1. એક ટેકરીની ઊંચાઈ 500 m છે. ચર્ચની આજ્ઞા પ્રમાણે એક પૅકેટને ટેકરીની બીજી બાજુ જોરથી ફેંકીને 125 m/sની ઝડપથી પહોંચાડવામાં આવે છે. ટેકરીના તળિયેથી ચર્ચ 800 m દૂર છે અને તે જમીન પર 2 ms^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરી શકે છે કે જેથી તેનું ટેકરીથી અંતર ગોઠવી શકાય, તો ટેકરીની બીજી બાજુ ઓછામાં ઓછા કેટલાં સમયમાં પૅકેટ પહોંચી શકે ? g = 10 ms^{-2}.

➠ ફેંકેલા પૅકેટની ઝડપ $u = 125\ ms^{-1}$

ટેકરીની ઊંચાઈ $h = 500$ m

ટેકરીને ઓળંગવા માટે પૅકેટની ઝડપનો ઊર્ધ્વઘટક, ટેકરીની ઊંચાઈ ઓળંગી શકે તેટલો હોવો જોઈએ.

➠ ધારો કે hનો ઊર્ધ્વઘટક h_y છે.

$\therefore\ u_y \geq \sqrt{2gh} \geq \sqrt{2 \times 10 \times 500}$

$\therefore\ u_y \geq 100\ ms^{-1}$

પણ $u^2 = u_x^2 + u_y^2$

$$\therefore\ u_x = \sqrt{u^2 - u_y^2}$$

$$= \sqrt{(125)^2 - (100)^2}$$

$$= \sqrt{15625 - 10000}$$

$$\therefore\ u_x = \sqrt{5625} = 75\ ms^{-1}$$

➠ હવે ટેકરીની ટોચ પર પહોંચતા લાગતો સમય,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 500}{10}}$$

$$= \sqrt{100} = 10\ s$$

➠ ટેકરીની ટોચ પરથી જમીન પર આવતાં લાગતો સમય

$t_1 = t = 10$ s

$\therefore$ આ 10 s માં પૅકેટે કાપેલું સમક્ષિતિજ અંતર

$x = u_x t = 75 \times 10 = 750$ m

➠ ચર્ચને પર્વતની તળેટીથી 800 m અંતરેથી કાપવું પડતું અંતર = 800 – 750 = 50 m

ચર્ચની ગતિની ઝડપ $v = 2\ ms^{-1}$ છે.

$\therefore$ ચર્ચને 50 m અંતર v ઝડપથી કાપતાં લાગતો સમય

$$t_2 = \frac{50}{2} = 25\ s$$

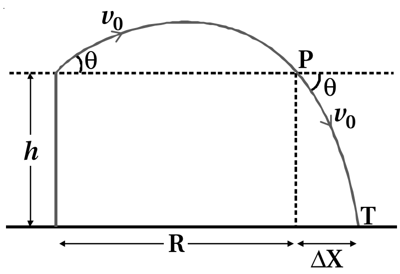
➠ આમ, પૅકેટને ટેકરીના એક છેડેથી ટેકરી પરથી પસાર થઈને બીજા છેડે પહોંચતા લાગતો કુલ સમય $= t + t_1 + t_2$

$= 10 + 10 + 25$

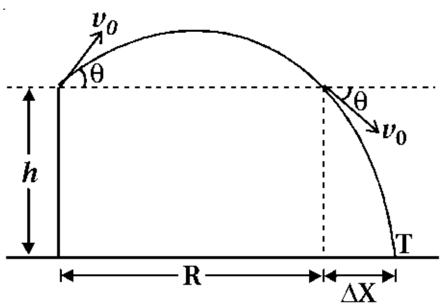
$= 45$ s

2. એક ગનમાંથી v_0 જેટલી મહત્તમ ઝડપથી ગોળી છોડી શકે છે અને મહત્તમ સમક્ષિતિજ અવધિ $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ મેળવી

શકાય છે. જો લક્ષ્ય એ R_{max} થી Δx જેટલું દૂર હોય તો દર્શાવો કે ગનને ઓછામાં ઓછા $h = \Delta x\left[1+\frac{\Delta x}{R}\right]$ જેટલી ઊંચાઈએથી આ જ લક્ષ્યને આ જ ગન વડે ગોળી ફાયર કરવાથી વીંધી શકાય.



- મહત્તમ અવધિ $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ જ્યાં $\theta = 45°$
- આકૃતિ પરથી લક્ષ્યનું સમક્ષિતિજ અંતર $x = R_{max} + \Delta x$ અને તેને વીંધવા પ્રક્ષિપ્ત બિંદુ $y = -h$ હશે.



- અધોદિશાને ધન લઈએ તો $y = -h$ ઊંચાઈએ પ્રક્ષિપ્ત બિંદુ મળે.
- સમક્ષિતિજ દિશામાં વેગનો ઘટક $v_x = v_0\cos\theta$ અને ઊર્ધ્વ દિશામાં વેગનો ઘટક $v_y = -v_0\sin\theta$ જ્યાં v_0 એ પ્રારંભિક વેગ છે અને પ્રક્ષિપ્ત કોણ $\theta = 45°$ છે.

ઊર્ધ્વ દિશામાંની ગતિ માટે,

$$h = v_y t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = (-v_0\sin\theta)t + \frac{1}{2}gt^2 \quad ...(2)$$

અને સમક્ષિતિજ ગતિ માટે,

$$R_{max} - \Delta x = v_x t$$
$$= v_0\cos\theta t$$

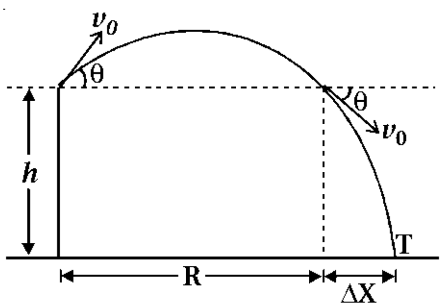
$$\therefore\ t = \frac{R_{max} + \Delta x}{v_0\cos\theta} \quad ...(3)$$

સમી. (3)માંથી tની કિંમત સમી. (2)માં મૂકતાં,

$$h = -v_0\sin\theta \times \left(\frac{R_{max}+\Delta x}{v_0\cos\theta}\right)+\frac{1}{2}g\left(\frac{R_{max}+\Delta x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

$$\therefore\ h = -\tan\theta(R_{max} + \Delta x) + \frac{1}{2}\ \frac{g(R_{max} + \Delta x)^2}{v_0^2\cos\theta}$$

- મહત્તમ અવધિ $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ જ્યાં $\theta = 45°$
- આકૃતિ પરથી લક્ષ્યનું સમક્ષિતિજ અંતર $x = R_{max} + \Delta x$ અને તેને વીંધવા પ્રક્ષિપ્ત બિંદુ $y = -h$ હશે.



➠ અધોદિશાને ધન લઈએ તો $y = -h$ ઊંચાઈએ પ્રક્ષિપ્ત બિંદુ મળે.

➠ સમક્ષિતિજ દિશામાં વેગનો ઘટક $v_x = v_0\cos\theta$ અને ઊર્ધ્વ દિશામાં વેગનો ઘટક $v_y = -v_0\sin\theta$ જ્યાં v_0 એ પ્રારંભિક વેગ છે અને પ્રક્ષિપ્ત કોણ $\theta = 45°$ છે.

ઊર્ધ્વ દિશામાંની ગતિ માટે,

$$h = v_y t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = (-v_0\sin\theta)t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad ...(2)$$

અને સમક્ષિતિજ ગતિ માટે,

$$R_{max} - \Delta x = v_x t$$

$$= v_0\cos\theta t$$

$$\therefore\ t = \frac{R_{max} + \Delta x}{v_0\cos\theta} \qquad ...(3)$$

સમી. (3)માંથી tની કિંમત સમી. (2)માં મૂકતાં,

$$h = -v_0\sin\theta \times \left(\frac{R_{max}+\Delta x}{v_0\cos\theta}\right) + \frac{1}{2}g\left(\frac{R_{max}+\Delta x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

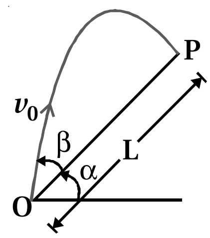
$$\therefore\ h = -\tan\theta(R_{max} + \Delta x) + \frac{1}{2}\ \frac{g(R_{max} + \Delta x)^2}{v_0^2\cos\theta}$$

3. સમક્ષિતિજ સાથે α-કોણે રહેલ સપાટી સાથે β-કોણે એક કણને પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે જેની પરિસ્થિતિ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે, તો ......

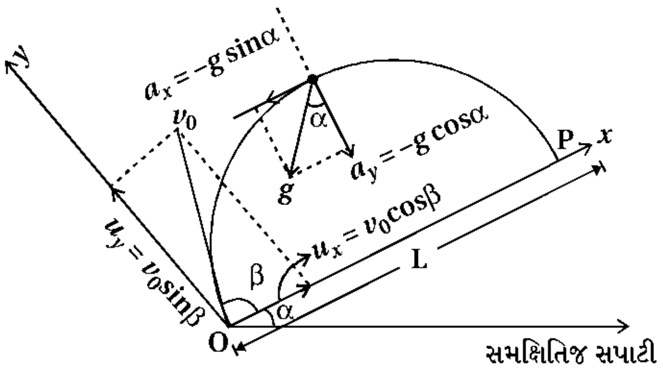
(a) પ્રક્ષિપ્ત બિંદુથી સપાટી પરની કણની અવધિ શોધો.

(b) ઉડ્ડયનનો સમય મેળવો.

(c) મહત્તમ અવધિ માટે β-કોણનું મૂલ્ય શોધો.



➠ (a) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સમક્ષિતિજ સાથે α-કોણે બીજી પરસ્પર લંબ યામ પદ્ધતિ વિચારવી પડે.



➠ (a) કણને O બિંદુ આગળથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે.

ધારો કે O બિંદુથી P બિંદુ સુધી પહોંચતા લાગતો સમય T છે.

આમ, O બિંદુથી સપાટી પરની અવધિ OP = L છે.

(b) ધારો કે OXને લંબરૂપે થતી ગતિ માટે,

$y = 0$, $u_y = v_0 \sin\beta$, $a_y = -g\cos\alpha$ અને $t = T$

અચળ પ્રવેગી ગતિના સમીકરણ

$$y = u_y t + \frac{1}{2} a_y + 2$$

$$\therefore\ 0 = v_0 \sin\beta T - \frac{1}{2}(g\cos\alpha)T^2$$

$$\therefore\ v_0 \sin\beta = \frac{g\cos\alpha}{2} T$$

$$\therefore\ T = \frac{2v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha} \quad \text{...(1)}$$

OXની દિશામાં ગતિ વિચારતાં,

$OP = x = L$, $u_x = v_0 \cos\beta$, $a_x = -g\sin\alpha$

અને $T = \dfrac{2v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}$ ($\because$ સમી. (1) પરથી)

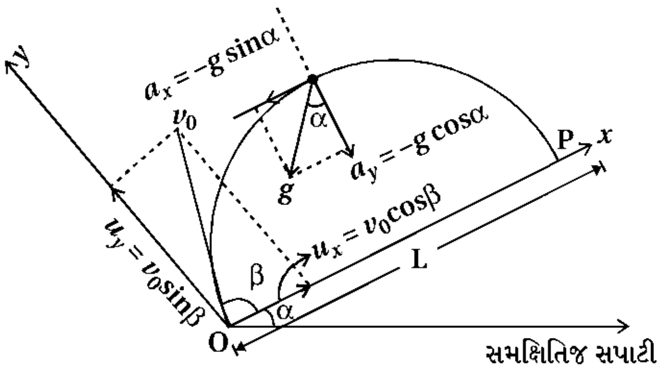
અચળ પ્રવેગી ગતિના સમીકરણ પરથી,

$$x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$\therefore\ L = v_0 \cos\beta\, T - \frac{1}{2} g\sin\alpha\, T^2$$

$$= T\left[v_0 \cos\beta - \frac{g}{2}\sin\alpha T\right]$$

➠ **(a)** આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સમક્ષિતિજ સાથે α-કોણે બીજી પરસ્પર લંબ યામ પદ્ધતિ વિચારવી પડે.



➠ **(a)** કણને O બિંદુ આગળથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે.

ધારો કે O બિંદુથી P બિંદુ સુધી પહોંચતા લાગતો સમય T છે.

આમ, O બિંદુથી સપાટી પરની અવધિ OP = L છે.

(b) ધારો કે OXને લંબરૂપે થતી ગતિ માટે,

$y = 0$, $u_y = v_0 \sin\beta$, $a_y = -g\cos\alpha$ અને $t = T$

અચળ પ્રવેગી ગતિના સમીકરણ

$$y = u_y t + \frac{1}{2} a_y + 2$$

$$\therefore\ 0 = v_0 \sin\beta T - \frac{1}{2}(g\cos\alpha)T^2$$

$$\therefore\ v_0 \sin\beta = \frac{g\cos\alpha}{2} T$$

$$\therefore\ T = \frac{2v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha} \quad \text{...(1)}$$

OXની દિશામાં ગતિ વિચારતાં,

$OP = x = L$, $u_x = v_0 \cos\beta$, $a_x = -g\sin\alpha$

અને $T = \dfrac{2v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}$ (∵ સમી. (1) પરથી)

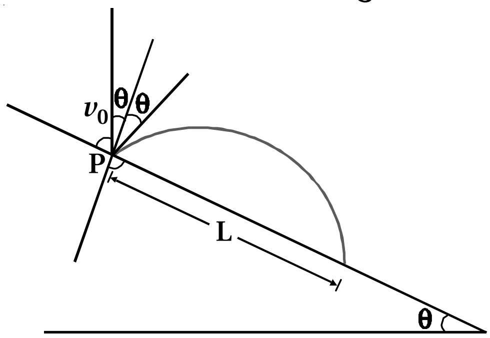
અચળ પ્રવેગી ગતિના સમીકરણ પરથી,

$x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$

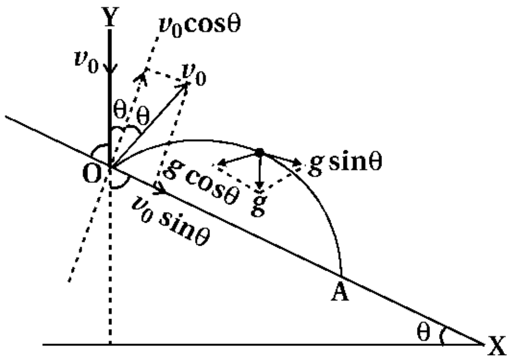
$\therefore\ L = v_0 \cos\beta\, T - \frac{1}{2} g \sin\alpha\, T^2$

$= T\left[v_0 \cos\beta - \frac{g}{2} \sin\alpha T\right]$

4. **આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ એક કણ સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણે રહેલા સમતલ સપાટી પર v_0 વેગથી પડે છે અને સપાટી સાથે સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ અનુભવે છે. તે જ્યારે બીજી વખત ઊછળીને સપાટી પર કેટલાં અંતરે પડશે તે શોધો.**



➠ સ્થિતિસ્થાપક અથડામણમાં કણની ઝડપ અચળ રહે છે. ધારો કે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે O બિંદુથી A બિંદુ સુધી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ છે.



➠ અહીં, $y = 0$, $u_y = v_0\cos\theta$, $a_y = -g\cos\theta$ અને $t = T$

ગતિના સમીકરણ પરથી $y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$

$\therefore\ 0 = v_0 \cos\theta T - \frac{1}{2} g \cos\theta T^2$

$\therefore\ 0 = T\left[v_0 \cos\theta - \frac{1}{2} g \cos\theta T\right]$

$\therefore\ T = \dfrac{2v_0 \cos\theta}{g\cos\theta}$

$\therefore\ T = \dfrac{2v_0}{g}$

હવે OX-દિશામાંની ગતિ માટે $x = L$, $u_x = v_0 \sin\theta$, $a_x = g\sin\theta$, $t = T = \dfrac{2v_0}{g}$

∴ ગતિના સમીકરણ પરથી,

$x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$

$\therefore\ L = v_0\sin\theta \times \frac{2v_0}{g} + \frac{1}{2}\ g\sin\theta \times \frac{4v_0^2}{g^2}$

$\therefore\ L = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta + \frac{2v_0^2\sin\theta}{g}\ \therefore\ L = \frac{4v_0^2}{g}\sin\theta$

5. **એક છોકરી 5 m s^{-1}ની ઝડપથી ઉત્તર દિશામાં સાઇકલ ચલાવે છે જો તેની ઝડપ વધારીને 10 m s^{-1} કરે તો તેને વરસાદ શિરોલંબ સાથે 45°ના ખૂણે પડતો દેખાય છે, તો વરસાદની ઝડપ કેટલી છે ? જમીન પરના અવલોકનકારને વરસાદ પડવાની દિશા કઈ દેખાશે ?**

➠ ઉત્તર દિશામાંનો એકમ સદિશ $\hat{i}$ અને અધોદિશામાંનો એકમ સદિશ $-\hat{j}$ લેતાં,

વરસાદનાં ટીપાંનો વેગ $\vec{v}_r = a\hat{i} + b\hat{j}$

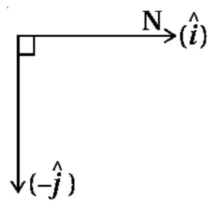
➠ **પ્રથમ કિસ્સો :**

છોકરીનો વેગ $\vec{v}_g = 5i$ m s^{-1}

છોકરીની સાપેક્ષે ટીપાંનો વેગ, $\vec{v}_{rg} = \vec{v}_r - \vec{v}_g$

$= (a\hat{i} + b\hat{j}) - 5\hat{i}$

$= (a - 5)\hat{i} + b\hat{j}$



પણ ટીપું અધોદિશામાં પડે છે, તેથી $a - 5 = 0 \Rightarrow \therefore a = 5$ ....(1)

➠ **બીજો કિસ્સો :**

$\vec{v}_g = 10\hat{i}$ m s^{-1}

$\therefore$ છોકરીની સાપેક્ષે ટીપાંનો વેગ $\vec{v}_{rg} = \vec{v}_r - \vec{v}_g = (a\hat{i} + b\hat{j}) - 5\hat{i} = (a - 10)\hat{i} + b\hat{j}$

ટીપું ઊર્ધ્વદિશા સાથે 45° ના ખૂણે પડતું દેખાય છે.

તેથી $\tan 45° = \frac{b}{a - 10}$

$\therefore\ 1 = \frac{b}{a - 10}$

$\therefore\ a - 10 = b$

$\therefore\ 5 - 10 = b$ (પરિણામ (1) પરથી)

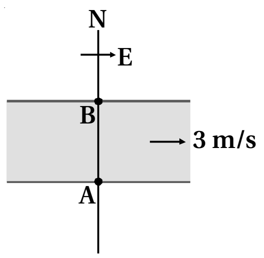
$\therefore\ b = -5$ ...(2)

$\therefore$ વરસાદ (ટીપાં)નો વેગ $\vec{v}_r = a\hat{i} + b\hat{j} = 5\hat{i} - 5\hat{j}$ (પરિણામ (1) અને (2) પરથી)

અને મૂલ્ય એટલે ઝડપ $= \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$

$\therefore\ v_r = 5\sqrt{2}$ m s^{-1}

6. **એક નદીમાં પાણી 3 m s^{-1}ની ઝડપથી પૂર્વ દિશામાં વહી રહ્યું છે. એક તરવૈયો સ્થિર પાણીમાં 4 m s^{-1}ની ઝડપથી તરી રહ્યો છે. (આકૃતિ)**



(a) જો તરવૈયો ઉત્તર દિશામાં તરવાનું શરૂ કરે તો તેનો પરિણામી વેગ કેટલો ?

(b) દક્ષિણ કાંઠાના A બિંદુથી તરવાનું શરૂ કરી સામેના કાંઠા પરના B બિંદુએ પહોંચવું હોય તો,

(i) તેણે કઈ દિશામાં તરવું જોઈએ ?

(ii) તેની પરિણામી ઝડપ કેટલી હશે ?

(c) ઉપરના (a) અને (b) કિસ્સાઓ પૈકી કયા કિસ્સામાં તે સામેના કાંઠે ઓછા સમયમાં પહોંચી શકે ?

➠ નદીના પાણીની ઝડપ $v_r = 3$ m/s (પૂર્વ દિશામાં)

તરવૈયાની ઝડપ $v_s = 4$ m/s (AB દિશામાં)

(a) જ્યારે તરવૈયો ઉત્તર દિશામાં તરે ત્યારે તેનો પરિણામી વેગ

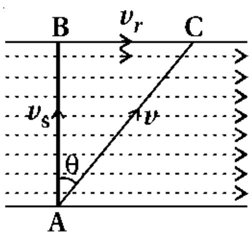
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_s^2}$$

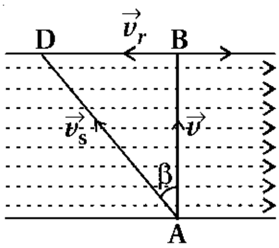
$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ m s}^{-1}$$

અને $\tan\theta = \frac{v_r}{v_s} = \frac{3}{4} = 0.75$

$\therefore$ $\theta = 36°54' \approx 37°$ શિરોલંબ ઉત્તર તરફ.





(b) જો નદીના સામેના કાંઠા પરના B બિંદુએ પહોંચવું હોય તો તેણે ઉત્તર દિશા સાથે પશ્ચિમ તરફ (વહેણની વિરુદ્ધ) β ખૂણે તરવું જોઈએ.

તરવૈયાનો પરિણામી વેગનું મૂલ્ય,

$\therefore$ $\vec{v} + \vec{v}_r = \vec{v}_s$

$\therefore$ $v = \sqrt{v_s^2 - v_r^2}$

$$= \sqrt{(4)^2 - (3)^2}$$

$$= \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \text{ m s}^{-1}$$

અને $\tan\beta = \frac{v_r}{v} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{2.646} = 1.1338$

$\therefore$ $\beta = 53°6'$ વહેણની વિરુદ્ધ દિશામાં

➠ નદીના પાણીની ઝડપ $v_r = 3$ m/s (પૂર્વ દિશામાં)

તરવૈયાની ઝડપ $v_s = 4$ m/s (AB દિશામાં)

(a) જ્યારે તરવૈયો ઉત્તર દિશામાં તરે ત્યારે તેનો પરિણામી વેગ

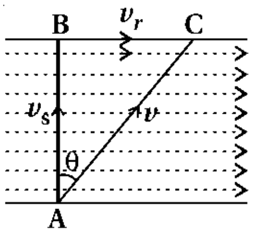
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_s^2}$$

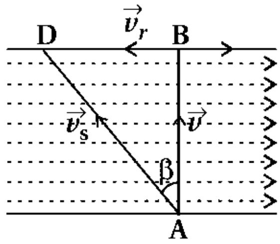
$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ m s}^{-1}$$

અને $\tan\theta = \frac{v_r}{v_s} = \frac{3}{4} = 0.75$

$\therefore$ $\theta = 36°54' \approx 37°$ શિરોલંબ ઉત્તર તરફ.





(b) જો નદીના સામેના કાંઠા પરના B બિંદુએ પહોંચવું હોય તો તેણે ઉત્તર દિશા સાથે પશ્ચિમ તરફ (વહેણની વિરુદ્ધ) β ખૂણે તરવું જોઈએ.

તરવૈયાનો પરિણામી વેગનું મૂલ્ય,

$\therefore \ \vec{v} + \vec{v}_r = \vec{v}_s$

$\therefore \ v = \sqrt{v_s^2 - v_r^2}$

$= \sqrt{(4)^2 - (3)^2}$

$= \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \ \text{m s}^{-1}$

અને $\tan\beta = \dfrac{v_r}{v} = \dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3}{2.646} = 1.1338$

$\therefore \ \beta = 53°6'$ વહેણની વિરુદ્ધ દિશામાં

7. **એક ક્રિકેટનો ફિલ્ડર દડાને v_0 વેગથી ફેંકી શકે છે. જો તે u ઝડપથી દોડતા-દોડતા દડાને સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણે ફેંકે તો નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ શોધો.**

(a) પ્રેક્ષકને દડો હવામાં સમક્ષિતિજ સાથે કેટલાં પરિણામી કોણે પ્રક્ષિપ્ત થયેલો દેખાશે ?

(b) દડાનો ઉડ્ડયન સમય કેટલો હશે ?

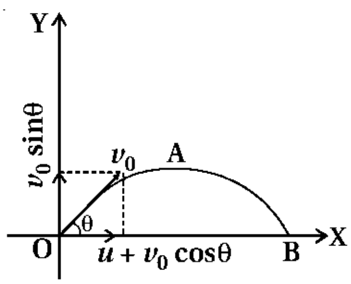
(c) પ્રક્ષિપ્ત બિંદુથી તે સમક્ષિતિજ દિશામાં જમીન પર પડે તેમની વચ્ચેનું અંતર કેટલું ?

(d) (c)માં મેળવેલ અંતર માટે તેણે કેટલાં કોણે પ્રક્ષિપ્ત કરવો જોઈએ કે જેથી મહત્તમ સમક્ષિતિજ અંતર મળે ?

(e) જો $u > u_0$, $u = u_0$ અને $u < v_0$ હોય તો મહત્તમ અવધિ માટેનો પ્રક્ષિપ્ત કોણ θ કેવી રીતે બદલાશે ?

(f) $u = 0$ (એટલે કે 45°) સાથે (v) મળતા θ ને કેવી રીતે સરખાવી શકાય ?

➠ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથની નીચેની આકૃતિ વિચારો.



(a) x-દિશામાં દડાનાં પ્રારંભિક વેગનો ઘટક

$u_x = u + v_0\cos\theta$

y-દિશામાં દડાનાં પ્રારંભિક વેગનો ઘટક

$u_y = v_0\sin\theta$

$\therefore \ \tan\theta = \dfrac{u_y}{u_x} = \dfrac{v_0 \sin\theta}{u + v_0 \cos\theta}$

$\therefore \ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{v_0 \sin\theta}{u + v_0 \cos\theta}\right)$

જે પ્રેક્ષકને દેખાતો પ્રક્ષિપ્ત કોણ છે.

(b) y-દિશામાં પરિણામી સ્થાનાંતર શૂન્ય છે.

$\therefore\ y = 0,\ u_y = v_0\sin\theta,\ a_y = -g$ અને $t = T$ મૂકતાં,

$y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$

$\therefore\ 0 = v_0\sin\theta T - \frac{1}{2} g T^2$

$\therefore\ 0 = v_0\sin\theta - \frac{1}{2} g T$

$\therefore\ \frac{1}{2} g T = v_0\sin\theta$

$\therefore\ T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$ ...(1)

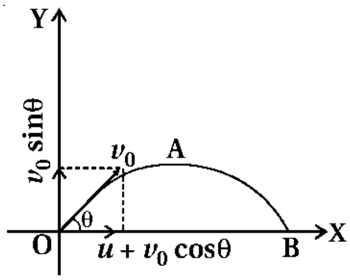
(c) સમક્ષિતિજ અવધિ $R = u_x T$

$= (u + v_0\cos\theta)T$

$= (u + v_0\cos\theta)\left(\frac{2v_0 \sin\theta}{g}\right)$

(પરિણામ (1) પરથી)

➠ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથની નીચેની આકૃતિ વિચારો.



(a) x-દિશામાં દડાનાં પ્રારંભિક વેગનો ઘટક

$u_x = u + v_0\cos\theta$

y-દિશામાં દડાનાં પ્રારંભિક વેગનો ઘટક

$u_y = v_0\sin\theta$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{v_0 \sin\theta}{u + v_0 \cos\theta}$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 \sin\theta}{u + v_0 \cos\theta}\right)$

જે પ્રેક્ષકને દેખાતો પ્રક્ષિપ્ત કોણ છે.

(b) y-દિશામાં પરિણામી સ્થાનાંતર શૂન્ય છે.

$\therefore\ y = 0,\ u_y = v_0\sin\theta,\ a_y = -g$ અને $t = T$ મૂકતાં,

$y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$

$\therefore\ 0 = v_0\sin\theta T - \frac{1}{2} g T^2$

$\therefore\ 0 = v_0\sin\theta - \frac{1}{2} g T$

$\therefore\ \frac{1}{2} g T = v_0\sin\theta$

$\therefore\ T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$ ...(1)

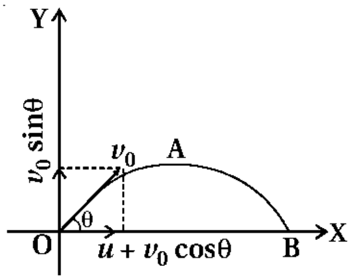
(c) સમક્ષિતિજ અવધિ $R = u_x T$

$= (u + v_0\cos\theta)T$

$= (u + v_0\cos\theta)\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)$

(પરિણામ (1) પરથી)

➠ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથની નીચેની આકૃતિ વિચારો.



(a) x-દિશામાં દડાનાં પ્રારંભિક વેગનો ઘટક

$u_x = u + v_0\cos\theta$

y-દિશામાં દડાનાં પ્રારંભિક વેગનો ઘટક

$u_y = v_0\sin\theta$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{v_0\sin\theta}{u + v_0\cos\theta}$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_0\sin\theta}{u + v_0\cos\theta}\right)$

જે પ્રેક્ષકને દેખાતો પ્રક્ષિપ્ત કોણ છે.

(b) y-દિશામાં પરિણામી સ્થાનાંતર શૂન્ય છે.

$\therefore\ y = 0,\ u_y = v_0\sin\theta,\ a_y = -g$ અને $t = T$ મૂકતાં,

$y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$

$\therefore\ 0 = v_0\sin\theta T - \frac{1}{2}gT^2$

$\therefore\ 0 = v_0\sin\theta - \frac{1}{2}gT$

$\therefore\ \frac{1}{2}gT = v_0\sin\theta$

$\therefore\ T = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$ ...(1)

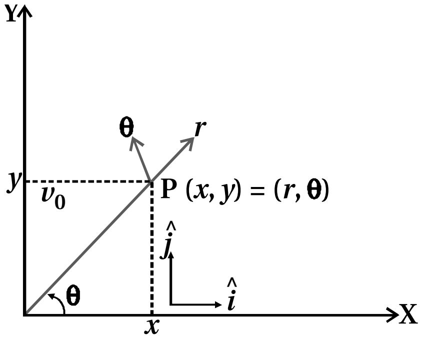
(c) સમક્ષિતિજ અવધિ $R = u_x T$

$= (u + v_0\cos\theta)T$

$= (u + v_0\cos\theta)\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)$

(પરિણામ (1) પરથી)

8. દ્વિપરિમાણમાં ગતિનો અભ્યાસ કરવા સ્થાન, વેગ અને પ્રવેગને સદિશ સ્વરૂપમાં $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ વડે રજૂ કરાય છે. જ્યાં $\hat{i}$ અને $\hat{j}$ એ અનુક્રમે x-અક્ષ અને y-અક્ષની દિશામાંના એકમ સદિશ છે તથા A_x અને A_y એ અનુક્રમે x-અક્ષ અને y-અક્ષની દિશામાંના ઘટકો છે. આવી ગતિનો અભ્યાસ વર્તુળાકાર ધ્રુવીય યામોના રૂપમાં પણ કરી શકાય. જેમાં $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta}$, જ્યાં $r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$ અને $\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$ તથા $\hat{r}$ અને $\hat{\theta}$ એ વધતાં મૂલ્યની દિશામાંના એકમ સદિશો છે, તો ....



(a) $\hat{i}$ અને $\hat{j}$ ને $\hat{r}$ અને $\hat{\theta}$ના સ્વરૂપમાં રજૂ કરો.

(b) દર્શાવો કે $\hat{r}$ અને $\hat{\theta}$ બંને પરસ્પર લંબ એકમ સદિશો છે.

(c) દર્શાવો કે

$$\frac{d}{dt}(\hat{r}) = \omega\hat{\theta}, \text{ જ્યાં } \omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ અને } \frac{d}{dt}(\hat{\theta}) = -\omega\hat{r}.$$

(d) સ્પાયરલ ગતિ કરતા કણની ગતિ $\vec{r} = a\theta\hat{r}$ વડે આપવામાં આવે છે. જ્યાં a = 1 તથા aનું પારિમાણિક સૂત્ર મેળવો.

(e) સ્પાયરલ ગતિ કરતાં કણ માટે વેગ અને પ્રવેગને ધ્રુવીય સદિશોના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

➠ (a) $\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$ ... (1)

$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$ ... (2)

સમી. (1)ને sinθ અને સમી. (2)ને cosθ વડે ગુણી સરવાળો કરતાં,

$\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta = \sin\theta\cos\theta\hat{i} + \sin^2\theta\hat{j} - \sin\theta\cos\theta\hat{i} + \cos^2\theta\hat{j}$

$= \sin^2\theta\hat{i} + \cos^2\theta\hat{j}$

$\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta = \hat{j}$ ...(1) $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

હવે સમી. (1)ને cosθ અને સમી. (2)ને sinθ વડે ગુણી બાદબાકી કરતાં,

$\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta = \cos^2\theta\hat{i} + \sin\theta\cos\theta\hat{j} + \sin^2\theta\hat{i} - \sin\theta\cos\theta\hat{j}$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\hat{i}$

$\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta = \hat{i}$ ...(2) $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

(b) $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = (\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})\cdot(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$

$= -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta$

$= 0$

$\therefore \hat{r} \perp \hat{\theta}$

(c) $\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$

$$\therefore \frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\hat{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

પણ $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ મૂકતાં,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\omega\sin\hat{i} + \omega\cos\theta\hat{j}$$

$= \omega[-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}]$

$$\therefore \frac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{\theta} \quad (\because \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$$

(d) $\vec{r} = a\theta\hat{r}$

$\therefore |\vec{r}| = a\theta$

$\therefore\ a = \dfrac{|\vec{r}|}{\theta}$

➠ **(a)** $\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$ ... (1)

$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$ ... (2)

સમી. (1)ને $\sin\theta$ અને સમી. (2)ને $\cos\theta$ વડે ગુણી સરવાળો કરતાં,

$\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta = \sin\theta\cos\theta\hat{i} + \sin^2\theta\hat{j} - \sin\theta\cos\theta\hat{i} + \cos^2\theta\hat{j}$

$= \sin^2\theta\hat{i} + \cos^2\theta\hat{j}$

$\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta = \hat{j}$ ...(1) $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

હવે સમી. (1)ને $\cos\theta$ અને સમી. (2)ને $\sin\theta$ વડે ગુણી બાદબાકી કરતાં,

$\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta = \cos^2\theta\hat{i} + \sin\theta\cos\theta\hat{j} + \sin^2\theta\hat{i} - \sin\theta\cos\theta\hat{j}$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\hat{i}$

$\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta = \hat{i}$ ...(2) $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

(b) $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = (\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})\cdot(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$

$= -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta$

$= 0$

$\therefore\ \hat{r} \perp \hat{\theta}$

(c) $\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$

$\therefore\ \dfrac{d\hat{r}}{dt} = -\sin\theta\dfrac{d\theta}{dr}\hat{i} + \cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\hat{j}$

પણ $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ મૂકતાં,

$\dfrac{d\hat{r}}{dt} = -\omega\sin\hat{i} + \omega\cos\theta\hat{j}$

$= \omega[-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}]$

$\therefore\ \dfrac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{\theta}$ $(\because \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$

(d) $\vec{r} = a\theta\hat{r}$

$\therefore\ |\vec{r}| = a\theta$

$\therefore\ a = \dfrac{|\vec{r}|}{\theta}$

➠ **(a)** $\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$ ... (1)

$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$ ... (2)

સમી. (1)ને $\sin\theta$ અને સમી. (2)ને $\cos\theta$ વડે ગુણી સરવાળો કરતાં,

$\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta = \sin\theta\cos\theta\hat{i} + \sin^2\theta\hat{j} - \sin\theta\cos\theta\hat{i} + \cos^2\theta\hat{j}$

$= \sin^2\theta\hat{i} + \cos^2\theta\hat{j}$

$\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta = \hat{j}$ ...(1) $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

હવે સમી. (1)ને $\cos\theta$ અને સમી. (2)ને $\sin\theta$ વડે ગુણી બાદબાકી કરતાં,

$\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta = \cos^2\theta\hat{i} + \sin\theta\cos\theta\hat{j} + \sin^2\theta\hat{i} - \sin\theta\cos\theta\hat{j}$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\hat{i}$

$\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta = \hat{i}$ ...(2) $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

(b) $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = (\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}) \cdot (-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$

$= -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta$

$= 0$

$\therefore\ \hat{r} \perp \hat{\theta}$

(c) $\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$

$$\therefore\ \frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\hat{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

પણ $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ મૂકતાં,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\omega\sin\hat{i} + \omega\cos\theta\,\hat{j}$$

$$= \omega[-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}]$$

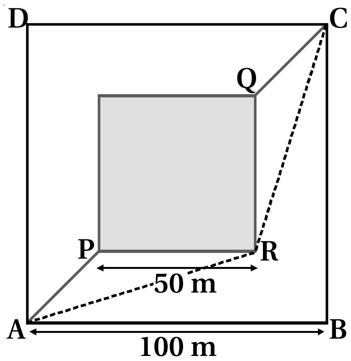
$$\therefore\ \frac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{\theta} \quad (\because\ \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$

(d) $\vec{r} = a\theta\hat{r}$

$\therefore\ |\vec{r}| = a\theta$

$$\therefore\ a = \frac{|\vec{r}|}{\theta}$$

9. **આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ એક વ્યક્તિ ચોરસના A બિંદુથી સામેના છેડે આવેલા C બિંદુ પર જવા માંગે છે. ચોરસની બાજુની લંબાઈ 100 m છે. મધ્યમાં આવેલ 50 m × 50 m ચોરસમાં રેતી પથરાયેલ છે. આ રેતીવાળા ચોરસની બહાર તે 1 m s^{-1}ની ઝડપથી ચાલી શકે છે જ્યારે રેતીવાળા ચોરસમાં v m s^{-1}ની ઝડપથી ચાલી શકે છે જ્યાં ($v < 1$) તો રેતીમાંથી ચાલીને કે રેતીની બહારથી ચાલીને C બિંદુ પર ઝડપથી પહોંચવા vનું ન્યૂનતમ મૂલ્ય કેટલું હોવું જોઈએ ?**



➠ વિકર્ણ PQ = $\sqrt{(50)^2 + (50)^2} = \sqrt{2 \times (50)^2} = 50\sqrt{2}$ m

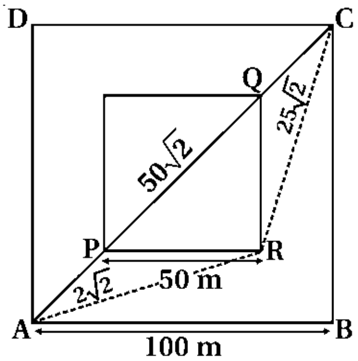
વિકર્ણ AC = $\sqrt{(100)^2 + (100)^2} = \sqrt{2 \times (100)^2} = 100\sqrt{2}$ m

$\therefore$ AP + QC = AC − PQ

$= 100\sqrt{2} - 50\sqrt{2}$

$= 50\sqrt{2}$ m

પણ AP = QC = $\frac{50\sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{2}$ m



A પરથી C પર સૌથી ટૂંકો માર્ગ રેતીમાંથી ચાલીને મળે આ માર્ગે લાગતો સમય t_1 હોય તો

$$t_1 = \frac{AP + QC}{1} + \frac{PQ}{v} \qquad \left[t = \frac{\text{અંતર}}{\text{વેગ}}\right]$$

$$= \frac{25\sqrt{2} + 25\sqrt{2}}{1} + \frac{50\sqrt{2}}{v}$$

$$t_1 = 50\sqrt{2} + \frac{50\sqrt{2}}{v}$$

$$t_1 = 50\sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{v}\right] \qquad \ldots(1)$$

➠ વિકર્ણ PQ = $\sqrt{(50)^2 + (50)^2} = \sqrt{2 \times (50)^2} = 50\sqrt{2}$ m

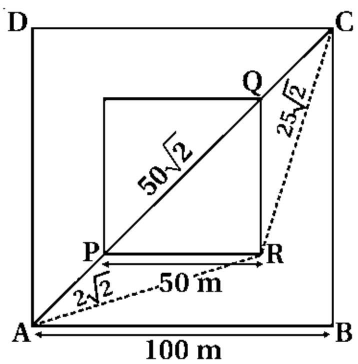
વિકર્ણ AC = $\sqrt{(100)^2 + (100)^2} = \sqrt{2 \times (100)^2} = 100\sqrt{2}$ m

$\therefore$ AP + QC = AC − PQ

$= 100\sqrt{2} - 50\sqrt{2}$

$= 50\sqrt{2}$ m

પણ AP = QC = $\frac{50\sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{2}$ m



A પરથી C પર સૌથી ટૂંકો માર્ગ રેતીમાંથી ચાલીને મળે આ માર્ગે લાગતો સમય t_1 હોય તો

$$t_1 = \frac{AP + QC}{1} + \frac{PQ}{v} \qquad \left[t = \frac{\text{અંતર}}{\text{વેગ}}\right]$$

$$= \frac{25\sqrt{2} + 25\sqrt{2}}{1} + \frac{50\sqrt{2}}{v}$$

$$t_1 = 50\sqrt{2} + \frac{50\sqrt{2}}{v}$$

$$t_1 = 50\sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{v}\right] \quad \ldots(1)$$