणअधिक कोण हो सकते हैं? ....
6. क्या किसी त्रिभुज का बाह्य कोण 180° का हो सकता है? ....

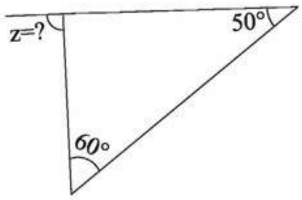
दी गई आकृतियों में अज्ञात बाह्य कोण का मान निकालिए।



x=_____

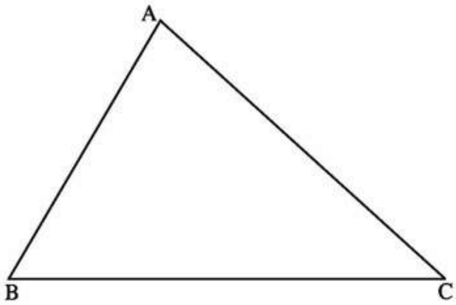


y=_____



z=_____

नीचे बने त्रिभुजों में तीनों कोणों को मापकर लिखें। तीनों का योग भी लिखें।

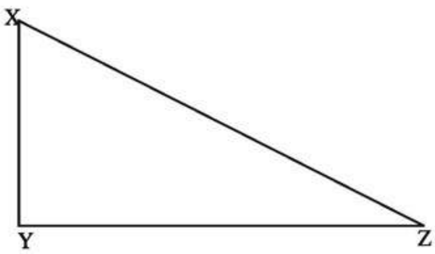


$\angle A$ = ________

$\angle B$ = ________

$\angle C$ = ________

योग = ________

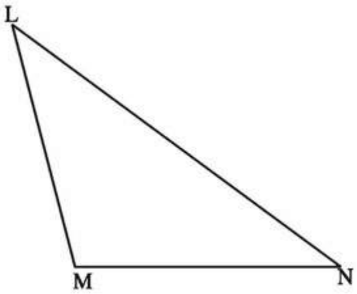


$\angle X$ = ________

$\angle Y$ = ________

$\angle Z$ = ________

योग = ________



$\angle L$ = ________

$\angle M$ = ________

$\angle N$ = ________

योग = ________

आओ खेलें खेल

- झाड़ू की कुछ तीलियाँ लें। अब एक बड़ी तीली के तीन टुकड़े करें और उन टुकड़ो से एक न्यूनकोण त्रिभुज बनाने का प्रयास करें।
- एक और बड़ी तीली लें और उसे इस प्रकार तीन भागों में बाँटें कि एक अधिककोण त्रिभुज बन सके।
- क्या हमारे दोनों त्रिभुज बन गए ? अगर नहीं बने, तो अपने साथियों के साथ मिलकर बनाएँ।

आइए, अब खेल में थोड़ा परिवर्तन करते हैं।

- क्या हम एक और बड़ी तीली के कुछ इस प्रकार टुकड़े कर सकते हैं कि त्रिभुज न बनें ?
- अब फिर से नई तीली लेकर उसके टुकड़े कुछ इस तरह से करें कि त्रिभुज न बने। ध्यान रहे कि इस बार तीलियों के टुकड़ों की लंबाई पिछली बार से अलग हो।

अब नीचे दी गई तालिका के तीली की टुकड़ों की लंबाई मापकर लिखें।

	सबसे छोटे टुकड़े की लंबाई	बीच के टुकड़े की लंबाई	सबसे बड़े टुकड़े की लंबाई
पहला न्यूनकोण Δ			
दूसरा अधिककोण Δ			
जो त्रिभुज नहीं बना			

हम कह सकते हैं कि जब भी हमें तीली के तीन ऐसे टुकड़े करने थे कि त्रिभुज न बने तो एक इतना लंबा टुकड़ा लिया कि बाकी दोनों टुकड़े जोड़कर भी उससे छोटे हों।

क्या हम सकते हैं कि त्रिभुज तभी बनेगा जब इसकी किन्हीं भी दो भुजाओं की लंबाई का योग तीसरी से ज़्यादा हो ?

पीछे तालिका में हम देख सकते हैं कि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई का अंतर तीसरी भुजा की लंबाई के कम होगा।

अब अपने साथियों के साथ मिलकर नीचे दी गई तालिका के हिसाब से तीलियों से त्रिभुज बनाने का प्रयत्न करें।

सबसे छोटे तीली की लंबाई	उससे बड़े तीली की लंबाई	सबसे बड़ी तीली की लंबाई	क्या त्रिभुज बना
2cm	3cm	4cm	
2cm	3cm	5cm	
2cm	3cm	6cm	
2cm	3cm	7cm	
2cm	3cm	8cm	

अध्याय 4 – त्रिभुजों की सर्वांगसमता

अध्यापिका :– बच्चों आज हम सर्वांगसमता के बारे में जानने का प्रयास करेंगे।

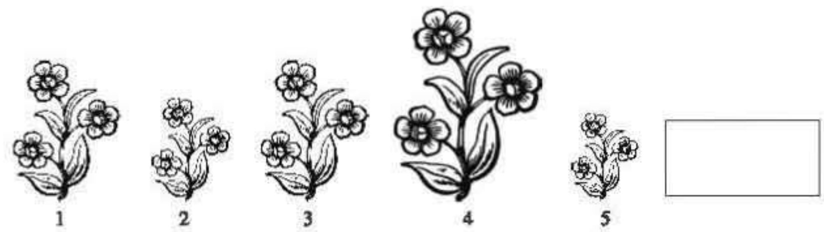
रानी:– सर्वांगसमता क्या होती है?

अध्यापिका :– इसे जानने के लिए आओ पहले कुछ क्रियाकलाप करते हैं।

इन चित्रों को देखो:–

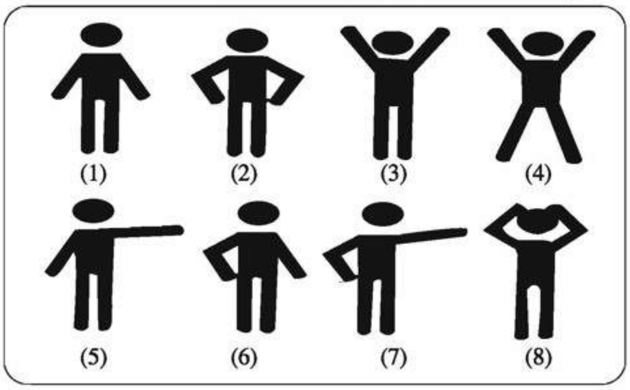
"आओ एक जैसा ढूंढें"

निम्न में से फूलों का वह युग्म निकालो जो आकार तथा माप में बिल्कुल बराबर है।

1. 

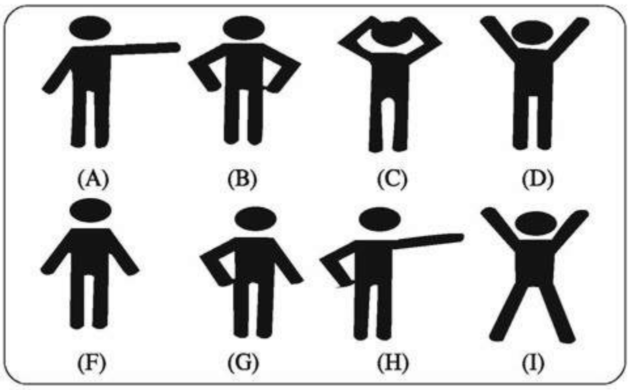
2. कितनी गुड़िया एक दूसरे के माप तथा आकार में बराबर है? यदि हम इन्हें काटकर एक दूसरे के ऊपर रखें तो कौन–कौन सी गुड़िया एक दूसरे को पूरा–पूरा ढ़क लेंगी?

बॉक्स 1 के चित्रों का बॉक्स 2 के चित्रों के साथ मिलान कीजिए



बॉक्स (1)

बॉक्स (2)



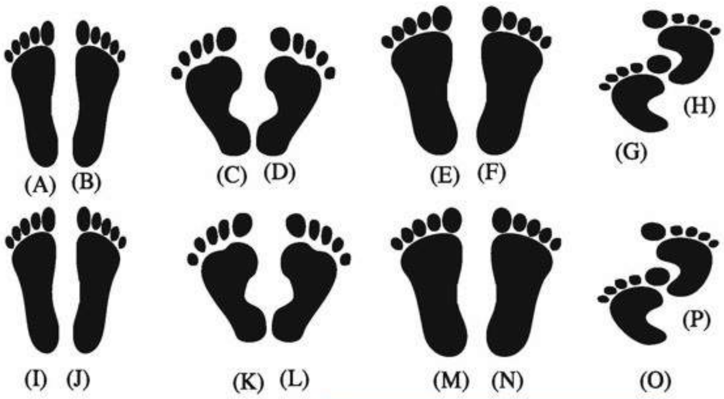
मिलान कीजिए

बॉक्स 1	बॉक्स 2	बॉक्स 1	बॉक्स 2
1	F	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....

बूझो तो जानें

सर्वांगसमता का अर्थ बिल्कुल एक जैसी प्रतिलिपियाँ/आओ ऐसे कुछ उदाहरण अपने जीवन में ढूँढ़ें।

1) हमारी कापियों के पेज
2) एक चाकलेट के डब्बे में चाकलेट
3) ....
4) ....
5) ....
6) ....



सर्वांगसमता की पहचान

(1) माप तथा आकार में बराबर

(2) चित्रों को काटा जाए और एक दूसरे पर रखा जाए तो वे एक दूसरे को पूरा-पूरा ढक लें।

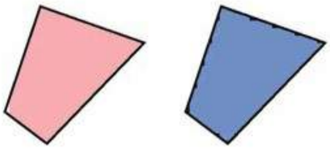
चित्र में कौन-कौन से पैरों के निशान सर्वांगसम हैं?

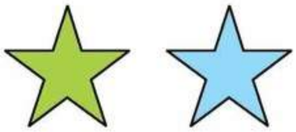
(A)	-	....	(B)	-	....
(C)	-	....	(D)	-	....
(E)	-	....	(F)	-	....
(G)	-	....	(H)	-	....

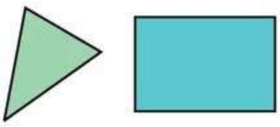
आइए, हम निम्न आकृतियों को देखकर यह जानने का प्रयास करें कि क्या वे आकार व माप दोनों में बराबर हैं? हाँ/नहीं

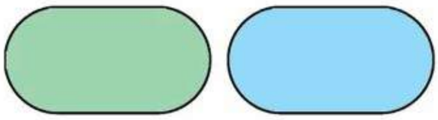
क्या आकृति समान हैं?...............

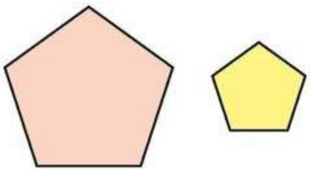
क्या माप समान हैं?...................

1.  ....

2.  ....

3.  ....

4.  ....

5.  ....

6. ....

सर्वांगसमता
↓
सर्व+अंग:+समता
↓
अर्थात सर्व अंग समान

सर्वांगसमता के लिए ≅ चिन्ह का प्रयोग करते हैं, '~' आकार में समान तथा '=' माप में समान

आइए, कक्षा-7 की एक अध्यापिका तथा एक छात्रा रानी की बातचीत पढ़ते हैं।

अध्यापिका : जानते हो ! जो आकृति आकार तथा माप में बिल्कुल बराबर हैं तथा एक को दूसरे के ऊपर रखने पर वह उसे पूरा-पूरा ढक लेती हैं। तो दोनों आकृतियाँ एक दूसरे के सर्वांगसम कहलाती हैं।

रानी : क्या सर्वांगसमता केवल आकृतियों में ही होती है ?

अध्यापिका : नहीं ! घर तथा प्रकृति में बहुत सी वस्तुएँ होती हैं जो एक दूसरे की सर्वांगसम होती हैं। जैसे गिलास, प्लेट, फूल..........................

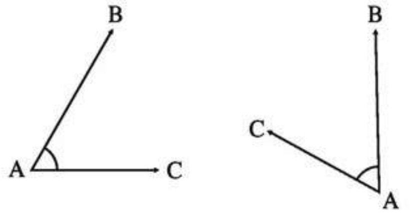
रानी : आज हम गणित में सर्वांगसमता को कैसे जानेंगे ?

अध्यापिका : आज हम रेखाखंडों, कोणों, और त्रिभुजों की सर्वांगसमता को जानेंगे।

रानी : यदि दो भुजाओं, खण्डों की लम्बाई बराबर हैं तो क्या भुजाएँ भी सर्वांगसम होती हैं ?

अध्यापिका : बिलकुल सही ! आओ अब कोणों को सर्वांगसमता को समझते है। दो कोणों की माप अगर बराबर है। तो वे दोनों कोण सर्वांगसम होंगे। यहाँ ध्यान रखने की बात है कि यह ज़रूरी नहीं की दो सर्वांगसम कोणों की भुजाएँ भी बराबर हों।

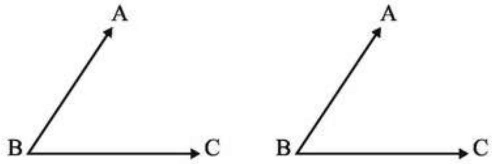
उदाहरण के तौर पर हम नीचे देख सकते हैं कि कोण ABC तथा कोण EFD की माप बराबर है।



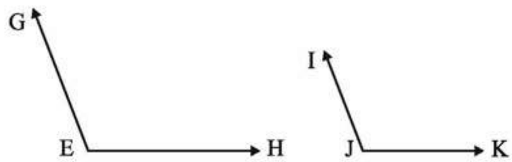
आओ हम कोणों की सर्वांगसमता से संबंधित कुछ समस्याओं का हल करें।

निम्नलिखित कोणों के युग्म को मापें तथा सर्वांगसमता को जाँचें।

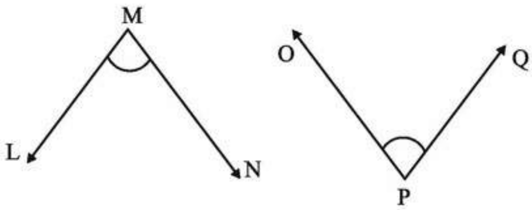
सर्वांगसमता (हाँ/नहीं)

1) 

हाँ ____________

2) 

____

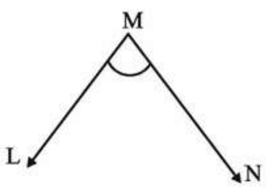
3) 

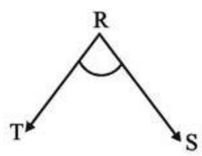
____

4)

____

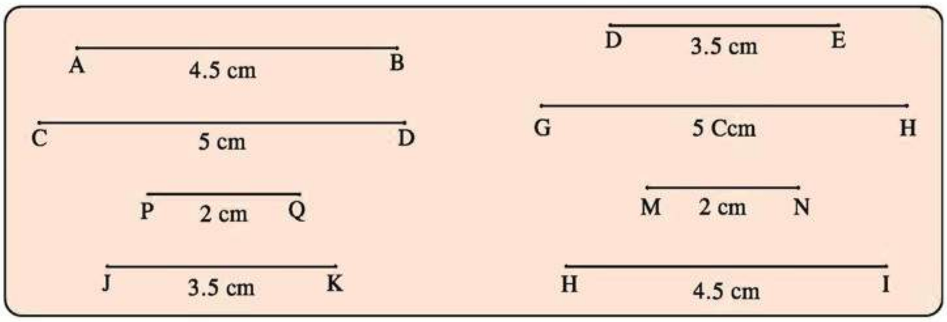
क्या हम बता सकते हैं कि नीचे दिए गए कोण सर्वांगसम हैं? अपने अध्यापक से चर्चा करें





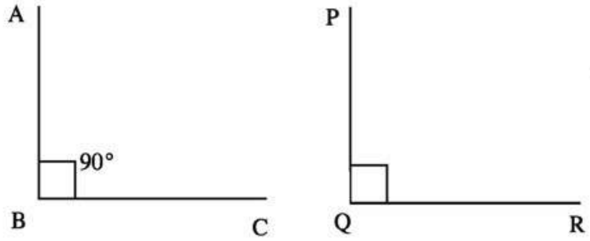
बॉक्स में से छाँटकर लिखिए।

(1)



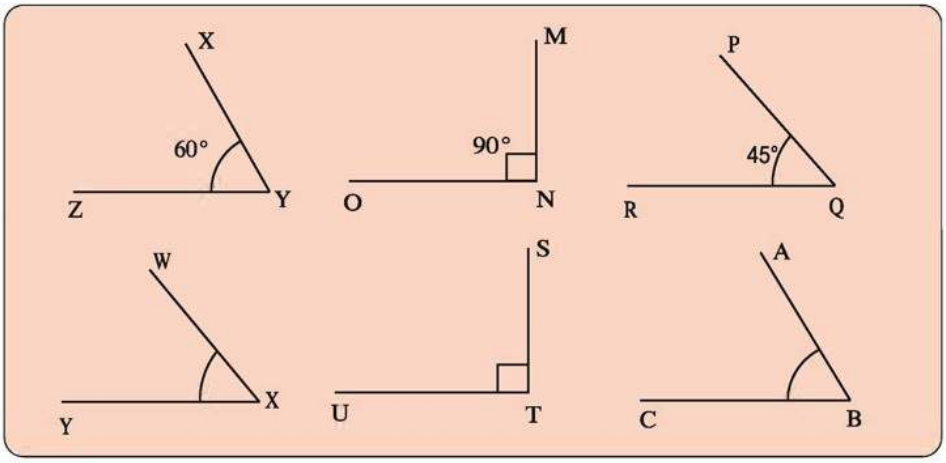
(a) AB ≅ _____ **(b) CD** ≅ _____

(c) DE ≅ _____ **(d) MN** ≅ _____



(a) ∠ABC ≅ _____

(2)



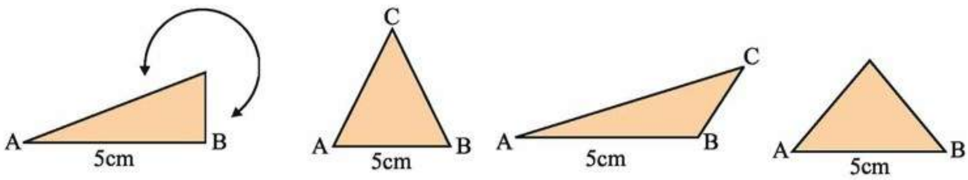
(a) ∠XYZ ≅ _____ **(b) ∠STU** ≅ _____ **(c) ∠WXY** ≅ _____

अध्यापिका :-

आओ त्रिभुजों की सर्वांगसमता समझने से पहले त्रिभुजों पर एक क्रियाकलाप करें।

- यदि हमें किसी त्रिभुज की **एक भुजा की माप** (भुजा = 5 से.मी.) दी गई हो तो हम कितने त्रिभुज बना सकते हैं ?

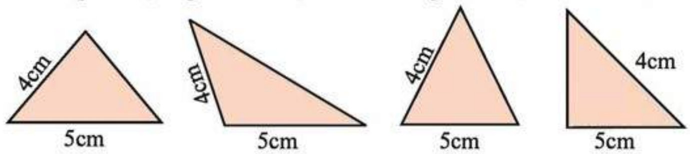
  कुछ स्ट्रॉं लेते है तथा उनसे त्रिभुज बनाने की कोशिश करते है।



हम देखते हैं कि किसी त्रिभुज की केवल एक भुजा की माप दी हो तो **हम ऐसे अनेक त्रिभुज बना सकते हैं।**

- अब चलिए हमें त्रिभुज की दूसरी भुजा की माप भी दे दी जाए।

  त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई 5 से.मी. तथा दूसरी लंबाई 4 से.मी. दी गई है।

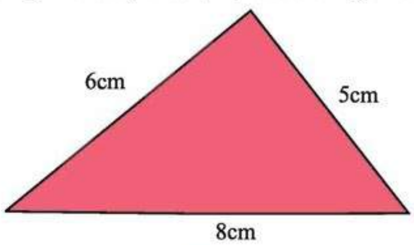


अब भी हम अनेक त्रिभुज बना सकते हैं।

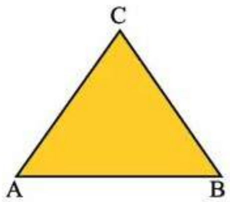
- **यदि हमें त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप दी गई हो तो हम केवल एक ही त्रिभुज बना सकते हैं।**

  स्ट्रॉं (Straw) की सहायता से ऐसा त्रिभुज बनाएँ जिसमें एक भुजा की माप 5 से.मी. दूसरी तीली की माप 6 से.मी. तथा तीसरी तीली की माप 8 से.मी. हो।

  आप देखेंगे कि आप कैसे भी त्रिभुज को बनाएँ केवल एक ही प्रकार का त्रिभुज बनेगा।



पीछे हमने देखा कि यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप दे दी जाये तो केवल एक अद्वितीय त्रिभुज बनेगा।
इस प्रकार हमने एक नियम सीखा जिसे हम भुजा-भुजा-भुजा (SSS) नियम/कसौटी भी कहते हैं।



आओ (SSS) कसौटी से हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता को जानें।

हमने देखा भुजा-भुजा-भुजा कसौटी से एक अद्वितीय त्रिभुज बनता है।

इसीलिये जब भी एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ किसी दूसरे त्रिभुज की तीन भुजाओं के बराबर हो जाएं तो वो दोनों त्रिभुज एक ही माप के होंगे। अर्थात् दोनों सर्वांगसम होंगे।

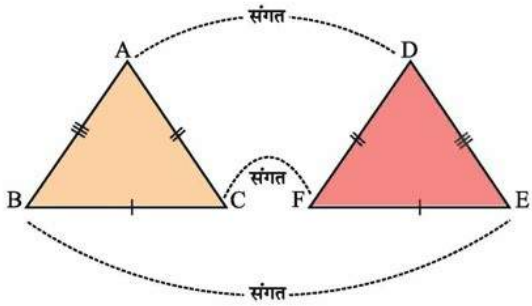
जब एक त्रिभुज को इसका सर्वांगसम त्रिभुज पूरी तरह से ढक लेता है तो जो शीर्ष जिस बिंदु को ढकता है, उसे दोनों शीर्षों का एक दूसरे का संगत बिंदु कह सकते हैं। इसी प्रकार जो भुजा जिस भुजा को ढकेगी वो भुजा उसी भुजा की संगत भुजा होगी।

इसी प्रकार कोण भी संगत होते हैं।

अब यदि नीचे दो त्रिभुज ΔABC तथा ΔDEF अगर सर्वांगसम हैं।

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

A का संगत बिन्दु D　A ~ D
B का संगत बिन्दु E　B ~ E
C का संगत बिन्दु F　C ~ F
चिन्ह ~ दो त्रिभुजो के संगत भागों को दिखाता है



अतः हम देख सकते हैं कि यदि हम दोनों त्रिभुजों की तीनों भुजाएँ बराबर करते हैं तो बाकी के तीनों भाग (तीनों कोण) अपने आप बराबर हो जाते हैं।

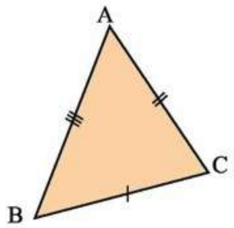
अब यदि एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई का माप निर्धारित कर दें तथा उन दोनों भुजाओं के बीच के कोण की माप भी निर्धारित कर दें तो देखेंगे कि इस प्रकार केवल एक ही त्रिभुज बन सकता है। इस प्रकार की कसौटी को भुजाकोण भुजा कसौटी कहा जा सकता है।

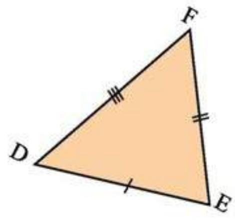
नीचे दिए गए दो सर्वांगसम त्रिभुजो में संगत बिंदुओं के नाम लिखो।

A का संगत बिंदु ________

B का संगत बिंदु ________

C का संगत बिंदु ________





भुजा-कोण-भुजा (SAS) कसौटी

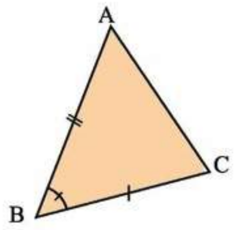
नीचे दो त्रिभुज दिए गए है जिनमें एक त्रिभुज की कोइ दो भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के बराबर है। और यह भी दिया गया है कि उन भुजाओं के बीच बनने वाले कोण भी बराबर है।

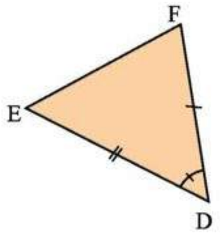
दिया है :-

AB = ED

कोण ABC = कोण EDF

BC = DF





अब यदि हम भुजा AC तथ EF को मापे तो हम पाएँगे कि दोनो के माप बराबर है अर्थात AC = EF

इसलिए हम कह सकते हैं कि त्रिभुज ABC की तीनों भुजाएँ त्रिभुज EDF की तीनों भुजाओं के बराबर है।

इसलिए $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

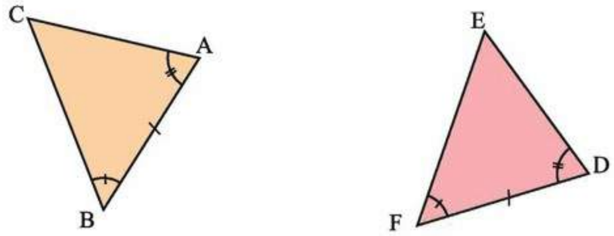
ऊपर ध्यान देने वाली बात हैं कि त्रिभुजो को सर्वांगसम दिखाते हुए हमने संगत बिंदुओ का ध्यान रखा है।

A का संगत बिन्दु E	A ~ E
B का संगत बिन्दु D	B ~ D
C का संगत बिन्दु F	C ~ F

इसी प्रकार की दो अगली दो कसौटियों को आकृतियों के माध्यम से समझने का प्रयास करते हैं।

कोण-भुजा-कोण (ASA) कसौटी

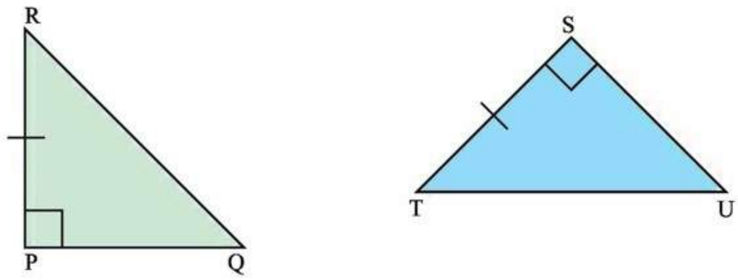
कोण-भुजा-कोण (ASA) (कोई भी दो कोण तथा उनके बीच की भुजा)



$\Delta ABC \cong \Delta DFE$

समकोण-भुजा-कोण (RHS) कसौटी

(एक समकोण, एक कर्ण तथा कोई एक अन्य भुजा)

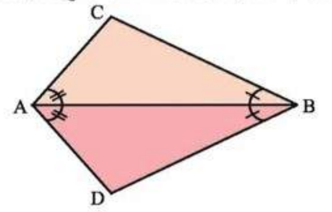


$\Delta PQR \cong \Delta SUT$

अपने अध्यापक से चर्चा कीजिए कि भुजा-भुजा-कोण या कोण-कोण-कोण सर्वांगसमता कसौटी क्यों नहीं होती?

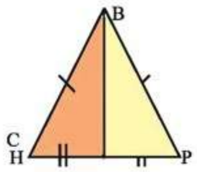
नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज के युग्म में (SSS/SAS/ASA/RHS) सर्वांगसमता है। त्रिभुजों के नाम तथा सर्वांगसमता का आधार लिखो। (त्रिभुजो के नाम लिखते समय संगत बिंदुओं का ध्यान रखे)

1.



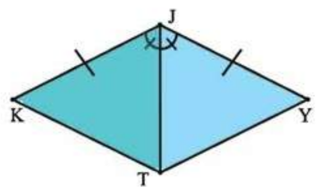
1. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

2.



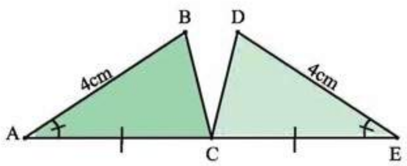
2. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

3.



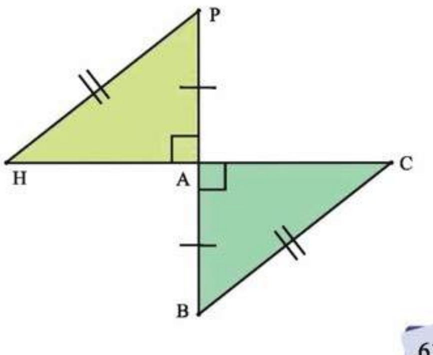
3. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

4.



4. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

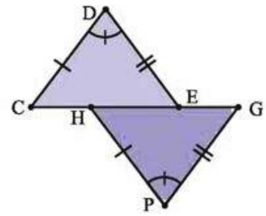
5.



5. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

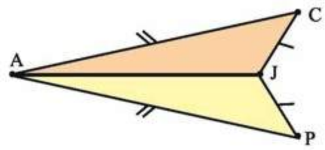
6. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

6.



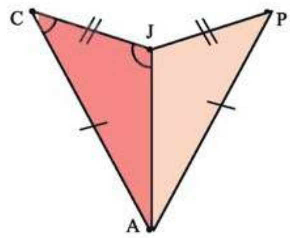
7. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

7.



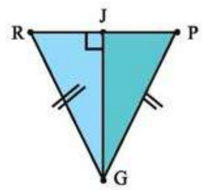
8. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

8



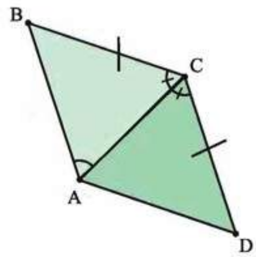
9. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

9



10. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

10



अध्यापिका : आज हमने सीखा :

1. सर्वांगसम वस्तुएँ बिल्कुल एक दूसरे के बराबर होती हैं (माप तथा आकार में)
2. दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी लंबाईयाँ बराबर होती हैं।
3. दो कोण सर्वांगसम होते हैं। यदि दोनों के माप बराबर होते हैं।
4. त्रिभुजों की सर्वांगसमता के आधार/कसौटी

(a) SSS - भुजा-भुजा-भुजा

(b) SAS - भुजा-कोण-भुजा
↓
(दोनों भुजाओं के बीच का)

(c) ASA - कोण-भुजा-कोण
↓
(दोनों कोणों के बीच की)

(d) RHS - समकोण (90°) - कर्ण - (कोई एक भुजा)

अध्याय 5 – राशियों की तुलना

दोस्तो, पिछली कक्षा में हमने राशियों की तुलना के बारे में पढ़ा था।

आइए राजू और मलाला की कहानी से राशियों की तुलना को दोहराते हैं।

हम राजू और मलाला की ऊँचाई की तुलना कर रहे हैं।

राजू की ऊँचाई
3 फुट

मलाला की ऊँचाई
6 फुट

हम यह कह सकते हैं कि राजू की ऊँचाई मलाला की ऊँचाई से **आधी** है।

या मलाला की ऊँचाई राजू की ऊँचाई से **दोगुनी** है।

हम रमीज तथा उसके बेटे सलीम के वज़न की तुलना कर रहे हैं।

यहाँ हम कह सकते हैं कि रमीज का वज़न अपने बेटे के वज़न का **तीन गुना** है।

या सलीम का वज़न उसके पापा के वज़न का **एक तिहाई** है।

सलीम का वज़न
30 KG

रमीज़ का वज़न
90 KG

यहाँ आधा, तीन गुना शब्द तुलना कराने में हमारी मदद कर रहे हैं।

आइए हम कुछ और उदाहरणों को देखते हैं।

हम सोनू और शबनम के रुपयों की तुलना कर रहे हैं।

सोनू के पास शबनम से 10रु कम है।

शबनम के पास सोनू से 10रु ज़्यादा है।

शबनम के पास रुपये
100रु

सोनू के पास रुपये
90रु

हम अपने जीवन में कई जगह राशियों की तुलना का उपयोग करते हैं।

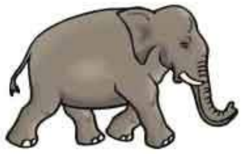
हमने ऊपर देखा कि हम राशियों की तुलना दो प्रकार से करते हैं।

1) राशियों के अंतर के आधार पर।

2) राशियों के भाग के आधार पर।

अनुपात में हम दो राशियों में भाग का प्रयोग कर तुलना करते हैं। जैसे हमें एक कुत्ते तथा एक हाथी के वज़न की तुलना करनी है, तो

वज़न 10 किलोग्राम



वज़न 3000 किलोग्राम

कुत्ते के वज़न का हाथी के वज़न के साथ अनुपात = $\frac{\text{कुत्ते का वज़न}}{\text{हाथी का वज़न}} = \frac{10 \text{ kg}}{3000 \text{ kg}} = \frac{1}{300}$ = 1:300

आइए, हम नीचे दी गई राशियों का अनुपात ज्ञात करते हैं।

1. 2 रु. का 20 रु.से

2. 5 सेकंड का 40 सेकंड से

3. 5 केले का 20 केले से

4. 4 मीटर लंबाई का 24 मीटर लंबाई से

5. 10 कि.ग्रा. सेब का 10 कि.ग्रा. सेब से

दो बराबर राशियों का अनुपात सदैव ....:......... होता है।

आइए, अब हम वस्तुओं को दिए गए अनुपात में बाँटना दोहराते हैं।

प्र.1 20 पेनों को विनीता एवं प्राची में 2:5 के अनुपात में बाँटिए।

विनीता को पेन मिलेंगे = ...

प्राची को पेन मिलेंगे = ...

प्र.2 220 रु. को गोलू और भोलू में 8: 3 के अनुपात में बाँटिए।

गोलू को रु. मिलेंगे = ...

भोलू को रु. मिलेंगे = ...

पिछली कक्षा में हमने समानुपात के बारे में भी पढ़ा था।

जैसे क्या 5 रु. तथा 40 रु का अनुपात, 20 कि.ग्रा. तथा 160 कि.ग्रा. के अनुपात के बराबर है?

5 रु तथा 40 रु. से अनुपात $= \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 1:8$

20 कि.ग्रा. का 160 कि.ग्रा. से अनुपात $= \frac{20\text{ kg}}{160\text{ kg}} = \frac{1}{8} = 1:8$

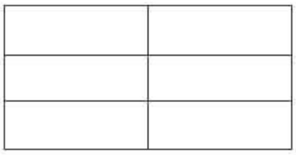
हमने देखा दोनों अनुपात बराबर हैं।

इसलिए 5, 40, 20, 160 समानुपात में होंगे।

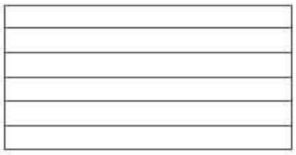
समानुपात को हम इस प्रकार से लिखेंगे→ 5 : 40 :: 20 : 160

नीचे कुछ आकृतियाँ दी गई हैं। उनमें नीला और हरा रंग इस तरह से भरो कि नीले रंग के क्षेत्र का लाल रंग के क्षेत्र से अनुपात 1: 2 हो।

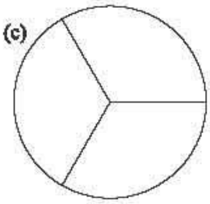
(a)



(b)



(c)



आओ, अब हम प्रतिशत की दुनिया में चलते हैं।

हम लोग अक्सर दुकानों पर शॉपिंग मॉल में लिखा देखते हैं।

सेल! सेल! सेल! 40% छूट

-हम खाने की चीज़ों पर कभी-कभी 100% शुद्ध लिखा देखते हैं।

-हम अपने नए कपड़ों पर 80% सूती लिखा देखा होगा।

-किसी छात्र ने बारहवीं कक्षा में 98% अंक प्राप्त करके भारत में पहला स्थान प्राप्त किया।

अब हम ऊपर दिए गए उदाहरणों में बता सकते हैं कि '%' का चिन्ह क्या दिखाता है?

'%' इस चिन्ह को प्रतिशत कहते हैं।

प्रतिशत को भी राशियों की तुलना में प्रयोग में लाया जाता है।

हमने अब तक दो वस्तुओं की तुलना करने के लिए अनुपात का प्रयोग किया है।

तथा

वस्तु का वस्तु के भागों से तुलना के लिए हमने भिन्न का प्रयोग किया है।

आइए, अब हम वस्तुओं और संख्याओं की तुलना के लिए प्रतिशत का प्रयोग करना सीखते हैं।

हम पहले प्रतिशत (Percentage) को सीखते हैं।

प्रतिशत — शाब्दिक अर्थ → प्रति + शत् — सौ का एक भाग

(प्रति → प्रत्येक, शत् → सौ)

इसे हम भिन्न रूप में $\frac{1}{100}$ लिखते हैं। प्रतिशत, भिन्न का ही एक भाग (Part) होता है। प्रतिशत ऐसा भिन्न है जिसका हर 100 होता है जैसे $\frac{4}{100}, \frac{30}{100}, \frac{15}{100}$ आदि।

$\frac{1}{100}$, 100 बराबर भागों में से 1 भाग = 1%

$\boxed{\frac{1}{100} = 1\%}$

$\frac{20}{100}$, 100 बराबर भागों में से 20 भाग = 20%

$\boxed{\frac{20}{100} = 20\%}$

प्रतिशत, भिन्न का ही एक रूप होता है।

प्रतिशत ऐसा भिन्न है, जिसका हर _______ होता है।

→ **दिए गए भिन्नों को प्रतिशत (%) में बदलिए।**

उदाहरण			अब आप प्रयास कीजिए		
(a)	$\frac{4}{100}$	= 4%	(d)	$\frac{10}{100}$	= ___
(b)	$\frac{25}{100}$	= 25%	(e)	$\frac{50}{100}$	= ___
(c)	$\frac{27}{100}$	= 27%	(f)	$\frac{80}{100}$	= ___

दिए गए प्रतिशत को , भिन्न के सरलतम रूप में बदलिए।

प्रतिशत	भिन्न तथा उसका सरलतम रूप	प्रतिशत	भिन्न तथा उसका सरलतम रूप
(1) 15%	$\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$	(4) 75%	
(2) 10%		(5) 40%	
(3) 25%		(6) 4%	

हमें भिन्नों को प्रतिशत में बदलने के लिए हर की संख्या को 100 में बदलना होता है।

आइए अभ्यास करें।

भिन्न	हर को संख्या 100 में बदलना	प्रतिशत
(a) $\frac{3}{10}$	$\frac{3 \times 10}{10 \times 10} = \frac{30}{100}$	30%
(b) $\frac{1}{5}$		
(c) $\frac{9}{20}$		
(d) $\frac{4}{25}$		

आइए, अब हम कुछ प्रश्नों का अभ्यास करते हैं।

प्र० :- एक फ़ुटबॉल टीम ने 25 मैचों में से 10 मैच जीते हैं। टीम की जीत का प्रतिशत ज्ञात कीजिए ?

हल :- कुल मैचों में जीते गए मैचों का भाग =

जीत का प्रतिशत =

प्र० :- सातवीं कक्षा में 90 विद्यार्थी हैं। 40 विद्यार्थी गणित विषय में ज़्यादा रुचि रखते हैं। कितने प्रतिशत विद्यार्थी गणित विषय में कम रूचि रखते हैं ?

हल :- कुल विद्यार्थियों में, गणित विषय में ज़्यादा रूचि रखने वाले विद्यार्थियों का भाग = ____________

कुल विद्यार्थियों में, गणित विषय में कम रुचि रखने वाले विद्यार्थियों का भाग = ____________

गणित विषय में कम रुचि रखने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत = ____________

प्र० :- एक टोकरी में 20 आम हैं। जिसमें से 5 आम खराब हैं । ठीक, आमों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए ?

हल :- कुल आमों में, ठीक आमों का भाग = ____________

ठीक आमों का प्रतिशत = ____________

भिन्न को प्रतिशत में बदलने की एक और विधि

⇒ $\frac{4}{5}$ को प्रतिशत में बदलिए ।

$\frac{4\times 100}{5\times 100}$ ← अंश और हर दोनों को 100 से गुणा किया।

$\frac{4}{5}\times 100\times\frac{1}{100}$

$\frac{4}{5}\times 100\ \%$ ← $\frac{1}{100}=1\%$, इसलिए हमने $\frac{1}{100}$ की जगह 1% या % लिखा।

$\frac{4}{\cancel{5}}\times \overset{20}{\cancel{100}}\ \% = 80\%$

↑ किसी भी भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए हम सीधे इस चरण का प्रयोग कर सकते हैं। जैसे

$\frac{3}{4}$ को प्रतिशत में बदलिए = $\frac{3}{4}\times 100\ \% = \frac{3}{\cancel{4}}\times \overset{25}{\cancel{100}}\ \% = 75\%$

$\frac{7}{20}$ को प्रतिशत में बदलिए = $\frac{7}{20}\times 100\ \% =$ ____________

आइए अब हम भिन्नों को प्रतिशत में बदलने का अभ्यास करते हैं।

विधि 1 (Base 100)	विधि 2 (Direct Method)
(1) $\frac{3}{25}$ $= \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{12}{100}$ $= 12\%$	(1) $\frac{3}{25}$ $\frac{3}{_1 25} \times \overset{4}{100}\%$ 12%
(2) $\frac{4}{5}$	(2) $\frac{4}{5}$
(3) $\frac{3}{4}$	(3) $\frac{3}{4}$
(4) $\frac{7}{20}$	(4) $\frac{7}{20}$
(5) $\frac{2}{3}$	(5) $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} \times 100\% = \frac{200}{3}\%$ $= 66.66\%$

यहाँ हमें $\frac{2}{3}$ के हर को संख्या 100 में बदलने में कठिनाई हो रही है। अत: विधि 1 से हल नहीं किया जा सकता है। इस स्थिति में विधि 2, $\frac{2}{3}$ भिन्न को प्रतिशत में बदलने के काम आ रही है।

हम अपनी सुविधा के अनुसार इनमें से किसी भी विधि का प्रयोग कर भिन्नों को प्रतिशत में बदल सकते हैं।

दिए गए उदाहरणों को समझकर, तालिका को पूरा कीजिए।

परिस्थिति	भिन्न	प्रतिशत
(1) 20 में से 5 व्यक्ति बीमार हैं।	$\frac{5}{20}$ व्यक्ति बीमार हैं।	$\frac{5}{20} \times 100\%$ व्यक्ति बीमार हैं। 25% व्यक्ति बीमार हैं।
(2) 30 में से 3 छात्र अनुपस्थित हैं।	$\frac{3}{30}$ छात्र अनुपस्थित हैं।	$\frac{3}{30} \times 100\%$ छात्र अनुपस्थित हैं। 10% छात्र अनुपस्थित हैं।
(3) 30 में से 21 सेब ठीक हैं।		
(4) 50 में से 40 विद्यार्थी उपस्थित हैं।		

आइए, हम कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं।

→ एक आदमी की टोकरी में 50 आम हैं। कुल आमों में से 10% आम खराब हैं। बताइए टोकरी में कुल कितने आम खराब हैं?

इस प्रश्न को हम दो तरीके से हल कर सकते हैं।

पहला तरीका: 10% आम खराब हैं ⇒ 100 आमों में से 10 आम खराब हैं।

कुल आम	आम खराब है।	
100	10	
$\frac{100}{2}$	$\frac{10}{2}$	⇐ **(दोनों ओर 2 से भाग किया गया)**
50	5	⇐ **(कुल आम 50 हैं तो खराब आमों की संख्या 5 होगी।)**

आओ, ऊपर दिए प्रश्न को अन्य तरीके से हल करें

खराब आम = 50 का 10%

$50 \times \frac{10}{100}$ ⟵ ('का' का अर्थ गुणा लिया जाता है तथा '%' को $\frac{1}{100}$ लिखा जाता है।)

$\cancel{50}^{5} \times \frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{100}_{10}} = 5$

नीचे तालिका में हमने दो तरीकों से राशियों का प्रतिशत निकाला है।
समझिए और करिए।

विधि 1		विधि 2	
(1)	200 का 20% $= \overset{2}{\cancel{200}} \times \frac{20}{\underset{1}{\cancel{100}}}$ = 40	(1)	200 का 20% 20% का मतलब = 100 में से 20 2 × 100 में से 2 × 20 200 में से 40
(2)	500 का 5% $= \overset{5}{\cancel{500}} \times \frac{5}{\underset{1}{\cancel{100}}}$ = 25	(2)	500 का 5% 5% का मतलब = 100 में से 5 5 × 100 में से 5 × 5 500 में से 25
(3)	800 का 10%	(3)	800 का 10%
(4)	50 का 50%	(4)	50 का 50%
(5)	760 का 15%	(5)	760 का 15%

आप प्रश्न (5) को विधि 2 द्वारा हल करने की कोशिश कीजिए और जाँचिए कि यह प्रश्न विधि 2 द्वारा हल हो पा रहा है या नहीं। अगर हल नहीं हो पा रहा है तो उसका कारण जानने का प्रयास कीजिए।

हम अपनी सुविधा के अनुसार किसी भी विधि का प्रयोग कर राशियों का प्रतिशत ज्ञात कर सकते हैं।

आइए, कुछ राशियों का प्रतिशत मान ज्ञात करते हैं।

(1) 1 घंटे का 50%	(2) 250 रु का 15%
(3) 25km का 120%	(4) 300 kg का 5%

एकिक विधि: एक इकाई का मान पता करके, समस्या को हल करना

आइए अब हम दिए गए प्रतिशत से अज्ञात राशि ज्ञात करना सीखते हैं।

	समीकरण की सहायता से	ऐकिक विधि से
(2) मेरी कुल आमदनी का 40% खर्चा 2000 रु. हैं।	माना कुल आमदनी x रु. है। $x \times \frac{40}{100} = 2000$ $x = \frac{2000 \times 100}{40}$ x = 5000 रु.	माना कुल आमदनी 100 रु. है तो खर्चा होगा 40 रु.

	खर्चा	तो कुल आमदनी
(1)	40 रु.	100 रु.
(2)	$\frac{40}{40}$ रु.	$\frac{100}{40}$ रु.
(3)	1 रु.	$\frac{100}{40}$ रु.
(4)	2000 ×1रु.	$2000 \times \frac{100}{40}$ रु.
(5)	2000 रु.	5000 रु.

चरण 2 में खर्चा 1 रु. बनाने के लिए हमने दोनों तरफ़ 40 से भाग किया।
चरण 4 में खर्चा 2000 रु. बनाने के लिए हमने दोनों तरफ़ 2000 से गुणा किया।

कथन	समीकरण की सहायता से	ऐकिक विधि
(3) कक्षा के 60% लड़कों की संख्या 24 है। विद्यार्थियों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए?	माना ,विद्यार्थियों की कुल संख्या y है।	माना, विद्यार्थियों की कुल संख्या 100 है।
(4) किसी गाँव के 20% बूढ़े व्यक्तियों की संख्या 800 है। गाँव की कुल जनसंख्या ज्ञात कीजिए?	माना, गाँव की जनसंख्या z है।	माना, गाँव की जनसंख्या 100 है।
(1) किसी संख्या का 25%, 80 है।	माना वह संख्या x है।	माना वह संख्या 100 है।

आओ अब प्रतिशत और दशमलव में संबंध देखें।

हम जानते हैं $1\% = \frac{1}{100}$

हम यह भी जानते हैं $\frac{1}{100} = 0.01$

इसलिए $1\% = \frac{1}{100} = 0.01$

$3\% = \frac{3}{100} = 0.03$

$15\% = \frac{15}{100} = 0.15$

$10\% = \frac{10}{100} = 0.10$ या 0.1

अब निम्न तालिका को पूरा करें।

प्रतिशत	कथन	भिन्न	दशमलव
40%	100 में से 40	$\frac{40}{100}$	= 0.40 या 0.4
3%	100 में से 3	$\frac{3}{100}$	= 0.03
14%	....	$\frac{\square}{\square}$	= $\square$
90%	....	$\frac{\square}{\square}$	= $\square$
115%	....	$\frac{\square}{\square}$	= $\square$

दशमलव को प्रतिशत में बदलना

दशमलव संख्याएँ	भिन्न रूप	हर 100 में बदलना	दशमलव
(a) 0.25	$\frac{25}{100}$	$\frac{25}{100}$	25%
(b) 2.9	$\frac{29}{10}$	$\frac{29 \times 10}{10 \times 10} = \frac{290}{100}$	290%
(c) 0.04			
(d) 0.30			
(e) 1.20			

ऊपर तालिका में 2.9 को प्रतिशत में बदलने के लिए, हमने किया $2.9 = \frac{29}{10} = \frac{29 \times 10}{10 \times 10} = \frac{290}{100} = 290\%$

हम इसे इस प्रकार भी कर सकते हैं। $2.9 = \frac{290}{100} = 290\%$

2.9 को हम 2.90 भी लिख सकते हैं।

यहाँ 9 दशांश है तथा 0 शतांश है। इसलिए हम 0 के द्वारा शतांश को भी दिखा सकते हैं। इसी प्रकार आवश्यकता पड़ने पर 0 से हज़ारांश को भी दिखा सकते हैं तथा 0 को और भी आगे बढ़ा सकते हैं।

आइए एक और उदाहरण देखते हैं।

12 को प्रतिशत में बदलिए।

12 = 12.00

$= \frac{1200}{100} = 1200\%$

12 में 0 दशांश तथा 0 शतांश है → इसलिए 12 को दशमलव में हम 12.00 लिख सकते हैं।

अब दशमलव संख्याओं को बिना भिन्न रूप में बदले, प्रतिशत में बदलने का आप प्रयास कीजिए।

उदाहरण :

दशमलव संख्या	प्रतिशत रूप
2.15	215%
0.39	39%
0.2	20%
1.9	190%

अब आप प्रयास कीजिए।

दशमलव संख्या	प्रतिशत रूप
1.44	
3.1	
4	
0.9	
8.88	

आइए, अब हम लाभ / हानि का पता करते हैं।

प्रश्नों के उत्तर दीजिए

माना जॉनी ने एक भैंस को 50,000 रु. में खरीदा। कुछ महीनों बाद जॉनी ने उस भैंस को 60,000 रु. में बेच दिया।

प्र०1 जॉनी ने भैंस को किस मूल्य पर खरीदा था? ____________

हम जिस मूल्य पर वस्तु को खरीदते हैं वह उस वस्तु का क्रय मूल्य (Cost Price) कहलाता है।

प्र०2 जॉनी ने भैंस को किस मूल्य पर बेचा ? ____________

हम जिस मूल्य पर वस्तु को बेचते हैं वह उस वस्तु का विक्रय मूल्य (Selling Price) कहलाता है।

प्र०3 जॉनी को भैंस की बिक्री पर लाभ हुआ या हानि हुई ? ____________

जब हम किसी वस्तु को क्रय मूल्य से ज़्यादा मूल्य पर बेचते हैं तो हमें ______ होता है।

जब हम किसी वस्तु को क्रय मूल्य से कम मूल्य पर बेचते हैं तो हमें ______ होती है।

प्र०4 जॉनी को भैंस की बिक्री पर कितनी राशि का लाभ हुआ ? ____________

प्र०5 अगर जॉनी भैंस को 30,000 रु में बेचते तो हमें लाभ होता या हानि होती? ____________

हमें कितने रुपयों की हानि होती ? ____________

⇒ **बॉक्स में सही निशान (>, <) का चयन कीजिए**

लाभ	⇒	क्रय मूल्य	<	विक्रय मूल्य
हानि	⇒	क्रय मूल्य		विक्रय मूल्य

खाली स्थान भरिए

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

हानि = ________ – ________

क्रय मूल्य (Cost Price) = CP

विक्रय मूल्य (Selling Price) = SP

लाभ (Profit) = P

हानि (Loss) = L

लाभ % या हानि % (Profit % or Loss %)

उदाहरण:- एक दुकानदार ने 15000 रु. की एक साइकिल खरीदी। जिसे उसने 20000 रु. में बेच दिया ।

साइकिल का क्रय मूल्य (CP) = ________

साइकिल का विक्रय मूल्य (SP) = ________

साइकिल के विक्रय में लाभ हुआ या हानि हुई ? = ________

कितने रुपयों का लाभ हुआ ? = ________

दुकानदार को 15000 रु. पर 5000 रु का लाभ हुआ।

लाभ का भाग, क्रय मूल्य की तुलना में = $\frac{5000}{15000}\left(\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}}\right)$

लाभ (%में) = $\frac{5000}{15000} \times 100\% = \frac{100\%}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

लाभ % या हानि % सदैव क्रय मूल्य को आधार मानकर निकाला जाता है।

लाभ % = $\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

हानि % = $\frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

(1) एक दुकानदार ने एक वाशिंग मशीन 12000 रु. में खरीदी। दुकानदार ने उसे ग्राहक को 14000 रु. में बेच दी। दुकानदार को मशीन पर होने वाला लाभ या हानि % ज्ञात कीजिए।

हल: वाशिंग मशीन का क्रय मूल्य = ________

वाशिंग मशीन का विक्रय मूल्य = ________

लाभ/हानि = ________

लाभ %/ हानि % = ________

(2) शोएब ने 16000 रु. का एक स्मार्ट फ़ोन खरीदा। कुछ महीने बाद उसे 12000 रु का बेच दिया। शोएब को होने वाला लाभ या हानि % ज्ञात कीजिए।

हल स्मार्ट फ़ोन का क्रय मूल्य = ________

स्मार्ट फ़ोन का विक्रय मूल्य = ________

लाभ/हानि = ________

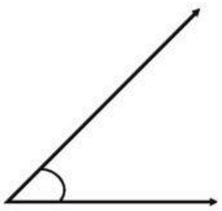
लाभ %/ हानि % = ________

अध्याय 6 – प्रायोगिक ज्यामिति

हम अपने परिवेश में भिन्न–भिन्न प्रकार की आकृतियों या रचनाओं को देखते हैं। इनमें से कुछ आकृतियाँ हम सीख चुके हैं। आओ इन्हें दोहराएँ।

आओ मिलान करें!

i)

ii) 

iii)

iv)

v)

a) देखो, देखो, मैं हूँ एक बिंदु
न मेरी लंबाई, न चौड़ाई
न कोई आकृति, न आकार
पर बहुत ज़रूरी,
मैं हूँ हर आकृति का आधार।

b) मैं हूँ एक रेखा,
न दूजा कोई ऐसा देखा,
नहीं माप सकते मेरी लंबाई,
चाहे कितना बढ़ा लो भाई।

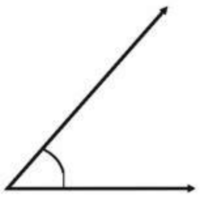
c) मैं हूँ रेखा का एक खंड
कहते मुझको रेखाखंड
मेरी एक निश्चित लंबाई,
माप लो मुझको मेरे भाई
एक बिंदु से मेरा आरंभ
दूसरे बिंदु पर हुआ अंत।

d) मेरा नाम है किरण
समझो जैसे सूरज की किरण
एक बिंदु से शुरू होती
दूसरी तरफ अनंत बहती।

e) दो किरणों से बनता हूँ
कोण मैं कहलाता हूँ
एक ही बिंदु से शुरू होती हैं किरणें जिसमें
फिर, भिन्न–भिन्न दिशाओं में जाती हैं

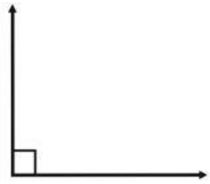
नीचे दिए गए कोणों की माप पहले अनुमान से बताएँ तथा फिर उसे कोणमापक (चाँदा) से मापकर लिखें।

a)



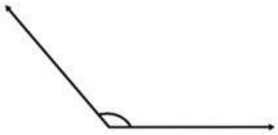
अनुमानित माप_________
कोणमापक से माप______

b)



अनुमानित माप_________
कोणमापक से माप______

c)



अनुमानित माप_________
कोणमापक से माप______

d)

अनुमानित माप_________
कोणमापक से माप______

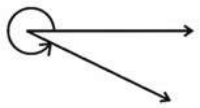
e)

अनुमानित माप_________
कोणमापक से माप______

f)

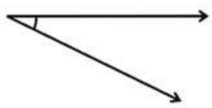
अनुमानित माप_________
कोणमापक से माप______

g)



अनुमानित माप_________
कोणमापक से माप______

h)



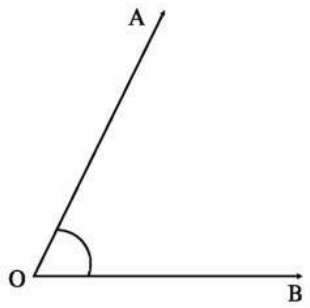
अनुमानित माप_________
कोणमापक से माप______

आइए कुछ साधारण रचनाएँ करें। अगर आपको निम्नलिखित रचनाएँ करने में कठिनाई होती है तो कृपया अपने साथियों या अध्यापक की मदद लें।

1. एक 5cm लंबा रेखाखंड बनाएँ

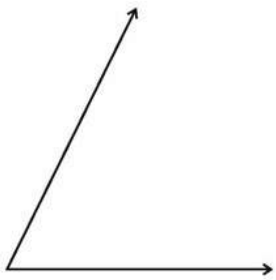
2. अब एक रेखाखंड पर कोई एक बिंदु लीजिए। उस बिंदु से होती हुई एक रेखा बनाइए जो दिए गए रेखाखंड पर लंब हो।

3. नीचे दिए गए कोण के बराबर एक कोण बनाएँ। याद रहे आपको कोणमापक (चाँदा) की मदद नहीं लेनी है।

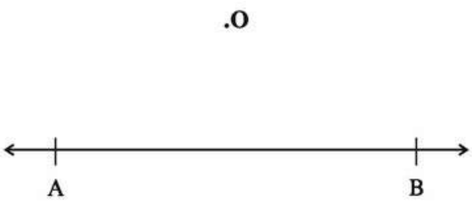


यहाँ चाँदे की मदद के बिना ∠AOB के बराबर कोण बनाएँ

4. नीचे दिए गए कोण का समद्विभाजक बनाएँ। यहाँ पर आपको चाँदा की मदद नहीं लेनी है।



5. नीचे एक रेखाखंड AB तथा एक बिंदु O दिया गया है। बिंदु O से रेखा AB पर एक लंब बनाइए। (बिना चाँदा की मदद से)



6. एक रेखाखंड बनाएँ जिसकी लंबाई 7.5 cm हो। उस रेखाखंड का लंब समद्विभाजक बनाएँ। (बिना चाँदा की मदद से)

आओ जरा सोचें

1. क्या हम एक दिए गए कोण के बराबर कोण बना सकते हैं ? (बिना चाँदा की मदद से)

2. क्या हम एक रेखाखंड को बिना मापे दो बराबर भागों में बाँट सकते हैं ?

3. क्या हम एक वृत की रचना कर सकते है ?

4. क्या हम एक रेखाखंड पर एक ऐसी रेखा बना सकते हैं जो रेखाखंड को दो बराबर भागों में बाँटे तथा रेखाखंड के साथ 90° का कोण बनाए।

   अगर ऊपर दिए गए किसी भी प्रश्न का उत्तर आप नहीं जानते तो कृपया अपने अध्यापक से सीखने में मदद लें।

समांतर रेखाएँ

हमने पिछली कक्षाओं में समांतर रेखाओं के बारे में पढ़ा है। अभी हम समांतर रेखाओं की रचना करना सीखेंगे।

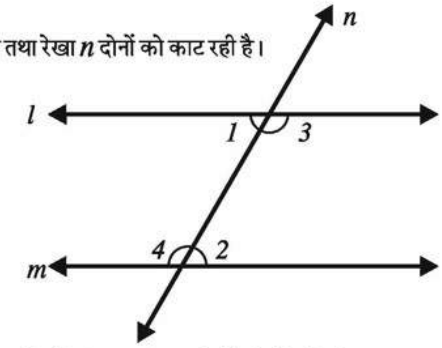
अपने दैनिक जीवन में समांतर रेखाखंडों के उदाहरण दीजिए।

जैसे :-

1. रेल की पटरियाँ
2. ब्लैक बोर्ड की सम्मुख भुजाओं के युग्म
3. ______________________
4. ______________________
5. ______________________
6. ______________________
7. ______________________

अब हम जानते हैं कि दो समांतर रेखाओं को एक अन्य रेखा काटे (प्रतिच्छेद) तो इस प्रकार बने अंत: एकांतर कोण बराबर होंगे ।

जैसे:- रेखाएँ l तथा m समांतर हैं तथा रेखा n दोनों को काट रही है।



क्या हम ऊपर दी गई आकृति में अंत: एकांतर कोणों के जोड़ों को पहचानकर लिख सकते हैं-

(i) **∠1 तथा ∠2** **(ii)**__________

आप इन कोणों को मापकर भी लिखें-

∠1 = __________ ∠2 = __________

∠3 = __________ ∠4 = __________

हमने क्या देखा !

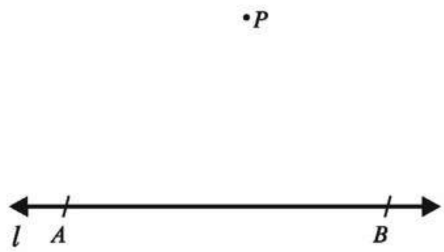
क्या ∠1 = ∠2 (हाँ/ नहीं) ∠3 = ∠4 (हाँ/ नहीं)

इस प्रकार हमने देखा कि यदि दो समांतर रेखाओं को एक अन्य रेखा काटती है तो इस प्रकार बने अंत: एकांतर कोण बराबर होंगे।

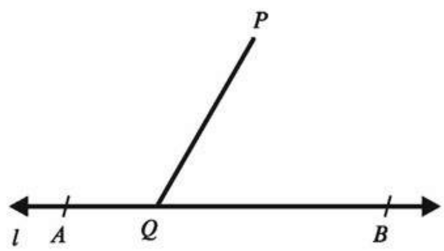
इसी गुण का प्रयोग हम समांतर रेखाएँ खींचने में करेंगे।

आओ समांतर रेखाएँ बनाएँ

हमें एक बिंदु P से एक रेखा बनानी है जो रेखा l के समांतर हो

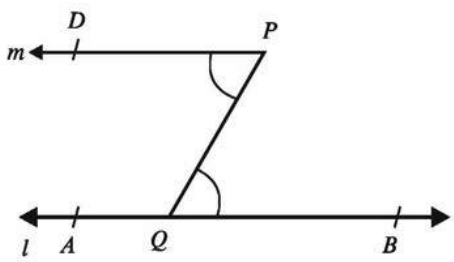


अब हम बिंदु p से रेखा l के किसी भी बिंदु को मिला देते हैं। माना यह बिंदु Q है तो स्थिति कुछ इस प्रकार की होगी।



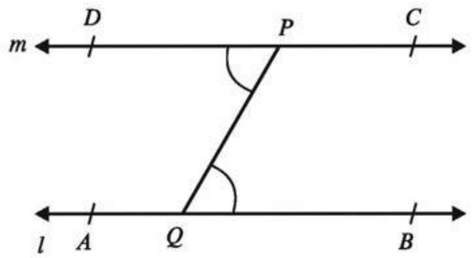
अब हम PQ को आधार मानकर बिंदु P से एक कोण $\angle QPD$ इस प्रकार बनाते हैं कि

$$\angle QPD = \angle PQB$$



यहाँ अगर हमें कठिनाई महसूस हो तो हम अपने अध्यापक की मदद लेंगे।

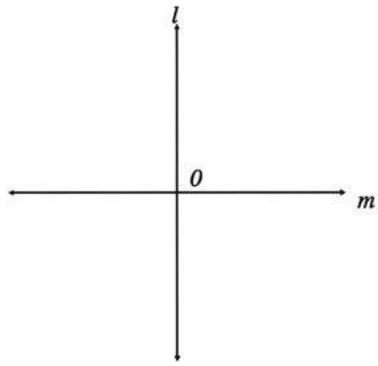
अब DP को आगे बढ़ा दें



अब हम देखते हैं ∠QPD = ∠PQB (अंत: एकांतर कोण) हैं।
इसलिए हम कह सकते हैं कि DC || AB

प्रतिच्छेदी रेखाएँ:-

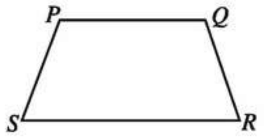
जब कोई दो रेखाएँ किसी एक बिंदु पर काटती हैं तो प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं।



रेखा l तथा m रेखा आपस में 0 बिंदु पर काट रही हैं।
इसलिए l, m प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं।

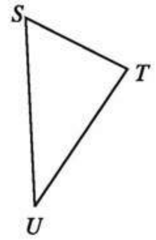
हमारे आस-पास कई प्रकार की संरचनाएँ हैं। इन आकारों से संबंधित अध्ययन, हम अपनी पिछली कक्षा में कर चुके हैं। आओ, निम्न प्रकार के ज्यामितीय आकारों को पहचानें और उनके आकारों के नाम लिखें।

(1)



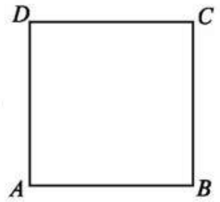
: चतुर्भुज

(2)



: __________

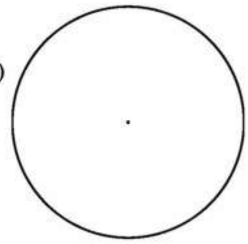
(3)



$AB=BC=CD=DA$

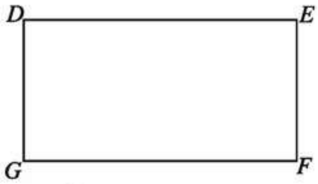
: __________

(4)



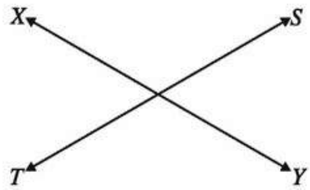
: __________

(5)



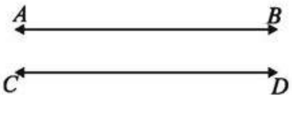
: __________

(6)



: __________

(7)



: __________

आओ त्रिभुज की अवधारणाओं को दोहराएँ

झाड़ू की तीन तीलियाँ इस प्रकार से लें कि कोई दो तीलियों की लंबाई मिलाकर तीसरी तीली की लंबाई से छोटी हो।

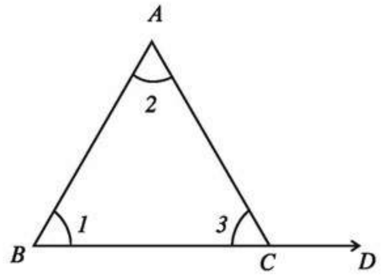
अब तीनों तीलियों से एक त्रिभुज बनाने का प्रयास करें।

क्या हम त्रिभुज बना पाए ?

अपने साथियों से इसकी चर्चा करें।

किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

अब नीचे दिए गए त्रिभुज के तीनों कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ की माप कोणमापक से ज्ञात करें तथा उनका माप नीचे लिखें।



$\angle 1$ = ________

$\angle 2$ = ________

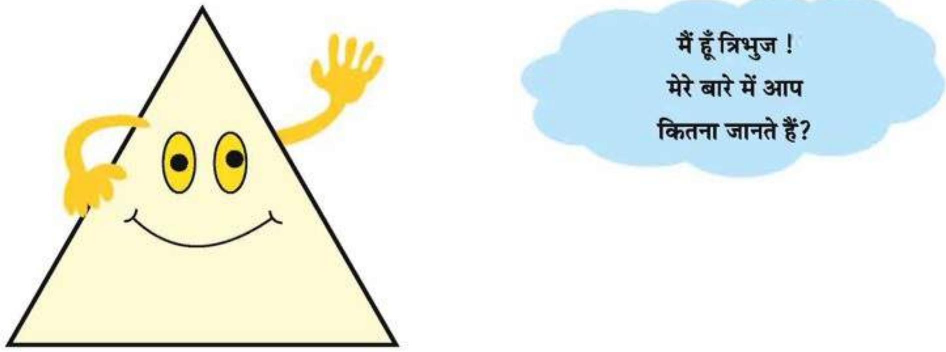
$\angle 3$ = ________

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ = ...

आओ करें

अब आप खुद भी कोई त्रिभुज बनाएँ तथा उसकी तीनों भुजाओं तथा कोणों को मापकर उनका मान बताएँ।

त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग 180° होता है।



(a) त्रिभुज ______________ भुजाओं की एक बंद आकृति है।

(b) त्रिभुज में ____________ भुजाएँ और ____________ अंत: कोण होते हैं।

(c) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग ______________ होता है।

(d) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई का योग, तीसरी भुजा की लंबाई से ____________ होता है।

(e) त्रिभुजों का वर्गीकरण ___________ और ______________ के आधार पर किया जा सकता है।

(f) जिस त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई अलग-अलग होती हैं, उसे ____________ त्रिभुज कहते हैं।

(g) जिस त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हों उसे ____________________ त्रिभुज कहते हैं।

(h) यदि त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण हो तो उसे __________________ त्रिभुज कहते हैं।

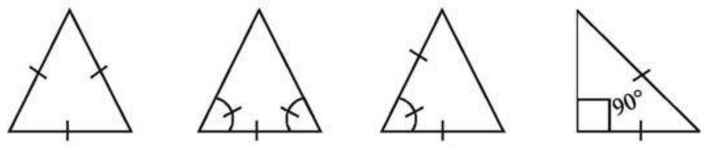
(k) यदि त्रिभुज का एक कोण समकोण हो तो उसे _____________ त्रिभुज कहते हैं।

त्रिभुजों की रचना

क्या आप जानते हैं कि त्रिभुज की रचना में हमें केवल त्रिभुज के तीन भागों की माप की आवश्यकता होती है ?

आइए, आज हम 4 प्रकार के त्रिभुजों की रचना करते हैं।

1)	(भुजा-भुजा-भुजा)	(SSS)	जब हमें त्रिभुज के तीनों भुजाओं की माप ज्ञात है।
2)	(कोण-भुजा-कोण)	(ASA)	जब त्रिभुज के कोई दो कोण तथा उनके बीच की भुजा ज्ञात है।
3)	(भुजा-कोण-भुजा)	(SAS)	जब त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ तथा उनके बीच का कोण ज्ञात है।
4)	(समकोण-कर्ण-भुजा)	(RHS)	जब समकोण (90°), कर्ण तथा एक भुजा ज्ञात है।



(1) (भुजा-भुजा-भुजा) (2) (कोण-भुजा-कोण) (3) (भुजा-कोण-भुजा) (4) (समकोण-कर्ण-भुजा)

सुझाव :-

- दिए गए 3 भागों की माप से त्रिभुज की एक रफ़ आकृति खींचे। (यह सही रचना करने में सहायक होती है।)
- रफ़ आकृति को देखते हुए रूलर, परकार तथा कोणमापक की मदद से त्रिभुज की रचना करें।
- दिए गए कोणों की माप यदि 15 के गुणांक के बराबर हो तो परकार का प्रयोग अवश्य करें। (15°, 30°, 45°,.........)
- किन्हीं दो रेखाओं के लिए मिलान बिंदु बनाना अनिवार्य है।

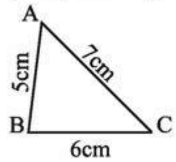
जैसे :-

1. जहाँ पर दो चाप आपस में काटते हैं मिलान बिंदु

2. जहाँ एक भुजा तथा एक चाप आपस में काटते हैं मिलान बिंदु

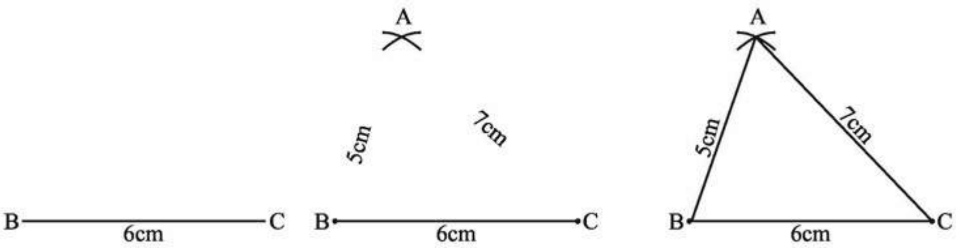
1 - त्रिभुज की रचना करना
(तीन भुजाओं के माप से)
भुजा-भुजा-भुजा (SSS)

रफ़ आकृति
(Rough Sketch)



त्रिभुज ABC की रचना

भुजाएँ- AB = 5cm, BC = 6cm, AC = 7cm



(Step-1)
(6cm का एक रेखाखंड BC खींचो।)

(Step-2)
(B से 5cm की चाप लगाओ तथा C से 7cm की चाप लगाओ जो 5cm की चाप को A पर काटती है।)

(Step-3)
(B को A से तथा C को A से मिलाओ।)

ऊपर दिए गए Steps (चरणों) का प्रयोग करके बॉक्स में त्रिभुज ABC की रचना करो।

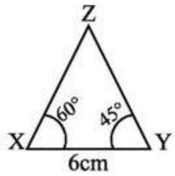
त्रिभुज ABC की रचना करो

2 - त्रिभुज की रचना करना

(त्रिभुज के कोई दो कोण तथा उनके बीच की भुजा से)

कोण-भुजा-कोण (A-S-A)

रफ आकृति
(Rough Sketch)

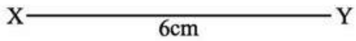


त्रिभुज XYZ

भुजा-[XY = 6cm

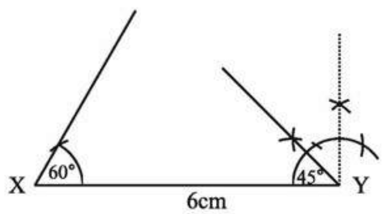
कोण [$\angle X = 60°$
$\angle Y = 45°$

Step-(1) 6cm का एक रेखाखंड XY खींचो।



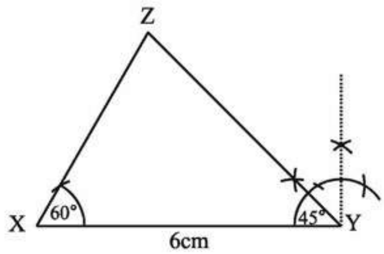
(Step-1)

Step-(2) X पर 60° तथा Y पर तथा 45° का कोण बनाते हुए रेखाएँ खींचिए।



(Step-2)

Step-(3) दोनों कोणों की रेखाओं को आगे बढ़ाएँ जो एक दूसरे को Z पर काटती हैं।



(Step-3)

ऊपर दिए गए सभी Steps (चरणों) का प्रयोग करके बॉक्स में केवल त्रिभुज XYZ की की रचना करो।

त्रिभुज XYZ की रचना करो

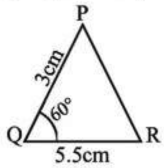
3 - त्रिभुज की रचना करना
(त्रिभुज के कोई दो भुजाएँ तथा उनके बीच के कोण से)
भुजा-कोण-भुजा (S-A-S)

त्रिभुज PQR

भुजा- [PQ = 3cm, QR = 5.5cm

कोण- [$\angle Q = 60°$

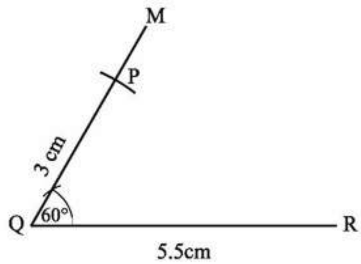
रफ़ आकृति
(Rough Sketch)



Step-(1)5.5cm की माप का एक रेखाखंड खींची।

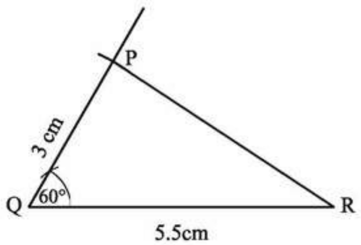
(Step-1)

Step-(2) Q पर 60° का कोण बनाते हुए QM रेखा खींची। परकार में 3 cm की दूरी भरकर Q को केन्द्र मानकर QM पर एक चाप लगाया जो P पर काटता है।



(Step-2)

Step-(3)P को R से मिला दो।



(Step-3)

ऊपर दिए गए सभी Steps (चरणों)का प्रयोग करके बॉक्स में त्रिभुज PQR बनाएँ।

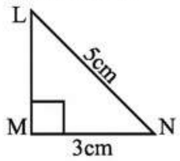
त्रिभुज PQR की रचना करो

4 - त्रिभुज की रचना करना

त्रिभुज की एक भुजा, कर्ण तथा समकोण 90° से

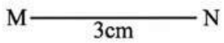
समकोण-कर्ण-भुजा (R-H-S)

रफ़ आकृति
(Rough Sketch)



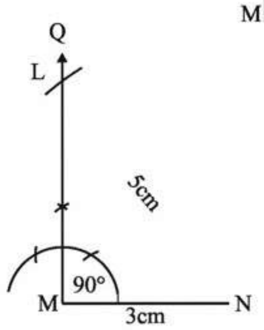
त्रिभुज LMN की रचना

कोण- ∠M= 90°
कर्ण- LN = 5cm
भुजा- MN = 3cm



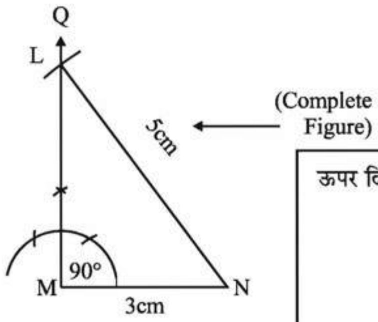
(Step-1)

Step-(1) 3cm की माप का रेखाखंड MN खींचो।



(Step-2)

Step-(2) M पर 90° का कोण ∠NMQ बनाओ।
तथा परकार में 5cm की दूरी भरकर व N को केन्द्र मानकर एक चाप लगाया जो MQ को L पर काटता है।



(Step-3)

Step-(3) N को L से मिलाया।

ऊपर दिए गए Steps (चरणों)के अनुसार इस बॉक्स में त्रिभुज LMN बनाएँ।

Activity Time

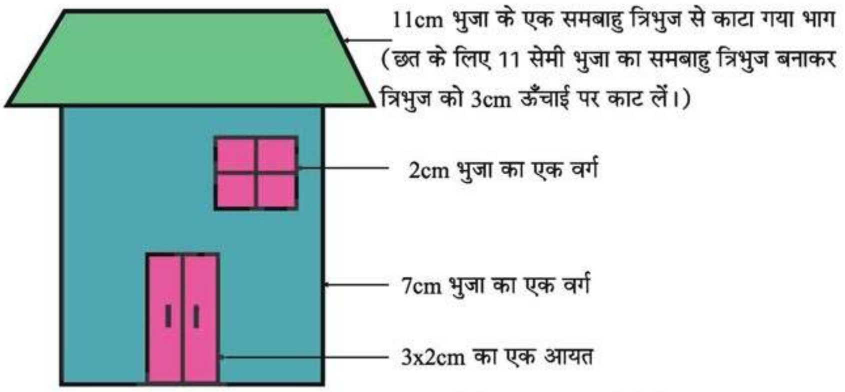
अमन के ड्रॉइंग अध्यापक/अध्यापिका ने उसे गृह कार्य (Home Work) में तीन चित्र बनाकर लाने को कहा। जानते हैं अमन ने कौन-कौन से चित्र बनाए!

1.) अमन ने सबके लिए घर बनाया।
2.) चाचा के लिए कार बनाई।
3.) अपने लिए साइकिल बनाई।

तीनों आकृतियाँ बनाने में उसने केवल रेखाओं तथा वृतों का प्रयोग किया।
देखें, अमन ने ये चित्र कैसे बनाए हैं?
आप भी इन्हें बनाने की कोशिश कर सकते हैं।
नोट :- दिए गए घर, कार और साइकिल के चित्र माप के अनुसार पेपर कटिंग और पेस्टिंग विधि से भी बनाए जा सकते हैं।

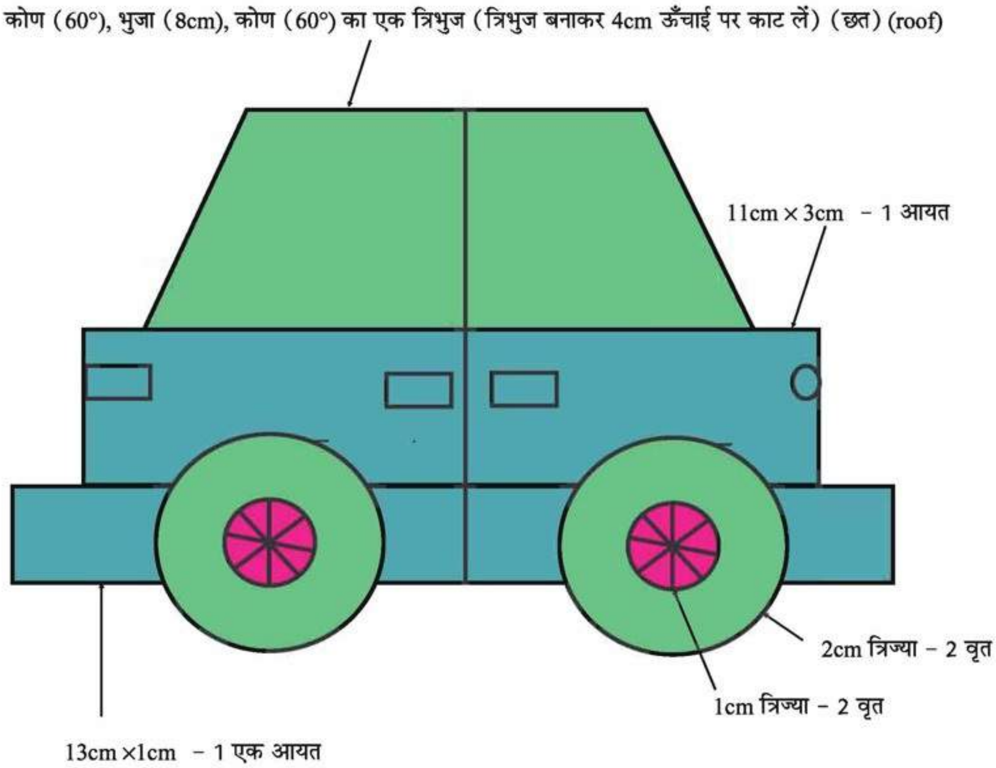
आओ करें :-

अमन का घर



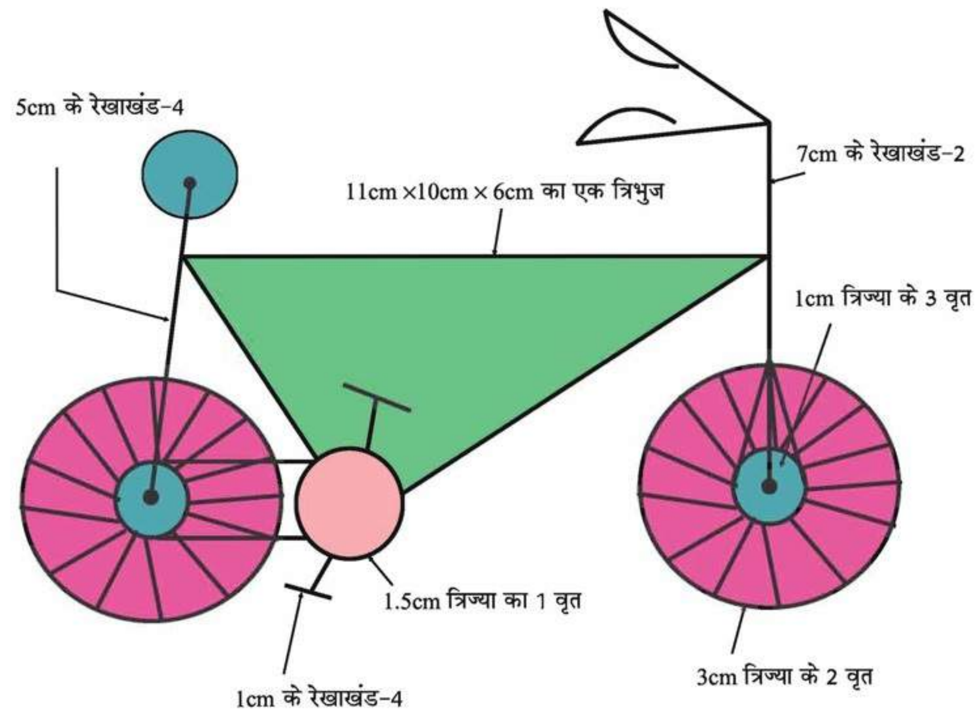
ऊपर दी गई माप से क्या आप भी घर बना सकते हैं? कोशिश करके देखो।

अमन ने अपने चाचा के लिए कार बनाई



दिए गए बॉक्स में आप भी कार बनाइए। कार की माप ऊपर दी गई है।

अमन की साइकिल



ऊपर दी गई साइकिल की माप के अनुसार आप भी साइकिल बनाइए

अध्याय 7 – परिमाप और क्षेत्रफल

हम छठी कक्षा में तल में बनी आकृतियों का परिमाप तथा वर्ग और आयत का क्षेत्रफल निकालना सीख चुके हैं। हमने पढ़ा है कि

परिमाप (Perimeter) एक बंद आकृति के चारों ओर की दूरी होती है।

क्षेत्रफल एक बंद आकृति द्वारा घेरे गए तल के क्षेत्र को दिखाता है।

हमें पता है कि

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई
= l x b

आयत का परिमाप = लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई
= 2 x (लंबाई + चौड़ाई)
= 2 x (l + b)

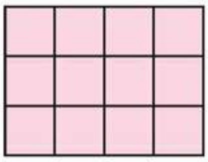
वर्ग का क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई
= भुजा x भुजा = s x s

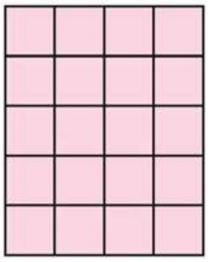
(हमें पता है कि वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, इसलिए हम लंबाई और चौड़ाई दोनों को भुजा नाम दे सकते हैं।)

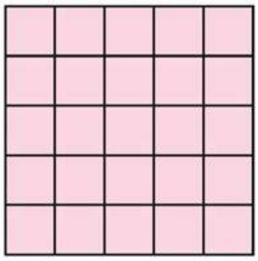
वर्ग का परिमाप = भुजा + भुजा + भुजा + भुजा
= 4 x भुजा = 4 x s

आइए, अब हम आकृतियों के परिमाप तथा क्षेत्रफल को दोहराते हैं।

दी गई आकृतियों के वर्ग ( ) की गणना करके क्षेत्रफल निकालिए।

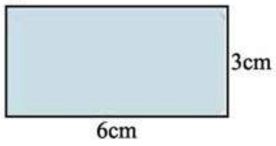
1.

क्षेत्रफल = 12 वर्ग इकाई

2.

क्षेत्रफल = _______

3.

क्षेत्रफल = _______

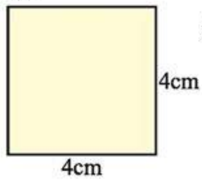
भुजाओं के आधार पर आकृतियों का क्षेत्रफल निकालिए।

(a)



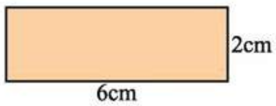
क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई
= 6cm x 3cm
= $18cm^2$

(b)



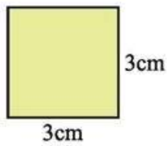
क्षेत्रफल = भुजा x भुजा
= 4cm x 4cm
= $16cm^2$

(c)



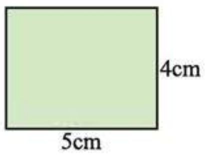
क्षेत्रफल = ____ x ____
= ____ x ____
= ____

(d)



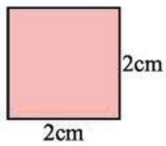
क्षेत्रफल = ____ x ____
= ____ x ____
= ____

(e)



क्षेत्रफल = ____ x ____
= ____ x ____
= ____

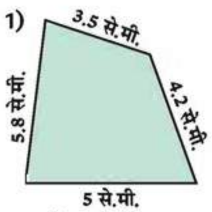
(f)



क्षेत्रफल = ____ x ____
= ____ x ____
= ____

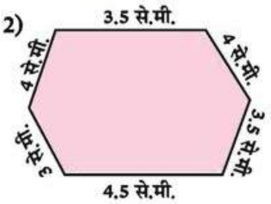
नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए :

1)



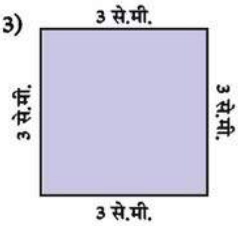
परिमाप = ____

2)



परिमाप = ____

3)

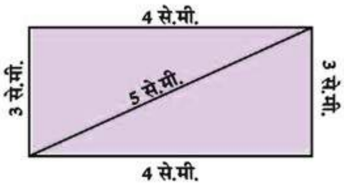


परिमाप = ____

4)

परिमाप = ____

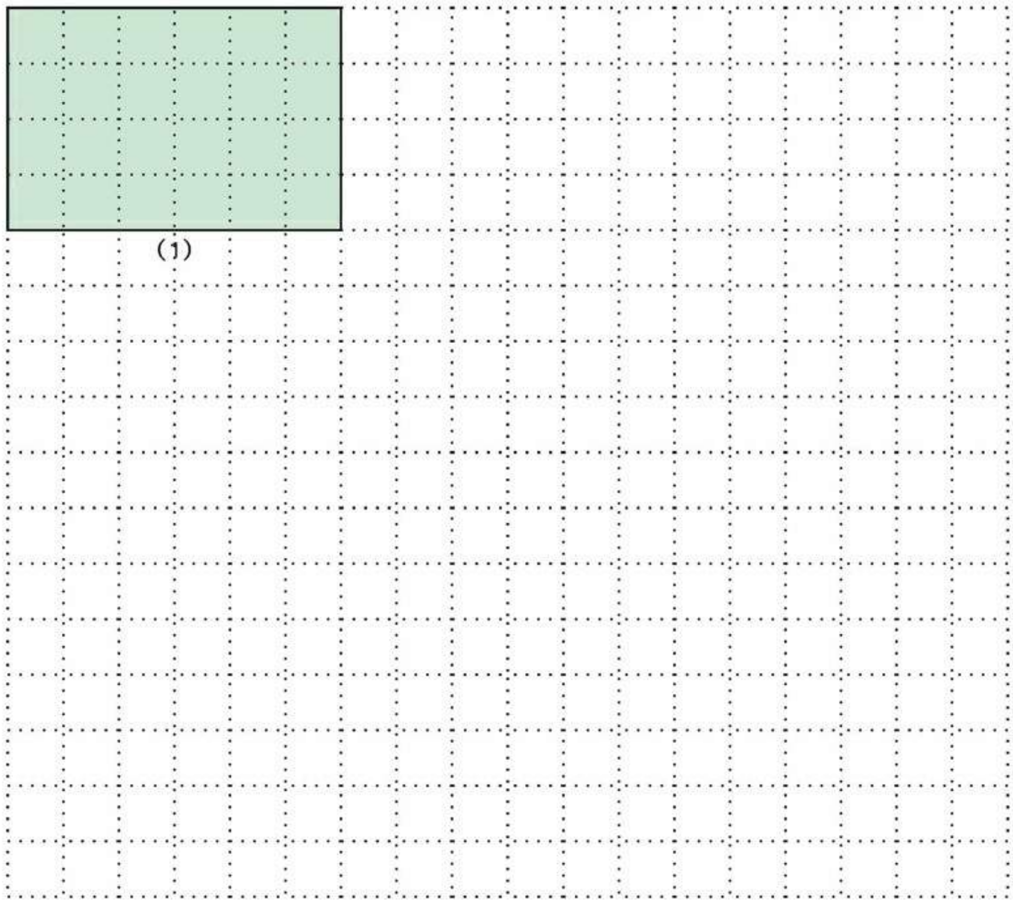
5)



परिमाप = ____

आइए, एक गतिविधि करें।

(1) नीचे आपको 24 वर्ग से.मी. क्षेत्रफल का एक आयत दिया गया है।
आपको नीचे दिए गए स्थान पर 24 वर्ग से.मी.क्षेत्रफल के अलग-अलग तीन आयत बनाने हैं।

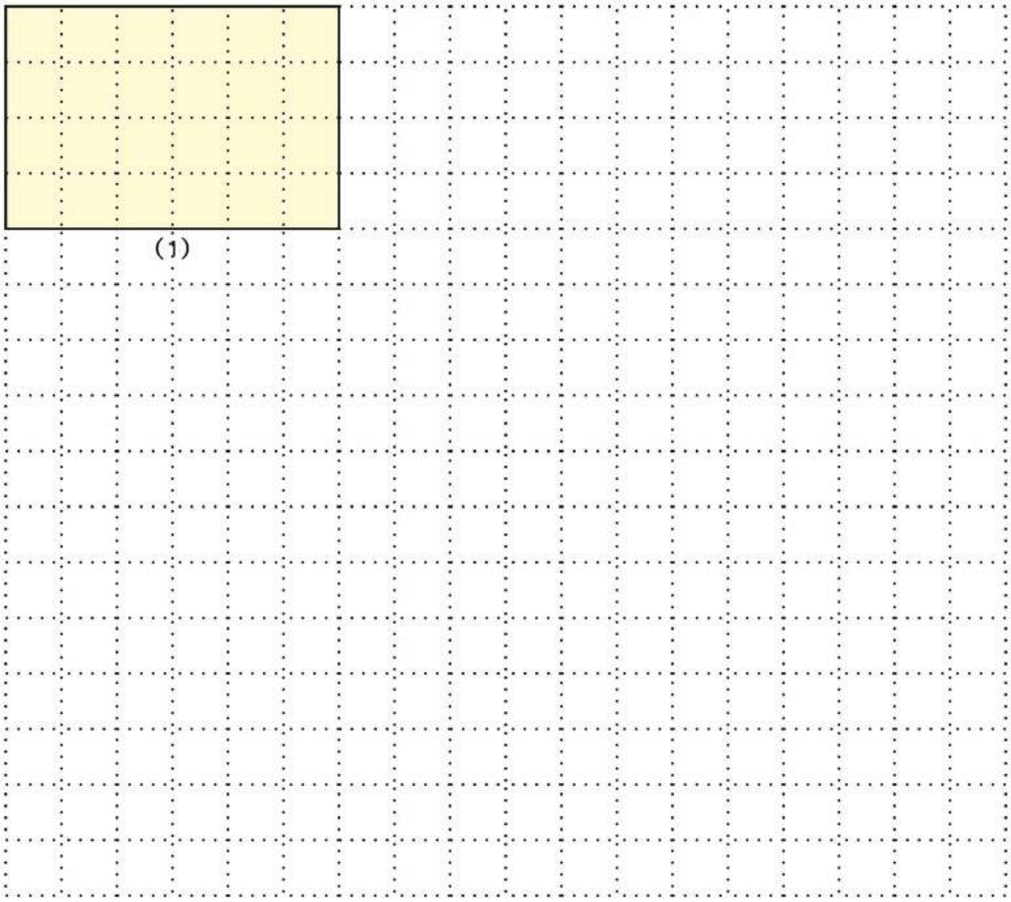


ऊपर बने चारों आयतों में से किस आयत का परिमाप सबसे अधिक तथा किस आयत का परिमाप सबसे कम है? जाँचिए।

हम यह कह सकते हैं कि एक ही क्षेत्रफल के बहुत सारे आयत हो सकते हैं तथा उनका परिमाप भी अलग-अलग हो सकता है।

(2) नीचे आपको 20 से.मी. परिमाप का एक आयत दिया गया है।

आपको नीचे दिए गए स्थान पर 20 से.मी.परिमाप के अलग-अलग तीन आयत बनाने हैं।



ऊपर बने चारों आयतों में से किस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक तथा किस आयत का क्षेत्रफल सबसे कम है? जाँचिए।

हम यह कह सकते हैं कि एक ही परिमाप के बहुत सारे आयत हो सकते हैं तथा उनका क्षेत्रफल भी अलग-अलग हो सकता है।

तालिका को पूरा कीजिए।

आयत की लंबाई	आयत की चौड़ाई	सभी भुजाओं का योग करने पर आयत का परिमाप (P)	आयत का परिमाप = 2 x (लंबाई + चौड़ाई)
20cm	10cm	P = 20 + 10 + 20 + 10 = 60cm	P = 2 x (20+10) = 2 x 30 = 60cm
15cm	7cm		
18cm	12cm		

वर्ग की भुजा की लंबाई	सभी भुजाओं का योग करने पर वर्ग का परिमाप	वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा
6.5cm	P = 6.5 + 6.5 + 6.5 + 6.5 = 26.0 cm	P = 4 x 6.5 = 26.0 cm
10cm		
7.5cm		

रिक्त स्थान भरिए।

क्रम सं.	आयत की लंबाई (L) तथा चौड़ाई (B)	परिमाप = 2 x (लंबाई+चौड़ाई)	परिमाप
1.	L=4cm, B=3cm	P = 2 x (____+____)	____ cm
2.	L=5cm, B=____ cm	P = 2 x (____+____)	16 cm
3.	L=____ cm, B=____ cm	P = 2 x (6 +____)	14 cm

रिक्त स्थान भरिए।

क्रम सं.	वर्ग की भुजा	परिमाप = 4 x भुजा	परिमाप
1.	5cm	4 x _____	_____ cm
2.	_____	4 x _____	28cm
3.	_____	_____ x 8cm	_____ cm

नीचे दिए गए आयतों के परिमाप व क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आयत की लंबाई	आयत की चौड़ाई	परिमाप	क्षेत्रफल
9cm	7cm		
14cm	8.5cm		
9m	6m		

नीचे दिए गए वर्गों के परिमाप व क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

क्र.सं.	भुजा	क्षेत्रफल	परिमाप
1.	5cm		
2.	7cm		
3.	2cm		

रिक्त स्थान भरिए।

क्र.सं.	आयत की लंबाई (L) तथा चौड़ाई (B)	क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई	क्षेत्रफल
1.	L=3cm, B=2cm	A=_____cm x _____cm	_____ cm^2
2.	L=8cm, B=5cm	A=_____cm x _____cm	_____ cm^2
3.	L=_____, B=4cm	A=_____cm x 4cm	20cm^2

क्र.सं.	वर्ग की भुजा	क्षेत्रफल = भुजा x भुजा	क्षेत्रफल
1.	6cm	A = _____ x _____	_____ cm^2
2.	_____ cm	A= _____ x _____	16cm^2
3.	_____ cm	A = 7cm x 7cm	_____ cm^2

नीचे कुछ स्थितियाँ दी गई हैं। इन स्थितियों में यह बताने का प्रयास कीजिए कि किन स्थितियों में परिमाप की आवश्यकता होगी तथा किन स्थितियों में क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी ? **सही बॉक्स का चयन (✓) कीजिए।**

स्थितियाँ :-		परिमाप	क्षेत्रफल
1.	कमरे के फर्श पर दरी बिछाना।	☐	☑
2.	कमरे की दीवार पर सफेदी करना।	☐	☐
3.	खेत के चारों तरफ बाड़ लगाना।	☐	☐
4.	फ़ोटो फ्रेम बनवाना।	☐	☐
5.	घर की चारदीवारी बनवाना।	☐	☐
6.	दीवार पर टाइल लगवाना।	☐	☐
7.	आयताकार कपड़े के चारों तरफ गोटा लगवाना।	☐	☐
8.	श्यामपट्ट पर पेन्ट करना।	☐	☐

नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

1. एक कक्षा में लगे ब्लैक बोर्ड की लंबाई 3m तथा चौड़ाई 2m है। ब्लैकबोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

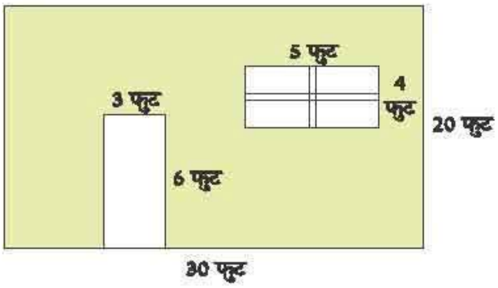
2. 20 फ़ुट चौड़े एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 800 वर्ग फ़ुट है। आयताकार भूखंड की लंबाई ज्ञात कीजिए।

3. एक मकान की छत का क्षेत्रफल 600 वर्ग फ़ुट है। उसकी लंबाई 30 फ़ुट है। उसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

4. विद्यालय में लगे एक होर्डिंग की लंबाई 8 मीटर तथा चौड़ाई 4 मीटर है। 30 रुपये प्रति वर्ग मीटर के हिसाब से इस होर्डिंग को पेन्ट कराने में कितने रुपयों की आवश्यकता होगी ?

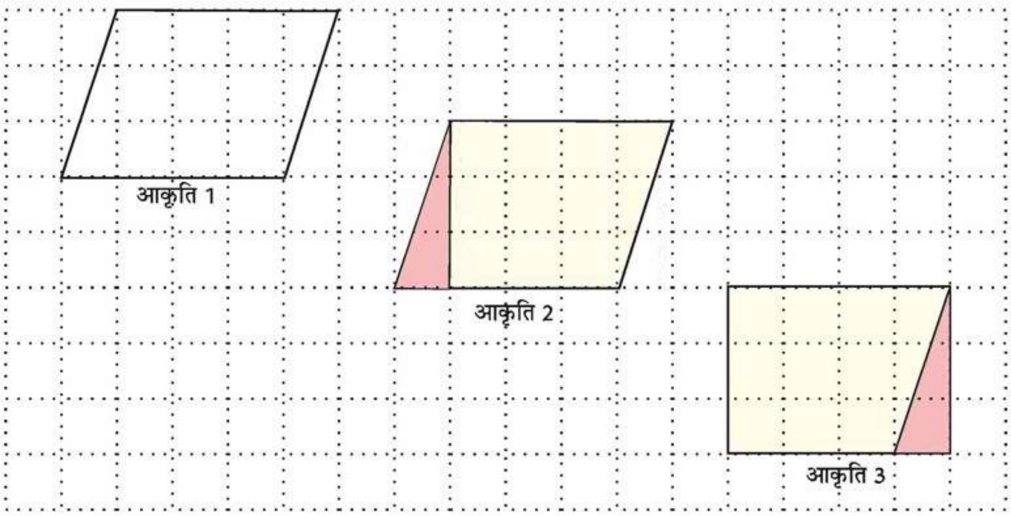
5. विद्यालय के हर्बल गार्डन की लंबाई, चौड़ाई की चार गुनी है। गार्डन के चारों ओर कांटेदार तार लगाने हैं ताकि पौधों को सुरक्षित किया जा सके। 20 रुपये प्रति मीटर के हिसाब से कांटेदार तार लगाने का खर्चा कितना होगा यदि हर्बल गार्डन की चौड़ाई 7 मीटर हो ?

6. हमने विद्यालय की Maths Lab की एक दीवार को पेन्ट कराया है। दीवार पर पेन्ट कराये गए कुल क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए।



7. आयताकार पार्क के चारों ओर रेलिंग लगानी है। रेलिंग की कुल लंबाई कैसे ज्ञात की जाएगी, यदि पार्क की कुल लंबाई 50 मीटर तथा चौड़ाई 40 मीटर हो ?

आइए, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना समझते हैं।



हमने ग्राफ़ पेपर पर एक समांतर चतुर्भुज बनाया। (आकृति 1)
इसमें से हमने एक समकोण त्रिभुज को काट लिया। (आकृति 2)
काटे गए समकोण त्रिभुज को हमने समांतर चतुर्भुज के दूसरे सिरे पर लगा दिया। (आकृति 3)

→ क्या समांतर चतुर्भुज (आकृति 1) तथा आयत (आकृति 3) के क्षेत्रफल समान हैं? ______ (हाँ / नहीं)

हमने देखा कि

आयत की लंबाई = समांतर चतुर्भुज का आधार

आयत की चौड़ाई = समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= लंबाई x चौड़ाई

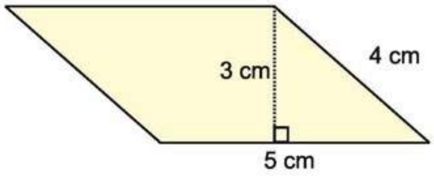
= आधार x ऊँचाई

= b x h

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

दिए गए समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल निकालिए।

1)

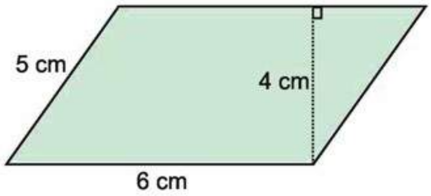


समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= <u>5</u> x <u>3</u>

= <u>15 वर्ग cm</u>

2)

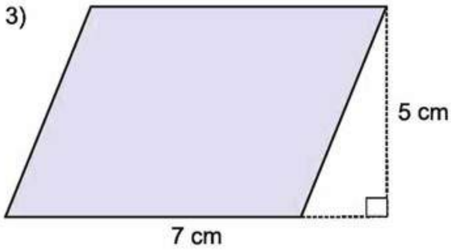


समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= ____ x ____

= _______

3)

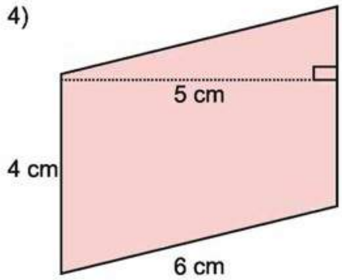


समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= ____ x ____

= _______

4)



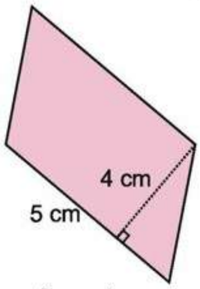
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= ____ x ____

= _______

> **ऊँचाई हमेशा आधार से मापी जाती है।**
> **प्रश्न 4 में आधार क्या है? अध्यापक से चर्चा करें।**

5)

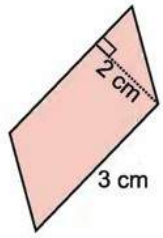


समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= ____ x ____

= _______

6)

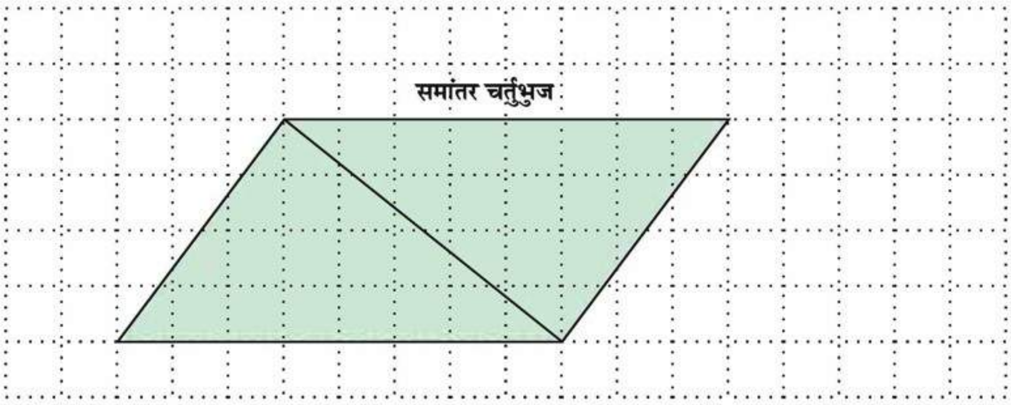


समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= ____ x ____

= _______

आइए त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालना समझते हैं।



समांतर चतुर्भुज में बने त्रिभुजों की संख्या = ________

क्या समांतर चतुर्भुज में बने दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान है? ________ (हाँ/नहीं)

त्रिभुज का क्षेत्रफल, समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का कितना भाग है? ________

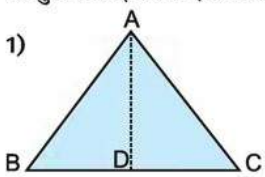
हमने ऊपर दिए गए उदाहरणों से समझा है कि त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x (समांतर चर्तुभुज का क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2}$ x (आधार x ऊँचाई)

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x (आधार x ऊँचाई)

त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

1)



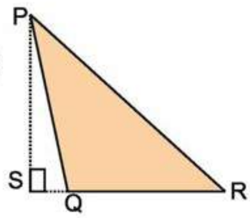
AD=3cm, BC=8cm

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

= $\frac{1}{2}$ x 8cm x 3cm

= 12cm²

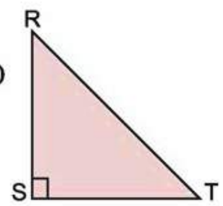
2)



QR = 3cm, PS = 6cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल =

3)

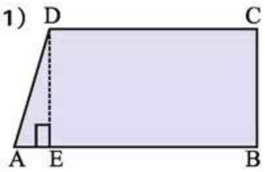


RS = 6cm, ST=10cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल =

आइए अब हम अज्ञात राशि निकालने का अभ्यास करते हैं।

उदाहरण :

1) 

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $120cm^2$

आधार (AB) = 20cm

ऊँचाई (DE) = ? (माना X)

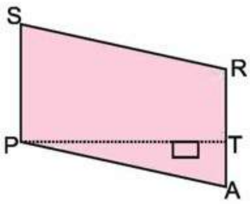
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

$120\ cm^2 = 20cm \times X$

$\frac{120}{20}\ \frac{cm^2}{cm} = X$

X = 6cm (ऊँचाई = 6cm)

अब आप प्रयास कीजिए।

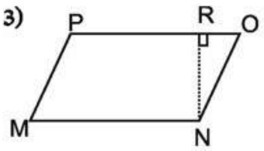
2) 

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $24m^2$

ऊँचाई (TP) = 4m

आधार (AR) = ?

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ____ x ____

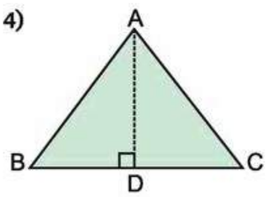
3) 

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $96cm^2$

आधार (PO) = 12cm

ऊँचाई (RN) = ?

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ____ x ____

4) 

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $150cm^2$

ऊँचाई (AD) = 20cm

आधार (BC) = ? (माना X)

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

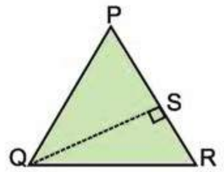
$160cm^2 = \frac{1}{2} \times X\ cm \times 20cm$

$\frac{160 \times 2}{20} = X$

x = 16 cm (आधार = 16cm)

अब आप प्रयास कीजिए।

5)



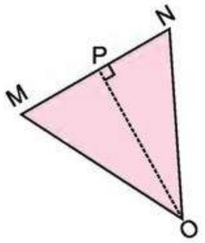
त्रिभुज का क्षेत्रफल = $56cm^2$

ऊँचाई (QS) = 8cm

आधार (PR) = ?

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x ____ x ____

6)



त्रिभुज का क्षेत्रफल = $250cm^2$

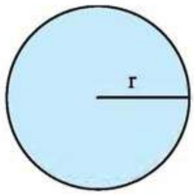
आधार (MN) = 50cm

ऊँचाई (PO) = ?

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x ____ x ____

आइए अब हम वृत्त के बारे में कुछ समझते हैं।

एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी को उसकी परिधि कहते हैं।



नीचे कुछ वृत्तों की परिधि और व्यास के माप लिखे गए हैं।

आइए हम परिधि को व्यास से भागकर, प्राप्त उत्तर को दिए गए स्थान पर लिखते हैं।

परिधि	व्यास	परिधि / व्यास
44	14	
66	21	
154	49	
22	7	

$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ = __________ **(लगभग)**

$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ से हमें जो मान प्राप्त हुआ है, उसे 'π' कहते हैं।

$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

परिधि = π x व्यास

परिधि = π X 2 r

परिधि = 2 π r

परिधि = 2 π r

गणना को आसान बनाने के लिए हम 'π' का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

नीचे कुछ वृत्त दिए गए हैं, उनकी परिधि ज्ञात कीजिए।

त्रिज्या = $\frac{\text{व्यास}}{2}$

उदाहरण :

1.

व्यास (d) = 14 से.मी.

त्रिज्या = 7cm

वृत्त की परिधि = 2 π r

= 2 x $\frac{22}{7}$ x 7

= 44 cm

अब आप वृत्त की परिधि निकालने का प्रयास कीजिए।

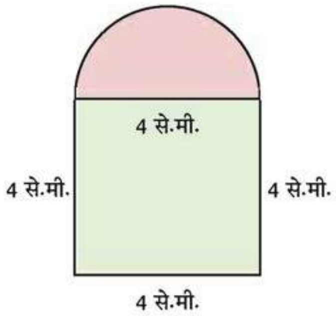
2.

3.

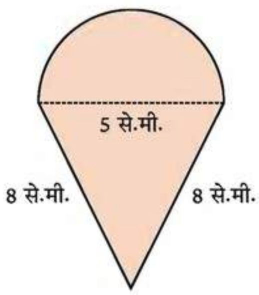
नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए।

4)

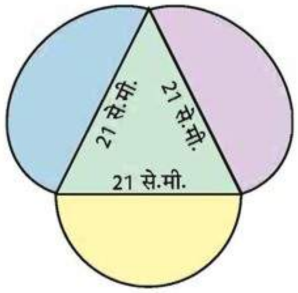
5)



6)

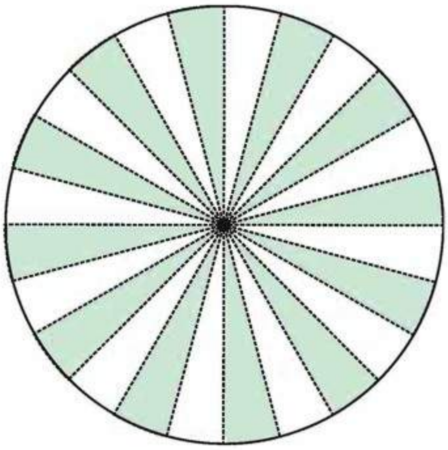


7)

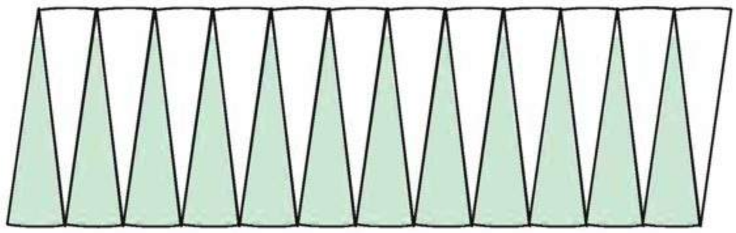


वृत्त द्वारा तल पर घेरे गए स्थान को हम वृत्त का क्षेत्रफल कहते हैं।

नीचे दिए गए वृत्त को हमने बहुत सारे त्रिज्यखंडों में बाँट दिया है।



- वृत्त के सभी त्रिज्यखंडों को लेकर हमने उसे नीचे दिए गए रूप में व्यवस्थित कर दिया गया है।



- हम ध्यान से इस आकृति को देखेंगे तो यह एक आयत का रूप लेती हुई नज़र आ रही है।
- हम वृत्त में जितने छोटे त्रिज्यखंड करेंगे ऊपर की आकृति आयत के उतने ही पास आती चली जाएगी।
- हम देख सकते हैं कि वृत्त का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= लंबाई x चौड़ाई

= $\frac{1}{2}$ x वृत्त की परिधि x त्रिज्या

= $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$

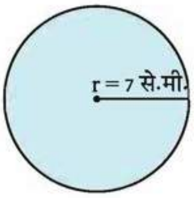
= πr^2

वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

नीचे कुछ वृत्त दिए गए हैं, उनका क्षेत्रफल ज्ञात करिए।

उदाहरण :

(a)



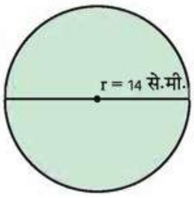
वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} X 7 X 7$

$= 154cm^2$

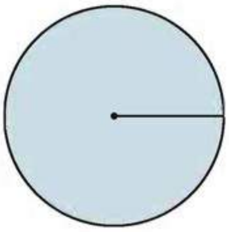
अब आप प्रयास कीजिए।

(b)



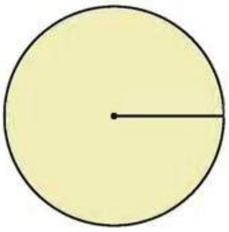
वृत्त का क्षेत्रफल = __________

(c)



त्रिज्या (r) = 21 से.मी. , वृत्त का क्षेत्रफल = __________

(d)

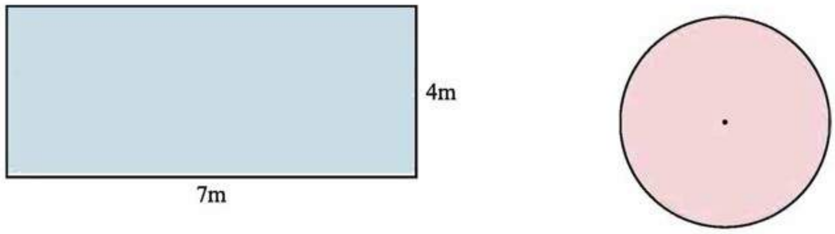


त्रिज्या (r) = 14 से.मी. , वृत्त का क्षेत्रफल = __________

आइए दिमागी कसरत करें।

1. सूरज ने 44cm लंबाई के तार से एक आयत बनाया। उसी तार का प्रयोग करके उसने एक वृत्त बनाया। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

2.



यहाँ दिए गए आयत और वृत्त की घेरे की लंबाई बराबर है।

आयत का परिमाप =................. , वृत्त की परिधि =.............................

आयत और वृत्त में से कौन, तल पर अधिक स्थान घेरे हुए है? पता कीजिए।

आयत का क्षेत्रफल =.................. वृत्त का क्षेत्रफल =............................

अध्याय 8 – बीजीय व्यंजक

शायना और बॉब सातवीं कक्षा में पढ़ रहे हैं और दोनों मिलकर बीजगणित को और अधिक जानने का प्रयास कर रहे हैं।

बॉब : शायना, आज हम फिर से बीजगणित पढ़ेंगे।

शायना : बॉब ! बीजगणित ?

बॉब : हाँ ! तुम्हें कठिन लगने वाला पाठ ! गणित में इंगलिश के x, y, z...........

शायना : बॉब, अब मुझे बीजगणित कठिन नहीं लगता। मुझे चर, अचर, व्यंजक तथा समीकरण के बारे में कुछ–कुछ याद है। तुमने बताया था। चरों और व्यंजकों की मदद से हम कठिन समस्याओं का हल ढूँढ सकते हैं।

बॉब : शायना, तुम देखोगी कि बीजगणित व्यंजकों पर ही आधारित है।

शायना : सच में

बॉब : हाँ, जब गणित में बड़ी–बड़ी संख्याओं को जोड़ना, घटाना पड़ता है या कहीं–कहीं जब राशियों का मान निश्चित नहीं होता है, तो हम व्यंजकों का इस्तेमाल करते हैं।

आज हम पढ़ेंगे :

1) व्यंजक कैसे बनाए जाते हैं ?

2) व्यंजकों का मान निकालना तथा उनका प्रयोग।

शायना : क्या तुम्हें याद है कि व्यंजक कैसे बनते हैं ?

बॉब : मुझे याद नहीं आ रहा है।

शायना : चलो मैं बताती हूँ। व्यंजकों को बनाने के लिए हम चर तथा अचर संख्याओं पर संक्रियाओं (योग, घटाव, गुणन व विभाजन) का प्रयोग करते हैं। जैसे 2x+3, यहाँ हमने एक चर संख्या x को 2 से गुणा करके उसमें 3 जोड़ दिए।

अब आइए चर तथा अचर संख्याओं को दोहराएँ :-

चर संख्याओं पर लाल रंग का गोला लगाएँ तथा अचर संख्याओं पर नीले रंग का गोला लगाएँ।

3, 4, V, 5, -5

x, y, z,

10, 15, 20, t, u

मौखिक कथनों को बीजीय व्यंजक में बदलना

उदाहरण : 1

आज राधिका का जन्मदिन है। शिवम के पास कुछ गुब्बारे हैं और गुरप्रीत ने उसे 40 गुब्बारे और दे दिए और पूछा – अब तो सजावट अच्छे से हो जाएगी न?

शिवम बोला – जी, बिल्कुल!!

चलो! अब कुल गुब्बारों की संख्या को बीजीय व्यंजक के रूप में लिखते हैं।

माना शिवम के पास गुब्बारे = x

गुरप्रीत ने गुब्बारे दिए = 40

अब शिवम के पास कुल गुब्बारे = 40 + x

उदाहरण : 2

टीचर ने कक्षा में से 3 विद्यार्थियों – राघव, अवनी तथा अंजू को बुलाया। तीनों के हाथ में कुछ पेंसिल दी गईं।

राघव	:	मुझे 4 पेंसिल मिली हैं।
अवनी	:	मुझे तो 3 पेंसिल मिली हैं।
अंजू	:	मुझे भी कुछ पेंसिल मिली हैं।
टीचर	:	अच्छा तो बताइए कि इस तीनों के पास कुल मिलाकर कितनी पेंसिल हैं।
शुभम	:	इनके पास 7+चर राशि अर्थात् **7+x** पेंसिल हैं।

7+x → एक व्यंजक है।

आओ, अब मौखिक कथनों को बीजीय व्यंजकों में बदलें :-

मौखिक कथन	:	यदि एक पुस्तक की कीमत कुछ रुपये है तो इसे बीजगणित में कैसे लिखेंगे?
बीजीय व्यंजक	:	माना पुस्तक की कीमत = R रुपए
मौखिक कथन	:	किसी संख्या को यदि 3 और बढ़ाया जाए
बीजीय व्यंजक	:	....
मौखिक कथन	:	यदि किसी संख्या को दुगुना कर उसमें 5 जोड़ दें
बीजीय कथन	:	....

आइए, व्यंजक बनाने का प्रयास करें

उदाहरण n और 6 के जोड़ का 6 गुणा

ऊपर दिए गए कथन का व्यंजक बनाने के लिए पहले n और 6 को जोड़ते हैं $\rightarrow$ n+6

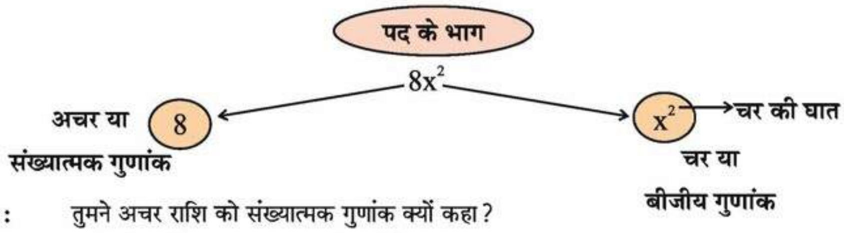
अब n+6 को 6 से गुणा करते हैं $\rightarrow$ 6 (n+6)

1. z के वर्ग में तीन जोड़ना	....
2. t के वर्ग तथा 5 का योग	....
3. 8/m में 6 जोड़ना	....
4. 3 में से 3z घटाएँ।	....
5. m के वर्ग तथा 14 का अंतर	....

आइए, शायना और बॉब की आगे हुई बातचीत को समझते हैं।

शायना : देखो बॉब! एक व्यंजक पदों से मिलकर बना होता है। व्यंजकों में वे पद पहले अलग से बनाए जाते हैं, फिर उन्हें जोड़ा या घटाया जाता है। जैसे 3x+5y में हमने पहले 3 को x से गुणा किया (3x) फिर 5 को y से गुणा किया (5y)। फिर दोनों को जोड़ दिया (3x+5y)।

अब नीचे देखो।



बॉब : तुमने अचर राशि को संख्यात्मक गुणांक क्यों कहा?

इसमें तो कहीं गुणा का निशान भी नहीं है।

शायना : जानते हो एक बहुत ही मज़ेदार बात है। बीजगणित में चर और अचर राशि में गुणा का निशान नहीं लगाया जाता है। जैसे :-

$(3) \times (x)$ को 3x या 3.x लिखते हैं।

बॉब : क्यों?

शायना : क्योंकि बीजगणित में चर के रूप में x का प्रयोग बहुत अधिक होता है तथा x की शक्ल गुणा (x) के निशान से मिलती है। जब दोनों एक साथ आ जाते हैं तो मामला गड़बड़ हो जाता है।

बॉब : शायना ! तुमने व्यंजक $8x^2$ में 2 को घात लिखा है। क्या इसका मतलब है चर x यानी $(x)\times(x)=x^2$ होता है ?

शायना : हाँ बॉब !

बॉब : क्या हम बीजगणित में अंकगणित की तरह गुणनखंड नहीं बना सकते हैं ?

शायना : हाँ बॉब गुणनखंड भी बना सकते हैं।

बॉब : व्यंजक में पद कैसे छाँटते हैं ?

शायना : किसी व्यंजक में जब हम जोड़ (+) या घटाव (–) का निशान देखकर आसानी से पदों को छाँटा जा सकता है।
जैसे $x+4y$ में x तथा 4y दो पद हैं।

बॉब : क्या $x-5y$ में भी दो पद हैं ?

शायना : हाँ ! परंतु ध्यान रहे इसमें घटा (–) का निशान दूसरे पद के साथ रहेगा जैसे x तथा -5y दो पद हैं।
इसका मतलब व्यंजकों को बनाने के लिए यह कहना ही काफी है कि केवल पदों को जोड़ा जाता है। हम $x-5y$ को $x+(-5y)$ भी लिख सकते हैं।

आइए, अब नीचे दिए गए व्यंजक को देखते हैं-

$40x^2+5$

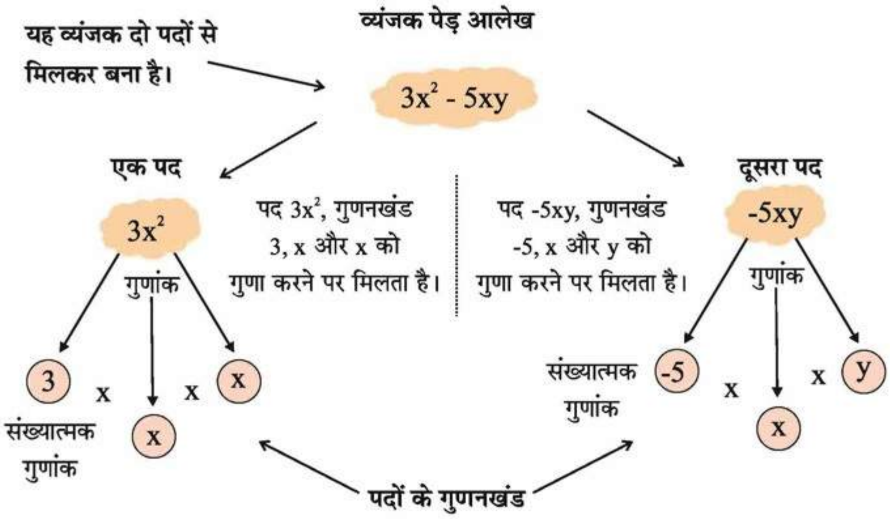
यह व्यंजक दो पदों से मिलकर बना है :
एक पद $40x^2$ तथा दूसरा पद 5

$40x^2+5$ बनाने के लिए हम पहले x में x गुणा करके, फिर उसे 40 से गुणा करके $40x^2$ प्राप्त करते हैं। उसके बाद उसमें 5जोड़ दिया जाता है।
इसी प्रकार $3xy+4$ में पहले हम x और y को गुणा करके xy प्राप्त करते हैं। फिर उसे 3 से गुणा करके 3xy प्राप्त करते हैं और अंत में 3xy में 4 जोड़ दिया जाता है।

निम्नलिखित व्यंजकों में पदों की संख्या बताएँ-

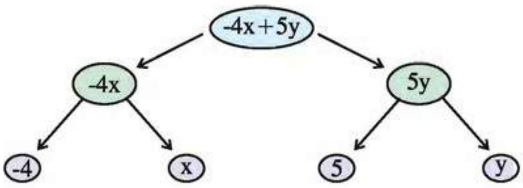
	व्यंजक	पदों की संख्या	पद		व्यंजक	पदों की संख्या	पद
(a)	35-y	2	35 , -y	(e)	x-3	......	....
(b)	75+z	......	....	(f)	$1+x+x^2$	......	....
(c)	95+x	......	....	(g)	$y-y^3$	......	....
(d)	a+15	......	....	(h)	$-ab+2b^2-3a^2$	......	....

एक व्यंजक के पदों तथा पदों के गुणनखंडों को एक व्यंजक पेड़ आलेख से दिखाया जा सकता है।

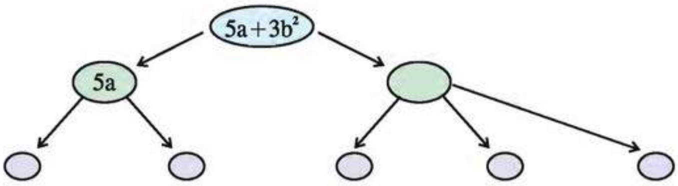


पेड़ आलेख को पूरा करने का प्रयास करें।

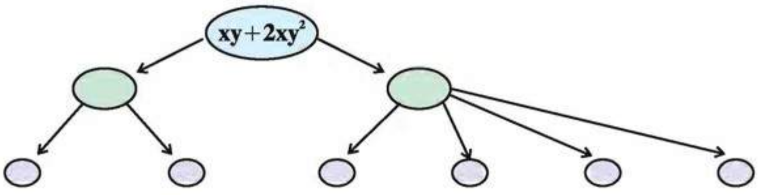
1)



2)



3)



आइए, फिर से बॉब और शायना की बातचीत को सुनते हैं।

बॉब : हमने पेड़ आलेख में संख्यात्मक गुणांक (गुणनखंड) देखा। हम संख्यात्मक गुणांक को केवल गुणांक भी कह सकते हैं। किसी भी पद में संख्यात्मक गुणांक के अलावा चर वाले भाग को क्या कहते हैं? जैसे : 6xy में 6 को xy का संख्यात्मक गुणांक कहेंगे पर xy को क्या कहेंगे?

शायना : बहुत अच्छा सवाल है! xy को हम 6xy का बीजीय गुणांक कहेंगे। इसी प्रकार, पद $-5y^2$ में, y^2 का गुणांक –5 है।

बॉब : अच्छा बताओ, खाली xy में xy का क्या गुणांक होगा?

शायना : xy का गुणांक 1 होगा।

जब किसी पद का गुणांक 1 होता है, तो उसे लिखते समय छोड़ दिया जाता है। जैसे : $1y^2$ को हम केवल y^2 लिखेंगे। इसी प्रकार जब किसी पद का गुणांक –1 होता है, तो उसे केवल घटाव के चिन्ह (–) से दिखाते हैं। जैसे: -xyz में xyz का गुणांक –1 है।

बॉब : अब क्या तुम मुझे **समान पद** और **असमान पद** बताओगी?

शायना : हाँ आओ, समझते हैं।

समान पद (Like Terms)

जब पदों के बीजीय गुणनखंड एक जैसे ही हों तो वे समान पद कहलाते हैं। जैसे 5xy, 6yx यहाँ दोनों पदों में x तथा y गुणा हो रहे हैं।

असमान पद (Unlike Terms)

जब पदों के बीजीय गुणनखंड भिन्न–भिन्न हों तो वे असमान पद कहलाते हैं जैसे 2xy-3x-y में 2xy और -3x में भिन्न–भिन्न बीजीय गुणनखंड हैं अत: यह असमान पद हैं।

आओ करें :-

निम्नलिखित में समान पदों के समूह बनाइए।

$xy,\ xy^2,\ 3xy,$

$x^2,\ -x,\ y,\ 2x,\ 7x^2$

$-7x^2y^2,\ -2x,\ 3xy^2$

$-4xy,\ -3y$

आइए, तालिका पूरा करने का प्रयास करते हैं।

	व्यंजक	गुणनखंड x वाला पद	x का गुणांक
1)	$4x - 3y$	$4x$	4
2)	$x + y + 5$	x	1
3)	$2y + 5$	_____	_____
4)	$2xy$	_____	_____
	व्यंजक	**गुणनखंड y वाला पद**	**y का गुणांक**
1)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
2)	$8 + yz$	_____	_____
3)	$yz^2 + 5$	_____	_____
4)	$my + m$	_____	_____
	व्यंजक	**पद जो अचर नहीं है**	**संख्यात्मक गुणांक**
1)	$xy+y$	xy, y	1, 1
2)	$13-y^2$	_____	_____
3)	$13-y+5y^2$	_____	_____
4)	$4p^2q-3pq^2+5$	_____	_____

अब करो :

नीचे दिए गए पदों के लिए कोई भी दो-दो समान पद लिखें:

(a) $7ab$ ...$-6ab$... ...$4ab$...

(b) $2mm^2$ ....

(c) $3x$ ....

(d) $4y3$ ....

(e) y ....

(f) $10x^2$ ....

एकपदी

जिस व्यंजक में केवल एक पद होता है उसे एकपदी कहते हैं।

उदाहरण :- $4x$, $3pz$, 7

द्विपदी

जिस व्यंजक में केवल दो असमान पद होते हैं उसे द्विपदी व्यंजक कहते हैं।

उदाहरण :- $9x+8$, $-3x+2y$, $2p+q$

सोचें : परन्तु यदि हम $5xy+6yx$ लें तब भी क्या इसे द्विपद कहेंगे ?

त्रिपदी

जिस व्यंजक में तीन असमान पद होते हैं उसे त्रिपदी व्यंजक कहते हैं।

उदाहरण :- $3p+5q+4$, $13x-5t+6$

बहुपदी

जिस व्यंजक में एक से अधिक पद होते हैं उसे बहुपदी व्यंजक कहते हैं।

उदाहरण :- $9x+q$, $3p+5q+4$, $3x+7y+z-3$

प्र. निम्नलिखित पदों में किन्हीं भी पदों का प्रयोग करते हुए दो तथा तीन पदों से मिलकर बनने वाले बीजीय व्यंजक लिखिए।

xy, 6.5, 7, 4, x, $7z$, $5z^2$, y, v, t^2, -5, 10, 1, s

दो पद वाले बीजीय व्यंजक	तीन पद वाले बीजीय व्यंजक
(i) $xy+7$	(i) $5z^2+t^2+1$
(ii)	(ii) ....
(iii)	(iii) ....
(iv)	(iv) ....
(v)	(v) ....

व्यंजकों का योग और घटाव

पिछली कक्षा में हमने देखा कि व्यंजकों को कैसे जोड़ा या घटाया जाता है।

किसी भी व्यंजक में हम केवल समान पदों को इकट्ठा करके जोड़ते हैं। बाकी असमान पदों को जोड़ के रूप में ही लिखा छोड़ देते हैं।

मान लीजिए हमें 2x और 3x को जोड़ना है।

यदि हम x की जगह 4 ले लें तो

अब 2×4 को 3×4 में जोड़ें तो हम कुछ ऐसे करेंगे।

$\Rightarrow 2\times4+3\times4$

$\Rightarrow (2+3)\times4$ ←

$\Rightarrow 5\times4=20$

क्या हम बता सकते हैं कि हमने कौन से नियम से ऐसा किया है?

हम जाँच भी कर सकते हैं

$2x4+3x4=8+12=20$

इसलिये जब

$2x+3x$ को जोड़ेंगे तो

$2x+3x=2\times x+3\times x$

$=(2+3)x$

$=5x$

आओ, टॉफ़ियों की कुल संख्या निकालें।

अहमद, राम, रानी और गुरप्रीत के पास समान मात्रा में टॉफ़ियाँ हैं। चलिए अब देखते हैं कि इन चारों के पास कुल मिलाकर कितनी टॉफ़ियाँ हो गईं।

माना अहमद की टॉफ़ियाँ $=a$

तो रानी की टाफ़ियाँ $=a$

राम की टाफ़ियाँ $=a$

तथा गुरप्रीत की टॉफ़ियाँ $=a$

कुल टाफ़ियाँ $=a+a+a+a$

$=4a$

अब यदि अहमद के पास a टॉफ़ियाँ, राम के पास b टॉफ़ियाँ, रानी के पास c टॉफ़ियाँ तथा गुरप्रीत के पास d टॉफ़ियाँ हों तो कुल टॉफ़ियाँ = $a+b+c+d$

अब यदि हमें 2x और 3y को **जोड़ने** को कहा जाए तो हम केवल 2x+3y लिखकर छोड़ देंगे।

कुछ दोस्त 2x+3y को 5x या 5y या 5xy लिख देते हैं जो बिल्कुल सही नहीं है। **असमान पदों को उस प्रकार जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता जिस प्रकार कि समान पदों को जोड़ा या घटाया जाता है।**

इसी प्रकार हम व्यंजकों का **घटाव** करते हैं। समान पदों में हम संख्यात्मक गुणांकों का घटाव करेंगे। जैसे

4m - 2m = (4-2) m = 2m

5m - 8m = (5-8) m = -3m

अब यदि हमें कुछ ऐसा व्यंजक दिया हो जैसे **3a+4b-5a+4c+2b** तो हम पहले समान पदों को एक साथ लिखेंगे।

[3a+(-5a)] + (4b+2b) + 4c
= (3-5)a+(4+2)b+4c
= -2a + 6b + 4c

आओ बॉक्स में निम्न पदों का योग लिखें।

5xy + 4yx =	9xy
4x+5y - 3x+7x =	
10y+ 5z =	
3a+4b - 5a + 7b =	
3b + 5c =	
5c - 2c =	
7c - 3c =	
7b - 5a =	

आओ कुछ और उदाहरण देखें।

उदाहरण 1

$9x^2$-7x+8 और 5x-12 को जोड़ें।

समान पद

$$\begin{array}{r} 9x^2 - \boxed{7x} + \boxed{8} \\ \boxed{5x} - \boxed{12} \\ \hline 9x^2 - 2x - 4 \\ \hline \end{array}$$ → समान पद

हम देख सकते हैं कि हमने व्यंजकों को एक के नीचे एक करके इस प्रकार रखा है कि समान पद एक ही सीध में रहें।

ऊपर दिए गए व्यंजकों को हम कुछ इस प्रकार से भी जोड़ सकते हैं।

$9x^2-7x+8+5x-12$

$= 9x^2-7x+5x+8-12$

$= 9x^2-2x-4$

उदाहरण 2

6xy+8yz-2zx और -3xy+4zx+4x को जोड़ें।

समान पद

$$\begin{array}{rrrr} \boxed{6xy} & +8yz & \boxed{-2zx} & \\ \boxed{-3xy} & & \boxed{+4zx} & +4x \\ \hline \multicolumn{4}{c}{3xy+8yz+2zx+4x} \\ \hline \end{array}$$

जिस प्रकार व्यंजकों के जोड़ में समान पदों को जोड़ा जाता है, इसी प्रकार घटाने की प्रक्रिया में समान पदों को घटाया जाता है।

उदाहरण 3

12a-9ab+5b में से -4a-7ab+3b को घटाइए।

$$\begin{array}{rrr} 12a & -9ab & +5b \\ -4a & -7ab & +3b \\ (+) & (+) & (-) \\ \hline 16a & -2ab & +2b \\ \hline \end{array}$$

ध्यान देने की बात है कि घटाने की प्रक्रिया में दूसरी पंक्ति में लिखे व्यंजक के पदों का चिन्ह बदला जाता है। अपने अध्यापक से इस बारे में चर्चा करें।

निम्न व्यंजकों का जोड़ ज्ञात कीजिए।

(1) $3x^2 - 5x+4$ तथा $-2x^2 - 4x+3$

(2) $3xy^2 - 5xy$ तथा $x+ xy^2 - x^2y$

(3) $a^2b - 3ab$ तथा $4ab^2+4x$

घटा ज्ञात करें।

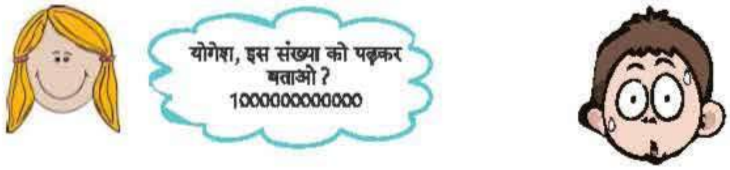
(1) $3x^2 - 5x+4$ में से $-2x^2 -4x+3$

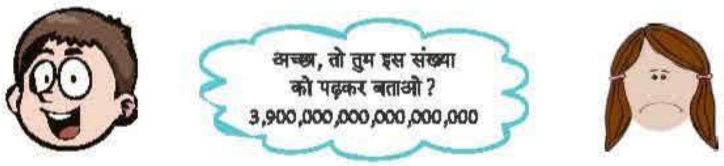
(2) $3xy^2 - 5xy$ में से $-5xy^2 -3xy$

(3) $a^2b - 3ab$ में से $-3a^2b +4ab$

अध्याय 9 – घातांक और घात

योगेश और कविता आपस में संख्याओं को पढ़ने का खेल खेल रहे हैं।





दोनों बच्चों को संख्याओं को पढ़ने में परेशानी हुई।
दोनो बच्चे अध्यापक के पास अपनी समस्या को लेकर जाते हैं।

क्रम को ध्यानपूर्वक देखिए और आगे बढ़ाइए।

10	=	1 × 10
10+10	=	2 × 10
10+10+10	=	3 ×10
10+10+10+10	=	———
10+10+10+10+10	=	———
10+10+10+10+10+10	=	———

क्रम को ध्यानपूर्वक देखिए आगे बढ़ाइए।

10	=	10^1
10×10	=	10^2
10×10×10	=	10^3
10×10×10×10	=	———
10×10×10×10×10	=	———
10×10×10×10×10×10	=	———
10×10×10×10×10×10×10	=	———

लेकिन इस रूप को क्या कहते हैं,
और इसे कैसे पढ़ते हैं ?

संख्याओं के इस रूप को घातांकीय रूप (Exponential form) कहते हैं। यहाँ '10' को आधार (base) संख्या तथा इसके ऊपर की संख्या को घात (Power) कहते हैं।

घातांकीय रूप में संख्या

घात ↘ 3
7 ← आधार

→ **घातांकीय रूप में लिखी गई संख्याओं के, आधार और घात को पहचानिए।**

घातांकीय रूप	आधार	घात
a) 2^5	2	5
b) 10^{13}		
c) 9^3		
d) 3^{12}		

घातांकीय रूप में लिखिए

I) $2\times2\times2 = 2^3$

II) $5\times5\times5\times5\times5\times5 = 5^6$

III) $10\times10\times10\times10\times10 =$ __

IV) $7\times7\times7\times7\times7 =$ __

V) $3\times3 =$ __

VI) $c\times c\times c\times c\times c\times c =$ __

VII) $a\times a\times a\times a =$ __

विस्तारित रूप में लिखिए

a) $3^3 = 3\times3\times3$

b) $2^7 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$

c) $5^2 =$

d) $10^4 =$

e) $7 =$

f) $b^3 =$

g) $y^5 =$

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए			घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए		
क) 5^3 =	$5 \times 5 \times 5$	= 125	1) $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$	=	$2^2 x 3^3$
ख) 2^5 =	______________	= ___	2) $y \times y \times y \times z \times z \times z \times z$	=	$y^3 x z^4$
ग) 7^2 =	______________	= ___	3) $t \times t$	=	_____
घ) 3^4 =	______________	= ___	4) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 2 x 2$	=	_____
ङ) 10^6 =	______________	= ___	5) $a \times a \times b \times b \times b \times c \times c$	=	_____

क्या आपका राज़ सुरक्षित है ? घातांकीय रूप में सोचिए।

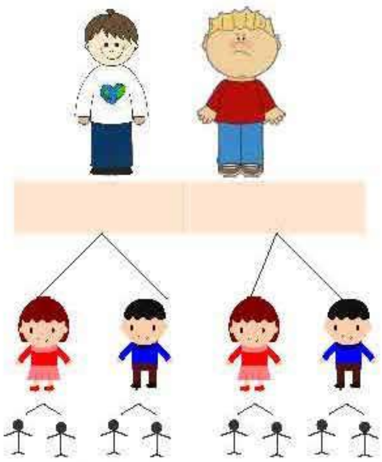
→ आप एक ऐसी बात सोचिए जो आप सभी से छिपाना चाहते थे।
अब वह राज़ की बात आप किसी को बताना चाहते हो।

पहले दिन आपने अपने दो मित्रों को वह राज़ बता दिया। उन मित्रों का नाम लिखिए

दूसरे दिन आपके दोनों दोस्तों ने, अपने दो-दो दोस्तों को वह राज़ बता दिया।

तीसरे दिन, उन सभी ने अपने दो-दो अन्य दोस्तों को वह राज़ बता दिया।

चौथे दिन, उन सभी ने अपने और दो-दो दोस्तों को वह राज़ बता दिया।



यह क्रम इसी प्रकार बढ़ता चला जाएगा

आइए अब घातांकीय रूप में सोचते हैं।

पहले दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चला ?	=	2	=	2^1	=	2
दूसरे दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चला ?	=	2×2	=	2^2	=	4
तीसरे दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चला ?	=	______	=	______	=	______
चौथे दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चला ?	=	______	=	______	=	______
पाँचवे दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चल जाएगा ?	=	______	=	______	=	______

अब प्रश्नों के उत्तर दीजिए

प्र०1 अनुमान लगाकर बताइए कि कितने दिनों में आपके पूरे गाँव या कॉलोनी को आपके राज़ के बारे में पता चल जाएगा ?

उ०–

प्र०2 आपको इस कहानी से क्या शिक्षा मिली ?

उ०–

अभाज्य गुणनखंड विधि से संख्याओं को घातांकीय रूप में लिखिए।

(a) 81 = 3X3X3X3

= 3^4

3	81
3	27
3	9
3	3
	1

(b) 1000 = 2X2X2X5X5X5

= 2^3X5^3

2	1000
2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

(c) 64 = ______________

= _____

	64

(d) 36 = ______________

= _____

	36

(e) 256 = ______________
= _____   256

(f) 729 = ______________
= _____   729

(g) 144 = ______________
= _____   144

(h) 420 = ______________
= _____   420

आओ जाँचें। जब घातांकीय रूप में आधार संख्या, ऋणात्मक हो।

घातांकीय रूप में लिखिए	विस्तारित रूप में लिखिए
a) $(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = (-2)^5$	क) $(-5)^5 = (-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)$
b) $(-1)\times(-1)\times(-1) = (-1)^3$	ख) $(-3)^4$ = ______________
c) $(-13)\times(-13)\times(-13)\times(-13)$ = ___	ग) $(-9)^3$ = ______________
d) $(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)$ = ___	घ) $(-2)^2$ = ______________
e) $(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)$ = ___	ङ) $(-b)^3$ = ______________

आओ, घातांक से संबंधित कुछ नियम बनाएँ

पैटर्न को समझकर, आगे बढ़ाइए।

$(-1)^1 = (-1) = -1$

$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^3 = __ \times __ \times __ = __$

$(-1)^4 = __ \times __ \times __ \times __ = __$

$(-1)^5 = __ \times __ \times __ \times __ \times __ = __$

$(-1)^6 = __ \times __ \times __ \times __ \times __ \times __ = __$

प्राप्त उत्तर

$(-1)^{\text{सम संख्या}}$ = ________

$(-1)^{\text{विषम संख्या}}$ = ________

मान ज्ञात कीजिए

(a) $(-1)^8$ = _____ (b) $(-1)^{17}$ = _____ (c) $(-1)^{100}$ = _____

(d) $(-1)^7$ = _____ (e) $(-1)^{90}$ = _____ (f) $(-1)^{21}$ = _____

सरल कीजिए

(a) $2 \times (-10)^3 = 2 \times (-10) \times (-10) \times (-10) = -2000$

(b) $3^3 \times 2^3$ = __________ = ________

(c) $(-3) \times (5)^2$ = __________ = ________

(d) $(-2)^2 \times (-3)^2$ = __________ = ________

(e) $(-2)^4 \times (10)^2$ = __________ = ________

(f) $(-5)^3 \times (-2)^2$ = __________ = ________

आइए घातांकों के नियम समझने की कोशिश करते हैं।

दिए गए उदाहरणों को समझकर रिक्त स्थान भरिए

(i) $3^2 \times 3^5 = (3 \times 3)(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3^{2+5} = 3^7$

(ii) $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2^{3+2} = 2^5$

(iii) $a^4 \times a^2 = (a \times a \times a \times a) \times (a \times a) = a^{4+2} = a^6$

(iv) $5^2 \times 5^2$ = ________________ = ___ = ___

(v) $7^2 \times 7^1$ = ________________ = ___ = ___

(vi) $y^2 \times y^2$ = ________________ = ___ = ___

प्राप्त नियम 1

$$a^m x a^n = a^{m+n}$$

समान आधार वाले घातांकों का गुणन कीजिए।

(a) $4^7 \times 4^2 = 4^{7+2} = 4^9$

(b) $2^5 \times 2^3$ = ____ = ____

(c) $a^2 \times a^6$ = ____ = ____

(d) $5^2 \times 5$ = ____ = ____

(e) $7^4 \times 7^2 \times 7^3$ = ____ = ____

(f) $y^3 \times y^2 \times y^1$ = ____ = ____

ध्यान दीजिए

$2^3 x 3^2$, क्या इस स्थिति में हम घातांकों की घात को जोड़ सकते हैं?

साथियों के साथ चर्चा कीजिए।

दिए गए उदाहरणों को समझकर, रिक्त स्थान भरिए

i) $3^5 \div 3^2 = \frac{3^5}{3^2} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3} = 3^{5-2} = 3^3$

ii) $7^4 \div 7^3 = \frac{7^4}{7^3} = \frac{7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = 7^{4-3} = 7^1$

iii) $a^6 \div a^2 = \frac{a^6}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a\times a\times a}{a\times a} = a^{6-2} = a^4$

iv) $2^7 \div 2^6$ = ____ = ________ = ____ = ____

v) $5)^4 \div 5^4$ = ____ = ________ = ____ = ____

प्राप्त नियम 2

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

सरल कीजिए।

a) $2^9 \div 2^4 = 2^{9-4} = 2^5$

b) $3^5 \div 3^4$ = ___ = ___

c) $x^7 \div x^3$ = ___ = ___

d) $11^8 \div 11^4$ = ___ = ___

e) $5^9 \div 5^9$ = ___ = ___

f) $y^8 \div y^8$ = ___ = ___

ध्यान दीजिए

$2^3 \div 3^2$, क्या इस स्थिति में भी हम घातांकों की घात का घटाव करेंगे?

साथियों के साथ चर्चा कीजिए।

आइए अब हम कुछ उदाहरणों से शून्य घात वाले घातांकों का मान निकालने का प्रयास करते हैं।

i) $3^4 \div 3^4 \quad = \quad \frac{3^4}{3^4} \quad = \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3} \quad = 1$ $\boxed{\frac{3^4}{3^4} = 3^{4-4} = 3^0 = 1}$

ii) $7^5 \div 7^5 \quad = \quad \frac{7^5}{7^5} \quad = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7} \quad = 1$ $\boxed{\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0 = 1}$

प्राप्त नियम 3

$$a^0 = 1$$

हल ज्ञात कीजिए

1) 10^0 = ___	i) 0^{10} = __
2) 3^0 = ___	ii) 0^5 = __
3) 10^0 = ___	iii) 0^{15} = __
4) 0^0 = ___	iv) 0^0 = __

यहाँ 0^0 के दो अलग-अलग उत्तर हैं। इस कारण 0^0 का मान अनिश्चित (Indeterminate) होता है।

दिए गए उदाहरणों को समझकर, रिक्त स्थान भरिए।

a) $(3^2)^3 = (3^2)\times(3^2)\times(3^2) = (3\times3)\times(3\times3)\times(3\times3) = 3^{2\times3} = 3^6$

b) $(5^3)^2 = (5^3)\times(5^3) = (5\times5\times5)\times(5\times5\times5) = \underline{5^{3\times2}} = \underline{5^6}$

c) $(7^2)^2$ = __________ = ______________ = ___ = ___

d) $(2^2)^4$ = __________ = ______________ = ___ = ___

e) $(a^3)^3$ = __________ = ______________ = ___ = ___

प्राप्त नियम 4

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

प्राप्त नियम 4 का प्रयोग कर सरल कीजिए

i)	$(6^2)^3$	$= 6^{2x3}$	$= 6^6$		(iv)	$(11^2)^4 =$	11^{2x4}	$= \underline{11^8}$
ii)	$(5^{10})^4$	=_____	=_____		(v)	$(3^4)^2$	= ____	=____
iii)	$(7^{15})^2$	=_____	=_____		(vi)	$(2^7)^2$	= ____	=____

अभाज्य संख्या की घात के रूप में लिखिए

a) 8^5	$= (2\times2\times2)^5$	$= (2^3)^5$	$= 2^{5x3}$	$= 2^{15}$
b) 4^3	= _____	= _____	= _____	= _____
c) 9^2	= _____	= _____	= _____	= _____
d) 27^4	= _____	= _____	= _____	= _____
e) 25^5	= _____	= _____	= _____	= _____

दिए गए उदाहरणों को समझकर, रिक्त स्थान भरिए:-

a) $3^2\times5^2$	$= 3\times3\times5\times5$	$= (3\times5)\times(3\times5)$		$= (3\times5)^2$	$= 15^2$
b) $5^3\times3^3$	$= 5\times5\times5\times3\times3\times3$	$= (5\times3)\times(5\times3)\times(5\times3)$		$= (5\times3)^3$	$= 15^3$
c) $7^2\times3^2$	=_______________	= ________	= ________	= ______	= __
d) $2^4\times3^4$	=_______________	= ________	= ________	= ______	= __
e) $2^2\times5^2$	=_______________	= ________	= ________	= ______	= __

प्राप्त नियम 5

$$a^m\times b^m = (a\times b)^m$$

प्राप्त नियम 5 का प्रयोग कर, सरल कीजिए			घातांकीय रूप का विस्तार कीजिए		
1) $7^5 \times 3^5$	$= (7 \times 3)^5$	$= 21^5$	(i) 15^4	$= (3 \times 5)^4$	$= 3^4 \times 5^4$
2) $2^4 \times 9^4$	= ____	= ___	(ii) 10^3	= ____	= ____
3) $7^2 \times 2^2$	= ____	= ___	(iii) 21^3	= ____	= ____
(6) $8^{10} \times 3^{10}$	= ____	= ___	(vi) $(35)^2$	= ____	= ____

दिए गए उदाहरणों को समझकर, रिक्त स्थान भरिए:-

a) $3^5 \div 4^5 = \frac{3^5}{4^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$

b) $a^3 \div b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

c) $5^2 \div 2^2$ =___ = _________ =________ = ________= ___

d) $9^4 \div 5^4$ =___ = _________ =________ = ________= ___

प्राप्त नियम 6

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

घातांकीय रूप में लिखिए

1) $\frac{2^4}{5^4} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$	4) $\frac{10^4}{5^4}$ = ___
2) $\frac{x^3}{y^3}$ = ___	5) $\frac{11^7}{3^7}$ = ___
3) $\frac{3^3}{2^3}$ = ___	6) $\frac{8^5}{3^5}$ = ___

विस्तारित रूप में लिखिए

i) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5}$

ii) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ = ___ = ______

iii) $\left(\frac{4}{2}\right)^3$ = ___ = ______

iv) $\left(\frac{5}{3}\right)^4$ = ___ = ______

सही घातांकीय नियम से मिलान कीजिए

1) $x^n \times x^m$	a) $(x \times y)^n$
2) $x^n \div x^m$	b) x^{n+m}
3) $(x^n)^m$	c) $\left(\frac{x}{y}\right)^m$
4) $x^n \times y^n$	d) x^{nm}
5) $x^n \div y^n$	e) x^{n-m}

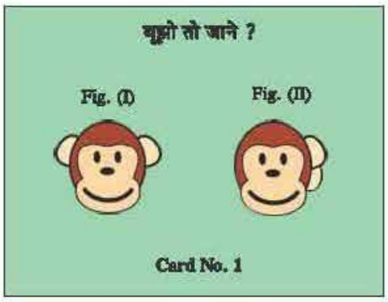
सही मिलान कीजिए

1) 7^0	a) 3^8
2) $(3^2)^4$	b) 6^7
3) 5^{-3}	c) 12^5
4) $6^2 x 6^5$	d) 1
5) $7^7 \div 7^2$	e) $\frac{1}{5^3}$
6) $3^5 \times 4^5$	f) 7^5

अध्याय 10 - सममिति

रीश्री और मोहन दोनों एक ही कक्षा के विद्यार्थी हैं।

अच्छा-अच्छा ठीक है। अब मोहन
तुम ये तीन कार्ड्स (Cards) देखो!
बताओ,
तुम्हें क्या समझ आ रहा है?


बूझो तो जाने ?
Fig. (I)
Fig. (II)
Card No. 1

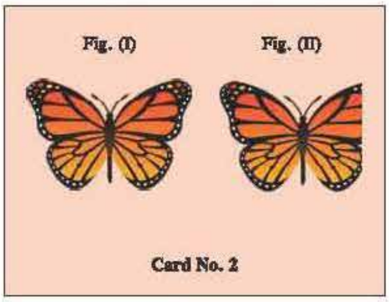


Fig. (I)
Fig. (II)
Card No. 2

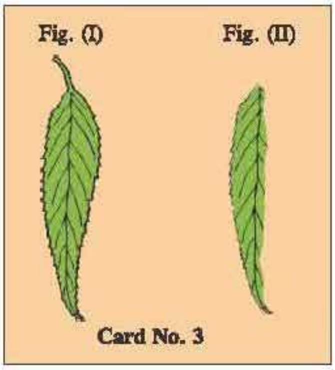


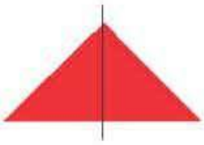
Fig. (I)
Fig. (II)
Card No. 3

सभी कार्ड्स में Fig. I सुंदर है।
मोहन! सुंदरता के लिए सममिति की आवश्यकता होती है।
सममिति, सममिति चिल्ला रही हो। बताओ तो सही यह क्या बला है?
किसी चित्र को इस प्रकार मोड़ दें कि दोनों आधे भाग एक दूसरे के प्रतिबिम्ब जैसे दिखाई दें।
जब हम किसी वस्तु को दो भागों में इस प्रकार बाँटें कि दोनों एक समान दिखाई दें।

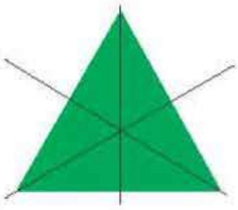
अच्छा अब समझा! मैं बताऊँ सममिति हमारे घर की कौन-कौन सी वस्तुओं में है। पापा के चश्मे में, फूलदान के फूल में, कैंची में....
हाँ! इसका मतलब है, तुमने सममिति के साथ-साथ सममित रेखा को भी पहचान लिया है।
आओ! जानने की कोशिश करें कि कौन सी वस्तुएँ सममित हैं, और कौन सी सममित नहीं।
कुछ आकृतियाँ ऐसी होती हैं जिनमें केवल एक सममित रेखा होती है, कुछ में दो, कुछ में अनेक सममित रेखाएँ होती हैं।
कुछ आकृतियाँ ऐसी होती हैं जिनमें कोई भी सममित रेखा नहीं होती।

जैसे:- 1. एक विषमबाहु त्रिभुज में कोई सममित रेखा नहीं होती।

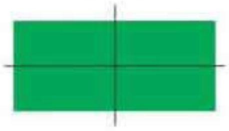
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज में एक सममित रेखा होती है।



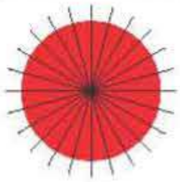
3. एक समबाहु त्रिभुज में तीन सममित रेखाएँ होती हैं।



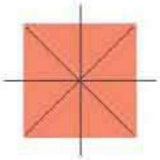
4. एक आयत में दो सममित रेखाएँ होती हैं।



5. एक वृत में अनेक सममित रेखाएँ होती हैं।

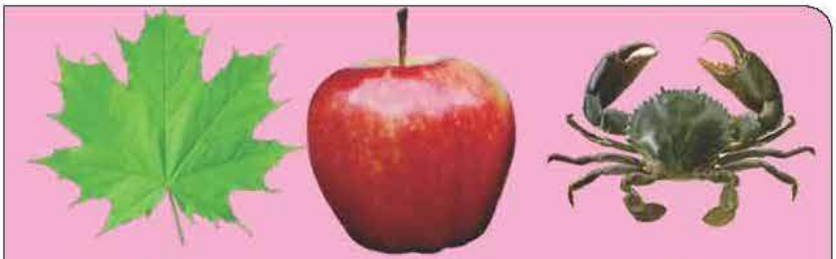


6. एक वर्ग में चार सममित रेखाएँ होती हैं।



समनिति वह है जब एक आकृति बिल्कुल दूसरी आकृति के समान बन जाए।

इन्हें देखिए :-

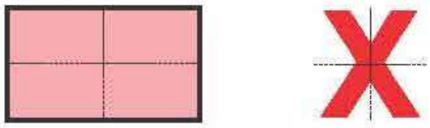


पत्ता सेब केकड़ा

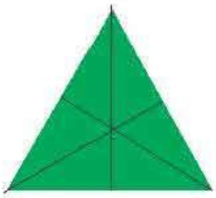
सममित रेखा सममित रेखा सममित रेखा सममित रेखा

एक सममित रेखा वाली आकृतियाँ

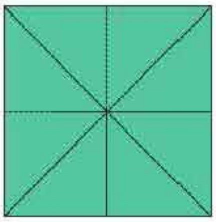
दो सममित रेखाओं वाली आकृतियाँ



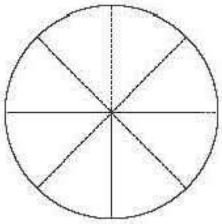
अनेक सममित रेखाओं वाली आकृतियाँ



त्रिभुज

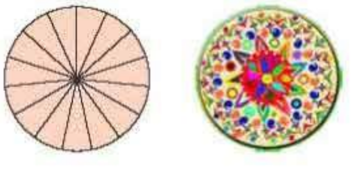


वर्ग



वृत

अनेक सममित रेखाओं वाली आकृतियाँ

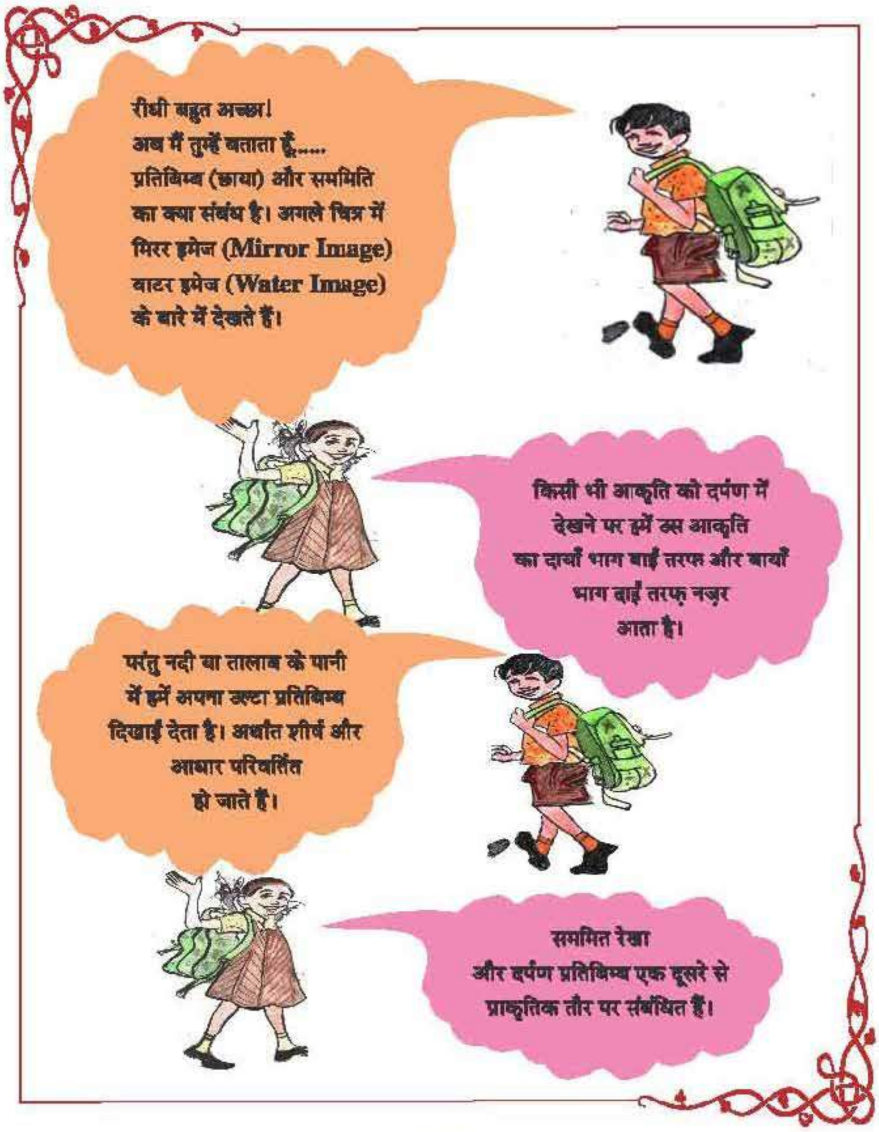


असममित आकृतियाँ

1. अपने घर अथवा विद्यालय की ऐसी चार वस्तुओं की सूची बनाइए जो सममित हो।
2. नीचे दी गई आकृति में कौन सी दर्पण रेखा, अर्थात् सममित रेखा है, l_1 या l_2 ?
3. नीचे दी गई पंचभुज आकृतियों की पहचान कीजिए। जाँच कीजिए कि ये आकृतियाँ सममित हैं या नहीं। उनकी सममित रेखा भी खींचिए।

अनेक सममित रेखाओं वाली आकृतियाँ

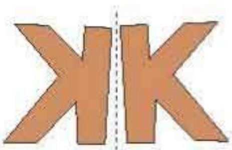
समबाहु त्रिभुज को चित्रानुसार तीन प्रकार से मोड़कर दो बराबर भागों में विभाजित किया जा सकता है। अतः समबाहु त्रिभुज में 3 सममित रेखाएँ होती हैं।


रीधी बहुत अच्छा!
अब मैं तुम्हें बताता हूँ.....
प्रतिबिम्ब (छाया) और सममिति
का क्या संबंध है। अगले चित्र में
मिरर इमेज (Mirror Image)
वाटर इमेज (Water Image)
के बारे में देखते हैं।
किसी भी आकृति को दर्पण में
देखने पर हमें उस आकृति
का दायाँ भाग बाईं तरफ और बायाँ
भाग दाईं तरफ़ नज़र
आता है।
परंतु नदी या तालाब के पानी
में हमें अपना उल्टा प्रतिबिम्ब
दिखाई देता है। अर्थात शीर्ष और
आधार परिवर्तित
हो जाते हैं।
सममित रेखा
और दर्पण प्रतिबिम्ब एक दूसरे से
प्राकृतिक तौर पर संबंधित हैं।

वस्तु और उसका प्रतिबिम्ब दर्पण
रेखा के संदर्भ में सममित है।
इसलिए दर्पण रेखा ही सममित
रेखा होती है।
मिरर इमेज या वाटर इमेज एक
आकार में रैखिक सममित तब होती है
जब उसका एक आधा भाग दूसरे
भाग का मिरर इमेज या
वाटर इमेज हो।

वाटर इमेज

1)

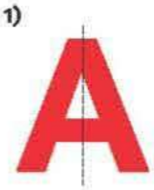
2) 

3)

4)

दर्पण प्रतिबिम्ब (Mirror Image)

1)



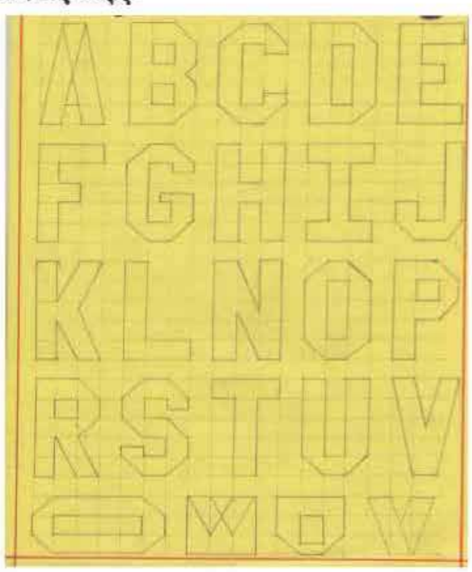
2)

3)

सममिति का प्रयोग अंग्रेज़ी अक्षरों को लिखने के लिए

अंग्रेज़ी के सभी अक्षरों को उनकी सममिति के आधार पर वर्गीकृत कीजिए।
उदाहरण के लिए :

निम्न आकृतियों में सममित रेखाएँ बनाइए-



प्र.1 सममिति से आप क्या समझते हैं?

प्र.2 अपने आसपास की ऐसी पांच वस्तुएँ बताइए जो सममिति हों?

प्र.3 निम्न आकृतियों की पहचान कीजिए कि ये सममिति हैं या नहीं?

1.

2.

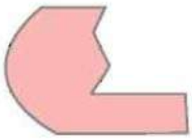
3.

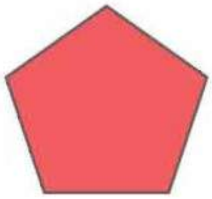
4.

5.

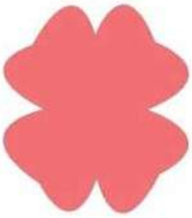
6.

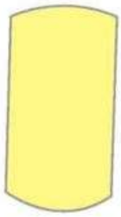
7.

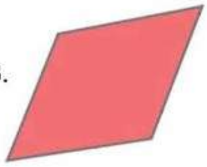
8. 

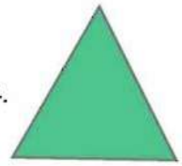
9. 

प्र.4 निम्न आकृतियों की कोई दो सममित रेखाएँ खींचिए।

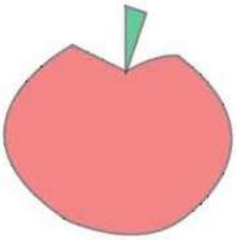
1. 

2. 

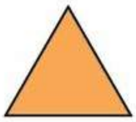
3. 

4. 

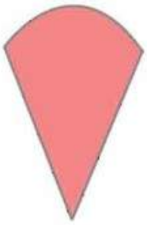
प्र.5 निम्न आकृतियों की सममित रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

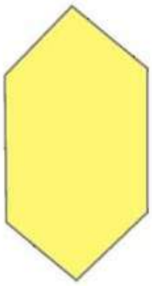
1. 

2.

3. 

4.

5. 

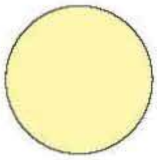
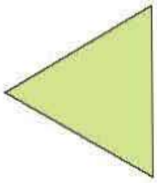
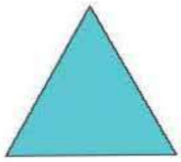
5. 

रैखिक सममिति की पहचान कीजिए तथा बनाइए।

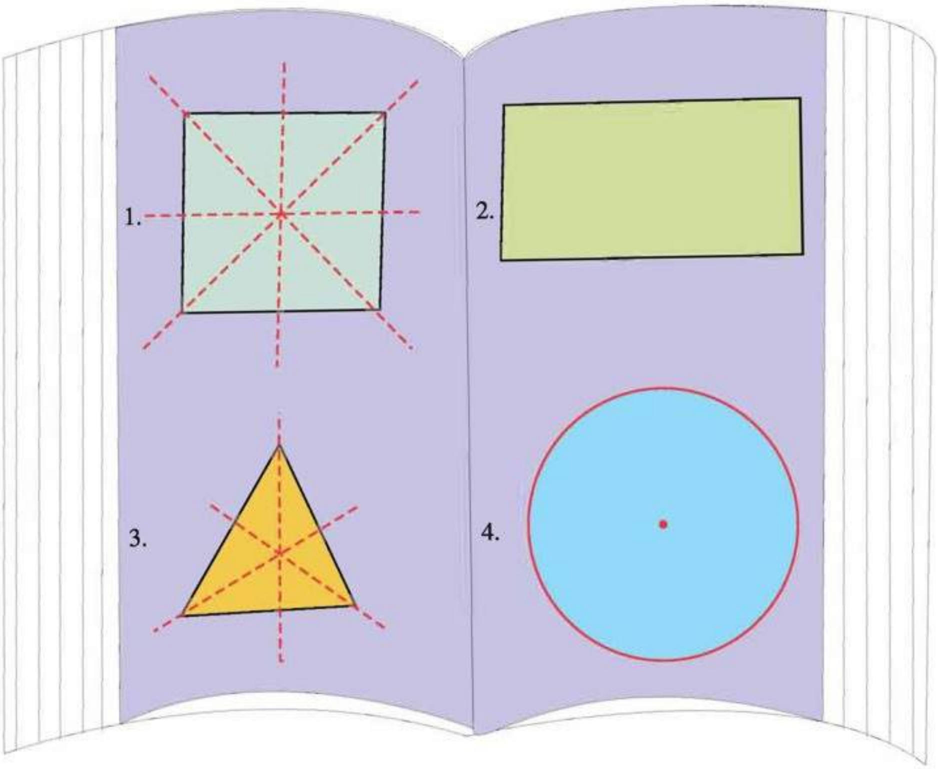
यदि कोई आकृति किसी रेखा के अनुदिश जाए तथा रेखा के दोनों तरफ के भाग एक दूसरे के संपाती हों, तो ऐसी आकृतियाँ सममित आकृतियाँ कहलाती हैं।

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.

सममित रेखाओं की संख्या बताइए

1.
2. 
3. 
4.
5.
6. 

अब करके देखिए।



प्र.1 आकृति 1 में कितनी सममित रेखाएँ हैं ?

प्र.2 आकृति 2 में कितनी सममित रेखाएँ हैं ?

प्र.3 आकृति 3 में कितनी सममित रेखाएँ हैं ?

प्र.4 आकृति 4 में कितनी सममित रेखाएँ हैं ?

प्र.5 आप अपने दैनिक जीवन में से कुछ ऐसी आकृतियों के नाम लिखिए, जिनमें सममित रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

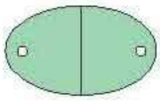
प्र.6 आपके घर में पाए जाने वाली उन वस्तुओं के नाम बताओ जिनमें

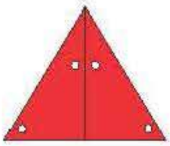
(i) एक सममित रेखा हो।

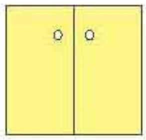
(ii) दो सममित रेखाएँ हों।

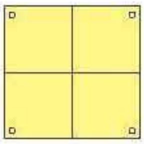
आकृतियों को देखकर सममिति का अक्ष ज्ञात करना।

चित्र में दिए गए बिंदु हमें सममित रेखा को ढूंढने में मदद करते हैं तथा सममित रेखा को ही सममिति अक्ष कहते है।

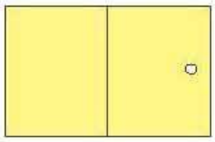
1. 

2. 

3. 

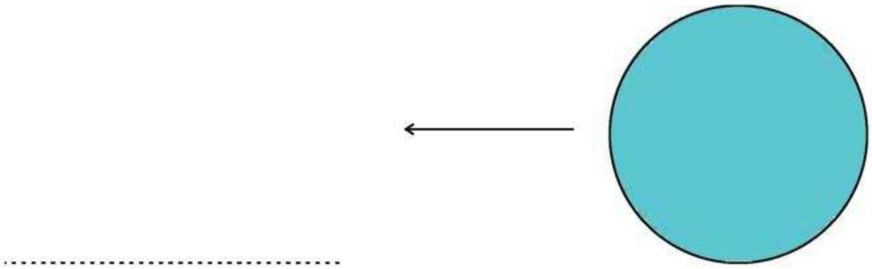
4. 

5.

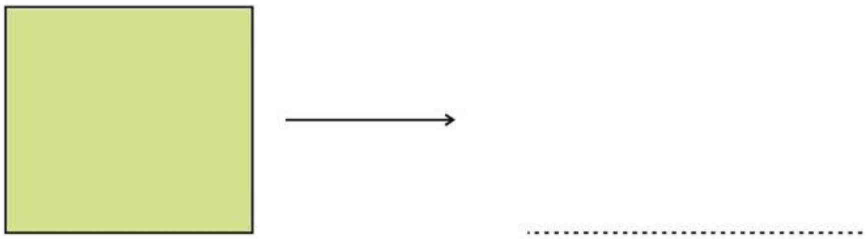
6. 

प्रश्नावली

प्र०1. निम्न छेद की हुई आकृतियों की प्रतिलिपियाँ खींचकर प्रत्येक की सममित रेखाएँ ज्ञात कीजिए

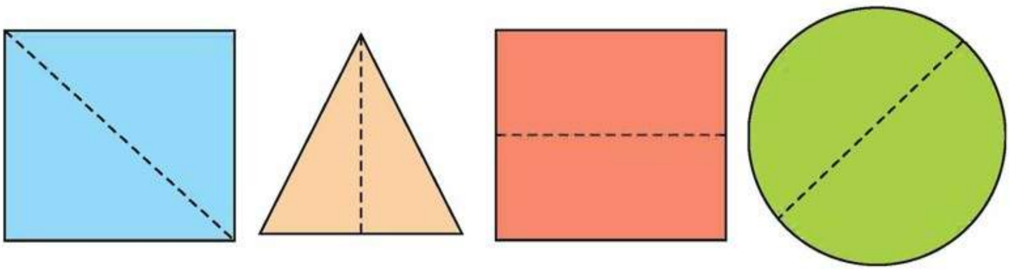


(a) (b)



(c) (d)

प्र०2. नीचे सममित रेखाएँ दी हुई हैं। छेद अंकित कीजिए।

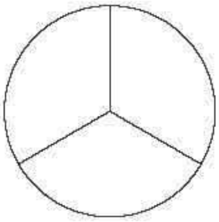


(a) (b) (c) (d)

प्र० 3. निम्नलिखित अंग्रेज़ी के अक्षरों में किन में सममिति हैं ? जिन अक्षरों में सममिति है उनमें सममिति का अक्ष भी खींचिए।

WVUTSPONM

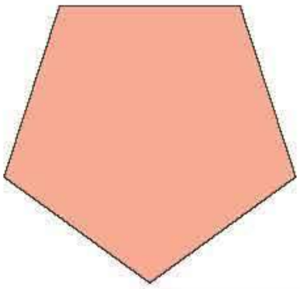
घूर्णन सममिति के कुछ उदाहरण

1. 

घूर्णन का क्रम = ?
घूर्णन का कोण = 120°
$3 \times 120° = 360°$

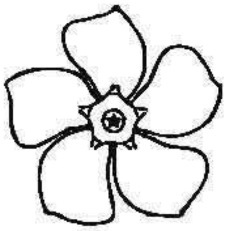
2.

घूर्णन का कोण = 180°
घूर्णन का क्रम = 2
$180° \times 2 = 360°$

3. 

घूर्णन का क्रम = 5
घूर्णन का कोण = 72°
$72° \times 5 = 360°$

घूर्णन का क्रम × घूर्णन का कोण = 360°

4. 

घूर्णन का क्रम - 5

घूर्णन का कोण = $\frac{360^\circ}{5}$

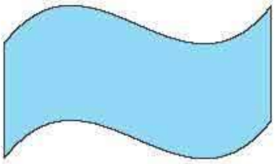
घूर्णन का कोण - 72°

5.

घूर्णन का क्रम - 5

घूर्णन का कोण = $\frac{360^\circ}{5}$

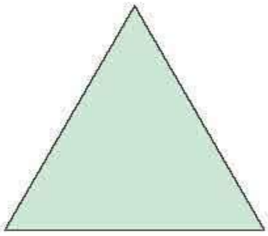
घूर्णन का कोण - 72°

6. 

घूर्णन सममिति का क्रम = 2

घूर्णन का कोण = $\frac{360^\circ}{\text{घूर्णन का क्रम}}$

घूर्णन का कोण - 180°

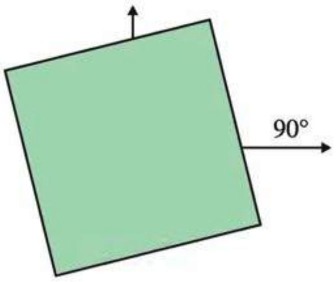
7. 

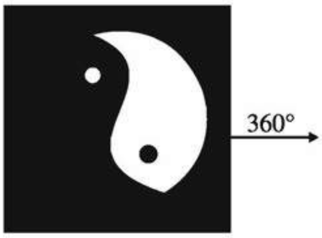
घूर्णन सममिति का क्रम = 3

घूर्णन का कोण = $\frac{360^\circ}{3}$

घूर्णन का कोण - 120°

घूर्णन कोण

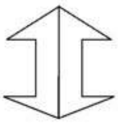
1. 

2. 

प्रश्नावली

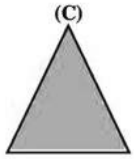
प्र०1. निम्न आकृतियों में सममिति अक्ष खींचिए।

(A)



(B)

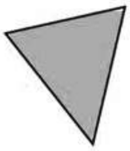
(C)



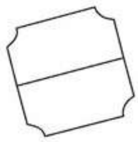
प्र०2. घूर्णन सममिति का क्रम लिखिए।

(A)

(B)

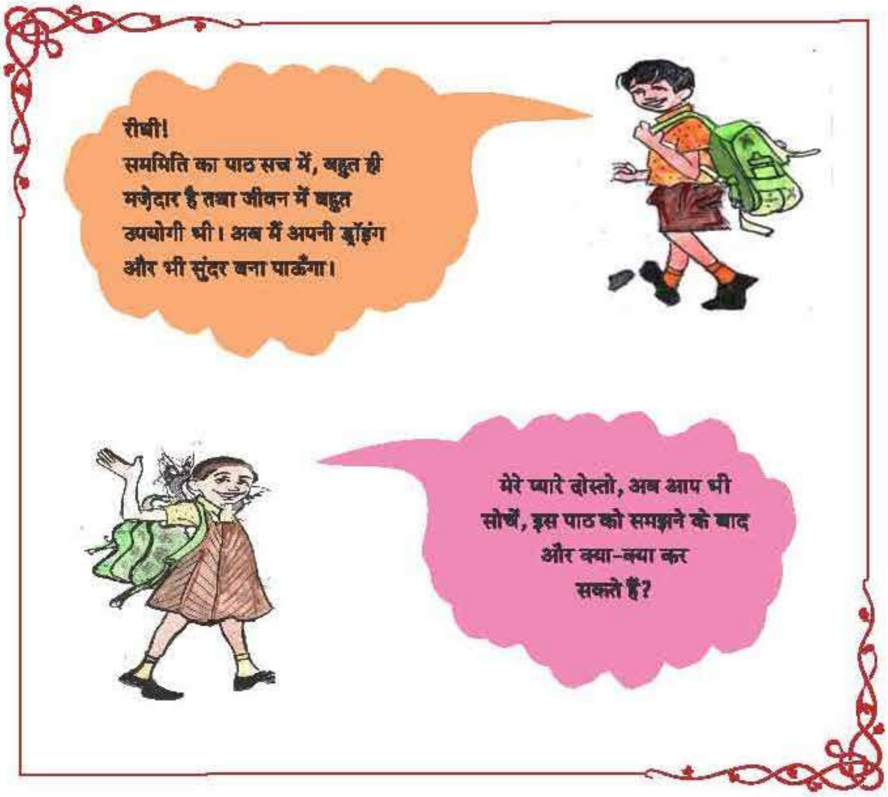


(C)

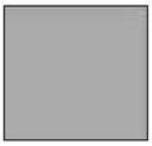
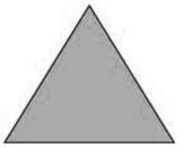
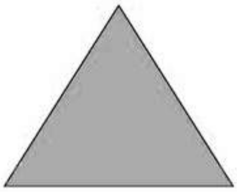


प्र०2. निम्नलिखित आकृतियों में सममिति (घूर्णन) का क्रम एवं कोण लिखिए।

क्रम सं.	आकृति	घूर्णन का क्रम	घूर्णन का कोण
1.	समबाहु त्रिभुज		
2.	वर्ग		
3.	समपंचभुज		
4.	समषट्भुज		
5	आयत		



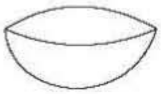
निम्न तालिका को पूरा कीजिए

	आकार	रूपरेखा	सममित रेखाओं की संख्या
	वृत्त		
	वर्ग		
	समचतुर्भुज		
	समबाहु त्रिभुज		
	आयत		
	समद्विबाहु त्रिभुज		

अभ्यास

आज प्रियंका का जन्मदिन है, कक्षा के सभी छात्रों/छात्राओं ने मिलकर केक मँगाया। यह केक सभी विद्यार्थियों को बराबर बाँटा जाना है। कक्षा में 16 विद्यार्थी उपस्थित हैं, बताइए यह कैसे बाँटा जाएगा। (सममिति का प्रयोग करके) यह भी बताइए कि छात्रों ने प्रियंका का जन्मदिन मनाकर एवं केक मँगाकर किन मूल्यों को प्रदर्शित किया है।

1) नीचे दी गई आकृतियों मे सममित रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए। आप अपने उत्तर की जाँच कैसे करोगे?

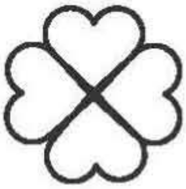
1. 

2.

3.

2) इन प्रतिरूपों में सममित रेखाओं के साथ सममित भागों को ढूँढ़िए तथा बनाइए।

1.

2. 

विद्यालय स्तर प्रतियोगिता

सममिति पर आधारित निम्न प्रतियोगिताएँ आयोजित की जा सकती हैं।

1) रंगोली प्रतियोगिता
2) कार्ड मेकिंग
3) ओरिगेमी डिज़ाइन्स

आप भी नीचे दिए गए स्थान पर एक रंगोली का डिज़ाइन बनाइए।

अध्याय 11 – ठोस आकारों की चित्रण

तल आकृतियाँ तथा ठोस आकार

प्यारे बच्चो,

आज हम तल आकृतियों तथा ठोस आकारों के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त करने की कोशिश करेंगे।

सबसे पहले हम सीखेंगे कि तल आकृतियाँ और ठोस आकार क्या होते हैं?

आओ, एक खेल करते हैं। बच्चो हमारे पास जादू की 5 पोटलियाँ हैं। एक पोटली में (16) चीज़ें (Items) भरी हैं। बाकी चारों पोटलियाँ खाली हैं। हमें पहली पोटली में से दिए गए निर्देशानुसार चीज़ें निकालकर बाकी चारों पोटलियों म बाँटनी हैं।

क्या आप कर सकते हैं?

Note: 1) यह Activity Cutting Pasting (काटकर चिपकाना) से भी की जा सकती है।
जैसे :– पोटली 1 से आप चित्र काटो और पोटली 2,3,4 तथा 5 में दिए गए निर्देशानुसार चिपका दो।

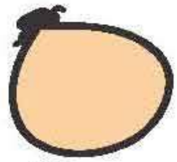
2) इस Activity का अन्य तरीका भी है। ड्राइंग बनाकर (Drawing) पोटली 1 में जो आकृतियाँ बनी हैं, उन्हें देखो तथा पोटली 2,3,4 तथा 5 में निर्देशानुसार बना दो।

आपका समय शुरू होता है अब.................

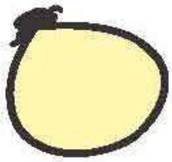
पोटली 1

पोटली
2
त्रिभुज

पोटली
3
आयत



पोटली
4
वृत्त



पोटली
5
वर्ग

क्या आपने चिपकाया/बनाया

पोटली 2 में – त्रिभुज, टोपी, शंकु, आइसक्रीम

पोटली 3 में – आयत, ईंट, घनाभ

पोटली 4 में – वृत्त, गेंद, गोला, सूरज

पोटली 5 में – वर्ग, पासा, घन

पोटली 1 में बचा– कैन, बेलन

बिल्कुल सही, बहुत अच्छे!

क्या अब आप इस तालिका को पूरा कर सकते हैं?

पोटली नं.	आकृतियाँ	ठोस आकार	वस्तु	
2	त्रिभुज	शंकु	टोपी,	आइसक्रीम
3	....	....	....	
4	....	....	....	
5	....	....	....	....
1 में बचा	....	....	....	

पोटली 1 में बची हुई चीज़ें कैन और बेलन कौन–कौन सी आकृतियों से मिलकर बनी हैं?

1..................... 2.....................

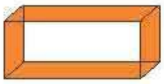
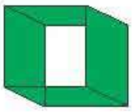
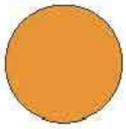
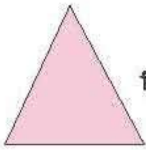
पोटली के खेल से हमने सीखा।

तल आकृतियों तथा ठोस आकारों और वस्तुओं का आपस में कुछ संबंध है।

क्या अब आप दिखाई गई वस्तुओं का संबंध ज्ञात कर सकते हैं!

उदाहरण गेंद संबंध → वृत

निम्न आकृतियों में उपरोक्त उदाहरण द्वारा संबंध समझते हुए कॉलम 1 का कॉलम 2 से मिलान कीजिए।

	Column I			Column II	
1.		ईंट	A		वर्ग
2.		पासा	B		वृत्त
3.		सूरज	C		त्रिभुज
4.		आइसक्रीम कोन	D		आयत

उपरोक्त मिलान की गई आकृतियों में संबंध भी है और अंतर भी।

यदि हम ध्यानपूर्वक देखें तो हम यह कह सकते हैं कि Column I में दी गई आकृतियाँ Column II में दी गई आकृतियों का विस्तृत रूप (extended form) हैं।

तथा Column I में दी गई आकृतियों में तथा Column II में दी गई आकृतियों में समानता के अलावा गहराई/ऊँचाई (height/depth) भी हैं।

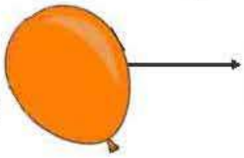
	Column I में		**Column II में**
1	दी गई आकृतियाँ-3D या त्रिविमीय आकृतियाँ कहलाती हैं। (Solid Shapes)	1	दी गई आकृतियाँ-2D या द्विविमीय आकृतियाँ कहलाती हैं (Plane figures)
2	इनमें लंबाई, चौड़ाई व गहराई (ऊँचाई) होती है।	2	इनमें केवल लंबाई व चौड़ाई होती है।

Activity Time-1

बच्चो ऊँचाई/चौड़ाई की विमा के लिए Activity करते हैं।

एक गुब्बारा लें तथा कल्पना करें कि इसमें न तो ऊँचाई हो और न ही चौड़ाई वह एक तल आकृति पर बिंदु है।

बच्चों से इसमें हवा भरने के लिए कहा जाए। जैसे-जैसे इसमें हवा भरती जाएगी तो गुब्बारा फैलना शुरू कर देगा तथा इसमें लंबाई, चौड़ाई व ऊँचाई दर्शनीय हो जाएगी।

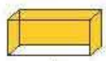
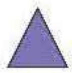


- हवा भरने से पहले आपको गुब्बारा कैसा दिखाई देता है?
- क्या आपको तब लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई दिखाई दे रही थी? ढूंढने की कोशिश करो।
- हवा भरने के बाद जब गुब्बारा फूल गया तो आपको बिना फूले गुब्बारे और फूले हुए गुब्बारे में कोई अंतर दिखाई दिया?

Activity Time-2

स्वयं जानें व ज्ञात करें कि आकृति 2D या 3D है।

एक किताब लें तथा कोई भी वस्तु/आकृति लिखिए।
उस वस्तु/आकृति को किताब में रखकर बंद करने का प्रयास कीजिए।
निम्न तालिका भरिए।

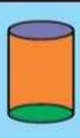
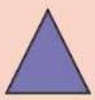
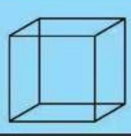
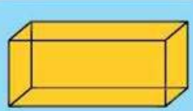
क्र.सं.	आकृतियाँ	किताब बंद होती है। वस्तुओं की आकृति का नाम लिखिए	क्र.सं.	आकृतियाँ	किताब बंद नहीं होती। वस्तुओं की आकृति का नाम लिखिए
1.			4.		
2.			5.		
3			6.		

निष्कर्ष

★ उपरोक्त क्रियाकलाप से हमें यह ज्ञात होता है कि जिन वस्तुओं को रखने से किताब बंद नहीं होती वह वस्तुएँ 3D हैं क्योंकि लंबाई, चौड़ाई के साथ इनमें (तीसरी विमा-Dimension) ऊँचाई भी है।

★ जिन वस्तुओं के रखने पर किताब बंद हो जाती है, वे 2D / द्विविमीय आकृति हैं। इनमें केवल लंबाई व चौड़ाई होती है। इन्हें हम तल आकृतियाँ भी कहते हैं।

मिलान कीजिए (आकार, आकार का प्रकार तथा आकार का नाम)

आकार	आकार का प्रकार	आकार का नाम
	त्रि-विमीय	गोला
	द्वि-विमीय	बेलन
	त्रि-विमीय	वर्ग
	द्वि-विमीय	वृत्त
	त्रि-विमीय	घनाभ
	त्रि-विमीय	घन
	द्वि-विमीय	शंकु
	त्रि-विमीय	त्रिभुज

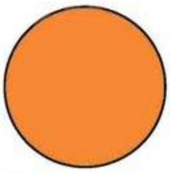
अब करके देखिए।

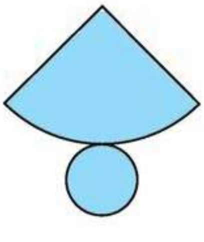
नाम लिखिए और मिलान कीजिए।

2D

1.

2.

3. 

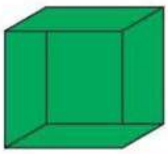
4. 

3D

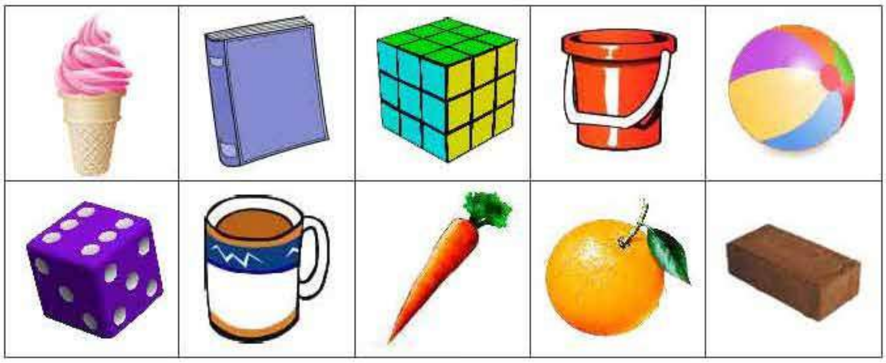
A

B

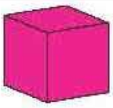
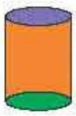
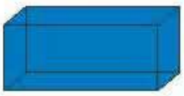
C\

D 

ठोस आकार तथा वस्तुएँ



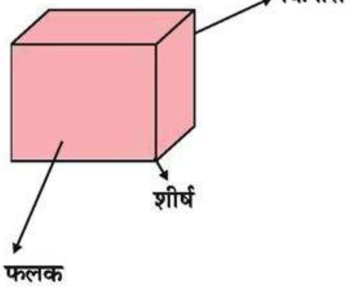
ऊपर रखी वस्तुओं को उनकी आकृति अनुसार बनाइए

1.		
2. 		
3.		
4. 		
5. 		

फलक, किनारे तथा शीर्ष

ठोस आकारों को और अधिक समझने के लिए हमें फलक, किनारे तथा शीर्ष की पहचान करनी होगी।

इस घन के चित्र को देखिए।



आओ फलक, किनारे तथा शीर्ष की पहचान करें।

1. घन का प्रत्येक ऊपरी सपाट पृष्ठ एक फलक है। (face)
2. इसके दो फलक एक रेखाखंड में मिलते हैं। जो घन का एक किनारा (edge) कहलाता है।
3. तीन किनारे एक बिंदु पर मिलते हैं, जो घन का शीर्ष (vertex) कहलाता है।

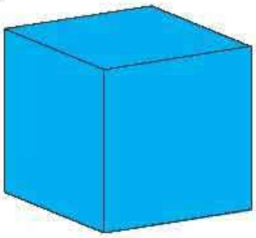
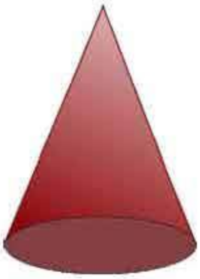
अब अपनी गणित की पुस्तक को देखकर बताओ।

1. इसमें कितने फलक हैं। [ ]
2. इसमें कितने किनारे हैं। [ ]
3. इसमें कितने फलक हैं। [ ]

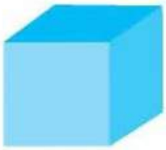
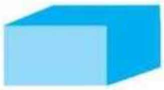
क्या आपको अपनी पुस्तक में 6 फलक, 12 किनारे, तथा 8 शीर्ष मिले। क्या आप जानते हैं कि

- बेलन, शंकु और गोले में कोई सीधा किनारा नहीं होता।
- शंकु का आधार वृत है।
- बेलन का आधार वृत है।
- बेलन का ऊपरी सिरा और आधार एक जैसे वृत होते हैं।
- गोले का कोई फलक नहीं होता।

बूझो, मैं कौन हूँ।

1.	मैं एक ठोस आकार मेरा न कोई फलक, न ही कोई विस्तार, न ही कोई किनारा। मैं हूँ गोल बताओ मैं कौन?	....
2. 	मैं एक ठोस आकार 6 फलक, 8 शीर्ष तथा 12 हैं किनारे, सब हैं समान आकार बताओ मैं कौन?	....
3. 	मैं एक ठोस आकार मैं हूँ गोल, गोल मेरा फलक मेरा केवल एक शीर्ष, एक गोल किनारा बताओ मैं कौन?	....

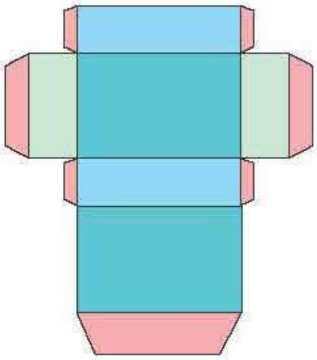
ठोस आकारों के फलक, शीर्ष तथा किनारे Box में लिखिए।

	ठोस आकार	फलक	शीर्ष	किनारे
1.				
2.				
3.				
4.				

3-D आकार बनाने के लिए जाल

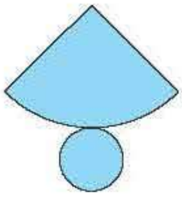
बच्चो, क्या आपने कभी टूथपेस्ट का डिब्बा, जूते का डिब्बा, खोलकर देखा है। चलो आज ऐसा करके देखते हैं।

क्रियाकलाप :- एक गत्ते का डिब्बा (box) लें। इसके किनारों को काटकर खोल लें, और जमीन पर सीधा सपाट फैला दें। कुछ इस प्रकार से–



इसे हम बक्से का जाल कहते हैं। पहले यह 3-D था। परंतु खोलने पर यह सपाट हो गया, जिसे हम 2-D की तरह देख सकते हैं। यह जाल का ढांचा कहलाता है। इसे अब वापिस जोड़िए। आपको बक्सा प्राप्त होगा जो अब 3-D आकार का है। यह ठोस है।

चलो अब कोई और 3-D आकार को खोलकर देखते हैं जैसे शंकु



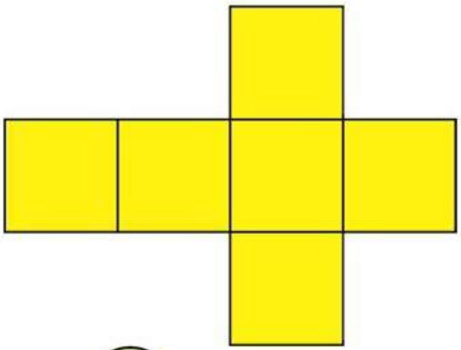
इसे इसके तिर्यक पृष्ठ की तरफ से काटकर खोलें। खोलने पर यह कुछ इस प्रकार दिखेगा।

इस तरह यह अब 3-D शंकु का जाल बन गया है, जो 2-D ढाँचे के रूप में है।

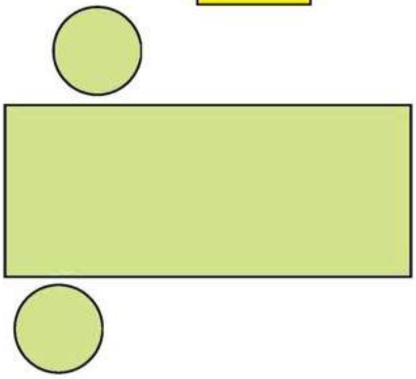
ऐसे ही हम बेलनाकार 3-D को भी जाल के रूप दिखा सकते हैं।

हम पाते हैं कि भिन्न–भिन्न आकारों के लिए भिन्न–भिन्न जाल होते हैं।

अब नीचे कुछ 3-D आकारों के जाल दिखाए गए हैं। आप इनके किनारों से मोड़कर इनका प्रतिरूप बनाइए।



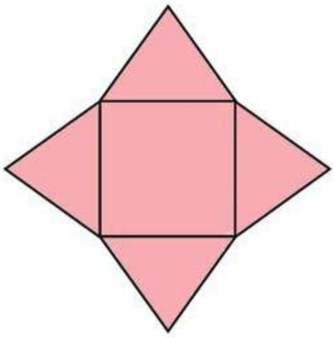
घन



बेलन

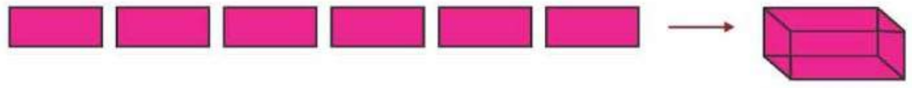
पिरामिड

पिरामिड वह बहुफलक होता है जिसका आधार एक बहुभुज होता है तथा इसके पार्श्व फलक एक शीर्ष वाले त्रिभुज होते हैं।

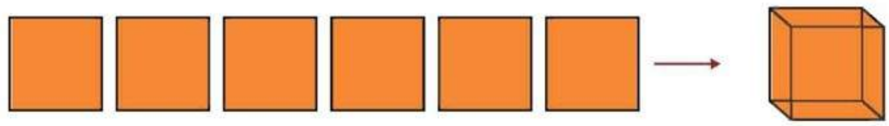


यह पिरामिड का जाल है। इसके शीर्षों को एक बिंदु पर मिलाने पर हमें पिरामिड का मॉडल प्राप्त होगा।

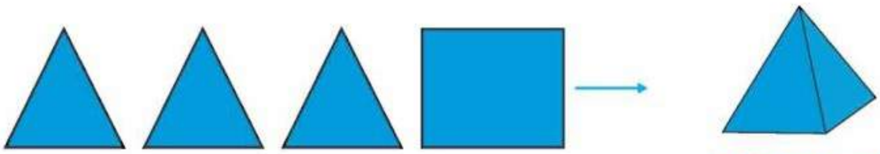
2-D आकृतियों को जोड़कर
3-D बनाना

1. 

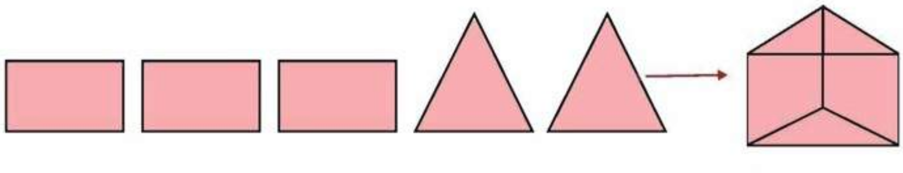
घनाभ (Cuboid)

2. 

घन (Cube)

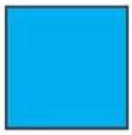
3. 

पिरामिड (Pyramid)

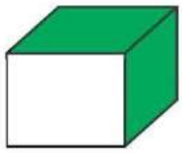
4. 

प्रिज़्म (Prism)

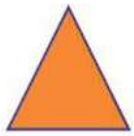
प्र.1 नीचे दिए गए चित्रों में 2-D व 3-D चित्रों की पहचान कीजिए और उनके नाम लिखिए तथा यह भी लिखिए कि ये आकृतियाँ 2D हैं या 3D ?

a) 

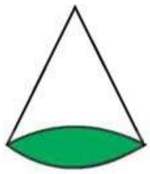
____

b) 

____

c) 

____

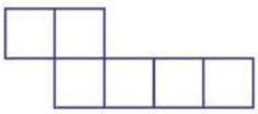
d) 

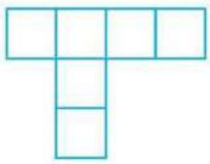
____

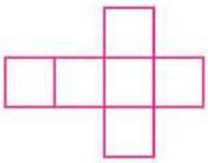
e)

____

प्र.2 उन जालों को पहचानिए तथा (✓) कीजिए जिनका प्रयोग करके आप घनों को बना सकते हैं –

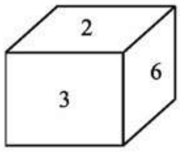
a) 

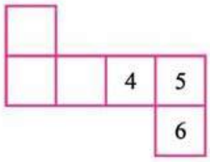
c) 

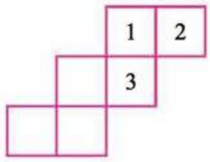
b) 

प्र.3 पासे (घनों) को बनाने के लिए दो जाल दिए जा रहे हैं। प्रत्येक वर्ग में लिखी संख्या उस बक्से के बिंदुओं को दर्शाती है। एक पासे के सम्मुख फलकों पर अंकित बिंदुओं की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है।

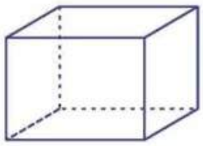
अब पासे को देखकर नीचे दी गई आकृतियों के खाली वर्ग में उचित संख्या लिखिए।

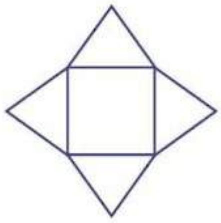
पासा ⟶ 

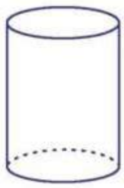
a) 

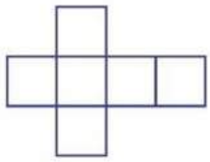
b) 

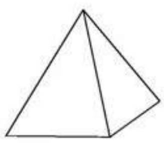
प्र.4 जालों का उपयुक्त ठोसों से मिलान कीजिए –

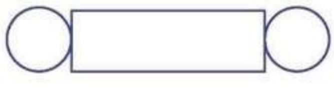
a) 

i) 

b) 

ii) 

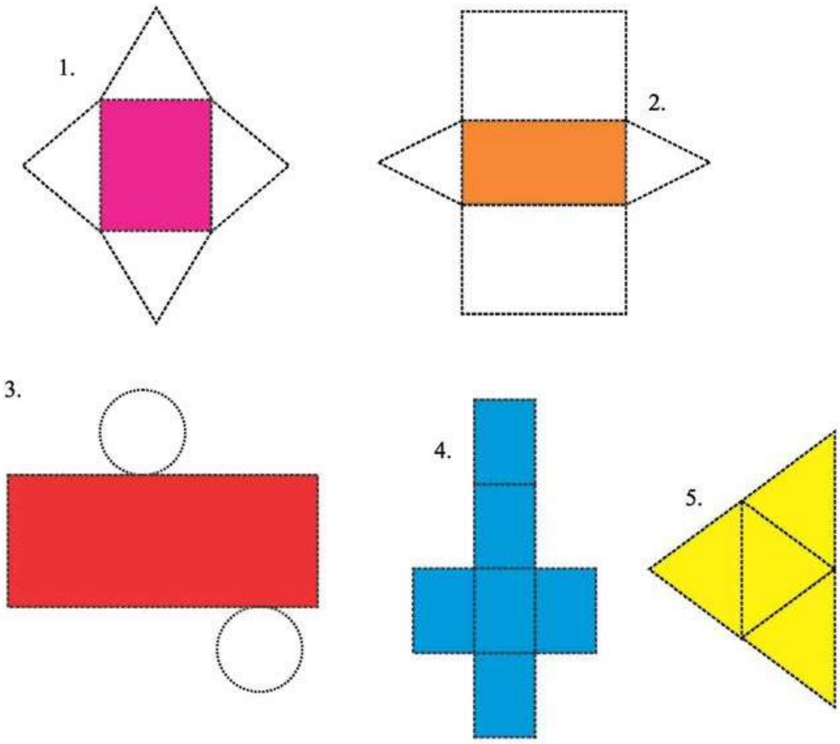
c) 

iii) 

ACTIVITY TIME

प्र.5 आइए, निम्न आकृतियों के जाल को काटकर तथा Dotted Line पर मोड़कर ठोस आकृतियाँ बनाते हैं।

(a) अपनी कॉपी पर चित्र बनाइए, काटिए तथा मोड़कर ठोस आकृति बनाइए।

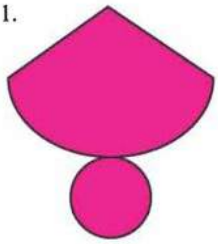


(b) मोड़कर बनाए गए ठोस आकारों के नाम लिखो।

1.................... 2.................... 3.................... 4.................... 5....................

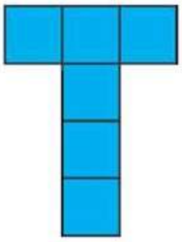
प्र.6 निम्न जालों द्वारा बनाए गए ठोस आकारों के नाम लिखिए।

1.



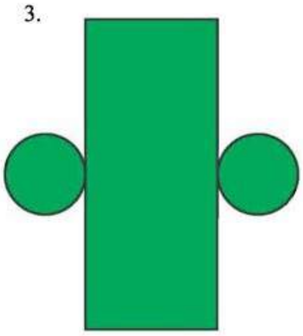
....

2.



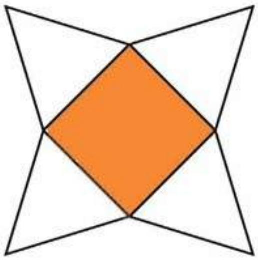
....

3.



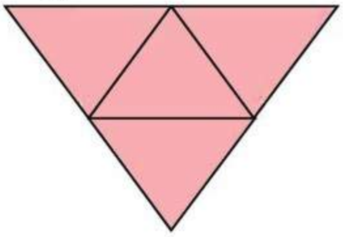
....

4.



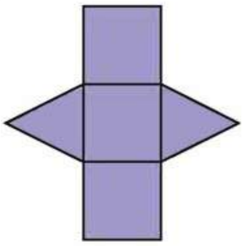
....

5.



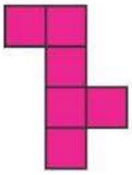
....

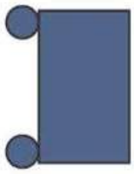
6.

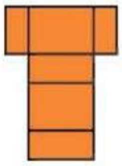


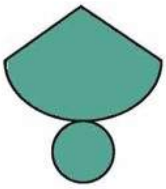
....

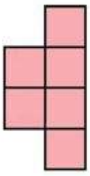
प्र.7 निम्न जाल किसी समबहुभुज के लिए हैं या नहीं, लिखिए।

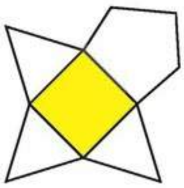
1. 

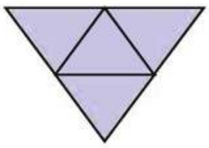
2. 

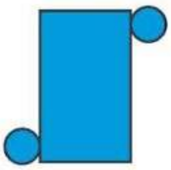
3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

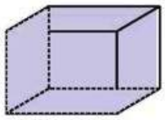
8. 

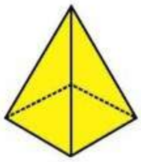
9.

मिलान कीजिए

प्र.8 3D (त्रिविमीय आकृति) का जाल से

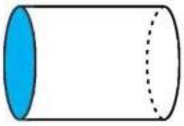
(3D)

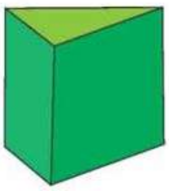
1. 

2. 

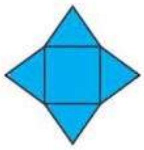
3.

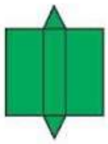
4.

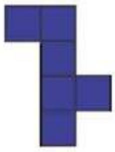
5. 

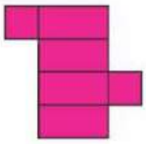
6. 

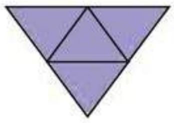
(जाल)

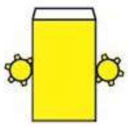
A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

F. 

बच्चो

अभी तक हमने ठोस आकारों के फलक, किनारे तथा शीर्ष की पहचान की और ठोस आकारों (3D-त्रिविमीय आकारों) के लिए जाल बनाए।

क्या आप जानते हैं?

जो कुछ हमने सीखा, इससे हम अपने बहन/भाई, दोस्त तथा माता पिता के लिए गिफ़्ट बॉक्स (Gift Box) बना सकते हैं। Birthday Cap भी बना सकते हैं।

करके देखो

1. एक गिफ़्ट बॉक्स बनाओ तथा अपने अध्यापक/अध्यापिका को दिखाओ।
2. अपने दोस्तों के लिए Birthday Cap बनाओ।

ठोस आकारों के चित्र खींचना

अब हम ठोस आकारों के चित्र खींचना सीखते हैं। ये चित्र दो प्रकार से बनाए जाते हैं।

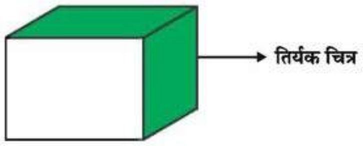
1. तिर्यक/अनियमित चित्र
2. समदूरीक चित्र

तिर्यक चित्र :-

चित्र को देखने से हमें पता चलता है कि वस्तु कैसी दिखाई देती है।
उसके कुछ फलक
कुछ किनारे
कुछ शीर्ष दिखाई नहीं देते।
तथा उनकी लंबाइयाँ भी बराबर नहीं होतीं।

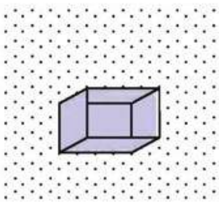
जैसे चित्र में

1. दोनों फलकों की माप बराबर है।
2. किनारे बराबर नहीं बनाए जाते परंतु बराबर दिखाई देते हैं।



समदूरीक चित्र (Isometric Sketch)

- इन चित्रों को समदूरीक बिंदु वाले कागज पर बनाया जाता है।
- क्योंकि ऐसे कागज को बिंदुओं द्वारा सम त्रिभुज आकार में बाँटा जाता है।



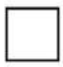
इस पर हम सारे फलक, सारे किनारे तथा सारे शीर्ष दिखा सकते हैं, तथा इनकी माप भी बराबर बनाई जा सकती है।

पहचानिए और लिखिए: समदूरीक / तिर्यक

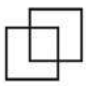
सपाट पृष्ठों पर ठोसों को खींचना

1. तिर्यक/अनियमित चित्र Oblique Sketch — ग्राफ/रेखांकित (कागज़ पर)

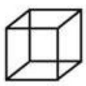
   1. सामने का फलक खींचें

   2. सामने के फलक का सम्मुख फलक खींचें
      - फलक के माप बराबर हों
      - चित्र 1 को खिसकाकर

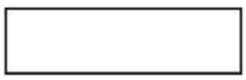
   

   3. संगत कोणों को मिलाइए

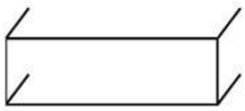
   

2. समदूरीक चित्र/Isometric Sketch

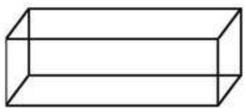
   1. सामने का फलक खींचें

   2. आयत के चारों कोनों से 3 इकाई लंबाई वाले 4 रेखाखंड खींचें।

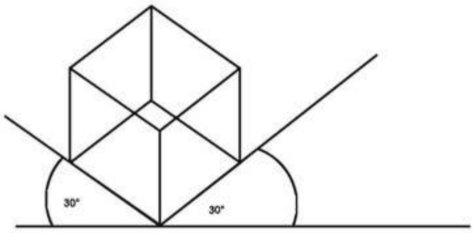
   

   3. सुमेलित कोनों को उपयुक्त रेखाखंडों से मिलाइए।

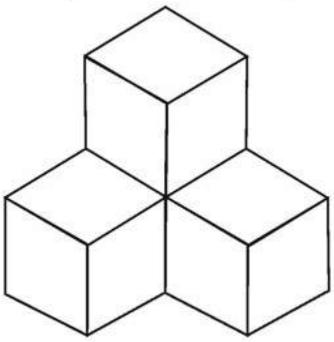
पहचानिए और लिखिए:- समदूरीक/तिर्यक

1.



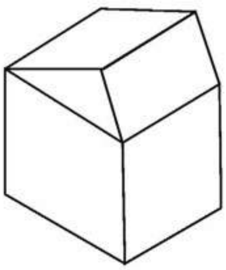
____

2.



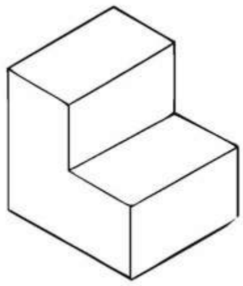
____

3.



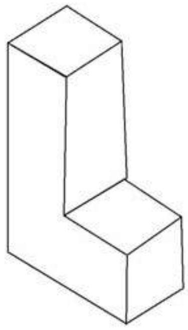
____

4.



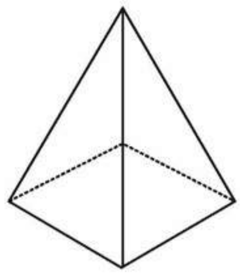
____

5.



____

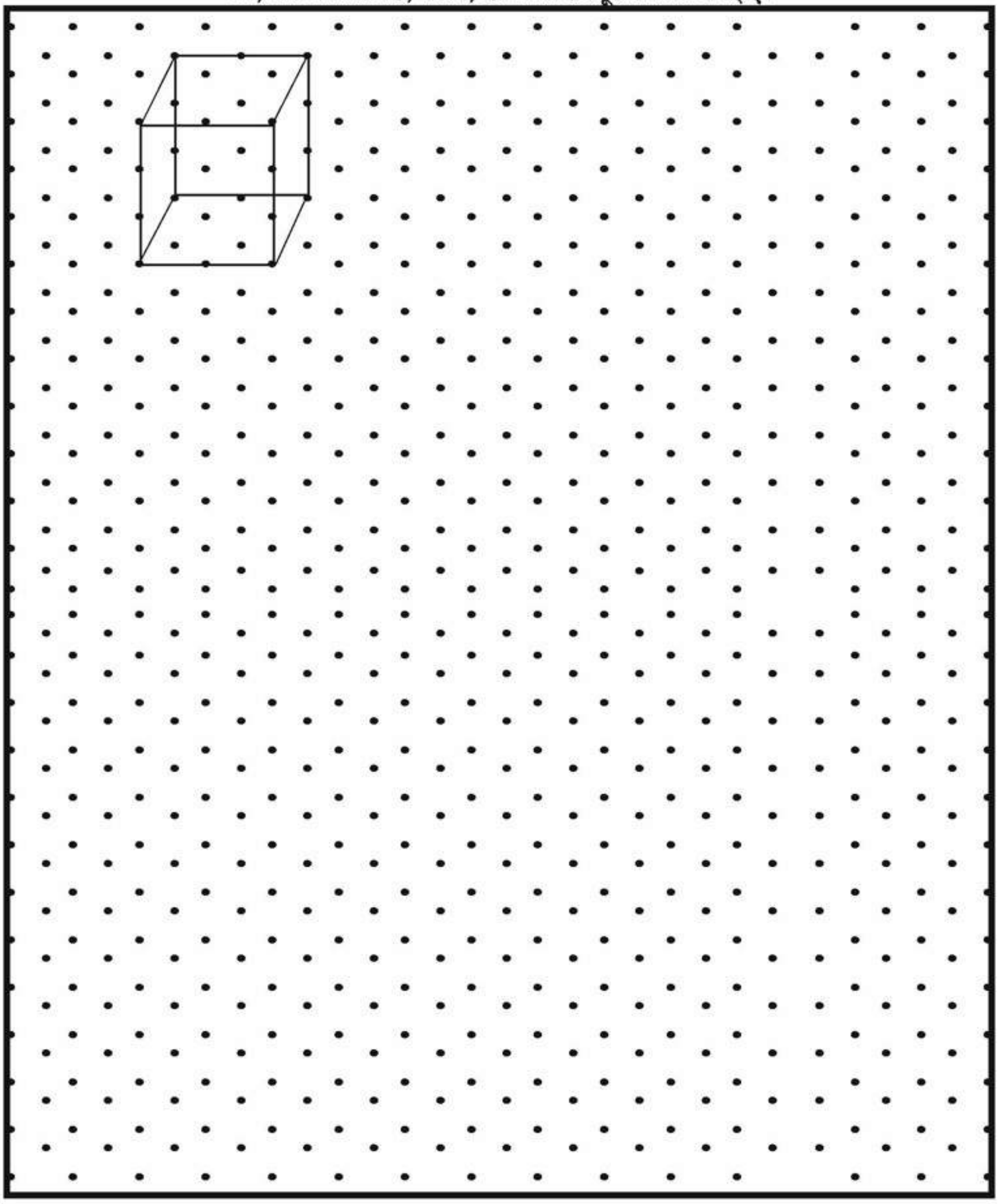
6.



____

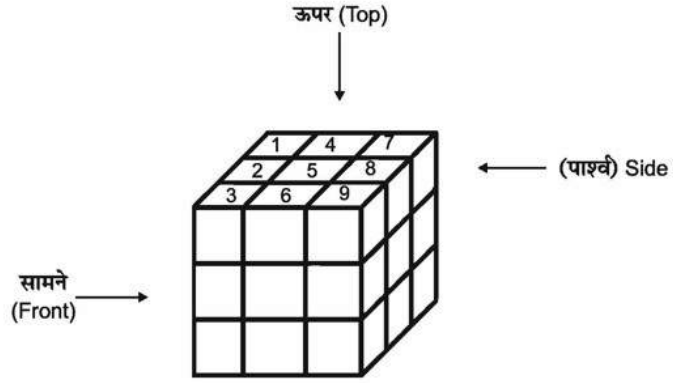
विभिन्न प्रकार की समदूरीक आकृतियाँ बनाना

घन, घनाभ पिरामिड, बेलन, प्रिज्म के समदूरीक चित्र बनाइए।



3-D आकारों के दृश्य

अब हम ठोस आकारों को भिन्न–2 परिपेक्षों (दृष्टियों) से देखने की कोशिश करते हैं।



आइए, गिनते हैं कि आकृति कितने घनों से मिलकर बनी है।

● ऊपर की तरफ कितने घन दिखाई दे रहे हैं।	
● सामने या साइड से देखें तो क्या पता लगता है कि घन के ऊपर घन कितनी बार रखे गए हैं?	
● कुल कितने घन हुए?	**27**
● क्या हम चित्र में सभी 27 घन देख पा रहे हैं?	**हाँ/नहीं**

नहीं!

तो इसका मतलब है कि हम ठोस आकारों का पूरे परिपेक्षों में एक तरफ़ से नहीं देख पाते हैं। क्योंकि उनमें तीन विमाएँ होती हैं।

इन्हें देखने के लिए तीन तरीकों का इस्तेमाल करते हैं।

1. ठोस के विभिन्न भागों में काटकर दिखाना (Cutting & Slicing)
2. छाया खेल (Shadow)
3. कोण से देखना (Looking from certain Angle)

जैसे सामने से (Front View), ऊपर से (Top View) या एक तरफ़ से (Side View)

Cutting - Slicing **(काटकर देखना)**

किसी ब्रेड के कई Slice करने पर Slice का आकार वर्ग होगा। जिसे हम ठोस आकृति की अनुप्रस्थ काट कहते हैं।

अनुप्रस्थ काट को दो प्रकार से किया जा सकता है।

1. ऊर्ध्वाधर रूप (Vertically)
2. क्षैतिज रूप (Horizontally)

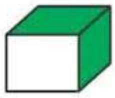
निम्न ठोस आकारों को Vertical और Horizontal काटने के बाद प्राप्त आकार का नाम लिखिए।

ठोस आकार	उर्ध्वाधर	क्षैतिज
1.	वर्ग	....
2.	वर्ग	आयत
3.	वृत	....
4.	....	....
5.	....	....

छाया खेल

ठोस आकारों की छाया को देखकर भी हम 2D तथा 3D का संबंध समझ सकते हैं। यदि हम प्रकाश के स्रोत के रास्ते में कोई ठोस आकार रखते हैं तो उसकी छाया तल आकृति जैसी होती है। अर्थात् 2D जानने की कोशिश करो।

मिलान कीजिए :- ठोस आकार – छाया (Shadow)

ठोस आकार/आकार का नाम			छाया/आकृति का नाम		
1.		गोला	A		आयत
2.		घन	B		वृत
3.		घनाभ	C		वर्ग

3-D आकारों के दृश्य

ठोस आकारों या वस्तुओं को हम भिन्न कोणों पर खड़े होकर देख सकते हैं।

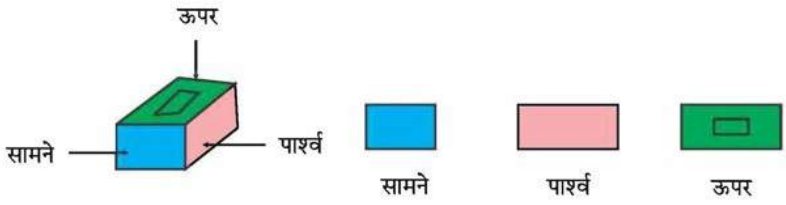
वस्तु

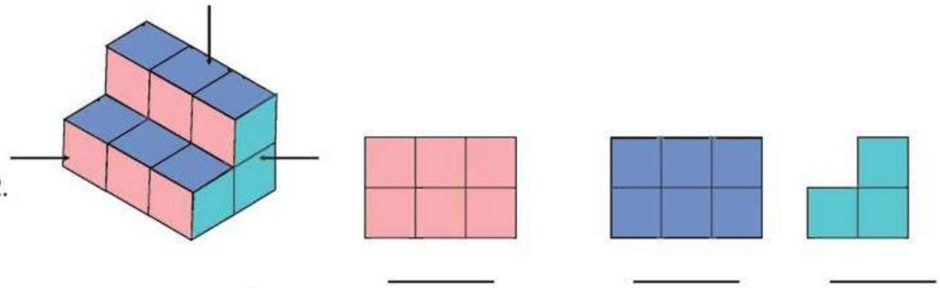
सामने से
Front View

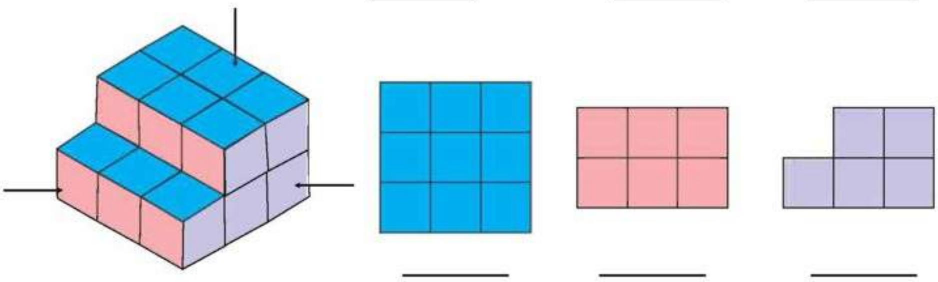
ऊपर से
Top View

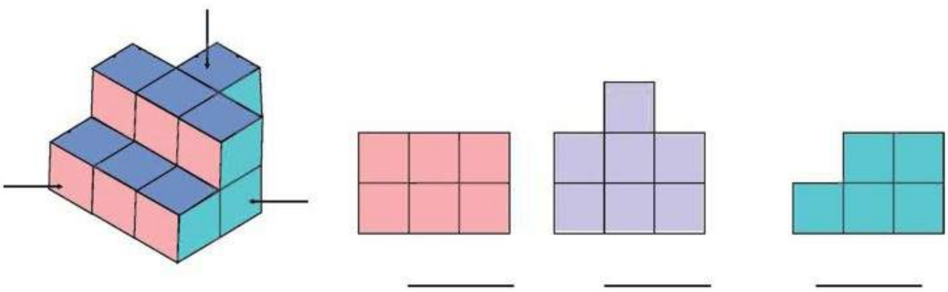
एक तरफ़ से
(पार्श्व)
Side View

दृश्यों को अंकित कीजिए-सामने/पार्श्व/ऊपर

1.


2.


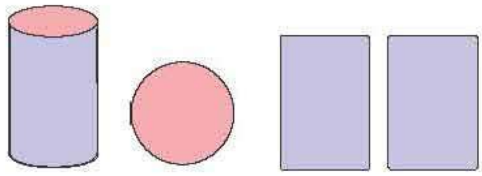
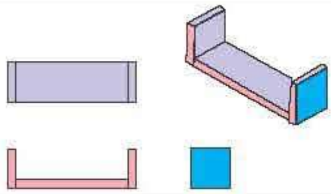
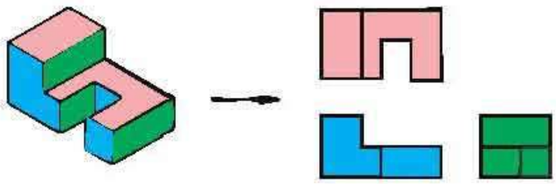
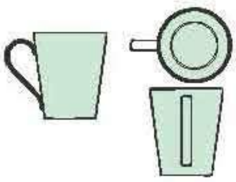
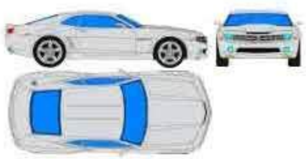
3.


4.


प्रत्येक वस्तु के लिए दिए गए दृश्य का नाम लिखिए।

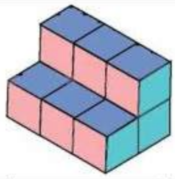
त्रिविमीय वस्तुएँ विभिन्न स्थानों से भिन्न-भिन्न रूप में दिखाई दे सकती हैं।

इसलिए इनको विभिन्न परिपेक्षों (दृष्टियों) से खींचा जा सकता है।

1.		बेलन
2.		बेंच
3.		बेंच
4.		कप
5.		कार

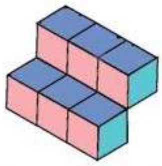
निम्न ठोस आकारों के सामने, पार्श्व और ऊपर के दृश्य बनाइए।

1.



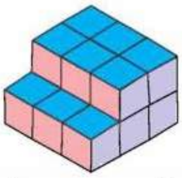
सामने	ऊपर	पार्श्व

2.



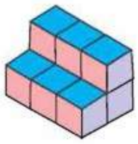
सामने	ऊपर	पार्श्व

3.



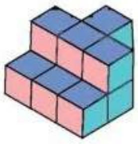
सामने	ऊपर	पार्श्व

4.



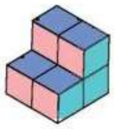
सामने	ऊपर	पार्श्व

5



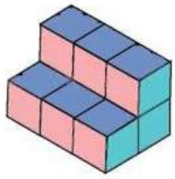
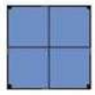
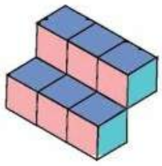
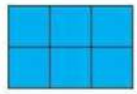
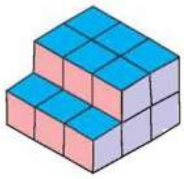
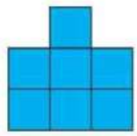
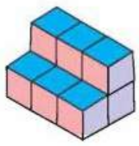
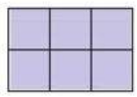
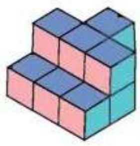
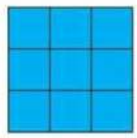
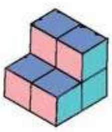
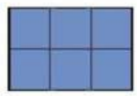
सामने	ऊपर	पार्श्व

6.



सामने	ऊपर	पार्श्व

मिलान कीजिए

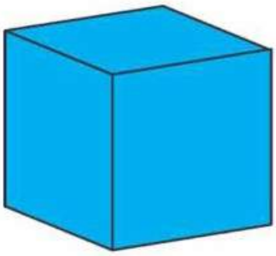
ठोस आकार		ऊपर से दृश्य	
1.		A	
2.		B	
3.		C	
4.		D	
5.		E	
6.		F	

अब तक हमने सीखा

1. तल आकृतियाँ तथा ठोस आकारों का संबंध।

2. लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई की विमाएँ (2D तथा 3D)।

3. फलक, किनारे तथा शीर्ष की पहचान।



4. 3D आकारों को बनाने के जाल।

5. तिर्यक/अनियमित चित्र तथा समदूरीक चित्र।

6. ठोस आकारों को देखने के तरीके।
   (a) ठोस को काटकर देखना
   (b) छाया खेल
   (c) सामने से, ऊपर से तथा पार्श्व दृश्य
   (भिन्न-भिन्न स्थानों से 3D वस्तुओं के भिन्न-भिन्न दृश्य मिलते हैं।)

Document Outline

- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_001
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_002
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_003
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_004
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_005
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_006
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_007
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_008
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_009
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_010
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_011
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_012
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_013
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_014
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_015
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_016
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_017
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_018
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_019
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_020
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_021
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_022
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_023
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_024
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_025
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_026
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_027
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_028
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_029
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_030
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_031
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_032
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_033
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_034
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_035
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_036
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_037
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_038
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_039
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_040
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_041
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_042
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_043
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_044
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_045
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_046
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_047
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_048
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_049
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_050
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_051
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_052
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_053
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_054
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_055
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_056
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_057
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_058
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_059

- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_060
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_061
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_062
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_063
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_064
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_065
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_066
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_067
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_068
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_069
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_070
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_071
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_072
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_073
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_074
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_075
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_076
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_077
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_078
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_079
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_080
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_081
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_082
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_083
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_084
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_085
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_086
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_087
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_088
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_089
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_090
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_091
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_092
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_093
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_094
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_095
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_096
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_097
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_098
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_099
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_100
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_101
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_102
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_103
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_104
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_105
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_106
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_107
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_108
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_109
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_110
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_111
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_112
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_113
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_114
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_115
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_116
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_117
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_118
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_119
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_120
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_121
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_122

- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_123
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_124
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_125
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_126
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_127
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_128
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_129
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_130
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_131
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_132
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_133
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_134
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_135
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_136
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_137
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_138
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_139
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_140
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_141
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_142
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_143
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_144
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_145
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_146
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_147
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_148
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_149
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_150
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_151
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_152
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_153
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_154
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_155
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_156
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_157
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_158
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_159
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_160
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_161
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_162
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_163
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_164
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_165
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_166
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_167
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_168
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_169
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_170
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_171
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_172
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_173
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_174
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_175
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_176
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_177
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_178
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_179
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_180
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_181
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_182
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_183
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_184
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_185

- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_186
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_187
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_188
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_189
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_190
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_191
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_192
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_193
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_194
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_195
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_196
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_197
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_198
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_199
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_200
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_201
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_202
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_203
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_204
- 18-Pragati_II_Maths_Class_7_Page_205