16

पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन
(Surface Area and Volume)

QP8QAD

घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन
(Surface area and volume of cube, cuboid, Cylinder, cone and sphere)

QPHLC1

16.01 प्रस्तावना (Introduction)

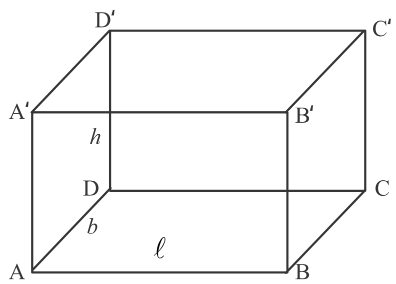
पिछले अध्याय में हम त्रिभुज, आयत, वृत्त, वृत्तखण्ड तथा त्रिज्यखण्ड जैसी समतल आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में हम ठोस आकृतियों के बारे में अध्ययन करेंगे। ईट, माचिस की डिब्बी, प्लेन मकान की दीवारें, पानी की टंकियाँ, क्रिकेट गेंद आदि सभी विभिन्न आकार की ठोस आकृतियाँ है। समतल आकृति व ठोस आकृति में भौतिक अन्तर यह है कि समतल आकृतियाँ पूरी की पूरी समतल में स्थित होती है। जबकि ठोस आकृतियाँ एक समतल में स्थित नहीं होती हैं। ठोस आकृतियाँ आकाश (space) में स्थित होती हैं। ठोस (घनाकृतियाँ) त्रिविम (Three dimensional) होती हैं।

किसी ठोस आकृति के पृष्ठीय क्षेत्रफल से तात्पर्य समस्त पृष्ठों के क्षेत्रफलों के योग से है तथा किसी ठोस द्वारा आकाश (space) में जितना स्थान घेरा जाता है वह उसका आयतन कहलाता है। क्षेत्रफल को वर्ग इकाई व आयतन को घन इकाई में मापा जाता है।

16.02 घन और घनाभ (Cube and Cubiod) का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन

QPRHDN

एक माचिस की डिब्बी, कमरा, चौक का डिब्बा, ईंट आदि घनाभ के उदाहरण हैं घनाभ को समान्तर षट्कोणिक फलक भी कहा जाता है। आकृति 16.1 में घनाभ दर्शाया गया है। जिसके छः फलक है प्रत्येक फलक एक समतल में आयताकार है सम्मुख फलक समान्तर और सर्वांगसम है। इसमें समान्तर फलकों के तीन युग्म हैं दो आसन्न फलक एक रेखाखण्ड पर मिलते हैं। जिसे कोर कहते है। एक घनाभ में बारह कोर होती है।,



आकृति 16.01

तीन सलंग्न फलक परस्पर एक दूसरे पर लम्ब है। तीन संलग्न कोरें एक बिन्दु पर मिलती है इस बिन्दु को शीर्ष कहे है। एक घनाभ में 8 शीर्ष होते हैं।

मान लीजिए $AB = A'B' = D'C' = DC = \ell$

$AD = A'D' = B'C' = BC = b$

$AA' = DD' = BB' = h$

यदि ℓ को घनाभ की लम्बाई, h घनाभ की ऊँचाई, b घनाभ की चौड़ाई मान लें ये तीनों लांबिक कोरें (संगामी) एक घनाभ को निर्धारित करती है।

''अतः समान्तर षट्फलक का प्रत्येक फलक आयत हो तो उसे घनाभ कहते है। घनाभ को आयतफलकी ठोस भी कहते है। जैसे ईंट, सन्दूक, कमरा आदि''

धनाभ में, फलक ABCD का क्षेत्रफल = फलक A'B'C'D' का क्षेत्रफल $= \ell \times b$

धनाभ में, फलक ADD'A' का क्षेत्रफल = फलक BCC'B' का क्षेत्रफल $= b \times h$

धनाभ में, फलक ABB'A' का क्षेत्रफल = फलक DCC'D' का क्षेत्रफल $= b \times \ell$

अतः घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2 (ABCD का क्षेत्रफल + ADD'A का क्षेत्रफल + ABB'A का क्षेत्रफल)

$= 2(\ell \times b + b \times h + h \times \ell)$

$= 2(\ell b + bh + h\ell)$ वर्ग इकाई

यदि घनाभ की ऊँचाई शून्य हो तो यह एक आयत का रूप ले लेगा।

16.03 घन (Cube)

जब घनाभ की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई समान है। अर्थात् $\ell = b = h \neq 0$ हो तो इसे घन कहा जाता है। घन के सभी फलक वर्गाकार होते हैं तथा प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल भी समान होता है।

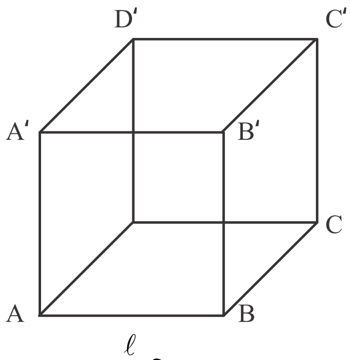
आकृति 16.02 एक घन को प्रदर्शित करती है। यदि घन की एक भुजा की लम्बाई ℓ हो तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(\ell \times \ell + \ell \times \ell + \ell \times \ell)$

$= 2(\ell^2 + \ell^2 + \ell^2)$

$= 2 \times 3\ell^2$

$= 6\ell^2$ वर्ग इकाई होगा



आकृति 16.02

अब हम घन या घनाभ का आयतन ज्ञात करने की विधियाँ विकसित करेंगे आयतन ज्ञात करने के लिए एक इकाई चुनेंगे।

आकृति 16.03 के अनुसार एक घन लीजिए जिसकी भुजा की लम्बाई 1 इकाई है ऐसे घन को इकाई घन कहते है 1 घन सेमी को 1 सेमी^{3} के रूप में लिखा जाता है।

इसी प्रकार घनाभ का आयतन घन इकाई में मापा जाता है। घनाभ का आयतन उसके पृष्ठ की लम्बाई चौड़ाई व ऊँचाई अलग–2 होने के कारण उनका गुणनफल होगा इससे निम्न निष्कर्ष पर पहुंचा जा सकता है।

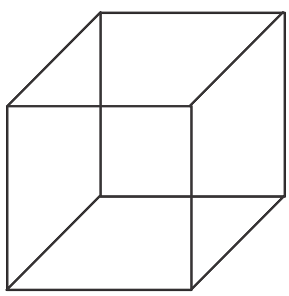
घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई घन इकाई है।

यदि आयतन को V, लम्बाई $= \ell$, चौड़ाई $= b$, ऊँचाई $= h$ है तो

$V = \ell \times b \times n$ घन इकाई होगा

∵ घन की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई समान होती है

अतः घन का आयतन $\ell \times \ell \times \ell = \ell^3$ होगा


आकृति 16.03

16.04 घन तथा घनाभ का विकर्ण

घन या घनाभ के समान्तर फलक के दो सम्मुख कोनों को मिलाने वाली सीधी रेखा विकर्ण कहलाती है इस प्रकार कुल 4 विकर्ण होते है।

नोटः फलकों के विकर्ण घन या घनार्भ के विकर्णों से भिन्नहोते हैं यदि घनाभ की लम्बाई ℓ, चौड़ाई b तथा ऊँचाई h है तो

घनाभ के विकर्ण की लम्बाई $\sqrt{\ell^2+b^2+h^2}$ इकाई, घन के लिए $\ell=b=h$

अतः घनके विकर्ण की लम्बाई $=\ell\sqrt{3}$ इकाई,

आयतन संबंधी इकाईयाँ

(i) 1 लीटर $=1000$ घन सेमी.

(ii) 1 घन सेमी $=10\times10\times10$ घन मिमी. $=1000$ घन मिमी

(iii) 1 घन मीटर $=100\times100\times100=100{,}00{,}00$ घन सेमी

(iv) 1 घन मीटर $=1000$ लीटर $=1$ किलो लीटर

उदाहरण-1. एक बन्द लकडी के बक्से की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 90 सेमी, 50 सेमी और 30 सेमी है। बक्से का बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः बक्से की लम्बाई $=90$ सेमी.

बक्से की चौड़ाई $=50$ सेमी.

बक्से की ऊँचाई $=30$ सेमी

बक्से का बाहरी सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2$ (ल. × चौ. + चौ. × ऊँ + ऊँ × ल.)

$$=2(90\times50+50\times30+30\times90)$$

$$=2(4500+1500+2700)$$

$$=2(8700) \text{ वर्ग सेमी.}$$

$$=\frac{17400}{10000}=1.74 \text{ वर्ग मीटर}$$

उदाहरण-2. एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 वर्ग मीटर है। घन की भुजा ज्ञात कीजिए।

हलः घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=1014$ वर्ग मीटर

माना घन की भुजा $=x$ मीटर

घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6$ (भुजा)^2

$\therefore\quad 6x^2=1014$

या $\quad x^2=\frac{1014}{6}=169$

या $\quad x=\sqrt{169}=13$ मीटर

उदाहरण-3. यदि घनाभ की लम्बाई 12 मीटर, चौड़ाई 9 मीटर और ऊँचाई 8 मीटर है तो घनाभ के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हलः घनाभ की लम्बाई $=12$ मीटर

घनाभ की चौड़ाई $=9$ मीटर

घनाभ की ऊँचाई $=8$ मीटर

हम जानते है कि घनाभ का विकर्ण $=\sqrt{(\text{ल.})^2+(\text{चौ.})^2+(\text{ऊँ})^2}$

$$=\sqrt{(12)^2+(9)^2+(8)^2}$$

$$=\sqrt{144+81+64}$$

$$=\sqrt{289}=17 \text{ मीटर}$$

उदाहरण-4. एक कक्ष की लम्बाई 5 मीटर, चौड़ाई $= 3.5$ मीटर व ऊँचाई 4 मीटर है। 20 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से चारों दीवारों पर सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हलः कमरे की लम्बाई $= 5$ मीटर

चौड़ाई $= 3.5$ मीटर

ऊँचाई $= 4$ मीटर

कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= 2$ (लम्बाई + चौड़ाई) ऊँचाई

$$= 2(5+3.5)\times 4$$

$$= 2\times 8.5\times 4$$

$= 68$ वर्ग मीटर

चारों दीवारों पर सफेदी कराने का व्यय ₹ $= 68\times 20$

या व्यय ₹ $= 1360$

उदाहरण-5. घन के एक पृष्ठ का परिमाप 28 सेमी. है तो घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हलः घन के एक पृष्ठ का परिमाप $= 28$ सेमी.

$\because$ घन की सभी भुजाएँ बराबर होती है

$\therefore$ घन के एक पृष्ठ का परिमाप $= 4 \times$ भुजा

या $28 = 4 \times$ भुजा

या भुजा $= \frac{28}{4} = 7$ सेमी.

घन का आयतन $= (\text{भुजा})^3 = (7)^3$

$= 7\times 7\times 7 = 343$ घन सेमी.

उदाहरण-6. यदि एक समान्तर षट्फलक की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 6 : 5 : 4 है और उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 33300 वर्ग सेमी है तो समकोणिक समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि समकोणिक समान्तर षटफलक की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई क्रमशः $6x, 5x, 4x$ है।

समकोणिक समान्तर षट्फलक का क्षेत्रफल $= 33300$ वर्ग सेमी

$\therefore$ $2(\ell b + bh + h\ell) = 33300$

या $2(6x\times 5x + 5x\times 4x + 4x\times 6x) = 33300$

या $2(30x^2 + 20x^2 + 24x^2) = 33300$

या $2\times 74x^2 = 33300$

या $x^2 = \frac{33300}{2\times 74}$

या $x^2 = 225$

$\therefore$ $x = \sqrt{225} = 15$

या $x = 15$ सेमी

$\because$ $\ell = 6\times 15 = 90\,\text{cm}$, $b = 5\times 15 = 75$ सेमी,

$h = 4\times 15 = 60$ सेमी

समकोणिक समान्तर षटफलक का आयतन $= 90\times 75\times 60$

$= 405000$ सेमी^{3}

उदाहरण-7. एक सन्दूक की माप 3 मी. × 2 मी. × 1.80 मी है। बाहर की ओर सभी फलकों पर ₹ 12 प्रति वर्ग मीटर की दर से वार्निश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल: सन्दूक की लम्बाई = 3 मी., चौड़ाई = 2 मी., ऊँचाई = 1.80 मी.

सन्दूक का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 [ल. × चौ. + चौ. × ऊँ. + ऊँ. × ल.]

$= 2[3 \times 2 + 2 \times 1.80 + 1.80 \times 3]$

$= 2[6 + 3.60 + 5.40]$

$= 2[6 + 9] = 2[15]$

= 30 वर्ग मीटर

30 मीटर^2 पर वार्निश कराने का व्यय = ₹ $30 \times 12 = 360$

उदाहरण-8. धातु के तीन समान घनों की कोर क्रमशः 3 सेमी., 4 सेमी., 5 सेमी. है। इन्हें पिघलाकर एक नया घन बनाय गया। इस घन की कोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: 3 सेमी. कोर वाले घन का आयतन = (भुजा)^3 = $(3)^3 = 27$ घन सेमी.

4 सेमी. कोर वाले घन का आयतन = (भुजा)^3 = $(4)^3 = 64$ घन सेमी.

5 सेमी. कोर वाले घन का आयतन = (भुजा)^3 = $(5)^3 = 125$ घन सेमी.

इन घनों का सम्पूर्ण आयतन = $27 + 64 + 125 = 216$ सेमी^{3}

इन्हें पिघलाकर नया घन बनाया गया है।

अतः नये घन का आयतन = 216 घन सेमी

(भुजा)^3 = 216

भुजा $= \sqrt[3]{216}$

भुजा $= (6 \times 6 \times 6)^{1/3}$

भुजा $= 6^{3 \times 1/3} = 6$

अतः नए घन की कोर = 6 सेमी.

प्रश्नावली–16.1

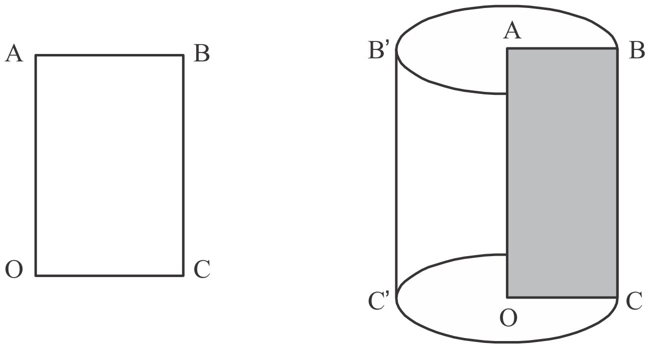
1. एक घनाभ 12 सेमी. लम्बा, 9 सेमी. चौड़ा, और 5 सेमी. ऊँचा है। घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम्आयतन ज्ञात कीजिए।
2. तीन घनों की भुजाऐं क्रमशः 8 सेमी., 6 सेमी. और 1 सेमी. है इन्हें पिघलाकर एक नया घन बनाया जाता है। नये घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक सन्दूक की माप 50 सेमी. × 36 सेमी. × 25 सेमी. हैं इस सन्दूक का कवर बनाने के लिए कितने वर्ग सेमी कपड़े की आवश्यकता होगी।
4. एक घन का प्रत्येक पृष्ठ 100 वर्ग सेमी. है। यदि आधार के समान्तर समतल द्वारा घन को काटकर दो बराबर भागों में बाँट दिया जाये तो प्रत्येक समान भाग का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. बगैर ढक्कन का एक बक्सा 3 सेमी. मोटी लकडी का बना हुआ हैं। इसकी बाहरी लम्बाई 146 सेमी. चौड़ाई 116 सेमी और ऊँचाई 83 सेमी. है उसके अन्दर की ओर पेन्ट कराने का खर्च ज्ञात कीजिए। पेन्ट की दर 2 रु. प्रति 1000 वर्ग सेमी है।
6. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का योग 19 सेमी. है तथा विकर्ण की लम्बाई 11 सेमी. है। घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. 6 मीटर भुजा के वर्गाकार फर्श के कमरे में 180 घन मीटर हवा है। कमरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. 44 मीटर लम्बी, 1.5 मी. ऊँची और 85 सेमी. चौडी दीवार बनाने में 22 सेमी. × 10 सेमी. × 7 सेमी. माप की कितनी ईटों की आवश्यकता होगी?
9. 10 मीटर लम्बे 8 मीटर चौड़े और 6 मीटर ऊँचें कमरे में अधिक से अधिक कितनी लम्बी छड़ रखी जा सकती है?
10. एक घन का आयतन 512 घन मीटर हैं उसकी भुजा ज्ञात कीजिए।
11. एक दीवार की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 5 मीटर, 30 सेमी. और 3 मीटर हैं। दीवार बनाने में 20 सेमी. × 10 सेमी. × 7.5 सेमी. माप की कितनी ईटों की आवश्यकता होगी?
12. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 5 : 3 : 2 है। यदि घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 558 सेमी^{2} है तो उसकी कोरों का माप ज्ञात कीजिए।

16.05 बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन (Surface Area and Volume of Cylinder)

QQ1DFB

आपने मापन जार, गोलखम्भे, गोलपाइप, टेस्ट ट्यूब आदि वस्तुऐं देखी होगी ऐसी वस्तुऐं जिसमें एक पार्श्व वक्र पृष्ठ (lateral curved surface) और सर्वांग समवृत्तीय अनुप्रस्थ काट (cross section) हो वृत्तीय बेलन कहलाता हैं वृत्तीय अनुप्रस्थ काटों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा को बेलन की अक्ष कहते हैं। यदि बेलन का अक्ष वृत्तीय अनुप्रस्थ काट पर लम्ब है तो उस बेलन को लम्ब वृत्तीय बेलन कहते है (Right circular cylinder) है। इस अध्याय में जहाँ भी बेलन का प्रयोग किया जायेगा वहाँ बेलन का अर्थ लम्ब वृत्तीय बेलन होगा।

यदि ABCO एक आयतकार क्षेत्र है यह रेखा OA के चारों ओर परिक्रमण करता है तो हमें AB त्रिज्या का तथा OA ऊँचाई का एक ठोस बेलन प्राप्त होता है। इसे आकृति 16.04 में दर्शाया गया है।



आकृति 16.04

वे रेखाएँ जो OA के समान्तर हैं और बेलन के पार्श्व पृष्ठ पर स्थित है। जनक कहलाती है। यहाँ रेखाऐं BC, B'C' जनक हैं। बेलन को उर्ध्वाधर स्थिति में रखने पर नीचे के वृत्तीय सिरों को बेलन का आधार कहते हैं। रेखाखण्ड CB की लम्बाई आकृति 16.05 में बेलन की ऊँचाई कही जाती है। वृत्तीय सिरे की त्रिज्या को बेलन की त्रिज्या कहते है।

खोखले बेलन में दोनों सिरे खुले होते हैं। ठोस बेलन में दोनों सिरे बन्द होते है r त्रिज्या और h ऊँचाई वाला बेलन (आकृति 16.05) का वक्र पृष्ठ ज्ञात करने के लिए यदि वक्र पृष्ठ को रेखाखण्ड BC के अनुदिश काट कर खोल दिया जाए तो यह आयत BCDE के रूप का हो जायेगा।

आकृति 16.05

जब चद्दर बेलन के वक्रपृष्ठ के रूप में है तो रेखा खण्ड BC तथा ED संपाती है। अत: BC की लम्बाई $= h$ बेलन की ऊँचाई, CD की लम्बाई = बेलन के एक सिरे की परिधि जिसकी त्रिज्या r है।

अत: बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = आयत BCDE का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r \times h$$

$$= 2\pi rh$$

बेलन के आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ + 2 आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r(h + r)$$

बेलन द्वारा घेरा गया स्थान उसका आयतन होता है। यदि बेलन की त्रिज्या r और ऊँचाई h है। तो

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

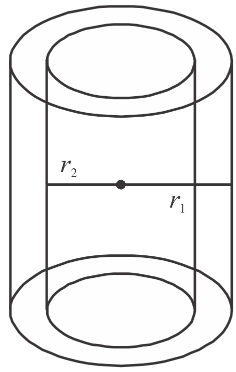
$$= \pi r^2 \times h$$

$$= \pi r^2 h$$

यदि एक खोखले बेलन की बाह्य त्रिज्या r_1 तथा अन्तः त्रिज्या r_2 है तथा उसकी ऊँचाई h है तो आकृति 16.06 में खोखले बेलन का आयतन

$$= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$$

$$= \pi \left(r_1^2 - r_2^2\right) h$$



आकृति 16.06

खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r_1 h + 2\pi r_2 h + 2\pi r_1^2 - 2\pi r_2^2$$

$$= 2\pi h\left(r_1 + r_2\right) + 2\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

$$= 2\pi h\left(r_1 + r_2\right) + 2\pi\left(r_1 + r_2\right)\left(r_1 - r_2\right)$$

$$= 2\pi\left(r_1 + r_2\right)\left(h + r_1 - r_2\right)$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. तथा ऊँचाई 21 सेमी है। बेलन का आयतन और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: बेलन के आधार का क्षेत्रफल = 154 वर्ग सेमी,

बेलन की ऊँचाई $(h) = 21$ सेमी

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= 154 \times 21$

$= 3234$ घन सेमी

अतः आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

या $154 = \frac{22}{7} \times r^2$

या $154 \times 7 = 22 \times r^2$

या $r^2 = \frac{154 \times 7}{22} = 49$

या $r = \sqrt{49} = 7$ सेमी

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 21$$

$= 2 \times 22 \times 21 = 924$ वर्ग सेमी

उदाहरण-2. एक बेलन की ऊँचाई 11 सेमी तथा उसका वक्र पृष्ठ 968 सेमी^{2} है। बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: बेलन की ऊँचाई $h = 11$ सेमी.

मानाकि बेलन की त्रिज्या $= r$

बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh = 968$

या $\quad 2\times\frac{22}{7}\times r\times 11=968$

$r=\frac{968\times 7}{2\times 22\times 11}=14$ सेमी

उदाहरण-3. यदि एक बेलन का आयतन 448 π घन सेमी. और ऊँचाई 7 सेमी. है तो बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: बेलन का आयतन $=\pi r^2 h$

$\therefore \quad 448\pi=\pi\times r^2\times 7$

या $\quad 448=7r^2$

या $\quad r^2=\frac{448}{7}=64$

या $\quad r=\sqrt{64}=8$ सेमी

बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi rh$

$=2\times\frac{22}{7}\times 8\times 7$

$=44\times 8=352$ वर्ग सेमी

बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi r(h+r)$

$=2\times\frac{22}{7}\times 8(7+8)$

$=2\times\frac{22}{7}\times 15\times 8=\frac{5280}{7}=754.28$ वर्ग सेमी

उदाहरण-4. एक खोखले बेलन की ऊँचाई 21 डेसी मीटर है तथा इसके बाह्य व्यास व अन्तः व्यास क्रमशः 10 सेमी व 6 सेमी है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: खोखले बेलन की ऊँचाई $=21$ डेसी मीटर $\quad$ [$\because$ 10 सेमी $=1$ डेसी मीटर]

$=21\times 10=210$ सेमी.

खोखले बेलन का बाह्य व्यास $=10$ सेमी.

अतः बाह्य त्रिज्या $(r_1)=\frac{\text{व्यास}}{2}=\frac{10}{2}=5$ सेमी

खोखले बेलन का अन्तः व्यास $=6$ सेमी.

अन्तः त्रिज्या $(r_2)=\frac{6}{2}=3$ सेमी.

खोखले बेलन का आयतन $=\pi\left(r_1^2-r_2^2\right)h$

$=\frac{22}{7}\left[(5)^2-(3)^2\right]\times 210$

$=\frac{22}{7}[25-9]\times 210$

$=\frac{22}{7}\times 16\times 210=10560$ घन सेमी

उदाहरण-5. एक बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 1 : 3 है। यदि बेलन का आयतन 3234 सेमी^{3} है तो बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना बेलन की त्रिज्या r तथा ऊँचाई $3r$ है

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times r^2 \times 3r = 3234$$

$$r^3 = \frac{3234 \times 7}{22 \times 3}$$

या $r^3 = 343$

या $r^3 = (7)^3$

या $r = 7$

अतः बेलन की ऊँचाई $h = 3 \times 7 = 21$ सेमी.

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h + r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(21 + 7)$$

$$= 2 \times 22 \times 28$$

$= 1232$ सेमी^{2}

उदाहरण-6. एक रोलर की लम्बाई 2 मी. और व्यास 1.4 मी. है ज्ञात कीजिए 5 चक्कर लगाने में रोलर कितना क्षेत्र समतल करेगा?

हल: रोलर की लम्बाई $(h) = 2$ मीटर

रोलर का व्यास $= 1.4$ मीटर

रोलर की त्रिज्या $= \frac{1.4}{2} = 0.7$ मीटर

रोलर के 1 चक्कर लगाने में समतल किया क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

$$\therefore \quad 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 0.7 \times 2$$

$$= 2 \times 22 \times \frac{1}{10} \times 2$$

$= 8.8$ वर्ग मीटर

$\therefore$ 5 चक्कर लगाने में समतल किया क्षेत्रफल $= 8.8 \times 5 = 44$ वर्ग मीटर

प्रश्नमाला 16.2

1. एक बेलन का व्यास 14 सेमी. ओर ऊँचाई 15 सेमी. है। बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक लम्ब वृत्तीय बेलन की ऊँचाई 7 सेमी और आधार की त्रिज्या 3 सेमी है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
3. एक बेलन के सिरे का क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है तथा इसकी ऊँचाई 21 सेमी. है बेलन का आयतन एवम् वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. दो लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्याओं का अनुपात 2 : 3 तथा ऊँचाईयों का अनुपात 5 : 4 है तो दोनों बेलनों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. एक ठोस बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 462 वर्ग सेमी. है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफलका एक तिहाई है बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।
6. एक बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 660 वर्ग सेमी तथा ऊँचाई 15 सेमी. है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।
7. एक बेलन का आयतन $30\pi cm^3$ है तथा आधार का क्षेत्रफल $6\pi cm^2$ है बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

8. एक बेलन का आयतन और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल क्रमशः 1650 घन सेमी और 660 वर्ग सेमी है। बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

9. एक बेलन की ऊँचाई व त्रिज्या क्रमशः 7.5 सेमी और 3.5 सेमी है। इसके सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल और वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल में अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. 20 मीटर गहरा और 7 मीटर व्यास का एक कुँआ खोदा गया। इससे निकली मिट्टी से 22 मी.× 14 मी. माप का एक चबूतरा बनाया गया। चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

11. एक बेलनाकार बर्तन में $30800\,cm^3$ पानी भरा जा सकता है। यदि बर्तन की भीतरी त्रिज्या $14\,cm$ है तो उसका भीतरी वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

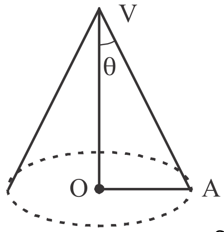
12. एक खोखले बेलन की मोटाई 2 सेमी. है। इसका भीतरी व्यास 14 सेमी तथा ऊँचाई 26 सेमी. है। बेलन के दोनों सिरे खुले हुए है। खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13. एक खोखला बेलन दोनों सिरों से खुला हुआ है। उसकी ऊँचाई 20 सेमी. तथा अन्तः एवम् बाह्य व्यास क्रमशः26 सेमी. व 30 सेमी. है। इस खोखले बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

16.06 शंकु (Cone)

आपने जोकर की टोपी, आइसक्रीम का कोन देखा होगा ये शंकु के आकार जैसी वस्तुएँ है। दी गई आकृति 16.07 में VO एक रेखा खण्ड है, दूसरा रेखाखण्ड VA, VO से θ कोण बनाता है। यदि रेखा खण्ड VA, रेखाखण्ड VO के चारों ओर एक चक्कर लगाता है तो एक शंकु जनित होता है।

QQA9GY



आकृति 16.07

रेखाखण्ड VO की लम्बाई शंकु की ऊँचाई कहलाती है। इसे सामान्यतः h के द्वारा लिखा जाता है रेखाखण्ड VO शंकु का अक्ष है रेखाखण्ड VA के परिक्रमण करने पर खुले आधार वाला एक खोखला शंकु जनित होता है बिन्दु V को शंकु का शीर्ष एवम् रेखाखण्ड VA शंकु की तिरछी ऊँचाई (Slant height) कहलाती है। सामान्यतः इसे ℓ से प्रकट करते हैं। शंकु का आधार एक वृत्त है जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या OA = r (माना) है। यदि रेखा VO आधार पर लम्ब है तो शंकु लम्ब वृत्तीय शंकु कहलाता है। इस अध्याय में हम लम्ब वृत्तीय शंकु का अध्ययन करेंगे।

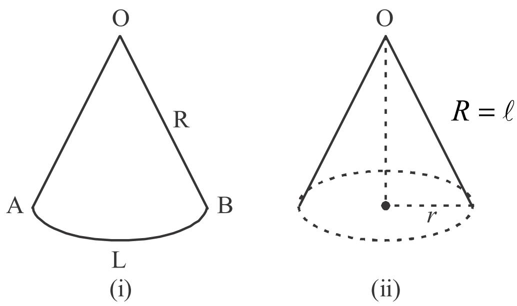
लम्ब वृत्तीय शंकु वह ठोस आकृति हैं जब कोई रेखाखण्ड एक स्थिर बिन्दु पर एक स्थिर रेखा से अचर कोण पर परिक्रमण करता है यहाँ शंकु से तात्पर्य लम्ब वृत्तीय शंकु से है।

$$VA^2 = VO^2 + OA^2$$

या $$\ell^2 = h^2 + r^2$$

$$\ell = \sqrt{h^2 + r^2}$$ VA को शंकु की तिर्यक लम्बाई कहते है।

वृत्त का त्रिज्यखण्ड OAB लीजिए। इसकी सीधी कोरे OA व OB को इस तरह मिलाइये कि इससे एक शंकु प्राप्त हो जिसके आधार का परिमाप चाप AB की लम्बाई के बराबर हो तथा त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या शंकु की तिरछी ऊँचाई हो। आकृति 16.08 के अनुसार शंकु का पृष्ठीय (तिर्यक पृष्ठीय) क्षेत्रफल



आकृति 16.08

= त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} L \times R$

$= \frac{1}{2}$ शंकु के आधार का परिमाप × तिरछी ऊँचाई

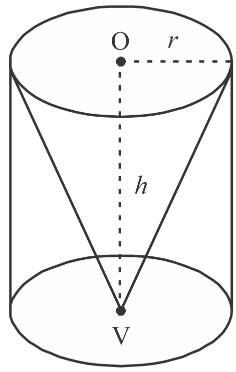
$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times \ell$

शंकु का तिर्यक पृष्ठ $= \pi r \ell$

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का तिर्यक पृष्ठ + शंकु के आधार का क्षेत्रफल

$= \pi r \ell + \pi r^2$

$= \pi r (\ell + r)$



आकृति 16.09

यदि शंकु के आधार की त्रिज्या r व ऊँचाई h हो तो

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $= \ell = \sqrt{r^2 + h^2}$

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r (\ell + r)$

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

हम जानते हे कि $\pi r^2 h$ उस बेलन का आयतन होता है जिसकी त्रिज्या r व ऊँचाई h है। यदि ऊँचाई h और त्रिज्या r का एक शंकु बनाया जाये तो उसका आयतन $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ होता है। प्रयोग द्वारा यह सत्यापित किया जा सकता है। कि शंकु का आयतन समान ऊँचाई और समान त्रिज्या वाले बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है।

r त्रिज्या व h ऊँचाई का एक बेलनाकार मापन जार लीजिए। इसका आयतन $\pi r^2 h$ है। आकृति 16.09 के अनुसार एक शंकु लीजिए जिसका आधार और ऊँचाई वही है जो कि बेलनाकार जार की है। मानाकि शंकु का आयतन V हैं। शंकु को पानी से भरकर इसे बेलनाकार मापन जार में उडेल दीजिए। आप देखेंगे कि तीन बार शंकु को भरकर उसे जार में उडेला जाए। तब ही जार पूरा भरेगा इस प्रयोग से यह निष्कर्ष निकलता है कि शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. एक शंकु के आधार का व्यास 12 मीटर और तिर्यक ऊँचाई 10 मीटर है। शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है– शंकु के आधार का व्यास = 12 मीटर

शंकु की त्रिज्या $r = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{12}{2} = 6$ मीटर

और शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(\ell) = 10$ मीटर

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi (\ell + r) r$

$$= \frac{22}{7}(10+6) \times 6 = \frac{22}{7} \times 16 \times 6$$

$$= \frac{2112}{7} = 301.71 \text{ वर्ग मीटर}$$

अतः शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 301.71 वर्ग मीटर है।

उदाहरण-8. यदि एक शंकु का वक्रपृष्ठ 2035 वर्ग सेमी और आधार का व्यास 35 cm हो तो शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है– शंकु का वक्र पृष्ठ $=\pi r\ell = 3035\, cm^2$

$\therefore$ शंकु की त्रिज्या $(r) = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{35}{2} = 17.5$ सेमी

$\therefore$ $2035 = \frac{22}{7} \times 17.5 \times \ell$

या $2035 = 22 \times 2.5 \times \ell$

या $\ell = \frac{2035}{22 \times 2.5} = \frac{2035}{55}$

या $\ell = 37$

अतः शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(\ell) = 37$ सेमी होगी।

उदाहरण-9. एक शंकु का आयतन 16632 घन सेमी है और ऊँचाई 9 सेमी है इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है: शंकु का आयतन $= 16632$ घन सेमी

शंकु की ऊँचाई $(h) = 9$ सेमी

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore$ $16632 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 9$

या $16632 = \frac{22}{7} \times r^2 \times 3$

या $16632 \times 7 = 22 \times r^2 \times 3$

या $r^2 = \frac{16632 \times 7}{22 \times 3} = \frac{756 \times 7}{3}$

या $r^2 = 252 \times 7$

या $r = \sqrt{36 \times 7 \times 7}$

या $r = 6 \times 7 = 42$

अतः शंकु की त्रिज्या $= 42$ सेमी

उदाहरण-10. किसी शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 5 : 12 और आयतन 2512 घन सेमी है तो शंकु की तिर्यक ऊँचाई और आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल: शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात $= 5 : 12$

शंकु की त्रिज्या $(r) = 5x$ सेमी

शंकु की ऊँचाई $(h) = 12x$ सेमी

शंकु का आयतन $= 2512$ घन सेमी

$\therefore$ $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 2512$

$\frac{1}{3} \times 3.14 \times (5x)^2 \times 12x = 2512$

$$\frac{1}{3}\times 3.14\times 25x^2\times 12x = 2512$$

$$3.14\times 25x^2\times 4x = 2512$$

या $$314x^3 = 2512$$

या $$x^3 = \frac{2512}{314} = 8$$

या $$(x)^3 = (2\times 2\times 2)$$

या $$x^3 = 2^3$$

या $$x = 2$$

अतः शंकु की त्रिज्या $= 5\times 2 = 10$ सेमी.

शंकु की ऊँचाई $= 12\times 2 = 24$ सेमी.

उदाहरण-11. एक शंकु के आकार के टेन्ट की ऊँचाई 14 मीटर है तथा आधार का क्षेत्रफल 346.5 मीटर^2 है। यह टेन्ट 1.5 मीटर चौड़े केनवास से बना हुआ है तो कैनवास की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु के आकार के टेन्ट की ऊँचाई $h = 14$ मीटर

त्रिज्या $= r$ मीटर

शंकु के आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

आधार का क्षेत्रफल $= 346.5$ मीटर^2

$$\frac{22}{7}\times r^2 = 346.5$$

या $$r^2 = \frac{346.5\times 7}{22}$$

या $$r^2 = 110.25$$

या $$r = 10.5 \text{ मीटर}$$

टेन्ट की तिरछी लम्बाई $\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{(10.5)^2 + (14)^2}$$

$$= \sqrt{110.25 + 196}$$

$$= \sqrt{306.25} = 17.5 \text{ मीटर}$$

केनवास का क्षेत्रफल = टेन्ट के तिर्यक पृष्ठ का क्षेत्रफल

$$= \pi r \ell$$

$$= \frac{22}{7}\times 10.5\times 17.5$$

$$= 577.5 \text{ मीटर}^2$$

केनवास की लम्बाई $= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$

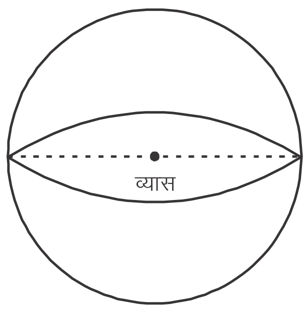
$$= \frac{577.5}{1.5} \text{ मीटर} = 385 \text{ मीटर}$$

प्रश्नमाला 16.3

1. एक शंकु की ऊँचाई 28 सेमी. तथा आधार की त्रिज्या 21 सेमी. है। उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीयक्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन 1232 सेमी^{3} है तथा उसकी ऊँचाई 24 सेमी है तो शंकु की तिरछी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक शंकु के आधार का व्यास 14 मीटर और तिर्यक ऊँचाई 25 मीटर है तो शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. शंकु के आधार की त्रिज्या 14 सेमी. और तिरछी ऊँचाई 50 सेमी. है। शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल), सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई 8 सेमी. और आधार की त्रिज्या 6 सेमी. है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।
6. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 1884.4 मीटर^2 है तथा इसकी तिर्यक ऊँचाई 12 मीटर है। इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
7. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आधार का क्षेत्रफल $154\,\text{cm}^2$ है। इसकी तिरछी ऊँचाई 25 सेमी. है तो शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. दो शंकुओं के आधार का व्यास समान है। उनकी तिरछी ऊँचाइयों का अनुपात 5 : 4 है। यदि छोटे शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 400 सेमी^{2} है तो बडे शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. एक शंकु की तिर्यक ऊँचाई और त्रिज्या का अनुपात 7 : 4 है। यदि इसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल 792 वर्ग सेमी. होतो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
10. 9 मीटर ऊँचे शंकु के आकार के टेंट के आधार की परिधि 44 मीटर है। इसके अन्दर की वायु का आयतन ज्ञात कीजिए।
11. एक शंकु के आकार के बर्तन की त्रिज्या 10 सेमी और ऊँचाई 18 सेमी है यह पानी से पूरा भरा हुआ है। इसे 5 सेमी. त्रिज्या के बेलनाकार बर्तन में उड़ेला जाता है। बेलनाकार बर्तन में पानी के तल ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
12. 14 सेमी. भुजा के एक घन से बड़े से बड़ा शंकु काटा जाता है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।
13. शंकु के आधार की त्रिज्या और ऊँचाई क्रमशः 7 सेमी. और 24 सेमी है। शंकु की तिरछी ऊँचाई वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन ज्ञात कीजिए।
14. एक त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या 12 सेमी. और कोण 120° है। इसकी सीधी कोरों को सम्पाती करके एक शंकु बनाया जाता है। इस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

16.07 गोला (Sphere)

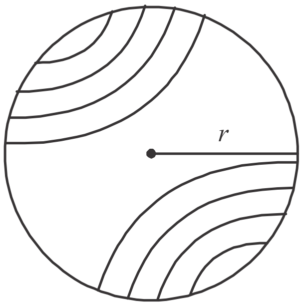
एक वृत्त या अर्धवृत्त द्वारा उसके एक व्यास को अक्ष मानकर उसके चारों ओर क्रमशः आधा चक्कर या पूरा चक्कर लगाने में जो ठोस जनित होता है उसे गोला कहते हैं।



आकृति 16.10

गोले की परिभाषा हम इस प्रकार भी दे सकते है। कि आकाश में स्थित उन सभी बिन्दुओं के समुच्चय को गोला कहा जा सकता है, जो एक नियत बिन्दु से समान दूरी पर हो। नियत बिन्दु को गोले को केन्द्र कहते है। केन्द्र से इस समुच्चय के किसी बिन्दु की दूरी को त्रिज्या कहते है। पूर्ण फूला हुआ फुटबाल, क्रिकेट बॉल, गोले के उदाहरण है।

उस रेखा खण्ड को जो गोले के केन्द्र से गुजरता है। जिसके दोनों सिरे गोले पर हो गोले का व्यास कहलाता है। गोले के सभी व्यास लम्बाई में समान होते हैं। गोले की त्रिज्या उसके व्यास की आधी होती है। गोले द्वारा आकाश में घेरा गया स्थान उसका आयतन कहलाता है।



आकृति 16.11

उपपत्ति को दिये बिना निम्नलिखित सूत्र दिये जा सकते हैं।

यदि गोले की त्रिज्या r है तो

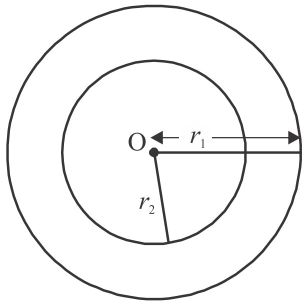
गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

r त्रिज्या के अर्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

अर्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

अर्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$



आकृति 16.12

यदि गोलीय कोश की बाहरी त्रिज्या r_1 तथा भीतरी त्रिज्या r_2 है तो

गोलीय कोश का आयतन $= \frac{4}{3}\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right)$

गोलीय कोश का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-12. 7 सेमी. त्रिज्या के गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: गोले की त्रिज्या = 7 सेमी.

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 22 \times 28$

$= 616$ सेमी²

उदाहरण-13. एक अर्ध गोले की त्रिज्या 3.5 सेमी. है तो इसका आयतन व सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: अर्ध गोले की त्रिज्या $(r) = 3.5$ सेमी.

अर्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$

$$= \frac{2}{3} \times 22 \times 0.5 \times 12.25$$

$$= \frac{269.5}{3} = 89.83 \text{ घन सेमी.}$$

अर्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$$

$$= 3 \times 22 \times 0.5 \times 3.5$$

$= 115.5$ सेमी²

उदाहरण-14. सीसे के एक गोले की त्रिज्या 5 सेमी. है। इससे 5 मि.मि. त्रिज्या की कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती है?

हल: सीसे के बड़े गोले की त्रिज्या $(r) = 5$ सेमी.

सीसे के बड़े गोले का आयतन $(v) = \frac{4}{3}\pi (5)^3$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 5 \times 5 \times 5 \text{ घन सेमी.}$$

सीसे की छोटी गोली की त्रिज्या $(r_1) = 5$ मिमी. $= \frac{5}{10} = 0.5$ सेमी.

सीसे की एक गोली का आयतन $= \frac{4}{3} \times \pi \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5$ घन सेमी.

छोटी गोलियों की संख्या $= \dfrac{\text{बड़े गोले का आयतन}}{\text{एक छोटी गोली का आयतन}}$

$$= \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times 5 \times 5 \times 5}{\frac{4}{3} \times \pi \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5} = 1000 \text{ गोलियाँ}$$

उदाहरण-15. एक गेंद के पृष्ठ का क्षेत्रफल 1386 वर्ग सेमी. है। गेंद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है:– गेंद (गोला) के पृष्ठ का क्षेत्रफल = 1386 वर्ग सेमी.

या $4\pi r^2 = 1386$

या $4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 1386$

या $r^2 = \frac{1386 \times 7}{4 \times 22} = 110.25$

या $r = \sqrt{110.25} = 10.5$ सेमी.

अतः गेंद की त्रिज्या 10.5 सेमी. होगी।

उदाहरण-16. दो गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 9 है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों एवं आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: माना दो गोलों की त्रिज्याऐं r_1 और r_2 है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफल $4\pi r_1^2$ तथा $4\pi r_2^2$ है।

गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात $= \dfrac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \dfrac{4}{9}$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

दोनों गोलों के आयतनों का अनुपात $= \dfrac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3} r_2^3} = \dfrac{r_1^3}{r_2^3}$

$$= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 8 : 27$$

प्रश्नमाला 16.4

1. 1.4 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी. है, तो गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।
3. एक अर्ध गोले की त्रिज्या 4.5 सेमी. है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन ज्ञात कीजिए।
4. एक गोले का आयतन 38808 घन सेमी. है तो गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. एक बेलन सीसे का बना हुआ है जिसकी त्रिज्या 4 सेमी व ऊँचाई 10 सेमी है। इसे पिघलाकर कर 2 सेमी. त्रिज्या के कितने गोले बनाए जा सकते हैं।
6. एक खोखला गोल शेल 2 सेमी. मोटा है। यदि इसकी बाह्य त्रिज्या 8 सेमी. है तो इसमें लगी धातु का आयतन ज्ञात कीजिए।
7. 9 सेमी त्रिज्या के धातु के गोले को पिघलाकर 3 सेमी त्रिज्या और 6 सेमी ऊँचाई के कितने शंकु बनाए जा सकते है।
8. 10 सेमी. त्रिज्या के धातु के गोले से समान त्रिज्या के 8 गोले बनाए जाते है। इस प्रकार बने प्रत्येक गोले कापृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. यदि एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 5544 सेमी^{2} है तो गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।
10. एक सीसे के ठोस आयत फलकी की माप क्रमशः 66 सेमी, 42 सेमी और 21 सेमी है। ज्ञात कीजिए कि इसको पिघलाकर इससे 4.2 सेमी. व्यास की कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती है।
11. 6 सेमी व्यास का एक गोला 12 सेमी व्यास के बेलनाकार बर्तन में जिसमें पानी है डाला जाता है बर्तन में पानी कितना ऊपर चढ़ जायेगा।
12. 9 सेमी. की अन्तः त्रिज्या वाले एक अर्ध गोलाकार कटोरे में एक द्रव भरा है। इस द्रव को 3 सेमी व्यास और 4 सेमी ऊँचाई के छोटे–छोटे बेलनाकार बर्तनों में भरना है। ज्ञात कीजिए कि कटोरे के पूरे द्रव को भरने के लिए कितनी बोतलों की आवश्यकता होगी।
13. एक गोले का व्यास 0.7 सेमी है। एक पानी की टंकी से 3000 गोले पूर्ण रूप से भरकर पानी बाहर निकाला जाता है तो बाहर निकलने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।
14. एक खोखले अर्ध गोलीय बर्तन के बाह्य और अन्तः व्यास क्रमशः 43 सेमी और 42 सेमी है यदि उस पर रंग करवानेका व्यय 7 पैसे प्रति वर्ग सेमी हो तो बर्तन पर रंग करवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नमाला–16

1. एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 486 वर्ग सेमी. है घन की भुजा होगी–

   (क) 6 सेमी (ख) 8 सेमी (ग) 9 सेमी (घ) 7 सेमी

2. एक घनाभ की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 9 मीटर, 2 मीटर और 1 मीटर है घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा–

   (क) 12 वर्ग मीटर (ख) 11 वर्ग मीटर (ग) 21 वर्ग मीटर (घ) 22 वर्ग मीटर

3. एक गोले का व्यास 6 सेमी है गोले का आयतन होगा–

   (क) 16π घन सेमी (ख) 20π घन सेमी (ग) 36π घन सेमी (घ) 30π घन सेमी

4. एक बेलन के आधार की त्रिज्या 14 सेमी. तथा ऊँचाई 10 सेमी. है। बेलन का वक्र पृष्ठ होगा–

   (क) 810 सेमी^{2} (ख) 880 सेमी^{2} (ग) 888 सेमी^{2} (घ) 890 सेमी^{2}

5. एक शंकु का आयतन 308 सेमी^{3} और ऊँचाई 6 सेमी. है उसके आधार की त्रिज्या होगी–

   (क) 7 सेमी. (ख) 8 सेमी. (ग) 6 सेमी. (घ) इनमें से कोई नहीं

6. एक ठोस धातु के अर्ध गोले का व्यास 42 सेमी. है। इसके सम्पूर्ण पृष्ठ पर 20 पैसे प्रति वर्ग सेमी. की दर से पालिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
7. एक शंकु एक अर्ध गोला व एक बेलन एक ही आधार व ऊँचाई पर बने है। उनके आयतनों का अनुपात लिखिये।
8. एक ठोस पिण्ड का वॉया भाग बेलनाकार और दांया भाग शंकु नुमा है। यदि बेलन का व्यास 14 सेमी. तथा लम्बाई 40 सेमी और शंकु का व्यास 14 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 12 सेमी. हो तो ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।
9. 9 सेमी. त्रिज्या के धातु के गोले को पिघलाकर 3 सेमी त्रिज्या और 6 सेमी. ऊँचाई के शंकु बनाए जा सकते है। शंकुओं की संख्या ज्ञात करो।
10. एक गाँव जिसकी जनसंख्या 4000 है जिसको प्रतिदिन प्रतिव्यक्ति 150 लीटर पानी की आवश्यकता है। इस गांव में 20 मीटर $\times$ 15 मीटर $\times$ 6 मीटर माप वाली एक टंकी बनी हुई है। इस टंकी का पानी वहाँ कितने दिन के लिए पर्याप्त होगा।
11. क्रमशः 6 सेमी., 8 सेमी. और 10 सेमी. त्रिज्याओं वाले धातु के तीन ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
12. एक शंकु के आकर की बर्तन की त्रिज्या 10 सेमी. और ऊँचाई 18 सेमी है। पानी से पूरा भरा हुआ है। इसे 5 सेमी. त्रिज्या के एक बेलनाकार बर्तन में उडेला जाता है। बेलनाकार बर्तन में पानी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
13. यदि 11 सेमी. $\times$ 3.5 सेमी. $\times$ 2.5 सेमी. मोम के एक घनाभ से 2.8 सेमी. व्यास की एक मोमबत्ती बनाई जाती है। मोमबत्ती की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
14. धातु के एक गोले का व्यास 6 सेमी है। गोले को पिघलाकर एक समान वृत्तीय अनुप्रस्थ काट–परिच्छेद वाला तार बनाया गया है। तार की लम्बाई 36 मीटर हो, तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2 ऊँचाई (लम्बाई + चौड़ाई)

$= 2\times(\text{ल.}+\text{चौ.})\times \text{ऊँ.} = 2\times(\ell+b)\times h$

2. घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + h\ell)$

3. घनाभ का आयतन $= \ell\times b\times h =$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

4. घन की चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= 4\ell^2$

5. घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6\ell^2$

6. घन का आयतन $= \ell^3$

7. घनाभ का विकर्ण $= \sqrt{\ell^2+b^2+h^2}$

8. घन का विकर्ण $= \sqrt{3}\ell$

9. बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

10. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r+h)$

11. बेलन का आयतन $= \pi r^2 h =$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

12. खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi(r_1+r_2)(h+r_1-r_2)$

13. खोखले बेलन का आयतन $= \pi\left(r_1^2-r_2^2\right)h$

14. शंकु का तिर्यक पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r\ell$

15. शंकु की तिर्यक लम्बाई $\ell^2 = \sqrt{h^2+r^2}$

16. शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(r+\ell)$

17. शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

18. ठोस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

19. ठोस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

20. अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

21. अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

22. अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

23. गोलीय कोश या खोखले गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi\left(r_1^2-r_2^2\right)$ यहाँ $r_1 > r_2$

24. गोलीय कोश का आयतन $= \frac{4}{3}\pi\left(r_1^3-r_2^3\right)$

25.
1 घन मीटर	= 1000 लीटर = 1 किलो लीटर
1 लीटर	= 1000 घन सेमी
1 आर	= 100 वर्ग मीटर
1 घन सेमी	= 1000 घन मिमी
1 घन मीटर	= 100,00,00 घन सेमी

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 16.1

1. 416 वर्ग सेमी, 540 वर्ग सेमी.
2. 486 वर्ग मीटर
3. 7900 वर्ग सेमी
4. 400 वर्ग सेमी
5. ₹ 110.80
6. 240 वर्ग सेमी
7. 5 मीटर
8. 15000 ईंट
9. $10\sqrt{2}$ मीटर
10. 8 मीटर
11. 3000 ईंट
12. 15 सेमी, 9 सेमी, 6 सेमी

प्रश्नमाना 16.2

1. 968 वर्ग सेमी, 2310 घन सेमी
2. 132 वर्ग सेमी, 188.57 वर्ग सेमी, 198 घन सेमी
3. 3234 घन सेमी, 924 वर्ग सेमी
4. (5 : 6. 5 : 9)
5. 539 घन सेमी
6. 2310 घन सेमी
7. 5 सेमी
8. 5 सेमी, 21 सेमी
9. 22 : 15
10. 2.5 मीटर
11. 4400 वर्ग सेमी
12. 2816 वर्ग सेमी
13. 3520 घन सेमी

प्रश्नमाला 16.3

1. 2310 वर्ग सेमी, 3696 वर्ग सेमी, 12936 घन सेमी
2. 25 सेमी
3. 704 वर्ग मीटर
4. 2200 वर्ग सेमी, 2816 वर्ग सेमी
5. 301.71 घन सेमी
6. लगभग 5 सेमी
7. 24 सेमी
8. 320 वर्ग सेमी
9. 12 सेमी
10. 462 घन मीटर
11. 24 सेमी
12. 718.67 घन सेमी
13. 25 सेमी, 550 वर्ग सेमी, 704 वर्ग सेमी, 1232 घन सेमी
14. 189.61 घन सेमी

प्रश्नमाला 16.4

1. 24.64 वर्ग सेमी, 11.5 घन सेमी
2. 1437.33 घन सेमी
3. 190.93 वर्ग सेमी, 190.93 घन सेमी
4. 5544 वर्ग सेमी
5. 15
6. 1240.38 घन सेमी
7. 54
8. 100 π वर्ग सेमी
9. 38808 घन सेमी
10. 1500
11. 1 सेमी
12. 54
13. 539 घन सेमी
14. ₹ 397.43

विविध प्रश्नमाला–16

1. (ग)
2. (घ)
3. (ग)
4. (ख)
5. (क)
6. ₹ 831.60
7. 1 : 2 : 3
8. 6776 घन सेमी
9. 54
10. 3 दिन
11. 12 सेमी
12. 24 सेमी
13. 15.6 सेमी
14. $\frac{1}{10}$ सेमी $= 0.1$ सेमी

❑