2

सम्बन्ध एवं फलन
(Relation and Function)

2.01 परिचय (Introduction):

सम्बन्ध आम बोलचाल की भाषा का शब्द है। अपने दैनिक जीवन में भी हम कई प्रकार के सम्बन्धों से भलीभाँति परिचित हैं।

उदाहरणार्थ :

(i) दिल्ली भारत की राजधानी है।
(ii) श्याम, सोहन का पुत्र है।
(iii) 5,15 का भाजक है।
(iv) त्रिभुज ABC, त्रिभुज DEF के समरूप है।
(v) समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय है।

उपर्युक्त उदाहरणों में दो स्थानों, व्यक्तियों, संख्याओं अथवा किसी समुच्चय के दो अवयवों के बीच किसी प्रकार का सम्बन्ध होने की बात कही गयी है। गणित में भी इस शब्द का अर्थ लगभग उसी प्रकार का होता है।

गणित के इस अध्याय में हम एक समुच्चय के अवयवों का सम्बन्ध अन्य समुच्चय के या स्वयं के अवयवों से स्थापित करने का प्रयास करेंगे।

परिभाषा : कथन (Statement): *कथन एक अर्थपूर्ण वाक्य है, जिसे सत्य अथवा असत्य में व्यक्त कर सकते है।*

उदाहरणार्थ :

(i) सूर्य, पूर्व दिशा में उदय होता है।
(ii) अमेरिका की राजधानी लंदन है।
(iii) 7 का वर्ग 49 है।
(iv) 90° के कोण को समकोण कहते हैं।

उपर्युक्त सभी वाक्य कथन है, जिनमें (i), (iii) तथा (v) सत्य हैं तथा (ii) असत्य हैं।

2.02 खुला वाक्य (Open sentence):

ऐसे कथन, जिनके सत्य अथवा असत्य होने का फैसला तब तक नहीं हो सकता है जब तक इनके सम्बन्ध में कोई अतिरिक्त जानकारी उपलब्ध न हो, खुले वाक्य कहलाते हैं।

उदाहरणार्थ :

(i) $x+5=20$ (ii) $-5<x<3$ (iii) x, भारत का एक शहर है।

(iv) $x^2+y^2=10$ (v) $x>2y+3$

ये सभी खुले वाक्य है। उदाहरण (i), (ii) तथा (iii) में केवल एक चर राशि तथा उदाहरण (iv) तथा (v) ये दो चर राशियाँ x तथा y का प्रयोग किया गया है। ऐसे खुले वाक्यों को जिनमें एक चर राशि x हो $P(x)$ से तथा ऐसे दो चर राशि x, y वाले खुले वाक्यों को $P(x, y)$ से निरूपित किया जाता है। दो से अधिक चर राशि वाले वाक्य भी संभव हैं।

खुले वाक्यों में जिस समुच्चय से चर राशि का चयन किया जाता है उसे प्रतिस्थापन समुच्चय (Replacement set) तथा चर के जिन मानों के लिये खुला वाक्य सत्य होना है उनके समुच्चय को हल समुच्चय (Solution set) कहते हैं।

2.03 क्रमित युग्म (Ordered pair):

साधारणतः समुच्चय के अवयवों में क्रम का कोई महत्व नहीं होता। उदाहरणार्थ यदि $A=\{a,b,c,d\}$ तथा $B=\{d,a,c,b\}$ तो A तथा B में कोई अन्तर नहीं है अर्थात् $A=B$. अतः स्पष्ट है कि किसी समुच्चय के अवयवों में क्रम परिवर्तन करने पर समुच्चय में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

परन्तु यदि किसी समुच्चय के अवयवों में क्रम का भी महत्व हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित समुच्चय (ordered set) कहते हैं। उदाहरणार्थ हम जानते हैं कि $235\neq 523$ जबकि दोनों संख्याओं में अंकों 2, 3 तथा 5 का ही प्रयोग किया गया है। अर्थात् अंकों का क्रम महत्वपूर्ण है।

दो अंकों के क्रमिक समुच्चय को क्रमित युग्म (ordered pair) कहते हैं। इसे $(a,b),(x,y)$ इत्यादि से निरूपित किया जाता है। स्पष्टतः $(a,b)\neq(b,a)$ तथा $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c, b=d$. क्रमित युग्म (a,b) में a को प्रथम अवयव तथा b को द्वितीय अवयव कहा जाता है। क्रमित युग्म के दोनों अवयव भिन्न अथवा समान भी हो सकते हैं। उदाहरणार्थ $(5,7),(x,y),(3,3),(a,a)$ सभी क्रमित युग्म को निरूपित करते हैं।

टिप्पणी : यदि किसी क्रमित समुच्चय में अवयवों की संख्या n हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित n- टयूपल (ordered n-tupple) कहते हैं तथा इसे $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

2.04 दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian product of two sets):

दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन $A\times B$ उन सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है जिसमें प्रथम अवयव समुच्चय A से तथा द्वितीय अवयव समुच्चय B से लिया गया हो अर्थात्

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$$

उदाहरण : यदि $A=\{a,b,c\}$ तथा $B=\{x,y\}$ हो तो

$$A\times B=\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$$

टिप्पणी :

(i) यदि $A=\phi$ अथवा $B=\phi$, तब $A\times B=\phi$.

(ii) यदि समुच्चय A में अवयवों की संख्या m तथा समुच्चय B में अवयवों की संख्या n हो तो $A\times B$ में $m\times n$ अवयव होंगे।

(iii) यदि A तथा B अरिक्त समुच्चय हों तथा उनमें से एक अथवा दोनों अपरिमित समुच्चय (Infinite set) हों तब $A\times B$ में अवयवों की संख्या अनन्त होगी अर्थात् $A\times B$ भी एक अपरिमित समुच्चय होगा।

2.05 सम्बन्ध (Relation):

माना कि A और B दो अरिक्त समुच्चय हैं। समुच्चय A से B में सम्बन्ध एक खुले वाक्य $P(x, y)$, जहाँ $x\in A, y\in B$ द्वारा परिभाषित किया जाता है अर्थात् $R=\{(x,y): x\in A, y\in B, P(x, y)\}\,|\, x, y$ के किन्हीं मानों के लिये यदि :

(i) $P(a,b)$ सत्य है तब हम कहते हैं कि सम्बन्ध R के अधीन समुच्चय A के अवयव a का सम्बन्ध समुच्चय B अवयव b से है। इसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं : $a\,R\,b$ या $(a,b)\in R$.

(ii) $P(a,b)$ असत्य है तो इसे $a \not R\, b$ अथवा $(a,b)\notin R$ से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,2,3,5,7\}, B=\{1,4,6,9\}$ तथा $P(x, y): x$ का दुगना y है तब $R=\{(x,y): x\in A, y\in B, P(x, y)\}$ A से B में एक सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत $2R4, 3R6$ परन्तु $1 \not R\, 4, 3 \not R\, 9$ इत्यादि। इसे हम इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं :

$(2,4)\in R, (3,6)\in R$ परन्तु $(1,4)\notin R, (3,9)\notin R$ इत्यादि।

उदाहरण 2: यदि N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो तथा $P(x,y): x, y$ का भाजक है तो

$R=\{(x,y): x, y\in N, P(x, y)\}$ N में एक सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत $2R2, 2R4, 5R10, 2\not R\,3, 7\not R\,4$ इत्यादि।

अर्थात् $(2,2)\in R, (2,4)\in R, (5,10)\in R$ परन्तु $(2,3)\notin R, (7,4)\notin R$ इत्यादि।

उदाहरण 3: यदि $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B:\{2,3,4,5,6\}$ तथा $P(x,y):x,y$ से बड़ा है तब $R=\{(x,y):x\in A,\ y\in B,\ P(x,\ y)\}$ A से B में एक सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत $3R2, 4R3, 4R2, 5R3, 5R4$ परन्तु $2\not R 4, 3\not R 5$ इत्यादि।

अर्थात् $(3,2)\in R, (5,3)\in R$ परन्तु $(2,4)\notin R, (3,5)\notin R$ इत्यादि।

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि :

(i) यह आवश्यक नहीं है कि A के प्रत्येक अवयव का सम्बन्ध B के किसी न किसी अवयव से हो। अर्थात् A में ऐसे अवयव हो सकते हैं जो B के किसी अवयव से संबंधित नहीं हो।

(ii) A के किसी अवयव का सम्बन्ध B के एक या अधिक अवयवों से हो सकता है।

(iii) A के एक से अधिक अवयवों का सम्बन्ध B के एक अवयव से हो सकता है।

2.06 क्रमित युग्मों के समूह के रूप में सम्बन्ध (Relation as a set of ordered pairs):

खुले वाक्य की सहायता से समुच्चय A से समुच्चय B में सम्बन्ध परिभाषित करते समय हमने देखा कि यदि $P(a,b)$ जहाँ $a\in A, b\in B$ यदि सत्य है तब $(a,b)\in R$ अर्थात् सम्बन्ध में जितने भी अवयव होंगे वे सभी $A\times B$ के अवयव होंगे। अतः स्पष्ट है कि $R\subseteq A\times B$.

विलोमतः $A\times B$ का कोई भी उपसमुच्चय (a, b) जैसे क्रमित युग्मों का समुच्चय होगा। अतः A से B में एक सम्बन्ध परिभाषित करेगा। अतः समुच्चय A से समुच्चय B में कोई सम्बन्ध निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है :

परिभाषा : समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई सम्बन्ध $R, A\times B$ का एक उपसमुच्चय है अर्थात् $R\subseteq A\times B$.

टिप्पणी : यदि A तथा B में अवयवों की संख्या क्रमशः m तथा n हो तो $A\times B$ में अवयवों की संख्या $m\times n$ होगी। अतः इसके अरिक्त उपसमुच्चयों की संख्या $2^{mn}-1$ होगी। अर्थात् A से B में परिभाषित होने वाले अरिक्त सम्बन्धों की संख्या भी $2^{mn}-1$ होगी।

2.07 सम्बन्ध का प्रांत तथा परिसर (Domain and range of a relation):

यदि R समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई सम्बन्ध हो तो R के क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों के समुच्चय को R का प्रान्त (Domain) तथा द्वितीय अवयवों के समुच्चय को R का परिसर (Range) कहते हैं। अर्थात् R का प्रान्त $\{a|(a,b)\in R\}$ तथा R का परिसर $\{b|(a,b)\in R\}$ स्पष्टतः R का प्रान्त, A का उपसमुच्चय तथा R का परिसर B का उपसमुच्चय है।

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,2,3,4,5\}$ तथा $B=\{2,4,6,8,10\}$

माना $R=\{(a,b)|a\in A, b\in B, a,b \text{ का भाजक है}\}$

A से B में एक सम्बन्ध हो तब

$$R=\{(1,2),(1,4),(1,6),(1,8),(1,10),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(3,6),(4,4),(4,8),(5,10)\}$$

अतः R का प्रान्त $=\{1,2,3,4,5\}=A$, R का परिसर $=\{2,4,6,8,10\}=B$.

उदाहरण 2: Z में परिभाषित एक सम्बन्ध

$$R=\{(x,y)|x,y\in z,\ x^2+y^2\le 4\}$$

तब R का प्रान्त $=\{-2,-1,0,1,2\}$ तथा R का परिसर $=\{-2,-1,0,1,2\}$

2.08 प्रतिलोम सम्बन्ध (Inverse relation):

माना R, समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित एक सम्बन्ध है। तब R का प्रतिलोम सम्बन्ध R^{-1}, समुच्चय B से समुच्चय A में निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in R\}$$

अर्थात् $(a,b) \in R \quad \Leftrightarrow \quad (b,a) \in R^{-1}$

या $aRb \quad \Leftrightarrow \quad bR^{-1}a$

परिभाषा से स्पष्ट है कि R^{-1} का प्रान्त $= R$ का परिसर तथा R^{-1} का परिसर $= R$ का प्रांत

उदाहरण 1: यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 8\}$ तथा A से B में परिभाषित सम्बन्ध $R = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}$ हो

तब $R^{-1} = \{(4,1), (5,2), (6,3)\}$

पुनः R^{-1} का प्रान्त $= \{4,5,6\} = R$ का परिसर तथा R^{-1} का परिसर $= \{1,2,3\} = R$ का प्रान्त

उदाहरण 2: यदि N में सम्बन्ध "x, y से छोटा है" द्वारा परिभाषित हो तो $R = \{(x,y) | x, y \in N,\ x < y\}$ तो इसका प्रतिलोम सम्बन्ध $R^{-1} = \{(x,y) | x, y \in N,\ x > y\}$ जो "x, y से बड़ा है" द्वारा परिभाषित है।

2.09 तत्समक सम्बन्ध (Identity relation):

किसी समुच्चय A में तत्समक सम्बन्ध वह सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं से और केवल स्वंय से सम्बन्धित है। इसे I_A द्वारा व्यक्त किया जाता है। अतः $I_A = \{(a,a) | a \in A\}$.

उदाहरण : यदि $A = \{x, y, z\}$ तब $I_A = \{(x,x), (y,y), (z,z)\}$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: यदि $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{p,q,r,s\}$ तो कारण सहित बताइये कि निम्न में से कौन A से B में सम्बन्ध है :

(i) $R_1 = \{(a,q),(b,s),(c,r),(c,s)\}$ (ii) $R_2 = \{(b,q),(b,r),(b,s)\}$

(iii) $R_3 = \{(a,p),(b,q),(r,a),(d,s),(p,a)\}$ (iv) $R_4 = \{(d,p),(a,p),(b,s),(s,a)\}$

हल :

(i) स्पष्टतः $R_1 \subseteq A \times B \;\therefore\; R_1, A$ से B में एक सम्बन्ध है।

(ii) स्पष्टतः $R_2 \subseteq A \times B \;\therefore\; R_2$ भी A से B में एक सम्बन्ध है।

(iii) स्पष्टतः $(r,a) \in R_3$ परन्तु $(r,a) \not\subseteq A \times B$ तथा $(p,a) \in R_3$ परन्तु $(p,a) \not\subseteq A \times B$.

$\therefore R_3 \not\subseteq A \times B$ अतः R_3, A से B में सम्बन्ध नहीं है।

(iv) स्प्टतः $(s,a) \in R_4$ परन्तु $(s,a) \not\subseteq A \times B$ अतः R_4 भी A से B में सम्बन्ध नहीं है।

उदाहरण 2: सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C मे एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है : $x \Leftrightarrow x, y$ का संयुग्मी है।

कारण सहित बताइए निम्न में से कौन कथन सत्य अथवा असत्य है :

(i) $2R2$ (ii) $i\,R\,i$ (iii) $-3R3$ (iv) $(1-i)R(1-i)$

(v) $(1-i)R(1+i)$ (vi) $(-1+i)R(1+i)$

हल : (i) $2=2+i\cdot 0$ अतः 2 का संयुग्मी $=2-i\cdot 0=2$ $\therefore$ $2R2$ सत्य है।

(ii) $i=0+i\cdot 1$ अतः इसका संयुग्मी $=0-i\cdot 1=-i$ अतः $i \not R i$ अतः iRi असत्य है।

(iii) $-3=-3+i\cdot 0$ अतः इसका संयुग्मी $=-3-i\cdot 0=-3$. अतः $-3\not R 3$ अतः $-3R3$ असत्य है।

(iv) $(1-i)$ का संयुग्मी $(1+i)$ होता है अतः $(1-i)\not R(1-i)$ अतः $(1-i)R(1-i)$ असत्य है।

(v) $(1-i)$ का संयुग्मी $(1+i)$ है। अतः $(1-i)R(1+i)$ सत्य है।

(vi) $(-1+i)$ का संयुग्मी $(-1-i)$ है। अतः $(-1+i)R(1+i)$ असत्य है।

उदाहरण 3: A प्रथम दस प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है। यदि A में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित किया जाता है कि $xRy \Leftrightarrow x+2y=10$ तब

(i) R तथा R^{-1} को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

(ii) R तथा R^{-1} के प्रान्त ज्ञात कीजिए।

(iii) R तथा R^{-1} के परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

परिभाषा के अनुसार $xRy \Leftrightarrow x+2y=10$

$$\Leftrightarrow y=\frac{10-x}{2}$$

हम देखते हैं कि जब $x=1,\ y=\frac{9}{2}\not\in A.$

अर्थात् 1 का सम्बन्ध A के किसी अवयव से नहीं है। उसी प्रकार हम पाते हैं कि परिभाषित सम्बन्ध के अन्तर्गत 3, 5, 7, 9 तथा 10 भी A के किसी अवयव से सम्बन्धित नहीं है।

पुनः हम देखते हैं कि

जब $x=2,\quad y=\frac{10-2}{2}=4\in A \quad\Rightarrow\quad 2R4$

जब $x=4,\quad y=\frac{10-4}{2}=3\in A \quad\Rightarrow\quad 4R3$

जब $x=6,\quad y=\frac{10-6}{2}=2\in A \quad\Rightarrow\quad 6R2$

जब $x=8,\quad y=\frac{10-8}{2}=1\in A \quad\Rightarrow\quad 8R1$

(i) $\therefore$ $R=\{(2,4),(4,3),(6,2),(8,1)\}$ तथा $R^{-1}=\{(4,2),(3,4),(2,6),(1,8)\}$.

(ii) अतः R का प्रान्त $=\{2,4,6,8\}$ तथा R^{-1} का प्रान्त $=\{4,3,2,1\}$

(iii) अतः R का परिसर $=\{4,3,2,1\}$ तथा R^{-1} का परिसर $=\{2,4,6,8\}$

उदाहरण 4: समुच्चय $A=\{2, 4, 5\}$ से समुच्चय $B=\{1,2,3,4,6,8\}$ में सम्बन्ध R, "x, y को विभाजित करता है," से परिभाषित है। R को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त कीजिये तथा इसका प्रांत और परिसर भी ज्ञात कीजिए।

हल : $2 \in A$ लेने पर हम देखते हैं कि यह समुच्चय B के अवयव 2, 4, 6 तथा 8 को विभाजित करता है। अतः $(2,2) \in R, (2,4) \in R, (2,6) \in R, (2,8) \in R$

इसी प्रकार $(4,4) \in R, (4,8) \in R$

परन्तु A का अवयव 5 लेने पर यह B के किसी भी अवयव को विभाजित नहीं करता है।

अतः $R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (4,4), (4,8)\}$

R का प्रान्त $\{2, 4\}$ तथा R का परिसर $= \{2, 4, 6, 8\}$

उदाहरण 5: निम्न में प्रत्येक सम्बन्ध का प्रतिलोम सम्बन्ध ज्ञात कीजिएः

(i) $R = \{(x, y), x, y \in N, x + 2y = 8\}$

(ii) R, समुच्चय $A = \{8.9, 10, 11\}$ से समुच्चय $\{5, 6, 7, 8\}$ में $y = x - 2$ से परिभाषित सम्बन्ध है।

(iii) $R = \{(x, y), x, y \in N; x, y$ का भाजक है$\}$

हल : (i) $x + 2y = 8 \Rightarrow y = \dfrac{8 - x}{2}$ $\because$ $y \in N$ अतः x का मान सदैव 8 से छोटा होना चाहिए।

$x = 1$ रखने पर $y = 7/2 \notin N$ अतः x का सम्बन्ध किसी प्राकृत संख्या से नहीं है।

$x = 2$ रखने पर $y = 3 \in N$ $\quad\therefore\quad (2,3) \in R$

उसी प्रकार $(4, 2,) \in R$ तथा $(6,1) \in R$

अतः $R = \{(2,3), (4,2), (6,1)\}$ अतः $R^{-1} = \{(3,2), (2,4), (1,6)\}$

(ii) $x = 8 \in A$ लेने पर $y = 8 - 2 = 6 \in B$ $\quad\therefore\quad (8,6) \in R$

$x = 9 \in A$ लेने पर $y = 9 - 2 = 7 \in B$ $\quad\therefore\quad (9,7) \in R$

$x = 10 \in A$ लेने पर $y = 10 - 2 = 8 \in B$ $\quad\therefore\quad (10,8) \in R$

$x = 11 \in A$ लेने पर $y = 11 - 2 = 9 \notin B$

$\therefore$ $R = \{(8,6), (9,7), (10,8)\}$ $\quad\Rightarrow\quad R^{-1} = \{(6,8), (7,9), (8,10)\}$

(iii) N के अवयवों में यदि x, y का भाजक है तब y, x का गुणज होगा

$\therefore$ $R^{-1} = \{(x, y) | x, y \in N;$ 'x, y का गुणज है'$\}$

प्रश्नमाला 2.1

1. यदि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$ तो निम्न में से कौन A से B में सम्बन्ध है? कारण सहित उत्तर दीजिएः

   (i) $\{(1,4), (3,5), (3,6)\}$ (ii) $\{(1,6), (2,6), (3,6)\}$

   (iii) $\{(1,5), (3,4), (5,1), (3,6)\}$ (iv) $\{(2,4), (2,6), (3,6), (4,2)\}$

   (v) $A \times B$

2. N में परिभाषित निम्न सम्बन्धों को नियम रूप में व्यक्त कीजिएः

   (i) $\{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9), \ldots\}$ (ii) $\{(2,3), (4,2), (6,1)\}$

   (iii) $\{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), \ldots\}$

3. समुच्चय $A=\{2,3,4,5\}$ से समुच्चय $B=\{3,6,7,10\}$ में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x,y$ के सापेक्ष अभाज्य है। सम्बन्ध R को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में लिखिए तथा R के प्रान्त एवं परिसर भी ज्ञात कीजिए।

4. यदि पूर्णांकों के समुच्चय Z में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x^2+y^2=25$ तब R तथा R^{-1} को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में लिखिए तथा उनके प्रांत भी ज्ञात कीजिए।

5. यदि सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C से वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में एक सम्बन्ध ϕ इस प्रकार परिभाषित किया जाये कि $x\phi y \Leftrightarrow |x|=y$

कारण सहित बताइए कि निम्नलिखित में से कौन से सत्य अथवा असत्य है :

(i) $(1+i)\phi 3$ (ii) $3\phi(-3)$ (iii) $(2+3i)\phi 13$ (iv) $(1+i)\phi 1$

6. यदि समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5\}$ से समुच्चय $B=\{1,4,5\}$ में एक सम्बन्ध R "$x<y$" द्वारा परिभाषित किया जाए तो R को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त कीजिये तथा R^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

7. निम्न सम्बन्धों को क्रमित युग्मों के समुच्चयों के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) R_1, समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ से समुच्चय $B=\{1,2,3\}$ में "$x=2y$" से परिभाषित सम्बन्ध है।

(ii) R_2, समुच्चय $A=\{8,9,10,11\}$ से समुच्चय $B=\{5,6,7,8\}$ में "$y=x-2$" से परिभाषित सम्बन्ध है।

(iii) R_3, समुच्चय $A=\{0,1,2,\ldots,10\}$ में $2x+3y=12$ परिभाषित सम्बन्ध है।

(v) R_4, समुच्चय $A=\{5,6,7,8\}$ से समुच्चय $B=\{10,12,15,16,18\}$ में "x,y का भाजक है" से परिभाषित है।

8. निम्न में से प्रत्येक सम्बन्ध का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए:

(i) $R=\{(2,3),(2,4),(3,3),(3,2),(4,2)\}$ (ii) $R=\{(x,y)|x,y\in N; x<y\}$

(iii) R, समुच्चय $A=\{0,1,2,\ldots,10\}$ में $2x+3y=12$ से परिभाषित है।

2.10 सम्बन्धों के प्रकार (Kinds of relations):

(i) स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध R के अन्तर्गत यदि A का प्रत्येक अवयव स्वयं से सम्बन्धित हो, तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है। अर्थात् R स्वतुल्य सम्बन्ध होगा यदि $(a,a)\in R,\ \forall a\in A.$

यदि समुच्चय R में एक भी ऐसा अवयव विद्यमान है जो स्वयं से सम्बन्धित नहीं है तो दिया गया सम्बन्ध स्वतुल्य नहीं होगा।

टिप्पणी : स्वतुल्य सम्बन्ध के लिए $(a,a)\in R$ परन्तु इसका अर्थ यह नहीं है कि अवयव a का सम्बन्ध a के अतिरिक्त दूसरे से न हो। अर्थात् a का सम्बन्ध स्वयं से होने के साथ A के अन्य अवयवों से भी हो सकता है। जबकि तत्समक सम्बन्ध में a का सम्बन्ध a तथा केवल a से होता है। अतः स्पष्ट है कि प्रत्येक तत्समक सम्बन्ध स्वतुल्य सम्बन्ध है परन्तु प्रत्येक स्वतुल्य सम्बन्ध तत्समक सम्बन्ध नहीं होता है।

उदाहरण 1: माना $A=\{a,b,c,d\}$ तथा $R=\{(a,a),(a,d),(b,a),(b,b),(c,d),(c,c)(d,d)\}$ A में परिभाषित कोई सम्बन्ध है तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि $(a,a)\in R,(b,b)\in R,(c,c)\in R$ तथा $(d,d)\in R$ परन्तु यदि A में कोई सम्बन्ध R_1 इस प्रकार परिभाषित हो कि

$$R_1=\{(a,a),(a,d),(b,c),(b,d),(c,c),(c,d),(d,b)\}$$

तब R_1 स्वतुल्य नहीं है क्योंकि $b\in A$ परन्तु $(b,b)\not\in R_1$ उसी प्रकार $d\in A$ परन्तु $(d,d)\not\in R_1$.

उदाहरण 2: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित किया जाये कि $xRy \Leftrightarrow x \geq y$ तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि $x \in N \Rightarrow x = x$ परन्तु यदि R इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x > y$ तब यह सम्बन्ध स्वतुल्य नहीं होगा क्योंकि N के किसी भी अवयव के लिये $x > x$ सत्य नहीं है।

उदाहरण 3: किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में एक सम्बन्ध R यदि इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ के समान्तर है तो एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा क्योंकि प्रत्येक रेखा स्वयं के समान्तर होती है। परन्तु यदि R इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ के लम्बवत है तब R स्वतुल्य नहीं होगा क्योंकि कोई भी सरल रेखा स्वयं के लम्बवत नहीं हो सकती।

(ii) सममित सम्बन्ध (Symmetric relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित किसी सम्बन्ध R के अर्न्तगत यदि अवयव a का सम्बन्ध b से होने पर b का भी वहीं सम्बन्ध a से हो तो ऐसे सम्बन्ध को सममित सम्बन्ध कहते हैं। अर्थात् सम्बन्ध R सममित होगा यदि $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \; \forall \; a,b \in A.$

स्पष्टतः समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध R सममित नहीं होगा यदि A में कम से कम दो अवयव a, b ऐसे हो कि $(a,b) \in R$ परन्तु $(b,a) \notin R.$

टिप्पणी : यदि किसी समुच्चय A में R एक सममित सम्बन्ध है तब $xRy \Leftrightarrow yRx.$

अर्थात् $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \Rightarrow (x,y) \in R^{-1}$

$\therefore \quad R \subseteq R^{-1}$ (1)

उसी प्रकार $(x,y) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R \Rightarrow (x,y) \in R$ [R सममित है]

$\therefore \quad R^{-1} \subseteq R$ (2)

(1) तथा (2) से $R = R^{-1}$

उदाहरण 1: समुच्चय $A = \{a,b,c,d\}$ में दो सम्बन्ध R_1 तथा R_2 यदि निम्न प्रकार परिभाषित किए जाएँ कि

$$R_1 = \{(a,b),(b,d),(b,c)(b,a),(d,b),(c,b)\}$$

तथा $$R_2 = \{(a,c),(a,d),(b,d),(c,a),(d,b),(a,b),(b,a)\}$$

तब सम्बन्ध R_1 सममित है परन्तु सम्बन्ध R_2 सममित नहीं है क्योंकि $(a,d) \in R_2$ परन्तु $(d,a) \notin R_2$.

उदाहरण 2: त्रिभुजों के समुच्चय A में "सर्वांगसम $(\cong)$" का सम्बन्ध सममित है क्योंकि $\Delta_1 \cong \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 \cong \Delta_1$.

उदाहरण 3: किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में "x, y के लम्बवत है" सम्बन्ध सममित है क्योंकि $\ell_1, \ell_2 \in A$ तथा $\ell_2 \perp \ell_1 \Rightarrow \ell_1 \perp \ell_2$.

(iii) प्रति–सममित सम्बन्ध (Anti-symmetric relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध R के अन्तर्गत अवयव a का b से सम्बन्ध तथा b का a से सम्बन्ध दोनों एक साथ तभी सत्य हो जब $a = b$ तब R प्रति–सममित सम्बन्ध कहलाता है। अर्थात् R प्रति–सममित होगा यदि

$$(a,b) \in R \text{ तथा } (b,a) \in R \Rightarrow a = b, \; \forall \, a,b, \in A$$

स्पष्टतः A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R प्रति–सममित नहीं होगा यदि A में कम से कम दो अवयव a, b विद्यमान हों जिनके लिए $(a,b) \in R$ तथा $(b,a) \in R$ परन्तु $a \neq b$

उदाहरण 1: समुच्चयों के किसी समुच्चय S में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $ARB \Leftrightarrow A, B$ का उपसमुच्चय है तब R एक प्रति–सममित सम्बन्ध होगा क्योंकि किन्हीं दो समुच्चयों A तथा B के लिये $A \subseteq B$ तथा $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

उदाहरण 2: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ का भाजक है तो R एक प्रति–सममित सम्बन्ध है क्योंकि N में यदि x, y का भाजक है तथा y, x का भाजक है तो दोनों बातें एक साथ तभी सत्य होगी यदि $x = y$

उदाहरण 3: वास्तविक संख्याओं के समुच्चय A में यदि कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x \geq y$ तब R एक प्रति–सममित सम्बन्ध होगा क्योंकि $x \geq y$ तथा $y \geq x \Rightarrow x = y$

(iv) संक्रामक सम्बन्ध (Transitive relation): किसी समुच्चय A में कोई सम्बन्ध R यदि इस प्रकार परिभाषित हो कि R के अर्न्तगत अवयव a का सम्बन्ध अवयव b से तथा b का सम्बन्ध अवयव c से होने पर a का सम्बन्ध c से हो तो ऐसे सम्बन्ध को संक्रामक सम्बन्ध कहते हैं। अर्थात् R एक संक्रामक सम्बन्ध होगा यदि $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R, \ \forall \ a,b,c, \in A$

स्पष्टतः A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R संक्रामक नहीं होगा यदि A में कम से कम तीन अवयव a, b, c विद्यमान हो जिनके लिए $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R$ परन्तु $(a,c) \notin R.$

उदाहरण 1: समुच्चय $A = \{a,b,c,d\}$ में $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,d),(b,c)\}$ एक संक्रामक सम्बन्ध है।

उदाहरण 2: किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में "x, y के समान्तर है" एक संक्रामक सम्बन्ध है क्योंकि $\ell_1, \ell_2 \ell_3 \in A$ तथा $\ell_1 \| \ell_2$ तथा $\ell_2 \| \ell_3 \Rightarrow \ell_1 \| \ell_3.$

उदाहरण 3: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित किया जाए कि $xRy \Leftrightarrow x$ तथा y दोनों विषम हैं तो R एक संक्रामक सम्बन्ध क्योंकि $x, y, z \in N$ तथा xRy एवं $yRz \Rightarrow x, y$ तथा y, z सभी विषम है अर्थात् x, z दोनों विषम है अतः xRz

(v) तुल्यता सम्बन्ध (Equivalence relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध कहलाता है यदि

(i) R स्वतुल्य है अर्थात् $(a,a) \in R \ \forall a \in A$

(ii) R सममित है अर्थात् $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R, \ \forall a, b \in A$

(iii) R संक्रामक है अर्थात् $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R, \ \forall a,b,c \in A$

उदाहरण 1: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि कोई सम्बन्ध इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x = y$ तब R एक तुल्यता सम्बन्ध है क्योंकि किन्हीं $a, b, c, \in N$ के लिए

(i) $a = a$ $\quad \therefore aRa \ \forall a \in N$ $\quad$ अतः R स्वतुल्य है।

(ii) $a = b \Rightarrow b = a$ $\quad \therefore aRb \Rightarrow bRa$ $\quad$ अतः R सममित है।

(iii) $a = b$ तथा $b = c \Rightarrow a = c$

अतः aRb तथा $bRc \Rightarrow aRc$ $\quad$ अतः R संक्रामक है।

उदाहरण 2: एक समतल में स्थित बिन्दुओं के समुच्चय A में एक सम्बन्ध R यदि इस प्रकार परिभाषित किया जाए कि $xRy \Leftrightarrow x$ तथा y मूल बिन्दु से समान दूरी पर हैं तब R एक तुल्यता सम्बन्ध होगा क्योंकि

(i) $x \in A \Rightarrow x$ तथा x की मूल बिन्दु से दूरी समान है।

अतः $xRx \ \forall x \in A$ अतः R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(ii) माना $x, y \in A$ तथा xRy अर्थात् x तथा y भी मूल बिन्दु से समान दूरी पर है अतः y तथा x भी मूल बिन्दु से समान दूरी पर होंगे अर्थात् yRx

$\therefore xRy \Rightarrow yRx \quad \therefore R$ सममित है।

(iii) माना $x, y, z \in A$ तथा xRy एवं $yRz.$

अर्थात् x तथा y मूल बिन्दु से समान दूरी पर स्थित हैं एवं y तथा z मूल बिन्दु से समान दूरी पर स्थित हैं। अतः x तथा z भी मूल बिन्दु से समान दूरी पर स्थित हैं।

अर्थात् $xRz \ \therefore xRy$ तथा $yRz \Rightarrow xRz$ अतः R संक्रामक है।

अतः R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

(iv) आंशिक क्रम सम्बन्ध (Partial order relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध कहलाता है यदि :

(a) R स्वतुल्य है। (b) R प्रति सममित है। (c) R संक्रामक है।

यदि किसी समुच्चय A में कोई आंशिक क्रम सम्बन्ध परिभाषित हो तो समुच्चय A आंशिक क्रमित समुच्चय (Partially ordered set) कहलाता है।

उदाहरण 1: समुच्चयों के समूह में "x, y का उपसमुच्चय है" द्वारा परिभाषित सम्बन्ध एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है क्योंकि यह सम्बन्ध स्वतुल्य, प्रति–सममित तथा संक्रामक है।

उदाहरण 2: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में "x, y का भाजक है" द्वारा परिभाषित सम्बन्ध एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है क्योंकि यह सम्बन्ध स्वतुल्य, प्रति–सममित तथा संक्रामक है।

(vii) पूर्ण क्रम सम्बन्ध (Total order relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध कहलाता यदि :

(a) R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है।

(b) प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए या तो $(a,b) \in R$ या $(b,a) \in R$ या $a = b$ सत्य हो।

उदाहरण 1: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में "$x \le y$" द्वारा परिभाषित सम्बन्ध एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत $x, y \in N$ के लिये $x \le y$ या $y \le x$ या $x = y$ में से एक सर्वदा सत्य है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 6: निम्न सम्बन्ध R और P की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए:

(i) N में, $a R b \Leftrightarrow b, a$ से विभाजित हो।

(ii) $\alpha P \beta \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$ जहाँ α और β एक समतल की रेखाएँ हैं।

हल : (i) R की परिभाषा के अनुसार $a R b \Leftrightarrow a|b$.

स्वतुल्यता : R स्वतुल्य सम्बन्ध, क्योंकि प्रत्येक प्राकृत संख्या a के लिए $a|a$

सममितता : R सममित नहीं है क्योंकि किन्हीं $a, b \in N$ के लिये जब a, b को विभाजित करता है तब b, a को विभाजित नहीं कर सकता (जब तक $a = b$ न हो)।

संक्रामकता : R संक्रामक सम्बन्ध है क्योंकि किन्ही $a, b, c, \in N$ के लिए $a|b$ तथा $b|c \Rightarrow a|c$

(ii) P की परिभाषा के अनुसार $\alpha P \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$.

स्वतुल्यता : P स्वतुल्य नहीं है क्योंकि किसी भी सरल रेखा α के लिए $\alpha \perp \alpha$ सत्य नहीं है।

सममितता : P सममित सम्बन्ध है क्योंकि किन्हीं दो सरल रेखाओं α, β के लिए $\alpha \perp \beta \Rightarrow \beta \perp \alpha$

संक्रामकता : P संक्रामक नहीं है क्योंकि समतलीय रेखाओं α, β, γ के लिए

$\alpha \perp \beta$ तथा $\beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$.

उदाहरण 7: N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है। यदि $N \times N$ में कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ जहाँ $a, b, c, d \in N$, तो सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

हल : (i) स्पष्टतः $(a,b) R (a,b)$ क्योंकि $a + b = b + a$ अतः R स्वतुल्य है।

(ii) माना $(a,b), (c,d) \in N \times N$ तब $(a,b) R (c,d) \Rightarrow a + d = b + c$

$\Rightarrow c + b = d + a$

$\Rightarrow (c,d) R (a,b)$ अतः R सममित है।

(iii) माना $(a,b),(c,d),(e,f)\in N\times N$ तथा $(a,b)\,R\,(c,d)$

तथा $(c,d)\,R\,(e,f)$

$\Rightarrow a+d=b+c$ तथा $c+f=d+e$

$\Rightarrow a+d+c+f=b+c+d+e \Rightarrow a+f=b+e \Rightarrow (a,b)\,R\,(e,f)$

अतः R संक्रामक है।

अतः R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 8: माना $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. X पर तीन सम्बन्ध R_1,R_2,R_3 निम्न प्रकार परिभाषित है :

(i) $R_1=\{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_2,x_3),(x_3,x_2)\}$

(ii) $R_2=\{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_4,x_4),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_2,x_4)\}$

(iii) $R_3=\{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_4,x_4),(x_2,x_3),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_4,x_3)\}$

इन सम्बन्धों की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

हल :

(i) स्पष्टतः R_1 सममित तथा संक्रामक है परन्तु स्वतुल्य नहीं है

क्योंकि $x_4\in X$ परन्तु $(x_4,x_4)\not\in R_1$

(ii) स्पष्टतः R_2 स्वतुल्य तथा संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है

क्योंकि $(x_3,x_4)\in R_2$ परन्तु $(x_4,x_3)\not\in R_2$, $(x_2,x_4)\in R_2$ परन्तु $(x_4,x_2)\not\in R_2$

(iii) स्पष्टतः R_3 स्वतुल्य तथा सममित है परन्तु संक्रामक नहीं है

क्योंकि $(x_2,x_3)\in R_3$ तथा $(x_3,x_4)\in R_3$ परन्तु $(x_2,x_4)\not\in R_3$

टिप्पणी : इस उदाहरण से स्पष्ट है कि स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता किसी सम्बन्ध के स्वतंत्र गुण है। अर्थात् किसी एक गुण के संतुष्ट होने पर दूसरे गुण का संतुष्ट होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरण 9: पूर्णांकों के समुच्चय I में एक सम्बन्ध $\equiv$ निम्न प्रकार परिभाषित है:

यदि $m,n\in I$ तब $m\equiv n$ (मॉड्यूलों k) $\Leftrightarrow$ $(m-n),K$ से विभाज्य है जहाँ K एक अशून्य निश्चित पूर्णांक है। सिद्ध कीजिए यह एक तुल्यता सम्बन्ध है।

हल :

(i) यदि $a\in I$ तब $a-a=0$ जो स्पष्टतः k से विभाज्य है। अतः $a\equiv a$ (माड k) $\forall a\in I$

अतः दिये गये सम्बन्ध के अन्तर्गत I का प्रत्येक अवयव स्वयं से सम्बन्धित है। अतः यह सम्बन्ध स्वतुल्य है।

(ii) माना $m,n\in I$ तथा $m\equiv n$ (माड k)

तब $(m-n)$, k से विभाज्य होगा अर्थात् $m-n=qk$

जहाँ k एक पूर्णांक है $\therefore n-m=(-q)k$ जहाँ $-q$ पूर्णांक है

अतः $n\equiv m$ (माड k)

अतः यह सम्बन्ध सममित है।

(iii) माना $m,n,p\in I$ जहाँ $m\equiv n$ (माड k) तथा $n\equiv p$ (माड k)

अतः $m-n=qk$ तथा $n-p=rk$ जहाँ $q,r\in I$

अब $m-p=(m-n)+(n-p)=qk+rk=(q+r)k$ जहाँ $(q+r)\in I$ अतः $m\equiv p$ (माड k)

अतः यह सम्बन्ध संक्रामक है।

अतः दिया गया सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है।

टिप्पणी : यदि $m\equiv n$ (माड k) हो तो इसे "m सर्वांगसम n माड्यूलो k" पढ़ते हैं।

उदाहरण 10: यदि समुच्चय A में R एक तुल्यता सम्बन्ध है तो सिद्ध कीजिए कि इसका प्रतिलोम सम्बन्ध R^{-1} भी एक तुल्यता सम्बन्ध होगा।

हल : क्योंकि R समुच्चय A में एक सम्बन्ध है।

$\therefore \quad R \subseteq A \times A \Rightarrow R^{-1} \subseteq A \times A$

अतः R^{-1} भी A में एक सम्बन्ध है। अब हम R^{-1} को तुल्यता सम्बन्ध सिद्ध करेंगे।

(i) स्वतुल्यता : यदि $a \in A \quad (a,a) \in R, \forall a \in A \quad [\because R$ स्वतुल्य हैं$]$

$\Rightarrow (a,a) \in R^{-1}, \forall a \in A \quad \therefore R^{-1}$ एक स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(ii) सममितता : माना $(a,b) \in R^{-1}$ तब

$(a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R \Rightarrow (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R^{-1} \quad [\because R$ सममित हैं$]$

इस प्रकार $(a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R^{-1}$

अतः R एक सममित सम्बन्ध है।

(iii) संक्रामकता : माना $a,b,c \in A$

तब $(a,b) \in R^{-1}$ तथा $(b,c) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R$ तथा $(c,b) \in R$

$\Rightarrow (c,b) \in R$ तथा $(b,a) \in R \Rightarrow (c,b) \in R$ तथा $(b,a) \in R$

$\Rightarrow (c,a) \in R \; [\because R$ संक्रामक है$] \quad \Rightarrow (a,c) \in R^{-1}$

इस प्रकार $(a,b) \in R^{-1}$ तथा $(b,c) \in R^{-1} \Rightarrow (a,c) \in R^{-1}$

$\therefore R^{-1}$ एक संक्रामक सम्बन्ध है। अतः R^{-1} भी एक तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 11: यदि किसी समुच्चय A में दो तुल्यता सम्बन्ध R तथा S परिभाषित हों तो सिद्ध कीजिए कि $R \cap S$ भी A में एक तुल्यता सम्बन्ध होगा।

हल : R तथा S समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध है। $\therefore R \subseteq A \times A$ तथा $S \subseteq A \times A \Rightarrow R \cap S \subseteq A \times A$

अतः $R \cap S$ भी समुच्चय A में परिभाषित एक सम्बन्ध है।

अब हम $R \cap S$ की समुच्चय A में स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच करते हैं।

(i) स्वतुल्यता : मान a_1 समुच्चय A का कोई अवयव है

तब $a \in A \Rightarrow (a,a) \in R$ तथा $(a,a) \in S \quad [\because R$ तथा S स्वतुल्य है$]$

$\Rightarrow (a,a) \in R \cap S$

अतः $(a,a) \in R \cap S, \forall a \in A \quad \therefore R \cap S$ समुच्चय A में एक स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(ii) सममितता : माना a तथा b समुच्चय A के ऐसे अवयव हैं कि $(a,b) \in R \cap S$ तब

$(a,b) \in R \cap S \Rightarrow (a,b) \in R$ तथा $(a,b) \in S$

$\Rightarrow (b,a) \in R$ तथा $(b,a) \in S \quad [\because R$ तथा S दोनों सममित है$]$

$\Rightarrow (b,a) \in R \cap S \quad \therefore R \cap S$ समुच्चय A में एक सममित सम्बन्ध है।

(iii) संक्रामकता : माना $a,b,c\,A$ के ऐसे अवयव है कि

$(a,b) \in R \cap S$ तथा $(b,c) \in R \cap S$

$\therefore$ $(a,b) \in R$ तथा $(a,b) \in S$ एवं $(b,c) \in R$ तथा $(b,c) \in S$

अब $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ $[\because R$ संक्रामक है$]$

तथा $(a,b) \in S$ तथा $(b,c) \in S \Rightarrow (a,c) \in S$ $[\because S$ संक्रामक है$]$

इस प्रकार $(a,c) \in R$ तथा $(a,c) \in S \Rightarrow (a,c) \in R \cap S$

अर्थात् $(a,b) \in R \cap S$ तथा $(b,c) \in R \cap S \Rightarrow (a,c) \in R \cap S$

$\therefore R \cap S, A$ में संक्रामक सम्बन्ध है। $\therefore R \cap S$ समुच्चय A में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 12: पूर्ण संख्याओं के समुच्चय I में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $x\,R\,y \Leftrightarrow (x-y)$ एक सम पूर्णांक है। सिद्ध कीजिये कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

हल : (i) माना $x \in I$ तब $x - x = 0$ जो कि एक सम पूर्णांक है।

अतः $x\,R\,x, \forall\, x \in I.$

अतः R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(ii) माना $x, y \in I$ तथा $x\,R\,y$ तब $(x-y)$ एक सम पूर्णांक है।

अतः $y - x = -(x-y)$ भी एक सम पूर्णांक है।

अतः $y\,R\,x$ इस प्रकार $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$ $\therefore R$ एक सममित सम्बन्ध है।

(iii) माना $x, y, z \in I$ तथा $x\,R\,y$ एवं $y\,R\,z$

अर्थात् $(x-y)$ एक सम पूर्णांक है तथा $(y-z)$ भी एक सम पूर्णांक है।

अब $x - z = (x-y) + (y-z) =$ सम पूर्णांक + सम पूर्णांक = सम पूर्णांक

अतः $x\,R\,z.$ इस प्रकार $x\,R\,y$ तथा $y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$

अतः R एक संक्रामक सम्बन्ध है। $\therefore R$ एक तुल्यता सम्बन्ध है।

प्रश्नमाला 2.2

1. निम्न सम्बन्धों की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए :
   (i) $m R_1 n \Leftrightarrow m$ तथा n दोनों विषम है, $\forall\, m, n \in N$
   (ii) समुच्चय A के घात समुच्चय (Power set) $P(A)$ में $A\,R_2\,B \Leftrightarrow A \subseteq B, \forall\, A, B \in P(A)$
   (iii) त्रिविम समष्टि (Three dimensional Space) में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय S में $L_1 R_3 L_2 \Leftrightarrow L_1$ तथा L_2 समतलीय है, $\forall\, L_1, L_2 \in S$
   (iv) $a\,R_4 b \Leftrightarrow b, a$ से विभाजित हो, $\forall\, a, b \in N$
2. अशून्य वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R_0 में सम्बन्ध P निम्न प्रकार परिभाषित है :
   (i) $x\,P\,y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ (ii) $x\,P\,y \Leftrightarrow x\,y = 1$
   (iii) $x\,P\,y \Leftrightarrow (x+y)$ एक परिमेय संख्या है (iv) $x\,P\,y \Leftrightarrow x/y$ एक परिमेय संख्या है
   इन संबंधों की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।
3. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में एक सम्बन्ध R_1 निम्न प्रकार परिभाषित है :
   $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow 1 + ab > 0, \forall\, a, b \in R$

सिद्ध कीजिए कि R_1 स्वतुल्य एवं सममित है परन्तु संक्रामक नहीं है।

4. N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है। यदि $N \times N$ में कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = bc \ \forall \ (a,b),(c,d) \in N \times N$ तो सिद्ध कीजिये कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

5. अशून्य परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q_0 में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $aRb \Leftrightarrow a = 1/b, \forall \ a,b \in Q_0$. क्या R एक तुल्यता सम्बन्ध है?

6. माना $X = \{(a,b) | a,b \in R\}$ जहाँ I पूर्णांकों का समुच्चय है। x पर एक सम्बन्ध R_1 निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$(a,b)R_1(c,d) \Leftrightarrow b - d = a - c$$

सिद्ध कीजिए कि R_1 एक तुल्यता सम्बन्ध है।

7. एक समतल में स्थित त्रिभुजों के समुच्चय T में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x,y$ के सदृश्य है। सिद्ध कीजिए R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

8. मान्य $A = \{1,2,3\}$ A में एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$$

R की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

9. अशून्य सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C_0 में एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \text{ वास्तविक है।}$$

सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

10. यदि R, समुच्चयों के समूह x में "A, B से असंयुक्त (Disjoint) है" द्वारा परिभाषित सम्बन्ध हो तो R की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

11. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि aRb यदि a,b का भाजक है। सिद्ध कीजिये कि R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है परन्तु एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध नहीं है।

12. बताइए कि N के निम्न उपसमुच्चय सम्बन्ध "x, y को विभाजित करता है" कि लिए पूर्णतया क्रमित समुच्चय है या नही :

(i) $\{2,4,6,8......\}$ (ii) $\{0,2,4,6......\}$ (iii) $\{3,9,5,15......\}$

(iv) $\{5,15,30\}$ (v) $\{1,2,3,4,\}$ (vi) $\{a,b,ab\}, \forall \ a,b \in R$

2.11 फलन (Functions)

अब तक हमने विभिन्न प्रकार के सम्बन्धों का विस्तृत अध्ययन किया है। यहाँ हम एक विशेष प्रकार के सम्बन्ध का अध्ययन करेंगे। जिन्हें फलन (Function) या प्रतिचित्रण (mapping) कहते हैं। गणित के अध्ययन में फलन का एक अत्यन्त महत्वपूर्ण स्थान है तथा यह एक अत्यन्त आधारभूत संकल्पना है।

समुच्चय A से समुच्च्य B में सम्बन्ध परिभाषित करते समय हमने देखा है कि A में एक या एक से अधिक अवयव ऐसे हो सकते हैं जो B के किसी भी अवयव से सम्बन्धित न हों। यह भी संभव था कि A का कोई अवयव B के एक या अधिक अवयवों से सम्बन्धित हो। परन्तु यदि समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित किसी सम्बन्ध के अर्न्तगत यदि A का प्रत्येक अवयव B के एक और केवल एक अवयव से सम्बन्धित हो तो ऐसे सम्बन्ध को फलन अथवा प्रतिचित्रण कहते हैं। अतः फलन को हम निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं :

परिभाषा– *किसी समुच्चय A से समुच्चय में B परिभाषित फलन या प्रतिचित्रण एक ऐसा नियम या संगतता* (correspondence) *है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय* (unique) *अवयव से सम्बद्ध होता है।*

फलन या प्रतिचित्रण को हम निम्न प्रकार से निरूपित करते है : $f : A \to B$ अथवा $A \xrightarrow{f} B$ तथा इसे "f समुच्चय A से समुच्चय B में एक फलन है" अथवा "f, समुच्चय A का समुच्चय B में प्रतिचित्रण है" पढ़ते हैं। यदि फलन f के अन्तर्गत A का अवयव 'a' B के अवयव 'b' से सम्बद्ध हो तो b को a का f– प्रतिबिम्ब (f – image) या a पर फलन का मान कहते हैं तथा इसे $b = f(a)$ अथवा $f : a \to b$ द्वारा व्यक्त करते हैं। पुनः अवयव a को अवयव b का पूर्व–प्रतिबिम्ब (Pre-image) कहते हैं।

टिप्पणी : f एक फलन है जबकि $f(x)$, f फलन के अन्तर्गत x का प्रतिबिम्ब या फलन f का x पर मान है।

2.12 क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में फलन (Function as a set of ordered pairs):

फलन एक विशेष प्रकार के सम्बन्ध हैं तथा सम्बन्धों को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त किया जाता है। अतः समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित किसी फलन को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ प्रत्येक क्रमित युग्म का पहला सदस्य A का अवयव हो, दूसरा सदस्य B का अवयव हो, किन्हीं दो क्रमित युग्मों के प्रथम अवयव समान न हों तथा A का प्रत्येक अवयव किसी न किसी क्रमित युग्म का प्रथम अवयव अवश्य हो। इस प्रकार

$$f = \{(a,b) | b = f(a), a \in A, b \in B\}$$

तब f एक फलन होगा यदि

(i) किन्हीं दो क्रमित युग्मों का प्रथम अवयव समान न हो।

(ii) A का प्रत्येक अवयव किसी न किसी क्रमित युग्म का प्रथम अवयव हो।

टिप्पणी : उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित फलन f, $A \times B$ का एक ऐसा उपसमुच्चय है जिसमें A का प्रत्येक अवयव f के क्रमित युग्मों में एक और केवल एक में ही आता है।

उदाहरण 1: माना $A = \{0,1,2,3\}$ तथा $B = \{a,b,c,d\}$

तथा
$$f_1 = \{(0,a),(1,a),(2,c),(3,d)\}$$
$$f_2 = \{(0,b),(1,a),(2,c),(3,d),(0,d)\}$$
$$f_3 = \{(0,a),(1,a),(3,a)\}$$
$$f_4 = \{(0,d),(1,c),(2,c),(3,b)\}$$

तब हम देख सकते हैं कि f_1 तथा f_4, A से B में फलन हैं क्योंकि दोनों के अन्तर्गत A के प्रत्येक अवयव का सम्बन्ध B के एक और केवल एक अवयव से स्थापित किया गया है। परन्तु f_2 फलन नहीं है क्योंकि इसके अन्तर्गत A का अवयव $0, B$ के दो अवयवों b तथा d से सम्बन्धित है। f_3 भी फलन नहीं है क्योंकि इसके अन्तर्गत A के अवयव 2 का सम्बन्ध B के किसी अवयव से नहीं है।

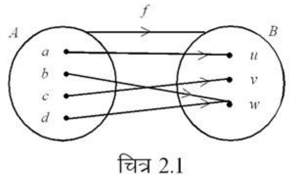
उदाहरण 2: यदि $A = \{a,b,c,d\}, B = \{u,v,w\}$ तथा f, A के अवयवों को B के अवयवों से निम्न प्रकार सम्बद्ध करता हो :

$$f(a) = u, f(b) = w, f(c) = v, f(d) = w$$

तब f, A से B में एक फलन है जिसे

$$f = \{(a,u),(b,w),(c,v),(d,w)\}$$

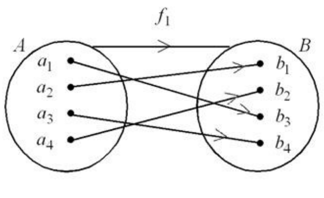
द्वारा भी व्यक्त कर सकते हैं। इसे चित्र 2.1 से भी निरूपित कर सकते हैं।



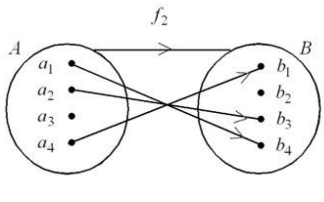
चित्र 2.1

उदाहरण 3: यदि $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ तथा f_1, f_2, f_3 निम्न चित्रों के अनुसार A के अवयवों को B के अवयवों से सम्बद्ध करते हैं :

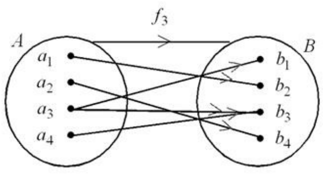
स्पष्ट है कि f_1 एक फलन है जबकि f_2 तथा f_3 फलन नहीं है क्योंकि f_2 के अन्तर्गत a_3 का B में कोई प्रतिबिम्ब नहीं है तथा f_3 के अन्तर्गत a_3 के B में दो प्रतिबिम्ब b_1 तथा b_3 हैं।



चित्र 2.2



चित्र 2.3



चित्र 2.4

उदाहरण 4: यदि $A=\{x,y,z\}$, $B=\{a,b,c\}$ तथा $f=\{(x,b),(y,c),(z,a),(x,c)\}$ तब f, A से B में फलन नहीं है क्योंकि f के दो क्रमित युग्मों (x,b) तथा (x,c) के प्रथम अवयव समान हैं।

उदाहरण 5: यदि $f:R\to R$ तथा $f(x)=\log x$ हो तब f फलन नहीं है क्योंकि $f(-3)=\log(-3)$ एक वास्तविक संख्या नहीं है। परन्तु यदि $f:R^{+}\to R, f(x)=\log x$ हो तब f एक फलन होगा।

उदाहरण 6: $f:R^{+}\to R$ तथा $f(x)=\pm\sqrt{x}$ हो तब भी f एक फलन नहीं है।

परन्तु यदि f को $f(x)=+\sqrt{x}$, या $f(x)=-\sqrt{x}$, द्वारा परिभाषित किया जाए तब f, R^{+} से R में एक फलन होगा।

2.13 फलन के प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर (Domain, co-domain and range of a function):

यदि f समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन है तो समुच्चय A को फलन f का प्रान्त तथा समुच्चय B को फलन f का सहप्रान्त कहते हैं। समुच्चय B के उन सभी अवयवों का समुच्चय जो A के अवयवों के प्रतिबिम्ब है, f का परिसर कहलाता है। इसे $f(A)$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। अर्थात् फलन f का परिसर B के उन अवयवों का समुच्चय है जिनके पूर्व–प्रतिबिम्ब A में विद्यमान हैं।

अतः $f(A)=\{f(a), a\in A\}$ स्पष्टतः $f(A)\subseteq B$

यदि फलन को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त किया गया हो तो f के क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों का समुच्चय f का प्रान्त तथा इन युग्मों के द्वितीय अवयवों का समुच्चय का f परिसर कहलाता है। अर्थात्

f का प्रान्त $\{a|(a,b)\in f\}$, f का परिसर $\{b|(a,b)\in f\}$

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,2,3,4,\}, B=\{a,b,c,d\}$ तथा $f:A\to B$ क्रमित युग्मों के रूप में निम्न प्रकार परिभाषित हो :

$f=\{(1,a),(2,b),(3,b),(4,c)\}$ तब f का प्रान्त $=\{1,2,3,4,\}=A$

f का सहप्रान्त $=B$

तथा f का परिसर $=\{a,b,c\}$

उदाहरण 2: वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में यदि कोई फलन f इस प्रकार परिभाषित किया जाए कि $f(x)=x^2, \forall x\in R$

तब f का प्रान्त $=R$

f का सहप्रान्त $=R$

f का परिसर $=R^{+}\cup\{0\}$ जहाँ R^{+} धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। क्योंकि किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग शून्य अथवा धनात्मक संख्या ही होगा।

उदाहरण 3: यदि $A=\{1,2,3,4\}$ तथा $f:A\to N,\ f(x)=3x+2$ हो तो

$$f(1)=3.1+2=5$$
$$f(2)=3.2+2=8$$
$$f(3)=3.3+2=11$$
$$f(4)=3.4+2=14$$

$\therefore$ f का परिसर $=\{5,8,11,14\}$

उदाहरण 4: यदि $f:R\to R$ तथा $f(x)=sin x$ हो तब f का परिसर $\{x\in R|-1\le x\le 1\}$ क्योंकि हम जानते हैं कि x के सभी वास्तविक मान के लिए $\sin x$ का मान सदा -1 से 1 तक होता है।

उदाहरण 5: यदि $f:R\to R, f(x)=e^x$ हो तब f का परिसर धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R^+ होगा क्योंकि x के सभी वास्तविक मान के लिए e^x सदा एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

2.14 अचर फलन (Constant function):

एक ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत उसके प्रान्त का प्रत्येक अवयव सहप्रान्त के एक ही अवयव से सम्बद्ध हो, अचर फलन कहलाता है। स्पष्ट है कि अचर फलन के परिसर में केवल एक ही अवयव होगा।

अतः $f:A\to B$ एक अचर फलन है $\Leftrightarrow f(x)=c, x\in A$ जहाँ c सहप्रान्त B का कोई अवयव है।

उदाहरण 1: $f:N\to R, f(x)=\frac{2}{3}, \forall x\in N$ एक अचर फलन है क्योंकि $f(N)=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

2.15 तत्समक फलन (Identify function):

किसी समुच्चय A से A में परिभाषित ऐसा फलन जिसके अर्न्तगत A का प्रत्येक अवयव स्वयं और केवल स्वयं से सम्बद्ध हो, A का तत्समक फलन कहलाता है, तथा इसे I_A से निरूपित किया जाता है। अतः $I_A(x)=x, \forall x\in A.$

2.16 तुल्य फलन (Equal function):

दो फलन f तथा g तुल्य कहलाते है यदि :

(i) f का प्रान्त $=g$ का प्रान्त

(ii) f का सहप्रान्त $=g$ का सहप्रान्त

(iii) $f(x)=g(x), \forall x$

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,2\}, B=\{3,6\}$ तथा $f:A\to B, f(x)=x^2+2$, $g:A\to B, g(x)=3x$ तब f तथा g के प्रान्त तथा सहप्रान्त समान है। यहाँ हम देखते हैं कि

$$f(1)=1^2+2=3=g(1),$$
$$f(2)=2^2+2=6=g(2)$$

अतः $f=g$

उदाहरण 2: यदि $f(x)=x^2$, जब $0\le x\le 1$ तथा $g(x)=x^2$, जब $2\le x\le 8$

यहाँ f तथा g तुल्य फलन नहीं है क्योंकि दोनों फलन के प्रान्त भिन्न है।

उदाहरण 3: यदि $f:R\to R$ इस प्रकार परिभाषित हो कि $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ जब $x\ne 2$ तथा $f(2)=5$ तथा $g:R\to R, g(x)=x+2, \forall x\in R$ तब f तथा g तुल्य फलन नहीं है क्योंकि $f(2)\ne g(2)$

2.17 बहुपद फलन (Polynomial function):

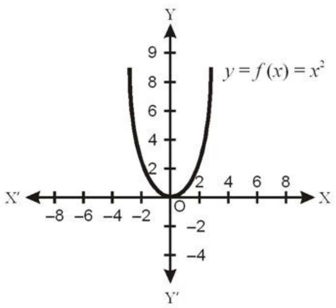
फलन $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, एक बहुपद फलन कहलाता है, यदि R के प्रत्येक x के लिए, $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, जहाँ n एक ऋणेतर पूर्णांक है तथा $a_0, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}$.

उदाहरणार्थः फलन $y = f(x) = x^2,\ x \in \boldsymbol{R}$ द्वारा फलन $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, को परिभाषित कीजिए। इस परिभाषा का प्रयोग करके नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए। इस फलन का प्रांत तथा परिसर क्या हैं? f का आलेख भी खींचिए।

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

हलः पूरी की हुई तालिका नीचे दी गई है:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16



चित्र 2.05

f का प्रान्त $= \{x : x \in R\}$, f का परिसर $= \{x^2 : x \in R\}$, f का आलेख चित्र 2.05 में प्रदर्शित है।

2.18 परिमेय फलन (Rational function):

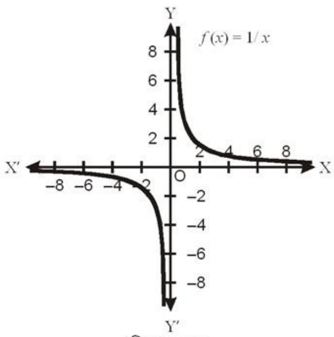
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$, प्रकार के फलन, जहाँ $f(x)$ तथा $g(x)$ एक प्रांत में, x के परिभाषित बहुपद फलन हैं, जिसमें $g(x) \neq 0$ **परिमेय फलन** कहलाते हैं।

उदाहरणार्थः एक वास्तविक फलन $f : \boldsymbol{R} - \{0\} \to \boldsymbol{R}$ की परिभाषा $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ द्वारा कीजिए। इस परिभाषा का प्रयोग करके निम्नलिखित तालिका को पूर्ण कीजिए। इस फलन का प्रांत तथा परिसर क्या हैं?

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y =$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

हलः पूर्ण की गई तालिका इस प्रकार है:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y =$	-0.5	-0.67	-1	-2	4	2	1	0.67	0.5



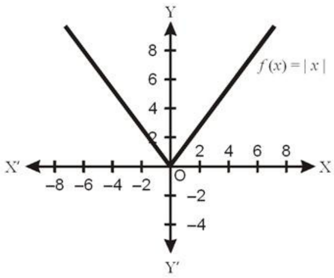
चित्र 2.06

इसका प्रांत, शून्य के अतिरिक्त समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं तथा इसका परिसर भी शून्य के अतिरिक्त समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं। f का आरेख चित्र 2.06 में प्रदर्शित है।

2.19 मापांक फलन (Modulus function):

$f(x)=|x|$ प्रत्येक $x \in \boldsymbol{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, **मापांक फलन** कहलाता हैं x के ऋण मानों के लिए, $f(x)$ का मान x, के मान के ऋण के बराबर होता है, अर्थात्

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$



चित्र 2.07

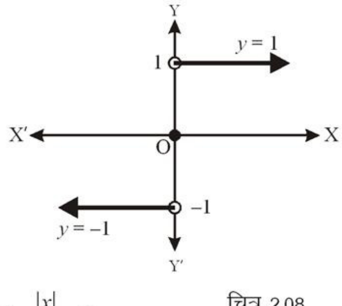
मापांक फलन का आरेख चित्र 2.07 में दिया है। मापांक फलन को **निरपेक्ष मान फलन** भी कहते हैं।

2.20 चिह्न फलन (Signum function):

प्रत्येक $x \in \boldsymbol{R}$, के लिए

$$f(x)=\begin{cases} 1\ ; & \text{यदि } x>0 \\ 0\ ; & \text{यदि } x=0 \\ -1; & \text{यदि } x<0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ चिह्न फलन कहलाता है। चिह्न फलन का प्रांत **R** है। परिसर समुच्चय $\{-1,\ 0,\ 1\}$ है। चित्र 2.08 में चिह्न फलन का आरेख दर्शाया गया है।

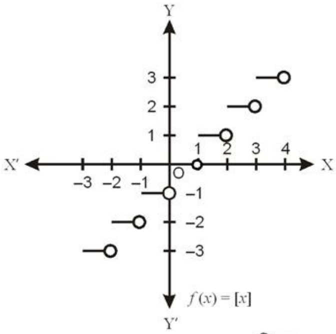


चित्र 2.08

$f(x)=\frac{|x|}{x}$ यदि $x \neq 0$ तथा 0 यदि $x=0$

2.21 महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest integer function):

$f(x)=[x],\ x\in \boldsymbol{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, x से कम या x के बराबर महत्तम पूर्णांक का मान ग्रहण (धारण) करता है ऐसा फलन **महत्तम पूर्णांक फलन** कहलाता है।



$f(x)=[x]\le x$ चित्र 2.09

$[x]$, की परिभाषा से हम देख सकते हैं कि

$[x]=-1$ यदि $-1\le x<0$

$[x]=0$ यदि $0\le x<1$

$[x]=1$ यदि $1\le x<2$

$[x]=2$ यदि $2\le x<3$

इस फलन का आरेख चित्र 2.09 में दर्शाया गया है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 13: यदि $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ तो बताइए कि निम्न में से कौन A से B में फलन हैः

(i) $f_1=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ (ii) $f_2=\{(a,2),(b,3),(c,1),(b,4)\}$

(iii) $f_3=\{(a,4),(b,4),(c,1)\}$ (iv) $f_4=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4)\}$

(v) $f_5=\{(a,2),(b,2),(c,2)\}$

हल : (i) f_1 फलन है क्योंकि इसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक और केवल एक अवयव से सम्बद्ध है।

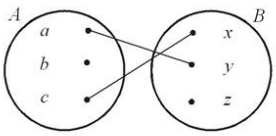
(ii) f_2 फलन नहीं है क्योंकि A का अवयव b, B के दो अवयवों 3 तथा 4 से सम्बद्ध हैं।

(iii) f_3 फलन है।

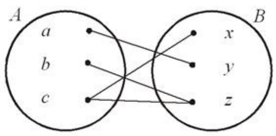
(iv) f_4 फलन नहीं है क्योंकि A का अवयव a, B के एक से अधिक अवयवों से सम्बद्ध है। साथ ही A के अवयव b तथा c, B के किसी अवयव से सम्बद्ध नहीं है।

(v) f_5 फलन है। यह A से B में एक अचर फलन है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक निश्चित अवयव 2 से सम्बद्ध है।

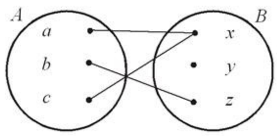
उदाहरण 14: कारण सहित बताइये कि निम्न चित्रों में से कौनसा चित्र A से B में फलन परिभाषित करता है जहाँ $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y,z\}$.



चित्र 2.10



चित्र 2.11



चित्र 2.12

हल : चित्र 2.10 में क्योंकि A में अवयव b का B में कोई प्रतिबिम्ब नहीं है अतः यह A से B में फलन परिभाषित नहीं करता है।

चित्र 2.11 में A के अवयव c के B में x तथा z दो प्रतिबिम्ब है। अतः यह भी A से B में फलन परिभाषित नहीं करता।

चित्र 2.12 में A का प्रत्येक अवयव B का में एक और केवल एक प्रतिबिम्ब है अतः यह A से B में एक फलन परिभाषित करता है।

उदाहरण 15: वह प्रान्त ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=2x^2-1$ तथा $g(x)=1-3x$ बराबर हों। वह प्रान्त भी ज्ञात कीजिए जिसमें से फलन बराबर नहीं है।

हल : f तथा g के अभीष्ट प्रान्त के लिए $f(x)=g(x)$

$\Rightarrow\quad 2x^2-1=1-3x \quad\Rightarrow 2x^2+3x-2=0 \quad\Rightarrow (2x-1)(x+2)=0 \quad\Rightarrow x=1/2,\ x=-2$

अतः प्रान्त $\left\{\frac{1}{2},-2\right\}$ के लिए फलन f तथा g तुल्य होंगे।

यदि फलन f तथा g वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R से R में परिभाषित हों तो दोनों तुल्य नहीं होंगे।

उदाहरण 16: वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R से R में परिभाषित निम्न फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए

(i) $f(x)=1-|x-2|$ (ii) $g(x)=1+3\cos 2x$ (iii) $h(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

हल : (i) $f(x)=1-|x-2|$

हल जानते हैं कि $0\le|x-2|<\infty,\forall x\in R$

$\Rightarrow \quad -\infty<-|x-2|\le 0,\forall x\in R$ [-1 से गुणा करने पर]

$\Rightarrow \quad -\infty<1-|x-2|\le 1,\forall x\in R$ [$+1$ जोड़ने पर]

$\Rightarrow \quad -\infty<f(x)\le 1,\forall x\in R$ अतः f का परिसर $=(-\infty,1]$

(ii) $g(x)=1+3\cos 2x$

हम जानते हैं कि $-1\le\cos 2x\le 1$, $\forall x\in R$

$\Rightarrow \quad -3\le 3\cos 2x\le 3,\forall x\in R$ [3 से गुणा करने पर]

$\Rightarrow \quad -2\le 1+3\cos 2x\le 4,\forall x\in R$ [1 जोड़ने पर]

$\Rightarrow \quad -2\le g(x)\le 4$

अतः g का परिसर $=[-2,4]$

(iii) $h(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

माना $y=h(x)$ तब $y=\dfrac{x}{1+x^2}\Rightarrow x^2y-x+y=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y},\ y\ne 0,\ y=0$ तभी होगा जब $x=0.$

अब x वास्तविक होगा यदि $1-4y^2\ge 0$ अर्थात् यदि $4y^2-1\le 0\Rightarrow y^2-\dfrac{1}{4}\le 0$

$\Rightarrow \quad \left(y-\dfrac{1}{2}\right)\left(y+\dfrac{1}{2}\right)\le 0\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow y\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

अर्थात् h का परिसर $=[-1/2,1/2]$

उदाहरण 17: निम्नलिखित सम्बन्धों को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में लिखिए और ज्ञात कीजिए कि इनमें से कौन से फलन है :

(i) $\{(x,y)|y=3x,x\in\{1,2,3\},y\in\{3,6,9,12\}\}$

(ii) $\{(x,y)|y=x+2,x,y\in N\}$

(iii) $\{(x,y)|y>x+1,x\in\{1,2\},y\in\{2,4,6\}\}$

(iv) $\{(x,y)|y=x^2,x,y\in N\}$

हल : (i) दिया गया है $y=3x$ अतः $x=1,2,3$ रखने पर $y=3,6,9$

अतः क्रमित युग्मों के रूप में सम्बन्ध $=\{(1,3),(2,6),(3,9)\}$ स्पष्टतः यह एक फलन है।

(ii) दिया गया है $y = x + 2, x, y, \in N$

$x = 1, 2, 3, ...$ रखने पर $y = 3, 4, 5...$

अतः क्रमित युग्मों के रूप में सम्बन्ध $= \{(1,3), (2,4), (3,5), ..., (x, x+2), ...\}$ स्पष्टतः यह भी एक फलन है।

(iii) $y > x + 1$ अतः $x = 1$ के लिये $y = 4, 6$ तथा $x = 2$ के लिये $y = 4, 6$

अतः क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में सम्बन्घ $= \{(1,4), (1,6), (2,4), (2,6)\}$

यह फलन नहीं है क्योंकि 1 तथा 2 दोनों दो अवयवों से सम्बद्ध है।

(iv) $y = x^2, x \in N$ अतः $x = 1, 2, 3, ...$ लेने पर $y = 1, 4, 9, ...$

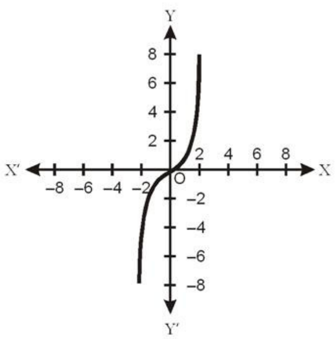
अतः क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में सम्बन्ध $= \{(1,1), (2,4), (3,9), ...(x, x^2), ...\}$

स्पष्टतः यह भी एक फलन है।

उदाहरण 18: $f(x) = x^3,\ x \in \boldsymbol{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ का आलेख खींचिए।

हलः यहाँ पर $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(-1) = -1,\ f(2) = 8,\ f(-2) = -8,\ f(3) = 27,\ f(-3) = -27$ इत्यादि।

$f = \{(x,\ x^3) :\ x \in \boldsymbol{R}\}$ f का आरेख चित्र 2.13 में खींचा गया है।



चित्र 2.13

प्रश्नमाला 2.3

1 कारण सहित बताइए कि निम्न सम्बन्धों में कौन से फलन है और कौन से नहीं:

(a) $\{(1,2), (2,3), (3,4), (2,1)\}$

(b) $\{(a,0), (b,0), (c,1), (d,1)\}$

(c) $\{(1,a), (2,b), (1,b), (2,a)\}$

(d) $\{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

(e) $\{(a,b)\}$

(f) $\{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

(g) $\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4)\}$

(h) $\{(x,y) | x, y \in R \wedge y^2 = x\}$

(i) $\{(x,y) | x, y \in R \wedge x^2 = y\}$

(j) $\{(x,y) | x, y \in R \wedge x = y^3\}$

(k) $\{(x,y) | x, y \in R \wedge y = x^3\}$

2. यदि $f: R \rightarrow R, f(x)=x^2$ हो तो ज्ञात कीजिए:

(i) f का परिसर (ii) $\{x | f(x)=4\}$ (iii) $\{y | f(y)=-1\}$

3. माना $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ तथा फलन f, A से R में $f(x)=x^2+1$ द्वारा परिभाषित है, f का परिसर ज्ञात कीजिए।

4. माना $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ तथा $f: A \rightarrow Z$, जहाँ $f(x)=x^2+2x-3$ तब ज्ञात कीजिये :

(i) f का परिसर (ii) $6,-3$ तथा 5 के पूर्व–प्रतिबिम्ब

5. यदि $f: R \rightarrow R$, जहाँ $f(x)=e^x$ तब ज्ञात कीजिए:

(a) R का f – प्रतिबिम्ब समुच्चय (b) $\{y | f(y)=1\}$

(c) क्या $f(x+y)=f(x)f(y)$ सत्य है?

6. यदि $f: R^+ \rightarrow R$ जहाँ $f(x)=\log x$, जहाँ R^+ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तो ज्ञात कीजिए:

(a) $f(R^+)$ (b) $\{y | f(y)=-2\}$ (c) क्या $f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$ सत्य है ?

7. यदि $f=\left\{\left(x, \frac{x^2}{1+x^2}\right), x \in R\right\}$ R से R में एक फलन है तो f का परिसर ज्ञात कीजिए।

8. क्या $g=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ एक फलन है ?

यदि g को $g(x)=\alpha x+\beta$ सूत्र द्वारा व्यक्त किया जाये तो α तथा β के मान ज्ञात कीजिए।

9. अचर फलन तथा चिह्न फलन में अन्तर बताइए।

2.22 वास्तविक फलनों का बीजगणित (Algebra of real functions):

इस अनुच्छेद में, हम सीखेंगे कि किस प्रकार दो वास्तविक फलनों को जोड़ा जाता है, एक वास्तविक फलन को दूसरे में से घटाया जाता है, एक वास्तविक फलन को किसी अदिश (यहाँ आदिश का अभिप्राय वास्तविक संख्या से है) से गुणा किया जाता है, दो वास्तविक फलनों का गुणा किया जाता है तथा एक वास्तविक फलन को दूसरे से भाग दिया जाता है।

(i) दो वास्तविक फलनों का योग: मान लीजिए कि $f: X \rightarrow \boldsymbol{R}$ तथा $g: X \rightarrow \boldsymbol{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \boldsymbol{R}$. तब हम $(f+g): X \rightarrow \boldsymbol{R}$ को, सभी $x \in X$ के लिए, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, द्वारा परिभाषित करते हैं।

(ii) एक वास्तविक फलन में से दूसरे को घटाना: मान लीजिए कि $f: X \rightarrow \boldsymbol{R}$ तथा $g: X \rightarrow \boldsymbol{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \boldsymbol{R}$. तब हम $(f-g): X \rightarrow \boldsymbol{R}$ को, सभी $x \in X$ के लिए, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, द्वारा परिभाषित करते हैं।

(iii) एक अदिश से गुणा: मान लीजिए कि $f: X \rightarrow \boldsymbol{R}$ एक वास्तविक मान फलन है तथा α एक अदिश है। यहाँ अदिश से हमारा अभिप्राय किसी वास्तविक संख्या से है। तब गुणनफल αf, X से **R** में एक फलन है, जो $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$, $x \in X$ से परिभाषित होता है।

(iv) दो वास्तविक फलनों का गुणन: दो वास्तविक फलनों $f: X \rightarrow \boldsymbol{R}$ तथा $g: X \rightarrow \boldsymbol{R}$ का गुणनफल (या गुणा) एक फलन $fg: X \rightarrow \boldsymbol{R}$ है, जो सभी $(fg)(x)=f(x)g(x)$, $x \in X$ द्वारा परिभाषित है। इसे **बिंदुशः गुणन** भी कहते हैं।

(v) दो वास्तविक फलनों का भागफल: मान लीजिए कि f तथा g, $X \rightarrow \boldsymbol{R}$ द्वारा परिभाषित, दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset R$. f का g से भागफल, जिसे f/g से निरूपित करते हैं, एक फलन है, जो सभी $x \in X$ जहाँ $g(x) \neq 0$, के लिए, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, द्वारा परिभाषित है।

2.23 फलनों के प्रकार (Kinds of functions):

यदि f समुच्चय A से समुच्चय B में एक फलन है तो फलन की परिभाषा के अनुसार f के अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक और केवल एक अवयव से सम्बद्ध होता है। इस प्रकार हम A के भिन्न भिन्न अवयवों को B के भिन्न भिन्न अवयव से सम्बद्ध कर सकते हैं। यह भी संभव है कि A के दो या अधिक के अवयव B के एक अवयव से सम्बद्ध हो।

जहाँ तक B के अवयवों के पूर्व–प्रतिबिम्ब का प्रश्न है, यह संभव है कि B के कुछ अवयवों का A में कोई पूर्व–प्रतिबिम्ब न हो। यह भी संभव है कि B के एक या अधिक अवयवों का A में एक या एक से अधिक पूर्व–प्रतिबिम्ब हों।

इन सभी संभावनाओं के आधार पर A से B में परिभाषित फलनों के विभिन्न प्रकार परिभाषित किए गए हैं।

(i) एकैकी फलन (One-one function or Injective function):

यदि $f : A \to B$ एक फलन हो तो f एकैकी फलन कहलाता है यदि f के अन्तर्गत A के भिन्न भिन्न अवयवों के B में भिन्न भिन्न प्रतिबिम्ब हों। अर्थात्

$f : A \to B$ एकैकी है यदि $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b), \forall a, b \in A$, दूसरे शब्दों में

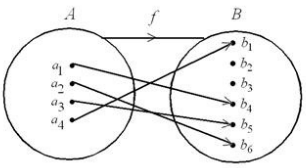
$f : A \to B$ एकैकी है यदि $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \forall a, b \in A$

उदाहरण 1: फलन f जो विश्व के प्रत्येक देश को उसकी राजधानी से सम्बद्ध करता है, एक एकैकी फलन है क्योंकि भिन्न भिन्न देश की राजधानियाँ भिन्न भिन्न हैं।

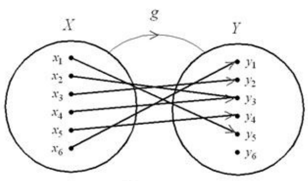
उदाहरण 2: यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 5, 8, 11, 13\}$ तथा $f : A \to B, f(x) = 3x - 1$

द्वारा परिभाषित हो तब $f(1) = 2,\ f(2) = 5, f(3) = 8, f(4) = 11$ इस प्रकार हम देखते हैं कि f के अर्न्तगत A के भिन्न भिन्न अवयवों के B में भिन्न भिन्न प्रतिबिम्ब हैं। अतः f एक एकैकी फलन है।

उदाहरण 3: यदि $f : A \to B$ तथा $g : X \to Y$ निम्न चित्रों से प्रदर्शित होने वाले दो फलन हो :



चित्र 2.14



चित्र 2.15

स्पष्टतः $f : A \to B$ एक एकैकी फलन है परन्तु $g : X \to Y$ एकैकी फलन नहीं है क्योंकि x के दो अवयवों x_2 तथा x_4 का Y में एक ही प्रतिबिम्ब y_3 है।

उदाहरण 4: फलन $f : N \to Z$ जहाँ $f(x) = x^2$ एक एकैकी फलन है क्योंकि $x, y \in N, x \neq y \Rightarrow x^2 \neq y^2$ $\Rightarrow f(x) \neq f(y)$ परन्तु $f : Z \to Z, f(x) = x^2$ एकैकी फलन नहीं है क्योंकि $3, -3 \in Z$ ऐसे अवयव हैं कि $3 \neq -3$ परन्तु $f(-3) = 9 = f(3)$ अर्थात् -3 तथा 3 का प्रतिबिम्ब एक ही अवयव 9 है।

टिप्पणी : यदि $f : A \to B$ कोई फलन हो तो $x = y \Rightarrow f(x) = f(y), A$ के सभी अवयवों x, y के लिए सत्य है परन्तु $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ केवल तभी सत्य होगा जब f एकैकी फलन है।

(ii) बहु–एकी फलन (Many-one function):

समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f बहु–एकी फलन कहलाता है यदि f के अर्न्तगत A के दो या अधिक अवयवों का B में एक प्रतिबिम्ब है। अतः $f : A \to B$ बहु–एकी फलन है यदि A में कम से कम दो a तथा b ऐसे अवयव विद्यमान हैं कि $a \neq b$ परन्तु $f(a) = f(b)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि $f : A \to B$ एक एकैकी फलन नहीं है तो यह अवश्य ही बहु–एकी होगा।

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,5,6,8\}$ तथा $B=\{2,3,4,7\}$ हो तथा $f:A\rightarrow B$ निम्न प्रकार परिभाषित हो:

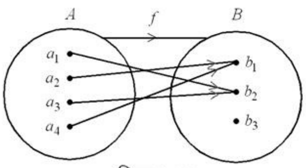
$$f(1)=3, f(5)=4, f(6)=3 \text{ तथा } f(8)=2$$

तब f बहु–एकी फलन है क्योंकि A के दो अवयवों 1 तथा 6 का B में एक ही प्रतिबिम्ब 3 है।

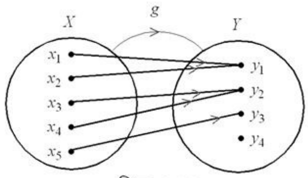
उदाहरण 2: फलन $f:Z\rightarrow Z, f(x)=|x|$ बहु–एकी फलन है क्योंकि किसी $a\in Z$ के लिए $a\neq -a$ परन्तु $f(a)=f(-a)$ $[\because |a|=|-a|]$.

उदाहरण 3: $f:R\rightarrow R,\ f(x)=\sin x$ एक बहु–एकी फलन है क्योंकि $\sin x$ एक **आवर्ती फलन (Periodic function)** है अर्थात् एक से अधिक कोणो के sine का मान समान हो सकता है।

उदाहरण 4: यदि $f:A\rightarrow B$ तथा $g:X\rightarrow Y$ निम्न चित्रों से प्रदर्शित हो :



चित्र 2.16



चित्र 2.17

तब f तथा g दोनों ही बहु–एकी फलन है।

(iii) आच्छादक फलन (Onto function or Surjective function):

समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f आच्छादक कहलाता है यदि B का प्रत्येक अवयव A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब हो अर्थात् B के प्रत्येक अवयव का A में कम से कम एक पूर्व–प्रतिबिम्ब विद्यमान हो।

अतः $f:A\rightarrow B$ एक आच्छादक फलन होगा यदि $b\in B\Rightarrow \exists a\in A$ ताकि $f(a)=b.$

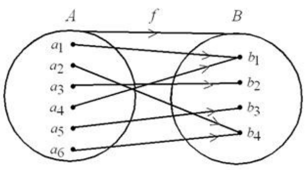
स्पष्टतः यदि f आच्छादक है तब $f(A)=B$ अर्थात् f का सहप्रान्त = f का परिसर

टिप्पणी : यदि किसी फलन $f:A\rightarrow B$ के लिये f के सहप्रान्त तथा परिसर बराबर नहीं हो तो f आच्छादक नहीं होगा।

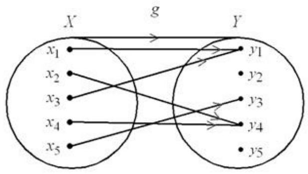
उदाहरण 1: फलन $f:Q\rightarrow Q, f(x)=2x$ एक आच्छादक फलन है क्योंकि सहप्रान्त Q के प्रत्येक अवयव x के लिये उसका पूर्व–प्रतिबिम्ब $x/2$ प्रान्त Q में विद्यमान है।

उदाहरण 2: यदि $A=\{-1,1,-2,2\}, B=\{1,4\}$ तथा $f:A\rightarrow B, f(x)=x^2$ तब f आच्छादक फलन है क्योंकि $f(A)=B$

उदाहरण 3: यदि $f:A\rightarrow B$ तथा $g:X\rightarrow Y$ निम्न चित्रों से प्रदर्शित हों :



चित्र 2.18



चित्र 2.19

तब फलन f एक आच्छादक फलन है जबकि g आच्छादक फलन नहीं है क्योंकि Y के दो अवयवों y_2 तथा y_5 का समुच्चय X में कोई पूर्व–प्रतिबिम्ब नहीं है।

उदाहरण 4: $f:R\rightarrow R, f(x)=x^2$ आच्छादक फलन नहीं है क्योंकि $f(R)=R^{+}\cup\{0\}\neq R$

(iv) अन्तर्क्षेपी फलन (Into function):

समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f अन्तर्क्षेपी फलन कहलाता है यदि B में कम से कम एक ऐसा अवयव विद्यमान हो जो A के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं हो अर्थात् जिसका कोई पूर्व–प्रतिबिम्ब A में विद्यमान नहीं हो। अतः f अन्तर्क्षेपी है यदि $f(A) \neq B$

टिप्पणी : यदि कोई फलन $f : A \to B$ आच्छादक नहीं है तो वह अवश्य ही अन्तर्क्षेपी होगा।

उदाहरण 1: $f : R \to R, f(x) = |x|$ अन्तर्क्षेपी फलन है क्योंकि $f(R) = R^+ \cup \{0\} \neq R$

उदाहरण 2: $f : R \to R, f(x) = e^x$ अन्तर्क्षेपी फलन है क्योंकि

$$f(R) = R^+ \neq R \left[\because\ e^x > 0\ \forall x \in R\right]$$

उदाहरण 3: $f : R \to R, f(x) = cos\, x$ एक अन्तर्क्षेपी फलन है क्योंकि

$$f(R) = \{x \in R | -1 \le x \le 1\} \neq R$$

(v) एकैकी आच्छादक फलन (One-one onto function or Bijective function):

समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f एकैकी आच्छादक कहलाता है यदि f एकैकी के साथ साथ आच्छादक भी हो। अर्थात् $f : A \to B$ एक एकैकी आच्छादक फलन होगा यदि :

(a) f एकैकी है अर्थात् $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \forall a, b \in A$

(b) f आच्छादक है अर्थात् $\forall\, b \in B \Rightarrow \exists a \in A$ ताकि $f(a) = b$

उदाहरण 1: यदि Z_+ धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय हो तथा E धनात्मक सम संख्याओं का समुच्चय हो तथा $f : Z_+ \to E, f(x) = 2x$ द्वारा परिभाषित हो तब f एक एकैकी आच्छादक फलन है क्योंकि: $x, y \in Z_+$ तथा $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ अतः f एक एकैकी फलन है।

साथ ही f आच्छादक भी है क्योंकि $y \in E \Rightarrow \exists \frac{y}{2} \in z^+$ ताकि $f\left(\frac{y}{2}\right) = 2\frac{y}{2} = y$

उदाहरण 2: $f : R \to R, f(x) = 2x + 3$ एक एकैकी आच्छादक फलन है क्योंकि $x, y \in R$ के लिये $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x + 3 = 2y + 3 \Rightarrow x = y$ अतः f एकैकी है।

पुनः माना $y \in R$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना कि y का पूर्व प्रतिबिम्ब x हो तब $f(x) = y$ अर्थात् $2x + 3 = y$ या $x = \frac{y-3}{2} \in R$ अर्थात् f आच्छादक है।

उदाहरण 3: यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $f : A \to A, f(x) = 5 - x$ हो तो $f = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ स्पष्टतया f के अन्तर्गत A के भिन्न भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब भिन्न भिन्न हैं। साथ ही $f(A) = A$ अतः f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 4: यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{1, 4, 9, 16\}$ तथा $f : A \to B, f(x) = x^2$ तब स्पष्टतः f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 19: मान लीजिए कि $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = 2x + 1$ दो वास्तविक फलन है। $(f+g)(x), (f-g)(x), (f/g)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल: स्पष्टतः $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1, (f-g)(x) = x^2 - 2x - 1,$

$$(fg)(x) = x^2(2x+1) = 2x^3 + x^2,\ (f/g)(x) = \frac{x^2}{2x+1},\ x \neq \frac{1}{2}$$

उदाहरण 20: मान लीजिए कि $f(x)=\sqrt{x}$ तथा $g(x)=x$ ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं, तो $(f+g)(x), (f-g)(x), (fg)(x)$ और $(f/g)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ हमें निम्नलिखित परिणाम मिलते हैः

$$(f+g)(x)=\sqrt{x}+x,\ \ (f-g)(x)=\sqrt{x}-x,$$

$$(fg)x=\sqrt{x}\,(x)=x^{3/2} \text{ और } \left(\frac{f}{g}\right)(t)=\frac{\sqrt{x}}{x}=x^{-\frac{1}{2}},\ \ x\neq 0$$

उदाहरण 21: कारण सहित निम्न फलनों का एकैकी, बहु–एकी, अन्तर्क्षेपी अथवा आच्छादक के रूप में वर्गीकरण कीजिएः

(i) $f:N\to N, f(x)=x^2$ (ii) $f:Z\to Z, f(x)=2x+1$

(iii) $f:R\to R, f(x)=x^3+3$

हल : (i) माना $x_1,x_2\in N$ तब $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=x_2$

अतः f एकैकी है।

पुनः $f(N)=\{1^2,2^2,3^2,4^2,...\}=\{1,4,9,16,...\}\neq N$ (सहप्रान्त)

अतः f अन्तर्क्षेपी फलन है।

अतः f एक एकैकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

(ii) माना $x_1,x_2\in Z$ तब $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$ अतः f एक एकैकी फलन है। पुनः माना $y\in Z$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना कि f के अन्तर्गत y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो। तब $f(x)=y$ या $2x+1=y\Rightarrow x=y-1/2$

अब यदि $y\in Z$ तब यह आवश्यक नहीं है कि $(y-1/2)\in Z$ अर्थात् Z (सहप्रान्त) में ऐसे कई अवयव हो सकते हैं जिनका कोई पूर्व–प्रतिबिम्ब Z (प्रान्त) में विद्यमान नहीं है। अतः f एक अन्तर्क्षेपी फलन है।

अतः f एक एकैकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

(iii) यदि $x_1,x_2\in R$ तब $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^3+3=x_2^3+3\Rightarrow x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2$ अतः f एक एकैकी फलन है। पुनः माना $y\in R$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना f के अन्तर्गत y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो तब $f(x)=y$ अर्थात् $x^3+3=y$ या $x=(y-3)^{1/3}$

अब $y\in R\Rightarrow (y-3)^{1/3}\in R$

अतः R (सहप्रान्त) के प्रत्येक अवयव का पूर्व–प्रतिबिम्ब R (प्रान्त) में विद्यमान है। अतः f एक आच्छादक फलन है। इस प्रकार f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 22: यदि $X=\left\{x:\middle|x\in \mathbf{R} \text{ तथा} -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}$ तथा $Y=\{y|y\in \mathbf{R} \text{ तथा} -1\le x\le 1\}$ तब सिद्ध कीजिये कि $f:X\to Y, f(x)=\sin x$ द्वारा परिभाषित फलन एक एकैकी आच्छादक फलन है।

हल : माना $x_1,x_2\in X$ तब $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sin x_1=\sin x_2\Rightarrow x_1=x_2$ $\left[\because -\frac{\pi}{2}\le x_1,x_2\le\frac{\pi}{2}\right]$

अतः f एक एकैकी फलन है।

पुनः माना $y\in Y$ माना f के अन्तर्गत y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो।

तब $f(x)=y \Rightarrow sin x = y \Rightarrow x = sin^{-1} y$ अब चूँकि $-1 \le y \le 1 \therefore \sin^{-1} y$ का एक मान $-\pi/2$ तथा $\pi/2$ के मध्य अवश्य स्थित होगा। अर्थात् $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

अर्थात् $x \in X$ अतः f एक आच्छादक फलन है।

इस प्रकार f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 23: निम्न फलनों को एकैकी, बहु–एकी, अन्तर्क्षेपी अथवा आच्छादक के रूप में वर्गीकृत कीजियेः

(i) $f: R \to R, f(x) = 1 + x^2$

(ii) $f: N \to N, f(n) = \begin{cases} (n+1)/2 & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ n/2 & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$

(iii) $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -1 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$

हल : (i) माना $x_1, x_2 \in R$ तब

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + x_1^2 = 1 + x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

अतः f एकैकी नहीं है। इसलिये f एक बहु–एकी फलन है।

पुनः माना $x \in R$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो।

तब $f(x) = y \Rightarrow x^2 + 1 = y \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$

यदि $y < 1$ तब हमें x का कोई वास्तविक मान प्राप्त नहीं होगा। अतः R के अनेक अवयवों के पूर्व–प्रतिबिम्ब R (प्रान्त) में विद्यमान नहीं है। अतः f एक अन्तर्क्षेपी फलन है।

इस प्रकार f एक बहु–एकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

(ii) $3, 4 \in N$ फलन की परिभाषा के अनुसार

$$f(3) = \frac{3+1}{2} = 2\ ,\ f(4) = \frac{4}{2} = 2$$

अर्थात् $f(3) = f(4)$

अतः f एक बहु–एकी फलन है।

पुनः हम देखते हैं कि $f(1) = 1, f(3) = 2, \ldots\ldots f(2n-1) = n$ इत्यादि। अतः f का परिसर $= N$ अतः f एक आच्छादक फलन है।

इस प्रकार f एक बहु–एकी आच्छादक फलन है।

(iii) हम जानते हैं कि वास्तविक संख्याएँ या तो परिमेय या अपरिमेय होती है। फलन की परिभाषा के अनुसार सभी परिमेय संख्याओं का प्रतिबिम्ब 1 तथा सभी अपरिमेय संख्याओं का प्रतिबिम्ब –1 है। अतः f एक बहु–एकी फलन है। साथ ही f का परिसर $= \{-1, 1\} \ne R$ अतः f एक अन्तर्क्षेपी फलन है।

इस प्रकार f एक बहु–एकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

उदाहरण 24: निम्न फलनों का एकैकी, बहु–एकी आच्छादक अथवा अन्तर्क्षेपी के रूप में वर्गीकरण कीजिए तथा उनके परिसर भी ज्ञात कीजिए :

(i) $f: C \to R, f(z) = |z|$

(ii) $f: R_0 \to R_0, f(x) = \frac{1}{x}$

(iii) $f: R \to R, f(x) = ax + b,\ a,\ b \in R, a \ne 0$

हलः (i) हम देखते हैं कि $z_1 = x+iy$ तथा $z_2 = x-iy (y \neq 0)$ प्रान्त C के भिन्न भिन्न अवयव है परन्तु

$$\left.\begin{array}{l} f(z_1) = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \\ f(z_2) = |x-iy| = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(z_1) = f(z_2)$$

इस प्रकार f के प्रान्त के दो भिन्न अवयवों का एक प्रतिबिम्ब है। अतः f एक बहु–एकी फलन है।

पुनः f का परिसर $= \{|z| : z \in c\} = R^+ \cup \{0\} \neq R$ (सहप्रान्त)

$\therefore$ f आच्छादक फलन नहीं है।

इस प्रकार f एक बहु–एकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

(ii) यदि $x_1, x_2 \in R_0$ तब $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ अतः f एक एकैकी फलन है।

पुनः माना $y \in R_0$ (सहप्रान्त) तब $1/y \in R_0$ (प्रान्त) ताकि $f(1/y) = y$

$\therefore$ f एक आच्छादक फलन है।

अतः f का परिसर = सहप्रान्त $= R_0$ तथा f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

(iii) माना $x_1, x_2 \in R$ तब $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b$

$\Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ $[\because a \neq 0]$ $\therefore f$ एक एकैकी फलन है।

पुनः माना $y \in R$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो।

तब $f(x) = y$ or $ax + b = y$ or $x = \dfrac{y-b}{a} \in R$ $\qquad [\because a \neq 0]$

अतः सहप्रान्त R के प्रत्येक अवयव का पूर्व–प्रतिबिम्ब R (प्रान्त) में विद्यमान है। अतः f एक आच्छादक फलन है। इस प्रकार f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 25: यदि $A = R - \{2\}$ तथा $B = R - \{1\}$ तथा $f : A \to B, f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ द्वारा परिभाषित हो तो सिद्ध कीजिए कि f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

हल : यदि $x, y \in A$ तब $f(x) = f(y) \Rightarrow \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{y-1}{y-2}$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(y-2) = (x-2)(y-1)$$

$$\Rightarrow \quad xy - y - 2x + 2 = xy - x - 2y + 2$$

$$\Rightarrow \quad -y - 2x = -x - 2y \Rightarrow x = y$$

अतः f एकैकी है।

पुनः $y \in B$ माना यदि संभव हो तो माना y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो तब

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = y \Rightarrow x - 1 = y(x-2) \Rightarrow x = \frac{1-2y}{1-y}$$

स्पष्टतः क्योंकि $y \neq 1$, x एक वास्तविक संख्या है। साथ ही $\dfrac{1-2y}{1-y} \neq 2$ क्योंकि $\dfrac{1-2y}{1-y} = 2$ लेने पर हमें $1 = 0$ प्राप्त होता है जो अर्थहीन है।

$\therefore$ B के प्रत्येक अवयव का A में पूर्व–प्रतिबिम्ब विद्यमान है। अतः f आच्छादक है।

इस प्रकार एक एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्नमाला 2.4

1. कारण सहित निम्न फलनों का एकैकी, बहु–एकी, अन्तर्क्षेपी अथवा आच्छादक रूप में वर्गीकरण कीजिये :

   (i) $f: Q \to Q,\ f(x) = 3x + 7$ (ii) $f: C \to R,\ f(x+iy) = x$

   (iii) $f: R \to [-1,1],\ f(x) = \sin x$ (iv) $f: N \to Z,\ f(x) = |x|$

2. यदि $A = \{x \mid -1 \le x \le 1\} = B$ तो A से B में परिभाषित निम्न फलनों के लिये बताइए कि कौन से एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादक है :

   (i) $f(x) = \dfrac{x}{2}$ (ii) $g(x) = |x|$ (iii) $h(x) = x^2$ (iv) $k(x) = sin\,\pi\, x$

3. यदि $f: C \to C, f(x+iy) = (x-iy)$ हो तो सिद्ध कीजिए कि f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

4. निम्न प्रकार के फलनों का एक एक उदाहरण दीजिए :

   (i) एकैकी अन्तर्क्षेपी (ii) बहु–एकी आच्छादक

   (iii) आच्छादक पर एकैकी नहीं (iv) एकैकी पर आच्छादक नहीं

   (v) न एकैकी न आच्छादक (vi) एकैकी आच्छादक

5. सिद्ध कीजिये कि $f: R \to R, f(x) = cos\, x$ एक बहु–एकी अर्न्तक्षेपी फलन है। f के प्रान्त तथा सहप्रान्त को इस प्रकार परिवर्तित कीजिए कि f हो जाए:

   (i) एकैकी अन्तर्क्षेपी (ii) बहु–एकी आच्छादक (iii) एकैकी आच्छादक

6. यदि $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, $O = \{1, 3, 5, 7, ...\}, E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ तथा f_1, f_2 निम्न प्रकार परिभाषित फलन हो :

   $f_1: N \to O,\ f_1(x) = 2x - 1$; $f_2: N \to E,\ f_2(x) = 2x$

   तो सिद्ध कीजिए कि f_1 तथा f_2 एकैकी आच्छादक है।

7. यदि फलन f वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R से R में निम्न प्रकार परिभाषित है तो कारण सहित उनका एकैकी , बहु–एकी, अन्तर्क्षेपी अथवा आच्छादक के रूप में वर्गीकरण कीजिए:

   (i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = x^3$ (iii) $f(x) = x^3 + 3$ (iv) $f(x) = x^3 - x$

विविध प्रश्नमाला 2

1. यदि $A = \{a, b, c, d\}$ तथा $B = \{p, q, r, s\}$ तब A से B में सम्बन्ध है :

   (A) $\{(a,p), (b,r), (c,r)\}$ (B) $\{(a,p), (b,q), (c,r), (s,d)\}$

   (C) $\{(b,a), (q,b), (c,r)\}$ (D) $\{(c,s), (d,s), (r,a), (q,b)\}$

2. N में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $x R y \Leftrightarrow x + 4y = 16$, तो R का परिसर है:

   (A) $\{1, 2, 4\}$ (B) $\{1, 3, 4\}$ (C) $\{1, 2, 3\}$ (D) $\{2, 3, 4\}$

3. N में सम्बन्ध $\{(1,2), (2,5), (3,10), (4,17), ...\}$ का नियम रूप है :

   (A) $\{(x,y) \mid x, y \in N,\ y = 2x + 1\}$ (B) $\{(x,y) \mid x, y \in N,\ y = x^2 + 1\}$

   (C) $\{(x,y) \mid x, y \in N,\ y = 3x - 1\}$ (D) $\{(x,y) \mid x, y \in N,\ y = x + 3\}$

4. यदि $A = \{2, 3, 4\}$ तथा $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. A से B में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि "x, y को विभाजित करता है तब R^{-1} है" :

   (A) $\{(4,2), (6,2), (8,2), (3,3), (6,3), (4,4), (8,4)\}$ (B) $\{(2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6), (4,4), (4,8)\}$

   (C) $\{(3,3), (4,4), (8,4)\}$ (D) $\{(4,2), (6,3), (8,4)\}$

5. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में सम्बन्ध "x, y से छोटा है" होगा :
(A) स्वतुल्य तथा संक्रामक (B) सममित तथा संक्रामक
(C) प्रति–सममित तथा संक्रामक (D) स्वतुल्य तथा प्रति–सममित

6. अशून्य पूर्णांकों के समुच्चय में एक सम्बन्ध इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x^y = y^x$ तब R है:
(A) स्वतुल्य तथा सममित परन्तु संक्रामक नहीं (B) स्वतुल्य तथा प्रति–सममित परन्तु संक्रामक नहीं
(C) स्वतुल्य, प्रतिसममित तथा संक्रामक (D) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक

7. यदि सम्बन्ध R, "x, y का भाजक है" द्वारा परिभाषित हो तो बताइए कि N के निम्न उपसमुच्चयों में से कौन सा उपसमुच्चय एक पूर्ण क्रमित समुच्चय है :
(A) $\{36, 3, 9\}$ (B) $\{7, 77, 11\}$ (C) $\{3, 6, 9, 12, 24\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

8. पूर्णाकों के समुच्चय Z पर परिभाषित निम्न सम्बन्धों में से कौन सा सम्बन्ध तुल्यता सम्बन्ध नहीं है:
(A) $aR_1b \Leftrightarrow (a+b)$ एक सम पूर्णांक है (B) $aR_2b \Leftrightarrow (a-b)$ एक सम पूर्णांक है
(C) $aR_3b \Leftrightarrow a < b$ (D) $aR_4b \Leftrightarrow a = b$

9. समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ पर एक सम्बन्ध R परिभाषित है जहाँ $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3)\}$ तब R है:
(A) स्वतुल्य परन्तु संक्रामक नहीं (B) स्वतुल्य परन्तु सममित नहीं
(C) सममित तथा संक्रामक (D) न सममित न स्वतुल्य

10. यदि $A = \{a, b, c\}$ तो में परिभाषित किए जाने वाले सभी संभव अरिक्त सम्बन्धों की संख्या है :
(A) 511 (B) 512 (C) 8 (D) 7

11. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तब निम्न में से कौन A में एक फलन है :
(A) $f_1 = \{(x, y) | y = x+1\}$ (B) $f_2 = \{(x, y) | x + y > 4\}$
(C) $f_3 = \{(x, y) | y < x\}$ (D) $f_4 = \{(x, y) | x + y = 5\}$

12. फलन $f : N \to N, f(x) = 2x + 3$ है।
(A) एकैकी आच्छादक (B) एकैकी अन्तर्क्षेपी (C) बहु–एकी आच्छादक (D) बहु–एकी अन्तर्क्षेपी

13. R से R में परिभाषित निम्न में से कौन सा फलन आच्छादक है।
(A) $f(x) = |x|$ (B) $f(x) = e^{-x}$ (C) $f(x) = x^3$ (D) $f(x) = \sin x$

14. R से R में परिभाषित निम्न में से कौन सा फलन एकैकी है।
(A) $f(x) = |x|$ (B) $f(x) = \cos x$ (C) $f(x) = e^x$ (D) $f(x) = x^2$

15. $f : R \to R, f(x) = x^2 + x$ है।
(A) एकैकी आच्छादक (B) एकैकी अन्तर्क्षेपी (C) बहु–एकी आच्छादक (D) बहु–एकी अन्तर्क्षेपी

16. निम्न में से कौन सा फलन आच्छादक है :
(A) $f : Z \to Z, f(x) = |x|$ (B) $f : N \to Z, f(x) = |x|$
(C) $f : R_0 \to R^+, f(x) = |x|$ (D) $f : C \to R, f(x) = |x|$

17. फलन $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$ का प्रान्त है :
(A) R^+ (B) R^- (C) R_0 (D) R

18. x वास्तविक संख्या हो तब $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ का परिसर है :

(A) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (B) $(-2, 2)$ (C) $(-1, 1)$ (D) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

19. फलन $f(x) = \cos\frac{x}{3}$ का परिसर है :

(A) $(0, \infty)$ (B) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (C) $[-1, 1]$ (D) $[0, 1]$

20. $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ से R में परिभाषित निम्न में से कौनसा फलन एकैकी आच्छादक है :

(A) $f(x) = \tan x$ (B) $f(x) = \cot x$ (C) $f(x) = \cos x$ (D) $f(x) = e^x + e^{-x}$

21. निम्न सम्बन्ध R के प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए :

$$R = \{(x+1, x+5) | x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

22. यदि $A = \{1, 2\}$ तब A पर परिभाषित सभी अरिक्त सम्बन्धों को लिखिए।

23. निम्न सम्बन्धों के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $R_1 = \{(x, y) | x, y \in N$ तथा $x + y = 10\}$

(ii) $R_2 = \{(x, y) | y = |x-1|, x \in Z$ तथा $|x| \leq 3\}$

24. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में दो सम्बन्ध R_1 तथा R_2 निम्न प्रकार परिभाषित है :

(i) $aR_1b \Leftrightarrow a - b > 0$ (ii) $aR_2b \Leftrightarrow |a| \leq b$

R_1 तथा R_2 की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

25. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$aRb \Leftrightarrow a^2 - 4ab + 3b^2 = 0, \quad (a, b \in N)$$

सिद्ध कीजिए कि R स्वतुल्य है परन्तु सममित तथा संक्रामक नहीं है।

26. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में दो सम्बन्ध R_1 तथा R_2 निम्न प्रकार परिभाषित है :

(i) $aR_1b \Leftrightarrow |a| = |b|$ (ii) $aR_2b \Leftrightarrow |a| \leq |b|$

सिद्ध कीजिए कि R_1 एक तुल्यता सम्बन्ध है पर R_2 एक तुल्यता सम्बन्ध नहीं है।

27. समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$$

R की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

28. फलन $1/\sqrt{(x+1)(x+2)}$ का प्रान्त ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **क्रमित युग्म :** दो अवयवों के क्रमित समुच्चय को क्रमित युग्म कहते हैं तथा इसे (a,b) द्वारा व्यक्त किया जाता है।
$(a,b) \neq (b,a)$ तथा $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ तथा $b=d$
2. दो समुच्चयों A तथा B के कार्तीय गुणन को $A \times B$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा
$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$.
3. समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई भी सम्बन्ध R, $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है। **विलोमत :** $A \times B$ का प्रत्येक उपसमुच्चय A से B में एक सम्बन्ध परिभाषित करता है।
4. यदि समुच्चय A में अवयवों की संख्या m तथा समुच्चय B में अवयवों की संख्या n हो तो A से B में परिभाषित अरिक्त सम्बन्धों की संख्या $2^{mn}-1$ होगी।
5. R का प्रान्त $= \{a | (a,b) \in R\}$, R का परिसर $= \{b | (a,b) \in R\}$.
6. यदि R समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई सम्बन्ध हो तो R के प्रतिलोम सम्बन्ध को R^{-1} से निरूपित किया जाता है तथा $R^{-1} = \{(a,b) | (a,b) \in R\}$ अर्थात् $R^{-1} = (a,b) \in R \Leftrightarrow (a,b) \in R^{-1}$
7. R का परिसर का $= R^{-1}$ प्रान्त तथा R का प्रान्त $= R^{-1}$ का परिसर
8. **तत्समक सम्बन्ध :** समुच्चय A में परिभाषित एक ऐसा सम्बन्ध जिसके अन्तर्गत समुच्चय का प्रत्येक अवयव स्वंय और केवल स्वंय से सम्बन्धित हो, A में तत्समक सम्बन्ध कहलाता है तथा इसे I_A द्वारा निरूपित किया जाता है अर्थात् $I_A = \{(a,a) | a \in A$ तथा $(a,b) \not\in I_A\}$
9. **स्वतुल्य सम्बन्ध** : समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R जिसके अर्न्तगत A का प्रत्येक अवयव स्वंय से सम्बन्धित हो, स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है। अर्थात् R स्वतुलय होगा यदि $a \in R \Rightarrow (a,a) \in R$.
10. **सममित सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R सममित कहलाता है यदि
$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R, \forall a,b \in A$
11. **संक्रामक सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R संक्रामक कहलाता है यदि $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R, \forall a,b,c, \in A$.
12. **तुल्यता सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध कहलाता है यदि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हो।
13. **प्रति–सममित सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R प्रति–सममित कहलाता है यदि $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R \Rightarrow a=b, \forall a,b \in A$
14. **आंशिक क्रम सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध होगा यदि R स्वतुल्य, प्रति –सममित तथा संक्रामक है।
15. **पूर्ण क्रम सम्बन्ध** – किसी समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध होगा यदि
(i) R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है
(ii) $a,b \in R \Rightarrow$ या तो $(a,b) \in R$ या $(b,a) \in R$ या $a=b$
16. **फलन** – समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f एक नियम है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध होता है।
17. **प्रांत एवं सहप्रान्त** – समुच्चय A फलन का प्रान्त तथा समुच्चय B सहप्रान्त कहलाता है।
18. **पूर्ण प्रतिबिम्ब** – यदि फलन f के अर्न्तगत समुच्चय A का अवयव 'a' समुच्चय B के अवयव 'b' से सम्बद्ध है तो b को a का प्रतिबिम्ब तथा a को b का पूर्व प्रतिबिम्ब कहते हैं।
19. **परिसर** – f के अर्न्तगत A के अवयवों के प्रतिबिम्बों का समुच्चय फलन f का परिसर कहलाता है।
20. **अचर फलन** – एक ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत उसके प्रांत का प्रत्येक अवयव सहप्रांत के एक ही अवयव से सम्बद्ध हो, अचर फलन कहलाता है।

21. **तत्समक फलन** – किसी समुच्चय A से A में परिभाषित ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं और केवल स्वयं से सम्बद्ध हो, A का तत्समक फलन कहलाता है।
22. **तुल्य फलन** – दो फलन f तथा g तुल्य कहलाते है यदि
    (i) f का प्रान्त $= g$ का प्रान्त (ii) f का सहप्रान्त $= g$ का सहप्रान्त
    (iii) $f(x) = g(x)\ \forall\ x$
23. **बहुपद फलन** – फलन $f : R \to R$ एक बहुपदीय फलन कहलाता है यदि R के प्रत्येक x के लिए $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, जहाँ n एक ऋणेत्तर पूर्णांक है तथा $a_0, a_1, a_2, ...a_n \in R$
24. **परिमेय फलन** – $f(x)/g(x)$ के प्रकार के फलन, जहाँ $f(x)$ तथा $g(x)$ एक प्रांत में, x के परिभाषित बहुपदीय फलन हैं, जिसमें $g(x) \neq 0$ परिमेय फलन कहलाते है।
25. **मापांक फलन** – $f(x) = |x|$ प्रत्येक $x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$, मापाँक फलन कहलाता है।
    अर्थात् $f(x) = \begin{cases} x & ; \forall\ x \geq 0 \\ -x & ; \forall\ x < 0 \end{cases}$
26. **चिह्न फलन** – प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{ यदि } x > 0 \\ 0 & ; \text{ यदि } x = 0 \\ -1 & ; \text{ यदि } x < 0 \end{cases}$
    द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ चिह्न फलन कहलाता है।
27. **महत्तम पूर्णांक फलन** – $f(x) = [x]$, $x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$, x से कम या x के बराबर महत्तम पूर्णांक का मान ग्रहण करता है $[x] \leq x$ ऐसा फलन महत्तम पूर्णांक फलन कहलाता है।
28. **एकैकी फलनः** फलन $f : A \to B$ एकैकी होगा यदि $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \forall a, b \in A$
29. **बहुएकी फलनः** यदि फलन एकैकी नहीं है तो स्वतः ही बहु–एकी होगा।
30. **आच्छादक फलनः** $f : A \to B$ आच्छादक होगा यदि $b \in B \Rightarrow \exists\, a \in A$ ताकि $f(a) = b$ अर्थात् इस स्थिति में f का सहप्रात $= f$ का परिसर
31. **अर्न्तक्षेपी फलनः** यदि फलन f आच्छादक नहीं है तो स्वतः ही अर्न्तक्षेपी होगा। पुनः यदि कोई फलन एकैकी तथा आच्छादक दोनों हो तो ऐसे फलन को एकैकी आच्छादक फलन कहते हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 2.1

1. (i), (ii) तथा (v) सम्बन्ध हैं।

2. (i) $\{(x,y)|x,y\in N,\ y=2x+1\}$ (ii) $\{(x,y)|x,y\in N,\ x+2y=8\}$ (iii) $\{(x,y)|x,y\in N,\ y=x-1\}$

3. $R=\{(2,3),(2,7),(3,7),(3,10),(4,3),(4,7),(5,3),(5,6),(5,7)\}$

   R का प्रान्त $=\{2,3,4,5\}$, R का परिसर $=\{3,6,7,10\}$

4. $R=\{(0,5),(0,-5),(3,4),(-3,4),(3,-4),(-3,-4),(4,3),(4,-3),(-4,3),(-4,-3),(5,0),(-5,0)\}$
   $R^{-1}=\{(5,0),(-5,0),(4,3),(4,-3),(-4,3),(-4,-3),(3,4),(3,-4),(-3,4),(-3,-4),(0,5),(0,-5)\}$

   R का प्रान्त $=\{0,3,-3,4,-4,5,-5\}=R^{-1}$ का प्रान्त

5. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

6. (i) $R=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$
   (ii) $R^{-1}=\{(4,1),(5,1),(4,2),(5,2)(4,3),(5,3),(5,4)\}$

7. (i) $R_1=\{(2,1),(4,2),(6,3)\}$ (ii) $R_2=\{(8,6),(9,7),(10,8)\}$
   (iii) $R_3=\{(0,4),(3,2),(6,0)\}$ (iv) $R_4=\{(5,10),(5,15),(6,12),(6,18),(8,16)\}$

8. (i) $R^{-1}=\{(3,2),(4,2),(3,3),(2,3),(2,4)\}$ (ii) $R^{-1}=\{(x,y)|x,y\in N,\ x>y\}$
   (iii) $R^{-1}=\{(4,0),(2,3),(0,6)\}$

प्रश्नमाला 2.2

1. (i) R_1 सममित तथा संक्रामक परन्तु स्वतुल्य नहीं। (ii) R_2 स्वतुल्य एवं संक्रामक परन्तु सममित नहीं।
(iii) R_3 स्वतुल्य एवं सममित परन्तु संक्रामक नहीं। (iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक परन्तु सममित नहीं।

2. (i) केवल सममित (ii) केवल सममित (iii) केवल सममित (iv) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक

5. नहीं 8. स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक 10. केवल सममित

12. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) हाँ (v) नहीं (vi) नहीं

प्रश्नमाला 2.3

1. (a) नही (b) फलन है (c) नहीं (d) फलन है (e) फलन है (f) नहीं (g) फलन है
   (h) नहीं (i) फलन है (j) फलन है (k) फलन है

2. (i) $\{x\in R|0\le x<\infty\}$ (ii) $\{2,-2\}$ (iii) ϕ

3. f का परिसर $=\{1,2,5\}$ 4. (i) $f(A)=\{-4,-3,0,5\}$ (ii) ϕ, $\{0,2\}$, -2

5. (a) R का f प्रतिबिम्ब समुच्चय $=R^+$ (b) $\{0\}$ (c) सत्य है।

6. (a) R (b) $\{e^{-2}\}$ (c) सत्य है।

7. f का परिसर $=\{y=f(x)|0\le y<1\}$ 8. हाँ, $\alpha=2,\ \beta=-1$

प्रश्नमाला 2.4

1. (i) एकैकी आच्छादक (ii) बहु–एकी आच्छादक
   (iii) बहु–एकी आच्छादक (iv) एकैकी अन्तर्क्षेपी

2. (i) f एकैकी अन्तर्क्षेपी है (ii) g बहु–एकी अन्तर्क्षेपी है
   (iii) h बहु–एकी अन्तर्क्षेपी है (iv) बहु–एकी आच्छादक

4. (i) $f: N \to N,\ f(x) = 2x$ (ii) $f: R_0 \to R^+,\ f(x) = x^2$

(iii) $f: z_0 \to N,\ f(x) = |x|$ (iv) $f: Z \to Z,\ f(x) = 2x$

(v) $f: R \to R,\ f(x) = x^2$ (vi) $f: Z \to Z,\ f(x) = -x$

5. (i) $f:[0,\pi] \to R$ (ii) $f: R \to [-1,1]$ (iii) $f:[0,\pi] \to [-1,1]$

7. (i) बहु–एकी अन्तर्क्षेपी (ii) एकैकी आच्छादक

(iii) एकैकी आच्छादक (iv) बहु–एकी आच्छादक

विविध प्रश्नमाला 2

1. A	**2.** C	**3.** B	**4.** A	**5.** C	**6.** D
7. A	**8.** C	**9.** B	**10.** A	**11.** D	**12.** B
13. C	**14.** C	**15.** D	**16.** C	**17.** B	**18.** A
19. C	**20.** A				

21. प्रान्त $= \{0,1,2,3,4,5,6\}$, परिसर $= \{5,6,7,8,9,10\}$

22. $\{(1,1)\}, \{(2,2)\}, \{(1,2)\}, \{(2,1)\},$

$\{(1,1),(1,2)\}, \{(1,1),(2,1)\}, \{(2,2),(1,2)\}, \{(2,2),(2,1)\}, \{(1,2),(2,1)\}, \{(1,1),(2,2)\}$

$\{(1,1),(2,2),(1,2)\}, \{(1,1),(2,2),(2,1)\}, \{(1,1),(1,2),(2,1)\}, \{(2,2),(1,2),(2,1)\},$

$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

23. (i) प्रान्त $= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, परिसर $= \{9,8,7,6,5,4,3,2,1\}$

(ii) प्रान्त $= \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, परिसर $= \{4,3,1,0,2\}$

24. (i) R_1 केवल संक्रामक है। (ii) R_2 केवल संक्रामक है। 27. स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक

28. $(-\infty,-2) \cup (-1,\infty)$