அத்தியாயம் **8**

வெக்டர் இயற்கணிதம் (Vector Algebra)

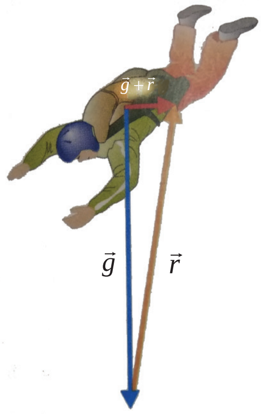
"புவியில் மனிதனைவிட மகத்துவமானது ஏதுமில்லை
மனிதனில் மனதைவிட மகத்துவமானது ஏதுமில்லை"

- ஹாமில்டன்

JHKIL1

8.1 அறிமுகம் (Introduction)

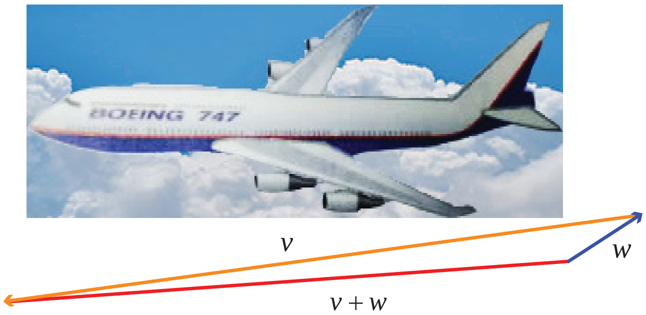
ஒரு விமானத்தை இயக்கும் திட்டத்தைத் தீர்மானிக்க ஒரு விமானி, விமானத்தின் பாதை , அதன் தலைப்பகுதி , காற்றின் வேகம் மற்றும் தரையில் அதன் வேகம் ஆகியவற்றைப் பற்றித் தெரிந்திருக்க வேண்டும். விமானம் நேரடியாக அதன் இலக்கை நோக்கிச் செல்ல வேண்டுமென்றால், காற்றானது சரியாகஎதிர்கொள்ளும்வகையிலானகோணத்தில்விமானத்தைக்காற்றினுள் செலுத்த வேண்டும். ஒரு வழிகாட்டும் கணினி இருந்தால் இவ்வாறான கணக்கீடுகளை வேகமாகவும் துல்லியமாகவும் செய்யலாம். எனினும், அந்த வழிகாட்டும் கணினியை இயக்க முடியாத சூழ்நிலையின் போது விமானி கையில் உள்ள கால்குலேட்டர், எழுதுகோல் மற்றும் காகிதத்தை கொண்டும் வெக்டர்கள் பற்றிய அறிவின் துணை கொண்டும் இதனைத் தீர்மானிப்பார். எனவே வெக்டர்களைப் பற்றியும் அதன் மீதான செயல்பாடுகளைப் பற்றியும் அறிந்திருப்பது விமானிக்கு மிகவும் இன்றியமையாததாகும்.



விண்வீழ் விளையாட்டு வீரரின் மேல் இரண்டு முக்கிய விசைகள் செயல்படுகின்றன. முதல் விசை புவியீர்ப்பு விசை $(\vec{g})$ செங்குத்தாக கீழ் நோக்கிச் செயல்படுகின்றது. மற்றொன்று எதிர்ப்பு விசை $(\vec{r})$ மேல்நோக்கி ஏதேனும் ஒரு திசையில் செயல்படுகின்றது. எனவே, அந்த விளையாட்டு வீரரின்மேல் செயல்படும் மொத்த விசை $\vec{g}+\vec{r}$ ஆகும். (எவ்வாறு?)

ஒரு **வானூர்தியின் திசைவேகம்** $\vec{v}$ எனவும் காற்றின் திசைவேகத்தை $\vec{w}$ எனவும் எடுத்துக்கொண்டால் வானூர்தியின் பயனீட்டுத் திசைவேகம் $\vec{v}+\vec{w}$ ஆகும். மேற்கு நோக்கி வானூர்தி பறக்க வானூர்தியின் தலை எந்த திசை நோக்கி இருக்க வேண்டும்?

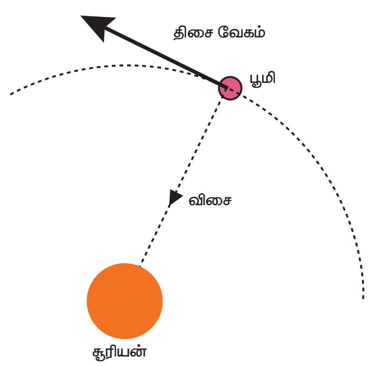
ஜி.பி.எஸ் (G.P.S) என்ற கருவி தரை, வான் மற்றும் தண்ணீர் ஆகியவற்றுள் பயணிக்க வழிகாட்டும் வகையில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. வெக்டர்களின் செயல்பாடுகள் மூலமே இக்கருவி இயங்குகிறது.



02_8 Vector Algebra Tamil.indd 51 25-03-2019 13:23:13

W.R. ஹாமில்டன்
(1805 – 1865)

வெக்டரின் கருத்தாக்கமானது ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் **H.G. கிராஸ்மன்** (1809 – 1877) மற்றும் ஐரிஷ் கணிதவியலாளர் **W.R. ஹாமில்டன்** (1805 – 1865) ஆகியவர்களின் தாக்கத்தினால் வளர்ச்சி பெற்றது. ஹாமில்டன் ஓர் உயர் நிலையினை பெற்றிருந்த போதும் கிராஸ்மன் ஓர் உயர் வகுப்பு பள்ளி ஆசிரியராக இருந்தார். நுண்கணிதம் மற்றும் கார்டீசியன் வடிவியலின் சிறப்பான அம்சங்களை ஒன்றிணைத்து வெக்டர் இயற்கணிதத்தை உருவாக்கிய பெருமை அமெரிக்கக் கணிதவியலாளர் **J.B.கிப்ஸ்** (1839 – 1903) மற்றும் இங்கிலாந்தை சேர்ந்த **Q.ஹெவிசைடு** (1850 - 1925) ஆகியோருக்கு உண்டு. தற்போதைய பயன்பாட்டிலுள்ள வெக்டர் இயற்கணிதம் மற்றும் வெக்டர் பகுப்பாய்வு கருத்தியலானது, முதன்முதலில் கிப்ஸ் என்ற கணிதவியலாளர் யேல் பல்கலைக் கழகத்தில் அவருடைய மாணவர்களுக்கு வழங்கிய விரிவுரையின் மூலம் வெளிக் கொணரப்பட்டதே ஆகும். **கிளி∴பர்ட்** (1845 -1879) என்பவர் தன்னுடைய **'Elements of Dynamics'** என்ற புத்தகத்தில் நுண்கணிதத்தில் பயன்படுத்தப்பட்ட இரு குவாட்டர்னியன் பெருக்கலை இரு விதமான வெக்டர்கள் மீதான பெருக்கல்களாக , அதாவது திசையிலிப் பெருக்கம் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கமாக பிரித்துக் காட்டினார். **வெக்டர்** என்ற வார்த்தையை ஹாமில்டன் என்பவர் **'to carry'** என்ற இலத்தீன் வார்த்தையில் இருந்து வரையறுத்தார்.



மேலும் கிராஸ்மனின் கோட்பாட்டு விரிவாக்கத்தின் மூலமும் வெக்டரின் கருத்தாக்கம் வளர்ச்சியடைந்தது. வடிவியல் மற்றும் இயற்பியலில் உள்ள கருத்துகளை புரிந்துணர வெக்டர் ஒரு சிறந்த கருவியாக அமைந்துள்ளது. பயனீட்டுக் கணிதம் மற்றும் இயற்பியலில் **வெக்டர்களின் கருத்தியல் ஒரு நவீன மொழியாக விளங்குகிறது.**

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- வடிவியல் மற்றும் இயற்பியலில் உள்ள கணக்குகளை புரிந்துகொள்ள வெக்டரை ஒரு கருவியாக உணர்வது
- திசையிலி மற்றும் வெக்டரை வேறுபடுத்துவது
- வெக்டரின் வகைகளையும், வெக்டரின் மீதான இயற்கணிதத்தையும் புரிந்து கொள்வது
- வெக்டரின் இரு பரிமாண மற்றும் முப்பரிமாணக் கூறுகளை வடிவியலின் வாயிலாக அறிந்து கொள்ளுதல்
- வெக்டர் இயற்கணிதத்தில் அணிகள் கருத்தியலின் பயன்பாட்டை அறிவது
- திசையிலிப்பெருக்கம் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கத்தின் மதிப்புகள் முறையே திசையிலி மற்றும் வெக்டர் என்பதைக் கண்டுணர்தல்

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

8.2 திசையிலிகள் மற்றும் வெக்டர்கள் (Scalars and Vectors)

வரையறை 8 .1

எண்ணளவை மட்டுமே கொண்டு தீர்மானிக்கப்படும் ஒரு கணியம் **திசையிலி** ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, தொலைவு, நீளம், வேகம், வெப்பநிலை, மின்னழுத்தம், நிறை, அழுத்தம், வேலை ஆகியவை திசையிலிகளாகும்.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 52 25-03-2019 13:23:14

வரையறை 8.2

எண்ணளவு மற்றும் திசையைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்படும் கணியம் **வெக்டர்** ஆகும். எனவே, இதனைத் திசையிடப்பட்ட கோட்டுத்துண்டு எனலாம்.

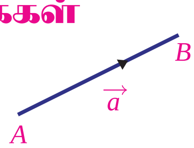
எடுத்துக்காட்டாக, திசை, இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம் (இது வேகத்தையும் அது நகரும் திசையையும் தருகின்றது) ஆகியவை வெக்டர்களாகும்.

வெக்டர்கள் ஆங்கில சிறிய எழுத்துகளைக் கொண்டு அம்புக்குறியுடன் குறிக்கப்படுகின்றது. இரு பரிமாண வெக்டர் என்பது $\mathbb{R}^2$–ல் திசையிடப்பட்ட ஓர் கோட்டுத்துண்டாகும். மேலும் முப்பரிமாண வெக்டர் என்பது $\mathbb{R}^3$–ல் திசையிடப்பட்ட ஓர் கோட்டுத்துண்டாகும்.

8.3 வெக்டரை குறிப்பிடும் முறை மற்றும் வெக்டர்களின் வகைகள்
(Representation of a vector and types of vectors)

ஒரு வெக்டருக்கு முடிவு மற்றும் ஆரம்பம் உண்டு.

படம் 8.1-ஐ காண்க.



படம் 8.1

வரையறை 8.3

$\vec{a}$ –ன் ஆரம்பப்புள்ளி A–யினைத் **தொடக்கப்புள்ளி** எனவும் முடிவுப்புள்ளி B–யினை **இறுதிப்புள்ளி** எனவும் அழைக்கிறோம். ஒரு வெக்டரின் தொடக்கப் புள்ளியினை அதன் ஆதிப்புள்ளி எனவும் கொள்ளலாம்.

$\vec{a}$ – ன் தொடக்கப்புள்ளி A–ஆனது நகர்வுக்கு முன் அப்புள்ளியின் நிலையினையும், இறுதிப்புள்ளி B–ஆனது நகர்வுக்குப்பின் அப்புள்ளியின் நிலையினையும் குறிக்கிறது.

$\vec{a}$ என்ற வெக்டரின் எண் மதிப்பு அல்லது நீளம் என்பது கோட்டுத்துண்டு AB – ன் நீளம் ஆகும். மேலும் இதனை $|\vec{a}|$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

AB – ன் வழியே நீட்டப்பட்ட திசையிடப்படாத கோட்டினை $\vec{a}$ – ன் **தாங்கி** எனலாம்.

ஒரு திசையில்லாத கோட்டுத்துண்டையும், ஒரு திசையுடன் கூடிய கோட்டுத் துண்டினையும் வேறுபடுத்த $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\vec{a}$ என அம்புக்குறியிட்டுக் குறிக்கப்படுகின்றது. எனவே AB என்பது ஒரு கோட்டுத்துண்டினை குறிப்பிடுகிறது.

வரையறை 8.4

எந்தவொரு புள்ளியையும் ஆதிப்புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க இயலுமானால் அதனைக் **கட்டிலா வெக்டர்** எனலாம். ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை மட்டுமே ஆதிப் புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமானால் அதனை **அறுதியிட்ட வெக்டர்** என்பர்.

வெக்டர்களின் பெருக்கல் வரை நாம் கட்டிலா வெக்டர்களை மட்டுமே பயன்படுத்த உள்ளோம். கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்பதில் அறுதியிட்ட வெக்டர்கள் பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளது.

வரையறை 8.5

ஒரே தொடக்கப்புள்ளியைப் பெற்ற வெக்டர்களை **ஒரே தொடக்கப்புள்ளி வெக்டர்கள்** எனவும் ஒரே முடிவுப்புள்ளியைக் கொண்ட வெக்டர்களை **ஒரே முடிவுப் புள்ளி வெக்டர்கள்** எனலாம்.

வரையறை 8.6

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களின் இயக்கம் ஒரே நேர்க் கோட்டிலோ அல்லது அதற்கு இணையாகவோ இருப்பின், அவற்றை **ஒரே கோடமை** அல்லது **இணை வெக்டர்கள்** எனலாம்.

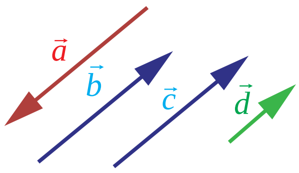
ஒரே தளத்தின் மீது அமைந்த அல்லது அந்தத் தளத்திற்கு இணையாக அமைந்த இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களை **ஒரு தள அமை வெக்டர்கள்** எனலாம்.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 53 25-03-2019 13:23:15

வரையறை 8.7

இரு வெக்டர்களின் எண்ணளவுகள் சமமாகவும் மற்றும் அவை ஒரே திசையினையும் பெற்றிருந்தால் அவற்றைச் **சம வெக்டர்கள்** எனலாம்.

சம வெக்டர்களுக்கு ஒரே தொடக்கப்புள்ளியும் இறுதிப் புள்ளியும் இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை. சான்றாக , படம் 8.2– ல் $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை சமநீளம் மற்றும் ஒரே திசையிலுள்ள வெக்டர்கள்என்பதால் அவற்றை சமவெக்டர்கள் என்கிறோம். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை சம எண்ணளவைக் கொண்டிருந்தாலும் அவற்றின் திசை எதிராக இருப்பதால் இவை சமமற்ற வெக்டர்கள் ஆகும். $\vec{c}$ மற்றும் $\vec{d}$ ஆகியவை ஒரே திசையில் இருந்தாலும் எண்ணளவு வெவ்வேறாக இருப்பதால் இவை சமமற்ற வெக்டர்களாகும்.



படம் 8.2

வரையறை 8.8

எண்ணளவு 0 உள்ள வெக்டரை **பூஜ்ஜிய வெக்டர்** என்கிறோம். இதனை $\vec{0}$ எனக் குறிப்பிடலாம். இது ஏதேனும் ஒரு திசையில் இருக்கும்.

அதாவது, தொடக்கப்புள்ளியும் முடிவுப்புள்ளியும் ஒன்றாக அமைந்தால் அது பூஜ்ஜிய வெக்டராக அமையும்.

எண்ணளவு 1 உள்ள வெக்டரை **அலகு வெக்டர்** எனலாம். $\vec{a}$ –ன் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டர் $\hat{a}$ எனக்குறிப்பிடப்படும் (இதனை ‘*a* cap’ அல்லது ‘*a* hat’ எனப்படிக்க வேண்டும்). தெளிவாக $|\hat{a}| = 1$ ஆகும்.

எண்ணிலா திசைகளிலிருப்பதால் எண்ணிலா அலகு வெக்டர்களும் உள்ளன என்பதைக் கவனிக்க. ஒவ்வொரு திசைக்கும் ஒரு அலகு வெக்டரானது அந்த திசையில் இருக்கும்.

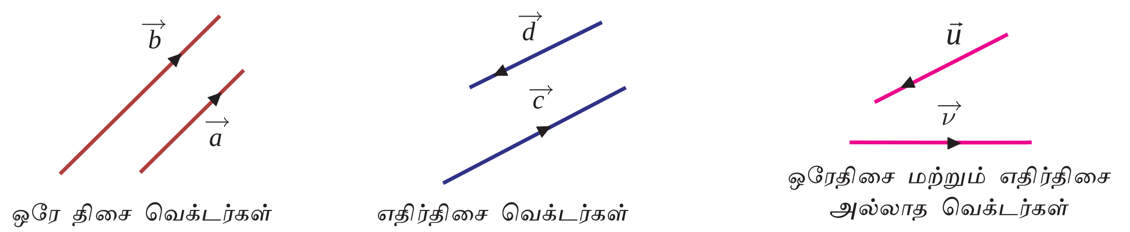
ஒவ்வொரு பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டரையும் $\vec{a}$ வெக்டரின் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டரை ஒரு திசையிலியால் பெருக்கி எழுதலாம். அந்த திசையிலியானது வெக்டரின் எண்ணளவாகும்.

எனவே, எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{a}$ க்கும், $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$ என எழுதலாம். இங்கு $\hat{a}$ என்பது $\vec{a}$ –ன் திசையில் அலகு வெக்டர் ஆகும். எனவே, பூஜ்ஜியமற்ற $\vec{a}$ –க்கு $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ஆகும்.

வரையறை 8.9

ஒரே திசையிலமைந்த இரு வெக்டர்களை **ஒரே திசை வெக்டர்கள்** என்றும், ஒன்றுக்கொன்று எதிர் திசையிலமைந்த இரு வெக்டர்களை **எதிர் திசை வெக்டர்கள்** என்றும் கூறலாம்.

இரண்டு வெக்டர்கள் ஒரே திசையிலமைந்த வெக்டர்களாகவோ எதிர் திசை வெக்டர்களாகவோ அமைந்தால் அவ்வெக்டர்களின் தாங்கிகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக அமையும். இரண்டு வெக்டர்கள் ஒரே திசை வெக்டர்களாக இல்லாமலும் எதிரெதிர்த்திசை வெக்டர்களாக இல்லாமலும் இருக்கலாம்.



படம் 8.3

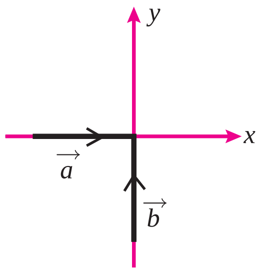
8.4 வெக்டர்களின் மீதான இயற்கணிதம் (Algebra of Vectors)

மெய்யெண்கள் அல்லது அணிகளின் மீதான செயல் முறைகள் போன்றே நாம் வெக்டர்களின் மீதும் செயல்முறைகளைக் காணலாம். இரண்டு வெக்டர்களின் கூட்டல், ஒரு வெக்டரிலிருந்து மற்றொரு வெக்டரைக் கழித்தல் மற்றும் ஒரு வெக்டரை ஒரு திசையிலி கொண்டு பெருக்குதல் போன்றவற்றைக் காண்போம்.

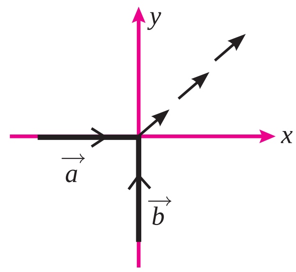
02_8 Vector Algebra Tamil.indd 54 25-03-2019 13:23:15

8.4.1 வெக்டர்களின் கூட்டல் (Addition of Vectors)

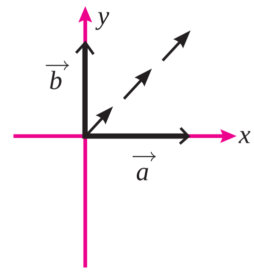
வெக்டர்களின் கூட்டலை இரண்டு வகைகளில் வரையறுத்து அவை ஒன்றே எனக் காண்போம். ஓரலகு நிறை கொண்ட ஒரு பொருள் $\mathbb{R}^2$–ல் (0, 0) என்ற இடத்தில் உள்ளது என்க. அதன் அளவை ஒரு புள்ளி என எடுத்துக்கொள்வோம். இரண்டு ஓரலகு விசைகள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை x–அச்சு மற்றும் y–அச்சின் மிகைத் திசையில் அப்பொருளின் மீது செயல்படுவதாகக் கொள்க. (படம் 8.4–ஐ பார்க்க). இப்பொழுது அப்பொருளானது x – அச்சுடன் 45° கோணத்தில் படம் 8.5.–ல் உள்ளது போல் நகரும் என எளிதில் கணிக்கலாம். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற என்ற விசைகள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்களால் படம் 8.6–ல் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. விசைகள் படம் 8.4–ல் அப்பொருளை தள்ளுவதாகவும் படம் 8.6–ல் அப்பொருளை இழுப்பதாகவும் நாம் கருதலாம்.



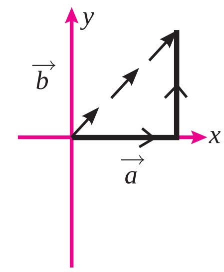
படம் 8.4



படம் 8.5



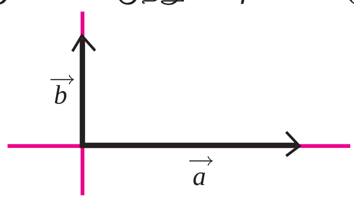
படம் 8.6



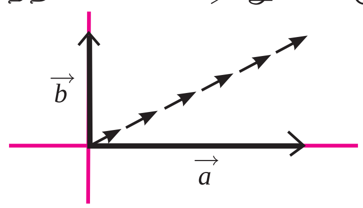
படம் 8.7

அடுத்து நமக்குத் தோன்றும் கேள்வி, "அது எவ்வளவு தூரம் நகரும்?" என்பதாகும். விசைகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகச் செயல்படுவதாகக் கருதுவோம். விசை $\vec{a}$ –ஆனது அப்பொருளை x–அச்சின் திசையில் ஓரலகு தூரம் நகர்த்தும். எனவே அந்தப் பொருள் (0, 0)–ல் இருந்து (1, 0) என்ற புள்ளிக்கு நகர்கின்றது. இப்பொழுது விசை $\vec{b}$ ஆனது அப்பொருளைச் செங்குத்தாக மேல்நோக்கி (1, 0) என்ற புள்ளியில் இருந்து (1, 1) என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்துகின்றது. இறுதியாக அப்பொருள் (1, 1)–ல் உள்ளது. (படம் 8.7ஐ பார்க்க). எனவே இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதலானது (0, 0) மற்றும் (1, 1)–ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டாக (0, 0)–லிருந்து (1,1) என்ற திசையில் வரையறுக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது மேற்கூறிய சூழ்நிலையில் $\vec{a}$ –ன் எண்ணளவையை 1–க்குப் பதில் 2 எனக் கொள்க. (படம் 8.8–ஐ பார்க்க). படம் 8.9–ல் உள்ளபடி அப்பொருளானது x– அச்சுக்கு அருகில் நகரும் என எளிதில் கணிக்கலாம். மேலும் அப்பொருளானது (2,1) என்ற புள்ளிக்கு நகரும் என்பதையும் கணிக்கலாம். எனவே இந்த இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதலானது (0,0)–வையும் (2,1)–ஐயும் இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டினால் "(0,0)–விலிருந்து (2,1) என்ற திசையில் வரையறுக்கப்படுகின்றது".

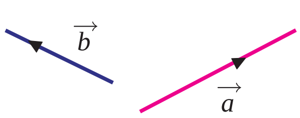


படம் 8.8

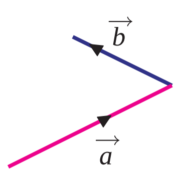


படம் 8.9

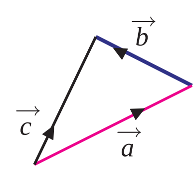
இந்த இரண்டு சூழ்நிலைகளிலும் விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தன. ஆனால் பொதுவாக விசைகள் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. இருந்தபோதிலும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகச் செயல்படும் விசைகளைக் கூட்ட இயலும். உதாரணமாக $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற விசைகளை படம் 8.10–ல் உள்ளது போன்று கருதுக.



படம் 8.10



படம் 8.11



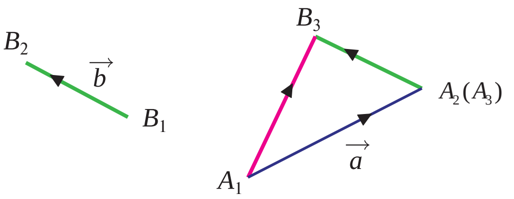
படம் 8.12

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 55 25-03-2019 13:23:16

$\vec{a}$-ன் இறுதிப்புள்ளியுடன் $\vec{b}$-ன் ஆரம்பப்புள்ளி அமையுமாறு (படம் 8.11) அமைக்க. இவற்றின் கூடுதலானது படம் 8.12-ல் உள்ளது போன்று கிடைக்கிறது. நாம் இப்பொழுது இரண்டு வெக்டர்களுக்கான கூடுதலின் வரையறையைக் காண்போம்.

வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோணவிதி (Triangle law of addition)

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன இரு வெக்டர்கள் என்க. A_1 மற்றும் B_1 என்பவை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$-ன் தொடக்கப்புள்ளிகள் எனவும், A_2 மற்றும் B_2 என்பவை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$-ன் முடிவுப்புள்ளிகள் எனவும் கொள்க.



படம் 8.13

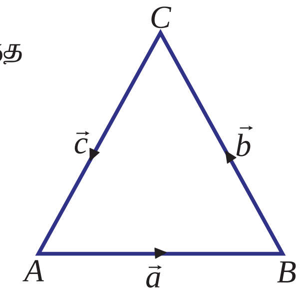
A_3B_3-ஐ B_1B_2-க்கு இணையாக $A_3B_3 = B_1B_2$ என்றவாறு வரைக. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$-ன் கூடுதலானது $\overrightarrow{A_1B_3}$ என்ற வெக்டரால் $\vec{a}+\vec{b}$ என குறிப்பிடப்படுகிறது. இதனைக் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கலாம்.

வரையறை 8.10 (வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதி)

இரு வெக்டர்கள் அவற்றின் எண்ணளவாலும் திசையாலும் ஒரு முக்கோணத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட இரண்டு பக்கங்களின் மூலமாகக் குறிப்பிட்டால், அவற்றின் கூடுதலை அம்முக்கோணத்தின் எதிர் வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட மூன்றாவது பக்கத்தினால் குறிக்கலாம்.

முடிவு 8.1

$\vec{a},\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை முக்கோணத்தின் வரிசையாக அமைந்த அடுத்தடுத்த பக்கங்களானால் $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ஆகும்.



படம் 8.14

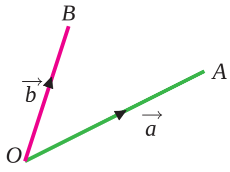
நிரூபணம்

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b},$ மற்றும் $\overrightarrow{CA}=\vec{c}$ என்க.

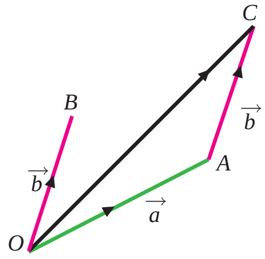
இப்பொழுது, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

வெக்டர் கூட்டலின் இணைகர விதி (Parallelogram law of vector addition)

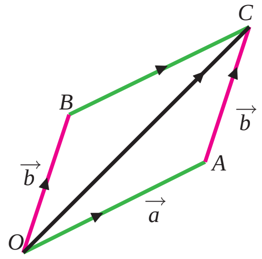
$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் என்க. இந்த இரு வெக்டர்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை (O) ஒன்றாகக்கொண்டு, வரையறை 8.7-ஐப் பயன்படுத்தி கூடுதலைக் காண்போம். A மற்றும் B ஆகியவை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றின் முடிவுப்புள்ளிகள் (படம் 8.15) என்க. $\vec{a}+\vec{b}$-ஐக் காண, AC-ஐ OB-க்கு இணையாக OB = AC என்றவாறு வரைக. இங்கு $\overrightarrow{OC}$ என்பது இவற்றின் கூடுதலாகும். (படம் 8.16). இங்கு OA மற்றும் BC ஆகியவை இணை என்பதைக் கவனிக்க (படம் 8.17).



படம் 8.15



படம் 8.16



படம் 8.17

எனவே ஒரே தொடக்கப் புள்ளிகளை உடைய இரு வெக்டர்களின் கூடுதலைக் காண இந்த வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்டு ஓர் இணைகரம் வரைந்து அதன் மூலைவிட்டத்தை அதன் கூடுதல் என்கிறோம். ஒரே தொடக்கப்புள்ளியைக் கொண்டில்லாத இரு வெக்டர்களை ஏதேனும் ஒரு வெக்டரைத் தகுந்தவாறு நகர்த்தி ஒரே தொடக்கப்புள்ளியினை உடைய வெக்டர்களாக மாற்றலாம். இதிலிருந்து கீழ்க்காணும் வரையறை 8.11–ஐ பெறலாம்.

O என்ற ஒரே தொடக்கப்புள்ளியை உடைய இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்க. இவற்றின் இறுதிப்புள்ளிகள் முறையே A மற்றும் B என்க.

$OACB$ என்ற இணைகரத்தை பூர்த்தி செய்க. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் கூடுதலானது $\overrightarrow{OC}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

வரையறை 8 .11 (கூட்டலின் இணைகர விதி)

$OABC$ என்ற இணைகரத்தில் $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவை அடுத்தடுத்த பக்கங்களைக் குறித்தால், அதன் மூலைவிட்டமான $\overrightarrow{OC}$, இவற்றின் கூடுதலைக் குறிக்கும் (படம் 8.17–ஐ பார்க்க).

வெக்டர் கூட்டலுக்கு இரண்டு வகையான வரையறைகள் இருந்தபோதிலும் அவை இரண்டும் ஒன்றே ஆகும். வரையறை 8.10 ஆனது வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதியையும் வரையறை 8.11 ஆனது வெக்டர் கூட்டலின் இணைகர விதியையும் கூறுகிறது.

முக்கோணம் ABC-ல் $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{BC}$ ஆகியவை இரண்டு பக்கங்களைக் குறித்தால், மூன்றாவது பக்கம் $\overrightarrow{AC}$ ஆனது அதன் கூடுதலைக் குறிக்கின்றது.

8.4.2 இரண்டு வெக்டர்களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் (Difference between two Vectors)

இப்பொழுது ஒரு வெக்டரிலிருந்து மற்றொரு வெக்டரை கழிக்கும் முறையைக் காண்போம்.

வரையறை 8.12

$\vec{a}$ ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் என்க. $\vec{a}$ –ன் எதிர்மறை வெக்டரை $-\vec{a}$ எனக் குறிப்போம். இது $\vec{a}$ –க்குச் சமமான எண்ணளவினையும் $\vec{a}$ –ன் திசைக்கு எதிர்த் திசையையும் கொண்ட வெக்டர் ஆகும்.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ எனில் $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ என்பதனை கவனத்தில் கொள்ளவும்.

வெக்டர்களின் வித்தியாசத்திற்கான வடிவக் கணித விளக்கம் (Geometrical interpretation of difference between two vectors)

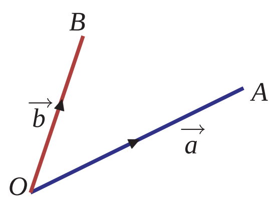
$\vec{a}$ என்ற வெக்டரின் ஆரம்பப் புள்ளி P மற்றும் முடிவுப்புள்ளி Q என்க. $\vec{b}$ என்ற வெக்டரின் ஆரம்பப்புள்ளி Q மற்றும் முடிவுப்புள்ளி P என்க. இந்த இரு வெக்டர்களின் எண்ணளவைகள் P மற்றும் Q என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நீளம் ஆகும். எனவே இவற்றின் எண் அளவைகள் சமம். ஆனால் இவற்றின் திசைகள் நேர் எதிரானவை. எனவே $\vec{b}$ –ஆனது $-\vec{a}$ –க்குச் சமம் ஆகும்.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a}-\vec{b}$ –ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $-\vec{b}$ –ன் கூடுதலாக $\vec{a}+(-\vec{b})$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

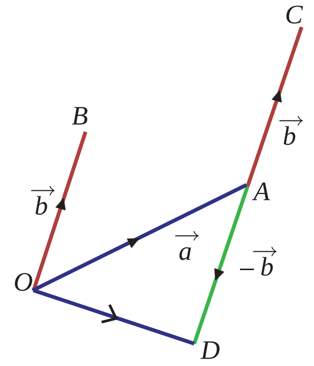
நாம் இதனை வடிவியலின் துணைகொண்டு பார்க்கலாம். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை முறையே $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவற்றைக் குறிக்கிறது என்க. (படம் 8.18). ACயை OBக்கு இணையாக $AC = OB$ எனுமாறு வரைக. இப்பொழுது $\overrightarrow{AC}$ என்பது $\vec{b}$ –க்குச் சமமாக இருக்கும். $CA = AD$ எனுமாறு CA

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 57 25-03-2019 13:23:24

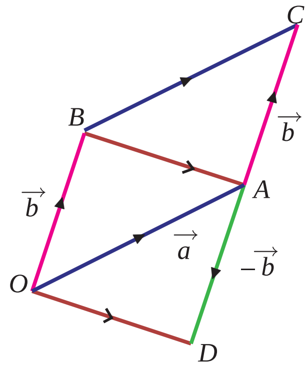
என்ற கோட்டை D வரை நீட்டுக. இப்பொழுது $\overrightarrow{AD}$ என்பது $-\vec{b}$ க்கு சமம் ஆகும்.
எனவே $\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{OD}$. ஆகவே $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OD}$ (படம் 8.19).



படம் 8.18



படம் 8.19



படம் 8.20

$OACB$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க. இதிலிருந்து BA மற்றும் OD ஆகியவை இணையாகவும் சமநீளத்திலும் உள்ளதை அறியலாம். எனவே $\overrightarrow{BA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OD}$ ஆகியவை சமவெக்டர்கள் ஆகும். எனவே $\overrightarrow{BA}$ ஐ நாம் $\vec{a}-\vec{b}$ ஆகக் கொள்ளலாம். இதிலிருந்து $OACB$ என்ற இணைகரத்தில் பக்கங்கள் $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவை முறையே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ வெக்டர்களைக் குறித்தால், மூலைவிட்டம் $\overrightarrow{BA}$ என்பது $\vec{a}-\vec{b}$ ஐ குறிக்கும். (படம் 8.20ஐ பார்க்க). நாம் ஏற்கனவே $\overrightarrow{OC}$ ஆனது $\vec{a}+\vec{b}$ ஐ குறிக்கும் என அறிந்துள்ளோம்.

ஆகவே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்களைக் குறித்தால் $\vec{a}+\vec{b}$ மற்றும் $\vec{a}-\vec{b}$ ஆகியவை மூலைவிட்டங்களைக் குறிக்கும்.

8.4.3 வெக்டரின் திசையிலிப் பெருக்கல் (Scalar multiplication of a vector)

நாம் இப்பொழுது ஒரு வெக்டரை ஒரு திசையிலியால் எவ்வாறு பெருக்குவது என்பதைக் காண்போம்.

$\vec{a}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வெக்டர், m ஒரு திசையிலி என்க. $m\vec{a}$ என்பது வெக்டர் $\vec{a}$ -யுடன் திசையிலி m–ன் திசையிலிப் பெருக்கம் என்கிறோம்.

m பூஜ்ஜியம் எனில், $m\vec{a}$ –ன் எண்ணளவு 0 ஆகும். எனவே $m\vec{a}$ என்பது பூஜ்ஜிய வெக்டர் ஆகும். m மிகை எண் எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $m\vec{a}$ ஆகியவை ஒரே திசையைக் குறிப்பதாகவும் m குறை எண் எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $m\vec{a}$ ஆகியவை எதிர் திசையைக் குறிப்பதாகவும் அமையும். ஆகவே m மிகை எண் எனில் $\vec{a}$ மற்றும் $m\vec{a}$ ஆகியவை ஒரே திசை வெக்டர்கள் ஆகவும், m குறை எண் எனில் $\vec{a}$ மற்றும் $m\vec{a}$ ஆகியவை எதிர் திசை வெக்டர்கள் ஆகவும் அமையும். $m\vec{a}$ –ன் எண்ணளவு $|m\vec{a}|=|m||\vec{a}|$ ஆகும்.

வரையறை 8.13

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் இணை எனில் ஏதேனும் ஒரு திசையிலி λ –க்கு $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ என அமையும். $\lambda>0$ எனில், அவை ஒரே திசையிலும், $\lambda<0$ எனில், அவை எதிர்த்திசையிலும் அமையும்.

8.4.4 சில பண்புகளும் முடிவுகளும் (Some Properties and results)

ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ திசையிலிகள் m, nக்கு

(i) $m(n\vec{a})=mn(\vec{a})=n(m\vec{a})$

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 58 25-03-2019 13:23:29

(ii) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

(iii) $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

முடிவு 8.2

வெக்டர் கூட்டல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.

ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ -க்கு

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) .$$

முடிவு 8.3

ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் $\vec{a}$ -க்கு $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$

முடிவு 8.4

எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{a}$ -க்கு $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a} = \vec{0}.$

இந்த முடிவிலிருந்து ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் கூட்டல் எதிர்மறை உள்ளது என்பதை அறியலாம்.

முடிவு 8.5

வெக்டர்களின் கூட்டல் பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யும்.

நிரூபணம்

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன இரு வெக்டர்கள் என்க. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ என்க.

$OACB$ என்ற இணைகரத்தை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்டு பூர்த்தி செய்க. $\overrightarrow{OB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$ ஆகியவை ஒரே எண்ணளவினையும் திசையையும் கொண்டுள்ளன.

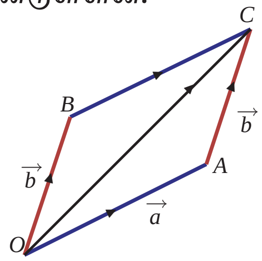
ஆகவே, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$.

எனவே, $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.

இதேபோன்று $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

$\vec{b}+\vec{a} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$.

ஆகவே $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$.



படம் 8.21

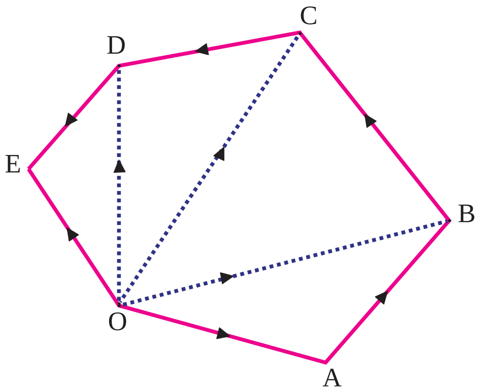
வெக்டர் கூட்டலின் பலகோண விதி (Polygon law of addition)

படம் 8.22-ல் $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ மற்றும் $\overrightarrow{DE}$ ஆகியவை ஏதேனும் 5 வெக்டர்கள் என்க. ஒவ்வொரு வெக்டரும் முந்தைய வெக்டரின் முடிவுப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்டுள்ளதைக் கவனத்தில் கொள்க. வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதிப்படி

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$

ஆகவே $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$.



படம் 8.22

எனவே அனைத்து வெக்டர்களின் கூடுதலானது முதல் வெக்டரின் தொடக்கப்புள்ளியைக் கடைசி வெக்டரின் முடிவுப்புள்ளியுடன் இணைக்கும் வெக்டராகும். இதனை வெக்டர் கூட்டலின் பலகோண விதி என்கிறோம்.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 59 25-03-2019 13:23:37

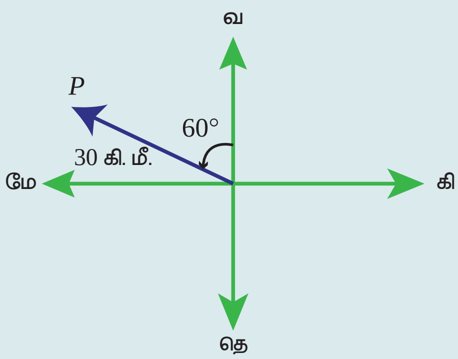
எடுத்துக்காட்டு 8.1

வரைபடத்தின் வாயிலாகக் கீழ்க்காணும் இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்க.

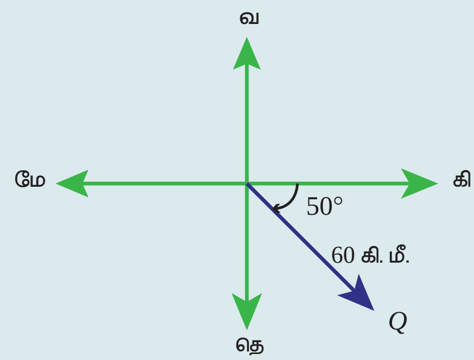
(i) 30 கி.மீ., 60° வடக்கிலிருந்து மேற்காக

(ii) 60 கி.மீ., 50° கிழக்கிலிருந்து தெற்காக

தீர்வு



படம் 8.23



படம் 8.24

எடுத்துக்காட்டு 8.2

ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் இரண்டு அடுத்தடுத்த பக்கங்கள் $\vec{a}$, $\vec{b}$ ஆக இருந்தால் பிற பக்கங்களைக் குறிக்கும் வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு

A,B,C,D,E,F ஆகியவை ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் என்க.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ என்க.

ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் கீழ்க்காணும் பண்புகளை பயன்படுத்தி பக்கங்களைக் காணலாம்.

(i) *AB, CF* மற்றும் *ED* ஆகியவை இணையானவை. மேலும், *BC, AD* மற்றும் *EF* ஆகியவையும் இணை ஆகும்.

(ii) *CF*–ன் நீளம் *AB*–ன் நீளத்தைப் போல் இரண்டு மடங்கு மற்றும் *AD*–ன் நீளம் *BC*–ன் நீளத்தைப் போல் இரண்டு மடங்கு ஆகும்.

AB மற்றும் *DE* ஆகியவை இணையானவை. நீளங்கள் சமமாகவும் திசை எதிர்த் திசையாகவும் உள்ளன.

ஆகவே, $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$.

AB மற்றும் *CF* ஆகியவை இணையாகவும் எதிர்த்திசையிலும் அமைவதால்

$$\overrightarrow{CF} = -2\vec{a}$$

இதே போன்று

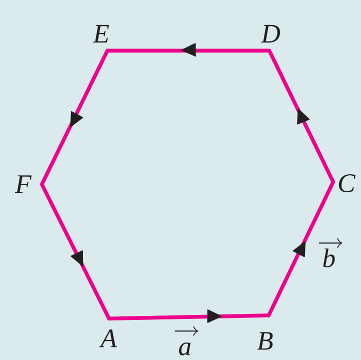
$$\overrightarrow{EF} = -\vec{b} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ஆகையால்

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} .$$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ஆகையால்

$$\vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{b} .$$



படம் 8.25

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 60 25-03-2019 13:23:40

எனவே $\overrightarrow{CD} = 2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}.$

$\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD}$ என்பதால்

$$\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}.$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட பக்கங்கள் $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ எனக்கொண்டு மற்ற பக்கங்களை $\overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{DE} = -\vec{a}, \overrightarrow{EF} = -\vec{b},$ மற்றும் $\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}$ எனப்பெறலாம்.

8.5 நிலை வெக்டர்கள் (Position vectors)

வரையறை 8.14

O வை ஆதியாகக் கொள்க. மற்றும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P-ஐ (தளத்திலோ அல்லது முப்பரிமாண வெளியிலோ) குறிக்கவும். இப்பொழுது $\overrightarrow{OP}$ –ஆனது O வைப் பொறுத்து P–ன் நிலைவெக்டர் என்று அழைக்கப்படுகின்றது.

வெக்டருக்கும் நிலை வெக்டர்களுக்கும் இடையேயான தொடர்பைக் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கலாம்.

முடிவு 8.6

O–வை ஆதி என்க. மேலும் A மற்றும் B–யை ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் என்க. இப்போது $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. இங்கு, $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவை A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்களாகும்.

நிரூபணம்

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ஆகும்.

தேற்றம் 8.1 (பிரிவு சூத்திரம்-உட்புறமாகப் பிரித்தல்) (Section Formula - Internal Division)

O–வை ஆதியாகவும். A மற்றும் B–யை ஏதேனும் இரு புள்ளிகளாகவும் கொள்க. மேலும் P என்ற புள்ளியானது AB என்ற கோட்டுத்துண்டை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது என்க. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்களாயின் P –ன் நிலை வெக்டர்

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{n+m}.$$

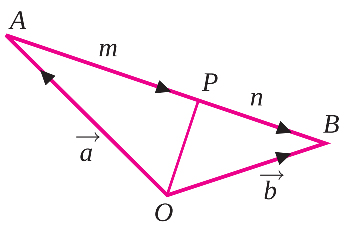
நிரூபணம்

O ஆதிப்புள்ளி மற்றும் A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பதால்,

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ஆகும்.

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ என்க.

AB என்ற கோட்டுத்துண்டை P ஆனது $m : n$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிப்பதால்



படம் 8.26

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{m}{n}$$

எனவே, $n|\overrightarrow{AP}| = m|\overrightarrow{PB}|.$

$\overrightarrow{AP}$ மற்றும் $\overrightarrow{PB}$ ஆகியவை ஒரே திசையில் இருப்பதால்,

$$n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}. \qquad (8.1)$$

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 61 25-03-2019 13:23:48

ஆனால் $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{r}-\vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=\vec{b}-\vec{r}$

சமன்பாடு (8.1)–ல் பிரதியிட,

$$n(\vec{r}-\vec{a}) = m(\vec{b}-\vec{r})$$

$$(n+m)\vec{r} = n\vec{a}+m\vec{b}.$$

எனவே $$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{n+m}.$$

தேற்றம் 8.2 பிரிவு சூத்திரம்-வெளிப்புறமாகப் பிரித்தல் (நிரூபணமின்றி)
(Section Formula - External Division)

O–வை ஆதியாகவும், A மற்றும் B–யை ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளாகவும் கொள்க. P என்ற புள்ளியானது AB என்ற கோட்டுத்துண்டை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் வெளிப்புறமாக பிரிக்கிறது என்க. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்கள் எனில், P–ன் நிலை வெக்டர்

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{n-m}.$$

குறிப்பு 8.1

$m=n=1$எனத் தேற்றம் 8.1–ல் பிரதியிட A மற்றும் B–யை இணைக்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ ஆகும். இங்கு $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்களாகும். மேற்கண்ட தேற்றத்திலிருந்து மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் இருப்பதற்கான கட்டுப்பாட்டைப் பெறலாம்.

முடிவு 8.7

$\vec{a}$, $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவற்றை நிலை வெக்டர்களாக கொண்ட புள்ளிகள் A, B மற்றும் C ஒரே கோட்டில் அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை x,y,z, என்ற மெய்யெண்கள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமில்லாமல் $x+y+z=0$ மற்றும் $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ என்றவாறு அமைய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.3

A மற்றும் B என்ற இரு புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $2\vec{a}+4\vec{b}$ மற்றும் $2\vec{a}-8\vec{b}$ என்க. A மற்றும் B–யை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டினை $1 : 3$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு

O–வை ஆதியாகக் கொள்க.

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{a}+4\vec{b}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-8\vec{b}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

C மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் AB என்ற கோட்டுத்துண்டை $1 : 3$ என்ற விகிதத்தில் முறையே உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கின்றது என்க.

எனவே, $$\overrightarrow{OC} = \frac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3+1} = \frac{3(2\vec{a}+4\vec{b})+(2\vec{a}-8\vec{b})}{4} = 2\vec{a}+\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{3-1} = \frac{3(2\vec{a}+4\vec{b})-(2\vec{a}-8\vec{b})}{2} = 2\vec{a}+10\vec{b}.$$

ஒரு முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சிப்புள்ளியில் இருந்து அதன் எதிர்ப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியை இணைக்கும் கோடு நடுக்கோடு என்பதை நாம் நினைவு கூர்வோம். மையக்கோட்டுச்சந்தி நடுக்கோட்டினை $2:1$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும்.

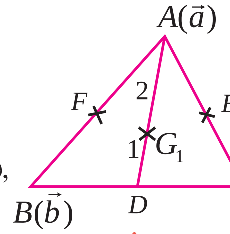
தேற்றம் 8.3

ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

நிரூபணம்

ABC என்ற முக்கோணத்தில் BC, CA மற்றும் AB ஆகிய பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F என்க. நாம் AD, BE, CF ஆகிய நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவ வேண்டும்.

O–வை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்டு A, B, C என்ற முனைப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்க.



படம் 8.27

D, E, F –ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

AD–யை G_1 ஆனது உட்புறமாக $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில்,

$$G_1 \text{–ன் நிலை வெக்டர்} = \frac{2\overrightarrow{OD}+1\overrightarrow{OA}}{2+1}$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{2\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)+1\vec{a}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \qquad \ldots(1)$$

BE-யை G_2 –ஆனது உட்புறமாக $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில்,

$$G_2 \text{–ன் நிலை வெக்டர்} = \frac{2\overrightarrow{OE}+1\overrightarrow{OB}}{2+1}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{2\left(\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)+1.\vec{b}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \qquad \ldots(2)$$

இதைப்போலவே CF–யை G_3 ஆனது உட்புறமாக $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில்,

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \qquad \ldots(3)$$

(1), (2), (3)–லிருந்து G_1, G_2, G_3 ஆகியவற்றின் நிலை வெக்டர்கள் சமம். எனவே அவை வெவ்வேறான புள்ளிகள் இல்லை. அந்த பொதுப்புள்ளியை G என்க.

முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியின்வழிச் சந்திக்கின்றன.

தேற்றம் 8.4

ஒரு நாற்கரம் இணைகரமாக இருக்கத் தேவையானது மற்றும் போதுமான நிபந்தனை அதன் மூலைவிட்டங்கள் இருசமக் கூறிடும் என்பதாகும்.

நிரூபணம்

AC, BD ஆகியவற்றை மூலைவிட்டங்களாக கொண்ட நாற்கரத்தின் முனைப்புள்ளிகள் A, B, C, D என்க. O–வை ஆதியாகக் கொண்டு A, B, C மற்றும் D–ன் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ மற்றும் $\vec{d}$ என்க.

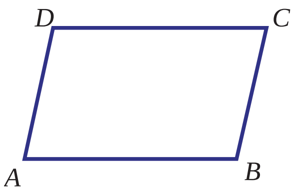
02_8 Vector Algebra Tamil.indd 63 25-03-2019 13:24:00

நாற்கரம் ABCD ஓர் இணைகரம் எனக் கொள்க.

இப்பொழுது

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\Rightarrow \vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}\Rightarrow \vec{b}+\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}$

மேலும் $\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}.$



படம் 8.28

இதிலிருந்து AC மற்றும் BD ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் ஒன்றே ஆகும். அதாவது, மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக்கூறிடுகின்றன.

மறுதலையாக, நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக்கூறிடுகின்றன எனக் கொண்டால், மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் சமம் ஆகும்.

எனவே, $\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\Rightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}\Rightarrow \vec{c}-\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}$

இதிலிருந்து $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ மேலும் $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ என நிறுவலாம். இதிலிருந்து AB மற்றும் DC ஆகியவை இணை எனலாம். $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$ என்பதிலிருந்து $\vec{a}-\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}$ என்பதால் AD மற்றும் BC ஆகியவை இணை எனலாம். எனவே, ABCD ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

பயிற்சி 8.1

(1) கீழ்க்காணும் இடப்பெயர்ச்சிகளை வரைபடம் மூலம் விவரிக்க.

(i) 45 செ.மீ., 30° கிழக்கிலிருந்து வடக்காக (ii) 80 கி.மீ., 60° மேற்கிலிருந்து தெற்காக

(2) தொடர்பு R ஆனது V என்ற வெக்டர்களின் கணத்தின் மீது "$\vec{a}$ R $\vec{b}$ என்பது $\vec{a}=\vec{b}$" என வறையறுக்கப்பட்டால் அது V-ன் மீது ஒரு சமானத் தொடர்பு என நிறுவுக.

(3) A மற்றும் B ஆகியவை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் நிலைவெக்டர்கள் எனில் AB என்ற கோட்டுத்துண்டை மூன்று சம பாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ மற்றும் $\dfrac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$ என நிறுவுக.

(4) முக்கோணம் ABC-ல் AB மற்றும் AC–ன் மையப்புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E எனில் $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ என நிறுவுக.

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு அதன் மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை எனவும், அதன் நீளத்தில் பாதி எனவும் வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

(6) ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடுகள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

(7) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை இணைகரத்தின் ஒரு பக்கத்தையும் ஒரு மூலைவிட்டத்தையும் குறித்தால் அதன் பிற பக்கங்களையும் மற்றொரு மூலைவிட்டத்தினையும் காண்க.

(8) $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}$ எனில், P, Q, R ஆகியவை ஒரே கோடமைபுள்ளிகள் என நிறுவுக.

(9) முக்கோணம் ABC–ல் பக்கம் BC–ன் மையப்புள்ளி D எனில், $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$ என நிறுவுக.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 64 25-03-2019 13:24:03

(10) ABC என்ற முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டுச் சந்தி G எனில், $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ என நிறுவுக.

(11) A, B, C ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் மற்றும் D,E,F என்பவை BC, CA, AB ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகள் எனில், $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ என நிறுவுக,

(12) $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் AC, BD-ன் நடுப்புள்ளிகள் E மற்றும் F ஆக இருப்பின் $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{EF}$ என நிறுவுக.

8.6 வெக்டரைக் கூறுகளாகப் பிரித்தல் (Resolution of Vectors)

ஒரு வெக்டரைக் கூறுகளாக எந்தவொரு முடிவுள்ள பரிமாணத்திலும் பிரிக்கலாம். ஆனால் நாம் இரண்டு மற்றும் மூன்று பரிமாணங்களில் கூறுகளாக பிரிப்பதைக் காணலாம்.

நாம் இப்பொழுது இரு பரிமாணத்தில் இருந்து தொடங்குவோம்.

8.6.1 இரு பரிமாணத்தில் ஒரு வெக்டரின் கூறுகள் (Resolution of a vector in two dimension)

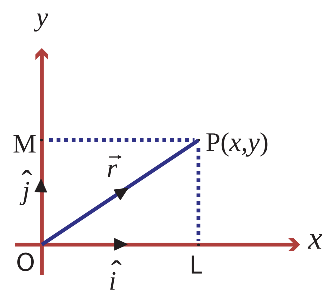
$\hat{i}$ மற்றும் $\hat{j}$ என்பவை முறையே x, y அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் O–வை ஆரம்பப்புள்ளியாகக் கொண்ட ஓரலகு வெக்டர்கள் என்க. தளத்தில் P என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\overrightarrow{OP}$ எனில் அதனை

x, y என்கிற ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்த மெய்யெண்களுக்கு $\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$ என எழுதலாம். மேலும் $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

நிரூபணம்

P என்ற புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x, y) என்க. L, M ஆகியவை Pயிலிருந்து x, y-அச்சுகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகளின் அடிப்புள்ளிகள் என்க. எனவே, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}$.

$\hat{i}$ மற்றும் $\hat{j}$ ஆகியவை அலகு வெக்டர்கள் ஆதலால், $\overrightarrow{OL}=x\hat{i}$ மற்றும் $\overrightarrow{OM}=y\hat{j}$ ஆகும்.



படம் 8.29

எனவே, $\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$

$$\overrightarrow{OP}=\vec{r} \text{ எனில் } \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j} \text{ ஆகும்.}$$

ஒருமைத்தன்மையை நிறுவ $x_1\hat{i}+y_1\hat{j}$ மற்றும் $x_2\hat{i}+y_2\hat{j}$ ஆகியவை ஒரே புள்ளி Pயை குறிப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே,

$$x_1\hat{i}+y_1\hat{j} = x_2\hat{i}+y_2\hat{j}.$$

இதிலிருந்து $(x_1-x_2)\hat{i}-(y_2-y_1)\hat{j} = \vec{0} \Rightarrow x_1-x_2=0, y_2-y_1=0$

அதாவது, $x_1=x_2$ மற்றும் $y_1=y_2$. இதிலிருந்து ஒருமைத்தன்மையை அறியலாம்.

முக்கோணம் OLPல் $OP^2=OL^2+LP^2$; ஆகவே $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

அதாவது $|\vec{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2}$. ■

$\hat{i}$ மற்றும் $\hat{j}$ ஆகியவை x மற்றும் y அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் அலகு வெக்டர்கள் எனில், (6,4) என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டரை $6\hat{i}+4\hat{j}$ என ஒரே ஒரு வழியில் மட்டுமே எழுத முடியும்.

முடிவு 8.8

ஒரு தளத்தில் $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை ஒரே கோட்டில் அமையாத இரு வெக்டர்கள் எனில், அந்தத் தளத்தில் உள்ள எந்தவொரு வெக்டரையும் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக ஒரே ஒரு வழியில் எழுத முடியும். அதாவது அத்தளத்தில் உள்ள எந்த ஒரு வெக்டரையும் $l\vec{a}+m\vec{b}$ என எழுதலாம். இங்கு l மற்றும் m திசையிலிகள் ஆகும்.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 65 25-03-2019 13:24:08

நிரூபணம்

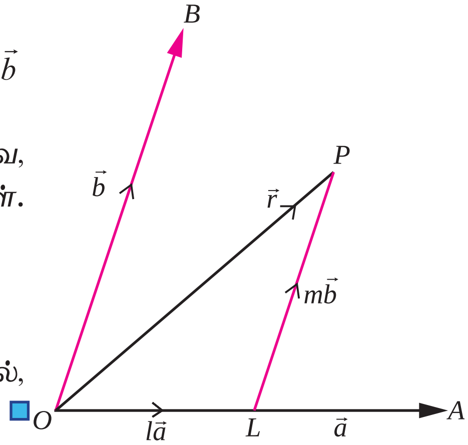
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ என்க. $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ என்க. மற்றும் $\vec{r}$ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ அமைந்த தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் என்க.

OBக்கு இணையாக PL–ஐ வரைக. எனவே, $\overrightarrow{LP} = m\vec{b}$ மற்றும் $\overrightarrow{OL} = l\vec{a}$ ஆகும். இங்கு l மற்றும் m திசையிலிகள்.

இப்போது $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP}$.

அதாவது, $\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b}$.

ஆகவே, $\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை ஒரு தள அமை வெக்டர்கள் எனில், $\vec{r}$ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ன் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்



படம் 8.30

குறிப்பு 8.2

ஏதேனும் மூன்று ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையாத வெக்டர்கள் ஒரு தள அமை வெக்டர்கள் எனில் இதில் எந்த ஒரு வெக்டரையும் மற்ற இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக ஒரே வழியில் எழுதலாம். மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

முடிவு 8.9

$\vec{a}, \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை ஒரே தளத்தில் அமையாத வெளியில் அமைந்த ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில், வெளியில் அமைந்த எந்த ஒரு வெக்டரையும் $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ என எழுதலாம். இங்கு l, m மற்றும் n ஆகியவை திசையிலிகளாகும்.

வரையறை 8.15

$\hat{i}$ மற்றும் $\hat{j}$ முறையே x மற்றும் y அச்சின் மிகைத் திசையில் அமைந்த அலகு வெக்டர்கள் என்க. $\vec{r}$ என்பது இத்தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் எனில், $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ஆகும். இங்கு x மற்றும் y மெய்யெண்கள். இங்கு $x\hat{i}$ மற்றும் $y\hat{j}$ ஆகியவை முறையே x மற்றும் y அச்சின் திசையில் $\vec{r}$ –ன் இருபரிமாணக் கூறுகள் ஆகும்.

நாம் இதுவரை இரு பரிமாணத்தில் விவாதித்த கூறுகளை முப்பரிமாண வெளிக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

8.6.2 முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வெக்டரின் கூறுகள்
(Resolution of a vector in three dimension)

தேற்றம் 8.6

$\hat{i}, \hat{j}$ மற்றும் $\hat{k}$ ஆகியவை முறையே x, y மற்றும் z அச்சின் மிகை திசையில் O–வை ஆதியாகக் கொண்ட அலகு வெக்டர்கள் என்க. வெளியில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. P–ன் நிலைவெக்டர் $\overrightarrow{OP}$ –ஐ ஒரே ஒரு வழியில் $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என எழுதலாம்.

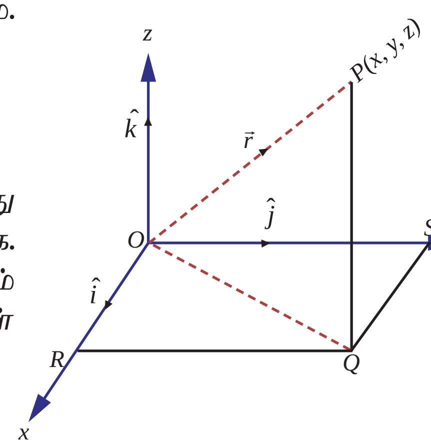
இங்கு, x, y, z மெய்யெண்கள். மேலும், $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

நிரூபணம்

P–ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y, z) என்க. P–லிருந்து xy-தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிப்புள்ளி Q என்க. R மற்றும் S ஆகியவை Qவிலிருந்து முறையே x மற்றும் y–அச்சுகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிப்புள்ளிகள் என்க. $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ என்க.

அப்பொழுது $OR = x$, $OS = y$, $QP = z$.

எனவே, $\overrightarrow{OR} = x\hat{i}$, $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$, மற்றும் $\overrightarrow{QP} = z\hat{k}$



படம் 8.31

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 66
25-03-2019 13:24:12

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\hat{k}$$

அதாவது $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ஆகும்.

இதுவே O–வைப் பொறுத்த முப்பரிமாண வெளியில் P–ன் நிலை வெக்டர் ஆகும்.

முக்கோணம் ORQ–ல்

$$OQ^2 = OR^2 + RQ^2 \text{ (எவ்வாறு?)}$$

மற்றும் முக்கோணம் OQP–ல்

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2.$$

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

மேலும் $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, அதாவது $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் வெக்டரின் கூறுகள்
(Components of vector joining two points)

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் கூறுகளைக் காண்போம்.

A மற்றும் B என்ற புள்ளிகள் (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்க. P என்ற புள்ளியை $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ஆகக் கொள்க. இப்பொழுது $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ ஆகும். $\overrightarrow{OP}$ –ன் கூறுகள் $(x_2 - x_1)\hat{i}$ மற்றும் $(y_2 - y_1)\hat{j}$ ஆகும். எனவே, x மற்றும் y அச்சுகளின் திசையில் $\overrightarrow{AB}$ –ன் கூறுகள் $(x_2 - x_1)\hat{i}$ மற்றும் $(y_2 - y_1)\hat{j}$ ஆகும்.

இதே போன்று (x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2) ஆகியவை A மற்றும் B எனில், $\overrightarrow{AB}$ –ன் கூறுகள் x, y மற்றும் z அச்சுகளின் திசையில் $(x_2 - x_1)\hat{i}$, $(y_2 - y_1)\hat{j}$ மற்றும் $(z_2 - z_1)\hat{k}$ ஆகும்.

8.6.3 ஒரு வெக்டரின் அணி வடிவம் (Matrix representation of a vector)

மூன்று கூறுகளைக் கொண்ட வெக்டரை ஒரு நிரை அணியாகவோ அல்லது நிரல் அணியாகவோ முறையே $[x, y, z]$ அல்லது $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ என எழுதலாம்.

ஆகவே எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ –ஐயையும் $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = \vec{A}$ எனப் பெறலாம்.

எனவே வெக்டர்களின் கூட்டல் மற்றும் திசையிலிப் பெருக்கல் ஆகியவை கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ எனில், $\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$

அதாவது, $\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$,

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 67 25-03-2019 13:24:18

மேலும், $k\vec{A} = k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$

அதாவது, $k\vec{A} = ka_1\hat{i} + ka_2\hat{j} + ka_3\hat{k}$

$k \in \mathbb{R}$க்கு $k > 1$ எனில், நீட்சியும், $0 < k < 1$ எனில், குறுக்கமும், மேலும் $k = 0$ எனில், $O\vec{A} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$ என பூஜ்ஜிய வெக்டரும் கிடைக்கும்.

முடிவு 8.10

வெக்டர் கூட்டலின் பரிமாற்று மற்றும் சேர்ப்புப் பண்புகள், மற்றும் திசையிலி பெருக்கத்தின் பங்கீட்டு விதி ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவலாம்.

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ மற்றும் m ஒரு திசையிலி என்க.

(i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}.$

(ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}.$

(iii) $m\vec{a} = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j} + ma_3\hat{k}.$

(iv) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3.$

எடுத்துக்காட்டு 8.4

$5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ –ன் திசையில் உள்ள ஓர் ஓரலகு வெக்டரைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a}$ –ன் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டர் $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ஆகும். எனவே, $5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ –ன் திசையில்

ஓரலகு வெக்டர் $\dfrac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{|5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}|} = \dfrac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}} = \dfrac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$

குறிப்பு 8.3

$5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ க்கு எதிர் திசையில் மேலும் ஓரலகு வெக்டர் $-\dfrac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$ உள்ளது.

8.7 திசைக் கொசைன்கள் மற்றும் திசை விகிதங்கள் (Direction Cosines and Direction Ratios)

ஆதியில் இருந்து r தொலைவு தூரத்தில் உள்ள புள்ளி P–ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y, z) என்க. P–யிலிருந்து x, y மற்றும் z அச்சுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துகளின் அடிப்புள்ளிகள் முறையே R, S மற்றும் T என்க.

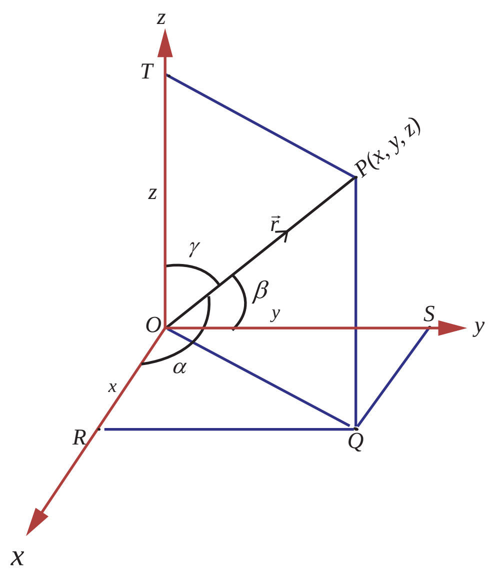
$$\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90°.$$

$$OR = x,\ OS = y,\ OT = z \text{ and } OP = r.$$

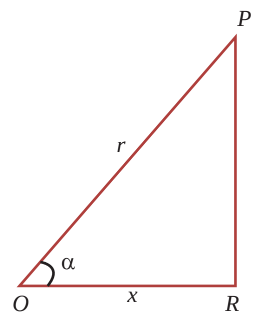
(படத்தைப் பார்த்து, $\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90°$ எனக் காட்சிப்படுத்துவது சற்றே சிரமம்

ஆகும். ஏன் எனில் இவை அச்சுகளில் இருந்து P–க்கு வரையப்படும் செங்குத்துகள். முப்பரிமாண மாதிரியில் இதனை எளிதில் கண்டுணரலாம்)

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 68 25-03-2019 13:24:21



படம் 8.32



படம் 8.33

$\overrightarrow{OP}$ ஆனது x, y மற்றும் z அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் α, β, γ எனில்,

$$\angle POR = \alpha, \quad \angle POS = \beta \text{ மற்றும் } \angle POT = \gamma.$$

ΔOPR ல் $\angle PRO = 90°, \angle POR = \alpha, OR = x$ மற்றும் $OP = r$.

$$\text{எனவே, } \cos\alpha = \frac{OR}{OP} = \frac{x}{r}.$$

இதுபோலவே நாம் $\cos\beta = \frac{y}{r}$, $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ என காணலாம்.

இங்கு $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$-ன் **திசைக் கோணங்கள்** α, β, γ எனவும், $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ –ன் திசைக் கொசைன்கள் $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என்ற வெக்டரின் **திசைக்கொசைன்கள்** $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, இங்கு $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

திசைக்கொசைன்களுடன் விகித சமத்தில் உள்ள எந்த மூன்று எண்களையும் அந்த வெக்டரின் திசை விகிதங்கள் என்கிறோம். எனவே ஒரு வெக்டரின் திசை விகிதங்கள் ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது அல்ல. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டருக்கு எண்ணிலடங்காத் திசைவிகிதங்கள் இருக்கும்.

உற்று நோக்கல்

(i) கொடுக்கப்பட்ட பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டருக்கு திசை விகிதங்கள் மற்றும் திசைக் கொசைன்களைக் காணலாம்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட திசை விகிதங்களைக் கொண்டு நம்மால் அந்த வெக்டரை நிர்ணயிக்க இயலாது.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட திசைக் கொசைன்களைக் கொண்டு நம்மால் அந்த வெக்டரைக் கண்டறிய இயலாது.

(iv) கொடுக்கப்பட்ட வெக்டருக்கு திசைக்கொசைன்களின் தொகுப்பு திசை விகிதங்களின் ஒரு தொகுப்பாக அமையும்.

(v) ஒரு வெக்டரைக் கண்டறிய, அதன் எண்ணளவு மற்றும் திசைக் கொசைன்களோ அல்லது திசை விகிதங்களோ அவசியமாகும்.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 69 25-03-2019 13:24:25

குறிப்பு 8.4

$\overrightarrow{OP}$ எனும் ஒரு வெக்டரை கருதுக. இதன் தொடக்கப் புள்ளி ஆதி ஆகும். ஒரு வெக்டருக்கு தொடக்கப்புள்ளி ஆதி இல்லை எனில் ஆதியை தொடக்கப்புள்ளியாகக் கொண்டு அதே எண்ணளவிற்கு அந்த வெக்டருக்கு இணையாக வரைக. சம வெக்டர்களுக்கான கோட்பாட்டிலிருந்து இவை இரண்டிற்கும் ஒரே திசை கொசைன்கள் இருக்கும். இவ்வாறாக நாம் எந்த ஒரு வெக்டரின் திசை கொசைனையும் காணலாம்.

முடிவு 8.11

ஒரு புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என்க. மேலும் $\vec{r}$ –ன் திசை கோணங்கள் α, β, γ எனில்,

(i) $\vec{r}$ –ன் திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 1 ஆகும்.

(ii) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

(iii) $\vec{r}$ –ன் திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(iv) l, m, n ஆகியவை ஒரு வெக்டரின் திசைக் கொசைன்கள் எனில், $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. இதன் மறுதலையும் உண்மை.

(v) எந்த ஒரு அலகு வெக்டரையும் நாம் $\cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$ என எழுதலாம்.

நிரூபணம்

(i) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} + \dfrac{z^2}{r^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2} = 1$

(ii), (iii), (iv), மற்றும் (v)–ன் நிரூபணங்கள் பயிற்சிக்காக விடப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 8.5

கீழ்க்காணும் வெக்டர்களுக்குத் திசை விகிதங்கள் மற்றும் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(i) $3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$, (ii) $3\hat{i} - 4\hat{k}$.

தீர்வு

(i) $3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ –ன் திசை விகிதங்கள் 3, 4, – 6.

திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r}$. இங்கு $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

எனவே திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{3}{\sqrt{61}}, \dfrac{4}{\sqrt{61}}, \dfrac{-6}{\sqrt{61}}$ ஆகும்,.

(ii) $3\hat{i} - 4\hat{k}$ –ன் திசை விகிதங்கள் 3, 0, – 4.

திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{3}{5}, 0, \dfrac{-4}{5}$.

எடுத்துக்காட்டு 8.6

(i) 2, 3, – 6 என திசை விகிதங்களைக் கொண்ட வெக்டரின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(ii) $30°, 45°, 60°$ ஆகியவை ஒரு வெக்டருக்கு திசைக் கோணங்களாகுமா?

(iii) A (2, 3, 1) மற்றும் B (3, – 1, 2) எனில், $\overrightarrow{AB}$ –ன் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(iv) (2, 3, 1) மற்றும் (3, – 1, 2)–ஐ இணைக்கும் கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(v) 2, 3, 6–ஐ திசை விகிதங்களாகவும் எண்ணளவு 5–ம் உடைய வெக்டரைக் காண்க.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 70 25-03-2019 13:24:28

தீர்வு

(i) திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

அதாவது $\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{-6}{7}$.

(ii) தேவையான நிபந்தனை $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

இங்கு $\alpha = 30°, \beta = 45°, \gamma = 60°$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \neq 1$.

எனவே, இவை எந்த வெக்டருக்கும் திசைக் கொசைன்களாகாது.

(iii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{1}{\sqrt{18}}, \dfrac{-4}{\sqrt{18}}, \dfrac{1}{\sqrt{18}}$

(iv) A மற்றும் B என்ற புள்ளிகள் (2, 3, 1) மற்றும் (3, – 1, 2) என்க. $\overrightarrow{AB}$ –ன் திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{1}{\sqrt{18}}, \dfrac{-4}{\sqrt{18}}, \dfrac{1}{\sqrt{18}}$.

இருப்பினும், எந்த புள்ளியையும் முதல் புள்ளியாக எடுத்துக் கொள்ளலாம், எனவே இதற்கு எதிர்த் திசையிலும் திசை விகிதங்களை காணலாம். ஆகவே, நமக்கு $\dfrac{-1}{\sqrt{18}}, \dfrac{4}{\sqrt{18}}, \dfrac{-1}{\sqrt{18}}$ என மற்றொரு தொகுப்பு திசைக் கொசைன்களாக கிடைக்கிறது.

(v) திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{6}{7}$.

அலகு வெக்டர் $\dfrac{2}{7}\hat{i} + \dfrac{3}{7}\hat{j} + \dfrac{6}{7}\hat{k}$

தேவையான வெக்டர் $\dfrac{5}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$.

எடுத்துக்காட்டு 8.7

$2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k},\ 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ ஆகியவற்றை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலமையும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

O–வை ஆதிப்புள்ளி என்க. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ மற்றும் $\overrightarrow{OC}$ என்பன முறையே $2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k},\ 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ என்க. எனவே,

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{AC} = 4\hat{i} - 8\hat{j} + 12\hat{k}.$$

எனவே $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$. ஆகவே $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$ ஆகியவை இணையாகும். இவற்றிற்கு A என்ற பொதுப்புள்ளி உள்ளது, எனவே, இந்த மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும்.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 71 25-03-2019 13:24:32

மாற்று முறை

O-ஐ ஆதியாகக் கொள்க.

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}, \overrightarrow{OB} = 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{OC} = 6\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}\ ;\ \overrightarrow{BC} = 3\hat{i}-6\hat{j}+9\hat{k} \quad \overrightarrow{CA} = 4\hat{i}+8\hat{j}-12\hat{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{14}\ ;\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}\ ;\ \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}.$$

எனவே, $AC = AB + BC$.

ஆகவே, A, B, C ஆகியவை ஒரே கோட்டின் மீது அமையும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே கோடமைப் புள்ளிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.8

எண்ணளவை 5-ம் $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ -க்கு இணையாகவும் உள்ள வெக்டரை நிலை வெக்டராக கொண்ட புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a}$ -ஐ $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ எனக் கொள்க.

$\vec{a}$ -ன் திசையில் அலகு வெக்டர் $\hat{a}$ ஆனது $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ க்குச் சமம். அதாவது $\frac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}$ க்குச் சமம். எண்ணளவை 5-ம், $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ க்கு இணையாகவும் உள்ள வெக்டர் $5\left(\frac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}\right) = \frac{4\hat{i}}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}\hat{j} + 2\sqrt{5}\,\hat{k}$. எனவே, தேவையான புள்ளி $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5}\right)$.

எடுத்துக்காட்டு 8.9

$2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$, $4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$, $10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு

O-ஐ ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்டு A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$, $4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$, $10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ என்க.

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k},\ \overrightarrow{OB} = 4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{OC} = 10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = (4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k})-(2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}) = 2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}.$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{4+9+36} = 7$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB} = (10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})-(4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}) = 6\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{36+4+9} = 7$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC} = (2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})-(10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}) = -8\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-8)^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{64+25+9} = \sqrt{98}$$

$$BC^2 = 49,\ CA^2 = 98,\ AB^2 = 49.$$

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 72 25-03-2019 13:24:36

அதாவது $CA^2 = BC^2 + AB^2$.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தினை அமைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.10

$5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k},\ 7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k},\ 3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனக்காட்டுக.

தீர்வு

$5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k} = s(7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k})+t(3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k})$ என்க.

கூறுகளைச் சமப்படுத்த,

$$7s + 3t = 5$$
$$-8s + 20t = 6$$
$$9s + 5t = 7$$

முதல் இரு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க, $s = t = \frac{1}{2}$ எனப் பெறலாம். இவை மூன்றாவது சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

ஆகவே, ஒரு வெக்டரை மற்ற இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக எழுதலாம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு தளஅமை வெக்டர்களாகும்.

பயிற்சி 8.2

(1) கீழ்க்காணும் விகிதங்களை திசைக் கொசைன்களாக கொண்டு ஒரு வெக்டர் அமையுமா என சரிபார்க்க.

(i) $\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{4}{3},0,\frac{3}{4}$

(2) கொடுக்கப்பட்ட திசை விகிதங்களைக் கொண்ட ஒரு வெக்டரின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(i) 1 , 2 , 3 (ii) 3 , – 1 , 3 (iii) 0 , 0 , 7

(3) கீழ்க்காணும் வெக்டர்களுக்குத் திசைக் கொசைன்கள், மற்றும் திசை விகிதங்களைக் காண்க.

(i) $3\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$ (ii) $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ (iii) $\hat{j}$

(iv) $5\hat{i}-3\hat{j}-48\hat{k}$ (v) $3\hat{i}-3\hat{k}+4\hat{j}$ (vi) $\hat{i}-\hat{k}$

(4) புள்ளிகள் (1, 0, 0), (0, 1, 0) மற்றும் (0, 0, 1) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(5) $\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},a$ ஆகியவை ஒரு வெக்டரின் திசைக்கொசைன்களாயின் a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(6) $(a , a + b , a + b + c)$ என்பது (1, 0, 0) மற்றும் (0, 1, 0) ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் எனில், a, b, c -ஐக் காண்க.

(7) $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k},\ 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k},\ \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

(8) $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+9\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b}=\hat{i}+\lambda\hat{j}+3\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் இணை எனில், λ-ன் மதிப்பைக் காண்க.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 73 25-03-2019 13:24:38

(9) கீழ்க்காணும் வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனக் காட்டுக.

(i) $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k},\ -2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k},\ -\hat{j}+2\hat{k}$ (ii) $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k},\ \hat{i}-\hat{j},\ 7\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$.

(10) $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k},\ -\hat{j}-\hat{k},\ 3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $-4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$ ஆகியவற்றை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு தளஅமைவன எனக்காட்டுக.

(11) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k},\ \vec{c}=-3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ எனில் கீழ்க்காணும் வெக்டர்களின் எண்ணளவையும் திசைக் கொசைன்களையும் காண்க. (i) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (ii) $3\vec{a}-2\vec{b}+5\vec{c}$.

(12) $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\ 3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ மற்றும் $-2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் எனில், அந்த முக்கோணத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

(13) $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k},\ \vec{b}=-2\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ எனில், $3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான அலகு வெக்டரைக் காண்க.

(14) மூன்று புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ஆகியவை $2\vec{a}-7\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்தால் அப்புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையுமா எனக் கூறுக.

(15) P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}), (2\hat{i}+5\hat{j}), (3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$ மற்றும் $(\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k})$ எனில் PQ மற்றும் RS ஆகியவை இணை எனக்காட்டுக.

(16) $m(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ஓர் அலகு வெக்டராயின் m-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(17) A (1, 1, 1), B(1, 2, 3) மற்றும் C(2, − 1, 1) ஆகிய புள்ளிகள்ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் என நிறுவுக.

8.8 வெக்டர்களின் பெருக்கம் (Product of vectors)

நாம் இதுவரையிலும் இரு வெக்டர்களின் கூட்டல், ஒரு வெக்டரை மற்றொரு வெக்டரில் இருந்து கழித்தல் மற்றும் ஒரு வெக்டரை ஒரு திசையிலியால் பெருக்குதல் போன்றவற்றை பார்த்துள்ளோம். நாம் இப்பொழுது இரண்டு வெக்டர்களின் பெருக்கலைப் பற்றிப் பார்க்கலாம். வெக்டர்களைப் பெருக்க இரு வழிகள் உள்ளன.

JX4APB

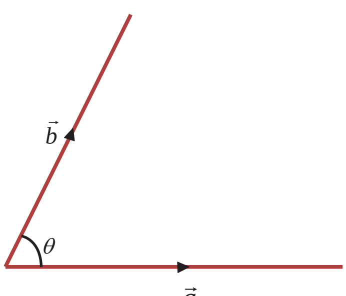
(i) திசையிலிப் பெருக்கல் (புள்ளிப் பெருக்கல்) மற்றும்

(ii) வெக்டர் பெருக்கல் (குறுக்குப் பெருக்கல்)

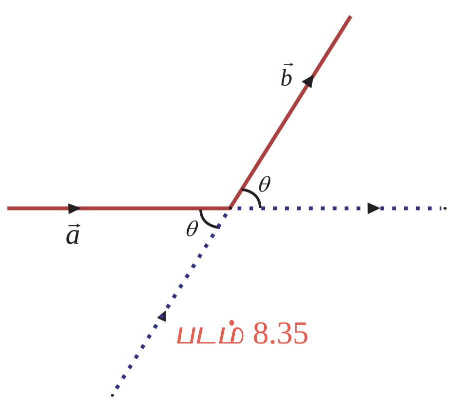
இவற்றை வரையறுக்க இரு வெக்டர்களுக்கு இடைபட்ட கோணம் நமக்கு தேவை.

8.8.1 இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between two vectors)

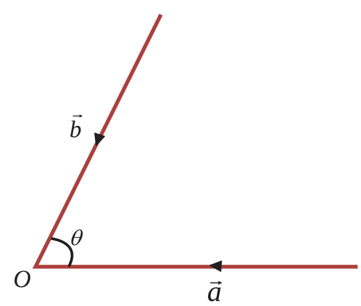
$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்களை முறையே $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ எனக் கொள்வோம். இரு



படம் 8.34



படம் 8.35



படம் 8.36

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 74 25-03-2019 13:24:41

வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்பது அவற்றின் திசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ஆகும். அவை இரண்டும் வெட்டும் புள்ளியிடத்து விரியும் தன்மையாகவோ (படம் 8.34) அல்லது குவியும் தன்மையாகவோ (படம் 8.36) இருக்க வேண்டும்.

θ–ஆனது இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில், $0 \le \theta \le \pi$ ஆகும்.

$\theta = 0$ அல்லது π ஆக இருக்கும்போது வெக்டர்கள் இணை ஆகும்.

இரண்டு வெக்டர்கள் படம் 8.35–ல் காட்டியுள்ளது போன்று விரியவோ அல்லது குவியவோ இல்லை எனில் நாம் அதில் ஏதேனும் ஒரு வெக்டரின் நீளத்தை நீட்டி விரியவோ அல்லது குவியவோ செய்து வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தைக் காணலாம்.

8.8.2 திசையிலிப் பெருக்கம் (Scalar product)

வரையறை 8.16

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க. (படம் 8.34). இவற்றின் **திசையிலிப் பெருக்கம்** அல்லது **புள்ளிப் பெருக்கம்** $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ எனக் குறிக்கப்பட்டு $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ கணக்கிடும்போது கிடைப்பது ஒரு திசையிலி. எனவே இதனைத் திசையிலிப் பெருக்கம் என்கிறோம். மேலும், இவற்றிற்கு இடையே புள்ளி ('$\cdot$') என்ற செயலியை பயன்படுத்துவதால் இதனைப் புள்ளிப் பெருக்கம் என்றும் கூறலாம்.

திசையிலிப் பெருக்கத்தின் வடிவக் கணித விளக்கம் (ஒரு வெக்டரின் மீது மற்றொரு வெக்டரின் வீழல்) (Geometrical meaning of scalar product (projection of one vector on another vector))

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ மற்றும் θ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்க.

OA–க்கு செங்குத்தாக BL வரைக. செங்கோண முக்கோணம் OLB–ல்

$$cos\theta = \frac{OL}{OB}$$

$$OL = OB\cos\theta = |\vec{b}|\cos\theta$$

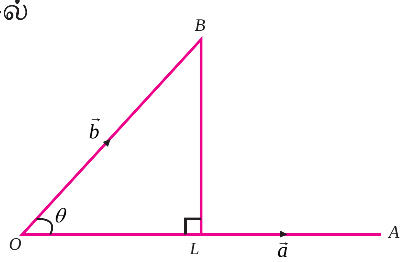
$\vec{a}$ –ன் மீது $\vec{b}$ –ன் வீழல் OL ஆகும். எனவே

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|(OL)$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|$ ($\vec{a}$ –ன் மீது $\vec{b}$ –ன் வீழல்)

ஆகவே, $\vec{a}$ –ன் மீது $\vec{b}$ –ன் வீழல் = $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

இதே போன்று $\vec{b}$ –ன் மீது $\vec{a}$ –ன் வீழல் = $\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|}$.



படம் 8.37

8.8.3 திசையிலிப் பெருக்கத்தின் பண்புகள் (Properties of Scalar Product)

(i) இரண்டு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம் பரிமாற்றுப் பண்புடையது.

வழக்கமான வரையறையின்படி $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta = \vec{b}\cdot\vec{a}$

அதாவது, ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

(ii) திசையிலிப் பெருக்கத்தின் தன்மை

$0 \le \theta \le \pi$ என நமக்குத் தெரியும்.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 75 09-04-2020 11:57:11

$\theta = 0$ எனில் $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab$ [வெக்டர்கள் இணை மற்றும் ஒரே திசையில் இருக்கும்போது $\theta = 0$] .

$\theta = \pi$ எனில் $\vec{a}\cdot\vec{b} = -ab$ [வெக்டர்கள் இணை மற்றும் எதிர்திசையில் இருக்கும்போது $\theta = \pi$.].

$\theta = \frac{\pi}{2}$ எனில் $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ [இரண்டு வெக்டர்களும் செங்குத்து எனில் $\theta = \frac{\pi}{2}$].

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ எனில், $\cos\theta$ மிகை. எனவே, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ –யும் மிகை.

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ எனில் $\cos\theta$ குறை. எனவே $\vec{a}\cdot\vec{b}$ –யும் குறை.

அதாவது, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ என்பது $\begin{cases} >0\ , & 0 \le \theta < \pi/2 \\ =0\ , & \theta = \pi/2 \\ <0\ , & \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases}$

(iii) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow\ |\vec{a}| = 0$ அல்லது $|\vec{b}| = 0$ அல்லது $\theta = \frac{\pi}{2}$

(iv) பூஜ்ஜியமற்ற இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ –க்கு $\vec{b}$ செங்குத்து

(v) $\vec{a}\cdot\vec{a}$ –ஐ பல்வேறு வகைகளில் எழுதுதல்

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = (\vec{a})^2 = \vec{a}^2 = a^2$.

இவ்வாறாக எழுதுவது கணக்குகளின் தீர்வுகளைக் காணும்போது மிகவும் பயன்படும்.

(vi) $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ மற்றும் $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$ (ஏன்?).

(vii) ஏதேனும் இரு திசையிலிகள் λ, μ க்கு

$$\lambda\vec{a}\cdot\mu\vec{b} = \lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\mu\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\mu\vec{b}) .$$

(viii) திசையிலிப் பெருக்கம் கூட்டலுடன் பங்கீட்டு விதிக்கு உட்படும்.

அதாவது, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்களுக்கு

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (இடது பங்கீடு)

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (வலது பங்கீடு)

இதன் விளைவாக

$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$ மற்றும் $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c}$ ஆகும்.

இதனை எத்தனை வெக்டர்களுக்கு வேண்டுமானாலும் விரிவுபடுத்தலாம்.

(ix) வெக்டர் முற்றொருமைகள்

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

நிரூபணம்

பண்பு (iii)-ன் படி

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

இதே போன்று மற்றவற்றையும் நிறுவலாம்.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 76 25-03-2019 13:24:59

(x) திசையிலிப் பெருக்கத்தைக் காணச் செயல் விதி

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ என்க.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})\\ &\quad + a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i}) + a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j}) + a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k}) + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})\\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.\end{aligned}$$

ஆகவே, இரண்டு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் என்பது அவைகளின் ஒத்திசைவான ஆயத்தொலைகளின் குணகங்களைப் பெருக்கிக் கூட்டுவதற்குச் சமம் ஆகும். ■

(xi) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில் $\theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right]$.

(xii) ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் எனில் $\vec{a}+\vec{b}$ என்பது அம்முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கமாக அமையும். எனவே, முக்கோணத்தின் பக்கப் பண்பின்படி

$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$. ■

(xiii) ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b}$ -க்கு $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$.

இதில் ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் பூஜ்ஜிய வெக்டர் எனில், இவை சமம் ஆகும். எனவே இரண்டு வெக்டர்களும் பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டர்கள் என்க.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

அதாவது, $\dfrac{|\vec{a}\cdot b|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$

$$\Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 8.11

கீழ்க்காண்பவைகளுக்கு $\vec{a}\cdot\vec{b}$ காண்க.

(i) $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{k}$

(ii) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை (2, 3, – 1) மற்றும் (– 1, 2, 3) என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கும் வெக்டர்கள்

தீர்வு

(i) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 2\hat{k}) = (1)(3) + (-1)(0) + (5)(-2) = 3 - 10 = -7$.

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2)(-1) + (3)(2) + (-1)(3) = -2 + 6 - 3 = 1$.

எடுத்துக்காட்டு 8.12

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ எனில், $(\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(2\vec{a} - \vec{b})$ -ஐக் காண்க.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 77 25-03-2019 13:25:04

தீர்வு

$$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}\cdot\vec{a}+5\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b} = 2(1+1+4)+5(3+2-2)-3(9+4+1) = -15\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.13

$\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ மேலும் $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ஆனது $\vec{c}$ -க்கு செங்குத்து எனில் λ-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c}+\lambda\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$
$$\Rightarrow (6+2)+\lambda(-3+2)=0$$
$$\Rightarrow \lambda=8.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.14

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை செங்குத்து என நிறுவுக.

தீர்வு

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$$
$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2$$
$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

ஆகவே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை செங்குத்து ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.15

எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{r}$ -க்கும் $\vec{r}=(\vec{r}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ என்க.

$$\vec{r}\cdot\hat{i} = \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{i}=x$$

$$\vec{r}\cdot\hat{j} = \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{j}=y$$

$$\vec{r}\cdot\hat{k} = \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{k}=z$$

$$(\vec{r}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=\vec{r}$$

எனவே $\vec{r}=(\vec{r}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}$.

எடுத்துக்காட்டு 8.16

$5\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a}=5\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b}=6\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$ என்க.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 78 25-03-2019 13:25:09

இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க. எனவே,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{30-24-4}{\sqrt{50}\ \sqrt{101}} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}}\right].$$

எடுத்துக்காட்டு 8.17

A, B, C, D ஆகியவை (4, – 3, 0), (7, – 5, – 1), (– 2, 1, 3), (0, 2, 5) என்ற புள்ளிகள் எனில், $\overrightarrow{CD}$ மீது $\overrightarrow{AB}$ –ன் வீழலைக் காண்க.

தீர்வு

O–வை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொள்க.

ஆகவே, $\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$; $\overrightarrow{OB} = 7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$; $\overrightarrow{OC} = -2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$; $\overrightarrow{OD} = 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{CD}$ ன் மீது $\overrightarrow{AB}$ ன் வீழல் $= \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \dfrac{6-2-2}{3} = \dfrac{2}{3}.$

எடுத்துக்காட்டு 8.18

$\vec{a}, \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகிய மூன்று அலகு வெக்டர்கள் $\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ –க்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow \quad |(\vec{a}+\vec{c})| = |\sqrt{3}\,\vec{b}|$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta = 3|\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 1 + (2)(1)(1)\cos\theta = 3(1)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.19

(4, – 3, 1), (2, – 4, 5) மற்றும் (1, – 1, 0) என்ற ஒரே கோட்டில் அமையாப் புள்ளிகள் ஓர் செங்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு

எளிதாக இப்புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனத் தெரியும். இப்போது ஏதேனும் ஒரு கோணம் $\dfrac{\pi}{2}$ என நிறுவ வேண்டும். எனவே இம்முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் காணவேண்டும்.

O –வை ஆதிப்புள்ளி என்க. *A,B,C* ஆகியவற்றை (4, – 3, 1), (2, – 4, 5) மற்றும் (1, – 1, 0) எனக் கொள்க.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 79 25-03-2019 13:25:14

$\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}, \quad \overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}, \quad \overrightarrow{OC} = \hat{i} - \hat{j}$

இப்பொழுது $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

இதுபோலவே $\overrightarrow{BC} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$; $\overrightarrow{CA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

ஆகவே ஒரு கோணம் $\frac{\pi}{2}$. எனவே கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

குறிப்பு 8.5

மூன்று பக்கங்கள் வெக்டர் வடிவில் கொடுக்கப்பட்டால், இவை முக்கோணத்தின் பக்கங்களாக இருக்க,

(i) இந்த வெக்டர்களின் கூடுதல் $\vec{0}$ அல்லது ஏதேனும் இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதல் மூன்றாவது பக்கத்திற்கு சமம் என நிறுவ வேண்டும்.

(ii) செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு கோணம் $\frac{\pi}{2}$ எனக் காட்ட ஏதேனும் இரு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட புள்ளிப் பெருக்கம் 0 என நிரூபிக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 8.3

(1) கீழ்க்காணும் $\vec{a}, \vec{b}$ க்கு $\vec{a}.\vec{b}$ –ஐக் காண்க.

(i) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$ (ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

(2) கீழ்க்காணும் வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை செங்குத்து எனில், λ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ (ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$

(3) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 15$ மற்றும் $\vec{a} \cdot \vec{b} = 75\sqrt{2}$ எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு இடைப்பட்டக் கோணத்தைக் காண்க.

(4) கீழ்க்காணும் வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

(i) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ (ii) $\hat{i} - \hat{j}$ மற்றும் $\hat{j} - \hat{k}$

(5) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ எனும் மூன்று வெக்டர்களுக்கு $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ மற்றும் $|\vec{c}| = 7$ எனில் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

(6) $\vec{a} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}), \ \vec{b} = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}), \ \vec{c} = (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிரூபிக்க.

(7) $-\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}, 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $-\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

(8) $|\vec{a}| = 5, \ |\vec{b}| = 6, \ |\vec{c}| = 7$ மற்றும் $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ எனில், $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ –ஐக் காண்க.

(9) (2, – 1, 3), (4, 3, 1) மற்றும் (3, 1, 2) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோடமைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(10) $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை அலகு வெக்டர்கள் மற்றும் θ என்பது இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்,

(i) $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\vec{a} - \vec{b}|$ (ii) $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\vec{a} + \vec{b}|$ (iii) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{a} + \vec{b}|}$ எனக்காட்டுக.

(11) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற மூன்று வெக்டர்கள் $|\vec{a}| = 3, \ |\vec{b}| = 4, \ |\vec{c}| = 5$ மற்றும் ஒவ்வொரு வெக்டரும் மற்ற இரு வெக்டர்களின் கூடுதலுக்குச் செங்குத்தாகவும் அமைந்தால் $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ –ஐக் காண்க.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 80 25-03-2019 13:25:21

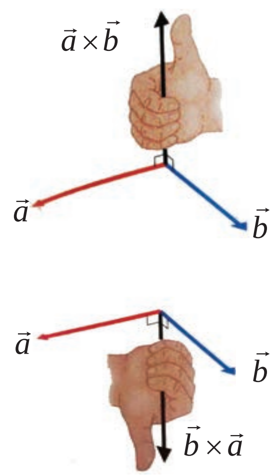
(12) $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ –ன் மீது $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ –ன் வீழலைக் காண்க.

(13) $\vec{b}=2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ –ன் மீது $\vec{a}=\lambda\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ –ன் வீழல் 4 அலகுகள் எனில், λ–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(14) $\vec{a},\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$ மற்றும் $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ என அமைந்தால் $4\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+3\vec{c}\cdot\vec{a}$ –ஐக் காண்க.

8.8.4 வெக்டர் பெருக்கம் (Vector product)

இரு வெக்டர்களுக்கு இடையேயான வெக்டர் பெருக்கத்தை வரையறுக்க வலக்கை முறை மற்றும் இடக்கை முறை ஆகியவற்றின் கருத்தாக்கம் தேவைப்படுகிறது.

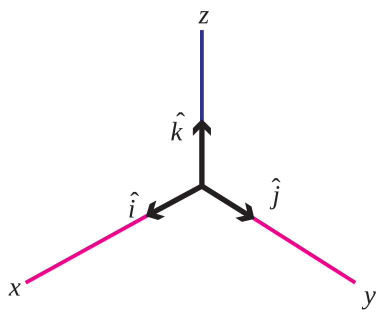


படம் 8.38

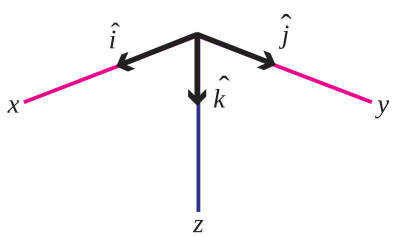
வலது கையின் விரல்களை $\vec{a}$ உடன் ஒன்றுமாறு வைத்து விரல்களை $\vec{a}$ –லிருந்து $\vec{b}$ இருக்கும் திசை நோக்கி மடக்கினால் (கோணம் 180° க்கு குறைவாக இருக்க வேண்டும்), நமது கட்டை விரலானது $\vec{a}\times\vec{b}$ –ன் திசையை குறிக்கும். இப்போது வலக்கை முறையின்படி $\vec{b}\times\vec{a}$ –ன் திசையானது $\vec{a}\times\vec{b}$ –க்கு எதிர் திசையில் இருக்கும் (படம் 8.38–ஐ பார்க்க).

மேலும் நாம் $\vec{a}$ –ஐ $\vec{b}$ –ன் திசையை நோக்கி θ கோணம் $(<\pi)$ திருப்பினால் $\vec{a}\times\vec{b}$ –ன் திசையானது வலக்கை முறையில் அமைந்த திருகு நகரும் திசையிலேயே அமையும் எனக் காணலாம்.

ஒரு கார்டீசியன் ஆயத்தொலை முறை ஒரு வலக்கை முறையை அமைக்க வேண்டுமாயின் அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் அலகு வெக்டர்களான $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ என்பவை படம் 8.39–ல் உள்ளது போன்று அமைய வேண்டும். $\hat{k}$ –ன் திசையானது படம் 8.40–ல் உள்ளவாறு அமைந்தால் அதனை இடக்கை முறை என்கிறோம்.



வலக்கை
படம் 8.39



இடக்கை
படம் 8.40

வல திருகு
படம் 8.41

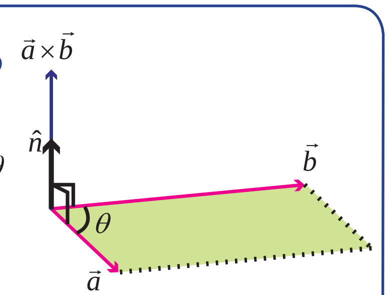
இட திருகு
படம் 8.42

வரையறை 8.17

இரு பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் **வெக்டர் பெருக்கம்** $\vec{a}\times\vec{b}$ எனக் குறிப்பிட்டு

$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு θ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம், $0\le\theta\le\pi$.

இங்கு $\vec{a},\vec{b},\hat{n}$ ஆகியவை வலக்கை முறையை அமைக்கும்.



படம் 8.43

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 81 25-03-2019 13:25:25

$\vec{a}\times\vec{b}$ ஆனது $|\vec{a}|\ |\vec{b}|\sin\theta$ என்கிற எண்ணளவையும் $\hat{n}$ என்ற திசையையும் கொண்ட ஒரு வெக்டர் ஆகும்.

இதுமட்டுமல்லாமல் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ உள்ள தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

குறிப்பு 8.6

(i) $\hat{n}$ –ன் திசையைக் கணிப்பதற்கு $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் வரிசை மிகவும் முக்கியமானதாகும்.

(ii) வெக்டர் பெருக்கலின் போது கிடைப்பது ஒரு வெக்டர். எனவே இதனை வெக்டர் பெருக்கம் என்று அழைக்கிறோம். இந்த பெருக்கத்தை குறிப்பிட '×' என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகின்றோம். எனவே இதனை குறுக்குப் பெருக்கம் என்றும் அழைக்கலாம்.

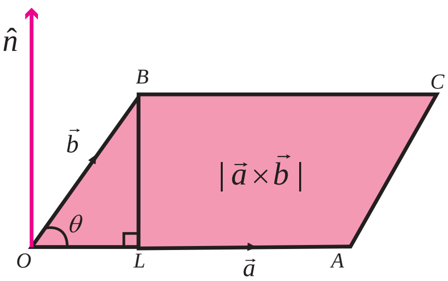
வெக்டர் பெருக்கத்தின் வடிவக் கணித விளக்கம்

(Geometrical interpretation of vector product)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ஆகியவை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்டு OACB என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$\angle AOB=\theta$ என்க.

படத்திலிருந்து



படம் 8.44

$$\sin\theta = \frac{BL}{OB}$$

$$BL = (OB)\sin\theta = |\vec{b}|\sin\theta$$

இப்பொழுது $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}|(BL)$

= (அடிப்பக்கம்) (உயரம்) = இணைகரம் OACB–ன் பரப்பளவு

ஆகவே, $\vec{a}\times\vec{b}$ என்ற வெக்டரின் எண்ணளவு $\vec{a},\vec{b}$ ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பிற்குச் சமம் ஆகும். மேலும் இதன் திசை $\vec{n}$ ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ யை உள்ளடக்கிய தளத்திற்குச் செங்குத்து மட்டுமல்லாமல் $\vec{a},\vec{b},\vec{n}$ ஆகியவை ஒரு வலக்கை முறையை அமைக்கும்.

எனவே, $|\vec{a}\times\vec{b}|$ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு ஆகும்.

இதிலிருந்து இணைகரம் OACB–ன் பரப்பளவில் பாதியானது, முக்கோணம் OAC–ன் பரப்பு என வருவிக்கலாம்.

வருவித்தல்

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு $=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

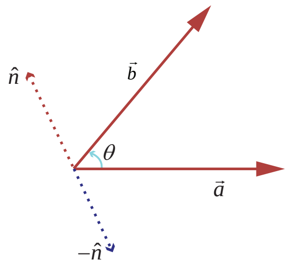
8.8.5. பண்புகள்

(i) வெக்டர் பெருக்கம் பரிமாற்ற விதிக்கு உட்படாது. வரையறையிலிருந்து,

$$\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta(-\hat{n}) \quad \left(\vec{b},\vec{a},-\vec{n} \begin{cases}\text{ஆகியவை வலக்கை}\\ \text{முறையை அமைப்பதால்}\end{cases}\right)$$

$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

$$= -(\vec{a}\times\vec{b})$$



படம் 8.45

எனவே வெக்டர் பெருக்கம் பரிமாற்றத்தக்கதல்ல.

(ii) இரு வெக்டர்கள் இணையாக அல்லது ஒரே கோட்டில் அமைந்தால் $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ (எவ்வாறு?)

ஆனால் $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\ \vec{a}=\vec{0}$ அல்லது $\vec{b}=\vec{0}$ அல்லது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை இணையாகும்.

(iii) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய ஏதேனும் இரு பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டர்களுக்கு

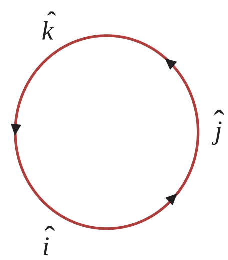
$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ இணையானவை. இதிலிருந்து $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ என வருவிக்கலாம்.

(iv) $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ ஆகியவற்றின் வரையறையிலிருந்து, (இவை வலக்கை முறையை அமைக்கும்)

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ ;\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\ ;\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}\ ;\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}\ ;\ \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}\quad \text{(எவ்வாறு?)}$$



படம் 8.46

(v) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ எனில், $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\hat{n}$

(vi) ஏதேனும் இரு திசையிலிகள் m மற்றும் n-க்கு

$$m\vec{a}\times n\vec{b} = mn(\vec{a}\times\vec{b})=(mn\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(mn\vec{b})=n\vec{a}\times m\vec{b}$$

(vii) வெக்டர் பெருக்கம் கூட்டலின் மீது பங்கீட்டு விதியை நிறைவு செய்யும்.

அதாவது,
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

இதனை கழித்தல் மட்டுமல்லாமல் இரண்டுக்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

அதாவது,
$$\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{a}\times\vec{c})$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{d}).$$

(viii) குறுக்குப் பெருக்கத்தைக் காணச் செயல் விதி

$$\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$$
$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})\\ &\quad +a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})\\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

(ix) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta=\sin^{-1}\left[\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$.

(இதன் நிரூபணமானது பயிற்சிக்காக விடப்பட்டுள்ளது)

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 83 25-03-2019 13:25:37

குறிப்பு 8.7

இதில் θ எப்பொழுதும் குறுங்கோணமாகவே அமையும். எனவே வெக்டர் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்தி இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காணும்போது எப்பொழுதும் குறுங்கோணம் மட்டுமே நமக்கு கிடைக்கும். ஆகவே கோணங்களைக் கணக்கிடப் புள்ளிப் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்துவதே சிறந்தது. இதன்மூலம் θ அமையும் இடத்தை அறிய முடியும்.

(x) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு செங்குத்தாக உள்ள அலகு வெக்டர்கள் $\pm\hat{n} = \pm\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ (எவ்வாறு?)

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு செங்குத்தாக λ எண்ணளவுள்ள வெக்டர்கள் $\pm\lambda\hat{n} = \pm\lambda\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$.

எடுத்துக்காட்டு 8.20

$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ எனில் $|\vec{a}\times\vec{b}|$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-0) - \hat{j}(3-0) + \hat{k}(3-4) = 4\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}.$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.21

$\vec{a} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ எனில், கீழ்க்காண்பவைகளை சரிபார்க்க.

(i) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து

(ii) $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து

தீர்வு

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & -7 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12+14) - \hat{j}(9+42) + \hat{k}(-6-24) = 2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}$$

(i) $$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (-3\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k})\cdot(2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}) = -6 - 204 + 210 = 0$$

எனவே, $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

(ii) $$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}) = 12 - 102 + 90 = 0$$

எனவே, $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

எடுத்துக்காட்டு 8.22

$\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = -2\hat{i} + j - 2\hat{k}$ எனில், இரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தான 6 எண்ணளவு உள்ள வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2-3) - \hat{j}(-8+6) + \hat{k}(4-2) = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 84 25-03-2019 13:25:41

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்குசெங்குத்தாக உள்ள அலகு வெக்டர்கள் $\pm\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \pm\left[\dfrac{-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}}{3}\right]$

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு செங்குத்தாக எண்ணளவு 6 உடைய வெக்டர்கள் $\pm 2(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$.

எடுத்துக்காட்டு 8.23

$\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ஆகியவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன் மற்றும் கொசைன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}) = 8-2+6 = 12$$

$$|\vec{a}| = |2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}| = \sqrt{14} \quad ; \quad |\vec{b}| = |4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}| = \sqrt{24}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2+6)-\hat{j}(4-12)+\hat{k}(-4-4) = 8\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |8\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}| = 8\sqrt{3}$$

$$\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.24

$\vec{a} = 3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ஆகியவற்றை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1+4)-\hat{j}(3-4)+\hat{k}(-3-1) = 5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}| = \sqrt{42}$$

இணைகரத்தின் பரப்பளவு $\sqrt{42}$ ச.அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.25

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற ஏதேனும் இரு வெக்டர்களுக்கு, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ மற்றும் $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ என நாம் அறிவோம்.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\sin^2\theta + |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\cos^2\theta$$

$$= |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2$$

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 85 25-03-2019 13:25:48

எடுத்துக்காட்டு 8.26

$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாக கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

நாம் இப்பொழுது முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களைக் காண்போம்.

$$\overrightarrow{AB} = -i + \hat{j}; \quad \overrightarrow{AC} = -\hat{i} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$$

முக்கோணம் ABC –ன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

குறிப்பு 8.8

$\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$ –க்கு பதிலாக எந்த இரண்டு பக்கங்களைக் கொண்டும் தீர்வு காணலாம்.

பயிற்சி 8.4

(1) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ எனில், $\vec{a} \times \vec{b}$ –ன் எண் மதிப்பைக் காண்க.

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$ எனக் காட்டுக.

(3) $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ என்ற வெக்டர்கள் உள்ள தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் எண்ணளவு $10\sqrt{3}$ உடைய அலகு வெக்டர்களைக் காண்க.

(4) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ எனில், $\vec{a} + \vec{b}$ மற்றும் $\vec{a} - \vec{b}$ ஆகியவற்றிற்கு தனித்தனியாக செங்குத்தாக உள்ள வெக்டர்களைக் காண்க.

(5) $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ மற்றும் $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ஆகியவற்றை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(6) $A(3, -1, 2)$, $B(1, -1, -3)$ மற்றும் $C(4, -3, 1)$ ஆகியவற்றை உச்சிப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(7) முக்கோணம் ABC–ன் உச்சிப்புள்ளிகள் A, B, C–ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ எனில், முக்கோணம் ABC–ன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|$ என நிரூபித்து, இதிலிருந்து A, B, C ஆகியவை ஒரே நேர்க்கோட்டிலமைய நிபந்தனையைக் காண்க.

(8) எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{a}$ –க்கும் $|\vec{a} \times \hat{i}|^2 + |\vec{a} \times \hat{j}|^2 + |\vec{a} \times \hat{k}|^2 = 2|\vec{a}|^2$ என நிரூபிக்க.

(9) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற அலகு வெக்டர்களுக்கு $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கும் $\vec{c}$ –க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனில், $\vec{a} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{b} \times \vec{c})$ என நிரூபிக்க.

(10) $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை வெக்டர் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 86 25-03-2019 13:25:53

பயிற்சி 8.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}$ என்பது

(1) $\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{CA}$ (3) $\vec{0}$ (4) $-\overrightarrow{AD}$

(2) $\vec{a}+2\vec{b}$ மற்றும் $3\vec{a}+m\vec{b}$ ஆகியவை இணை எனில், m-ன் மதிப்பு

(1) 3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 6 (4) $\frac{1}{6}$

(3) $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ மற்றும் $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களின் கூடுதலுக்கு இணையாக உள்ள அலகு வெக்டர்

(1) $\frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (2) $\frac{2\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{5}}$

(4) ஒரு வெக்டர் $\overrightarrow{OP}$ ஆனது x மற்றும் y அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் முறையே 60° மற்றும் 45°-ஐ ஏற்படுத்துகின்றது. $\overrightarrow{OP}$ ஆனது z-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம்

(1) 45° (2) 60° (3) 90° (4) 30°

(5) $\overrightarrow{BA}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் B-ன் நிலை வெக்டர் $\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ எனில் A-ன் நிலைவெக்டர்

(1) $4\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ (2) $4\hat{i}+5\hat{j}$ (3) $4\hat{i}$ (4) $-4\hat{i}$

(6) ஒரு வெக்டர் ஆய அச்சுகளுடன் சமகோணத்தை ஏற்படுத்தினால் அக்கோணம்

(1) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (2) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (3) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (4) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

(7) $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ ஆகிய வெக்டர்கள்

(1) ஒன்றுக்கொன்று இணையானது (2) அலகு வெக்டர்கள்

(3) செங்குத்தான வெக்டர்கள் (4) ஒருதள வெக்டர்கள்

(8) $ABCD$ ஓர் இணைகரம் எனில், $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ என்பது

(1) $2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ (2) $4\overrightarrow{AC}$ (3) $4\overrightarrow{BD}$ (4) $\vec{0}$

(9) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரம் $ABCD$-ன் ஒரு மூலைவிட்டம் $\vec{a}+\vec{b}$ எனில் மற்றொரு மூலைவிட்டம் $\overrightarrow{BD}$ ஆனது

(1) $\vec{a}-\vec{b}$ (2) $\vec{b}-\vec{a}$ (3) $\vec{a}+\vec{b}$ (4) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(10) A, B-ன் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b}$ எனில், கீழ்க்காணும் நிலை வெக்டர்களில் எந்த நிலை வெக்டரின் புள்ளி AB என்ற கோட்டின் மீது அமையும்.

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\frac{2\vec{a}-\vec{b}}{2}$ (3) $\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ (4) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 87 25-03-2019 13:26:01

(11) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ஆகியவை ஒரே கோட்டிலமைந்த மூன்று புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் எனில் கீழ்க்காண்பவைகளுள் எது சரியானது?

(1) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ (2) $2\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ (3) $\vec{b} = \vec{c} + \vec{a}$ (4) $4\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

(12) P என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = \dfrac{9\vec{a} + 7\vec{b}}{16}$ என்க. P ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ஐ நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டைப் பிரிக்கும் விகிதம்

(1) 7 : 9 உட்புறமாக (2) 9 : 7 உட்புறமாக

(3) 9 : 7 வெளிப்புறமாக (4) 7 : 9 வெளிப்புறமாக

(13) $\lambda\hat{i} + 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}$ என்பது ஓரலகு வெக்டர் எனில், λ–ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{2}$

(14) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு முனைப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ மற்றும் $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$. மையக்கோட்டு சந்தியின் நிலை வெக்டர் $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ எனில், மூன்றாவது முனைப் புள்ளியின் நிலை வெக்டர்

(1) $-2\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$ (2) $-2\hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k}$ (3) $2\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}$ (4) $-2\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}$

(15) $|\vec{a} + \vec{b}| = 60, |\vec{a} - \vec{b}| = 40$ மற்றும் $|\vec{b}| = 46$, எனில், $|\vec{a}|$–ன் மதிப்பு

(1) 42 (2) 12 (3) 22 (4) 32

(16) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ – ஒரே எண்ணளவைக் கொண்டுள்ளது. இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் $60°$ மற்றும் இவற்றின் திசையிலிப் பெருக்கம் $\frac{1}{2}$ எனில், $|\vec{a}|$ –ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 3 (3) 7 (4) 1

(17) $\vec{a} = (\sin\theta)\hat{i} + (\cos\theta)\hat{j}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + 2\hat{k}$ ஆகியவை செங்குத்தாக அமைந்து $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ எனில், θ–ன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

(18) $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 5$ மற்றும் $\vec{a} \cdot \vec{b} = 60°$ எனில், $|\vec{a} \times \vec{b}|$–ன் மதிப்பு

(1) 15 (2) 35 (3) 45 (4) 25

(19) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $120°$. $|\vec{a}| = 1, |b| = 2$ எனில், $[(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})]^2$ –ன் மதிப்பு

(1) 225 (2) 275 (3) 325 (4) 300

(20) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றின் எண்ணளவு 2, மேலும் இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் $60°$ எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{a} + \vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம்

(1) 30° (2) 60° (3) 45° (4) 90°

(21) $\hat{i} + 3\hat{j} + \lambda\hat{k}$ –ன் மீது $5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ –ன் வீழலும் $5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ –ன் மீது $\hat{i} + 3\hat{j} + \lambda\hat{k}$ வீழலும் சமம் எனில், λ–ன் மதிப்பு

(1) ± 4 (2) ± 3 (3) ± 5 (4) ±1

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 88 25-03-2019 13:26:08

(22) $\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ என்ற வெக்டரின் ஆரம்ப மற்றும் இறுதிப் புள்ளிகள் (1, 2, 4) மற்றும் (2, – 3λ – 3) எனில், λ–ன் மதிப்பு

(1) $\frac{7}{3}$ (2) $-\frac{7}{3}$ (3) $-\frac{5}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

(23) $10\hat{i}+3\hat{i}, 12\hat{i}-5\hat{j}$ மற்றும் $a\hat{i}+11\hat{j}$ ஆகிய நிலை வெக்டர்களின் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்தால் 'a'–ன் மதிப்பு

(1) 6 (2) 3 (3) 5 (4) 8

(24) $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=2\hat{i}+x\hat{j}+\hat{k},\ \vec{c}=\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=70$ எனில் x –ன் மதிப்பு

(1) 5 (2) 7 (3) 26 (4) 10

(25) $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}, |\vec{b}|=5$ மேலும் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{6}$ எனில், இவ்விரு வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) $\frac{7}{4}$ (2) $\frac{15}{4}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{17}{4}$

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

- எண்ணளவைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்படும் கணியம் திசையிலி ஆகும்.
- எண்ணளவு மற்றும் திசை ஆகியவற்றைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்படும் கணியம் வெக்டர் ஆகும்.
- எந்தவொரு புள்ளியையும் ஒரு வெக்டரின் ஆதிப்புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமானால் அது கட்டிலா வெக்டர் ஆகும். ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை மட்டுமே ஆதிப்புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமானால் அது அறுதியிட்ட வெக்டர் ஆகும்.
- ஒரே தளத்தின் மீது அமைந்த அல்லது அந்தத் தளத்திற்கு இணையாக அமைந்த இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரே தள அமை வெக்டர்கள் ஆகும்.
- இருவெக்டர்களின் எண்ணளவுகள் சமமாகவும் அவை ஒரே திசையினையும் பெற்றிருந்தால் அவற்றைச் சமவெக்டர்கள் எனலாம்.
- ஒரு வெக்டரின் எண்மதிப்பு 0 எனில் அது பூஜ்ஜிய வெக்டர் ஆகும்.
- ஒரு வெக்டரின் எண்ணளவு 1 எனில் அது அலகு வெக்டர் ஆகும்.
- $\vec{a}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வெக்டர், m ஒரு திசையிலியாயின் $m\vec{a}$ என்பது வெக்டர் $\vec{a}$ உடன் திசையிலி m–ன் திசையிலிப் பெருக்கம் ஆகும்.
- $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் இணை எனில், $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. இங்கு λ ஓர் திசையிலி.
- $\vec{a},\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை முக்கோணத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட பக்கங்கள் எனில், $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$
- வெக்டர்களின் கூட்டல், சேர்ப்புப் பண்புக்கு உட்படும்.
- எந்த ஒரு வெக்டர் $\vec{a}$ –க்கும் $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
- எந்த ஒரு வெக்டர் $\vec{a}$ –க்கும் $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 89 25-03-2019 13:26:12

- வெக்டர் கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்புடையது.
- இரு வெக்டர்கள் அவற்றின் எண்ணாலும் திசையாலும் ஒரு முக்கோணத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட இரண்டு பக்கங்களின் மூலமாக குறிப்பிடப்பட்டால், அவற்றின் கூடுதல் அம்முக்கோணத்தின் எதிர்வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட மூன்றாவது பக்கமாகும். இதுவே வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதி.
- $OABC$ என்ற இணைகரத்தில் $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாயின், அதன் மூலைவிட்டம் $\overrightarrow{OC}$ இவற்றின் கூடுதலைக் குறிக்கும். இதுவே வெக்டர் கூட்டலின் இணைகர விதியாகும்.
- α, β, γ ஆகியவை திசைக் கோணங்கள் எனில், $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ஆகியவை திசைக் கொசைன்களாகும்.
- $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என்ற வெக்டரின் திசை விகிதங்கள் x, y, z ஆகும்.
- $\vec{a}, \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை ஒரே தளத்தில் அமையாத வெக்டர்கள் எனில், வெளியில் உள்ள எந்த ஒரு வெக்டரையும் $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ எனத் தனித்த வழியில் எழுதலாம்.

ஒரு புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

மற்றும் $\vec{r}$ –ன் திசைக் கோணங்கள் α, β, γ எனில்,

(i) $\vec{r}$ –ன் திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 1.

(ii) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

(iii) $\vec{r}$ –ன் திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(iv) l, m, n ஆகியவை ஒரு வெக்டரின் திசைக் கொசைன்கள் எனில், $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

(v) எந்த ஒரு அலகு வெக்டரையும் $\cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$ என எழுதலாம்.

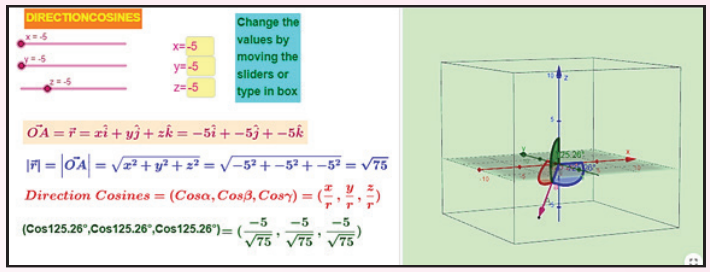
- $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம் $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ஆகும்.
- $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கம் $\vec{a}\times\vec{b}$ எனக் குறிப்பிட்டு $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ ஆகும். இங்கு θ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $0 \le \theta \le \pi$. இங்கு $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ ஆகியவை வலக்கை முறையை அமைக்கும்.

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 90 25-03-2019 13:26:15

இணையச் செயல்பாடு 8 (a)

வெக்டர் இயற்கணிதம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

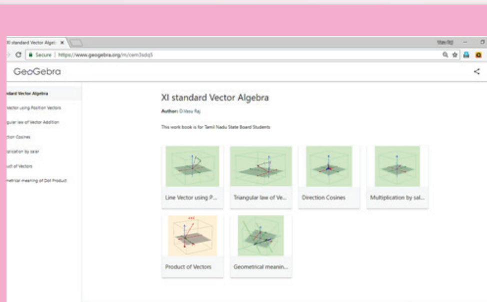


படி – 1

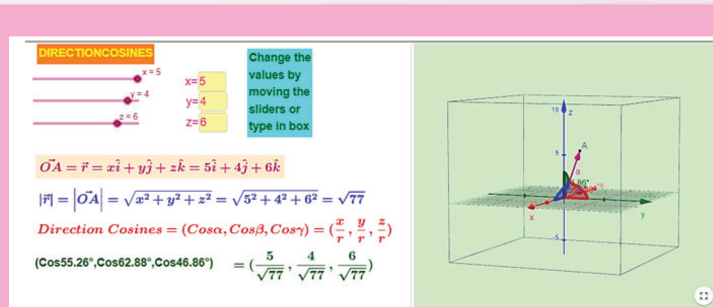
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "XI standard Vector Algebra" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி –2

"Direction Cosines" பயிற்சித்தாளைத்தேர்வுசெய்துநழுவல்களை நகர்த்தியதும் 3-D உருவமைப்பு வலப்பக்கம் காணப்படும். 3-D உருவமைப்பைச்சுழற்றசுட்டியைவலப்பக்கம்சொடுக்கிபல்வேறுஅமைப்புகளைக்காணலாம். நழுவல்களை நகர்த்தி, அல்லது x, y மற்றும்z மதிப்புகளைப் பதிந்து திசையெண்ணை மாற்றலாம்



படி – 1



படி –2

உரலி :

https://ggbm.at/cem3sdq5

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

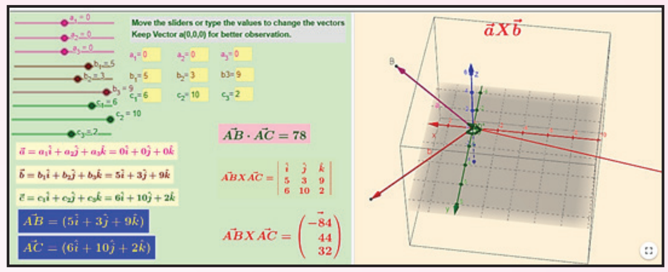
B125_11_MAT_TM

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 91 25-03-2019 13:26:16

இணையச் செயல்பாடு 8 (b)

வெக்டர் இயற்கணிதம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

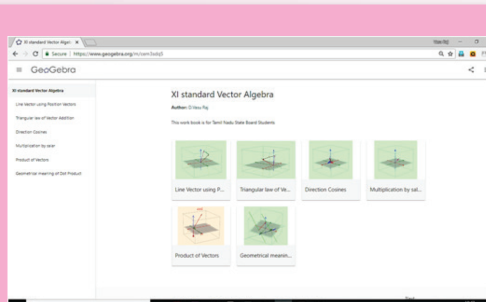


படி – 1

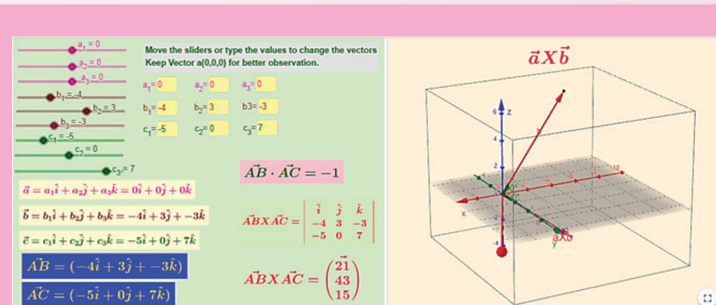
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra–வின் "XI standard Vector Algebra" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பயிற்சித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Product of Vectors" பயிற்சித்தாளைத்தேர்வுசெய்துநழுவல்களை நகர்த்தியதும் 3-D உருவமைப்பு வலப்பக்கம் காணப்படும். 3-D உருவமைப்பைச்சுழற்றசுட்டியைவலப்பக்கம்சொடுக்கிபல்வேறு அமைப்புகளைக்காணலாம். நழுவல்களை நகர்த்தி, அல்லது x, y மற்றும் z மதிப்புகளைப் பதிந்து திசையெண்ணை மாற்றலாம் (நன்றாகப் புரிந்து கொள்ள a1, a2, மற்றும் a3 மதிப்புகளை மாற்ற வேண்டாம்) ABXAC அவற்றின் கூறுகள் நேர்குத்தாகக் கொடுக்கபட்டுள்ளது.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/cem3sdq5

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

B125_11_MAT_TM

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 92
25-03-2019 13:26:17