कलन (Calculus)

2.1 संबंध एवं फलन

(RELATION AND FUNCTION)

2.1.1 प्रस्तावना

दैनिक जीवन में हम अक्सर संबंध की बात करते हैं, जैसे- रमेश, लड्डू का पिता है, रम्या हर्ष की बहन है, आबिदा जुनैद की खाला है, कलबतिया कुल्लू की चाची है, हसन जिला स्कूल भागलपुर का छात्र है, इम्तयाज टुड्डू के शिक्षक हैं, पप्पू चकसलेम गाँव में रहता है इत्यादि, अर्थात् हम दैनिक जीवन में पिता और पुत्र, भाई और बहन, विद्यालय और छात्र, शिक्षक और शिक्षार्थी, ग्राम और ग्रामवासी आदि संबंधों को चित्रित करनेवाले अनेक पैटर्नों को चिह्नित करते हैं। गणित में भी हमें अनेक संबंध मिलते हैं, जैसे 'संख्या m संख्या n से बड़ी है $(m>n)$', 'संख्याएँ a और b बराबर हैं $(a=b)$, 'सरल रेखा ℓ_1 सरल रेखा ℓ_2 पर लम्ब है $(\ell_1 \perp \ell_2)$ 'त्रिभुज (Δ_1) और त्रिभुज (Δ_2) समरूप $(\Delta_1 \; \Delta_2)$ हैं', 'समुच्चय X, समुच्चय Y का उपसमुच्चय है' $(X \subset Y)$। इन सभी संबंधों में हम देखते हैं कि किसी संबंध में एक ऐसा युग्म सम्मिलित है जिसके घटक (अवयव) एक निश्चित क्रम का पालन करते हैं अर्थात् एक पैटर्न को मानते हैं। गणित में शब्द 'संबंध (relation)' की संकल्पना को अंग्रेज़ी भाषा में इस शब्द के अर्थ से लिया गया है जिसके अनुसार दो वस्तुएँ परस्पर संबंधित होती हैं यदि उनके बीच एक अभिज्ञेय (recognisable) कड़ी हो।

इस अध्याय में हम सीखेंगे कि किस प्रकार दो समुच्चयों के सदस्य-युग्मों में आने वाले दोनों सदस्यों के बीच बननेवाले संबंधों को एवं उन संबंधों के प्रकारों को स्पष्ट कर सकेंगे। अन्त में, हम ऐसे विशेष संबंधों के बारे मे जानेंगे जो फलन बनने योग्य हैं। फलन की परिकल्पना गणित में अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है क्योंकि यह एक वस्तु से दूसरी वस्तु के बीच गणित के संबंध में यथातथ्य संगतता (recognisable correspondence)के विचार का अभिग्रहण करती है।

2.1.2 समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of sets)

कक्षा IX के उच्चगणित में समुच्चयों का कार्तीय गुणन से परिचय कराया जा चुका है। स्मरण के लिए हमलोग यहाँ इसके बारे में थोड़ी और चर्चा कर लेते हैं।

मान लीजिए कि $A = \{1,2\}$

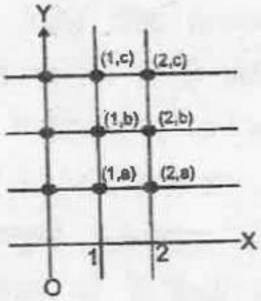
और $B = \{a,b,c\}$

अब समुच्चय A के अवयव के साथ समुच्चय B के अवयव का युग्म बनाने पर $(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)$ कुल छह युग्म बनेंगे। पिछली कक्षा से स्मरण कीजिए कि, एक क्रमित युग्म अवयवों का वह युग्म है जिसे वक्र छोटी कोष्ठक में लिखते हैं और जिनको एक दूसरे से किसी विशेष क्रम में समूहित किया जाता है अर्थात् $\{(x,y): x \in A$ और $y \in B\}$

अत: $A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

इसी प्रकार $B \times A = \{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$

$A \times B$ के अवयवों को आकृति 1.1 के द्वारा भी समझा जा सकता है।



आकृति 1.1

क्रमित युग्मों की समानता की परिभाषा से युग्म $(2,a)$, युग्म $(a,2)$ के समान नहीं है और यह बात कार्तीय गुणन के प्रत्येक युग्म के लिए लागू होती है जिससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $A \times B \neq B \times A$, परन्तु दोनों समुच्चयों में अवयवों की संख्या समान है अर्थात् $n(A \times B) = n(B \times A)$.

यहाँ हम पाते हैं कि यदि A और B दो सीमित समुच्चय (finite Sets) हों तो $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

उदाहरण 1: यदि $\left(\frac{a}{3}+1, b-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ तो a तथा b ज्ञात कीजिए।

हल: हम यहाँ देखते हैं कि क्रमित युग्म समान है, इसलिए संगत घटक भी समान होंगे।

अत: $\frac{a}{3}+1 = \frac{5}{3}$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a = 2.$$

और $b-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow b=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$

$\Rightarrow b=1$

उदाहरण 2: यदि समुच्चय A में 4 अवयव हैं तथा समुच्चय $B=\{a,b,c\}$, तो $A\times B$ में अवयवों की संख्या ज्ञात करें।

हल: हम जानते हैं कि जब A और B दो सीमित समुच्चय हों, तो $n(A\times B)=n(A).n(B)$

चूँकि समुच्चय A में 4 अवयव और समुच्चय B में 3 अवयव हैं,

अत: $n(A\times B)=n(A).n(B)=4\times 3=12$

$\Rightarrow A\times B$ में अवयवों की संख्या 12 होगी।

उदाहरण 3: यदि $P\times Q=\{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z)\}$ तो P तथा Q ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ दिया गया है-

$P\times Q=\{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z)$

$P=$ युग्म के प्रथम घटकों का समुच्चय $=\{a,b\}$

$Q=$ युग्म के द्वितीय घटकों का समुच्चय $=\{x,y,z\}$

उदाहरण 4: यदि $A=\{1,2,3\}$ और $B=\{3,5\}$, तो $A\times B$ लिखिए! $A\times B$ के कितने उपसमुच्चय होंगे?

हल: $A=\{1,2,3\}$

$B=\{3,5\}$

$A\times B=\{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,5)\}$

हम जानते हैं कि यदि समुच्चय X में अवयवों की संख्या n है तो समुच्चय X के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है।

यहाँ $A\times B$ में अवयवों की संख्या 6 है, तो $A\times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या $2^6=64$ होगी।

उदाहरण 5: कार्तीय गुणन $P\times P$ में 9 अवयव हैं, जिनमें दो अवयव $(-1,0)$ तथा $(0,1)$ भी शामिल हैं। समुच्चय P ज्ञात कीजिए तथा $P\times P$ के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।

हल: कार्तीय गुणन $P \times P$ में 9 अवयव हैं। स्पष्टतः $P \times P$ में समुच्चय P के अवयवों के द्वारा युग्म बनेगा, अर्थात् $P \times P$ के अवयव $(-1,0),(0,1)$ है, तो $-1,0,1$ P के अवयव होंगे। शर्तानुसार $P \times P$ में 9 अवयव है अतः P में 3 अवयव होंगे।

$\Rightarrow P \times P = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1), \Rightarrow P = \{-1,0,1\}$

$\Rightarrow p \times p = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(01),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$

$P \times P$ के $(-1,0),(0,1)$ के अलावा-

$(-1,-1),(-1,1),(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)$ अवयव हैं।

प्रश्नावली-1

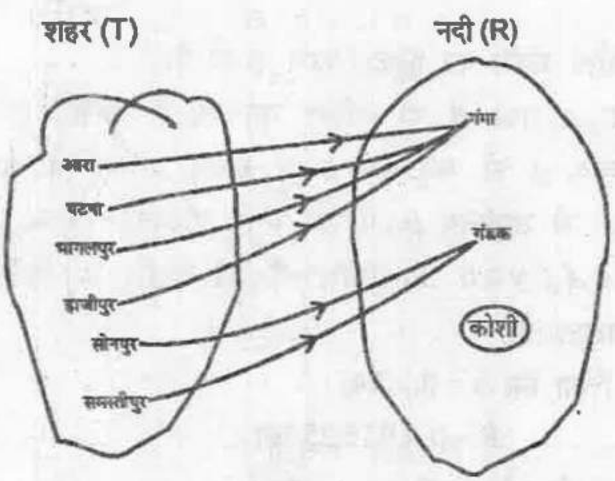
1. यदि $(a+1,b-3)=(2,5)$, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।
2. यदि $A=\{1,2,3\}$ और $B=\{2014\}$, तो $A \times B$ तथा $B \times A$ ज्ञात कीजिए। क्या दोनों कार्तीय गुणन समान हैं?
3. मान लीजिए कि $X=\{a,b\}, Y=\{a,b,c,d\}, Z=\{e,f\}, T=\{e,f,g,h\}$, सत्यापित करें कि (i) $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$

   (ii) $X \times Z \subset Y \times T$
4. यदि $A=\{2013,2014\}$ और $B=\{1001,5050,111\}$, तो $A \times B$ और $B \times A$ ज्ञात कीजिए।
5. यदि कार्तीय गुणन $A \times A$ में 16 अवयव हैं जिनमें अवयव $(1,2),(4,1),(3,2)$ भी हैं। समुच्चय A ज्ञात कीजिए तथा $A \times A$ के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।
6. मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं जहाँ $n(A)=3$ और $n(B)=2$। यदि $(a,1),(b,2),(c,1), A \times B$ में हैं, तो A और B ज्ञात करें, जहाँ a,b,c भिन्न-भिन्न अवयव हैं।
7. यदि $A=\{a,b,c\}$, तो $A \times A$ के उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. यदि $(x-y,x+y)=(3,5)$, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।
9. यदि $A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}$ और $C=\{b,y\}$ तो जाँच करके बताएँ कि समीकरण $A \times (B \cup C) = (A \cup B) \times (A \cup B)$ सही है या गलत?
10. यदि $M = A \cap B$, तो सिद्ध करें कि-

$$M \times M = (A \times A) \cap (B \times B)$$

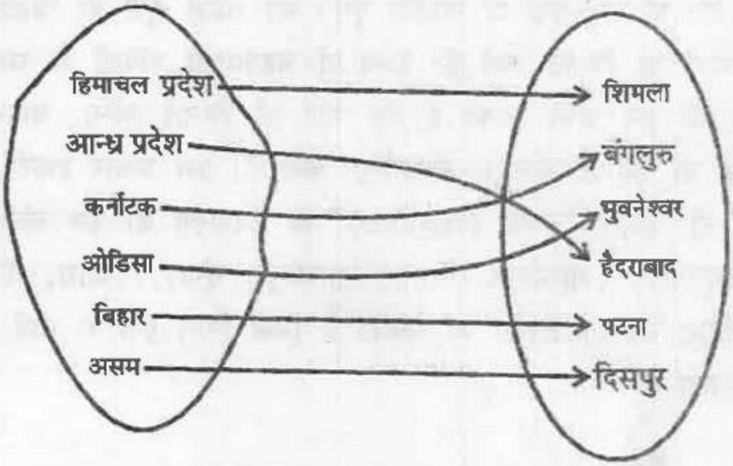
.1.3 संबंध (Relation)

अबतक हम दो समुच्चयों के कार्तीय गुणन को समझ चुके हैं। बिहार में बहुत ऐसे हर हैं जो नदियों के किनारे बसे हैं। राज्य में बहनेवाली नदियों से सम्बद्ध शहर को ारणीबद्ध करते हैं। हम सभी जानते हैं कि गंगा के किनारे पटना, भागलपुर, हाजीपुर, ारा तथा गंडक के किनारे सोनपुर, समस्तीपुर बसा है। इस प्रकार शहरों के नामों को दियों के नामों से जोड़ना 'संबंध (Relation)' के उदाहरण हैं। इस संबंध को क्रमित ुग्मों में (पटना,गंगा), (भागलपुर, गंगा), (हाजीपुर, गंगा), (आरा, गंगा), (सोनपुर, ंडक), (समस्तीपुर, गंडक) लिखा जा सकता है जिसे निम्न रूप से तीरों के चिह्नों द्वारा देखलाया जा सकता है-



समुच्चयों के अवयवों से बने क्रमित युग्म एक संबंध के अवयव हैं। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि संबंध कार्तीय गुणन $T \times R$ का एक उपसमुच्चय है जिसमें क्रमित युग्मों के प्रथम तथा द्वितीय घटकों के मध्य एक संबंध स्थापित करने से होता है। अभी तक आपने संबंध को प्रायः वाक्यांशों में वर्णित होते पढ़ा है। उदाहरण के लिए रामू श्यामू का भाई है, सारिका रमेश की बहन है, मोईन अजहर का अब्बू है, सोरेन टुड्डू का पिता है, रम्या की आयु सत्यम से अधिक है, मनोज और विकास पड़ोसी हैं, इत्यादि। गणित में संबंध, उदाहरण 'बराबर है', 'अधिक है', 'कम है', 'समरूप है', 'एकल गुणनखण्ड है', 'एक अपवर्त्य है' इत्यादि से आप भली-भाँति परिचित हैं। हम कुछ अन्य संबंधों की भी कल्पना कर सकते हैं।

निम्नलिखित चित्र में राज्यों एवं उनकी राजधानियों' में संबंध दर्शाया गया है



उपर्युक्त तीर–आरेख संबंध का दृष्टि–चित्रण करता है।

परिभाषा: मानलिया कि A तथा B दो अरिक्त समुच्चय है कार्तीय गुणन $A \times B$ का उपसमुच्चय R, समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध परिभाषित करता है अर्थात् $R \subset A \times B$ समुच्चय A से समुच्चय B में एक संबंध परिभाषित करता है। क्रमित युग्म $(x, y) \in R$ अवयव $x \in A$, $y \in B$ से संबंधित है को दर्शाता है। द्वितीय घटक प्रथम घटक का प्रतिबिम्ब कहलाता है।

उदाहरण के लिए मान लिया कि $A = \{1,2,3,4\}$

$$B = \{1,4,9,16,25,36\}$$

$$R = \{(x, y) : y = x^2 \text{ जहाँ}, x \in A\} \quad \subset A \times B$$

$$= \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\} \subset A \times B$$

समुच्चय A के अवयवों को समुच्चर B के अवयवों के साथ 'x का वर्ग x^2 है' संबंध के साथ संबंधित करता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $A \times B$ का उपसमुच्चय अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में एक संबंध को परिभाषित करता है। अतः अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबन्धों की कुल संख्यां, $A \times B$ के संभव उपसमुच्चयों की संख्या के बराबर होती हैं। यदि $n(A) = m$ तथा $n(B) = n$ हो, तो $n(A \times B) = mn$ और संबंधों की कुल संख्या 2^{mn} होती है।

मान लिया कि $A = \{a, b, c\}, B = \{1,2\}$, तो

$$n(A \times B) = 3 \times 2 = 6$$

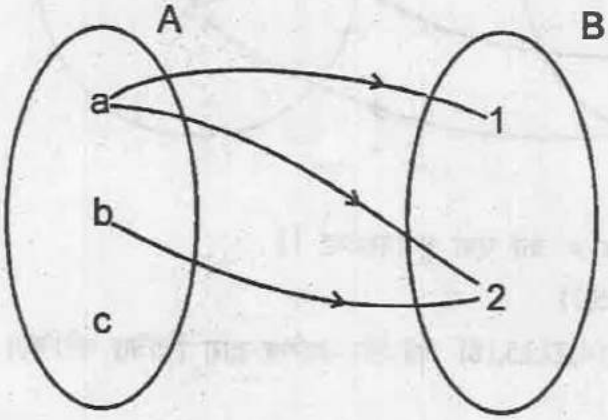
$A \times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या $2^6 = 64$ है, अर्थात् A से B के संभव संबंधों की संख्या 64 है।

यदि $A = B$ हो, तो $R \subset A \times A$ समुच्चय A से A में अर्थात A पर संबंध परिभाषित करता है।

परिभाषा: अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R अर्थात् $R \subset A \times B$ के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का प्रांत (domain)कहते हैं तथा क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय घटकों के समुच्चय को संबंध R का परिसर (range) कहते हैं। समुच्चय B संबंध R का सह-प्रांत (co-domain) कहलाता है। अतः परिसर $\subset$ सह-प्रांत

$R = \{(a,1),(b,2),(a,2)\} \subset A \times B$

समुच्चय $A = \{a,b,c\}$ से समुच्चय $B = \{1,2\}$ में एक संबंध परिभाषित करता है जहाँ संबंध R का प्रांत $(domain) = \{a,b\}$ तथा परिसर $(range) = \{1,2\}$ है। उपर्युक्त संबंध को आरेख द्वारा भी दृष्टि-चित्रण इस प्रकार किया जाता है।



इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

(i) एक संबंध का बीजीय निरूपण या तो रोस्टर विधि या समुच्चय-निर्माण विधि द्वारा किया जा सकता है।

(ii) तीर-आरेख किसी संबंध का एक दृष्टि-चित्रण है।

उदाहरण 1: संबन्ध $R = \{1,3\},(2,6),(3,9),(5,15),(6,18)\}$ को समुच्चय-निर्माण विधि में

व्यक्त कीजिए। संबंध का प्रांत और परिसर भी लिखें।

हल:- दिये गये संबंध के कार्तीय युग्म को देखने से पता चलता है कि युग्म का द्वितीय अवयव पहले अवयव का तीन गुना है। अतः समुच्चय-निर्माण विधि Set builder notation) में संबंध R को निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है-

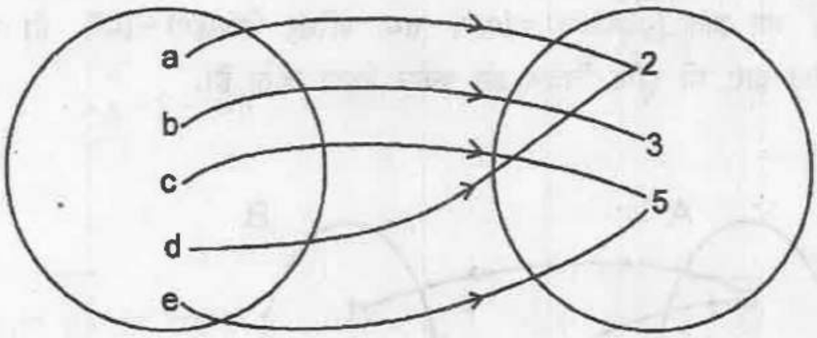
$R=\{(p,q): q=3p$ जहाँ p एक पूर्णांक है; $1\leq p<7$ तथा $p\neq 4\}$

संबंध R का प्रांत $=\{1,2,3,5,6\}$

संबंध R का परिसर $=\{3,6,9,15,18\}$

उदाहरण 2: संबन्ध $R=\{(a,2),(b,3),(c,5),(d,2),(e,5)\}$ को तीर-आरेख द्वारा दृष्टि -चित्रण कीजिए।

हल: दिये गये संबन्ध को तीर-आरेख द्वारा निम्न प्रकार दिखाया जा सकता है-



उदाहरण 3: $R=\{(x,y): x, y$ का एक गुणनखंण्ड है$\}$

जहाँ $x\in\{2,35,7\}$

$y\in\{10,14,21,15,18\}$ को तीर-आरेख द्वारा चित्रित कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि-

2, 10, 14 एवं 18 का एक गुणनखण्ड है, अत: $(2,10),(2,14),(2,18)\in R.$

3, 12, 15 एवं 18 का एक गुणनखण्ड है, अत: $(3,15),(3,18),(3,21)\in R.$

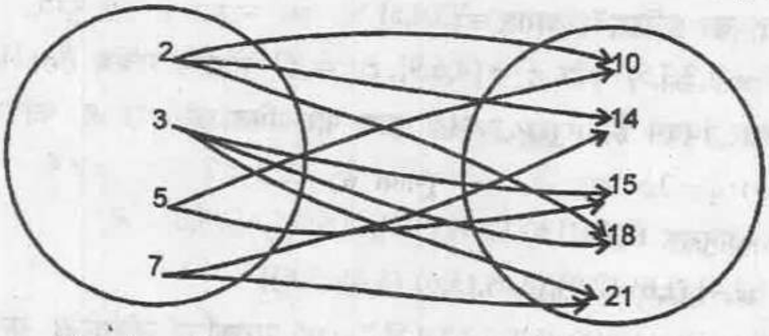
5, 10, और 15 का एक गुणनखण्ड है, इसलिए $(5,10),(5,15)\in R$

7, 14 और 21 का एक गुणनखण्ड है, इसलिए $(7,14),(7,21)\in R$

इस प्रकार $R=\{(2,10),(2,14),(2,18),(3,15),(3,18),$

$(3,21),(5,10),(5,15),(7,14),(7,21)\}$

इस संबंध को 'तीर–आरेख' द्वारा निम्न चित्र द्वारा दर्शाया जा सकता है–



उदाहरण 4: संबंध $R=\{(x,y): y=x+1 : x$ एक पूर्णांक है तथा $-2<x<3\}$ को सारणी रूप में व्यक्त कीजिए। संबंध का प्रांत एवं परिसर भी ज्ञात करें।

हल: x एक पूर्णांक है तथा $-2<x<3$ को संतुष्ट करने वाले पूर्णांक $-1,0,1,2$ हैं।

इस प्रकार $x \in \{-1,0,1,2\}$

$$\Rightarrow y=\{0,1,2,3\}$$

$\Rightarrow R=\{(x,y): y=x+1, x$ एक पूर्णांक है तथा $-2<x<3$

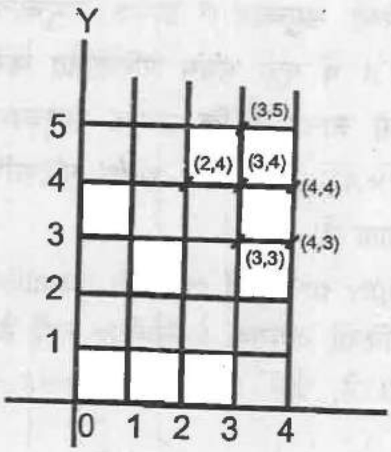
$$=\{(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3)\}$$

संबंध R का प्रांत $(domain)=\{-1,0,1,2\}$

संबंध R का परिसर $(Range)=\{0,1,2,3\}$

उदाहरण 5: $R=\{(2,4),(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4)\}$ के सदस्यों के भुज–कोटि को दिखाते हुए चित्रित करें। संबंध R के प्रांत (क्षेत्र) एवं परास (विस्तार) ज्ञात कीजिए।

हल: दिये गये संबंधों के सदस्यों की भुज–कोटि को निम्न चित्रानुसार दिखाया जा सकता है–



संबंध R का प्रांत (क्षेत्र) $= \{2,3,4\}$

संबंध R का परिसर (विस्तार) $= \{3,4,5\}$

उदाहरण 6: $P = \{1,2,3,5\}$ और $Q = \{4,6,9\}, P$ से Q में एक संबंध $R = \{(x,y): x$ और y का अन्तर विषम है, $x \in p, y \in Q\}$ द्वारा परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल: प्रश्न के अनुसार $(1,4),(1,6),(2,9),(3,4),(3,6),(5,4),(5,6) \in R$

$\therefore R = \{(1,4),(1,6),(2,9),(3,4),(3,6),(5,4),(5,6)\}$

उदाहरण 7: $R = \{(x, x+5) : x \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

हल: $R = \{(x,x+5) : x \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$

$= \{(0,5),(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)\}$

दिये गये संबंध R का प्रांत $= \{0,1,2,3,4,5\}$

R का परिसर $= \{5,6,7,8,9,10\}$

उदाहरण 8: संबंध $R = \{(x,x^3) : x$ संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या $\}$ को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल:- 10 से कम अभाज्य संख्या 2,3,5,7 है।

अत: $R = \{(x,x^3) : x$ संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या है$\}$

$= \{(2,8),(3,27),(5,125),(7,343)$

संबंधों के प्रकार (Types of Relations)

हम जानते हैं कि किसी अरिक्त समुच्चय A में संबंध $A \times A$ का एक उपसमुच्चय होता है तथा रिक्त समुच्चय φ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है। अत: $\varphi \subset A \times A$ और 'φ' A में एक संबंध परिभाषित करता है। इसे हम A में रिक्त संबन्ध कहते हैं। हम यह भी जानते हैं कि प्रत्येक समुच्चय अपने आप का उपसमुच्चय होता है। अर्थात् $A \times A \subset A \times A$, A में एक संबंध परिभाषित करता है जिसे सार्वत्रिक (Universal) संबंध कहा जाता है।

परिभाषा: रिक्त संबंध (Empty or Void or Null Relation): यदि अरिक्त समुच्च A का कोई भी अवयव A के किसी अवयव से संबंधित नहीं है अर्थात् $R = \varphi \subset A \times A$, तो R एक रिक्त संबंध कहलाता है, जैसे- $R = \{(x,y) : y = x-5, x, y$ एक धन पूर्णांक है तथा $x < 5\}$

एक रिक्त संबंध को समुच्चय $\{1,2,3,4\}$ में परिभाषित करता है क्योंकि 5 से छोटा धन पूर्णांक 1,2,3,4 है जिसमें 5 घटाने पर क्रमशः $-4,-3,-2,-1$ आता है जो ऋण पूर्णांक है। इस प्रकार समुच्चय $\{1,2,3,4\}$ के कोई भी अवयव दिये गये शर्तानुसारसंबंधित नहीं है।

परिभाषा: सार्वत्रिक संबंध (Universal Relation)

यदि अरिक्त समुच्चय A का प्रत्येक अवयव A के सभी अवयव से संबधित हो अर्थात् $R = A \times A$ तो R एक सार्वत्रिक संबंध कहलाता है। जैसे-

$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, समुच्चय $A = \{1,2\}$ में सार्वत्रिक संबंध है।

टिप्पणी (i) रिक्त संबंध तथा सार्वत्रिक संबंध को तुच्छ (rivial) संबंध भी कहा जाता है।

(ii) यदि $(a,b) \in R$, तो हम कहते हैं कि 'अवयव a, अवयव b से संबंधित है' और इस कथन को हम संकेत aRb द्वारा प्रकट करते हैं अर्थात् $aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$.

(iii) $(a,b) \notin R$, तो हम कहते हैं कि 'अवयव a अवयव b से संबंधित नहीं है'' और हम इस कथन को aRb द्वारा प्रकट करते हैं।

परिभाषा: स्वतुल्य संबंध (Reflexive Relation):

अरिक्त समुच्चय A में संबन्ध R $(R \subset A \times A)$ स्वतुल्य संबंध कहलाता है, यदि प्रत्येक अवयव स्वयं से संबंधित हो अर्थात् प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a,a) \in R$.

समुच्चय $A = \{1,2,3\}$ में स्वतुल्य संबंध

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ हैं।

$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3)\}$ भी समुच्चय A में स्वतुल्य संबंध है परन्तु $R_3 = \{(2,2),(3,3)\}$ स्वतुल्य संबंध नहीं है क्योंकि $(1,1) \notin R_3$.

$R_3 = \{(2,2),(3,3)\}$ समुच्चय $\{2,3\}$ में स्वतुल्य संबंध है।

सममित संबंध (Symmetric Relation)

अरिक्त समुच्चय A में संबंध R $(R \subset A \times A)$ एक सममित संबंध कहलाता है यदि A का समस्त $a_1, a_2 \in A$ के लिए $(a_1,a_2) \in R$ से $(a_2,a_1) \in R$ प्राप्त हो, अर्थात् संबन्ध R समुच्चय A में सममित संबंध होगा यदि $(a_1,a_2) \in R \Rightarrow (a_2,a_1) \in R$ जहाँ $a_1 \in A, a_2 \in A$.

समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ तथा $R_3=\{(2,2),(3,3)\}$, $R_4=\{(1,3),(3,1)\}$, $R_5=\{(1,1),(2,1),(1,2)\}$ सममित संबंध है,

परन्तु $R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3)\}$ सममित संबंध नहीं है क्योंकि $(1,3)\in R_2$ परन्तु $(3,1)\notin R_2$

$R_6=\{(1,1),(2,2),(3,2),(2,3),(1,2)\}$ समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में सममित संबंध नहीं है।

संक्रामक संबन्ध (Transitive Relation)

अरिक्त समुच्चय A में संबंध R $(R\subset A\times A)$ एक संक्रामक संबंध कहलाता है, यदि समस्त $a_1,a_2,a_3\in A$ के लिए $(a_1,a_2)\in R$ तथा $(a_2,a_3)\in R$ से $(a_1,a_3)\in R$ प्राप्त हो अर्थात् संबन्ध R समुच्चय A में संक्रामक संबंध होगा यदि $(a_1,a_2)\in R$ तथा $(a_2,a_3)\in R\Rightarrow(a_1,a_3)\in R$ जहाँ $a_1,a_2,a_3\in A$.

संबंध $R=\{(1,2),(2,1),(1,1)\}$ समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में संक्रामक संबंध नहीं है। हम यहाँ देखते हैं कि $(1,2)\in R$ तथा $(2,1)\in R\Rightarrow(1,1)\in R$ तथा $(2,1)\in R$, $(1,2)\in R\Rightarrow(2,2)\in R$

समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ मे संबंध $R=\{(1,1),(1,2)\}$ एक संक्रामक संबन्ध है परन्तु यह न तो स्वतुल्य और न ही सममित संबन्ध है।

तुल्यता संबन्ध (Equivalence Relation):

अरिक्त समुच्चय A में संबंध $R\,(R\subset A\times A)$ एक तुल्यता संबंध कहलाता है यदि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है अर्थात् संबंध R अरिक्त समुच्चय A में तुल्यता संबंध होगा यदि स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक तीनों संबंध हो, जैसे- संबंध $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में एक तुल्यता संबंध को परिभाषित करता है क्योंकि यह स्वतुल्य $|R|,2R2,3R3,$ सममित $|R|\Rightarrow|R|,2R2\Rightarrow 2R2,3R3\Rightarrow 3R3$ तथा संक्रामक संबंध है।

समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में संबंध $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3)\}$ तुल्यता संबंध नहीं है क्योंकि यह सममित संबंध नहीं है। संबन्ध $R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ तुल्यता संबंध को समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में परिभाषित नहीं करता है क्योंकि यह स्वतुल्य संबंध नहीं है।

उदाहरण 9: किसी विशेष समय में जिला स्कूल, भागलपुर के विद्यार्थियों के समुच्चय में संबंध R

$R=\{(x,y): x$ तथा y एक ही कक्षा में पढ़ते हैं$\}$ के स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक की जाँच करें।

हल: $R=\{(x,y): x$ तथा y एक ही कक्षा में पढ़ते हैं जहाँ x और y जिला स्कूल के छात्र हैं।$\}$

हम किसी भी छात्र को लें तो वह एक ही कक्षा में पढ़ेगा अर्थात् $(x,x)\in R$, सभी छात्र x के लिए सत्य होगा।

अत: R एक स्वतुल्य संबन्ध है।

पुन: यदि $(x,y)\in R$, तो x और y एक ही कक्षा में पढ़ते हैं।

$\Rightarrow y$ और x भी एक ही कक्षा में पढ़ते हैं।

$\Rightarrow (y,x)\in R$

$\Rightarrow$ R एक सममित संबंध है।

मान लिया कि

$(x,y)\in R$ तथा $(y,z)\in R$

$\Rightarrow$ छात्र x तथा y एक ही कक्षा में पढ़ते हैं और

छात्र y, z भी एक ही कक्षा में पढ़ते हैं।

$\Rightarrow$ छात्र x और z एक ही कक्षा में पढ़ते हैं।

$\Rightarrow$ R एक संक्रामक संबंध है।

उदाहरण 10: पटना शहर के निवासियों के समुच्चय में संबन्ध R

$R=\{(x,y): x, y$ के पिता है$\}$ की विवेचना कीजिए।

हल: मान लिया कि P पटना शहर के निवासियों का समुच्चय है तथा

$R=\{(x,y): x, y$ के पिता है$\}$

$x\in$ P और x स्वयं का पिता नहीं हो सकता अर्थात् $(x,x)\notin R$.

इसलिए R एक स्वतुल्य संबंध नहीं है।

माना कि $(x,y)\in R$

$\Rightarrow x, y$ के पिता हैं।

$\Rightarrow y, x$ का पुत्र या पुत्री होगा न कि y, x का पिता।

$\Rightarrow (y,x)\notin R$

$\Rightarrow R$, समुच्चय P में सममित नहीं है।

पुनः मान लिया कि

$(x,y) \in R, (y,z) \in R$ जहाँ $x,y,z \in P$

$\Rightarrow x,y$ के पिता है तथा y,z के पिता है।

$\Rightarrow x,z$ के बाबा हैं।

$\Rightarrow (x,z) \notin R$

$\Rightarrow R$ एक संक्रामक संबंध है।

इस प्रकार दिया गया संबंध R समुच्चय P में स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक संबंध में से कोई भी संबंध नहीं है।

उदाहरण 11: ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो–

(i) सममित हो, परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।

(ii) संक्रामक हो, परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।

(iii) स्वतुल्य तथा सममित हो, किन्तु संक्रामक न हो।

(iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक हो, किन्तु सममित न हो।

(v) सममित तथा संक्रामक हो, किन्तु स्वतुल्य न हो।

हलः मान लिया कि दिया हुआ समुच्चय

$A = \{a,b,c\}$

$A \times A = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

(i) माना कि $R_1 = (a,b),(b,a)\} \subset A \times A$

स्पष्टतः R_1 समुच्चय A में संबंध परिभाषित करता है जो सममित है क्योंकि $(a,b) \in R_1 \Rightarrow (b,a) \in R_1$

$(b,a) \in R_1 \Rightarrow (a,b) \in R_1$

हम देखते हैं कि $a \in A$ परन्तु $(a,a) \notin R_1$

$\Rightarrow$ समुच्चय A का अवयव स्वयं से संबंधित नहीं है।

$\Rightarrow R_1$ स्वतुल्य नहीं है।

पुनः $(a,b) \in R_1$ तथा $(b,a) \in R_1 \Rightarrow (a,a) \notin R_1$

अर्थात् अवयव a अवयव b से संबंधित है और अवयव b अवयव a से संबंधित है परन्तु अवयव a अवयव a से संबंधित नहीं है। अतः R_1 संक्रामक संबंध नहीं है।

(ii) माना कि $R_2 = \{(a,a),(a,b)\} \subset A \times A$

$\Rightarrow$ संबंध R_2 संक्रामक है क्योंकि

aR_2a और $aR_2b \Rightarrow aR_2b$

समुच्चय A के सभी सदस्य स्वयं से संबंधित नहीं हैं,

अत: संबंध R_2 स्वतुल्य नहीं है।

पुन: $(a,b) \in R_2$ अर्थात् aR_2b परन्तु हम देखते हैं कि

$\Rightarrow R_2$ $(b,a) \not\subset R_2$ अर्थात् bR_2a.

सममित संबंध समुच्चय A पर नहीं है। इस प्रकार R_2 समुच्चय A में संक्रामक है परन्तु यह न तो स्वतुल्य है और न ही सममितसंबंध है।

(iii) मान लिया कि Z पूर्णांकों का समुच्चय है।

$R \subset Z \times Z$, Z में एक संबंध परिभाषित करता है जिसके अनुसार पूर्णांक a, पूर्णांक b से संबंधित होगा यदि a और b का अन्तर 1 से छोटा या बराबर हो अर्थात $R = \{(a,b): a-b \le 1$ या $b-a \le 1\}$

हम जानते हैं कि दो संख्याओं के बीच का अन्तर बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाने से प्राप्त होता है अर्थात् a और b का अन्तर $a-b$ होगा जब $a \ge b$ तथा $b-a$ होगा जब $b \ge a$ है।

. यहाँ हम देखते हैं कि

पूर्णांक a और a का अन्तर शून्य है जो पूर्णांक 1 से छोटा है तथा यह सभी पूर्णांक a के लिए सत्य है।

अत: $(a,b) \in R$, सभी $a \in Z$ के लिए

$\Rightarrow R$. समुच्चय Z में स्वतुल्य है।

माना कि $(a,a) \in R$

$\Rightarrow$ पूर्णांक a और b का अन्तर 1 से छोटा है।

$\Rightarrow$ पूर्णांक b और a का अन्तर 1 से छोटा होगा।

$\Rightarrow$ $(b,a) \in R$, ऐसा सभी $(a,b) \in R$ के लिए सत्य होगा।

$\Rightarrow$ R, सममित संबंध है।

इस प्रकार उपर्युक्त संबंध R स्वतुल्य तथा सममित संबंध है।

हम देखते हैं कि $(2,3) \in R$ और $(3,4) \in R$ क्योंकि 2 और 3 का अन्तर

1 के बराबर है तथा 3 और 4 का अन्तर भी 1 के बराबर है, परन्तु 2 और 4 का अन्तर 2 है, जो 1 से बड़ी संख्या है। इस प्रकार 2,4 से संबंधित नहीं है।

स्पष्टत: $(2,3) \in R$ और $(3,4) \in R$ परन्तु $(2,4) \notin R$

$\Rightarrow R$, समुच्चय Z में संक्रामक संबंध नहीं है।

(iv) समुच्चय $A = \{a,b,c\}$ में संबंध R_4 को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\} \subset A \times A$$

स्पष्टत: R_4 समुच्चय A में स्वतुल्य तथा संक्रामक है

किन्तु सममित नहीं क्योंकि $(a,c) \in R_4 \Rightarrow (c,a) \notin R_4$

(v) समुच्चय $A = \{a,b,c\}$ में संबंध R_5 निम्न प्रकार परिभाषित करते है–

$$R_5 = \{(a,c),(c,a),(a,a),(c,c)\} \subset A \times A$$

हम देखते हैं कि $(b,b) \notin R_5$ जहाँ $b \in A$

अर्थात् समुच्चय A के सभी सदस्य स्वयं से संबंधित नहीं हैं। इसलिए R_5 एक स्वतुल्य संबंध नहीं है।

स्पष्टत: R_5 समुच्चय A में सममित तथा संक्रामक है।

उदाहरण 12: सिद्ध कीजिए कि $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$ में संबंध $R = \{(a,b) : a = b\}$ तुल्यता संबंध है।

हल: यहाँ $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$

$\Rightarrow \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

तथा $R = \{(a,b) : a = b, a,b \in A\}$

$$\Rightarrow R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9),(10,10),(11,11),(12,12)\}$$

स्पष्टत: R समुच्चय A में स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक संबंध है। अत: R एक तुल्यता संबंध समुच्चय A में परिभाषित करता है।

उदाहरण13: मान लिया कि T एक समतल में सभी त्रिभुजों का समुच्चय है तथा $R = \{(T_1, T_2)$: त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_2 के समरूप है$\} \subset T \times T$ द्वारा एक संबंध परिभाषित है। सिद्ध करें कि R समुच्चय T में तुल्यता संबंध है।

हल: यहाँ T एक समतल में सभी त्रिभुजों का समुच्चय है तथा $R = \{(T_1, T_2)$: त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_2 के समरूप है$\} \subset T \times T$

हम देखते हैं कि

$T_1 \quad T_2$ सभी $T_1 \in T$

$\Rightarrow R$ एक स्वतुल्य संबंध है।

सममित संबंध

माना कि $(T_1, T_2) \in R$

$\Rightarrow T_1 \quad T_2$ अर्थात् T_1, T_2 के समरूप है।

$\Rightarrow T_2 \quad T_1 \quad T_2, T_1$ के समरूप होगा।

$\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$

$\Rightarrow R$ एक सममित संबंध है।

संक्रामक संबंध

माना कि $(T_1, T_2) \in R$ तथा $(T_2, T_3) \in R$

$\Rightarrow T_1 \quad T_2$ तथा $T_2 \quad T_3$

$\Rightarrow T_1 \quad T_3 \Rightarrow (T_1, T_3) \in R$

R एक संक्रामक संबन्ध है।

इस प्रकार R, समुच्चय T स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक संबंध है।

अत: R समुच्चय T में तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 14: मान लीजिए कि समुच्चय $\{1,2,3,4\}$ में $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(1,3),(3,3),(3,2),(4,4)\}$, संबंध R के बारे में बताइए।

हल: यहाँ समुच्चय $A = \{1,2,3,4\}$

तथा $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3)),(3,2)\} \subset A \times A$

स्वतुल्य संबंध: हम देखते हैं कि

$(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R$

अर्थात् A के सभी अवयव स्वयं से संबंधित हैं, अत: समुच्चय A में R एक स्वतुल्य संबंध है।

सममित संबंध: हम देखते हैं कि

$(1,2) \in R$ परन्तु $(2,1) \notin R$

$\Rightarrow R$ एक सममित संबंध नहीं है।

संक्रामक संबंध: हम देखते हैं कि

$(1,1) \in R, (1,2) \in R, (1,3) \in R \Rightarrow (1,2) \in R, (1,3) \in R$

$(1,2) \in R, (2,2) \in R \Rightarrow (1,2) \in R$

$(1,3) \in R, (3,2) \in R \Rightarrow (1,2) \in R$

स्पष्टत: R एक संक्रामक संबंध है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि समुच्चय A में संबन्ध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।

उदाहरण 15: मान लीजिए कि समुच्चय N में $R = \{(a,b): a = b-2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त संबन्ध है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए:

(i) $(2,4) \in R$ (ii) $(3,8) \in R$ (iii) $(6,8) \in R$ (iv) $(8,7) \in R$

हल: यहाँ $R = \{(a,b): a = b-2, b > 6, a, b \in N\}$

प्रदत्त संबंध के सापेक्ष हम देखते हैं कि

$b > 6$ होना चाहिए तथा $a = b-2$

दी गयी शर्त के अनुसार सिर्फ (iv) सही है।

प्रश्नावली-2

1. समुच्चयों $X = \{15,10,20,12\}$; $Y = \{3,2,5,4\}$ के अवयवों में 'एक अपवर्त्य है' संबंध को तीर आरेख द्वारा प्रदर्शित करें।

2. समुच्चय $\{x: -2 < x < 3, x \in Z\}$ से संबद्ध क्रमित युग्मों $\{(x,y): y = x+1; x$ एक पूर्णांक हैं तथा $-2 < x < 3$ को तीर-चिह्न द्वारा दिखाएँ।

3. $R = \{(x, x+5): x \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

4. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ और $B = \{3,5,6,8\}$, A से B में एक संबंध $R = \{(x,y): x$ और y का अन्तर सम है, $x \in A, y \in B\}$ द्वारा परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।

5. मान लीजिए कि $A = \{a,b,c\}$ और $B = \{2013,2014\}$, A से B के संबंधों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

6. मान लीजिए कि $X = \{1,2,3,4,6\}$ तथा A पर संबन्ध $R = \{(x,y): x, y \in X$, संख्या x संख्या y को यथावत् विभाजित करती है$\}$, द्वारा परिभाषित एक संबंध को
   (i) रोस्टर रूप में लिखिए।
   (ii) R का प्रांत ज्ञात कीजिए।
   (iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए।

7. मान लीजिए कि R, Z पर, $R = \{(a,b): a,b \in Z, a-b$ एक पूर्णांक है$\}$, द्वारा परिभाषित एक संबंध है। R के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

8. ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो
   (i) सममित हो, परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।
   (ii) संक्रामक हो, परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।
   (iii) स्वतुल्य तथा सममित हो, किन्तु संक्रामक न हो।
   (iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक हो, किन्तु सममित न हो।
   (v) सममित तथा संक्रामक हो, किन्तु स्वतुल्य न हो।

9. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z: 0 \le x \le 12\}$ में संबंध $R = \{(a,b): a$ और b का अन्तर 4 का गुणज है$\}$, एक तुल्यता संबंध है।

10. सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिन्दुओं के समुच्चय में $R = \{(P,Q):$ बिन्दु P की मूल बिन्दु से दूरी, बिन्दु Q की मूल बिन्दु से दूरी के समान है$\}$, द्वारा प्रदत्त R एक तुल्यता संबंध है।

11. जाँच कीजिए कि क्या R में $R = \{(a,b): a \le b^3\}$, द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है?

12. सिद्ध कीजिए कि R में $R = \{(a,b): a \le b\}$, द्वारा परिभाषित संबंध IR में स्वतुल्य तथा संक्रामक हैं किन्तु सममित नहीं है।

13. सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(P_1, P_2): P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान है$\}$, प्रकार से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

14. सिद्ध कीजिए कि एक तल में समस्त रेखाओं के समुच्चय L में, $R = \{(\ell_1, \ell_2): \ell_1$ तथा ℓ_2 रेखाएँ परस्पर समान्तर है$\}$,से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

15. एक तल में समस्त सरल रेखाओं के समुच्चय L में संबंध $R = \{(\ell_1, \ell_2):$ सरल रेखा ℓ_1 सरल रेखा ℓ_2 पर लम्ब है$\}$, द्वारा परिभाषित R सममित है परन्तु स्वतुल्य और संक्रामक संबंध नहीं है, सिद्ध करें।

16. सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय T में, $R = \{(\Delta_1, \Delta_2): \Delta_1 . \Delta_2$ के समरूप है; $\Delta_1, \Delta_2 \in T\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं 5,12,13; 3,4,5; 10,24,26; 9,12,15; वाले समकोण त्रिभुजों पर विचार कीजिए।

17. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है–

    (i) समुच्चय $A = \{1,2,3,4,5,6,....,13,14,15,16,17,18\}$ में संबन्ध $R = \{(x,y): 4x - y = 0, x, y \in A\}$

    (ii) समुच्चय $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ में $R = \{(x,y): y$ भाज्य है x से$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R है।

    (iii) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(x,y): x - y$ एक पूर्णांक है$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध।

    (iv) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(x,y): x - y = 4, x, y \in Z\}$, द्वारा

परिभाषित संबंध।

(v) पूर्णियाँ शहर के निवासियों में $R=\{(x,y):x,y$ के पिता है$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध है।

(vi) बक्सर शहर के निवासियों में $R=\{(x,y):x,y$ का भाई है$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध।

(vii) बेतिया शहर के निवासियों में $R=\{(x,y):x,y$ की बहन है$\}$, द्वारा परिभाषित संबंध।

18. समुच्चय $A=\{2013,2014,2015,2016\}$ में $R=\{(x,y):x\leq y,x,y\in A\}$, द्वारा परिभाषित संबंध की तुल्यता की जाँच कीजिए।

19. $R=\{(A,B):A\subset B,\ A,B\in P\}$, जहाँ P समुच्चयों का समुच्चय है, द्वारा परिभाषित संबंध R के तुल्यता संबंध की जाँच करें।

20. $R=\{(a,a),(b,b),(c,a),(a,c)\}$, समुच्चय $A=\{a,b,c,\}$ संबंध की जाँच करें।

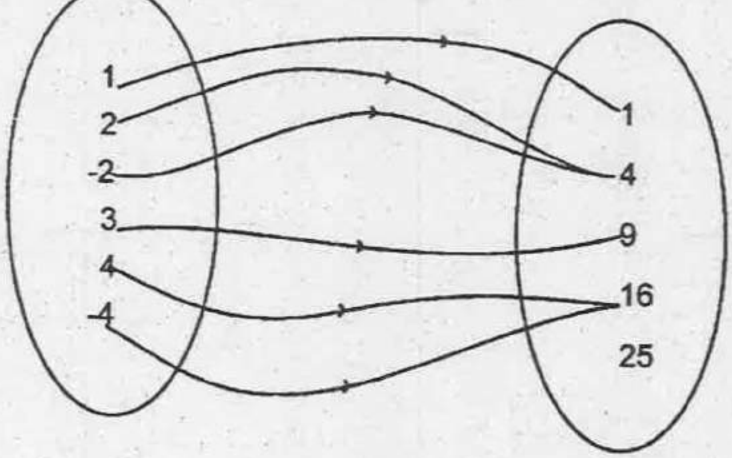
2.1.4 फलन (FUNCTION):

अभी तक हमने समुच्चयों के बीच 'संबंध' के बारे में सीखा है। अब हम एक विशेष प्रकार के संबंध का अध्ययन करेंगे, जिसे 'फलन' कहते हैं। हम फलन को एक नियम के रूप में देख सकते हैं,जिससे कुछ दिये हुए अवयवों से नये अवयव उत्पन्न होते हैं।

परिभाषा

मान लिया कि A और B दो अरिक्त समुच्चय हैं। समुच्चय A से, समुच्चय B में फलन f जिसे संकेत में $f: A \rightarrow B$ या $A \xrightarrow{f} B$ द्वारा निरूपित किया जाता है, एक नियम है जिसके अन्तर्गत समुच्चय A के प्रत्येक अवयव का समुच्चय B में एक और केवल एक अवयव संबंधित (संगत) होता है।

मान लिया कि $A = \{1, 2, -2, 3, 4, -4\}$



$B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

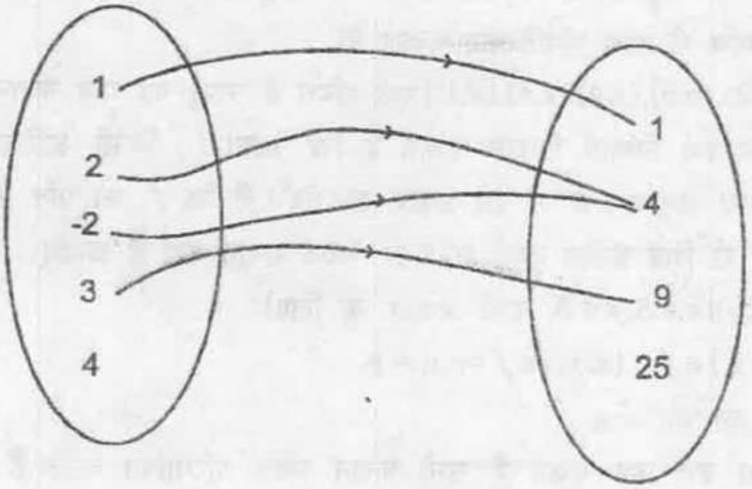
$f = \{(1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-4,16), (4,16\} \subset A \times B$

यहाँ हम देखते हैं कि A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से नियम $f(x) = x^2$ के द्वारा संगति करता है। चूँकि $f \subset A \times B$,

अत: f समुच्चय A से समुच्चय B में एक संबंध भी परिभाषित करता है।

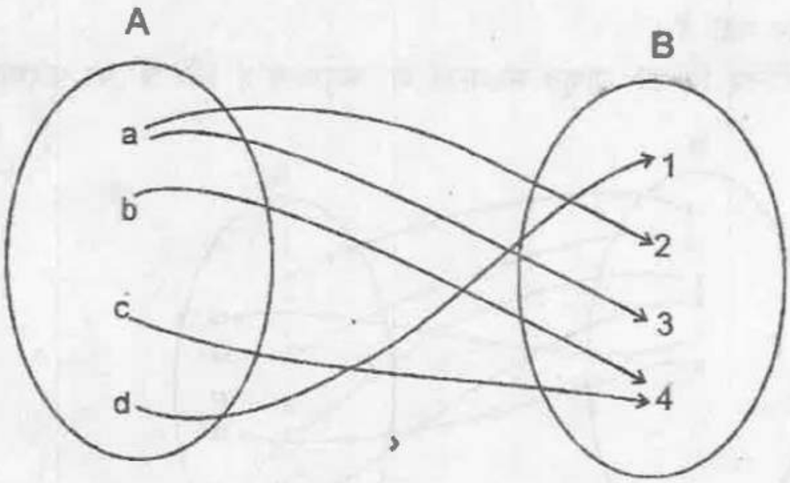
एक दूसरा उदाहरण अग्रांकित तीर–आरेख द्वारा लेते है।

यहाँ समुच्चय A का अवयव 4 समुच्चय B के किसी अवयव के साथ संगति



नहीं करता है। इस प्रकार $\{(1,1),(-2,4),(2,4),(3,9)\} \subset A \times B$ एक संबंध तो परिभाषित करता है परन्तु यह एक फलन नहीं है।

एक और उदाहरण सोंचते हैं-



हम देखते हैं कि $\{(a,2),(a,3),(b,4),(c,4),(d,1)\} \subset A \times B$ समुच्चय A से

समुच्चय B में एक संबंध तो स्थापित करता है परन्तु समुच्चय A का एक अवयव a समुच्चय B के दो अवयवों 2 और 3 के साथ संगति करता है। फलन की परिभाषा में हम देख चुके हैं कि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B में अद्वितीय (एक और केवल एक) अवयव के साथ संगति कर सकता है।

अतः $\{(a,2),(a,3),(b,4),(c,4),(d,1)\}$ एक संबंध है परन्तु यह एक फलन नहीं है।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि फलन f, किसी अरिक्त समुच्चय A से एक अरिक्त समुच्चय B में इस प्रकार का संबंध है कि f का प्रांत A है तथा f के किसी भी दो भिन्न क्रमित युग्मों के प्रथम घटक समान नहीं है अर्थात्

$f = \{(x,y): x \in A, y \in B,$ सभी $x \in A$ के लिए$\}$

तथा $(x,y_1) \in f,\ (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

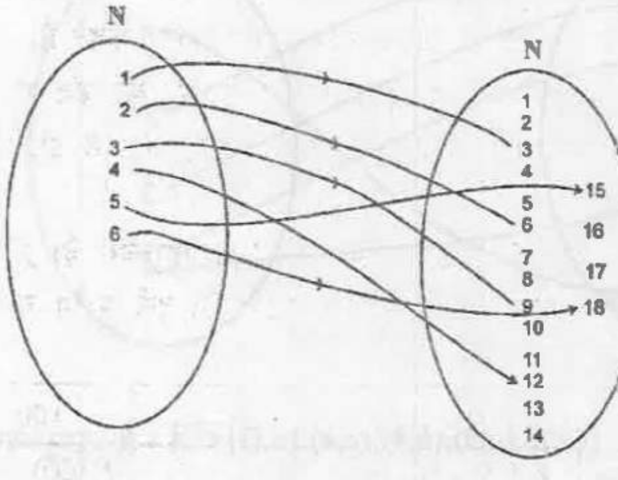
और f का प्रांत $= A$

इस प्रकार हम कह सकते हैं सभी फलन संबंध परिभाषित करते हैं परन्तु सभी संबंध फलन को परिभाषित नहीं करते हैं।

यदि f, A से B का एक फलन है तथा $(x,y) \in f$, तो $y = f(x)$, जहाँ y को f के अन्तर्गत x का 'प्रतिबिम्ब(image)' तथा x को y का 'पूर्व प्रतिबिम्ब (pre-image)' कहते हैं।

नीचे दिये उदाहरणों में बहुत से संबंधों पर विचार करेंगे, जिनमें से कुछ फलन हैं और दूसरे फलन नहीं हैं-

मान लीजिए कि **N** प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और **N** पर परिभाषित एक



संबंध R इस प्रकार है कि

$$R=\{(x,y): y=3x, x,y\in \mathbf{N}\}$$

यहाँ दिये गये संबंध को तीर-आरेख द्वारा निरूपित करने पर हम देखते हैं कि R का प्रांत, प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{N}$ है, इसका परिसर भी $\mathbf{N}$ है तथा प्रत्येक प्राकृत संख्या n का एक और केवल एक प्रतिबिम्ब $:n$ है। इसलिए यह संबंध एक फलन है।

दूसरा उदाहरण $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7)\}$ में ध्यानपूर्वक देखने पर हम देखते हैं कि प्रत्येक अवयव का एक और केवल एक प्रतिबिम्ब है, इसलिए यह संबंध समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ से समुच्चय $B=\{2,3,4,5,6,7\}$ में फलन है। परन्तु यह संबंध समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ से समुच्चय A में फलन नहीं है क्योंकि एक सदस्य 7 किसी भी अवयव से संगति नहीं करता है।

यदि f समुच्चय A से समुच्चय B में फलन है अर्थात्,

$f: A\rightarrow B$, तो

समुच्च्य A फलन f का प्रांत (domain), समुच्चय B फलन f का सह-प्रांत (co-domain) कहलाता है। यदि $(x,y)\in f$, तो $y=f(x)$ को x का प्रतिबिम्ब (image) तथा x को y का पूर्व-प्रतिबिम्ब (pre-image) कहा जाता है। प्रांत A के सभी अवयवों के प्रतिबिम्ब से बने समुच्चय$\{f(x): x\in A\}$ को फलन f का परिसर (range) कहा जाता है।

यदि किसी फलन का परिसर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या उसका कोई उपसमुच्चय हो तो फलन को वास्तविक मान फलन (real valued function) कहते हैं, अर्थात् $\{f(x): x\in A\}\subset B\subset R$, तो f को वास्तविक मान फलन कहते हैं।

यदि वास्तविक चर वाले किसी वास्तविक मान फलन f का प्रांत भी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अथवा उसका कोई उपसमुच्चय अर्थात् $A \quad R$ हो, तो f को वास्तविक फलन भी कहते हैं।

उदाहरण 1: मान लीजिए कि $\mathbf{N}$ प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है। $f:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$, $f(x)=3x+1$ द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। इसे प्रयोग कर हम निम्न सारणी का निर्माण कर सकते हैं-

x	1	2	3	4	....	100	
$y=f(x)$	$f(1)=4$	$f(2)=7$	$f(3)=10$	$f(4)=13$		$f(100)=301$	-

उदाहरण 2: एक फलन $f(x) = 2x - 5$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित के मान लिखिए:

(i) $f(0)$ (ii) $f(7)$ (iii) $f(-3)$ (iv) $f(5)$ (v) $f(3014)$

हल: यहाँ $f(x) = 2x - 5$

$$\Rightarrow f(0) = 2\times 0 - 5 = -5$$

$$f(7) = 2\times 7 - 5 = 14 - 5 = 9$$

$$f(-3) = 2\times(-3) - 5 = -6 - 5 = -11$$

$$f(5) = 2\times 5 - 5 = 10 - 5 = 5$$

$$f(2014) = 2\times 2014 - 5 = 4028 - 5 = 4023$$

उदाहरण 3: यदि $f: A \to B$, जहाँ $A = \{1,2,3,4\}$, $B =$ पूर्णांकों का समुच्चय तथा $f(x) = x^2 + 1$ तो f का प्रांत एवं परिसर निकालें। $10 \in B$ का पूव-प्रतिबिम्ब भी ज्ञात करें।

हल: यहाँ $f: A \to B$, जहाँ $A = \{1,2,3,4\}$ तथा $f(x) = x^2 + 1$

स्पष्टत: फलन f का प्रांत $(domain) A = \{1,2,3,4\}$ है।

फलन f का परिसर $= \{f(1), f(2), f(3), f(4)\}$

$$= \{1^2+1, 2^2+1, 3^2+1, 4^2+1\}$$

$$= \{2,5,10,17\}$$

मान लीजिए कि 10 का पूर्व-प्रतिबिम्ब x है, तो

$$f(x) = 10$$

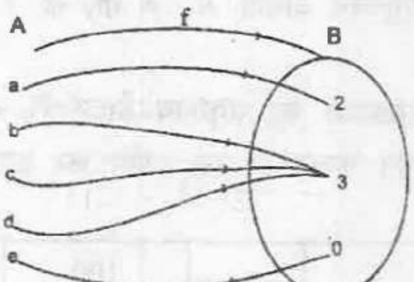
$$\Rightarrow x^2 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow x^2 = 9$$

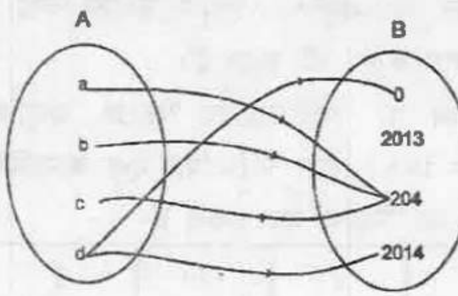
$\Rightarrow x = 3.,\ x \neq -3$ क्योंकि -3 प्रांत का अवयव नहीं है।

अत: $10 \in B$ समुच्चय A के अवयव 3 का प्रतिबिम्ब है और 3, $10 \in B$ का पूर्व-प्रतिबिम्ब है।

उदाहरण 4: निम्नलिखित चित्रों में फलन f परिभाषित है या नहीं–



आकृति (i)



आकृति(ii)

हल: (i) फलन $f:A \to B$ परिभाषित है, क्योंकि समुच्चय A का प्रत्येक सदस्य समुच्चय B में सुनिश्चित रूप से अद्वितीय सदस्य के साथ प्रतिबिम्बित है।

(ii) $f:A \to B$ फलन परिभाषित नहीं है, क्योंकि समुच्चय A का एक सदस्य समुच्चय B के दो भिन्न सदस्यों के साथ संबन्धित है।

उदाहरण 5: यदि $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}, x \neq 2, x \in \mathbb{R}$ तो, $f(1)-1$ का मान ज्ञात करें।

हल: यहाँ $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$

$$\Rightarrow f(1)=\frac{2\times1+3}{1-2}=\frac{5}{-1}=-5$$

$$\Rightarrow f(1)-1=-5-1=-6$$

उदाहरण 6: यदि $f(x)=x^2-4$ एवं $g(x)=x(x-2), \ x \in R$

तों (i) सिद्ध करें कि $f(2)=g(2)$

तथा (ii) $g(2)+f(\frac{1}{2})$ का मान निकालें।

हल: (i) यहाँ $f(x)=x^2-4$ एवं $g(x)=x(x-2)$

$$\Rightarrow f(2)=2^2-4=4-4=0$$

तथा $g(2)=2(2-2)=2\times0=0$

स्पष्टत: $f(2)=g(2)$

(ii) $f(\frac{1}{2})+g(2)=(\frac{1}{2})^2-4+2(2-2)$

$$=\frac{1}{4}-4+2\times0=\frac{1-16}{4}=\frac{-15}{4}$$

उदाहरण 7: (i) $f(x)=\frac{2x^2+3x+1}{x+1}$, तो $f(1)+f(2)-f(3)$ का मान ज्ञात करें।

(ii) $f(x)=\frac{4x+5}{x-1}, x \neq 1, x \in R$; तो $\frac{f(10)}{f(5)}$ का मान बताएँ।

हल: (i) यहाँ $f(x)=\frac{2x^2+3x+1}{x+1}=\frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)}=2x+1, x \neq -1$

x की जगह पर 1,2,3 रखने पर

$$f(1)+f(2)-f(3)=2\times1+1+2\times2+1-2\times3-1$$
$$=3+5-7=1$$

(ii) $f(x)=\frac{4x+5}{x-1}$ x के स्थान पर 10 और 5 रखने पर

$$\frac{f(10)}{f(5)}=\frac{\frac{4\times10+5}{10-1}}{\frac{4\times5+5}{5-1}}=\frac{5}{\frac{25}{4}}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$$

उदाहरण 8: (i) यदि $f(x)=\frac{1}{x}+3x$, तो $f(\frac{1}{x})$ निकालें, जब $x\neq0$

(ii) यदि $f(x+2)=x$, तो $f(x-2)$ एवं $f(\frac{1}{x})$ निकालें, जब कि $x\neq0$

(iii) यदि $f(x+2)=5$, तो दिखाएँ कि $f(-x)+f(2x)=10$

हल: (i) यहाँ $f(x)=\frac{1}{x}+3x$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{1}{\frac{1}{x}}+3\cdot\frac{1}{x}=x+\frac{3}{x}$$

(ii) $f(x+2)=x$

x के स्थान पर $x-2$ रखने पर

$$f(x-2+2)=x-2$$
$$\Rightarrow f(x)=x-2$$

पुन: x के स्थान पर $x-2$ रखने पर

$$f(x-2)=x-2-2=x-4$$

तथा x के स्थान पर $\frac{1}{x}$ रखने पर

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x},x\neq0$$

(iii) यहाँ $f(x+2)=5, x\in\mathbb{R}$

x के स्थान पर $x-2$ रखने पर

$$f(x-2+2)=5$$

$$f(x)=5, x \in R$$

$$\Rightarrow f(-x)=5 \text{ तथा } f(2x)=5$$

$$\Rightarrow f(-x)+f(2x)=5+5=10.$$

उदाहरण 9: यदि $f(x)=x^2-1, x \in R$, तो क्या $f(a)-1=f(a-1)$? अपने उत्तर की पुष्टि में कारण दें।

हल: यहाँ $f(x)=x^2-1$

$$\Rightarrow f(a)-1=a^2-1-1=a^2-2$$

तथा $f(a-1)=(a-1)^2-1=a^2-2a+1-1=a^2-2a=a(a-2)$

स्पष्टत: $f(a)-1 \neq f(a-1)$ क्योंकि $f(a)-1=a^2-2$

जबकि $f(a-1)=a^2-2a.$

उदाहरण 10: मान लीजिए कि $f(x)=x^2$ तथा $g(x)=2x+1$ दो वास्तविक फलन हैं। $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ तथा $\frac{f(x)}{g(x)}$ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $f(x)=x^2$

$$g(x)=2x+1.$$

$$\therefore \quad f(x)+g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$f(x)-g(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$$

$$f(x)g(x)=x^2(2x+1)=2x^3+x^2$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$$

2.1.5 फलनों के प्रकार (Types of Functions)

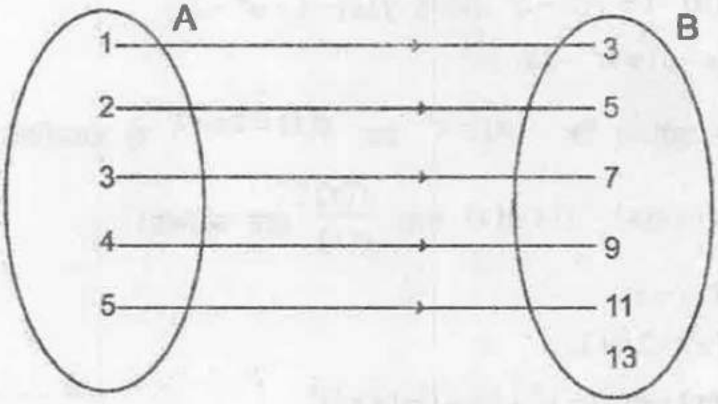
अब तक हम फलन को जान चुके हैं। यदि $f:A \rightarrow B$ में एक फलन है तो $y=f(x)$, $x \in A, y \in B$, x का प्रतिबिंम्ब (image) तथा x, y का पूर्व-प्रतिबिम्ब (pre-image) कहलाता है। प्रतिबिम्ब को ध्यान में रखकर फलन के दो प्रकार तथा पूर्व-प्रतिबिम्ब के आधार पर फलन के दो प्रकार हैं।

परिभाषा

ऐकैकी फलन (One-onefunction)

एक फलन $f:A \to B$ एकैकी (one-one) अथवा एकैक (injective) फलन कहलाता है, यदि f के अंतर्गत A के भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब भी भिन्न होते हैं अर्थात् प्रत्येक $x_1, x_2 \in A$ के लिए $f(x_1)=f(x_2)$ का तात्पर्य है कि $x_1 = x_2$

उदाहरणस्वरूप मानलिया कि $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{3,5,7,9,11,13\}$ तथा $f:A \to B$ $f(x)=2x+1, x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी फलन है जिसे तीर आरेख द्वारा भी समझा जा सकता है।



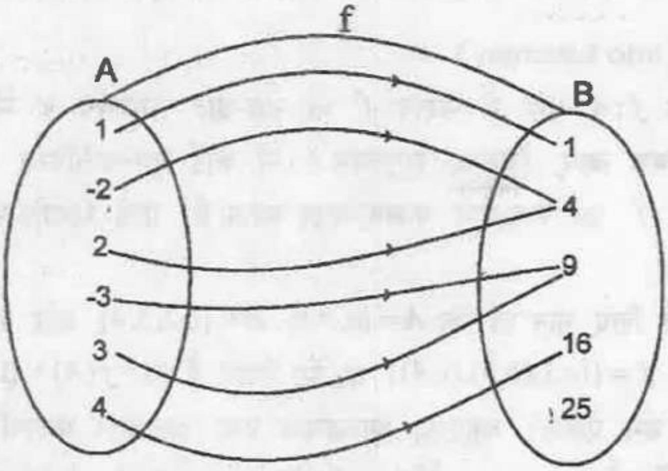
बहुएक फलन (Many-one Function):

एक फलन $f;A \to B$ बहुएक फलन कहलाता है यदि f के अन्तर्गत A के कम से कम दो भिन्न अवयवों के समान प्रतिबिम्ब हैं अर्थात् कम से कम दो भिन्न अवयव x_1, x_2 समुच्चय A में हो जिनके प्रतिबिम्ब समान हों $f(x_1)=f(x_2)$.

दूसरे शब्दों में कम से कम दो भिन्न अवयव $x_1, x_2 \in A$ हों जिससे कि $f(x_1)=f(x_2)$.

उदाहरणस्वरूप मान लिया कि $A=\{1,2,-2,3,-3,4\}$, $B=\{0,1,4,9,16,25\}$ दो दिये हुए समुच्चय हैं तथा $f;A \to B$, $f(x)=x^2$ द्वारा परिभाषित है। फलन को

तीर-आरेख द्वारा निम्न रूप से प्रदर्शित कर सकते हैं।



यहाँ आप देखते हैं कि

$$2 \neq -2 \text{ परन्तु } f(2) = f(-2) = 4$$

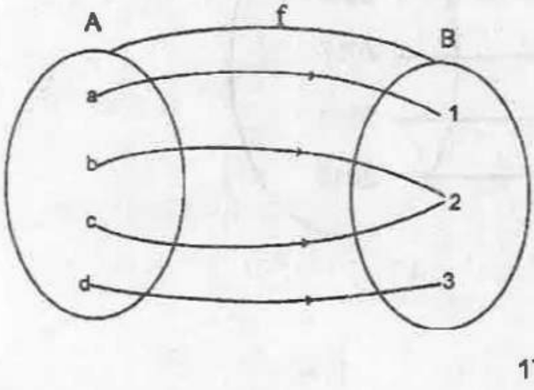
$$-3 \neq 3 \text{ परन्तु } f(3) = f(-3) = 4.$$

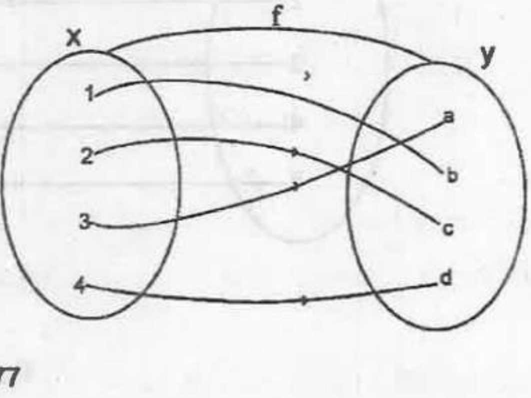
अतः दिया गया फलन बहुएक फलन है।

आच्छादक फलन (Onto function)

मानलिया कि A तथा B दो अरिक्त समुच्चय हैं। फलन $f: A \to B$ एक आच्छादक फलन है, यदि और यदि केवल $f(A) = B$ अर्थात् फलन f का परिसर $= B =$ फलन f का सह-प्रांत।

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि यदि समुच्चय B का प्रत्येक अवयव, समुच्चय A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब है, तो ऐसी स्थिति में f को एक आच्छादक या आच्छादी (subective) फलन कहते हैं।





यहाँ हम देखते हैं कि $f;A \rightarrow B$ में $f(A)=B$, अतः f एक आच्छादक फलन है। पुनः $g:X \rightarrow Y$ में भी $g(X)=Y$ अतः g भी एक आच्छादक फलन है।

अंत:क्षेपी फलन (Into function)

यदि फलन $f;A \rightarrow B$ में फलन f के सह-प्रांत समुच्चय B में कम से कम एक ऐसा सदस्य बच जाए, जिसका समुच्चय A में कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब (pre-image) नहीं हो, तो फलन f को अत:क्षेपी फलन कहा जाता है। ऐसी स्थिति में स्पष्ट है कि $f(A) \subset B$.

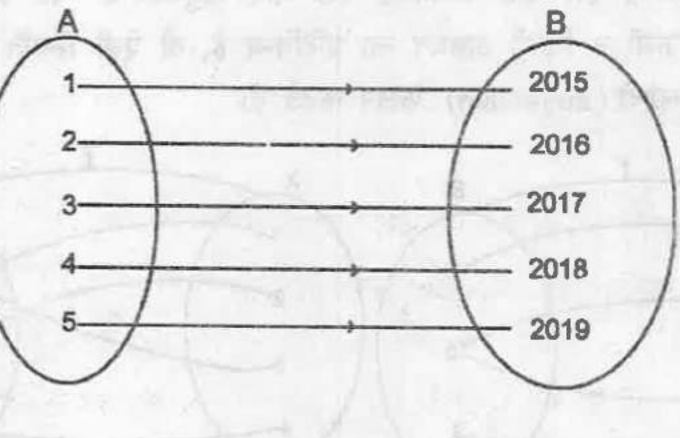
उदाहरण के लिए मान लें कि $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2,3,4\}$ और $f;A \rightarrow B$ इस प्रकार परिभाषित है $f=\{(a,1)(b,3),(c,4)\}$ तो हम देखते हैं कि $f(A)=\{1,3,4\} \subset B$.

इस प्रकार हम ऐकैकी, बहुएक, आच्छादक तथा अत:क्षेपी फलनों से परिचित हं चुके हैं। इन फलनों को साथ-साथ लेने पर निम्नरूप से फलनों को व्यवस्थित किया ज सकता है:

- ऐकैकी आच्छादक फलन (One-one onto function)
- बहुएक आच्छादक फलन (Many-one onto function)
- एकैक अंत:क्षेपी फलन (One-one into function)
- बहुएक अंत:क्षेपी फलन (Many-one into function)

ऐकैकी आच्छादक फलन (One-one onto function)

यदि फलन $f;A \rightarrow B$ एकैकी तथा आच्छादक दोनों है, तो f एक एकैकी आच्छादक (One-one onto) अथवा एकैकी आच्छादी (bijective) फलन कहलाता है।



फलन $f;\{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{2015,2016.2017,2018,2019\}$

जहाँ $f(x) = x + 2014, x \in \{1,2,3,4,5\}$

एक एकैकी आच्छादक फलन है।

बहुएक आच्छादक फलन (Many-one onto Function)

यदि फलन $f;A \rightarrow B$ बहुएक एवं साथ ही आच्छादक भी हो, तो बहुएक आच्छादक फलन कहलाता है।

दूसरे शब्दों में समुच्चय A के कम से कम दो भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब समुच्चय B में समान हो तथा समुच्चय B में एक भी अवयव ऐसा न रह जाय जिसका A में कोई न कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब न हो, तो फलन f बहुएक आच्छादक कहलाता है।

स्पष्टतः $f;A \rightarrow B$ बहुएक आच्छादक फलन होगा, यदि और केवल यदि

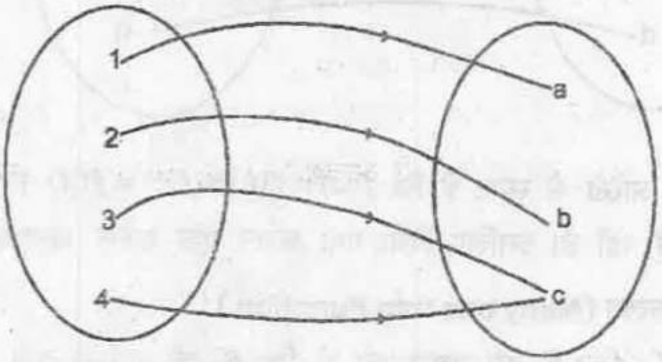
(i) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, x_1, x_2 \in A$

तथा (ii) $f(A) = B$

उदाहरण के लिए मान लिया कि $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a;b,c\}$

तथा f इस प्रकार परिभाषित है कि $f(1) = a$, $f(2) = b$,

$f(3) = c$, $f(4) = c$



तो f एक बहुएक आच्छादक फलन होगा।

एकैक अंतःक्षेपी फलन (One-one into Function)

यदि फलन $f;A \rightarrow B$ एकैक एवं साथ-साथ अन्तःक्षेपी भी हों, अर्थात् समुच्चय B के किसी भी अवयव को समुच्चय A में एक से अधिक पूर्व-प्रतिबिम्ब न हों तथा B में कम-से-कम एक अवयव ऐसा रह जाय जिसका A में कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब न हो,

तो फलन को एकैक अन्त:क्षेपी फलन कहा जाता है।

स्पष्टत: $f;A \rightarrow B$ एकैक अन्त:क्षेपी फलन होगा यदि और केवल यदि

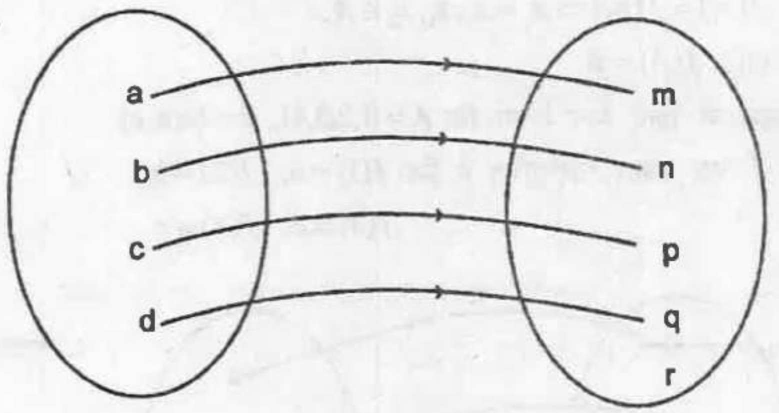
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ सभी $x_1, x_2 \in A$

तथा $f(A) \subset B$

उदाहरण के लिए मान लें कि $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{p.q,r,m,n\}$ तथा f इस प्रकार परिभाषित है कि $a \rightarrow m, b \rightarrow n, c \rightarrow p, d \rightarrow q$

अर्थात् $f = \{(a,m),(b,m)(c,p),(d,q)\}$

इसे तीर-आरेख द्वारा आप निम्न प्रकार प्रदर्शित कर सकते हैं



उपर्युक्त चित्र आरेख से स्पष्ट है कि $f(a) \neq f(b) \neq f(c) \neq f(d)$ तथा $r \in B$ का कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब A में नहीं है। इसलिए दिया गया फलन एक एकैक अन्त:क्षेपी फलन है

बहुएक अन्त:क्षेपी फलन (Many one into Function)

यदि फलन $f: A \rightarrow B$ इस प्रकार का हो कि B के कम-से-कम एक अवयव का समुच्चय A में एक-से-अधिक पूर्व-प्रतिबिम्ब हो तथा B में कम-से-कम एक अवयव ऐसा बच जाय जिसका समुच्चय A में कोई पूर्व-प्रतिबिम्ब नहीं हो, तो फलन f को एक अन्त:क्षेपी फलन कहा जाता है।

स्पष्टत: $f;A \rightarrow B$ बहुएक अन्त:क्षेपी फलन होगा, यदि और केवल यदि

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \quad x_2$

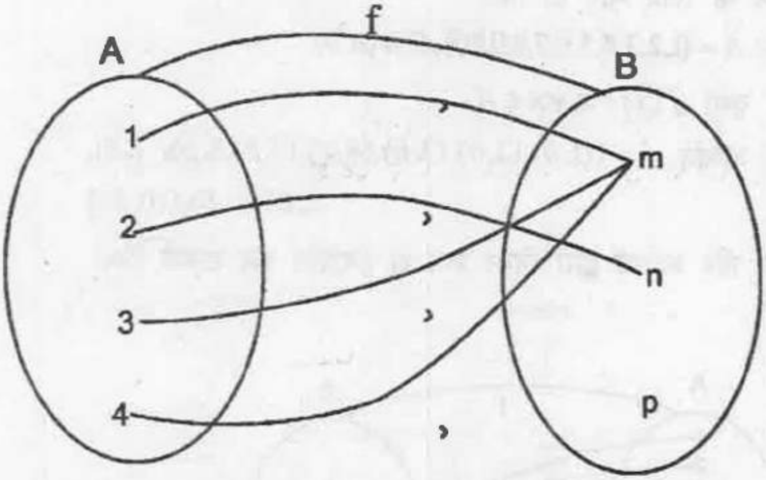
तथा $f(A) \subset B$

उदाहरण के लिए मान लें कि $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{m,n,p\}$

तथा $f;A \to B$ इस प्रकार परिभाषित है कि $1 \to m, 2 \to n, 3 \to m, 4 \to m$

अर्थात् $f = \{(1,m),(2,n),(3,m),(4,m)\}$

इसे तीर–आरेख द्वारा निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं–



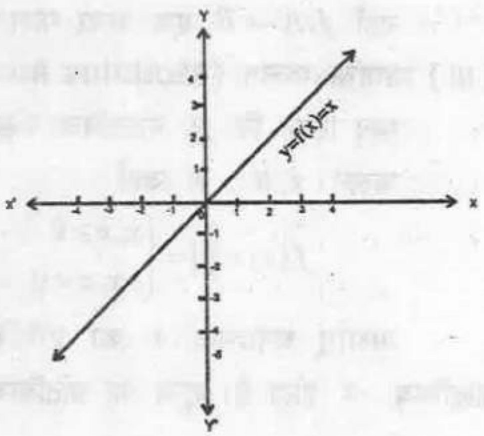
यहा हम देखते हैं कि A के तीन भिन्न अवयवों का समुच्चय B में समान प्रतिबिम्ब है तथा B में एक अवयव ऐसा है जिसका समुच्चय A में कोई पूर्व–प्रतिबिम्ब नहीं है।

अतः f एक बहुएक अन्तःक्षेपी फलन है।

कुछ प्रमुख फलन (Some important functions)

(i) तत्समक फलन (Identity function)

मान लिया कि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। फलन $f;R \supset R$, जहाँ $f(x) = x, \forall x \in R$ को तत्समक फलन कहते हैं। यहाँ हम देखते हैं कि कि फलन f का प्रांत तथा परिसर R है तथा इसका आलेख मूल बिन्दु से गुजरनेवाली सरल रेखा है जो x–अक्ष से 45° पर झुकी हुई है।



(ii) अचर फलन (Constant function)

यदि फलन $f;A \to B$ इस प्रकार का हो कि A के सभी अवयवों के प्रतिबिम्ब समुच्चय B में समान (एक) हों, तो f को अचर फलन कहते हैं।

उपर्युक्त कथन से हम समझ सकते हैं कि अचर फलन के लिए विस्तार $f(A)$ एक एकल समुच्चय (*Singleton set*) होता है।

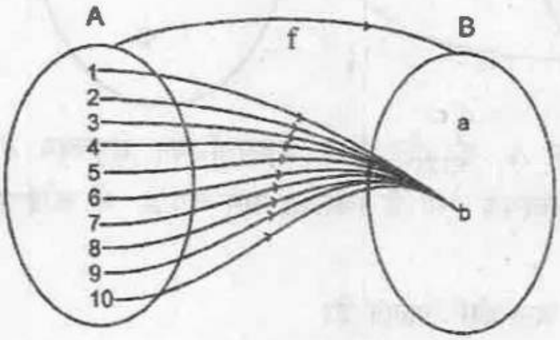
उदाहरण के लिए मान लें कि-

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, B = \{a, b\}$$

तथा $f(x) = b, \forall x \in A$

अर्थात् $f = \{(1,b),(2,b),(3,b),(4,b),(5,b),6,b),(7,b),$
$(8,b),(9,b),(10,b)\}$

इसे हम तीर आरेख द्वारा निम्न रूप से प्रदर्शित कर सकते हैं-



यहाँ $f;A \to B$ एक अचर फलन (Constant function) है।

(iii) मापांक फलन (Modulus function)

मान लिया कि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

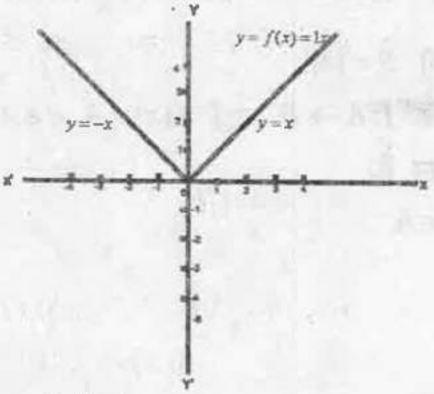
फलन $f;R \supset R$ जहाँ

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

अर्थात् धनात्मक x का प्रतिबिम्ब x ही रहता है परन्तु ऋणात्मक x का प्रतिबिम्ब $-x$ होता है। शून्य का प्रतिबिम्ब शून्य है।

माणांक फलन को निरपेक्ष मान फलन (Absolute valued functio) भी कहा जाता है।

मापांक फलन का आलेख निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जाता है



यहाँ हम देख सकते हैं कि

$$f(1) = 1 = f(-1)$$
$$f(2) = 2 = f(-2)$$

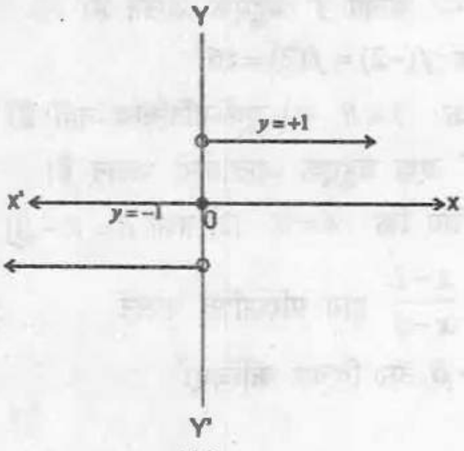
इस प्रकार मापांक फलन बहुएक अन्तःक्षेपी फलन है।

(iv) चिह्न फलन (Signum function)

फलन $f;R\supset R$, जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{यदि } x>0\\ 0, \text{यदि } x=0\\ -1, \text{यदि } x<0\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन चिह्न फलन कहलाता है। चिह्न फलन का प्रांत $\mathbb{R}$ तथा परिसर {−1,0,1} है। इसे हम निम्न आलेख द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं–



चित्र से आप समझ सकते हैं कि-

$$f(0)=0, f(2013)=1, f(2015)=1$$

$$f(-2012)=-1, f(-3)=-1......$$

उदाहरण 1: यदि $A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{4\}$

तो सिद्ध करें कि $f;A\to B$ जहाँ $f(x)=4, x\in A$

एक अचर फलन है।

हल: यहाँ $f(x)=4, \forall x\in A$

अर्थात् $f(2)=4$

$f(3)=4$

$f(4)=4$

$f(5)=4$

इस प्रकार A के प्रत्येक अवयव के लिए एक ही प्रतिबिम्ब 4 है।

अतः फलन अचर है।

उदाहरण 2: मान लिया कि $f;R\supset\cdot R$, $f(x)=x^4$ द्वारा परिभाषित है। फलन f की जाँच करें।

हल: यहाँ $f(x)=x^4, x\in R$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow {x_1}^4={x_2}^4$$

$$\Rightarrow({x_1}^2-{x_2}^2)({x_1}^2+{x_2}^2)=0$$

$$\Rightarrow {x_1}^2-{x_2}^2=0$$

$$\Rightarrow x_1=x_2 \; or \; x_1=-x_2$$

$\Rightarrow$ फलन f बहुएक फलन है।

हम देखते हैं कि $f(-2)=f(2)=16$

पुनः देखते हैं कि $-2\in R$ को पूर्व-प्रतिबिम्ब नहीं है।

अतः फलन f एक बहुएक अन्तःक्षेपी फलन है।

उदाहरण 3: मान लीजिए कि $A=R-\{3\}$ तथा $B=R-\{1\}$

$f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ द्वारा परिभाषित फलन

$f;A\to B$ पर विचार कीजिए।

हल: यहाँ $f(x)=\frac{x-2}{x-3}$

जहाँ $f;A\rightarrow B$

$$A=R-\{3\}$$

$$B=R-\{1\}$$

मान लिया कि-

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1-2}{x_1-3}=\frac{x_2-2}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow (x_1-2)(x_2-3)=(x_1-3)(x_2-2)$$

$$\Rightarrow x_1x_2-3x_1-2x_2+6=x_1x_2-2x_1-3x_2+6$$

$$\Rightarrow 3x_2-2x_2=3x_1-2x_1$$

$$\Rightarrow x_2=x_1$$

अर्थात् $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2, \forall x_1, x_2\in A$

$\Rightarrow$ फलन f एकैक फलन (One-one function) है।

पुन: माना कि $y\in B$ तथा $y=f(x)=\frac{x-2}{x-3}$

$$\Rightarrow xy-3y=x-2$$

$$\Rightarrow x(y-1)=3y-2$$

$$\Rightarrow x=\frac{3y-2}{y-1}, y\neq 1.$$

यहाँ हम देखते हैं कि $y\in B$, के लिए $x\in A$ में मिलता है जिसके लिए $y=f(x)$ अर्थात् समुच्चय B के प्रत्येक अवयव का समुच्चय A में पूर्व-प्रतिबिम्ब मिलता है।

अत: फलन f एक आच्छादक (Onto) फलन है।

इस प्रकार दिया हुआ फलन एक एकैक आच्छादक (One-one onto) फलन है।

प्रश्नावली-3

1. सिद्ध कीजिए कि $f(x)=x^3$ द्वारा परिभाषित फलन $f;R\supset R$ एकैक है (*injective*) फलन है।

2. यदि $f;R\supset R$ जहाँ $f(x)=x^2-3x+2$ द्वारा परिभाषित है, तो $f\{f(x)\}$ ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि $f;[-1,1]\to R, f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी है।

4. मान लिया कि $f;R-\left\{\frac{2}{3}\right\}\to R$ जहाँ $f(x)=\dfrac{4x+3}{6x-4}$, सिद्ध करें कि $f\{f(x)\}=x.$

5. मान लीजिए कि A तथा B दो समुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि $f:A\times B\to B\times A$, जहाँ $f(a,b)=(b,a)$ द्वारा परिभाषित है, एक एकैकी आच्छादी (*bijective*) फलन है।

6. फलन $f;R\supset R$ जहाँ $f(x)=1+x^2$ द्वारा परिभाषित है, बहुएक अन्तःक्षेपी फलन है। सिद्ध करें।

7. सिद्ध करें कि $f(x)=3-5x$ द्वारा परिभाषित फलन $f;R\supset R$ एकैकी आच्छादी (*bijective*) है।

8. सिद्ध कीजिए कि $f;R\supset R$, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{यदि} > 0\\ 0, \text{यदि}\ x=0\\ -1, \text{यदि}\ x<0\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

9. मान लीजिए कि कक्षा X के सभी 50 विद्यार्थियों का समुच्चय A है। मान लीजिए $f: A \to \mathbf{N}$; जहाँ $f(x)=$ विद्यार्थी x का क्रमांक(Roll Number) द्वारा परिभाषित एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है किन्तु आच्छादक (Onto) नहीं है।

10. सिद्ध कीजिए कि $f(x)=2014x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ एकैकी है, किन्तु आच्छादक नहीं है।

11. यदि $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}, x \neq 0, x \in \mathbf{R}$, हो तो $f(2)$ और $f(3)$ का मान ज्ञात करें।

Hints : $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

$\Rightarrow f(t)=t^2-2, x+\frac{1}{x}$ के स्थान पर t लिखने पर.

$\Rightarrow f(2)=2^2-2=4-2=2$

तथा $f(3)=3^2-2=9-2=7$

12. यदि $f(x+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^3}+x^3, x \neq 0, x \quad R$, तो $f(2)$ और $f(3)$ का मान ज्ञात करें।

13. यदि $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}, \ \forall x \quad R-\{0\}$, तो $f(2)+f(3)-f(4)$ का मान ज्ञात करें।

14. यदि $f(x-\frac{1}{x})=x^3-\frac{1}{x^3}, \ \forall x \quad R-\{0\}$, तो $f(4)+f(1)-2f(3)$ का मान ज्ञात करें।

15. यदि $f(\tan\theta)=\sin 2\theta+\cos 2\theta-1, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, तो $f(3)$ का मान ज्ञात करें।

Hints: $f(\tan\theta)=\sin 2\theta+\cos 2\theta-1$

$$=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}+\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}-1$$

$$=\frac{2\tan\theta+1-\tan^2\theta-1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}.$$

$$=\frac{2(\tan\theta-\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta}$$

$\tan\theta$ के स्थान पर x रखने पर

$$f(x)=\frac{2(x-x^2)}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f(3)=\frac{2(3-9)}{1+9}=\frac{2\times(-6)}{10}=\frac{-6}{5}$$

16. यदि $f(x)=x^2$, तो $\frac{f(3\cdot 3)-f(2\cdot 7)}{f(4\cdot 6)-f(4)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Hints: यहाँ $\frac{f(3\cdot 3)-f(2\cdot 7)}{f(4\cdot 6)-f(4)}=\frac{(3\cdot 3)^2-(2\cdot 7)^2}{(4\cdot 6)^2-4^2}=\frac{(3\cdot 3+2\cdot 7)(3\cdot 3-2\cdot 7)}{(4\cdot 6+4)(4\cdot 6-4)}$

$$=\frac{6}{8\cdot 6}=\frac{3}{4\cdot 3}=\frac{30}{43}.$$

2.2 फलनों का प्रांत एवं परिसर

पिछले अध्याय में हमने दो समुच्चयों के बीच 'संबंध' और 'फलन' के बारे में सीखा है। हम फलन से संबंधित विभिन्न महत्त्वपूर्ण पदों जैसे-प्रतिबिम्ब, पूर्व-प्रतिबिम्ब, प्रांत तथा परिसर के बारे में अच्छी तरह जान चुके हैं। कुछ विशिष्ट फलनों के बारे में भी जानकारी प्राप्त की है। इस अध्याय में हम वास्तविक मान फलन और वास्तविक फलन के प्रांत तथा परिसर निकालना जानेंगे।

2.2.1. फलन का प्रांत और परिसर

मानलिया कि A और B दो अरिक्त समुच्चय है तथा $f: A \rightarrow B$ एक फलन है। समुच्चय A को फलन f का प्रांत तथा समुच्चय B को फलन f का सह-प्रांत कहते हैं अर्थात् फलन f का प्रांत उन सभी अवयवों का समुच्चय है जिनका प्रतिबिम्ब समुच्चय B में मिलता है तथा उन सभी प्रतिबिम्बों के समुच्चय f (A)फलन f का परिसर कहलाता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि

फलन f का प्रांत $=\{x: f(x)$ अच्छी तरह से परिभाषित हं $\}$

तथा फलन F का परिसर $=\{f(x): x$ फलन f के प्रांत का अवयव है। $\}$

हम यहाँ सिर्फ वास्तविक फलन के प्रांत और परिसर को निकालेंगे। निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखने पर हमें फलनों के प्रांत निकालने में आसानी होगी-

(i) हम अच्छी तरह जानते हैं कि $\sqrt{x}$ सिर्फ $x \geq 0$ के लिए परिभाषित है। उदाहरण के लिए फलन f जो $f(x)=\sqrt{x-5}$ के द्वारा परिभाषित है, का प्रांत वैसे x के लिए परिभाषित होगा जिनके लिए $x-5 \geq 0$ अर्थात् $x \geq 5$ इस प्रकार दत्त फलन का प्रांत $\{x \in R: x \geq 5\}=[5, \infty)$ हुआ।

पुनः हम जानते हैं कि $\sqrt{x}$ का मान हमेशा धनात्मक या शून्य होगा, अर्थात् $\sqrt{x} \geq 0$ तो $f(x)=\sqrt{x}$ का परिसर $[0, \infty)$ होगा। अतः दत्त फलन $f=\sqrt{x-5}$ का प्रांत $=[5, \infty)$ तथा परिसर $=[0, \infty)$ है।

(ii) अचर फलन (Constant Function) $y=f(x)=c,$ जहाँ c एक अचर है, प्रत्येक x R द्वारा परिभाषित होता है। इसलिए अचर फलन का प्रांत $=R=$ वास्तविक

संख्याओं का समुच्चय तथा परिसर $=\{c\}$.

(iii) यदि फलन $f(x)=p(x)=x$ में बहुपद, तो फलन x के वास्तविक मान के लिए परिभाषित होता है। ऐसी स्थिति में फलन का प्रांत $=R$

$=R=(-\infty,\infty)$ $f(x)=\log x$ $q(x)=[0,\infty)$

(iv) यदि फलन $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, जहाँ $p(x),q(x)$, x में बहुपद है, x के उन्हीं मानों के लिए परिभाषित होता है जिनके लिए $q(x)\neq 0$ उदाहरणस्वरूप $f(x)=\frac{4x^2-5}{x-2}$, $x=2$ के लिए परिभाषित नहीं हैं, अतः फलन f का प्रांत $=R-\{2\}$

(v) मापांक फलन (Modulus Function) $f(x)=|x|$, प्रत्येक x R के लिए परिभाषित होता है तथा इसका मान हमेशा शून्य या शून्य से बड़ा होता है। इस प्रकार फलन f का प्रांत $=R=(-\infty,\infty)$ तथा f का परिसर $=[0,\infty)$

(vi) हम जानते हैं कि त्रिकोणमितीय व्यंजक (trigonometric expression) $a\cos x\pm b\sin x$ का महत्तम (maximum) तथा न्यूनतम (minimum) मान क्रमशः $\sqrt{a^2+b^2}$ तथा $-\sqrt{a^2+b^2}$ होता है, अर्थात् $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\cos x\pm b\sin x\le\sqrt{a^2+b^2}$, x R इस प्रकार फलन $f(x)=acox\pm b\sin x$ द्वारा परिभाषित फलन का प्रांत $=R$ तथा परिसर $=\left[-\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+b^2}\right]$ उदाहरणस्वरूप फलन $f=3\cos x-4\sin x$ का प्रांत $=R$ परिसर $=[-5,5]$.

(vii) हम जानते हैं कि घातांक व्यंजक $a^x, a\ge 0$ के लिए परिभाषित है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि फलन f जहाँ $f(x)=(p(x))^{q(x)}$

$$p(x)\ge 0$$

(viii) फलन $f(x)=\log p(x)$ वैसे x के लिए परिभाषित है जिसके लिए $p(x)>0$ तथा $a>0$ और $a\neq 1$. अर्थात् $f(x)=\log x_e$ का प्रांत $=(0,\infty)$ तथा परिसर $=(-\infty,\infty)$

उपर्युक्त तथ्यों को ध्यान में रखकर हम आसानी से वास्तविक फलनों के प्रांत और परिसर ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण: 1. निम्नलिखित फलनों का प्रांत व परिसर ज्ञात करें-

(i) $f(x)=-|x|$ (ii) $f(x)=2x-5$ (iii) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

(iv) $f(x)=x^2+2$ (v) $f(x)=\sin x+\cos x$

हल: (i) हम जानते है कि $|x|$ $0, x\in R\Rightarrow -|x|\le 0$. अतः फलन f जहाँ

$f(x)=-|x|$ का प्रांत $=R$ तथा परिसर $=(-\infty,0]$

(ii) दिया गया फलन $f(x)=2x-5$, प्रत्येक $x \quad R$ के लिए परिभाषित है तथा इसका मान कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है। इस प्रकार दिये गये फलन का प्रांत $=R=(-\infty,\infty)$ तथा परिसर $=R=(-\infty,\infty)$

(iii) दिया गया फलन $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ परिभाषित तभी होगा जब

$$16-x^2\geq 0$$
$$=16\geq x^2$$
$$=x^2\leq 16$$
$$=-4\leq x\leq 4$$

स्पष्टत: $\sqrt{16-x^2}\geq 0$ अत: फलन f का प्रांत $=[-4,4]$ तथा फलन f का परिसर $=[0,4)$

(iv) दिया गया फलन $f(x)=x^2+2$, सभी वास्तविक संख्या x के लिए परिभाषित है तथा $x^2+2\geq 2$ इस प्रकार फलन का प्रांत $=\mathbb{R}$ तथा परिसर $=[2,\infty)$

(v) हम जानते हैं कि

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leq \sin x\pm b\cos x\leq \sqrt{a^2+b^2}\,,x \quad R$$
$$\Rightarrow -\sqrt{1+1}\leq \sin x+\cos x\leq \sqrt{1+1}\,,x \quad R$$
$$\Rightarrow -\sqrt{2}\leq \sin x+\cos x\leq \sqrt{2}\,,x \quad R$$
$$\Rightarrow -\sqrt{2}\leq f(x)\leq \sqrt{2}\,,\ x \quad R$$

अत: दिया गया फलन f का प्रांत R तथा परिसर $=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

उदाहरण: 2. फलन $f(x)=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2-5x+4}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन $f(x)=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2-5x+4}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+3x+5}{(x-4)(x-1)}$$

हम जानते हैं कि $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, जहाँ $p(x),q(x)$ दो बहुपद हैं तभी परिभाषित होता है जब $q(x)\neq 0$

अत: दिया गया फलन परिभाषित होगा यदि $(x-4)(x-1)\neq 0$

$$\Rightarrow x\neq 1,4.$$

इस प्रकार फलन f का प्रांत $= R - \{1, 4\}$

उदाहरण 3 फलन $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$ का प्रांत तथा परिसर ज्ञात करें।

हल: दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-6)(x-2)}.$$

फलन f को परिभाषित होने के लिए

$$x^2-8x+12 \neq 0$$
$$\Rightarrow (x-6)(x-2) \neq 0$$
$$\Rightarrow x \neq 2, 6$$

$\Rightarrow$ दिये गये फलन f का प्रांत $= R - \{2, 6\}$

मानलिया कि $y = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$

$$\Rightarrow yx^2 - 8xy + 12y = x^2 + 2x + 1$$
$$\Rightarrow (y-1)x^2 - 2x(4y+1) + 12y - 1 = 0$$

यह एक x चर में द्विघात समीकरण है। x के वास्तविक मान के लिए समीकरण का विवेचक ≥ 0

$$\Rightarrow 4(4y+1)^2 - 4(y-1)(12y-1) \geq 0$$
$$\Rightarrow 16y^2 + 8y + 1 - 12y^2 + 13y - 1 \geq 0$$
$$\Rightarrow 4y^2 + 21y \geq 0$$
$$\Rightarrow y(4y+21) \geq 0$$
$$\Rightarrow y \leq -\frac{21}{4} y \geq 0.$$

अतः इस फलन का परिसर $= \left(-\infty, \dfrac{-21}{4}\right] \cup [0, \infty)$

उदाहरण 4: फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात करें जहाँ $5^x + 5^{f(x)} = 5$

हल: यहाँ $5^x + 5^{f(x)} = 5$

$$\Rightarrow 5^{f(x)} = 5 - 5^x$$
$$\Rightarrow f(x) = \log_5(5 - 5^x)$$

फलन f को परिभाषित होने के लिए $5-5^x>0$

$\Rightarrow 5>5^x$

$\Rightarrow 5^x<5^1$

$\Rightarrow x<1$

$\Rightarrow$ फलन f का प्रांत $=(-\infty,1)$

इसी प्रकार f का परिसर $=(-\infty,1)$

उदाहरण 5: फलन $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ का प्रांत तथा परिसर निर्धारित कीजिए।

हल: दिया गया फलन $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$,

हम देखते हैं कि $1+x^2\geq 1, \forall x\in R$

तथा $1+x^2>x^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2}<1 \text{ और } \frac{x^2}{1+x^2}\geq 0.$$

अतः दिये गये फलन का प्रांत $=R$

तथा परिसर $=[0,1)$

उदाहरण 6: फलन $f(x)=\sqrt{12\cos x-5\sin x-14}$ का प्रांत निकालें।

हल: दिया गया फलन f परिभाषित होगा यदि

$$12\cos x-5\sin x-14\geq 0.$$

हम जानते हैं कि

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leq a\cos x\pm 10\sin x\leq \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{12^2+5^2}\leq 12\cos x-5\sin x\leq \sqrt{12^2+5^2}$$

$$\Rightarrow -13\leq 12\cos x-5\sin x\leq 13$$

$$\Rightarrow 12\cos x-5\sin x-14<0, \forall x\in R$$

$\Rightarrow \sqrt{12\cos x-5\sin x-14}$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित नहीं है।

अतः दिया गया फलन f का प्रांत $=\varphi$(*empty set*).

उदाहरण 7: फलन $f(x)=\dfrac{x^2-2014x+2013}{x^2-2015x+2014}$ का प्रांत एवं परिसर ज्ञात करें।

हल: दिया गया फलन $f(x)=\dfrac{x^2-2014x+2013}{x^2-2015x+2014}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(x-2013)(x-1)}{(x-2014)(x-1)}$$

$$=\frac{x-2013}{x-2014}, \ell x \neq 1$$

दिया गया फलन परिभाषित होगा यदि

$$x \neq 1,\ 2014$$

अतः फलन f का प्रांत $=\mathbb{R}-\{1,2014\}$

मान लिया कि $y=f(x)=\dfrac{x-2013}{x-2014}$

$$\Rightarrow xy-2014y=x-2013$$

$$\Rightarrow x=\frac{2014y-2013}{y-1}$$, जो परिभाषित होगा

जब $y \neq 1$

अतः दत्त फलन का परिसर $=R-\{1\}$

उदाहरण 8: फलन $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ का प्रांत व परिसर ज्ञात करें।

हल: यहाँ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

$f(x)$ को परिभाषित होने के लिए $x \neq 0$

अतः दिया गया फलन का प्रांत $=R-\{0\}$

हम देखते हैं कि $f(x)=x+\dfrac{1}{x}=(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x})^2+2$, जहाँ $x>0$.

$$\Rightarrow f(x) \geq 2, \text{ जब } x>0.$$

जब $x<0$, तब $f(x) \leq -2$

अतः $f(x)$ का परिसर $=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

उदाहरण 9: $f(x)=\sqrt{x-2014}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा

परिसर ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन f

$$f(x)=\sqrt{x-2014}$$

को वास्तविक फलन होने के लिए $x-2014\geq 0$

$$\Rightarrow x\geq 2014$$

अर्थात् फलन f को परिभाषित होने के लिए $x\geq 2014$

अत: फलन f का प्रांत $=[2014,\infty)$

हम जानते हैं कि $\sqrt{x}\geq 0,$ जब $x\geq 0$

अत: फलन f का परिसर $=[0,\infty)$

उदाहरण 10: फलन $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन से फलन $g(x)=f[f(x)]$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ को परिभाषित होने के लिए $x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1.$

अब $g(x)=f[f(x)]=\dfrac{1}{1-f(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{1-x-1}$

$g(x)=\dfrac{x-1}{-x}=\dfrac{1}{x}-1$ को परिभाषित होने के लिए $x\neq 0$

इस प्रकार फलन g का प्रांत $=R-\{1,0\}$

प्रश्नावली-4

1. मान लीजिए कि
$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,5,9,11,15,16\}$ और $f=\{(1,5),(2,9),(3,1),(4,5)\}$ तो फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

2. फलन $f(x)=\begin{cases} x^2; 0 \le x \le 2 \\ 3x; 2 < x \le 10 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

3. फलन $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-8x+12}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

4. $f(x)=\sqrt{x-2}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

5. $f(x)=|x-5|$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

6. मान लीजिए कि $f,g:R \supset R$ क्रमशः $f(x)=x+1, g(x)=2x-3$ द्वारा परिभाषित है। $f(x)+g(x), f(x)-g(x)$ और $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ज्ञात कीजिए।

7. मान लीजिए कि $P=\{9,10,11,12,13\}$ तथा $f:P \to N, f(n)=n$ का महत्तम अभाज्य गुणक द्वारा परिभाषित है। f का परिसर ज्ञात कीजिए।

8. मान लीजिए कि $f=\{x,\dfrac{x^2}{1+x^2}),x \in R\}$, R से R में एक फलन है। f का परिसर निर्धारित कीजिए।

9. मान लीजिए कि $f=\{(1,1),(2,3),(0,-1),(-1,-3)\}$, Z से Z में $f(x)=px+q$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ p,q एक पुर्णांक है। p,q को निर्धारित कीजिए।

10. निम्नलिखित वास्तविक फलन f का प्रांत ज्ञात करें–

(i) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ (ii) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-4x+3}$

(iii) $f(x)=4-\sqrt{1-x^2}$ (iv) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

(v) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ (vi) $f(x)=\sqrt{x^2-2015x+2014}$

(vii) $f(x)=\frac{1}{\log_{10}(1-x)}$ (viii) $f(x)=\log_x 3$

(ix) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$ (x) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{x-1}$

(xi) $f(x)=\frac{x^2}{x}$ (xii) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{x^3}{x}$.

(xiii) $f(x)=2014^x$ (xiv) $f(x)=2^{x-x^3}$

(xv) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

11. निम्नलिखित फलन का प्रांत निकालें-

(i) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ (ii) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$

(iii) $f(x)=\log_x 5+\log_5 x$ (iv) $f(x)=\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}$

(v) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ (vi) $f(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

(vii) $f(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}$ (viii) $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\frac{1}{x^2-16}$

(ix) $f(x)=\frac{3}{4-x^2}+\sqrt{x^2-x}$ (x) $f(x)=\frac{3}{4-x^2}+\sqrt{x-x^2}$

12. निम्नलिखित वास्तविक फलन का परिसर ज्ञात करें-

(i) $f(x)=\sin x$ (ii) $f(x)=\cos^2 x$

(iii) $f(x)=1+\cos 2x$ (iv) $f(x)=10^x$

(v) $f(x)=x^{10}$ (vi) $f(x)=x^{2015}$

(vii) $f(x)=2014^x$ (viii) $f(x)=1+\sin x$

(ix) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+2}$ (x) $f(x)=|\sin x|$

(xi) $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ (xii) $f(x)=|x|+2$

(xiii) $f(x)=12\sin x+5\cos x$ (xiv) $f(x)=5+3\cos x-4\sin x$

(xv) $f(x)=x^2+x+1.$ (xvi) $f(x)=x^2-x+1$

(xvii) $f(x)=\cos^2+\cos x+1$ (xviii) $f(x)=\sin^2 x-\sin x+2$

(xix) $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}$ (xxi) $f(x)=2014^{-x}$

13. सही उत्तर चुनें-

(i) वास्तविक फलन $f(x)=\frac{1}{2-\cos 3x}$ का परिसर निम्नलिखित में से कौन है-

(a) $[\frac{1}{3},1]$ (b) $(\frac{1}{3},1)$ (c) $(0,1)$ (d) $(-1,1)$

(ii) यदि फलन $f(x)$ का प्रांत $[0,1]$ है तो फलन $f(2x+3)$ का प्रांत निम्न में कौन होगा-

(a) $(0,1)$ (b) $[-\frac{3}{2},-1]$ (c) $[3,5]$ (d) $[1,\frac{3}{2}]$

(iii) वास्तविक फलन $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$ का परिसर निम्न में से कौन है-

(a) $[0,1]$ (b) $[1,2]$ (c) $[\sqrt{2},2$ (d) $[0,\sqrt{2}]$

(iv) फलन $f(x)=|\sin x-\cos x|$ का परिसर निम्न में से कौन है-

(a) $[0,\sqrt{2}]$ (b) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ (c) $[0,2]$ (d) $[0,1]$

(v) यदि $f(x)=\cos(\log x)$ है तो $f(x)f(y)-\frac{1}{2}\{f(xy)+f(\frac{x}{y})\}$ का मान निम्न में से किसके बराबर होगा -

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) −1

(vi) यदि $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$ हो तो, $f(x)+f(1-x)$ का मान बराबर है

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

(vii) यदि $f(x)=(9-x^4)^{\frac{1}{4}}$, तो $f(f(x))=$

(a) x (b) x^4 (c) x^2 (d) $9x$

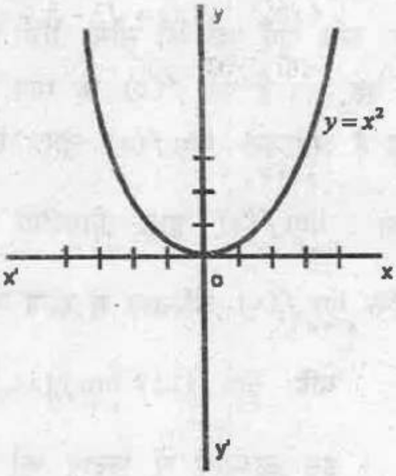
2.3 फलन की सीमाएँ

(Limits of Functions)

प्रस्तावना

हमलोग फलन की सीमा की प्रक्रिया को स्पष्ट रूप से समझने के लिए सीमा की संकल्पना से निम्नलिखित उदाहरण के द्वारा परिचित होते हैं–

फलन $f(x)=x^4$ पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x को शून्य के अधिक निकट मान लेते हैं, $f(x)$ का मान भी 0 की ओर अग्रसर होता जाता है जो बगल की आकृति से स्पष्ट है।



इस प्रकार हम कह सकते हैं कि ज्यों-ज्यों x शून्य की ओर अग्रसर होता है, $f(x)$ का मान भी 0 की ओर अग्रसर होता जाता है। इसे गणितीय संकेत में

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^4=0$$

द्वारा लिखा जाता है तथा इसे $f(x)$ की सीमा शून्य है, जब x शून्य की ओर अग्रसर होता है, समझा जाता है। $f(x)$ की सीमा, जब शून्य की ओर अग्रर्सर होती है, को ऐसे समझा जाए जैसे- $x=0$ पर $f(x)$ का मान होना चाहिए।

व्यापक रूप से जब $x\to a$ (जब x, a के सन्निकट मान को प्राप्त करता है) $f(x)\to \ell$, तब ℓ को फलन $f(x)$ की सीमा कहा जाता है और इसे इस प्रकार लिखा जाता है–

$$\lim_{x\to a} f(x=\ell .$$

एक और फलन $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}, x\neq 3$ पर विचार कीजिए। x के 3 के अत्यधिक निकट मानों (लेकिन 3 नहीं) के लिए $f(x)$ के मान का परिकलन करते हैं–

x	2.9	2.89	2.99	3.01	3.001	3.025	3.0001
$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$	5.9	5.89	5.99	6.01 199	6.001	6.025	6.0001

सारणी से यह स्पष्ट है कि जब x, 3 के निकट मानों को प्राप्त करता है, तब $f(x)$ का मान 6 की ओर अग्रसर होता है, सारणी के अवलोकन से यह पता चलता है कि x कैसे 3 की ओर अग्रसर होता है, फलन की सीमा इस पर आधारित नहीं है। ध्यान दीजिए कि x के संख्या 3 की ओर अग्रसर होने के लिए x या तो बाईं ओर या दाईं ओर से 3 की ओर अग्रसर होगा अर्थात् x के निकट सभी मान या तो 3 से कम हो सकते हैं या 3 से अधिक हो सकते हैं। इससे स्वाभाविक रूप से दो सीमाएँ- बाएँ पक्ष की सीमा और दाएँ पक्ष की सीमा प्रेरित होती हैं। फलन $f(x)$ के दाएँ पक्ष की सीमा $f(x)$ का वह मान है जो $f(x)$ के मान से आदेशित होता है जब x, 3 के दाईं ओर अग्रसर होता है और इसे $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ द्वारा निरूपित किया जाता है। इसी प्रकार बाएँ पक्ष की सीमा $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ द्वारा निरूपित किया जाता है। अत: हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ अस्तित्व में होगा यदि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

यदि $\lim\limits_{x\to -} f(x) \neq \lim\limits_{x\to +} f(x)$, तो $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ अस्तित्वहीन होगा।

इस अध्याय में फलन की सीमा के बारे में अध्ययन करने के बाद सीमा के बीजगणित का अध्ययन करेंगे।

फलन के रूप (Forms of Functions)

फलन f के व्यंजक $f(x)$ में x का विशिष्ट मान रखने पर दो संभावनाएँ हैं- $f(x)$ निर्धार्य (determinate) या अनिर्धार्य (indeterminate) रूप में हो। निर्धार्य रूप से अभिप्राय उस मान से है जो विशिष्ट होता है, जैसे x के बदले में a रखने से यदि $f(x)$ का मान 5 होता है, तो 5 एक विशिष्ट संख्या (specific number) को निरूपित करता है। इसप्रकार x के a मान के लिए $f(x)$ निर्धार्य रूप में है।

अनिधार्य रूप से अभिप्राय उस स्वरूप से है- जिसका मान विशिष्ट या अद्वितीय नहीं हो सकता है। उदाहरण के रूप में, यदि $x=a$ रखने से $f(x)$, $\frac{0}{0}$ रूप में परिवर्तित होता है तो इसका मान अद्वितीय (unique) नहीं हो सकता है।

इसे समझने के लिए मान लिया कि-

$\frac{0}{0} = k$ है, तो

$0 = k \times o$

अब इस समीकरण में k का मान अद्वितीय नहीं है। k का मान कोई भी सीमित वास्तविक संख्या हो सकती है जैसे- $k=0,1,2,3,4,5 \ldots, \frac{3}{4}, \ldots, -5,-7\ldots$ कुछ भी हो सकता है। अतः $\left[\frac{0}{0}\right]$ रूप अनिर्धार्य रूप है।

$\left[\frac{0}{0}\right]$ रूप के अलावे $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \infty-\infty, 0\times\infty, 0^0, \infty^0, \infty$,भी अनिर्धार्य रूप (indeterminate forms) है।

सीमाओं का बीजगणित(Algebra of limits)

सीमा प्रक्रिया योग, व्यवकलन, गुणा और भाग का पालन करती है जबतक कि विचाराधीन फलन और सीमाएँ सुपरिभाषित हैं।

मान लिया कि f और g दो फलन ऐसे हैं कि $\lim_{x\to a} f(x)$ और $\lim_{x\to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व है। तब

(i) दो फलनों के योग की सीमा फलनों की सीमाओं का योग होता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

(ii)दो फलनों के अन्तर की सीमा फलनों की सीमाओं का अन्तर होती है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

(iii)दो फलनों के गुणन की सीमा फलनों की सीमाओं का गुणन होता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

यदि $g(x)$ एक अचर फलन है $g(x)=k, \forall x \in R$ तो

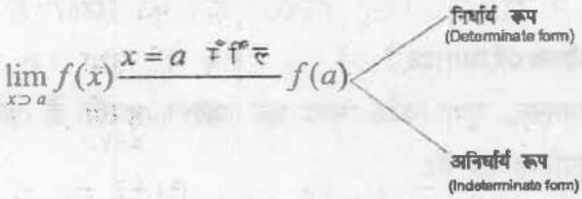
$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a}(kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$$

(iv)दो फलनों के भागफल की सीमा फलनों की सीमाओं का भागफल होता है जबकि हर शून्येतर होता है अर्थात्

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \text{ जहाँ } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

फलन की सीमा निकालने का कार्यकारी नियम (Working Rule for finding limit of a function)

अब हम किसी वास्तविक फलन की सीमा निकालने की विधि पर विचार करते हैं। मान लीजिए कि हमें $\lim_{x\to a} f(x)$ ज्ञात करना है। इसके लिए हम x के स्थान पर a रखते हैं तो दो स्थितियाँ होंगी, या तो $f(a)$ निर्धार्य रूप (determinate form) या अनिर्धार्य रूप (indeterminate form)में होगा।



यदि $f(a)$ निर्धाय रूप में है, तो $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ के बराबर होगा अर्थात

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

उदाहरण स्वरूप

(i) $\lim_{x\to 1}[x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim_{x\to 1}[1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2014}]$

$= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 2015$

(iii) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{9-4}{3-2} = 5$

(iv) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2+100} = \frac{1^3+1}{1^2+100} = \frac{2}{101}$

(v) $\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x+2} = \frac{2(2-2)}{2+2} = 0$

यदि $f(a)$ अनिर्धार्य रूप (indeterminate form) में है, तो $f(a)$, $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0\times\infty], [\infty-\infty], [\infty^0], [0^0], [1^\infty]$ आदि अनिर्धार्य रूप में किसी एक रूप में

होगा। इन रूपों में फलन की सीमा निकालने के लिए हमें अलग-अलग विधियों के द्वारा अनिधार्य रूप का रूपान्तरण निर्धार्य रूप में कर, फलन की सीमा ज्ञात करेंगे। इसे एक दैनिक जीवन की परिस्थिति से जोड़ने की कोशिश करते हैं।

मान लीजिए कि आप चिकित्सक के पास स्वास्थ्य-जाँच के लिए जाते हैं, तो दो स्थितियाँ होंगी- या तो आप स्वस्थ होंगे या अस्वस्थ। यदि आप स्वस्थ हैं, तो चिकित्सक आपको कोई दवा सलाह के रूप में नहीं देंगे, परन्तु अस्वस्थ होने की स्थिति में आपकी अस्वस्थ्यता की जाँच के अनुसार चिकित्सक दवा लेने की सलाह देंगे तथा दवा तब तक लेने के लिए कहेंगे जबतक आप स्वस्थ न हो जाएँ। ठीक इसी तरह $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ज्ञात करने के लिए $x = a$ रखकर $f(a)$ निकालते हैं। यदि $f(a)$ निर्धार्य रूप में है, तो $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ होगा।

यदि $f(a)$ अनिर्धार्य स्वरूप में है तो यह $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty], [0 \times \infty], [0^0], [\infty^0], [1^\infty]$ रूप में से किसी एक रूप में होगा जिसके लिए हम निम्नलिखित विधि का प्रयोग कर अनिर्धार्य रूप को निर्धार्य रूप में परिवर्तित कर सीमा ज्ञात करते हैं-

(i) $\left[\frac{0}{0}\right]$ रूप-

मान लीजिए कि $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, जहाँ $p(x)$ और $q(x), x$ में बहुपद हैं तथा $p(a) = 0$, $q(a) = 0$ है।

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$, x की जगह पर a रखने से $f(a), \left[\frac{0}{0}\right]$ रूप में है।

यहाँ हम देखते हैं कि $p(a) = 0, q(a) = 0$, अर्थात् गुणनखण्ड प्रमेय से हम कह सकते हैं कि $x - a, p(x)$ और $q(x)$ बहुपदों का एक गुणनखण्ड है। x की जगह पर a रखने से गुणनखण्ड $(x - a)$ की उपस्थिति के कारण ही बहुपद $p(x)$ और $q(x)$ शून्य हो जाता है। यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि $x \to a$ में x, a के मान की ओर अग्रसर होता है न कि a के बराबर है। फलस्वरूप $(x - a)$ शून्य की ओर अग्रसर होगा, न कि शून्य के बराबर है। अत: अंश और हर में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड रहने के कारण $(x - a)$ को अंश और हर से निरस्त किया जा सकता है। इस प्रक्रिया को तबतक जारी रखा जाता है-जबतक कि सभी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड निरस्त न हो जायँ-

जैसे-(i) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ($x=2$ रखने पर $\dfrac{0}{0}$ का रूप पाते हैं)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

अतः $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

(ii) $\lim_{x\,\text{™}\,5}\dfrac{x^3-3x^2}{x^2-5x+6}$

$$=\lim_{x\,\text{™}\,5}\frac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\,\text{™}\,5}\frac{x^2}{x-2}=\frac{3^2}{3-2}=9$$

(iii) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2-4}$

$x=2$ पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम इसे $\dfrac{0}{0}$ के रूप में पाते हैं।

अतः $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2-4}==\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-6x+5x-10}{(x-2)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim\frac{(3x+5)}{(x+2)}=\frac{3\times 2+5}{2+2}=\frac{11}{4}$$

(iv) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

$x=a$ पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम इसे $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ का रूप में पाते हैं।

$x^n - a^n$ को $x-a$ से भाग देने पर हम पाते हैं कि-

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \ldots\ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \ldots\ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x \to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \ldots\ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a.a^{n-2} + a^{n-3}.a^2 + a^{n-4}.a^3 + \ldots\ldots + a.a^{n-2} + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-a} + a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots\ldots + a^{n-1} (n \text{ पद})$$

$$= na^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$$

उदाहरण स्वरूप $\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x-a} = 4a^{4-1} = 4a^3$

तथा $$\lim_{x \to 1} \frac{x^{25}-1}{x^{15}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x^{25}-1^{25}}{x-1}}{\frac{x^{15}-1^{15}}{x-1}}$$

$$= \frac{25(1)^{25-1}}{15(1)^{15-1}} = \frac{5}{3}.$$

टिप्पणी:- उपर्युक्त सूत्र n जब परिमेय संख्या है और a धनात्मक के लिए सत्य है। इसकी सत्यता की जाँच आप अगली कक्षा में करेंगे।

अर्थात् $$\lim_{x \to 64} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 4}{x-64} = \lim_{x \to 64} \frac{x^{\frac{1}{3}} - (64)^{\frac{1}{3}}}{x-64}$$

$$= \frac{1}{3}(64)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \times (64)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{48}.$$

(v) $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^{\frac{1}{5}} - 1}{z^{\frac{1}{8}} - 1}$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{\dfrac{z^{\frac{1}{5}} - 1^{\frac{1}{5}}}{z - 1}}{\dfrac{z^{\frac{1}{8}} - 1^{\frac{1}{8}}}{z - 1}}$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{\left(\dfrac{z^{\frac{1}{5}} - 1^{\frac{1}{5}}}{z - 1}\right)}{\left(\dfrac{z^{\frac{1}{8}} - 1^{\frac{1}{8}}}{z - 1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}(1)^{\frac{1}{5}-1}}{\frac{1}{8}(1)^{\frac{1}{8}-1}} = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$$

$x = a$ पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ रूप पाते हैं, तो ऐसी स्थिति में $p(x)$ तथा $q(x)$ में उपस्थित अधिकतम x के घात वाले पद से अंश तथा हर को भाग देने के पश्चात् फलन की सीमा ज्ञात करते हैं।

जैसे

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 2x - 7}, \dfrac{\infty}{\infty}$ रूप में है।

अत: अंश तथा हर को x^2 (अंश या हर के बहुपद में x^2 अधिकतम घात वाला पद है) से भाग देने पर

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 2x - 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{3x^2 - 4x + 5}{x^2}}{\dfrac{4x^2 + 2x - 7}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} - \frac{7}{x^2}} = \frac{3}{4}$$

इस प्रकार की सीमा की व्यापक समझ के लिए हम निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं-

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^p + bx^{p-1} + cx^{p-5} + d}{a_1x^q + b_1x^{q-3} + c_1x^{q-7} + d_1} \quad \text{जहाँ } p > 0, q > 0.$$

उपर्युक्त फलन के अंश तथा हर में क्रमश x^p, x^q से भाग देने पर हम पाते हैं कि

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^p + bx^{p-1} + cx^{p-5} + d}{a_1x^q + b_1x^{q-3} + c_1x^{q-7} + d_1} = \lim_{x \to a} \frac{x^p\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^5} + \frac{d}{x^p}\right)}{x^q\left(a_1 + \frac{b_1}{x^3} + \frac{c_1}{x^7} + \frac{d_1}{x^q}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} x^{p-q} \left[\frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^5} + \frac{d}{x^p}}{a_1 + \frac{b_1}{x^3} + \frac{c_1}{x^7} + \frac{d_1}{x^q}}\right]$$

$$= \begin{cases} \times \to \propto, \text{(ल्टयँ ॐ 2f ऱ्)} & p > q \\ \frac{a}{a_1}, \text{ जब } & p = q \\ 0, \text{ जब} & p < q. \end{cases}$$

$[\propto - \propto]$ और $[0 \times \propto]$ रूप को सरल करने (*simplify*) पर यह रूप $\frac{0}{0}$ या $\frac{\propto}{\propto}$ रूप में परिवर्तित हो जायगा, जैसे-

(i) $\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2-7}\right)$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2-7}\right)\left(\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n^2-7}\right)}{\left(\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n^2-7}\right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(n^2+5\right) - \left(n^2-7\right)}{\left(\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n^2-7}\right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{12}{\left(\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n^2-7}\right)} = 0$$

(ii) $\lim\limits_{n \supset \surd}\left(\sqrt{n^2+8n}-\sqrt{n^2-7n}\right)$

$$= \lim_{n \supset \surd} \frac{\left(\sqrt{n^2+8n}-\sqrt{n^2-7n}\right)\left(\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-7n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-7n}\right)}$$

$$= \lim_{n \supset \surd} \frac{\left(n^2+8n\right)-\left(n^2-7n\right)}{\left(\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-7n}\right)}$$

$$= \lim_{n \supset \surd} \left(\frac{8n+7n}{\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-7n}}\right)$$

$$= \lim_{n \supset \surd} \frac{15}{\left(\sqrt{1+\frac{8}{n}}+\sqrt{1-\frac{7}{n}}\right)}$$ (अंश तथा हर में n से भाग देने पर)

$$= \frac{15}{1+1} = \frac{15}{2} = 7.5$$

(iii) $1^{\propto}, 0^{0}, \propto^{0}$ के रूप में लघुगणक लेकर सीमा का मान निकाला जाता है।

त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएँ
(Limits of Trigonometric Functions)

व्यापक रूप से फलनों के बारे में निम्नलिखित तथ्य कुछ त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का परिकलन करने में सुलभ हो जाते हैं।

मान लीजिए f, g और h वास्तविक मानवाले फलन ऐसे हैं कि परिभाषा के सर्वनिष्ठ प्रांतों के सभी x के लिए

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

किसी वास्तविक संख्या a के लिए यदि $\lim_{x\to a} f(x) = l, \lim_{x\to a} h(x) = l,$ तो

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x) \le \lim_{x\to a} h(x)$$

$$\Rightarrow l \le \lim_{x\to a} g(x) \le l$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = l$$

उपर्युक्त तथ्य को ध्यान में रखकर त्रिकोणमितीय फलनों से संबंधित निम्नलिखित सीमायें-

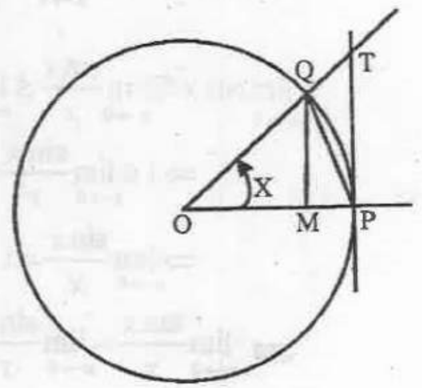
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x \cot x = 1.$$

स्थापित करते हैं।

मान लिया कि इकाई वृत्त का केन्द्र O है तथा $\angle POQ = x$ रेडियन है जहाँ $0 \angle x \angle \frac{\pi}{2}$ वृत्त के बिन्दु P पर PT एक स्पर्श रेखा है जो OQ. रेखा से T पर मिलती है। $P-Q$ को मिलाया। यहाँ हम देखते हैं कि-



ΔPOQ का क्षेत्रफल < वृत्तखण्ड POQ का क्षेत्रफल $< \Delta POQ$ का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}OP\cdot QM < \frac{x}{2p}p(OP)^2 < \frac{1}{2}OP\cdot PT$$

$$QM < x(OP) < PT$$

$$\frac{QM}{OQ} < x < \frac{PT}{OP.}$$

$$\sin x < x < \tan x$$

ΔOQM में $\sin x = \frac{QM}{OQ} \Rightarrow OM = \sin x$

ΔOPT में $\tan x = \frac{PT}{OP} \Rightarrow PT = \tan x$

$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$

चूँकि $o < x < \frac{\pi}{2}, \sin x$ धनात्मक है और इस प्रकार $\sin x$ से सभी को भाग देने पर, हम पाते हैं-

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

सभी का व्युत्क्रम करने पर, हम पाते हैं-

$$\cos x \angle \frac{\sin x}{x} \angle 1$$

$\Rightarrow$ अर्थात् फलन $\frac{\sin x}{x}$ फलन $\cos x$ और अचर फलन जिसका मान 1 हो जाता है, के बीच में स्थित है।

हम देखते हैं कि $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, अतः

$$\lim_{x\to 0}\cos x \otimes \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1$$

$$\Rightarrow 1 \le \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

अब $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x} = 1\times\frac{1}{1} = 1$

तथा $\lim_{x\to 0} x\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

या, $\lim_{x\to 0} x\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

इस प्रकार निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण सीमाएँ स्थापित हुई जिनका उपयोग त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का परिकलन करने में सुलभ होगा -

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\sec x = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x\operatorname{cosec} x = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x\cot x = 1$$

यह ध्यान देने योग्य है कि यहाँ x रेडियन में है। यदि $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^{\circ}}{x}$ ज्ञात करना हो तो x° को रेडियन में बदलकर ही सीमा ज्ञात की जा सकती है अर्थात्

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^{\circ}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}\right)\times\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

यहाँ हमने $x\to 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{180}\to 0$

तुल्य तथ्य का प्रयोग किया है।

उदाहरण 1. $\lim_{x\to 1}\frac{px^2+qx+r}{qx^2+rx+p}, p+q+r\neq 0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:- यहाँ $\lim_{x\to 1}\frac{px^2+qx+r}{qx^2+rx+p} = \frac{p+q+r}{q+r+p} = 1$

क्योंकि $p+q+r\neq 0$

उदाहरण 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}, b\neq 0$ का मान ज्ञात करें।

हल:- हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\cdot ax}{bx}$$

$$=\frac{1\times a}{b}=\frac{a}{b}$$

उदाहरण 3. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}$ का मान ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि $1+x=y$,

तो जब $x\to 0\Rightarrow y\to 1$ तथा $x=y-1$

अब $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^7-1^7}{y-1}=7(1)^{7-1}=7$

हम $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}$ का हल इस प्रकार भी कर सकते हैं।

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1^7}{x+1-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1^7}{x+1-1}=\lim\frac{y^7-1^7}{y-1},$$ जहाँ $y=x+1$

$$=7.(1)^{7-1}=7.$$

उदाहरण 4. सीमा $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}$ का परिकलन करें।

हल:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} 4\cos^2 \frac{x}{2} = 4 \times 1 = 4$$

उदाहरण 5. $\lim_{x \to 0}(\operatorname{cosec} x - \cot x)$ का मान ज्ञात कीजिए-

हलः यहाँ, हम देखते हैं कि -

$$\lim_{x \to 0}(\operatorname{cosec} x - \cot x) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \tan 0 = 0$$

उदाहरण 6. सीमा $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हलः- हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 . \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\tan x) . 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 . \left(\frac{\tan x}{x}\right) . x . \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 . \frac{x^2}{4}}{x^3 . \cos x}$$

$$= 2 \times 1 \times 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 7. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$ का मान निकालें-

हलः- मान लिया कि $x-\frac{\pi}{2}=y$

तो $2x=2\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=\pi+2y$

तथा $x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow y\to 0$

उपर्युक्त मान्यता के आधार पर $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\tan(\pi+2y)}{y}$

$$=\lim\frac{\tan 2y}{2y}.2=1\times 2=2$$

उदाहरण 8. यदि $a_r=\lim_{x\to 0}\frac{\tan r\cdot x}{x}$, तो

$a_1+a_2+a_3+a_4+.....+a_{100}$ का मान ज्ञात करें।

हलः- यहाँ $a_r=\lim_{x\to 0}\frac{\tan r\cdot x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan r\cdot x}{r\cdot x}\right)r=1\times r=r$

इस प्रकार

$$a_1+a_2+a_3+a_4+......+a_{100}=1+2+3+4+......+100$$

$$=\frac{100\times 101}{2}=50\times 101$$

$$=5050$$

उदाहरण 9. $\lim_{x\to 0}g(x)$ और $\lim_{x\to 1}g(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ-

$$g(x)=\begin{Bmatrix}2x+3; x\le 0\\ 3(x+1); x>0\end{Bmatrix}$$

हलः- यहाँ हम देखते हैं कि दिया गया फलन 0 (शून्य)के पड़ोस (*neighbourhood*) में बायीं और दाहिनी ओर अलग-अलग परिभाषित है। इसलिए यहाँ पर हमें- $\lim_{x\to 0^-}g(x)$ तथा $\lim_{x\to 0^+}g(x)$ निकालना पड़ेगा।

$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}g(x)=2x+3$ (शून्य तथा शून्य की बायीं ओर $g(x)=2x+3$)

$=2\times0+3=3$

तथा $\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^+} 3(x+1)$ (शून्य के दायीं ओर $g(x)=3(x+1)$)

$=3(0+1)=3$

यहाँ हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=3=\lim_{x\to0^+} g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} g(x)=3$$

पुनः $\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1} 3(x+1)$ ($\because x=1$ का पड़ोस शून्य के दायीं ओर ही है।)

$=3(1+1)=6$

उदाहरण 10. $\lim_{x\to0} g(x)$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$g(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}; x\neq0\\ 0; x=0\end{cases}$$

हल: यहाँ $g(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}; x\neq0\\ 0; x=0\end{cases}$

$$\begin{cases}\frac{x}{x}, x>0\\ -\frac{x}{x}, x<0\\ 0, x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x<0\\ 0, x=0\end{cases}$$

हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{h\to 0} g(o-h) = \lim_{h\to 0} g(-h)$$

$$= \lim_{h\to 0}(-1) = -1$$

तथा $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{h\to 0} g(o+h) = \lim_{h\to 0} g(h)$$

$$= \lim_{h\to 0}(1) = 1$$

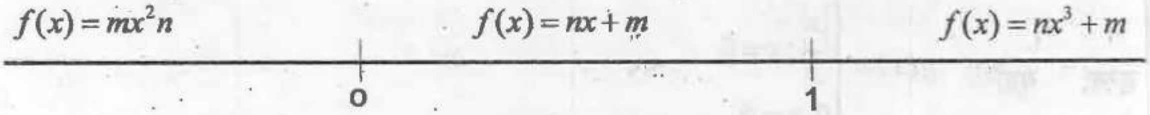
इस प्रकार $\lim_{x\to 0^-} g(x) \quad \lim_{x\to 0^+} g(h)$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} g(x)$$ अस्तित्वहीन है।

उदाहरण 11. पूर्णांक m और n को ज्ञात करें जब $\lim_{h\to 0} f(x)$ और $\lim_{x\to 1} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है,

यदि $$f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, x < 0 \\ nx + m, 0 \le x \le 1 \\ nx^3 + m, x > 1 \end{cases}$$

हल: संख्या रेखा पर $f(x)$ के मान को दर्शाने पर हम देखते हैं कि



x का मान शून्य से कम है तो $f(x) = mx^2 + n$

x का मान शून्य या शून्य से बड़ा और 1 या 1 से कम है, तो $f(x) = nx + m$

और x का मान 1 से बड़ा होने की स्थिति में $f(x) = nx^3 + m$.

इस प्रकार $\lim_{x\to o^-} f(x) = \lim_{h\to o} f(o-h) = \lim_{h\to o} m(-h)^2 + n = n.$

$$\lim_{x\to o^+} f(x) = \lim_{h\to o} f(o+h) = \lim_{h\to o}(nh + m) = m$$

चूँकि $\lim f(x)$ अस्तित्व में है, अत:

$$\lim_{x\to o^-} f(x) = \lim_{x\to o^+} f(x)$$

$$\Rightarrow n = m$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to o} f(1-h) = \lim_{h \to o} n(1-h) + m = n + m$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to o} f(1+h) = \lim_{h \to o} n(1+h)^3 + m = n + m$$

अतः $\lim_{x \to o} f(x)$ के अस्तित्व हेतु $m = n$ अनिवार्य रूप से होना चाहिए; m तथा n के किसी पूर्णांक मान के लिए $\lim_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व है।

प्रश्नावली–5

प्रश्न 1 से 25 तक निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए:

1. $\lim_{x \to 1} (2014x - 2013)$

2. $\lim_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7}\right)$

3. $\lim_{x \to \frac{22}{7}} (x - \pi)$

4. $\lim_{x \to 1} \pi r^2$

5. $\lim_{x \to 5} \frac{5x-5}{5-x^2}$

6. $\lim_{x \to -1} \frac{x^{20} + x^{15} + 1}{x-1}$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{ax+b}{cx-d}, d \neq 0$

8. $\lim_{z \to 1} \frac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

9. $\lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x+2}$

10. $\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$

11. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin px + qx}{px + \sin qx}, p, q, p+q \neq 0$

12. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

13. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$

14. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$

15. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

16. $\lim_{x \to 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1}$

17. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$. 18. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}$

19. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}\right]$ 20. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos bx}{x^2}$

21. $\lim_{x\to 0} x\left(\frac{\sin px-\sin qx}{\cos px-\cos qx}\right), p\neq q$ 22. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin px-\sin qx}{x(\cos px+\cos qx)}$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x-\tan 3x}{x\cos 4x}$ 24. $\lim_{x\to -5}|x|-5$

25. $\lim_{x\to -5}|x-5|$ 26. $\lim_{x\to 1} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\leq 1\\ -x^2-1, x>1\end{cases}$$

27. मान लीजिए $a_1, a_2, a_3....a_n$ अचर वास्तविक संख्याएँ हैं और एक फलन $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3).....(x-a_n)$ से परिभाषित है। $\lim_{x\to a_1} f(x)$ क्या है?

किसी $a\neq a_1, a_2, a_3....a_n$ के लिए $\lim_{x\to a} f(x)$ का परिकलन कीजिए।

28. मान लीजिए कि $f(x)=\frac{25^x}{25^x+5}$, तो सिद्ध करें कि $f(p)+f(1-p)=1$.

$\lim_{x\to \frac{1}{2015}} f(x) + \lim_{x\to \frac{2014}{2015}} f(x)$ परिकलन कीजिए।

29. मान लीजिए कि $g(x)=\begin{cases}p+qx; x<1\\ 5, x=1\\ q-px, x>1\end{cases}$

और यदि $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)$ तो p और q के संभव मान क्या हैं?

30. $\lim_{x\to -2}\sqrt{x^2+12}$ का मान ज्ञात करें।

2.4 अवकलज (Derivatives):

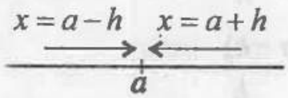
प्रस्तावना:

आप फलन की सीमा के अस्तित्व के संबन्ध में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। अब फलन के प्रांत में बिन्दुओं के परिवर्तन से फलन के मान में होनेवाले परिवर्तन का अध्ययन करेंगे। यहाँ हम जानना चाहते हैं कि एक प्राचाल (Parameter) में दूसरे किसी प्राचल के सापेक्ष परिवर्तन किस प्रकार होता है।

परिभाषा: मान लिया कि f एक वास्तविक मानीय फलन है और इसी परिभाषा के प्रांत (Domain) में एक बिन्दु a है। a पर f का अवकलज

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ से परिभाषित किया जाता है बशर्ते कि इसकी सीमा का अस्तित्व हो। फलन की सीमा के अस्तित्व से हम जानते हैं कि सीमा के दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ होती हैं।

$$\text{अत:}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$



a पर $f(x)$ का अवकलज $f'(a)=\left(\frac{df(x)}{dx}\right)x=a$ से निरूपित होती है जो a पर x के सापेक्ष परिवर्तन का परिमाण बताता है।

इस प्रकार

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$ को बायाँ पक्ष अवकलज (Left hand derivative)

तथा $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ दायाँ पक्ष अवकलज (Right hand derivative) कहा

जाता है जिसे क्रमशः $Lf'(a)$ तथा $Rf'(a)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

अतः $f'(a) = Lf'(a) = Rf'(a)$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

आइए, $x = 3$ पर $f(x) = 4x^2$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

हम देखते हैं कि

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(3+h)^2 - 4 \times 3^2}{h.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4[9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} 4(6+h) = 24$$

अतः $x = 3$ पर दत्त फलन $4x^2$ का अवकलज 24 है।

उदाहरण 1: फलन $f(x) = xinx$ का अवकलज $x = Q$ पर ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं कि

$$f'(Q) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right)\sin\left(\frac{a+h-a}{2}\right)}{h}$$

[त्रिकोणमिति में रूपान्तरण सूत्र (Transformation formula) से हम जानते हैं कि $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$]

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{h \to 0} 2\cos(a + \frac{h}{2}) \cdot \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2\cos a \cdot 1 \times \frac{1}{2} = \cos a.$$

$$\Rightarrow f'(a) = \cos a$$

अतः $x = a$ पर फलन $\sin x$ का अवकलज $\cos a$ है।

उदाहरण 2: $f(x) = \frac{1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{h\,x(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

उदाहरण 3: $f(x) = \cot x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम देखते हैं

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)\sin x - \sin(x+h)\cos x}{h\sin x\sin(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin(x+h-x)}{h\sin x\,\sin(x+h)} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)\frac{1}{\sin x\,\sin(x+h)}$$

$$= -1\times\frac{1}{\sin x\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 x$$

उदाहरण 4: $f(x) = \cos^2 x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल: हम पाते हैं कि

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1+\cos 2(x+h)}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x-2x-2h}{2}}{2h}$$

[त्रिकोणमिति के रूपान्तरण सूत्र हम जानते हैं कि

$$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(2x+h)\sin(-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin(2x+h)(-\frac{\sin h}{h})$$

$$= -\sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cos^2 x) = -\sin 2x = -2\sin x \cos x.$$

उदाहरण 5: $f(x) = \sec x$ **का अवकलज ज्ञात कीजिए।**

हल: हम देखते हैं कि

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h\cos x \cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{x+x+h}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h\cos x cox(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\sin(x+\frac{h}{2}) \cdot \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}\cdot 2}\right) \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x+h)}$$

$$= 2\cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x)}$$

$$= \tan x \sec x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

फलनों के अवकलज का बीजगणित

(Algebra of derivative of functions)

हम फलन की सीमा को जानते हैं तथा अवकलज की परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है। हम अवकलज के नियमों में सीमा के नियमों की निकटता महसूस करते हुए निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण प्रमेयों को स्थापित करने की कोशिश करते हैं–

प्रमेय 1: मानलिया कि f और g दो दिए गए फलन हैं जिनके उभयनिष्ठ प्रांत (Domain) में उनके अवकलन (Differentiation) परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx(g(x))}$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx\left(f(x)+g(x)\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)+g(x+h)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)+g'(x)$$

(ii) दो फलनों के अन्तर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अन्तर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) \;=\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x))$$

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)+g(x+h)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x)) - \frac{d}{dx}(g(x))$$
$$= f'(x) - g'(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज उनमें से एक के अवकलज तथा दूसरे फलन का गुणनफल और दूसरे का अवकलज और पहले फलनज के गुणनफल का योगफल होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x))\cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}(g(x))$$

यहाँ हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h) - f(x)\right)}{h}g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{\left(g(x+h) - g(x)\right)}{h}$$
$$= \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x) = f'(x)g(x) + f(x).g'(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्न नियम द्वारा किया जाता है जहाँ हर शून्येतर है।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}((f(x))\cdot g(x) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{\left(g(x)\right)^2}$$

आइए, इसे हम देखते हैं

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x)g(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h) - f(x)\right)g(x) - f(x)\left(g(x+h) - g(x)\right)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)}$$
$$= \frac{\lim_{h\to 0}\left(f(x+h) - f(x)\right)g(x) - gf(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)}{\lim_{h\to 0} g(x)\cdot g(x+h)}$$
$$= \frac{\frac{d}{dx}(f(x))g(x) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{\left(g(x)\right)^2}$$

(v) अचल फलन का अवकलज शून्य के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

मानलिया कि $f(x) = c$ एक अचल फलन है, तो

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}(\frac{0}{h})$$

$$= \lim_{h\to 0}(0) = 0$$

आइए, हम कछ मानक फलनों के अवकलजों को निकालें, फलन f TxU= x का अवकलज ज्ञात करते हैं।

परिभाषा से

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0}(1) = 1$$

इस अवधारणा का प्रयोग कर हम $f(x) = x^n$ का अवकलज ज्ञात करते हैं। हम देखते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}(x\cdot x^{n-1}) = \frac{d}{dx}(x)\cdot x^{n-1} + x\cdot\frac{d}{dx}(x^{n-1}),$$

$$= 1\cdot x^{n-1} + x\cdot(n-1)x^{n-2}$$, आगमन परिकल्पना से

अतः $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

(ii) अब $f(x) = e^x$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x(\frac{e^h-1}{h})$$

$$= e^x \lim_{h\to 0}\frac{1+\frac{h}{1}+\frac{h^2}{1\cdot 2}+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+.......-1}{h}$$

(फलन को विस्तार में अनन्त श्रेणी के रूप में

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots.n} + \ldots\ldots$$

अभिव्यक्त किया जाता है जिसे हम अगली कक्षा में जान सकेंगे।)

$$= e^x \lim_{h\to 0}(1 + \frac{h}{1\cdot 2} + \frac{h^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots.) = e^x - 1 = e^x.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

(iii) $f(x) = \log_e x$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{h^4}{x^4} + \ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{h^3}{x^4} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

नोट: फलन $\log(1+x)$ श्रेणी विस्तार के रूप में

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots\ldots$$

लिखा जाता है, जिसके बारे में अगामी कक्षा में हम जान सकेंगे।

आइए, अब कुछ मानक फलनों के बवकलज को सारणी मे लिखते हैं जिसके उपयोग से विभिन्न फलनों के अवकलज ज्ञात किया जा सकता है।

	मानक फलन	अवकलज
(i)	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$

$\tan x$	$sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$

मानक फलन		अवकलज
(ii)	e^x	e^x
(iii)	$\log_e x$	$\frac{1}{x}$
(iv)	x^n	nx^{n-1}
(v)	अचलफलन	0

उपर्युक्त मानक फलनों के अवकलज को ध्यान में रखकर फलनों के अवकलज का बीजगणितीय सूत्रों द्वारा विभिन्न फलनों का अवकलज हम निकाल सकते हैं।

उदाहरण 1: $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ अवकलज ज्ञात करें।

हल: हम देखते हैं कि

फलन $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ दो फलनों $\cos x$ और $1+\sin x$ के भाग के रूप में व्यक्त किया है। अत: फलनों के अवकलज नियम के अनुसार

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(\cos)\cdot(1+\sin x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x\cdot(0+\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= -\left(\frac{1}{1+\sin x}\right)$$

उदाहरण 2: फलन $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \frac{x^{98}}{98} + \ldots\ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योगफल होता है। अतः

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\frac{x^{98}}{98}......\frac{x^2}{2}+x+1\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}\right)+\frac{d}{dx}\frac{\left(x^{99}\right)}{99}+\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{98}}{98}\right)+.....+\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{d}{dx}(x)$$

$$=\frac{100x^{99}}{100}+\frac{99x^{98}}{99}+\frac{98^{97}}{98}+....+\frac{2x}{2}+1$$

$$=1+x+x^2+x^3+....+x^{98}+x^{99},$$

$$=\frac{x^{100}-1}{x-1}$$

उदाहरण 3: फलन $f(x)=\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$ का अवकलज इसके परिभाषित क्षेत्र में ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन भागफल के रूप में व्यक्त किया गया है। अतः अवकलज के भागफल नियम के प्रयोग करने पर,

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(px+q)\cdot(ax^2+bx+c)-(px+q)\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)}{(ax^2bx+c)^2}$$

$$=\frac{\left(p\frac{dx}{dx}+\frac{d}{dx}(q)\right)\cdot(ax^2bx+c)-(px+q)\left(\frac{dax^2}{dx}+\frac{dbx}{dx}+\frac{dc}{dx}\right)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{(p+o)(ax^2+bx+c)-(px+q)(2ax+b+o)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{(apx^2+bpx+cp)-(2apx^2+bpx+2aqx+bq)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{-apx^2-2aqx+cp-bq}{(ax^2+bx+c)^2}$$

उदाहरण 4: फलन $f(x)=\dfrac{\sin(x+\propto)}{\cos x}$, जहाँ कहीं भी परिभाषित है, अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि

$$\text{फलन } f(x) = \frac{\sin(x+\propto)}{\cos x} = \frac{\sin x \cos \propto + \cos x \sin \propto}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x \cos \propto}{\cos x} + \frac{\cos x \sin \propto}{\cos x}$$

$$= \tan x \cos \propto + \sin \propto$$

हम फलन $f(x) = \tan x \cos \propto + \sin \propto$ पर योग प्रमेय का प्रयोग करने पर पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\tan x \cos \propto + \sin \propto)$$

$$= \frac{d}{dx}(\tan x \cos \propto) + \frac{d}{dx}(\sin \propto)$$

$$= \frac{d}{dx}(\tan x) \cdot \cos \propto + \tan x \cdot \frac{d}{dx}(\cos \propto) + \frac{d}{dx}(\sin \propto)$$

$$= \sec^2 x \cos \propto + \tan x \cdot o + o$$

$$= (\sec^2 x)(\cos \propto)$$

उदाहरण 5: फलन $f(x) = (x + \sec x)(x - \tan x)$ का अवकलज, फलन के गुणनफल प्रमेय का प्रयोग करने पर

हल: अवकलज के गुणनफल प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\{(x + \sec x) \cdot (x - \tan x)\}$$

$$= \frac{d}{dx}(x + \sec x) \cdot (x - \tan x) + (x + \sec x)\frac{d}{dx}(x - \tan x)$$

$$= \left(\frac{dx}{dx} + \frac{d\sec s}{dx}\right)(x - \tan s) + (x + \sec x)\left(\frac{dx}{dx} - \frac{d\tan x}{dx}\right)$$

$$= (1 + \sec x \tan x)(x - \tan x) + (x + \sec x)(1 - \sec^2 x)$$

प्रश्नावली-6

निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाय कि a,b,c,d,p,q,r निश्चित शून्योतर अचर है और m तथा n पूर्णांक हैं।)

1. $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ 2. $\dfrac{1}{px^2+qx+r}$ 3. $\dfrac{px+q}{ax+b}$

4. $\dfrac{\cos(x+d)}{\sin x}$ 5. $\sin(x+\propto)\sin(x-\propto)$ 6. $\tan x\cos x$

7. $\dfrac{\cos x}{xin^2 x}$ 8. $\dfrac{a}{x^4}-\dfrac{b}{x^2}+\tan x$ 9. $(ax+b)^m(cx+d)^n$

10. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ 11. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$ 12. $5\sqrt{x}-7$

13. $\cos(x-\frac{\pi}{8})$ 14. $\dfrac{x}{\sin x}$ 15. $\dfrac{4x+5\cos x}{3x+7\sin x}$

16. $(x+\cos x)(x-\tan x)$ 17. $\dfrac{x^5-\cos x}{\sin x}$ 18. $\dfrac{x+\cos x}{\tan x}$

19. $3\cot x+5\cos ecx$ 20. $2\tan s-7\sec x$ 21. $2x-\dfrac{3}{5}$

22. $(5x^3+3x-1)(x^2-1)$ 23. $(ax^2+b)^2$ 24. $(x-p)(x-q)$

25. $\dfrac{x-p}{x-q}$ 26. $5\sec x+4\cos x$ 27. $x^{-4}(5x-3)$

28. $\sin^2 x$ 29. $\cos^2 x$ 30. $\tan^2 x$

31. $\sin(x+a)\cos(x+b)$ 32. $\cos(x+p)\cos(x+q)$ 33. $\dfrac{\tan(x+a)}{\tan(x+b)}$

34. $\sin^n x$ 35. $\dfrac{x}{\sin^n x}$ 36. $x^m cox^n x$

37. $e^x\cdot\log_e x$ 38. $e^x\cos x$ 39. $e^{-x}\sin x$

40. $e^{ax}\sin bx$ 41. $\dfrac{x}{\log_e x}$ 42. $\dfrac{loo_e x}{e^x}$

43. $x^n\dfrac{1}{x^n}$ 44. $\dfrac{x+\sin x}{\cot x}$ 45. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x^2}{3x-1}$

2.5 समाकलन (Integrals)

[भू]मिका (Introduction):

हम किसी वास्तविक फलन के अवकलज के संबंध में जान चुके हैं, जैसे एक [व]ास्तविक फलन f जो $f(x)=x^3$ से परिभाषित है, तो इसका अवकलज (*derivative*) $f'(x)=3x^2$ होता है। इसी प्रकार $f(x)=\sin x$ है, तो $f'(x)=\cos x$ होता है।

अब प्रश्न उठता है कि जब $f'(x)=3x^2$ या $f'(x)=\cos x$ है, तो क्या हम $f(x)$ के लिए $f'(x)$, x के सापेक्ष अवकलज कहलाता है तो $f(x)$, $f'(x)$ के लिए [क्]या होगा?

क्या हम $f'(x)=3x^2$ से $f(x)=x^3$. ज्ञात कर सकते हैं? $f'(x)=\cos x$ से $f(x)=\sin x$ प्राप्त कर सकते हैं?

हाँ, तो वैसी प्रक्रिया जिससे यदि एक फलन f किसी अंतराल में अवकलनीय [अ]र्थात् $f'(x)$ उस अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर अस्तित्व में है, तो फलन $f(x)$, फलन $f'(x)$ का प्रति अवकलज (*Anti derivative*) कहलाता है। जहाँ $f'(x)$, $f(x)$ का [अ]वकलज (*derivative*) है।

वह विधि जिससे किसी फलन का प्रतिअवकलज ज्ञात किया जाता है, उसे हम समाकलन (Integration) कहते हैं।

इस अध्याय में हम समाकलन की संक्षिप्त जानकारी प्राप्त करेंगे। विस्तृत जानकारी [ह]म अगली कक्षा में लेंगे। समाकलन का उपयोग निश्चित फलन के आलेख से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने में किया जाता है।

समाकलन या प्रति-अवकलन ज्ञात करने की विधि:

ऊपर हम देख चुके हैं कि किसी फलन का अवकलज ज्ञात रहने पर उस फलन को ज्ञात करने की विधि (Process) समाकलन या प्रति-अवकलन कहलाता है।

हम जानते हैं कि फलन $\sin x$ का अवकलज $\cos x$ है, तो $\cos x$ का समाकलन या प्रति-अवकलज $\sin x$ है।

इसी प्रकार,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right)=x^3$$

$$\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

में हम कह सकते हैं कि फलनों $\frac{x^4}{4}, log_e x, \tan x$ और e^x का अवकलज क्रमशः x^3, $\frac{1}{x}$, $\sec^2 x$ और e^x का समाकलज (प्रति-अवकलज) क्रमशः $\frac{x^4}{4}, \log_e x, \tan x$ और e^x है।

अतः अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम को समाकलन कहते हैं (Integration is the inverse process of differentiation)।

हम जानते हैं कि किसी भी वास्तविक संख्या c, जिसे अचर फलन (constant function) माना जाता है, का अवकलज शून्य होता है, इसलिए उपर्युक्त अवकलन समीकरणों को भिन्न रूप में लिखा जा सकता है-

$\frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x \Rightarrow \cos x$ का समाकलज $\sin x+c$ है।

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}+c\right)=x^3 \Rightarrow x^3$ का समाकलज $\frac{x^4}{4}+c$ है।

$\frac{d}{dx}(\log_e x+c)=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}$ का प्रतिअवकलज $\log_e x+c$ है।

$\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x \Rightarrow sec^2 x$ का प्रतिअवकलज $\tan x+c$ है।

$\frac{d}{dx}(e^x+c)=e^x \Rightarrow e^x$ का प्रतिअवकलज e^x+c है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि उपर्युक्त फलनों के समाकलन या प्रतिअवकलज अद्वितीय नहीं है अर्थात् $\cos x$ का प्रतिअवकलज $\sin x, \sin x+1, \sin x+2, \sin x+3, \sin x$

$+\frac{1}{4}, \sin x-6,,.........$ कुछ भी हो सकता है।

अत: हम कह सकते हैं कि $\cos x$ का प्रतिअवकलज $sinx+C$ जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है। व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि यदि एक फलन f ऐसा है कि-

$\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$, जहाँ $x \in I$ (वास्तविक संख्याओं का अन्तराल)

तो प्रत्येक स्वेच्छ अचर C के लिए

$$\frac{d}{dx}(f(x)+C)=g(x), x \in I$$

इस प्रकार $\{f(x)+C, C \in R\}, g$ के प्रति अवकलजों के परिवार को व्यक्त करता है जहाँ C समाकलन का अचर कहलाता है। संकेत में इसे हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं:-

$$\frac{d}{dx}(f(x)+C)=g(x) \Leftrightarrow \int g(x)dx=f(x)+C$$

जहाँ $\int g(x)dx$ का अर्थ $g(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन है तथा $\int g(x)dx$ में $g(x)$ को समाकल्य कहते हैं।

फलनों के प्रमाणिक समाकलन (प्रतिअवकलज):

हम प्रमुख फलनों के अवकलजों के सूत्र जानते हैं। इन सूत्रों के संगत समाकलन के प्रमाणिक सूत्रों को लिखा जा सकता है जिसकी सहायता से दूसरे फलनों के समाकलनों को ज्ञात करने में मदद मिलेगी।

अवकलज (Derivatives)	समाकलन (प्रतिअवकलज): Integrals(Antiderivatives)
(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)=x^n$	$\Rightarrow \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1$
(ii) $\frac{d}{dx}(x \cdot +c)=1$	$\Rightarrow \int dx=x+c$
(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}+c\right)=(ax+b)^n$	$\Rightarrow \int (ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\cdot a}+c, n \neq -1$
(iv) $\frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x$	$\Rightarrow \int \cos x=\sin x+c$

(v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(ax+b)}{a}+c\right)=\cos(ax+b) \Rightarrow \int\cos(ax+b)dx=\frac{\sin(ax+b)}{a}+c$

(vi) $\frac{d}{dx}(-\cos x+c)=\sin x \quad \Rightarrow \int\sin dx=-\cos x+c$

(vii) $\frac{d}{dx}-\frac{\cos(ax+b)}{a}+c=\sin(ax+b) \Rightarrow \int\sin(ax+b)dx=-\frac{\cos(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$

(viii) $\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x \quad \Rightarrow \int\sec^2 x dx=\tan x+c$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan(ax+b)}{a}+c\right)=\sec^2(ax+b) \Rightarrow \int\sec^2(ax+b)dx=\frac{\tan(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$

(x) $\frac{d}{dx}(-\cot x+c)=\operatorname{cosec}^2 x \Rightarrow \int\operatorname{cosec}^2 x\, dx=-\cot x+c$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cot(ax+b)}{a}+c\right)=\operatorname{cosec}^2(ax+b)$

$$\Rightarrow \int\operatorname{cosec}^2(ax+b)dx=-\frac{\cot(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$$

(xii) $\frac{d}{dx}(\sec x+c)=\sec x\tan x \Rightarrow \int\sec x\tan x\, dx=\sec x+c$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec(ax+b)}{a}+c\right)=\sec(ax+b)\tan(ax+b)$

$$\Rightarrow \int\sec(ax+b)\tan(ax+b)x=\frac{\sec(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$$

(xiv) $\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x+c)=\operatorname{cosec} x\cot x \Rightarrow \int\cot x\operatorname{cosec} x\, dx=-\operatorname{cosec} x+c$

(xv) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\operatorname{cosec}(ax+b)}{a}+c\right)=\operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)$

$$\Rightarrow \int\operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\cdot dx=\frac{-\operatorname{cosec}(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$$

(xvi) $\frac{d}{dx}(e^x+c)=e^x \quad \Rightarrow \int e^x dx=e^x+c$

(xvii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax+b}}{a}+c\right)=e^{ax+b} \quad \Rightarrow \int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$

(xviii) $\frac{d}{dx}(\log_e|x|+c)=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx=\log_e|x|+c$

(xix) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\log_e|ax+b|}{a}+c\right)=\frac{1}{(ax+b)} \Rightarrow \int\frac{1}{(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\log_e(|ax+b|)+c, a\neq 0$

(xx) $\frac{d}{dx}\left(\frac{5^x}{\log_e 5}+c\right)=5^x \qquad \Rightarrow \int 5^x dx=\frac{5^x}{\log_e^5}+c$

(xxi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}+c\right)=a^x \qquad \Rightarrow \int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}+c, a>0, a\neq 1$

उपर्युक्त सूत्रों में उस अन्तराल का जिक्र नहीं किया गया है जिसमें विभिन्न फलन परिभाषित हैं परन्तु किसी भी विशिष्ट फलन के संदर्भ में इसे ध्यान में रखना आवश्यक होगा।

समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some properties of integrals):

हम समाकलन के कुछ गुणधर्मों को जानेंगे जिसके आधार पर समाकलन के प्रक्रम को अपनायेंगे।

(i) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$

और $\int f'(x)dx=f(x)+c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

(iii) किसी वास्तविक संख्या k के लिए $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

उदाहरण 1: निरीक्षण विधि का उपयोग करते हुए निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int x^4 dx$

(ii) $\int(3x^2+4x^3)dx$

(iii) $\int\sec^2 2x\,dx$

(iv) $\int\sin 3x\,dx$

(v) $\int e^{3x-5}dx$

हल: (i) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज x^4 है। हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}\left(x^5\right)=5x^4$$

अर्थात $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5\right) = x^4$

$\Rightarrow$ फलन $\frac{x^5}{5}$ का अवकलज x^4, अतः x^4 का

प्रतिअवकलज $\frac{x^5}{5}+c$ है।

$\Rightarrow \int x^4 dx = \frac{x^5}{5}+c$

(ii) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $3x^2+4x^3$ है।

हम देखते है कि-

$$\frac{d}{dx}(x^3+x^4) = 3x^2+4x^3$$

अर्थात् फलन x^3+x^4 का अवकलज $3x^2+4x^3$ है इसलिए फलन $3x^2+4x^3$ का प्रतिअवकलज x^3+x^4+c है जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

$\Rightarrow \int(3x^2+4x^3)dx = x^3+x^4+c$

(iii) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\sec^2 2x$ है।

हम जानते हैं कि-

$\frac{d}{dx}(\tan 2x) = 2\sec^2 2x$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\tan 2x\right) = \sec^2 2x$

इसलिए $\sec^2 2x$ का प्रतिअवकलज $\frac{1}{2}\tan 2x$ है अर्थात्

$\int \sec^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\tan 2x + c$

(iv) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकल $\sin 3x$ है।

हम जानते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}(-(\cos 3x)) = -3\sin 3x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) = \sin 3x$$

अर्थात् फलन $-\frac{\cos 3x}{3}$ का अवकलज $\sin 3x$ है।

इसलिए फलन $\sin 3x$ का प्रतिअवकलज $-\frac{\cos 3x}{3}$ है।

$$\Rightarrow \int \sin 3x\, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + c$$

(v) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकल e^{3x-5} है।

हम जानते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x-5}\right) = 3e^{3x-5}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot e^{3x-5}\right) = e^{3x-5}$$

अर्थात् फलन $\frac{e^{3x-5}}{3}$ का अवकलज e^{3x-5} होगा।

$$\Rightarrow \int e^{3x-5} dx = \frac{e^{3x-5}}{3} + c.$$

उदाहरण 2: निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \frac{x^4+1}{x^3} dx$

(ii) $\int (x^{\frac{1}{4}}+1) dx$

(iii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 2e^x - \frac{1}{x}) \cdot dx$

(iv) $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx$

(v) $\int (ax^2+bx+c) dx$

हल: (i) हम देखते हैं कि

$$\frac{x^4+1}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} + \frac{1}{x^3} = x + x^{-3}$$

इसलिए $\int \frac{x^4+1}{x^3}dx = \int x dx + \int x^{-3} dx$

$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + c$$

जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(ii) $\int \left(x^{\frac{1}{4}} + 1 \right) dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx + dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + x + c$$

$= \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + x + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) $\int \left(x^{\frac{2}{3}} + 2e^x - \frac{1}{x} \right) dx$

$$= \int x^{\frac{2}{3}} dx + \int 2e^x dx - \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 2e^x - \log_e |x| + c$$

$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{3}} + 2e^x - \log_e |x| + c,$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) हम देखते हैं कि

$$x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \int x^2 (1 - \frac{1}{x^2}) dx = \int (x^2 - 1) dx$$

$$= \int x^2 dx - \int dx$$

$= \frac{x^3}{3} - x + c,$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(v) $\int(ax^2+bx+c)dx$

$=\int ax^2dx+bx\,dx+\int cdx$

$=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+k,$ जहाँ k एक समाकलन अचर है।

उदाहरण 3: निम्नलिखित फलनों के प्रति अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})$

(ii) $\sec x(\sec x+\tan x)$

(iii) $\frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}$

(iv) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

(v) $\sqrt{1+\sin 2x}$

हल: (i) यहाँ हमें फलन $2x^2-3\sin x+5\sqrt{x}$ का प्रति–अवकलज फलन ज्ञात करना है अर्थात् $\int(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})dx$ ज्ञात करना है।

समाकलन के गुण-धर्म से

$$\int(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})dx=2\int x^2dx-3\int\sin x\,dx+\int 5x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\frac{x^{2+1}}{2+1}-3(-\cos x)+5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) हम देखते हैं कि

$\sec x(\sec x+\tan x)=\sec^2 x+\sec x\tan x$

$\Rightarrow\int\sec x(\sec x+\tan x)=\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$

$=\int\sec^2 x\,dx+\int\sec x\tan x\,dx$

$=\tan x+\sec x+c,$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(iii) हम देखते हैं कि

$$\frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

$$= \sec^2 x - 1 \qquad (\sec^2 x - \tan^2 x = 1)$$

इस प्रकार $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx = \int (\sec^2 x - 1) \cdot dx = \int \sec^2 x \cdot dx - \int dx$

$= \tan x - x + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(iv) हम देखते हैं कि

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1} = \frac{x^3 - x^2}{x-1} + \frac{x-1}{x-1}$$

$$= \frac{x^2(x-1)}{(x-1)} + 1 = x^2 + 1$$

अब $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1} dx = \int (x^2 + 1) dx$

$$= \int x^2 dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + x + c$$

$= \frac{x^3}{3} + x + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(v) हम देखते हैं कि

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$= (\sin x + \cos x)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \sin 2x} = \cos x + \sin x$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1 + \sin 2x} \cdot dx = (\cos x + \sin x) dx$$

$$= \int \cos x\, dx + \int \sin x\, dx$$

$= \sin x - \cos x + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

प्रश्नावली-7

निम्नलिखित फलनों के प्रति अवकलज (समाकलन) ज्ञात कीजिए:

1. $\cos 3x$ 2. e^{3x} 3. $(px-q)^2$

4. $\sec^2 3x$ 5. $\sin 2x - 3e^{5x}$ 6. $\sec 2x \tan 2x$

7. $x-\frac{1}{x}$ 8. $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 9. x^2-x+2

10. $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2$

निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए:

11. $\int(1-x)\sqrt{x}dx$ 12. $\int(2x-3\sin x+e^x)dx$

13. $\int\sqrt{x}(3x^2+x-5)dx$ 14. $\int(x+\frac{1}{x})^3 dx$ 15. $\int\frac{3-2\sin x}{\cos^2 x}dx$

16. $\int(4x^3-\frac{3}{x^4})dx$ 17. $\int(5^x-6^x)dx$ 18. $\int\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)dx$

19. $\int\frac{5^{2x}+2\cdot 15^x+3^{2x}}{3^x+5^x}dx$ 20. $\int\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}dx$ 21. $\int\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}dx$

22. $\int\cot^2 x\,dx$ 23. $\int(\sin x\cos 3x)dx$ 24. $\int(\sin 3x\cos 2x)dx$

25. $\int\frac{(1+\sin 2x)}{\sin x+\cos x}dx$ 26. $\int\left(\frac{1-\sin 2x}{\cos x-\sin x}\right)dx$ 27. $\int\frac{x^4-1}{x^2-1}dx$

28. $\int\frac{x^6-1}{x^2-1}dx$ 29. $\int\frac{x^3+\frac{1}{x^3}}{x+\frac{1}{x}}dx$ 30. $\int\left(e^{2x}+5^x-\frac{1}{x}\right)dx$

अब तक हमलोग प्रमाणिक रूप में व्यक्त फलनों के प्रति–अवकलज (समाकलन) निरीक्षण द्वारा निकाल चुंके हैं। अब हमलोग कुछ वैसे फलन जो प्रमाणिक रूप में नहीं दिखते हैं परन्तु प्रतिस्थापन या आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा फलन को प्रमाणिक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है, का समाकलन ज्ञात करते हैं जैसे $\int\tan^2 x\,dx$ ज्ञात करने में

हम देखते हैं कि $\tan^2 x$ प्रमाणिक अवकलज के रूप में नहीं है। परन्तु $\tan^2 x$ को $\sec^2 x - 1$ में रूपान्तरित करने पर फलन का प्रमाणिक स्वरूप में होने के कारण समाकलन $\tan x - x$ होगा अर्थात्

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + c,$$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

आइए एक और फलन के समाकलन पर विचार करते हैं-

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

यहाँ $\sqrt{x} = t$ लें तो,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$$

इसप्रकार $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \cos t \cdot 2dt$

$$= 2\int \cos t\,dt$$

$$= 2\sin t + c$$

$$= 2\sin\sqrt{x} + c,$$ जहाँ c समाकलन अचर है।

उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि फलन $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ प्रमाणिक रूप में नहीं व्यक्त है जिससे हम इसका प्रतिअवकलज निरीक्षण द्वारा लिख सकते हैं परन्तु प्रतिस्थापन $(\sqrt{x} = t)$ के द्वारा इसे प्रमाणिक रूप $\int 2\cos t$ में व्यक्त किया गया जहाँ से निरीक्षण द्वारा हम इसका प्रति-अवकलज $2\sin t = 2\sin\sqrt{x}$ लिखते हैं।

अब हम प्रतिस्थापन विधि द्वारा समाकलन पर विचार करेंगे। प्रतिस्थापन द्वारा हम ऐसे फलन के लिए प्रतिस्थापन करते हैं जिसका अवकलज भी समाकल्य में सम्मिलित हों जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है-

उदाहरण 4: निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

(i) $x^3 \sin(x^4 + 5)$

(ii) $x \sec x^2 \tan x^2$

(iii) $\tan x$

(iv) $\cot x$

उदाहरण 5: निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए-

(i) $\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx$

(ii) $\int \frac{1}{1+\tan x} dx$

(iii) $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx$

(iv) $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} dx$

(v) $\int \frac{1}{x+x\log x} dx$

हलः

(i) हम देखते हैं कि

$$\int \cos^3 \sin^2 dx$$

$$= \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x\, dx \qquad (\sin x = z \text{ रखने पर } \cos x\, dx = dz)$$

$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

$$= \int z^2(1-z^2)dz$$

$$= \int (z^2 - z^4)dz = \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + c$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c,$$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) $$\int \frac{1}{1+\tan x} dx = \int \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x + \cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int t \cdot dt$$

(माना कि $\cos x + \sin x = t$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)dx = dt$)

(v) $\sec x$

हलः

(i) मान लिया कि $x^4+5=t$

तो $4x^3dx=dt$

$$x^3dx=\frac{1}{4}dt$$

इसप्रकार
$$\int x^3\sin(x^4+5)dx=\int\sin t\cdot\frac{1}{4}dt$$
$$=\frac{1}{4}\int\sin t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}(-\cos t)+c,$$
$$=\frac{1}{4}\cos(x^4+5)+c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) मान लिया कि $x^2=t$

$$\Rightarrow 2xdx=dt$$
$$\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$$
$$\int x\sec x^2\tan x^2dx=\int\sec t\tan t\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\sec t\tan t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\sec t+c$$
$$=\frac{1}{2}\sec(x^2)+c,$$

जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) मान लिया कि

$$\cos x=t$$

$$\Rightarrow -\sin x\,dx = dt$$
$$\Rightarrow \sin x\,dx = -dt$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$= \int -\frac{1}{t}dt$$
$$= -\log|t| + c$$
$$= -\log|\cos x| + c$$

$= \log|\sec x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) माना कि $\sin x = z$

$$\cos x\,dx = dz$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$
$$= \int \frac{1}{z}dz$$
$$= \log_e|z| + c$$

$= \log_e|\sin x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(v) हम देखते हैं कि

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}dx$$

मान लिया कि

$$\sec x + \tan x = z$$
$$\Rightarrow \sec x \tan x\,dx + \sec^2 x\,dx = dz$$
$$\Rightarrow \sec x(\sec x + \tan x)dx = dz$$
$$= \int \frac{1}{z}dz$$
$$= \log_e|z| + c$$

$= \log_e|(\sec x + \tan x)| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log|t|+c$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) दिया गया समाकलन

$$=\int\frac{x}{e^{x^2}}=\int x\cdot e^{-x^2}$$

($-x^2$ को t से प्रतिस्थापित करने पर

$-x^2=t, -2xdx=dt$)

$$\Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dt$$

$$=\int-\frac{1}{2}e^t\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+c$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}=\frac{-1}{2e^{x^2}}+c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) $e^{2x}+e^{-2x}$ के बदले में z रखने पर

$$e^{2x}+e^{-2x}=z$$

$$\Rightarrow(2e^{2x}-2e^{-2x})dx=dz$$

$$\Rightarrow(e^{2x}-e^{-2x})dx=\frac{1}{2}dz$$

इसप्रकार $\int\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}dz$

$$=\frac{1}{2}\log|z|+c$$

$$=\frac{1}{2}\log_e|e^{2x}+e^{-2x}+c|$$

जहाँ c एक स्वेच्छा अचर है।

(v) $1+\log x$ के बदले में z रखने पर

$$1+\log x = z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$$

इस प्रकार $\int \frac{1}{x+x\log x}dx = \int \frac{1}{x(1+\log x)}dx = \int \frac{1}{z}dz = \log|z| + c$

$= \log_e |1+\log x| + c$, जहाँ c एक स्वच्छ अचर है।

प्रश्नावली-8

निम्नलिखित फलनों का समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$
2. $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx$
3. $\int \frac{x}{x^2+a^2}dx$
4. $\int \frac{x}{x^2-a^2}dx$
5. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$
6. $\int \frac{1}{x^2+2x-1}dx$
7. $\int \sin^2(2x+5)dx$
8. $\int \cos^2(3x+5)\cdot dx$
9. $\int \cos 2x \cos 4x \cos 6x\, dx$
10. $\int \tan 2x \tan 3x \tan 5x\, dx$
11. $\int \frac{\sin x}{\sin(x+5)}dx$
12. $\int \frac{5^x \log 5 + 5x^4}{5^x + x^5}dx$
13. $\int \sin^3 x\, dx$
14. $\int \cos^3 x\, dx$
15. $\int \frac{(\log x+1)^2}{x}dx$
16. $\int \frac{x^2}{x^6-9}$
17. $\int \frac{1}{9x^2+6x-3}dx$
18. $\int \frac{1}{e^x+1}dx$
19. $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx$
20. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$