ରେଖା ଓ କୋଣ

(LINES AND ANGLES)

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଆମେ ଯାହାକିଛି ଦେଖୁ ତାହାର କିଛି ନା କିଛି ଆକୃତି ଥାଏ । ପତ୍ର, ଫୁଲ, ଫଳ, ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ସ୍ଫଟିକ- ଏ ସମସ୍ତ ପଦାର୍ଥ ବହୁବିଧ ଆକୃତିର ପରିପ୍ରକାଶ । ଏକାଧିକ ଆକୃତିର ଶୃଙ୍ଖଳିତ ସଂଯୋଜନା ଫଳରେ ସୌନ୍ଦର୍ଯ୍ୟ ବହୁଗୁଣିତ ହୋଇଥାଏ । ବିଭିନ୍ନ ପଦାର୍ଥର ଆକୃତିଗତ ସାଦୃଶ୍ୟ ଓ ବୈସାଦୃଶ୍ୟ ମନୁଷ୍ୟର କୌତୁହଳ ପ୍ରବଣ ମନକୁ ଅନାଦି କାଳରୁ ଆଛନ୍ନ କରି ଆସିଛି । ଆକୃତି-ସଚେତନତା କେବଳ ମଣିଷର ବିଶେଷତ୍ୱ ନୁହେଁ, ଏହା ଜୀବଜନ୍ତୁଙ୍କର ମଧ୍ୟ ପ୍ରବୃତ୍ତିଗତ । ବାୟାଚଢ଼େଇର ଦୁଇ ଥାକିଆ ଅଦ୍ଭୁତ ବସା, ବୁଢ଼ିଆଣିର ଜାଲ, ମହୁଫେଣାର ସୁସଂଯୋଜିତ କୋଷିକା – ଏସବୁ ଉଦାହରଣରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ । ପ୍ରବୃତ୍ତିଗତ ଆକୃତି-ସଚେତନତାର ଉପଯୋଗ କରି ମନୁଷ୍ୟ ନିଜର ସଭ୍ୟତା ଓ ଜ୍ଞାନର ଉତ୍କର୍ଷ ସାଧନ କରି ପାରିଛି ।

ଆକୃତିଗତ ଜ୍ଞାନର ପରିମାର୍ଜନା ଫଳରେ ହିଁ ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ରର ଉଦ୍ଭବ ହୋଇଛି । ଯାଯାବର ଅବସ୍ଥାରୁ ଓହରି ଆସି କୃଷିକର୍ମକୁ ଆଦରି ନେବା ପରେ ମନୁଷ୍ୟ ସ୍ଥାୟୀ ବସତି ସ୍ଥାପନ କଲା । ଚାଷଜମିର ଆକାର ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ, ରାସ୍ତା ଓ ବାସଗୃହ ନିର୍ମାଣରେ ପ୍ରକୃତିରୁ ଆହରଣ କରିଥିବା ଆକୃତିଗତ ଜ୍ଞାନର ଉପଯୋଗ ହେଲା । ପରିମାଣ ସ୍ୱରୂପ ଜ୍ଞାନରାଜ୍ୟରେ ଏକ ବିସ୍ତୃତ ପରିସର ଉନ୍ମୁକ୍ତ ହେଲା ଓ ତାହା ହେଉଛି ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ର । **'ଜ୍ୟାମିତି'** ଶବ୍ଦଟିର ଅର୍ଥରୁ ଏକଥା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ । 'ଜ୍ୟା'ର ଅର୍ଥ ପୃଥିବୀ ଓ 'ମିତି'ର ଅର୍ଥ ମାପ । **'Geometry'** ଶବ୍ଦଟି ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ଗ୍ରୀକ୍ ଶବ୍ଦ Geo (ପୃଥିବୀ) ଓ Metron (ମାପ)ରୁ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି ।

ଜମି ମାପ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତାରୁ ଜ୍ୟାମିତିର ସୃଷ୍ଟି । ମାନବ ସଭ୍ୟତାର ଅଗ୍ରଗତି ସହିତ ଜ୍ୟାମିତି ଅଭିବୃଦ୍ଧି ଜଡ଼ିତ ।

ଜ୍ୟାମିତିର ବିକାଶ ସାଧନ କରିଥିବା ପ୍ରାଚୀନତମ ସଭ୍ୟତା ହେଉଛି ମିଶରୀୟ ସଭ୍ୟତା । ସେଠିକାର ବୃହଦାକାର ପିରାମିଡ୍ ଗୁଡ଼ିକ ଉନ୍ନତ ଜ୍ୟାମତି ଜ୍ଞାନର ନିଦର୍ଶନ । ବୈଦିକ ଯୁଗରେ ଭାରତୀୟ ଋଷିଗଣ ଯଜ୍ଞକୁଣ୍ଡ, ପୂଜାବେଦୀ ଆଦିର ନିର୍ମାଣ କାର୍ଯ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାମିତିକ ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରୁଥିଲେ । ଆନୁମାନିକ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 800 ରୁ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 500 ମଧ୍ୟରେ ଭାରତରେ ରଚିତ **'ଶୁଲ୍ବ ସୂତ୍ର'** ଏକ ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ର । ଶୁଲ୍ବ ଅର୍ଥାତ୍ ରଜ୍ଜୁ ଦ୍ୱାରା ଜ୍ୟାମିତିକ ମାପ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂତ୍ରକୁ ନେଇ ଏହି ଶାସ୍ତ୍ର ସମୃଦ୍ଧ । ମହେନ୍‌ଜୋଦାରୋ ଓ ହରପ୍ପା ସଭ୍ୟତାର ଧ୍ୱଂସାବଶେଷରୁ ମଧ୍ୟ ବାସଗୃହ, ସ୍ନାନାଗାର ଓ ରାସ୍ତା

ନିର୍ମାଣରେ ଜ୍ୟାମିତିକ ନକ୍‌ସାର ପ୍ରୟୋଗ ଦେଖିବାକୁ ମିଳେ । ପରବର୍ତ୍ତୀ କାଳରେ ଭାସ୍କର, ଆର୍ଯ୍ୟଭଟ୍ଟ, ବ୍ରହ୍ମଗୁପ୍ତ, ମହାବୀର ଆଦି ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞଗଣ ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ରର ଉତ୍କର୍ଷ ସାଧନ କରିଛନ୍ତି ।

ପ୍ରାଥମିକ ଅବସ୍ଥାରେ ଜ୍ୟାମିତିର ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଓ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ମୁଖ୍ୟତଃ ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ଉପାୟରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହେଉଥିଲା । ପରୀକ୍ଷା ଓ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣକୁ ଆଧାର କରି ପଣ୍ଡିତମାନେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସୂତ୍ର ପ୍ରଣୟନ କରୁଥିଲେ । ଜ୍ୟାମିତି ଥିଲା ମୁଖ୍ୟତଃ ଅଭିଜ୍ଞତା ପ୍ରସୂତ ।

କାଳକ୍ରମେ **ଥାଲେସ୍ (Thales), ପିଥାଗୋରାସ୍, ସକ୍ରେଟିସ୍, ପ୍ଲାଟୋ, ଆରିଷ୍ଟଟ୍‌ଲ୍** ଆଦି ଗ୍ରୀକ୍ ବିଦ୍ୱାନ ଗଣ ତର୍କଶାସ୍ତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟ ଉନ୍ମୋଚନ କରିବାର ଧାରା ଆରମ୍ଭ କଲେ । ଏ ଦିଗରେ ଗ୍ରୀକ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଇଉକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କର** ଉଦ୍ୟମ ବିଶେଷ ପ୍ରଣିଧାନ ଯୋଗ୍ୟ । ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ ଚତୁର୍ଥ ଶତାବ୍ଦୀରେ ରଚିତ ଓ ତେରଖଣ୍ଡରେ ବିଭକ୍ତ **ଏଲିମେଣ୍ଟ୍‌ସ୍ (Elements)** ଗ୍ରନ୍ଥରେ ସମୁଦାୟ ଚାରିଶହ ପଞ୍ଚଷଠି ଟି ଉପପାଦ୍ୟ ସନ୍ନିବେଶିତ କରି ଇଉକ୍ଲିଡ୍ ପ୍ରତିପାଦନ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କଲେ ଯେ ଅଳ୍ପ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟକୁ ସ୍ୱୀକାର କରିନେଲେ ବାକି ସମସ୍ତ ସିଦ୍ଧାନ୍ତକୁ ତର୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିପାଦନ କରି ହେବ । ତାଙ୍କର ଏହି ପ୍ରଚେଷ୍ଟା ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ର ପାଇଁ ଏକ ଯୁଗାନ୍ତକାରୀ ପଦକ୍ଷେପ ଥିଲା । ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ତଥ୍ୟ ଆହରଣ ଅପେକ୍ଷା ତତ୍ତ୍ୱ ନିରୂପଣର ମାର୍ଗ ପ୍ରଶସ୍ତ ହେଲା । ତେଣୁ **ଇଉକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କୁ ଯଥାର୍ଥରେ ଜ୍ୟାମିତିର ଜନକ** ଆଖ୍ୟା ଦିଆଯାଏ । ତାଙ୍କ ନାମାନୁଯାୟୀ **'ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତି' (Euclidean Geometry)** ନାମ ପ୍ରଚଳିତ ।

ଇଉକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଣିତ ଜ୍ୟାମିତିରେ କେତେକ ତାର୍କିକ ଅସଂଗତି ରହିଥିବା କଥା **ବିଖ୍ୟାତ ଦାର୍ଶନିକ ଓ ଗଣିତଜ୍ଞ ବର୍ଟ୍ରାଣ୍ଡ ରସେଲ୍ (Bertrand Russell) ତାଙ୍କର Mathematics and Metaphysics** ପ୍ରବନ୍ଧରେ ଦର୍ଶାଇ ଦେବା ପରେ ଜ୍ୟାମିତିକୁ ତ୍ରୁଟିମୁକ୍ତ କରି ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ତର୍କସମ୍ମତ ଭିତ୍ତିଭୂମିରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ କରିବାର ପ୍ରଚେଷ୍ଟା କରାଗଲା । ଏଥିପାଇଁ ମୁଖ୍ୟଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ଦୁଇଜଣ ଗଣିତଜ୍ଞ ହେଉଛନ୍ତି ଆମେରିକାର **ଜର୍ଜଡେଭିଡ୍ ବିର୍‌କଫ୍ (George David Birkhoff)** ଓ ଜର୍ମାନୀର **ଡେଭିଡ୍ ହିଲ୍‌ବର୍ଟ (David Hilbert)** । ବିର୍‌କଫ୍‌ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପରିମାର୍ଜିତ ଜ୍ୟାମିତି ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତର ପାଇଁ ଅଧିକ ଉପଯୁକ୍ତ । ଏହା ତାଙ୍କର 1932 ମସିହାର ନିବନ୍ଧ **'A set of postulates for plane - geometry based on scale and protractor'** ଉପରେ ଆଧାରିତ ।

ଆଧୁନିକ ଜ୍ୟାମିତି ଉଭୟ ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ବହୁତ ସମୃଦ୍ଧ । ଏହାର ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଅଭିଜ୍ଞତା ଭିତ୍ତିକ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରାଯାଉଥିଲେ ମଧ୍ୟ ସଂଜ୍ଞା ଓ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସମ୍ବଳିତ ତତ୍ତ୍ୱକୁ ସମଗ୍ର ପ୍ରକାର ଆଧୁନିକ ଗଣିତର ଭାଷା ଅର୍ଥାତ୍ **ସେଟ୍** (Set) ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ କରାଯାଏ । ଫଳରେ ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତ ଅଧ୍ୟୟନ ନିମନ୍ତେ ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ଭିତ୍ତିଭୂମି ପ୍ରସ୍ତୁତ ହୁଏ । ଆମେ ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରେ ପଢୁଥିବା ଜ୍ୟାମିତି **ଇଉକ୍ଲିଡ୍ୀୟ ଜ୍ୟାମିତି ବା ସମତଳ ଜ୍ୟାମିତି** ନାମରେ ପରିଚିତ ।

1.2 ମୌଳିକ ଅବବୋଧ - ଏକ ପୁନରାବୃତ୍ତି (Fundamental Concepts - a Recapitulation) :

ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାଠରେ କେତେକ ବିଶେଷ ପ୍ରକାର ଶବ୍ଦ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅର୍ଥରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ସେହି ଶବ୍ଦଗୁଡ଼ିକୁ **'ପଦ' (term)** କୁହାଯାଏ । ପଦଗୁଡ଼ିକ ଆମର ଦୈନନ୍ଦିନ ଭାଷାରୁ ସଂଗୃହିତ ହୋଇଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଆମେ ସେମାନଙ୍କର ଭାଷାଗତ ଅର୍ଥକୁ ବିଚାର କରିବା ପରିବର୍ତ୍ତେ ପାଠ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଅର୍ଥକୁ ହିଁ ଗ୍ରହଣ କରୁ ।

ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ର ଅନ୍ତର୍ଗତ ପଦଗୁଡ଼ିକ ଦୁଇ ପର୍ଯ୍ୟାୟଭୁକ୍ତ - **ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦ ଓ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ପଦ** । ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦ ହେଲେ **ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା ବା ସରଳରେଖା** (ଏକ ଅର୍ଥରେ ବ୍ୟବହୃତ) **ଓ ସମତଳ** । ଏହି ତିନୋଟି ପଦ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ

ସମସ୍ତ ପଦ ସଂଜ୍ଞାକୃତ । ଅର୍ଥନିରୂପକ ବାକ୍ୟକୁ **'ସଂଜ୍ଞା'** କୁହାଯାଏ । ଗୋଟଏ ଅଜଣା ପଦର ଅର୍ଥ ପୂର୍ବରୁ ଜଣାଥିବା ପଦ ମାଧ୍ୟମରେ ନିରୂପିତ ହୁଏ । ତେଣୁ ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ ପାଇଁ ଆମ ପାଖରେ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସଂଖ୍ୟକ **'ଜଣାପଦ' ବା 'ମୌଳିକ ପଦ'** ଥିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଜ୍ୟାମିତିରେ ବ୍ୟବହୃତ ସମସ୍ତ ପଦର ଅର୍ଥ ବା ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ ପାଇଁ ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା ଓ ସମତଳ ଏହି ତିନୋଟି ମୌଳିକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଏହି ତିନୋଟି ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦର ପରିଚୟ ବିଭିନ୍ନ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଦିଆଯାଇଛି । ପରୀକ୍ଷା ନିରୀକ୍ଷା ମାଧ୍ୟମରେ ଉପଲବ୍ଧ ଅନୁଭୂତିକୁ ଆଧାର କରି ସେମାନଙ୍କର କେତେକ ଧର୍ମକୁ **ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Axiom)** ଆଖ୍ୟା ଦେଇ ମାନି ନିଆଯାଇଛି ।

ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା ଓ ସମତଳ - ଏଗୁଡ଼ିକ ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦ ହୋଇଥିବାରୁ ଏମାନଙ୍କର ପରିଚୟ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉଦାହରଣରେ ସୀମିତ ନୁହେଁ ।

ଆମେ ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଜାଣିଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସମୂହର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପୁନରାଲୋଚନା କରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 1 : ରେଖା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହର ବା ସେଟ୍ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ (1) : L ନାମକ ଏକ ରେଖାର P ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଆମେ ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ଲେଖି ପାରିବା '$P \in L$' କିମ୍ବା 'P, L' ରେଖାର ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଅଥବା ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ବ୍ୟବହାର ଉପଯୋଗୀ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ବାକ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ପାରିବା : 'L ରେଖା P ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରେ'

'L ସରଳ ରେଖା P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ।

'L, P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବା ମଧ୍ୟଦେଇ ଯାଇଥିବା ଏକ ସରଳ ରେଖା',

'P, L ସରଳ ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ' । ଏ ସମସ୍ତ ବାକ୍ୟର ଏକ ମାତ୍ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି $P \in L$ ଅଥବା P, L ରେଖାର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । ଏହା ବ୍ୟତୀତ ବାକ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଶବ୍ଦଗତ ଅର୍ଥ ବିଚାର ଯୋଗ୍ୟ ନୁହେଁ ।

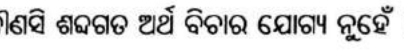
ସରଳ ରେଖା ବିଷୟରେ ଅଧିକ ସୂଚନା ପରିବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟମାନଙ୍କରୁ ମିଳିବ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -2 . ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟିର ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ ହେଉଛି - ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ।

ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ଯଦି L ସରଳ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ L କୁ ଆମେ $\overleftrightarrow{PQ}$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ନାମିତ କରିବା । '**$\overleftrightarrow{PQ}$ କୁ PQ ରେଖା (ବା ସରଳ ରେଖା)**' ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ । $\overleftrightarrow{PQ}$ ର ଚିତ୍ର ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା । $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ R ହେଲେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-2 ରୁ ଏହା **ସ୍ପଷ୍ଟ** ହୁଏ ଯେ $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{RP}$, $\overleftrightarrow{RQ}$, $\overleftrightarrow{QR}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ ତଥା $\overleftrightarrow{QP}$ -

ଏ ସମସ୍ତ ଗୋଟିଏ ରେଖାର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ନାମ ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 1.1)

PM-03/11/16

ଏକରେଖୀ ଓ ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ (Collinear and Non-collinear Points) :

ସଂଜ୍ଞା : - ତିନି ବା ତାହାଠାରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁ ଯଦି ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ଏକରେଖୀ (ବା ସରଳ ରୈଖିକ) ବିନ୍ଦୁ (Collinear Points) କୁହାଯାଏ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -2 ଅନୁଯାୟୀ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ସର୍ବଦା ଏକରେଖୀ ଅଟନ୍ତି । ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଏକାଧିକ ସରଳରେଖାରେ ରହିପାରେ - ଏକଥା ପରବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟମାନଙ୍କରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯେଉଁସବୁ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନୁହଁନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ନୈକରେଖୀ (ବା ଅଣସରଳରୈଖିକ) ବିନ୍ଦୁ (Non-collinear Points) କୁହାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଛେଦ (Intersection of two lines) :

ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B ର ଛେଦ ବା $A \cap B$ କହିଲେ ଆମେ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଅର୍ଥାତ୍ ଉଭୟ A ଓ B ରେ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ବୁଝିଥାଉ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦୁଇଟି ସମ୍ଭାବନା ଥାଏ :

(i) $A \cap B = \phi$, ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ B ର କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ନାହାଁନ୍ତି;

(ii) $A \cap B \neq \phi$, ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ B ର ଏକ ବା ଏକାଧିକ ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଅଛନ୍ତି ।

ସରଳରେଖାଗୁଡ଼ିକ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦ ବିଷୟ ବିଚାରକୁ ନେବା । ମନେକର L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ ପୂର୍ବ ଭଳି ଦୁଇଟି ସମ୍ଭାବନା ରହିଛି :

(i) $L_1 \cap L_2 = \phi$, ଅର୍ଥାତ୍ ରେଖାଦ୍ୱୟର କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ (Point of Intersection) ନାହିଁ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସେମାନଙ୍କୁ **ଅଣଛେଦୀ ରେଖା (Non-intersecting lines)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) $L_1 \cap L_2 \neq \phi$, ଅର୍ଥାତ୍ ରେଖାଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଅଛି । ତେବେ ସାଧାରଣ ସେଟ୍‌ଭଳି ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ L_1 ଓ L_2 ର ଏକାଧିକ ସାଧାରଣବିନ୍ଦୁ ରହିବା ସମ୍ଭବ କି ?

ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ସୁଦ୍ଧା ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଦୁଇଟି ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହି ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ପରବର୍ତ୍ତୀ 'ଉପପାଦ୍ୟ'ରୁ ପାଇ ପାରିବା । **(ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ସଜ୍ଞାକୁ ଭିତ୍ତି କରି ତର୍କ ବା ଯୁକ୍ତି ମାଧମରେ ଯେଉଁ କଥା ପ୍ରତିପାଦନ ବା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଏ, ତାହାକୁ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।)**

ଉପପାଦ୍ୟ - 1

ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖାର ଏକାଧିକ ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ରହିବା ଅସମ୍ଭବ । (ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ ଆଦୌ ଛେଦ କରନ୍ତି ନାହିଁ କିମ୍ବା ପରସ୍ପରକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।)

(Two distinct lines can not have more than one point in common)

ଦତ୍ତ : L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ସରଳ ରେଖା ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L_1 ଓ L_2 ର ଗୋଟିଏ ରୁ ଅଧିକ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର ପ୍ରାମାଣ୍ୟ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ।

$\therefore$ L_1 ଓ L_2 ର ଅତିକ୍ରମରେ ଦୁଇଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ରହିଛି । ସେ ଦୁଇଟି P ଓ Q ହେଉ ।

ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ମଧ୍ୟଦେଇ କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{PQ}$ ଅବସ୍ଥିତ । (ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 2)

$\therefore$ $L_1 = \overleftrightarrow{PQ} = L_2$ (ଅର୍ଥାତ୍ L_1 ଓ L_2, $\overleftrightarrow{PQ}$ ଠାରୁ ଭିନ୍ନ ନୁହଁନ୍ତି)

ମାତ୍ର ଏହା ଅସମ୍ଭବ, କାରଣ ଦତ୍ତ ଅଛି, L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା, ଅର୍ଥାତ୍ $L_1 \neq L_2$ ।

ତେଣୁ ପ୍ରମାଣ ଆରମ୍ଭରୁ ଆମେ ମାନି ନେଇଥିବା ଉକ୍ତିଟି ମିଥ୍ୟା ଅଟେ ।

$\therefore$ L_1 ଓ L_2 ର ଏକାଧିକ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ରହିବା ଅସମ୍ଭବ ।(ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଉପପାଦ୍ୟଟିର ପ୍ରମାଣରେ ଯେଉଁ ପ୍ରକାର ଯୁକ୍ତିର ପ୍ରୟୋଗ କରାଗଲା ତାହାକୁ **'ଅସମ୍ଭବାୟନ ସୂତ୍ର'** **(Principle of reductio ad absurdum)** କୁହାଯାଏ । ଯଦି ଗୋଟିଏ ଉକ୍ତିକୁ ମିଛ ବୋଲି ମାନିନେଲେ ଆମେ ଅସମ୍ଭବ ପରିସ୍ଥିତିର ସମ୍ମୁଖୀନ ହେଉ, ତେବେ ମାନିବାକୁ ହେବ ଯେ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରମାଣରେ ଅସମ୍ଭବାୟନ ସୂତ୍ରର ବହୁଳ ପ୍ରୟୋଗ ଦେଖିବାକୁ ମିଳେ ।

ସମତଳ (Plane) : ଗୋଟିଏ ଇଟାର ପୃଷ୍ଠ, ପୋଖରୀର ଜଳପୃଷ୍ଠ, ଶ୍ରେଣୀଗୃହରେ ଥିବା କଳାପଟାର ପୃଷ୍ଠ, ପକ୍କାଘରର ଚଟାଣ ଆଦିରୁ ସମତଳର ସୀମିତ ଧାରଣା ମିଳେ । ଜ୍ୟାମିତିରେ ଆମର ବିଚାର ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମତଳ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମା ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ନୁହେଁ । ଏହା ସୀମାହୀନ ଭାବରେ ବିସ୍ତୃତ ବୋଲି ବିଚାର କରାଯାଏ । ସମତଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମର ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ହେଉଛି :

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -3 : ସମତଳ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଅଟେ ।

ମନେକର A, B, C ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁ । ସମତଳର ନାମ P ଦିଆଯାଉ । ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ A, B, C ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ P ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ । ଏହି କଥାକୁ ଆମେ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଯେକୌଣସି ବାକ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବା :

A, B, C ବିନ୍ଦୁ P ସମତଳରେ (ବା P ସମତଳ ଉପରେ) ଅବସ୍ଥିତ,

P ସମତଳ A, B, C ମଧ୍ୟଦେଇ ଅବସ୍ଥିତ, P ସମତଳ A, B, C ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଛି ।

ଏ ସମସ୍ତ ବାକ୍ୟର ଏକମାତ୍ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି - $A \in P$, $B \in P$, $C \in P$ ବାକ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ଅନ୍ୟ କୌଣସି ପ୍ରକାର ଶବ୍ଦଗତ ଅର୍ଥ ବିଚାର କରାଯାଏ ନାହିଁ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 4 : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅନ୍ତତଃ ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ଏବଂ ଯେକୌଣସି ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସମତଳ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଟିପ୍ପଣୀ : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ପରବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟମାନଙ୍କରୁ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇପାରିବ । ତେଣୁ ମାତ୍ର ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ସ୍ୱୀକାର କରାଗଲା ।

ସମତଳର ନାମ କରଣ : ଗୋଟିଏ ସମତଳର ନାମକରଣ ସେଥିରେ ଥିବା ଯେ କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ସାହାଯ୍ୟରେ କରାଯାଏ ।

A, B, C ଏକ ସମତଳସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଆମେ ସମତଳଟିକୁ 'ABC ସମତଳ' (ବା BAC, CAB ସମତଳ) ବୋଲି ନାମିତ କରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ମାଧ୍ୟମରେ ସରଳରେଖା ଓ ସମତଳ, ଏ ଦୁଇଟିର ଯେଉଁ ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିଚୟ ଆମେ ପାଇଲେ, ତାହା ହେଉଛି – ଉଭୟେ ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ତେବେ ଏ ଦୁଇ ପ୍ରକାର ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସମ୍ପର୍କ ଅଛି କି ? ଯଦି ଅଛି, ତେବେ କେଉଁ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଅଛି – ଏ କଥା ପରବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରୁ ଜଣାପଡ଼ିବ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-5: ଏକ ସମତଳସ୍ଥ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସରଳରେଖା ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଯଦି A ଓ B, P- ସମତଳର ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ $\overleftrightarrow{AB}$ Pସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ, ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖାଟିର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ P-ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏହି କଥାକୁ ଆମେ ସେଟ୍ – ଭାଷାରେ ଲେଖି ପାରିବା : $\overleftrightarrow{AB} \subset P$, ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{AB}$, P-ସମତଳର ଉପସେଟ୍ ଅଟେ ।

ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା; ସରଳରେଖା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

ଏ ସମ୍ପର୍କରେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଷଦ୍ ଭାଗରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଏଠାରେ କେବଳ ଏ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟି ମନେ ପକାଇବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 6 (ରୁଲର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) (Ruler Postulate / Axiom)

ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଯୋଡ଼ା ଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଣରଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ, ଯାହାକୁ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା କୁହାଯାଏ । ଦୂରତାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ଏଭଳି ଏକ ସମ୍ପର୍କ ସୃଷ୍ଟି କରି ପାରିବା ଯାହା ଫଳରେ

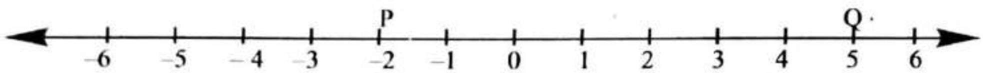
(i) ସରଳରେଖା ଉପରେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ନିରୂପଣ କରି ପାରିବା;

(ii) ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ଦୂରତା, ସେମାନଙ୍କ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରର ପରମମାନ (ଅଣରଣାତ୍ମକ ଅନ୍ତର) ସହ ସମାନ ହେବ।

ଟୀକା :(1) A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତାକୁ AB ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । AB ସରଳ ରେଖାରେ A ଓ B ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ a ଓ b ହେଲେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ $AB = |a - b|$ ଅର୍ଥାତ୍ $a - b$ ର ପରମମାନ ଅଟେ । ତେଣୁ ଏହା **ସ୍ପଷ୍ଟ** ଯେ $AB = |a - b| = |b - a| = BA$ ଅଟେ । ସେହିପରି A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଯଦି ଅଭିନ୍ନ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ $AB = 0$ ଅଟେ ।

(2) ଉପରୋକ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟି 1932 ମସିହାରେ ଆମେରିକୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଜର୍ଜ୍ ଡେଭିଡ୍ ବିର୍କଫ୍** ପ୍ରକାଶ କରିଥିଲେ। ଆଗରୁ କୁହାଯାଇଛି ସରଳରେଖା ଏକ ସଂଜ୍ଞା ବିହୀନ ପଦ, ଯାହା କେତେ ଗୁଡିଏ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ଅଧିନ । ବ୍ୟାବହାରିକ ପ୍ରୟୋଗ ପାଇଁ ଆମେ ସରଳରେଖାର ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ନମୁନା ଗ୍ରହଣ କରୁ ଓ ତାହା ହେଉଛି ସ୍କେଲ୍‌ର ସଳଖଧାର (ruler)

ସାହାଯ୍ୟ ରେ ଅଙ୍କିତ ଗୋଟିଏ ସଳଖ ଗାର । ଏହାକୁ ଜ୍ୟାମିତିକ ସରଳରେଖାର ରୂପ ଦେବା ପାଇଁ ତୀରଚିହ୍ନ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହା ଉଭୟ ଦିଗରେ ସୀମାହୀନ ଭାବରେ ବିସ୍ତୃତ ବୋଲି ଧରିନେଉ । ଦୂରତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପରୋକ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ ଆମେ ସାଧାରଣତଃ ସ୍କେଲ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ କରିଥାଉ । ଗୋଟିଏ ସ୍କେଲ୍‌ର ଅଂଶାଙ୍କିତ ଧାରର ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହେବା ଭଳି ଚିହ୍ନିତ କରୁ :



(ଚିତ୍ର 1.2)

ଦଶମିକ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ସାହାଯ୍ୟରେ ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଆମେ ଦୂରତାର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ (ଯଥା ସେଣ୍ଟିମିଟର ବା ମିଲିମିଟର ବା ସେହିଭଳି କିଛି) ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଚିହ୍ନଟ କରୁଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଭିନ୍ନଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା ପାଇଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଏକକ ବ୍ୟବହାର ପାଇଁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ – 6 ବାରଣ କରେ ନାହିଁ ।

ଆମେ କହି ପାରିବା : ଭୁବନେଶ୍ୱରରୁ ଫୁଲବାଣୀ ଛଅ ଘଣ୍ଟାର ବାଟ । (ବସ୍‌ରେ ଗଲେ)

ଭୁବନେଶ୍ୱରରୁ ଚେନ୍ନାଇ ଦେଢ଼ଘଣ୍ଟାର ବାଟ । (ଉଡ଼ାଜାହାଜରେ ଗଲେ)

ତେବେ କ'ଣ କହିବା : ଭୁବନେଶ୍ୱରରୁ ଫୁଲବାଣୀ ଦୂର ଆଉ ଚେନ୍ନାଇ ପାଖ ?

ଏ ପ୍ରକାର ବ୍ୟାବହାରିକ ଅସଂଗତି ସୃଷ୍ଟି ନହେବା ପାଇଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ରେଖା ପାଇଁ ଦୂରତାର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

(3) ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା ପାଇଁ ଦୂରତାର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ବ୍ୟବହାର କେବଳ ଯେ ଏକ ବ୍ୟାବହାରିକ ଆବଶ୍ୟକତା, କେବଳ ତାହା ନୁହେଁ । ଆଗକୁ ଏଭଳି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଆସିବ ଯାହାର ପ୍ରୟୋଗ ପାଇଁ ରେଖା ନିର୍ବିଶେଷରେ ଦୂରତାର ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ବ୍ୟବହାର ପାଇଁ ଆମେ ବାଧ୍ୟ ହେବା । ତେଣୁ ପ୍ରଥମରୁ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ଚୟନ କରିବା ଉପରେ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଉଛି ।

ଦୂରତାର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ଗ୍ରହଣ କରି ମଧ୍ୟ ଆମେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ସମ୍ପର୍କ (ବିନ୍ଦୁ ଗୋଟିକୁ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିଏ ତଥା ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିକୁ ବିନ୍ଦୁ ଗୋଟିଏ; ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଏକ ସମ୍ପର୍କ) ବିଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ନିରୂପଣ କରିପାରିବା । **ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କରୁଥିବା ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ ।**

ଦୂରତାର ଏକକ ସ୍ଥିର ରଖି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବଦଳାଇ ଦେଲେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସିନା ବଦଳିଯାଏ, ମାତ୍ର ଦୂରତା ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ । ଉଦାହରଣଟିଏ ଦେଖ । ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ଚିତ୍ରରେ (ଟୀକା – 2) P ଓ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –2 ଓ 5 ଅଟେ । ଆମେ ଯଦି ବିଧିବଦ୍ଧ ଭାବରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ x କୁ $x+2$ ରେ ପରିବର୍ତ୍ତିତ କରିବା ତେବେ P ଓ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ 0 ଓ 7 ହେବ । ମାତ୍ର ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ $PQ = 7$ (ବା 7 ଏକକ) ଅଟେ ।

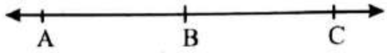
ଦୂରତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ରୁଲର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ, ଜ୍ୟାମିତି ଓ ବୀଜଗଣିତ ମଧ୍ୟରେ ଏକ ସମ୍ପର୍କ ସେତୁ । ଏହା ମାଧ୍ୟମରେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଧର୍ମ ରୂପେ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୋଇଥାଏ । ଏ ଦିଗରେ ଅଧିକ ଅଗ୍ରସର ହେବା ପାଇଁ **ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତା (Betweenness)** ସମ୍ପର୍କରେ ଆମର ଜ୍ୟାମିତିକ ଅବବୋଧ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

1.3 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତା (Betweenness) :

ସଂଜ୍ଞା : ତିନୋଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B ଓ C ଯଦି

(i) ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥାନ କରନ୍ତି ଓ

(ii) $AB + BC = AC$ ହୁଏ;



(ଚିତ୍ର 1.3)

ତେବେ B କୁ A ଓ C ର (କିମ୍ବା C ଓ A ର) ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ କହାଯାଏ ।

ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟର ଏ ପ୍ରକାର ଅବସ୍ଥାକୁ ସାଙ୍କେତିକ ଭାଷାରେ A - B - C କିମ୍ବା C - B - A ଭାବରେ ଲେଖାଯାଏ ।

ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତାକୁ ଆଧାର କରି ବର୍ତ୍ତମାନ ଆଉ କେତେ ଗୋଟି ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ କରିବା ।

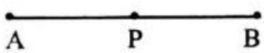
ରେଖାଖଣ୍ଡ (Segment or Line segment) :

ସଂଜ୍ଞା : ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ $\overline{AB}$ ବା $\overline{BA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ' କୁହାଯାଏ ।

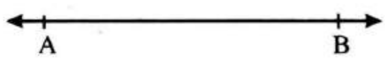
ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ଉପରୋକ୍ତ ସଂଜ୍ଞାକୁ ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖି ପାରିବା :

$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P : A{-}P{-}B\}$

A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ପ୍ରତିନିଧି ରୂପେ P ବିନ୍ଦୁକୁ ନିଆଯାଇ (ଚିତ୍ର 1.4)



(ଚିତ୍ର 1.4)



(ଚିତ୍ର 1.5)

ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ $\overline{AB}$ ସେଟ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପିତ ହୋଇଛି ।

$\overline{AB}$ କୁ A ଓ B ଦ୍ୱାରା **ନିରୂପିତ ରେଖାଖଣ୍ଡ'** ବା 'A ଓ B ର **ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ'** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ ଯେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BA}$, ଉଭୟ ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଟନ୍ତି ।

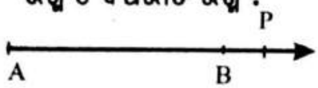
ମନ୍ତବ୍ୟ : $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$; ଅର୍ଥାତ୍ AB ରେଖାଖଣ୍ଡ, AB ସରଳରେଖାର ଏକ ଅଂଶ ଅଟେ । ଉପରିସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.5ରେ $\overline{AB}$ କୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭାବରେ ତଥା $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଅଂଶ ଭାବରେ - ଏ ଦୁଇ ପ୍ରକାରରେ ଦେଖାଯାଇଛି । ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overline{AB}$ ର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ $\overleftrightarrow{AB}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (End-points of a line segment): A ଓ B କୁ $\overline{AB}$ ର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (Length of a line segment) : ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତାକୁ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ତେଣୁ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = AB ଅଟେ ।

ରଶ୍ମି ଓ ବିପରୀତ ରଶ୍ମି :



(ଚିତ୍ର 1.6) (କ) $\overrightarrow{AB}$

(ଚିତ୍ର 1.6) (ଖ) $\overrightarrow{BA}$

ଉପରିସ୍ଥ ଚିତ୍ର (କ) ଓ (ଖ) ରେ ଦୁଇଟି ରଶ୍ମି ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି । ସେ ଦୁଇଟି ହେଉଛି $\overrightarrow{AB}$ ବା AB ରଶ୍ମି ଏବଂ $\overrightarrow{BA}$ ବା BA ରଶ୍ମି ।

ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ଚିତ୍ରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି ଆମେ 'ରଶ୍ମି'ର ଜ୍ୟାମିତିକ ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ କରିବା ।

ଚିତ୍ର 1.6 (କ) କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର । ଏହାର ଗୋଟିଏ ଅଂଶ ହେଉଛି AB ରେଖାଖଣ୍ଡ । ଏଥିରେ ଆହୁରି ଅନେକ ବିନ୍ଦୁ ରହିଛି, ଯାହା $\overline{AB}$ ରେ ନାହିଁ । ସେଭଳି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଅଟେ । P ଏଭଳି ଭାବରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୋଇଛି ଯେ, B ବିନ୍ଦୁଟି A ଓ P ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ ହୋଇ ପାରୁଛି; ଅର୍ଥାତ୍ A - B - P ।

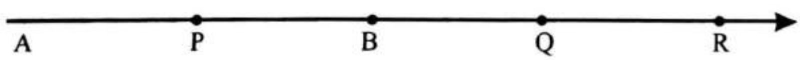
$\overline{AB}$ ଓ $\overline{AB}$ ର ବାହାରେ ଥିବା P ଭଳି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁକୁ ନେଇ ଚିତ୍ରଟି ଗଠିତ ହୋଇଛି । ଏହାକୁ **AB ରଶ୍ମି' ବା ସଙ୍କେତରେ $\overrightarrow{AB}$ ଲେଖାଯାଏ ।**

ତେଣୁ ସେଟ୍ ଭାଷାରେ AB ରଶ୍ମିର ସଂଜ୍ଞା ହେଉଛି : $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P : A - B - P\}$

ସେହିପରି $\overrightarrow{BA} = \overline{AB} \cup \{Q : B - A - Q\}$ ବା $\overline{BA} \cup \{Q : B - A - Q\}$

(ଚିତ୍ର 1.6 (ଖ) ଦେଖ । ମନେପକାଅ $\overline{AB} = \overline{BA}$, ଅର୍ଥାତ୍ ଉଭୟର ଅର୍ଥ ଗୋଟିଏ ।) $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{BA}$ ର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା **ସ୍ପଷ୍ଟ** ହୁଏ ଯେ $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$; ଅର୍ଥାତ୍ **AB ରଶ୍ମି ଓ BA ରଶ୍ମିର ଛେଦ = AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ।**

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (1) ରଶ୍ମିର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ ଯେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ



(ଚିତ୍ର 1.7)

$\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR}$ ଏ ସମସ୍ତ ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମିର ହିଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ନାମ ଅଟନ୍ତି ।

(2) $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$; ସେହିପରି $\overline{BA} \subset \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{BA}$

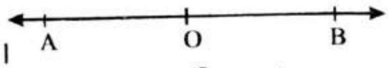
$\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AB}$ ଅର୍ଥାତ୍ AB ରେଖାଖଣ୍ଡ, AB ରଶ୍ମି ଓ AB ସରଳରେଖା ଏ ସମସ୍ତେ ହେଉଛନ୍ତି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍; ମାତ୍ର AB ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ହେଉଛି A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା ।

(4) ରଶ୍ମିର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Vertex) : A କୁ $\overrightarrow{AB}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି $\overrightarrow{BA}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ B ଅଟେ । ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁକୁ ଆଦ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ (Initial Point) ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ବ୍ୟାବହାରିକ ଭାଷାରେ $\overrightarrow{AB}$ ରଶ୍ମିକୁ A ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଓ B ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ବିସ୍ତୃତ ରଶ୍ମି' ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

(5) ବିପରୀତ ରଶ୍ମି (Opposite rays)



(ଚିତ୍ର 1.8)

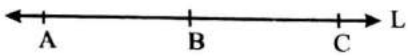
ମନେକର A - O-B, ଅର୍ଥାତ୍ O, A ଓ B ର ଏକ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ ।

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overrightarrow{OA}$ ଓ $\overrightarrow{OB}$ କୁ ବିପରୀତ ରଶ୍ମି କୁହାଯାଏ ।

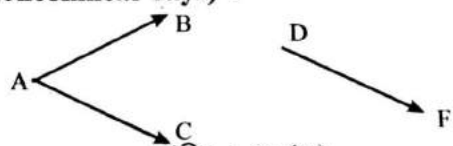
ତେଣୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overrightarrow{OA}$ ଓ $\overrightarrow{OB}$ ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ହେଲେ $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{AB}$

ଅର୍ଥାତ୍ OA ରଶ୍ମି ଓ OB ରଶ୍ମିର ସଂଯୋଗ AB ସରଳରେଖା ଅଟେ ।

(6) ଏକରେଖୀ ଓ ନୈକରେଖୀ ରଶ୍ମି (Collinear and noncollinear rays) :



(ଚିତ୍ର 1.9) (କ)



(ଚିତ୍ର 1.9) (ଖ)

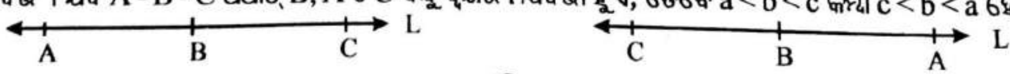
ଯେଉଁ ସବୁ ରଶ୍ମି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରେଖାର ଅଂଶ ବିଶେଷ, ସେମାନଙ୍କୁ ଏକରେଖୀ ବା ସରଳରୈଖିକ ରଶ୍ମି Collinear rays କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 1.9 (କ) ରେ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ ଆଦି L ସରଳରେଖାର ଅଂଶ ହୋଇଥିବାରୁ ଏମାନେ ଏକରେଖୀ ରଶ୍ମି ଅଟନ୍ତି । ମାତ୍ର ଚିତ୍ର 1.9 (ଖ) ରେ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF}$ ନୈକରେଖୀ ରଶ୍ମି ଅଟନ୍ତି ।

1.4 : ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Co-ordinates) ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତେକ ପ୍ରୟୋଜନୀୟ ତଥ୍ୟ :

ପୂର୍ବରୁ କୁହାଯାଇଛି - ଦୂରତା ସମ୍ପର୍କୀୟ ରୁଲର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ହେତୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ R ଓ ଏକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ଏକ-ଏକ ସମ୍ପର୍କ ସ୍ଥାପିତ ହୁଏ; ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ହୁଏ ଓ ଭିନ୍ନଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ହୁଅନ୍ତି । **ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ ।**

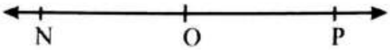
ରୁଲର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତାର ସଂଜ୍ଞାକୁ ଆଧାର କରି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମ୍ପର୍କରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ତଥ୍ୟ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ । ପରବର୍ତ୍ତୀ କେତେକ ପ୍ରମାଣରେ ସେଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ । ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ସବିଶେଷ ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

(1) ମନେକର A, B ଓ C ସରଳରେଖା L ଉପରିସ୍ଥ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଓ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଓ c ହେଉ । ଯଦି A - B - C ଅର୍ଥାତ୍ B, A ଓ C ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ହୁଏ, ତେବେ $a < b < c$ କିମ୍ବା $c < b < a$ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.10)

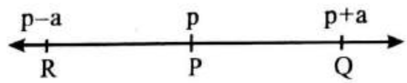
(2) ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ O ଏବଂ P ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ (ଚିତ୍ର 1.11) ଆମେ ଉପଯୁକ୍ତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପଦ୍ଧତି (ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ଏକ-ଏକ ସମ୍ପର୍କ) ନିର୍ବାଚନ ଦ୍ୱାରା O ର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ଶୂନ ଓ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ଧନାତ୍ମକ ନେଇପାରିବା । ଫଳରେ ଯଦି N-O-P ହୁଏ, ତେବେ ତଥ୍ୟ (1) ଅନୁଯାୟୀ N ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଋଣାତ୍ମକ ହେବ । ଏହାକୁ ଆଧାର କରି ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ (Number line) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୁଏ । $\overrightarrow{OP}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଧନାତ୍ମକ ଓ $\overrightarrow{ON}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଋଣାତ୍ମକ ହୁଏ ।



(ଚିତ୍ର 1.11)

(3) L ସରଳରେଖା ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ a ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ L ଉପରେ କେବଳ ମାତ୍ର ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ରହିଛି, ଯାହାର P ଠାରୁ ଦୂରତା a ଅଟେ ।

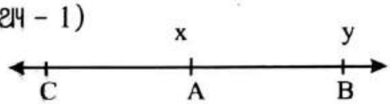
P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ p ହେଲେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ସ୍ଥାନାଙ୍କ p+a ଓ ଅନ୍ୟଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ p − a ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.12)

(4) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମାଧ୍ୟମରେ ରଶ୍ମି ଓ ରେଖାଖଣ୍ଡର ବିକଳ୍ପ ସଂଜ୍ଞା :

ମନେକର C - A - B ଏବଂ AB ସରଳରେଖାରେ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ଅଟେ । ଯଦି $x < y$ ହୁଏ, ତେବେ c ର ସ୍ଥାନଙ୍କ x ରୁ ସାନ ହେବ (ତଥ୍ୟ − 1)



(ଚିତ୍ର 1.13)

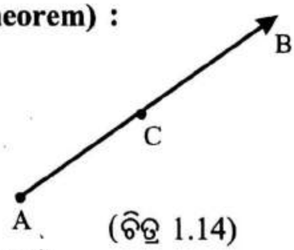
ତେଣୁ $\overrightarrow{AB} = \{P \in \overleftrightarrow{AB}$: P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\geq x\}$,

$\overrightarrow{AC} = \{P \in \overleftrightarrow{AB}$: P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\leq x\}$,

$\overline{AB} = \{P \in \overleftrightarrow{AB}$: $x \leq$ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\leq y\}$,

(5) ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ ଉପପାଦ୍ୟ (Segment - construction Theorem) :

r ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ A, B ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overrightarrow{AB}$ ଉପରେ କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ C ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ, ଯେପରିକି $AC = r$ ହେବ ।



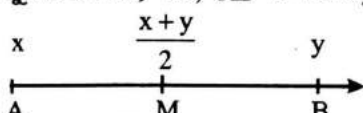
(ଚିତ୍ର 1.14)

(ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରମାଣ ଓ ଅଙ୍କନରେ ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।)

ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (Mid point of a line-segment) :

ସଂଜ୍ଞା : $\overline{AB}$ ଉପରେ M ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଓ AM = MB ହେଲେ M କୁ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । (ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର) M, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, $AM = MB = \frac{1}{2}AB$



(ଚିତ୍ର 1.15)

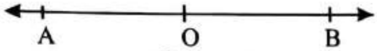
$\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ହେଲେ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\frac{x+y}{2}$ ଅଟେ ।

ପ୍ରଶ୍ନ : ରଶ୍ମି ଓ ସରଳରେଖାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି ? (ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କର)

(ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର, ଟିକିଏ ଚିନ୍ତାକର ଓ ତା'ପରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉତ୍ତରଟି ପଢ଼ । ତୁମର ଚିନ୍ତାଧାରା ସୁପରିଚାଳିତ ଓ ମାର୍ଜିତ ହେବ ।)

ଉତ୍ତର : ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥିତି ସର୍ବଦା ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ । ରଶ୍ମିର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଥାଏ, ଯାହାକୁ ଆମେ ଆଦ୍ୟବିନ୍ଦୁ ବା ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ କହୁ, ଅନ୍ୟଟି ନଥାଏ । ସରଳରେଖାର ଆଦୌ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ନଥାଏ । (କାରଣ ସବୁଠାରୁ ବଡ଼ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ବା ସବୁଠାରୁ ସାନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି କିଛି ନାହିଁ ।) ଏହି କାରଣରୁ ରଶ୍ମି ଓ ରେଖାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ମନେକର ଉପଯୁକ୍ତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ବାଚନ ଦ୍ୱାରା ଆମେ $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଋଣାତ୍ମକ ଓ ଧନାତ୍ମକ ନେଲେ । ତେଣୁ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏଭଳି ଏକ ବିନ୍ଦୁ O ରହିବ ଯାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.16)

(ରୁଲର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) ତେବେ O କୁ ଆମେ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କହିବା ନାହଁ, କାରଣ $\overleftrightarrow{AB}$ ର କୌଣସି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ । ତେବେ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ O କୁ ଆଉ ଗୋଟିଏ ବିଶେଷ ନାମରେ ପରିଚିତ କରାଯାଏ ଓ ତାହା ହେଉଛି **'ମୂଳବିନ୍ଦୁ' (Origin)** । ଏ ବିଷୟରେ ଅଧିକ କଥା ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଜାଣିବ ।

ଉପରୋକ୍ତ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ତଥ୍ୟ, ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁ ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସାମଞ୍ଜସ୍ୟ ପ୍ରକଟିତ କରେ ।

(i) ସରଳରେଖା ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ । (କାରଣ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଅସୀମ)

(ii) ଏହା ଆଦ୍ୟ ଓ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିହୀନ । (କାରଣ ସବୁଠାରୁ ବଡ ଓ ସବୁଠାରୁ ସାନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି କିଛି ନାହିଁ ।)

(iii) ସରଳରେଖା ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ବ୍ୟାପ୍ତି (continuum - ପଢାଯାଏ, 'କଣ୍ଟିନ୍ୟୁଅମ୍'); ଅର୍ଥାତ୍ ଏହା ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଭାବରେ ପରିବ୍ୟାପ୍ତ; କାରଣ ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଛଡା ଆଉ କିଛି ନାହିଁ ; ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ବା ଫାଙ୍କ (gap) ନାହିଁ - ଏକଥା ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ପରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (a)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଦ ଗୁଡିକରୁ ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ଓ ସଂଜ୍ଞାବିଶିଷ୍ଟ (ଯାହାର ସଂଜ୍ଞା ଅଛି) ପଦଗୁଡିକୁ ଚିହ୍ନାଅ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ, ସ୍ଥାନଙ୍କ, ଦୂରତା, ସରଳରେଖା, ରଶ୍ମି, ରେଖାଖଣ୍ଡ, ସମତଳ,ବିନ୍ଦୁ ।

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଉତ୍ତର ପ୍ରଦାନ କର ।

(କ) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?

(ଖ) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?

(ଗ) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡରେ କେତୋଟି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଓ କେତୋଟି ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?

(ଘ) ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଓ ତାହାର ବିପରୀତ ରଶ୍ମିର ସଂଯୋଗରେ କ'ଣ ଗଠିତ ହୁଏ ?

(ଙ) ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଓ ତାହାର ବିପରୀତ ରଶ୍ମିର ଛେଦରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?

(ଚ) ତିନୋଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଅତିବେଶିରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ?

(ଛ) ଚାରୋଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଅତିବେଶିରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ?

(ଜ) ଚାରୋଟି ପୃଥକ୍ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନୋଟି ଏକରେଖୀ ହୋଇ ନଥିଲେ, ସେମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା କେତୋଟି ସରଳରେଖା ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ହୋଇ ପାରିବ ?

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର । ଦତ୍ତ ଅଛି A - B - C

(i) $\overline{AB} \cup \overrightarrow{AC} = ...$ (ii) $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = ...$ (iii) $\overline{AB} \cup \overline{BC} = ...$

(iv) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = ...$ (v) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = ...$ (vi) $\overline{AC} \cap \overline{BC} = ...$

(vii) $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = ...$ (viii) $AC - BC = ...$ (ix) $AC - AB = ...$

4. L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –3 ଓ 5 ହେଲେ AB କେତେ ?

5. $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –16 ଓ 20 ହେଲେ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ?

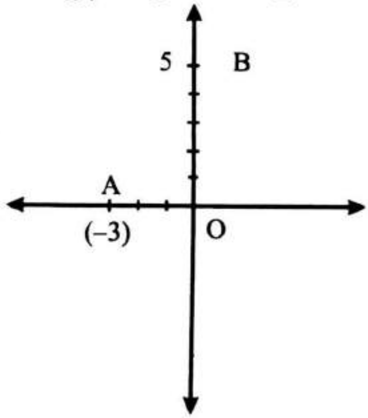
ପ୍ରଶ୍ନ - 4 ଓ 5 ପାଇଁ ସୂଚନା

ପ୍ରଶ୍ନ - 4 ରେ ଯଦି କେବଳ ମାତ୍ର ଏତିକି କୁହାଯାଇ ଥାନ୍ତା, 'A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –3 ଓ 5 ହେଲେ AB କେତେ ?'

ତେବେ ପ୍ରଶ୍ନଟିର ସମାଧାନ କରିବା ସମ୍ଭବ କି ?

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରଟିକୁ ଦେଖ ।

$\overleftrightarrow{OA}$ ଉପରେ A ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ –3 ଓ $\overleftrightarrow{OB}$ ଉପରେ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ 5 ଅଟେ । ତେବେ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ AB=|–3–5| = 8 ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ । କାରଣ କ'ଣ ? ରୁଲର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟି ଆଉଥରେ ପଢ । ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଯେଉଁ ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ, ତାହା କେବଳ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାରେ ନିରୂପିତ



(ଚିତ୍ର 1.17)

ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –3 ଓ 5 ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଉଭୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{OA}$ ଓ $\overleftrightarrow{OB}$ ଉପରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଛି । ତେଣୁ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ରୁଲର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ସୂତ୍ର ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ ।

ପ୍ରଶ୍ନ - 5 ପାଇଁ ଅନୁରୂପ ସୂଚନା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ସୂତ୍ର ମଧ୍ୟ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଉପରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଏ ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ଅଧିକ ବିଚାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ କରାଯିବ ।

(ଖ) ବିଭାଗ

6. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନ ଗୁଡିକରେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀ ଅଟନ୍ତି ।

(କ) A,B ଓ C ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –11, 4 ଓ 2 ହେଲେ, କେଉଁ ବିନ୍ଦୁଟି ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟିର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ?

(ଖ) PQ = 8, QR = 5 ଓ RP = 3 ହେଲେ, P, Q ଓ R ମଧ୍ୟରେ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁଟି ଅନ୍ୟ ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ?

(ଗ) A ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ –3, A - C - B, BC = 2 ଓ C ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ –4 ହେଲେ, B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ AB କେତେ ?

(ଘ) A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –11 ଓ 21 ହେଲେ, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ଓ A ଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତା କେତେ ?

(ଙ) A ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ –5 ଓ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ O ହେଲେ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ?

7. A, L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ A ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ 5 ଅଟେ । A ଠାରୁ 2 ଏକକ ଦୂରତା ବିଶିଷ୍ଟ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ L ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ଓ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ହେବ ?

8. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ବୁଝାଅ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ, ବିପରୀତ ରଶ୍ମି, ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା, ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତା ।

1.5 କୋଣ ଓ କୋଣ-ପରିମାଣ (Angle and Angle-measure)

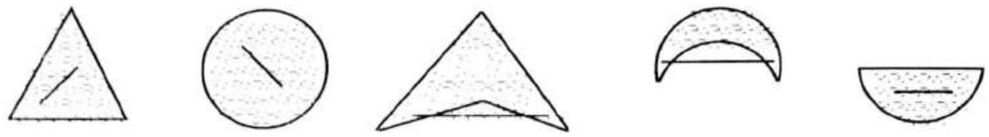
ଏ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଆମେ ଜ୍ୟାମିତିର ଦୁଇଟି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ତାହା ହେଉଛି **'ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍'** ଓ **'ସରଳରେଖାର ପାର୍ଶ୍ୱ'** ।

ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ (Convex Set) :

ସଂଜ୍ଞା: ଏକ ସେଟ୍ S ର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ପାଇଁ ଯଦି $\overline{AB} \subset S$ ହୁଏ, ତେବେ S କୁ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ: ରେଖାଖଣ୍ଡ, ରଶ୍ମି, ସରଳରେଖା - ଏମାନେ ସମସ୍ତେ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 5 ଅନୁଯାୟୀ ସମତଳ ମଧ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ।

କାଗଜ ପୃଷ୍ଠା - ସମତଳର ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ନିମ୍ନରେ କେତେଗୋଟି ସେଟ୍‌ର ଚିତ୍ର ଦିଆଯାଇଛି:



(କ) (ଖ) (ଗ) (ଘ) (ଙ)

(ଚିତ୍ର 1.18)

ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ (କ),(ଖ)ଓ(ଙ)ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରେ ରହିଯାଇଛି । ତେଣୁ ଏସବୁ ଚିତ୍ରରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସେଟ୍ ଗୁଡିକ ଉତ୍ତଳ ଅଟନ୍ତି । ମାତ୍ର ଏକଥା (ଗ) ଓ (ଘ) ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ଚିତ୍ର ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ସେ ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ଉତ୍ତଳ ନୁହନ୍ତି ।

ଗୋଟିଏ ସେଟ୍ ଉତ୍ତଳ ନୁହେଁ - ଏହା ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଆମକୁ ସେହି ସେଟ୍ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଏଭଳି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଖାଇବାକୁ ପଡିବ, ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ରହି ପାରୁନଥିବ । ଏହି କାରଣରୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସେଟ୍ ଓ ଶୂନସେଟ୍ ମଧ୍ୟ ଉତ୍ତଳସେଟ୍ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରାଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଦୁଇଟି ଉତ୍ତଳସେଟ୍‌ର ଛେଦ ଏକ ଉତ୍ତଳସେଟ୍, ମାତ୍ର ସଂଯୋଗ ଉତ୍ତଳସେଟ୍ ନ ହୋଇପାରେ ।

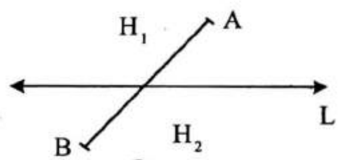
ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 7 - ସମତଳ - ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Plane-SeparationPostulate) :

ମନେକର L ସରଳରେଖାଟି P ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ସମତଳର ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡିକ ଏହି ସରଳରେଖାରେ ନାହାଁନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ଦୁଇଟି ସେଟ୍ H_1 ଓ H_2 ରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯାଇପାରିବ ; ଯେପରି

(i) H_1 ଓ H_2 ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ହେବ ଏବଂ

(ii) ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ଯଥାକ୍ରମେ H_1 ଓ H_2 ରେ ରହିଲେ,

$\overline{AB}$ L ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ କରିବ ।



(ଚିତ୍ର 1.19)

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଉପରୋକ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରୁ ଏହା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ H_1 ଓ H_2 ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ଓ ସେମାନେ ଅଣଛେଦୀ, ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଉଭୟ H_1 ଓ H_2 ରେ ରହି ପାରିବ ନାହିଁ । (ଏକଥା ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଦେଖି ହୃଦୟଙ୍ଗମ କରିପାରିବ । ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟ ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।)

ସରଳରେଖା ପାର୍ଶ୍ୱ: ସମତଳ - ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ H_1 ଓ H_2 ସେଟ୍ ଦୁଇଟିକୁ ସରଳରେଖା L ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱ କୁହାଯାଏ । A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଥିବା ପାର୍ଶ୍ୱଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ L ର A- ପାର୍ଶ୍ୱ ଓ B- ପାର୍ଶ୍ୱ କୁହାଯାଏ ।

ମନେରଖ - ଏକ ସରଳରେଖାର ପାର୍ଶ୍ୱଦ୍ୱୟ ଉତ୍ତଳ, ଅଣଶୂନ୍ୟ ଓ ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି । ସରଳରେଖାର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ **ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ (Half Planes)** କୁହାଯାଏ । ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ ଦୁଇଟିକୁ ସରଳରେଖାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱ ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ସରଳରେଖାକୁ ତାହାଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ ଦ୍ୱୟର **ଧାର (edge)** କୁହାଯାଏ ।

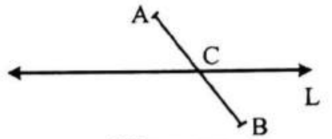
ସମତଳ - ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଆଧାରିତ କେତେକ ପ୍ରୟୋଜନୀୟ ତଥ୍ୟ :

(1) L ସରଳରେଖା P ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -7 ର ପରିମାଣ ସ୍ୱରୂପ ସମତଳଟି ତିନୋଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ, ଅଣଛେଦୀ ଓ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ L, H_1 ଓ H_2 ରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $P = L \cup H_1 \cup H_2$

(2) ଉଭୟ ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ H_1 ଓ H_2 ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ହୋଇଥିବାରୁ, ଯେ କୌଣସି ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ L ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ସହ ସଂଯୋଗ କରି ସରଳରେଖାଟିଏ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଏହାର ପରିଣାମ ସ୍ୱରୂପ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ ଯେ, ଗୋଟିଏ ସମତଳସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ । ତେଣୁ ସମତଳ - ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ପରିଣାମ ସ୍ୱରୂପ ସରଳରେଖା ଭଳି ସମତଳ ମଧ୍ୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଭାବରେ ପରିବ୍ୟାପ୍ତ (continuum) ଅଟେ; ଅର୍ଥାତ୍ ସମତଳରେ ମଧ୍ୟ କୌଣସି ଫାଙ୍କ (gap) ନାହିଁ ।

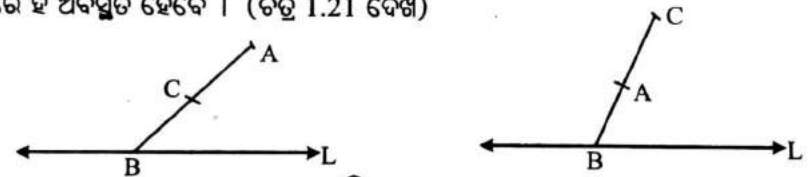
(3) ନିମ୍ନୋକ୍ତ ତିନୋଟି ତଥ୍ୟ ସମତଳ - ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ ।

(i) ମନେକର ଏକ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ L ସରଳରେଖା ଉକ୍ତ ସମତଳର AB ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ। ଯଦି C ବିନ୍ଦୁଟି A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଠାରୁ ପୃଥକ୍ ହୁଏ, ତେବେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ L ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । (ଚିତ୍ର 1.20 ଦେଖ)



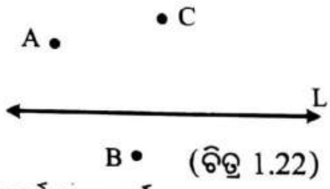
(ଚିତ୍ର 1.20)

(ii) ମନେକର L ସରଳରେଖା ଓ $\overline{AB}$ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । $\overline{AB}$ ର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ B, L ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ A, L ବାହାରେ ଅବସ୍ଥିତ । ତେବେ B - C - A କିମ୍ବା B - A - C ହେଲେ, C ବିନ୍ଦୁ L ର A - ପାର୍ଶ୍ୱରେ ହିଁ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । (ଚିତ୍ର 1.21 ଦେଖ)



(ଚିତ୍ର 1.21)

(iii) A ଓ B ବିନ୍ଦୁ L ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ B ଓ C ବିନ୍ଦୁ L ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ A ଓ C ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ L ର ସମପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । (ଚିତ୍ର 1.22 ଦେଖ)



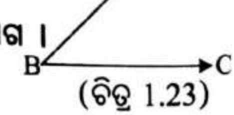
(ଚିତ୍ର 1.22)

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ଜ୍ୟାମିତିର ତ୍ରୁଟିମୁକ୍ତ ଉପସ୍ଥାପନା ପାଇଁ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସଂଜ୍ଞା ଓ ପ୍ରମାଣରେ ଏଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ ।

କୋଣର ସଂଜ୍ଞା: ତିନୋଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B ଓ C ଯଦି ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ ର ସଂଯୋଗକୁ ABC କୋଣ କୁହାଯାଏ ଓ ଉକ୍ତ କୋଣକୁ $\angle ABC$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ।

ସେଟ୍ ପରିଭାଷାରେ ଆମେ ଲେଖି ପାରିବା : $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$

ବସ୍ତୁତଃ କୋଣ ହେଉଛି ସାଧାରଣ ଆଦ୍ୟବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ନୈକରେଖୀ ରଶ୍ମିର ସଂଯୋଗ ।



(ଚିତ୍ର 1.23)

ମନ୍ତବ୍ୟ: (1) A, B ଓ C ତିନୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ । ତେଣୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-4 ଅନୁଯାୟୀ ଏମାନେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ, ଯାହାକୁ ABC ସମତଳ କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ $\angle ABC$ ମଧ୍ୟ ଏହି ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

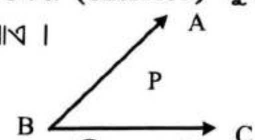
(2) B କୁ $\angle ABC$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Vertex) $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ କୁ $\angle ABC$ ର ବାହୁ (Side) କୁହାଯାଏ ।

କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ:

$\overleftrightarrow{BC}$ ର A- ପାର୍ଶ୍ୱ $\overleftrightarrow{AB}$ ର C- ପାର୍ଶ୍ୱର ଛେଦକୁ $\angle ABC$ ର **ଅନ୍ତର୍ଦେଶ (interior)** କୁହାଯାଏ ।

$\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁକୁ $\angle ABC$ ର **ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (interior Point)** କୁହାଯାଏ। ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ P, $\angle ABC$ ର ଗୋଟିଏ ଅନ୍ତସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । ଏହିପରି ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁକୁ ନେଇ କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଗଠିତ ।

ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ନଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ କୋଣର **ବହିର୍ଦେଶ (exterior)** କୁହାଯାଏ । ବହିର୍ଦେଶରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁକୁ କୋଣର **ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (exterior point)** କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 1.24)

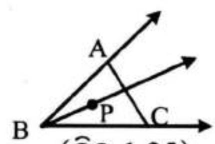
ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ Q, $\angle ABC$ ର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ଓ ସମତଳ ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ଗୁଡିକ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ :

(1) କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍; ମାତ୍ର କୋଣ ବା ତାହାର ବହିର୍ଦେଶ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

(2) ଗୋଟିଏ କୋଣ, ତାହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ - ଏହି ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ ; ଅର୍ଥାତ୍ ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ।

(3) P, $\angle ABC$ରେ ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ B କୁ ଛାଡି $\overrightarrow{BP}$ ର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତସ୍ଥ ହେବେ । ସେହିପରି A ଓ C ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.25)

(4) ପ୍ରତିଚ୍ଛେଦୀ ଉପପାଦ୍ୟ (Cross-bar theorem)

P, $\angle ABC$ ର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overrightarrow{BP}$, $\overline{AC}$ କୁ ଛେଦ କରିବ ।

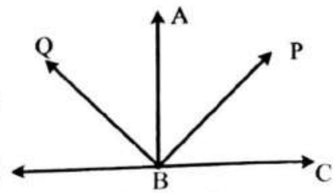
ପରବର୍ତ୍ତୀ ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ମାନଙ୍କରେ ଏହି ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯିବ । BP ରଶ୍ମି କିପରି AC ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଛେଦ କରିଛି , ତାହା ଚିତ୍ରରୁ ଉପଲବ୍ଧି କରି ପାରିବ । ଉପପାଦ୍ୟଟିର ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟ ପରିସରରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

କୋଣର ପରିମାଣ (Measure of an Angle) :

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-8 ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Protractor Postulate)

ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସହ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସଂପୃକ୍ତ ଓ ଏହାକୁ ସଂପୃକ୍ତ କୋଣର ପରିମାଣ କୁହାଯାଏ । $\angle ABC$ ର ପରିମାଣକୁ $m\angle ABC$ ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଏହା ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ପାଳନ କରେ ।

(i) $0 < m\angle ABC < 180$



(ଚିତ୍ର 1.26)

(ii) $0 < \theta < 180$ ହେଲେ $\overleftrightarrow{BC}$ ର ଯେ କୌଣସି ପାର୍ଶ୍ୱରେ କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି $\overleftrightarrow{BQ}$ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରି $m\angle QBC = \theta$ ହେବ ।

(θ – ଥିଟା ସାଧାରଣତଃ କୋଣ ପରିମାଣ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।)

(iii) $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ P ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $m\angle ABC = m\angle ABP + m\angle PBC$ ହେବ । (ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ କରି କୋଣ ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରୁଥିବା ଯନ୍ତ୍ର ବା ଉପାୟକୁ ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର କୁହାଯାଏ ।)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରେ

1. (i) $0 < \theta < 180$ ପାଇଁ ଲବ୍ଧ କୋଣ ମାପକୁ ଡିଗ୍ରୀମାପ କୁହାଯାଏ । ଯଦି $\angle ABC$ ର ମାପ x ହୁଏ ($0 < x < 180$), ତେବେ ଆମେ ଲେଖୁ $m\angle ABC = x^0$

   (ii) $0 < \theta < \pi$ (ପାଇ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ଆସନ୍ନ ମାନ 3.1415, $\frac{22}{7}$ ଇତ୍ୟାଦି)

   ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଲବ୍ଧ କୋଣମାପକୁ ରେଡିଆନ୍ ମାପ କୁହାଯାଏ । ଏ ପ୍ରକାର କୋଣମାପ ସାଧାରଣତଃ ଗଣିତର ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଆଲୋଚନାରେ ବହୁଳ ଭାବେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।

   (iii) $0 < \theta < 200$ ହେଲେ ଲବ୍ଧ କୋଣ ମାପକୁ ଗ୍ରେଡ୍ ମାପ କୁହାଯାଏ ।

2. ଉପରୋକ୍ତ ମନ୍ତବ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ

   π ରେଡିୟାନ୍ = 180 ଡିଗ୍ରୀ = 200 ଗ୍ରେଡ୍ । ଏସବୁ କୋଣ ମାପର ଏକକ ମଧ୍ୟରୁ ଡିଗ୍ରୀ ଏକକ ସାଧାରଣ ଆବଶ୍ୟକତା ପାଇଁ ବହୁଳ ଭାବରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।

   $1^0 = 60'$ (60 ମିନିଟ୍) $1' = 60''$ (ସେକେଣ୍ଡ)

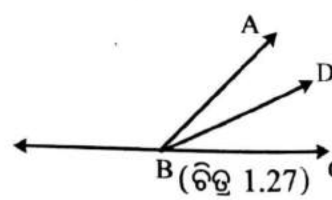
3. ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ ସର୍ବସମ କୋଣ କୁହାଯାଏ ।

$m\angle ABC = m\angle PQR$ ହେଲେ $\angle ABC$ ଓ $\angle PQR$ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ଓ

ଏହାକୁ ସାଙ୍କେତିକ ଉପାୟରେ $\angle ABC \cong m\angle PQR$ ଲେଖାଯାଏ ।

ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଆଧାରିତ କେତେକ ପ୍ରୟୋଜନୀୟ ତଥ୍ୟ :

1. ଯଦି A ଓ D, $\overleftrightarrow{BC}$ ର ସମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁ ଓ $m\angle ABC > m\angle DBC$ ହୁଏ, ତେବେ D, $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ । ଏହାର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ, ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ D, $\overleftrightarrow{BC}$ ର ସମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥିତ ଓ $m\angle ABD > m\angle DBC$ ହେଲେ, $\overrightarrow{BD}$ $\angle ABC$ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ବିସ୍ତୃତ ହେବ ।

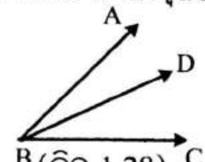


(ଚିତ୍ର 1.27)

2. **କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ (Angle Bisector) :**

ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ (1) ରୁ ଏହା ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ ଯେ $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ବିସ୍ତୃତ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ରଶ୍ମି $\overrightarrow{BD}$ ରହିଛି, ଯେପରିକି $m\angle DBC = \frac{1}{2} m\angle ABC$ ଅଟେ । $\overrightarrow{BD}$କୁ $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ (bisector) କୁହାଯାଏ ।

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\overrightarrow{BD}$, $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଓ $m\angle ABD = m\angle DBC$ ଅଟେ ।



(ଚିତ୍ର 1.28)

ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର କୋଣ (Types of Angles) :

1. ପରିମାଣ ଭେଦରେ କୋଣ ଗୁଡ଼ିକ ତିନି ପ୍ରକାରରେ ବିଭକ୍ତ । ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ :

90^0 ରୁ କମ୍ ହେଲେ ତାହାକୁ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ, 90^0 ସହ ସମାନ ହେଲେ ସମକୋଣ ଓ 90^0 ରୁ ଅଧିକ ହେଲେ ସ୍ଥୂଳକୋଣ କୁହାଯାଏ ।

2. **ଅନୁପୂରକ ଓ ପରିପୂରକ କୋଣ (Complementary and Supplementary Angles) :**

(i) ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 90^0 ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ କୋଣ (Complementary angles) କୁହାଯାଏ ।

(ii) ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ କୋଣ (Supplementary angles) କୁହାଯାଏ ।

3. ସନ୍ନିହିତ କୋଣ (Adjacent angles) :

ଦୁଇଟି କୋଣର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବାହୁ ଓ କୋଣ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ୟବାହୁ ଦୁଇଟି ସାଧାରଣ ବାହୁର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବିସ୍ତୃତ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\angle AOB$ ଓ $\angle AOC$, $\angle PSQ$ ଓ $\angle QSR$ ସନ୍ନିହିତ ଅଟନ୍ତି । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଅଣଛେଦୀ ।

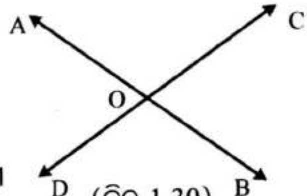
(ଚିତ୍ର 1.29)

(ସୂଚନା: ଆଗରୁ ସରଳରେଖାର ପାର୍ଶ୍ୱ କଥା କୁହାଯାଇଥିଲା । ତେବେ $\overline{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AB}$ ଏମାନଙ୍କର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱ ବା ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱ କହିଲେ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ହିଁ ବୁଝାଏ ।)

ସାଧାରଣ ବାହୁର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବିସ୍ତୃତ ବାହୁ ଦ୍ୱୟକୁ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ମାନଙ୍କର **ବହିଃସ୍ଥ ବାହୁ (exterior Sides)** କୁହାଯାଏ ।

4. ପ୍ରତୀପ କୋଣ (Vertically Opposite angles) :

ଗୋଟିଏ କୋଣର ବାହୁଦ୍ୱୟର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କୋଣକୁ ଉକ୍ତ କୋଣର ପ୍ରତୀପ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\angle AOC$ ଓ $\angle BOD$ ପରସ୍ପର ପ୍ରତୀପ ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 1.30)

ସମକୋଣ ସମ୍ପର୍କିତ କେତୋଟି ସଂଜ୍ଞା :

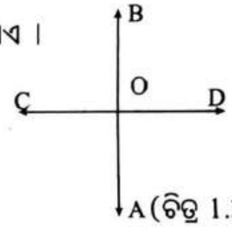
ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ (Mutually perpendicular) ରେଖା ଓ ରଶ୍ମି :

ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ଚାରିକୋଣ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ ହେଲେ ରେଖାଦ୍ୱୟ 'ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ' ହୁଅନ୍ତି ।

$\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ - ଏହାକୁ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ଲେଖାଯାଏ ।

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ ହେଲେ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ ହେବେ, ଅନ୍ୟଥା ନୁହେଁ ।



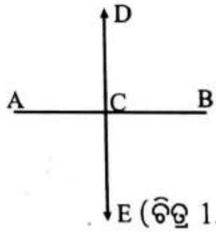
(ଚିତ୍ର 1.31)

ରେଖାଖଣ୍ଡର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ : ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଓ ଏହା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ସରଳରେଖାକୁ ରେଖାଖଣ୍ଡର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ (Perpendicular bisector) କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{ED}$, $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: (i) AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ କହିବାର ଅର୍ଥ ହେଉଛି AB ସରଳରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

(ii) ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ସମକୋଣର ଦୁଇବାହୁ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ ।



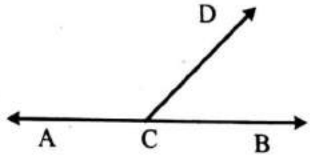
(ଚିତ୍ର 1.32)

1.6 ପରିପୂରକ ଓ ପ୍ରତୀପ କୋଣ ସମ୍ପର୍କରେ ପ୍ରୟୋଜନୀୟ ତଥ୍ୟ:

ପରିପୂରକ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ତଥ୍ୟ:

(a) ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମିର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଅନ୍ତି, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ; ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ଅଟେ ।

(b) ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କ ବହିଃସ୍ଥ ବାହୁ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ଅଟନ୍ତି ।



$m\angle ACD + m\angle BCD = 180^0$

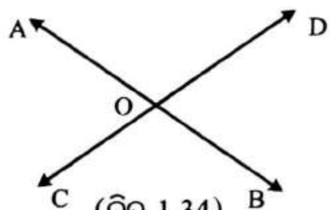
(ଚିତ୍ର 1.33)

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ **ପରିପୂରକ ଉପପାଦ୍ୟ (Supplementary Theorem)** କୁହାଯାଏ । ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟ ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ । ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣରେ ଏହାର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର ହୁଏ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ ଏହି ତଥ୍ୟ ଉପରେ ଆଧାରିତ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 2

ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ପ୍ରତୀପ କୋଣ ମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମାନ ।

(If two lines intersect, then the measures of the vertically opposite angles formed thereby,are equal)



(ଚିତ୍ର 1.34)

ଦତ୍ତ: $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ: $m\angle AOD = m\angle BOC, m\angle AOC = m\angle BOD$

ପ୍ରମାଣ: $\overrightarrow{OA}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ O, $\overleftrightarrow{CD}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\therefore m\angle AOC + m\angle AOD = 180^0$ (ପରିପୂରକ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\overrightarrow{OC}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ O, $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\therefore m\angle AOC + m\angle BOC = 180^0$ (ପରିପୂରକ ଉପପାଦ୍ୟ)

ତେଣୁ $m\angle AOC + m\angle AOD = m\angle AOC + m\angle BOC$

$\therefore m\angle AOD = m\angle BOC$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ $m\angle AOC = m\angle BOD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(b)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଦଗୁଡିକର ସଂଜ୍ଞା ଲେଖ ।
   କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ, ସନ୍ନିହିତ କୋଣ, ପ୍ରତୀପ କୋଣ, ପରିପୂରକ କୋଣ, ଅନୁପୂରକ କୋଣ ।
2. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।
   (i) ଗୋଟିଏ କୋଣର କେତୋଟି ବାହୁ ଥାଏ ? (ii) ଗୋଟିଏ କୋଣର କେତୋଟି ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?
   (iii) କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ? (iv) କୋଣ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ଛେଦରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?
3. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ତାଲିକାରୁ କେଉଁ ଗୁଡିକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ଦର୍ଶାଅ :
   (i) ରେଖାଖଣ୍ଡ, (ii) ରଶ୍ମି, (iii) ରେଖା, (iv) କୋଣ, (v) କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ, (vi) ସମତଳ, (vii) କୋଣର ବହିର୍ଦେଶ
4. ତିନୋଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦକରୁଥିବାର ଏକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ତତ୍ପରେ ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖି ପ୍ରତୀପ କୋଣ ଯୋଡ଼ା ଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।
5. ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବାର ଚିତ୍ରଟିଏ ଅଙ୍କନ କର । ତତ୍ପରେ ଚିତ୍ରରୁ ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣଯୋଡ଼ାଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

6. XY ସରଳରେଖାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କର । ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖାର N-ପାର୍ଶ୍ୱରେ C ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ M- ପାର୍ଶ୍ୱରେ B ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର । ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, BM ଓ NC ରେଖାଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟ ସରଳରେଖାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବେ ।

7. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ । ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

(i) x ବିନ୍ଦୁ $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ନହେଲେ ଓ A - O - B ହେଲେ $m\angle XOA + m\angle XOB$ କେତେ ?

(ii) $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ହେଲେ $\angle AOC$ର ପ୍ରତୀପ କୋଣ କେଉଁଟି ?

(iii) C, $\angle AOB$ ର ଅନ୍ତସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ, $m\angle AOC = x$ ଓ $m\angle AOB = y$ ହେଲେ $m\angle BOC$ କେତେ ?

(iv) ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା କୋଣ ଗୁଡିକ ମଧ୍ୟରୁ ଯଦି ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 30^0 ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ପ୍ରତୀପ କୋଣର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ହେବ ?

(ଖ) ବିଭାଗ

8. (i) $m\angle ABC = x$ ଓ $\angle AOB$ ର ଅନୁପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ $2x^0$ ହେଲେ x ର ମାନ ଡିଗ୍ରୀରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(ii) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ, ଏହାର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର ଦୁଇଗୁଣରୁ 18^0 ଅଧିକ ହେଲେ କୋଣଟିର ପରିମାଣ କେତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ, ତାହାର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର ଏକ ପଞ୍ଚମାଂଶ ହେଲେ କୋଣଟିର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

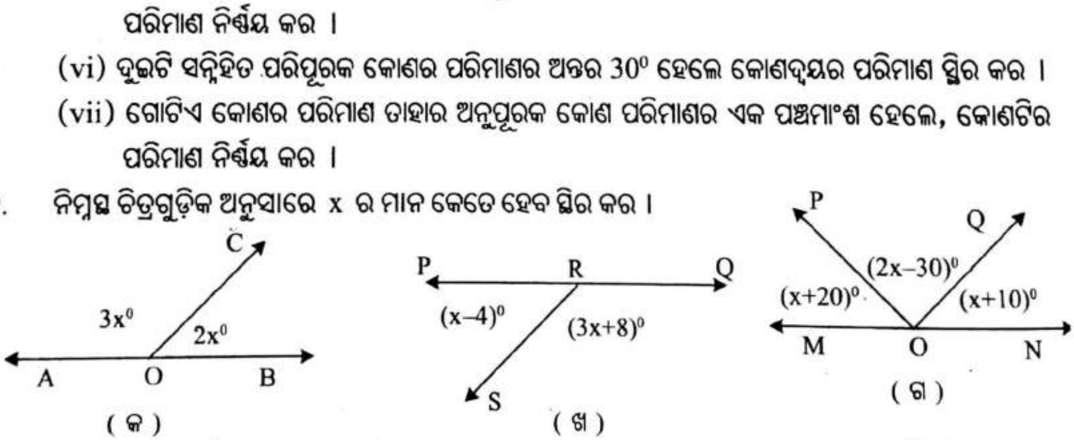
(iv) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 4:5 ହେଲେ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ, ତାହାର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ 20^0 କମ୍ ହେଲେ, କୋଣଟିର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(vi) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର ଅନ୍ତର 30^0 ହେଲେ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

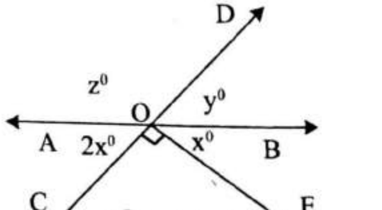
(vii) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ତାହାର ଅନୁପୂରକ କୋଣ ପରିମାଣର ଏକ ପଞ୍ଚମାଂଶ ହେଲେ, କୋଣଟିର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ଅନୁସାରେ x ର ମାନ କେତେ ହେବ ସ୍ଥିର କର ।



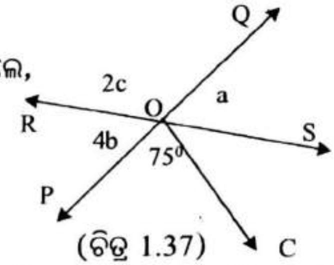
(ଚିତ୍ର 1.35)

10. ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $m\angle COE = 90^0$ ହେଲେ x, y ଓ z ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 1.36)

11. ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଓ $\overleftrightarrow{RS}$ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ଓ $m\angle POC = 75^0$ ହେଲେ, a, b ଏବଂ c ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



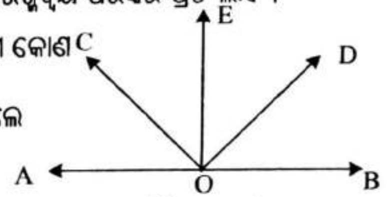
(ଚିତ୍ର 1.37)

(ଗ) ବିଭାଗ

12. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଦୁଇଟି ପ୍ରତୀପ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିପରୀତ ରଶ୍ମିହେବେ ।

13. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

14. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\angle AOE$ ଏବଂ $\angle EOB$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରଣ କୋଣ ଓ $\overrightarrow{OC}$, $\angle AOE$କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ । $m\angle COD = 90^0$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\overrightarrow{OD}$, $\angle EOB$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେବ ।

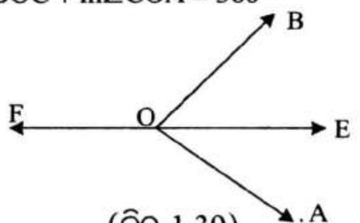


(ଚିତ୍ର 1.38)

15. $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $m\angle AOC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{OX}$ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overleftrightarrow{XO}$ କୋଣ BOD କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

16. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ରଶ୍ମି । କେଣସି ରଶ୍ମି ଅନ୍ୟ ରଶ୍ମି ଦୁଇଟି ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ବିସ୍ତୃତ ନୁହେଁ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COA = 360^0$

17. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overrightarrow{OE}$, $\angle AOB$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରଶ୍ମି । $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OE}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅଯେ, $m\angle BOF = m\angle AOF$



(ଚିତ୍ର 1.39)

1.7 ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା (Parallel Lines)

ସଂଜ୍ଞା: ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା ଯଦି ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁ ନଥାନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା କୁହାଯାଏ । ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ରଶ୍ମି କିମ୍ବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର କୁହାଯାଏ ।

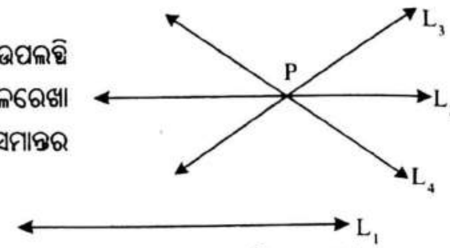
L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ଯଦି ସମାନ୍ତର ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସଙ୍କେତରେ $L_1 \parallel L_2$ ଲେଖାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ $L_1 \parallel L_2$ ହେଲେ $L_2 \parallel L_1$ ହେବ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 9 : ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Parallel Postulate) :

ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ତାହାପ୍ରତି ସମାନ୍ତର ହେଉଥିବା କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରୁ ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟକୁ ସହଜରେ ଉପଲବ୍ଧି କରିହେବ । L_1 ର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଯେତେ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ, ସେ ସବୁ ମଧ୍ୟରୁ L_2 ଛଡା ଆଉ କୌଣସିଟି L_1 ସହ ସମାନ୍ତର ନୁହେଁ ।



(ଚିତ୍ର 1.40)

ବି.ଦ୍ର. : ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ଅତି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ । ସମତଳ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ସଳଖ ଗାରକୁ ସରଳରେଖାର ଏକମାତ୍ର ଅର୍ଥ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରି ଯେଉଁ ଜ୍ୟାମିତି ଆଲୋଚନା କରାଯାଏ, ତାହାକୁ ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତି କୁହାଯାଏ । ଆଗରୁ କୁହାଯାଇଛି ସରଳରେଖା ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ତେଣୁ ଏହାର ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଅନେକ ପ୍ରକାର ଅର୍ଥ ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ । ସେ ସବୁ ଅର୍ଥକୁ ନେଇ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଅଣଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତି (Non-Euclidean Geometries) ମଧ୍ୟ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି । ଯାହାର ପ୍ରୟୋଗ ମହାକାଶ ଅଧ୍ୟୟନ ଆଦି ବୃହତ୍ତର ପରିସରରେ କରାଯାଏ । ଏ ସବୁ ଜ୍ୟାମିତିରେ ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟ ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଉପରେ ଆଧାରିତ ।

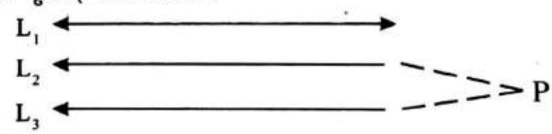
ଉପପାଦ୍ୟ - 3

ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ ପରସ୍ପର ଠାରୁ ପୃଥକ୍ ଯେଉଁ ସବୁ ସରଳରେଖା ଅନ୍ୟ ଏକ ସରଳରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।

(Distinct coplanar lines parallel to a given line are parallel to one another)

ଦତ୍ତ: $L_1 . L_2$ ଓ L_3 ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା ।

$L_2 \parallel L_1$, $L_3 \parallel L_1$



ପ୍ରାମାଣ୍ୟ: $L_2 \parallel L_3$

ପ୍ରମାଣ: ମନେକର L_2 ଓ L_3 ସମାନ୍ତର ନୁହନ୍ତି ।

(ଚିତ୍ର 1.41)

$\therefore$ ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ । ମନେକର L_2 ଓ L_3 ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P , $L_1 \parallel L_2$ ହୋଇଥିବାରୁ L_1 ଓ L_2 ଅଣଛେଦୀ, ତେଣୁ P, L_1 ର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

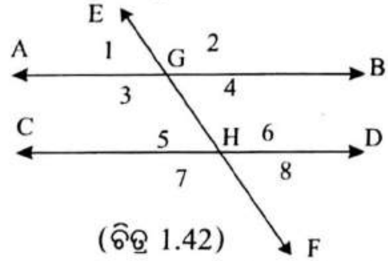
L_1 ର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ରେଖା L_2 ଓ L_3 , L_1 ସହ ସମାନ୍ତର, ମାତ୍ର ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ ଏହା ଅସମ୍ଭବ ।

ତେଣୁ $L_2 \parallel L_3$ (ପ୍ରମାଣିତ)

1.8 ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଓ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ (Parallel Lines and their transversals) :

ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ସମାନ୍ତର ରେଖାକୁ ଛେଦ କଲେ ତାହାକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସମାନ୍ତର ରେଖା ମାନଙ୍କର ଛେଦକ (transversal) କୁହାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ରେଖାକୁ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଛେଦକଲେ, ଯେଉଁ ଆଠଗୋଟି କୋଣ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ, ସେମାନଙ୍କୁ ଯୋଡା ଯୋଡା କରି ଦୁଇପ୍ରକାର ନାମରେ ନାମିତ କରାଯାଏ । ଯଥା - ଏକାନ୍ତର କୋଣ (alternate angles) ଓ ଅନୁରୂପ କୋଣ (corrresponding angles) । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ ସଂପୃକ୍ତ କୋଣ ମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଗୁଡିକ 1 ରୁ 8 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଛି । ଏକାନ୍ତର ଓ ଅନୁରୂପ ଭେଦରେ କୋଣ ଯୋଡା ଗୁଡିକ ହେଲେ :



(ଚିତ୍ର 1.42)

ଏକାନ୍ତର କୋଣ (Alternate angles)

(i) $\angle AGH$ ଓ $\angle GHD$ (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 3 ଓ 6)

(ii) $\angle BGH$ ଓ $\angle GHC$ (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 4 ଓ 5)

ଅନୁରୂପ କୋଣ (Corresponding angles)

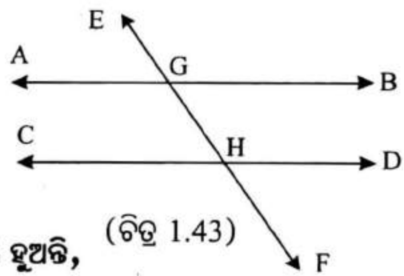
(i) $\angle EGB$ ଓ $\angle GHD$ (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 2 ଓ 6) (ii) $\angle DHF$ ଓ $\angle BGH$ (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 8 ଓ 4)

(iii) $\angle EGA$ ଓ $\angle GHC$ (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 1 ଓ 5) (iv) $\angle CHF$ ଓ $\angle AGH$ (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 7 ଓ 3)

ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ (Interior Angles) ଓ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ (Exterior angles)

ଦତ୍ତଚିତ୍ରରେ 3,4,5 ଓ 6 ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣଗୁଡ଼ିକୁ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ ଓ ଅବଶିଷ୍ଟ କୋଣମାନଙ୍କୁ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $\angle AGH, \angle BGH, \angle GHC$ ଓ $\angle GHD$ ହେଉଛନ୍ତି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ଓ ଅନ୍ୟ ଚାରିଗୋଟି କୋଣ ବହିଃସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି ।

ବିଶେଷ ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ସମାନ୍ତର ନ ହୋଇଥିଲେ ମଧ୍ୟ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ $\overleftrightarrow{EF}$ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ଆଠଗୋଟି କୋଣକୁ ଉପରୋକ୍ତ ମତେ ଏକାନ୍ତର, ଅନୁରୂପ ତଥା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଓ ବହିଃସ୍ଥ ଭେଦରେ ନାମିତ କରାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 1.43)

ଦୁଇଟି ସରଳ ରେଖାର ଛେଦକ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ବିଷୟ :

ତଥ୍ୟ -1 : ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଓ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା

(i) ଯେକୌଣସି ଏକାନ୍ତର କୋଣ ଯୋଡ଼ା ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି,

ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $m\angle AGH = m\angle GHD$ ଓ $m\angle BGH = m\angle GHC$

(ii) **ଯେକୌଣସି ଅନୁରୂପ କୋଣ ଯୋଡ଼ା ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି,** ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ

$m\angle EGB = m\angle GHD, m\angle DHF = m\angle BGH, m\angle EGA = m\angle GHC$ ଓ $m\angle CHF = m\angle AGH$

(iii) **ଯେଉଁ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଛେଦକର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ,** ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle AGH + m\angle CHG = 180^0$ ଓ $m\angle BGH + m\angle DHG = 180^0$ ଅଟେ ।

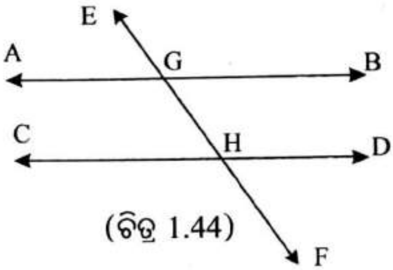
ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ଅଟେ । ତାହା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ତଥ୍ୟ - 2 : ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଓ ସେମାନଙ୍କର ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା

(i) ଯେକୌଣସି ଏକାନ୍ତର କୋଣ ଯୋଡ଼ା ଯଦି ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି

କିମ୍ବା (ii) ଯେକୌଣସି ଅନୁରୂପ କୋଣ ଯୋଡ଼ା ଯଦି ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି

କିମ୍ବା (iii) ଯେଉଁ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଛେଦକର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ, ସେମାନେ ଯଦି ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହୁଅନ୍ତି; ତେବେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 1.44)

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ,

(i) $m\angle AGH = m\angle GHD$

କିମ୍ବା $m\angle BGH = m\angle GHC \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(ii) $m\angle EGB = m\angle GHD$ ବା $m\angle DHF = m\angle BGH$ ବା $m\angle EGA = m\angle GHC$

ବା $m\angle CHF = m\angle AGH \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(iii) $m\angle AGH + m\angle CHG = 180^0$ କିମ୍ବା $m\angle BGH + m\angle DHG = 180^0 \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ଦ୍ୱୟର ପ୍ରମାଣ କରିବାର ଅବ୍ୟବହିତ ପୂର୍ବରୁ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପ୍ରଥମେ ଅବଗତ ହେବା ।

ଅନୁରୂପ କୋଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ :

ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ଯଦି ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ହେବେ । ଏହାର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ । ତାହା ହେଉଛି-

ଉପପାଦ୍ୟ - 4

ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଛେଦକଲେ, ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହୁଏ ।

ଏହି ଉକ୍ତିଟି ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର-ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ, ଅନୁରୂପ କୋଣ-ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ସମାନ୍ତର-ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇପାରିବ । ଏଠାରେ ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଉ ନାହିଁ ।

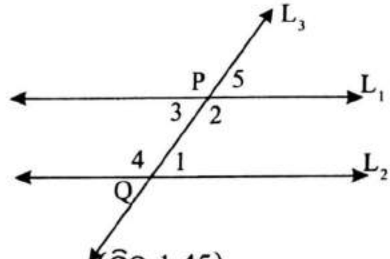
ଉପପାଦ୍ୟ - 5

ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଛେଦକଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୋଡ଼ା ଏକାନ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହୁଏ ।

(If a transversal intersects two parallel lines, then each pair of alternate angles are of equal measure.)

ଦତ୍ତ : $L_1 \parallel L_2$ ଏବଂ L_3 ସେମାନେ ଛେଦକ ।

$\angle 1$ ଓ $\angle 3$, $\angle 2$ ଓ $\angle 4$ ଦୁଇ ଯୋଡ଼ା ଏକାନ୍ତରକୋଣ ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 1.45)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle 1 = m\angle 3$ ଏବଂ $m\angle 2 = m\angle 4$

ପ୍ରମାଣ : $\angle 3$ ଭିନ୍ନ $\angle 2$ ର ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣକୁ $\angle 5$ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଉ ।

$L_1 \parallel L_2$ ହେତୁ $m\angle 5 = m\angle 1$ (ଅନୁରୂପକୋଣ)

କିନ୍ତୁ $m\angle 5 = m\angle 3$ (ପ୍ରତୀପକୋଣ)

$\therefore m\angle 1 = m\angle 3$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, ଅନ୍ୟଯୋଡ଼ା ଏକାନ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ

ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle 2 = m\angle 4$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 6

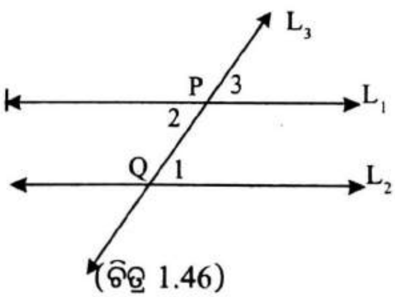
ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ଯଦି ଦୁଇଟି ଏକାନ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ।

(If a transversal intersects two coplanar lines and a pair of alternate angles are of equal measure then those two straight lines are parallel.)

ଦତ୍ତ : ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ସରଳରେକା L_3 ଦ୍ୱାରା ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦିତ ହୋଇଛନ୍ତି । $\angle 1$ ଓ $\angle 2$ ଏକଯୋଡ଼ା ଏକାନ୍ତରକୋଣ ଏବଂ $m\angle 1 = m\angle 2$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $L_1 \parallel L_2$

ପ୍ରମାଣ : $\angle 2$ ର ପ୍ରତୀପ କୋଣକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ନାମିତ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.46)

ଚିତ୍ର 1.46 ରେ $m\angle 2 = m\angle 3$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

$m\angle 2 = m\angle 1$ (ଦତ୍ତ) $\therefore m\angle 3 = m\angle 1$

କିନ୍ତୁ ଏମାନେ ଅନୁରୂପକୋଣ ।

$\therefore L_1 \parallel L_2$ (ଅନୁରୂପକୋଣ-ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 7

ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଛେଦକଲେ, ଛେଦକର ଏକପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ।

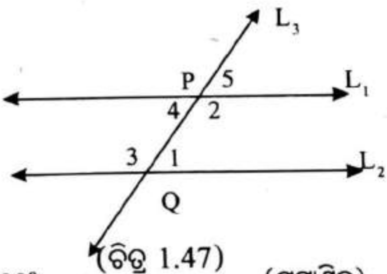
(If a transversal intersects two parallel lines, then the sum of the measures of two interior angles on the same side of the transversal is 180^0.)

ଦତ୍ତ : $L_1 \parallel L_2$ ଏବଂ L_3 ଛେଦକ L_1 ଓ L_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ।

L_3 ଛେଦକର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥକୋଣ $\angle 2$, $\angle 1$ ଏବଂ ଅନ୍ୟପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ $\angle 4$, $\angle 3$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^0$ ଏବଂ $m\angle 3 + m\angle 4 = 180^0$

$\angle 4$ ର ପ୍ରତୀପ କୋଣକୁ 5 ଦ୍ୱାରା ନାମିତ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.47)

ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.47 ରେ) $m\angle 2 + m\angle 5 = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ)

$L_1 \parallel L_2$ ହେତୁ $m\angle 5 = m\angle 1$ (ଅନୁରୂପ କୋଣ)

$\therefore m\angle 2 + m\angle 1 = 180^0$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $m\angle 3 + m\angle 4 = 180^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 8

ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ଯଦି ଛେଦକର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ହୁଏ, ତେବେ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ।

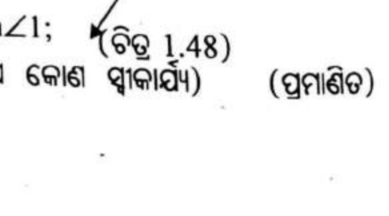
(If a transversal intersects two coplanar lines and the sum of the measures of a pair of interior angles on the same side of it, is 180^0 then two lines are parallel.)

ଦତ୍ତ : ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟକୁ L_3 ଛେଦକ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି ।

L_3 ଛେଦକର ଏକପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଏକଯୋଡ଼ା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ $\angle 1$ ଏବଂ $\angle 2$ ।

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180^0$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $L_1 \parallel L_2$



(ଚିତ୍ର 1.48)

ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.48 ରେ) $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ)

$m\angle 2 + m\angle 1 = 180^0$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 1 \Rightarrow m\angle 3 = m\angle 1$;

କିନ୍ତୁ, ଏମାନେ ଅନୁରୂପକୋଣ । $\therefore L_1 \parallel L_2$ (ଅନୁରୂପ କୋଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଠିକ୍ ବା ଭୁଲ୍ ଲେଖ :

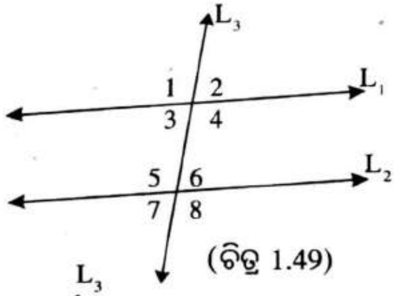
(a) $L_1 \parallel L_2$ ଓ $L_2 \parallel L_3$ ହେଲେ $L_1 \parallel L_3$

(b) $L_1 \perp L_2$ ଓ $L_2 \perp L_3$ ହେଲେ $L_1 \perp L_3$

(c) $L_1 = L_2$ ହେଲେ $L_1 \parallel L_2$ (ସୂଚନା : $L_1 = L_2$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି L_1 ଓ L_2 ରେଖା ଏକ ଅଭିନ୍ନ । ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ସଂଜ୍ଞା ବ୍ୟବହାର କର)

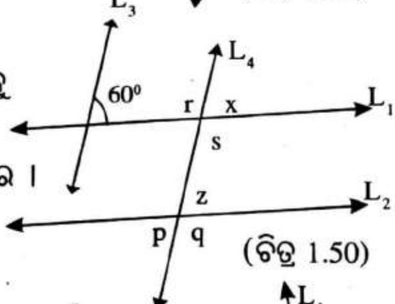
(d) ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(e) $\angle ABC$ ଓ $\angle DEF$ ମଧ୍ୟରେ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$ ଓ $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ ହେଲେ $m\angle ABC = m\angle DEF$ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.49)

2. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.49 ରେ $L_1 \parallel L_2$ ଓ L_3 ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ । ଛେଦବିନ୍ଦୁରେ ଉତ୍ପନ୍ନକୋଣଗୁଡ଼ିକ 1, 2, 3 ....8 ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ । $m\angle 3 = 65^0$ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



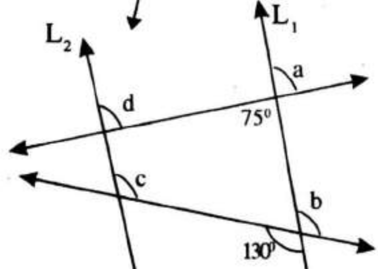
(ଚିତ୍ର 1.50)

3. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.50 ରେ $L_1 \parallel L_2$ ଏବଂ $L_3 \parallel L_4$ ଚିତ୍ରରୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କରି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର ।
କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କରି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର ।

$m\angle x =$, $m\angle z =$

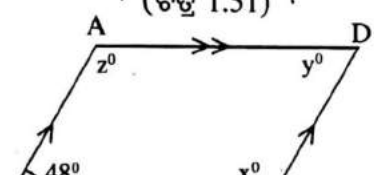
$m\angle p =$, $m\angle q =$

$m\angle r =$, $m\angle s =$



(ଚିତ୍ର 1.51)

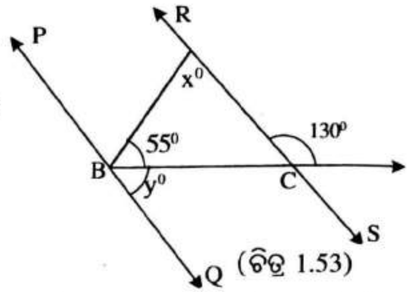
4. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.51 ରେ $L_1 \parallel L_2$ । ଚିତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି a, b, c, d ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 1.52)

5. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.52 ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ । ଚିତ୍ରରୁ x,y,z ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

6. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.53 ରେ $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ । $\overleftrightarrow{RS}$ କୁ $\overleftrightarrow{BN}$ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ଚିତ୍ରରୁ x ଓ y ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

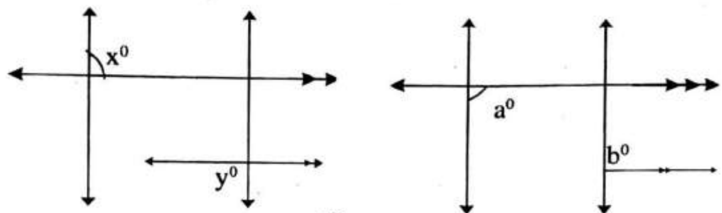


(ଚିତ୍ର 1.53)

7. ଚିତ୍ର 1.54 ରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ର ଦୁଇଯୋଡ଼ା ସମାନ୍ତର ରେଖାଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସଂକେତରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

(i) ଚିତ୍ର 1.54 (a) ରୁ x ଓ y ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ସ୍ଥିର କର ।

(ii) ଚିତ୍ର 1.54 (b) ରୁ a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ସ୍ଥିର କର ।

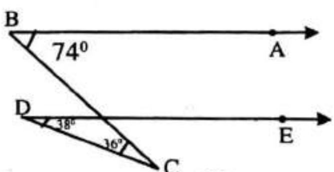


(ଚିତ୍ର 1.54)

(ଖ) ବିଭାଗ

8. (i) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.55 ରେ $m\angle ABC = 74^0$, $m\angle EDC = 38^0$ $m\angle BCD = 36^0$ । ପ୍ରମାଣକର ଯେ, $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BA}$

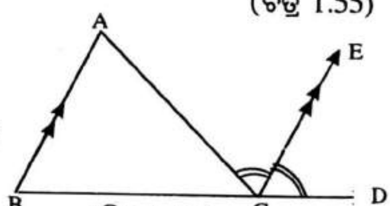
(ii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.55 ରେ $m\angle ABC = 60^0$, $m\angle EDC = 38^0$ ଏବଂ $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BA}$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle BCD = 22^0$ ।



(ଚିତ୍ର 1.55)

9. (i) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.56 ରେ $\angle ACD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{CE}$ ଏବଂ $\overline{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଲେ,ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle A = m\angle B$

(ii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.56 ରେ $\overrightarrow{CE} \parallel \overline{AB}$, $m\angle ECD = 70^0$ ଏବଂ $m\angle A = 50^0$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle ACB = 60^0$ ।



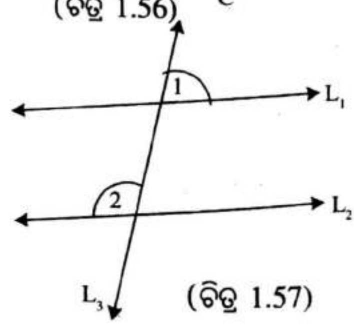
(ଚିତ୍ର 1.56)

10. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.57 ରେ $L_1 \parallel L_2$ ଓ L_1, L_2 ର ଛେଦକ L_3

(i) $m\angle 2 = 2m\angle 1$ ହେଲେ, $\angle 1$ ଓ $\angle 2$ ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

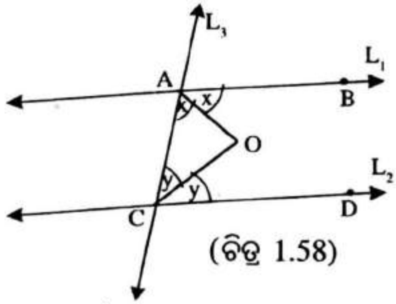
(ii) $m\angle 2 = 3m\angle 1$ ହେଲେ, $\angle 1$ ଓ $\angle 2$ ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

(iii) $m\angle 1 : m\angle 2 = 2 : 3$ ହେଲେ, $\angle 1$ ଓ $\angle 2$ ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



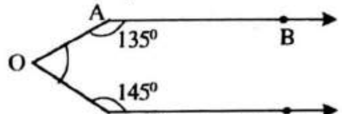
(ଚିତ୍ର 1.57)

11. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.58 ରେ $L_1 \parallel L_2$ । L_3 ଛେଦକ L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଓ $\angle ACD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle AOC = 90^0$



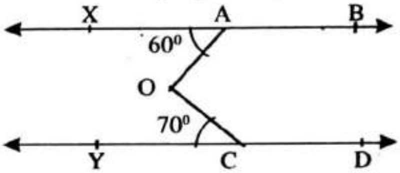
(ଚିତ୍ର 1.58)

12.(i) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.59 ରେ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $m\angle OAB = 135^0$, $m\angle OCD = 145^0$ ହେଲେ $\angle AOC$ ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 1.59)

(ii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{XB} \parallel \overleftrightarrow{YD}$, $m\angle XAO = 60^0$, $m\angle YCO = 70^0$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle AOC = 130^0$



(ଗ) ବିଭାଗ

13. ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) ଯେକୌଣସି ଏକାନ୍ତର କୋଣ ଦୁଇଟିର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।
(ii) ଯେକୌଣସି ଅନୁରୂପ କୋଣ ଦୁଇଟିର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।

14. ΔABC ର $m\angle B = m\angle C$, $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle APQ = m\angle AQP$ ।

15. ଗୋଟିଏ କୋଣର ଦୁଇବାହୁ ଅନ୍ୟ ଏକ କୋଣର ଦୁଇବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୋଣଦ୍ୱୟ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ବା ପରିପୂରକ ହେବେ ।

16. ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ କରି ସେଥିମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତାହା ଅନ୍ୟଟି ପ୍ରତି ମଧ୍ୟ ଲମ୍ବ ହେବ ।

1.9 ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ଏବଂ ଏହାର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ (Angles of a triangle and its exterior angles):

ଉପପାଦ୍ୟ - 9

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ।

(The sum of the measures of the three angles of a triangle is 180^0)

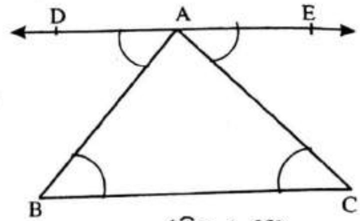
ଦତ୍ତ : ABC କୌଣସି ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$

ଅଙ୍କନ : A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ $\overleftrightarrow{DE}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ଏବଂ D - A - E (A, D ଓ E ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀବିନ୍ଦୁ)

ଏବଂ D ବିନ୍ଦୁ $\overleftrightarrow{AC}$ ର B ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.60)

ପ୍ରମାଣ : ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ B, $\angle DAC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$m\angle DAB + m\angle BAC = m\angle DAC$

(ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର - ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) .... (i)

$\overrightarrow{AC}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A, $\overleftrightarrow{DE}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$m\angle DAC + m\angle CAE = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ) ......(ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ ମିଳିଲା, $m\angle DAB + m\angle BAC + m\angle CAE = 180^0$......(iii)

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ଓ $\overline{AB}$ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ ।

$m\angle DAB = m\angle ABC$ (ଏକାନ୍ତର) ......(iv)

ସେହିପରି $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ଓ $\overline{AC}$ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ ।

$\therefore m\angle CAE = m\angle ACB$ (ଏକାନ୍ତର) ......(v)

(iii), (iv) ଓ (v) ରୁ ମିଳିଲା, $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = 180^0$

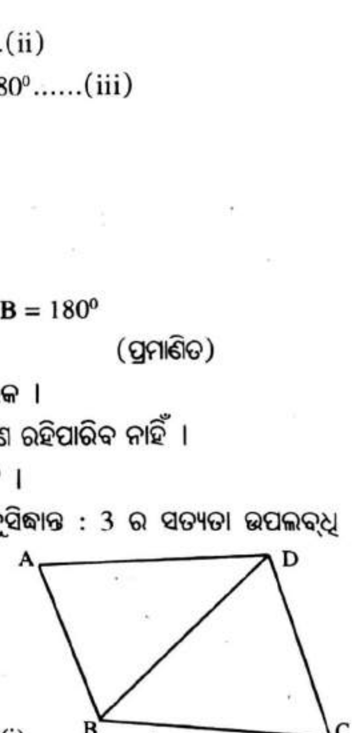
ଅର୍ଥାତ୍ ΔABC ରେ, $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 1. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 2. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଗୋଟିକରୁ ଅଧିକ ସମକୋଣ ବା ସ୍ଥୂଳକୋଣ ରହିପାରିବ ନାହିଁ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 3. ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 3 ର ସତ୍ୟତା ଉପଲବ୍ଧି କରିସାରିଛ । ଆସ ଏହାର ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣଟିକୁ ଜାଣିବା ।



(ଚିତ୍ର 1.61)

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ: $m\angle ABC + m\angle BCD + m\angle ADC + m\angle BAD = 360^0$

ଅଙ୍କନ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କର ।

ΔADB ରେ $m\angle ABD + m\angle BDA + m\angle BAD = 180^0$ ....(i)

ସେହିପରି ΔCBD ରେ $m\angle CBD + m\angle BDC + m\angle BCD = 180^0$ ....(ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ $(m\angle ABD + m\angle CBD) + m\angle BCD +$

$(m\angle BDC + m\angle BDA) + m\angle BAD = 180^0 + 180^0$ ....(iii)

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଉତ୍ତଳ ହୋଇଥିବାରୁ B, $\angle ADC$ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଓ D, $\angle ABC$ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$m\angle ABD + m\angle CBD = m\angle ABC$ ଓ

$m\angle BDA + m\angle BDC = m\angle ADC$ (ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର - ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) ....(iv)

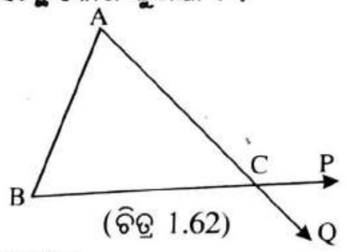
(iii) ଓ (iv) ରୁ ମିଳିଲା, $m\angle ABC + m\angle BCD + m\angle ADC + m\angle BAD$

$= 180^0 + 180^0 = 360^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥକୋଣ (Exterior angle of a triangle)

ପୂର୍ବରୁ ତୁମେମାନେ ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥକୋଣ ସଂପର୍କରେ ଜାଣିଛ । ଆସ ତାକୁ ମନେପକାଇବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥକୋଣର ସନ୍ନିହିତପରିପୂରକ କୋଣକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 1.62)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overrightarrow{CB}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{CP}$ ହେଲେ $\angle ACB$ ର ଏକ ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ $\angle ACP$ ମିଳିଥାଏ ।

ସେହିପରି $\overrightarrow{CA}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{CQ}$ ହେଲେ $\angle ACB$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ସନ୍ନିହିତପରିପୂରକ $\angle BCQ$ ମିଳିଥାଏ ।

$\overrightarrow{BP}$ ଓ $\overrightarrow{AQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ C ହେତୁ $\angle ACP$ ଓ $\angle BCQ$ ଏକ ଯୋଡ଼ା ପ୍ରତୀପ କୋଣ । ଫଳରେ ସେଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସମାନ ।

ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ΔABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ C ରେ ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ $\angle ACP$ ଓ $\angle BCQ$ । ଲକ୍ଷ୍ୟକର ΔABC ର $\angle PCQ$ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ନୁହେଁ ।

ΔABC ର $\angle B$ ଓ $\angle C$ କୁ A ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ଅନ୍ତସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ (Remote interior angles) କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି $\angle C$ ଓ $\angle A$ କୁ B ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ଏବଂ $\angle A$ ଓ $\angle B$ କୁ C ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ କୁହାଯାଏ ।

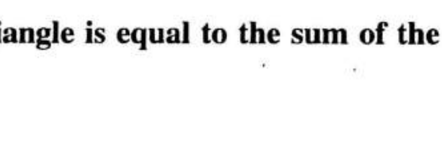
ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏବଂ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସଂପର୍କକୁ ତୁମେ ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଜାଣିସାରିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନ ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 10

ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଅନ୍ତସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।

(The measure of the exterior angle of a triangle is equal to the sum of the measures of its remote interior angles.)

ଦତ୍ତ : ΔABCର C ବିନ୍ଦୁରେ ବହିଃସ୍ଥକୋଣ $\angle ACD$ ।
ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟ $\angle A$ ଏବଂ $\angle B$



(ଚିତ୍ର 1.63)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ରେ

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 9)

କିନ୍ତୁ $m\angle C + m\angle ACD = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ)

$\therefore m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle C + m\angle ACD$

$\Rightarrow m\angle A + m\angle B = m\angle ACD$

ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

(ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 1

ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ, ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 10 ର ପ୍ରମାଣରେ ବହିଃସ୍ଥ $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

ତେଣୁ $m\angle ACD$, $m\angle A$ ଓ $m\angle B$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 2

ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।

ΔABC ର କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ A, B, C ଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{CB}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ଅଙ୍କନ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି 360^0 ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ।

$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$,

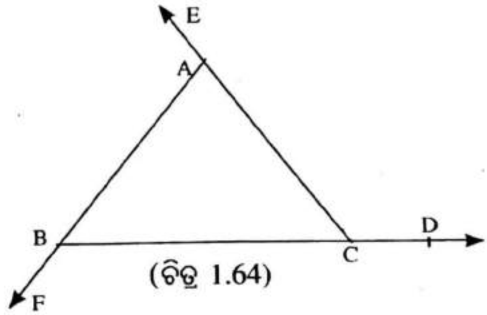
$m\angle BAE = m\angle B + m\angle C$ ଓ

$m\angle CBF = m\angle A + m\angle C$ ।

$\therefore m\angle ACD + m\angle BAE + m\angle CBF$

$= 2\,(m\angle A + m\angle B + m\angle C)$

$= 2 \times 180^0 = 360^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 1.64)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(d)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି ପାଖରେ 'X' ଚିହ୍ନ ଏବଂ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାଖରେ '✓' ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

(a) କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି ତୃତୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମକୋଣୀ । ☐

(b) କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି ତୃତୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ । ☐

(c) ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ । ☐

(d) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଅତିବେଶିରେ ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ରହିପାରିବ । ☐

(e) ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବଦା 180^0 । ☐

(f) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରର ପରିପୂରକ । ☐

(g) ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥକୋଣ ସର୍ବଦା ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ । ☐

(h) ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥକୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ☐

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ 30^0 ହେଲେ, ଅନ୍ୟଟିର ପରିମାଣ .... ।

(b) ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥକୋଣର ପରିମାଣ 130^0 । ଏହାର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ 75^0 ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ ------- ।

(c) ΔABC ରେ $m\angle A = 55^0$ ଏବଂ $m\angle B = 75^0$ ହେଲେ $\angle C$ ର ପରିମାଣ ------- ।

(d) କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ------- ।

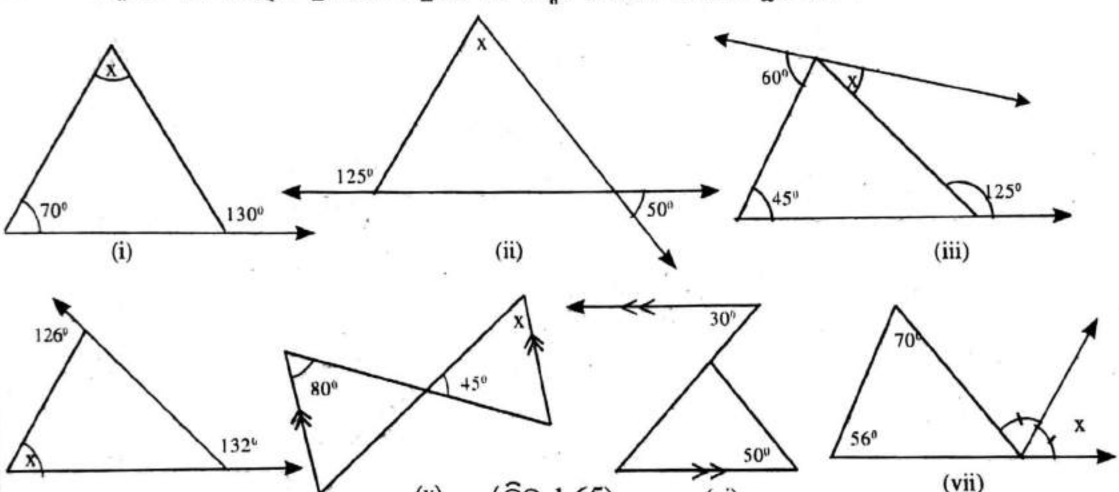
(e) ΔABC ରେ $m\angle A = 90^0$, $m\angle B = 2\, m\angle C$ ହେଲେ $\angle C$ ର ପରିମାଣ ------ ।

(f) ΔABC ରେ $AB = AC$, $m\angle A = 60^0$ ହେଲେ $m\angle B =$ -------

(g) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷକୋଣର ପରିମାଣ 120^0 ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଦୁଇକୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନକୋଣର ପରିମାଣ ------ ।

(h) ΔABC ରେ $AB = AC$, $m\angle B = 30^0$ ହେଲେ $\angle A$ ର ପରିମାଣ -------- ।

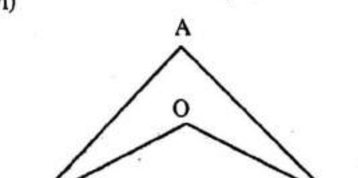
3. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ‘x’ ଚିହ୍ନିତ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 1.65)

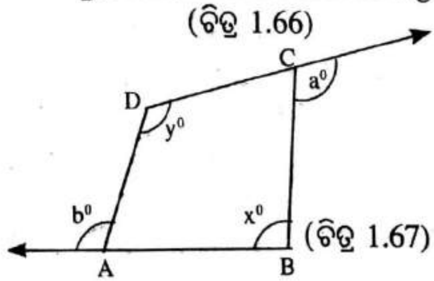
(ଖ) ବିଭାଗ

4. ΔABC ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ O । ଦର୍ଶାଅ ଯେ,
$m\angle BOC = m\angle BAC + m\angle ABO + m\angle ACO$



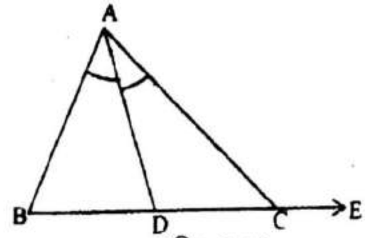
(ଚିତ୍ର 1.66)

5. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରୁ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $a^0 + b^0 = x^0 + y^0$ ।



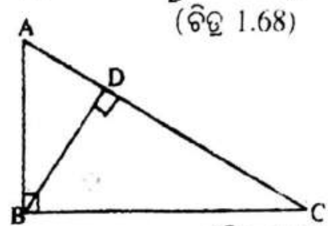
(ଚିତ୍ର 1.67)

6. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । ଦର୍ଶାଅଯେ, $m\angle ABC + m\angle ACE = 2m\angle ADC$



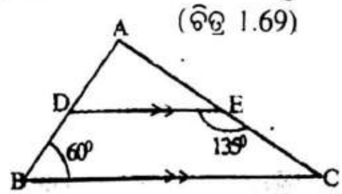
(ଚିତ୍ର 1.68)

7. ΔABC ରେ $m\angle B = 90^0$ । $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ । ପ୍ରମାଣ କର **ଯେ,** $m\angle ABD = m\angle ACB$ ଏବଂ $m\angle BAD = m\angle DBC$ ।



(ଚିତ୍ର 1.69)

8. ΔABC ରେ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $m\angle ABC = 60^0$ ଏବଂ $m\angle DEC = 135^0$ ହେଲେ, $\angle A$ ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



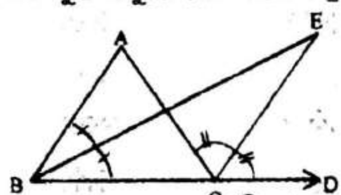
(ଚିତ୍ର 1.70)

(ଗ) ବିଭାଗ

9. ପ୍ରମାଣକର ଯେ, କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୋଡ଼ାକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି, ତୃତୀୟକୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ।

10. ΔABC ରେ $m\angle ABC = m\angle ACB$, $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କରଯେ, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

11. ΔABC ରେ $\angle B$ ର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏବଂ C ବିନ୍ଦୁରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥକୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ E ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle BEC = \frac{1}{2} m\angle A$ ।

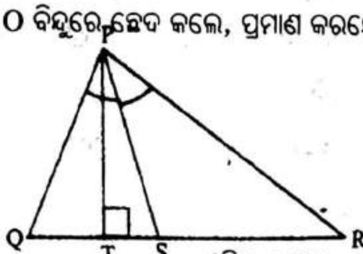


(ଚିତ୍ର 1.71)

12. ΔABC ରେ $\angle ABC$ ଓ $\angle ACB$ ର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle BOC = 90^0 + \frac{1}{2} m\angle A$ ।

13. ΔABC ରେ $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କରଯେ $m\angle BOC = 90^0 - \frac{1}{2} m\angle A$ ।

14. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{PS}$, $\angle P$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏବଂ $\overline{PT} \perp \overline{QR}$ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle TPS = \frac{1}{2}(m\angle Q - m\angle R)$



(ଚିତ୍ର 1.72)

15. ΔABC ରେ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Q ଏବଂ $BQ = AQ$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\angle BAC$ ସମକୋଣ ।

16. ΔABC ର O ଏକ ଅନ୍ତସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ଯଦି $m\angle OAB = m\angle OCA$ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle AOC + m\angle BAC = 180^0$ ।