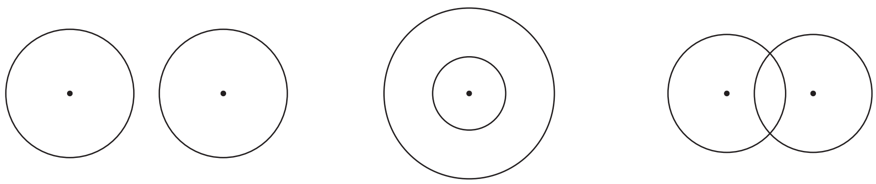
3 वृत्त

आओ सीखें

- एक, दो तथा तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त
- स्पर्शवृत्त
- अंतर्लिखित कोण तथा अंतःखंडित चाप
- स्पर्शरेखा छेदनरेखा कोण प्रमेय
- वृत्त की छेदन रेखा तथा स्पर्शरेखा
- वृत्तचाप
- चक्रीय चतुर्भुज
- जीवाओं के प्रतिच्छेदन का प्रमेय

थोड़ा याद करें

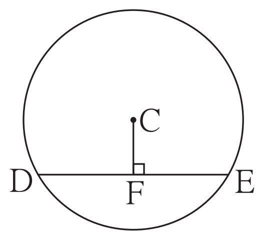
वृत्त के केंद्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, अंतःभाग, बहिर्भाग आदि नामों से आप भलीभाँति परिचित हैं । सर्वांगसम वृत्त, एक केंद्रीय वृत्त तथा परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले वृत्तों को याद कीजिए ।



सर्वांगसम वृत्त   एक केंद्रीय वृत्त   परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले वृत्त

नौवीं कक्षा में अध्ययन किए हुए जीवा के गुणधर्म को निम्नलिखित कृति की सहायता से याद कीजिए ।

कृति I : संलग्न आकृति में C केंद्रवाले वृत्त में रेख DE एक जीवा है । रेख CF $\perp$ जीवा DE, यदि वृत्त का व्यास 20 सेमी और DE = 16 सेमी हो, तो CF = कितना ?



आकृति 3.1

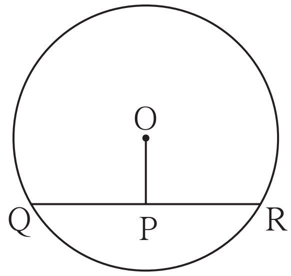
इस प्रश्न को हल करने के लिए उपयोग में आने वाले प्रमेय तथा उसके गुणधर्म को याद करके लिखिए ।

(1) वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब .... ____________________

(2) ____________________

(3) ____________________

इन गुणधर्मों का उपयोग कर प्रश्न हल कीजिए।



आकृति 3.2

कृति II : संलग्न आकृति में O केंद्रवाले वृत्त की रेख QR एक जीवा है। बिंदु P जीवा QR का मध्यबिंदु है। यदि QR = 24, OP = 10 तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

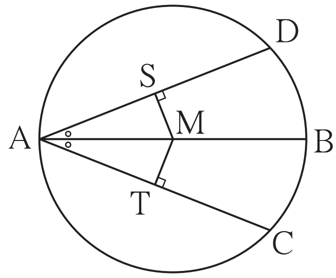
यह प्रश्न हल करने के लिए उपयुक्त प्रमेय लिखिए ।

(1) ______________________________

(2) ______________________________

इन प्रमेयों का उपयोग करके उदाहरण हल कीजिए ।

कृति III : आकृति में वृत्त का केंद्र M तथा
रेख AB व्यास है ।
रेख MS ⊥ जीवा AD
रेख MT ⊥ जीवा AC
∠DAB ≅ ∠CAB
तो सिद्‌ध कीजिए; जीवा AD ≅ जीवा AC



आकृति 3.3

यह प्रश्न हल करने के लिए निम्नलिखित में से किस प्रमेय का उपयोग करेंगे ?

(1) वृत्त की दो जीवाएँ केंद्र से समान दूरी पर हों तो वे परस्पर सर्वांगसम होती हैं ।

(2) एक ही वृत्त की सर्वांगसम जीवाएँ वृत्त के केंद्र से समान दूरी पर होती हैं ।

इनके आलावा त्रिभुजों की सर्वांगसमता की निम्नलिखित में से कौन-सी कसौटी उपयोगी होगी ?

(1) भुकोभु, (2) कोभुको, (3) भुभुभु, (4) कोकोभु, (5) कर्ण-भुजा

उचित कसौटी और प्रमेय का प्रयोग करके उपपत्ति लिखिए ।

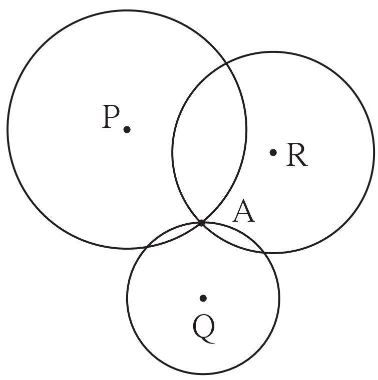
आओ जानें

एक, दो तथा तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त

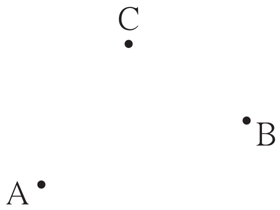
संलग्न आकृति में,किसी एक प्रतल में बिंदु A दर्शाया गया है । केंद्रबिंदु P, Q, R वाले तीन वृत्त बिंदु A से होकर जाते हैं । बिंदु A से जाने वाले ऐसे कितने वृत्त हो सकते हैं ?

यदि आपका उत्तर 'कितने भी' या 'असंख्य' है तो वह सही है ।

एक ही बिंदु से होकर जाने वाले असंख्य वृत्त हो सकते हैं ।



आकृति 3.4



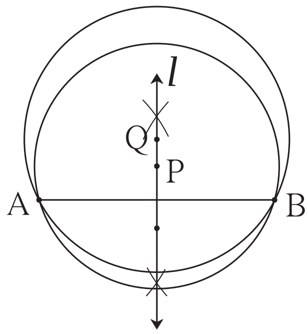
आकृति 3.5

संलग्न आकृति में A और B इन दो भिन्न बिंदुओं से होकर जानेवाले कितने वृत्त होंगे?

A, B, C इन तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले कितने वृत्त होंगे?

आइए देखें आगे दी गई कृतियों से कोई उत्तर प्राप्त होता है क्या?

कृति I : बिंदु A और बिंदु B को जोड़ने वाली रेख AB खींचिए। इस रेखाखंड की लंब समद्विभाजक रेखा l खींचिए। रेखा l पर बिंदु P को केंद्र तथा PA को त्रिज्या मान कर वृत्त खींचिए । देखिए यह वृत्त बिंदु B से भी होकर गुजरता है । इसका कारण बताइए । (लंब समद्विभाजक रेखा का गुणधर्म याद कीजिए ।)

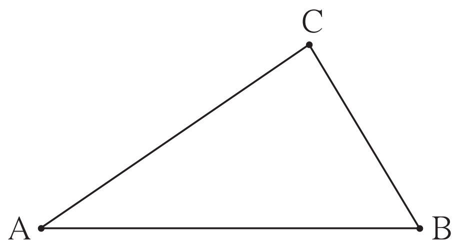


आकृति 3.6

रेखा l पर Q एक और बिंदु लेकर केंद्र Q और त्रिज्या QA लेकर खींचा गया वृत्त भी क्या बिंदु B से होकर जाएगा ? चिंतन कीजिए ।

बिंदु A और बिंदु B से होकर जाने वाले और कितने वृत्त खींचे जा सकेंगे? उनके केंद्र बिंदु कहाँ होंगे?

कृति II : नैकरेखीय (अरेखीय) बिंदु A, B, C लीजिए। इन तीनों बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त खींचिए। इन तीनों बिंदुओं से होकर जाने वाला एक वृत्त और खींचा जा सकेगा क्या? चिंतन कीजिए ।



आकृति 3.7

कृति III : एकरेखीय बिंदु D, E, F लीजिए । इन तीनों बिंदुओं से होकर जाने वाला वृत्त खींचने का प्रयास कीजिए । यदि वृत्त नहीं खींचा जा सकता तो क्यों? इसके बारे में विचार कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

(1) किसी एक बिंदु से होकर जाने वाले असंख्य वृत्त खींचे जा सकते हैं ।

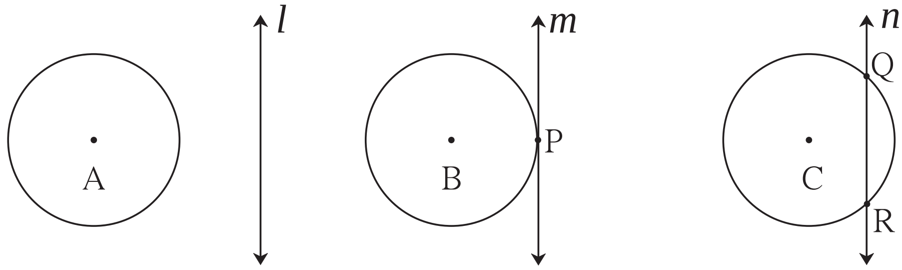
(2) दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाने वाले असंख्य वृत्त होते हैं ।

(3) तीन नैकरेखीय (अरैखिक) बिंदुओं से होकर जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है ।

(4) तीन एकरेखीय बिंदुओं से होकर जाने वाला एक भी वृत्त नहीं खींचा जा सकता ।

आओ जानें

वृत्त की छेदन रेखा और स्पर्शरेखा



आकृति 3.8

आकृति में रेखा l एवं वृत्त के बीच कोई सामान्य बिंदु नहीं है ।

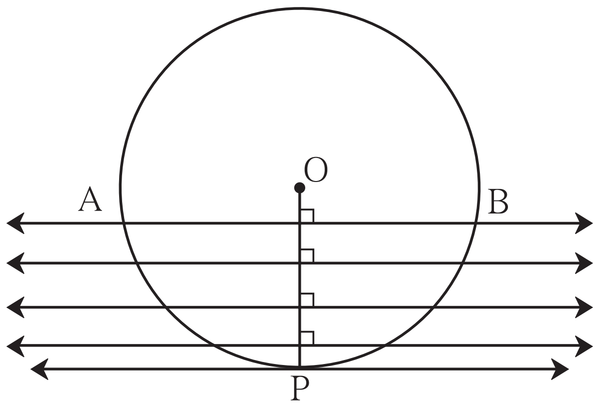
आकृति में रेखा m एवं वृत्त के बीच बिंदु P एक सामान्य बिंदु है। यहाँ m वृत्त की स्पर्श रेखा है एवं बिंदु P यह स्पर्श बिंदु है ।

आकृति में रेखा n एवं वृत्त में दो समान्य बिंदु हैं। Q एवं R रेखा व वृत्त के प्रतिच्छेदन बिंदु हैं। रेखा n को वृत्त की छेदन रेखा कहते हैं ।

वृत्त के स्पर्श रेखा का एक महत्त्वपूर्ण गुणधर्म एक कृति से समझिए ।

कृति :

O केंद्रवाला एक बड़ा वृत्त खींचिए। उस वृत्त की एक त्रिज्या रेख OP खींचिए । रेखा और वृत्त के प्रतिच्छेदन बिंदुओं को A और B नाम दीजिए । कल्पना कीजिए कि रेखा AB बिंदु O से बिंदु P की ओर इसप्रकार सरक रही है कि उसकी पहले की स्थिति नयी स्थिति के समांतर रहेगी । अर्थात रेखा AB और त्रिज्या के बीच का कोण हमेशा समकोण रहेगा ।



आकृति 3.9

ऐसा करने पर बिंदु A और B वृत्त पर परस्पर नजदीक आने लगेंगे । अंत में वे बिंदु P में समाविष्ट हो जाते हैं । इस स्थिति में रेखा AB वृत्त की स्पर्शरेखा होगी परंतु त्रिज्या OP और रेखा AB के बीच का कोण सदैव समकोण ही रहेगा ।

इससे हमें ज्ञात होता है कि वृत्त के किसी भी बिंदु से जाने वाली स्पर्शरेखा उस बिंदु को मिलाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है । इस गुणधर्म को 'स्पर्शरेखा त्रिज्या प्रमेय' कहते हैं ।

स्पर्शरेखा-त्रिज्या प्रमेय (Tangent theorem)

प्रमेय : वृत्त के किसी भी बिंदु से होकर जानेवाली स्पर्शरेखा उस बिंदु को केंद्र से जोड़नेवाली त्रिज्या पर लंब होती है ।

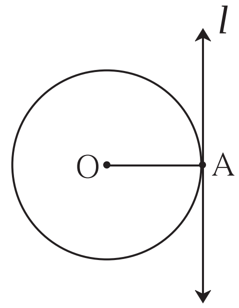
अधिक जानकारी हेतू :

दत्त : O केंद्रवाले वृत्त को, एक रेखा l, बिंदु A पर स्पर्श करती है । रेख OA वृत्त की त्रिज्या है ।

साध्य : रेखा $l \perp$ त्रिज्या OA

उपपत्ति : मानो रेखा l रेख OA पर लंब नहीं है ।

मानो बिंदु O से रेखा l पर, OB लंब खींचा गया ।



आकृति 3.10

स्वाभाविक रूप से बिंदु B, बिंदु A से भिन्न होना चाहिए । (आकृति 3.11 देखिए)

रेखा l पर बिंदु C इस प्रकार लीजिए कि A-B-C और BA = BC

अब, ΔOBC और ΔOBA में,

रेख BC $\cong$ रेख BA .... (रचना)

$\angle$OBC $\cong$ $\angle$OBA .... (प्रत्येक समकोण)

रेख OB $\cong$ रेख OB

$\therefore$ ΔOBC $\cong$ ΔOBA .... (भुकोभु कसौटी)

$\therefore$ OC = OA

परंतु रेख OA यह त्रिज्या है, अर्थात रेख OC भी त्रिज्या होगी ।

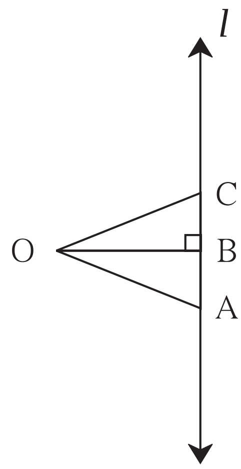
$\therefore$ बिंदु C वृत्त पर स्थित है ।

अर्थात रेखा l, वृत्त को A और C दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करेगी । यह कथन दत्त से असंगत है क्योंकि रेखा l स्पर्शरेखा है .... दत्त

अर्थात रेखा l वृत्त को एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है ।

$\therefore$ रेखा l त्रिज्या OA पर लंब नहीं है; ऐसा मानना असत्य है ।

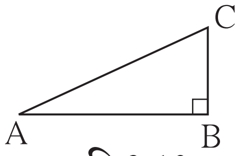
$\therefore$ रेखा $l \perp$ त्रिज्या OA.



आकृति 3.11

थोड़ा याद करें

समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है, यह गुणधर्म पढ़े गए किस प्रमेय का उपयोग कर सिद्ध कर सकते हैं ?

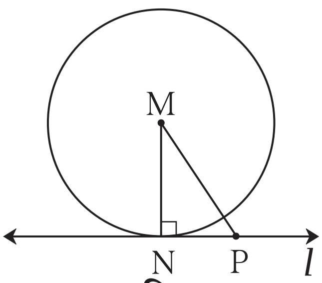


आकृति 3.12

आओ जानें

स्पर्श रेखा – त्रिज्या प्रमेय का विलोम (Converse of Tangent Theorem)

वृत्त की त्रिज्या के बाह्य सिरे से होकर जाने वाली तथा उस त्रिज्या पर लंब रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है ।



आकृति 3.13

दत्त : रेख MN, M केंद्रवाले वृत्त की त्रिज्या है । बिंदु N से जाने वाली रेखा l, त्रिज्या MN पर लंब है ।

साध्य : रेखा l उस वृत्त की स्पर्श रेखा है ।

उपपत्ति : रेखा l पर N के अतिरिक्त एक बिंदु P लीजिए । रेख MP खींचिए ।

अब, Δ MNP में $\angle$ N समकोण है ।

$\therefore$ रेख MP विकर्ण है ।

$\therefore$ रेख MP > रेख MN

$\therefore$ बिंदु P वृत्त पर हो यह संभव नहीं ।

अर्थात रेखा l पर N के अतिरिक्त अन्य कोई भी बिंदु वृत्त पर नहीं है ।

$\therefore$ रेखा l वृत्त को एक ही बिंदु N पर प्रतिच्छेदित करती है ।

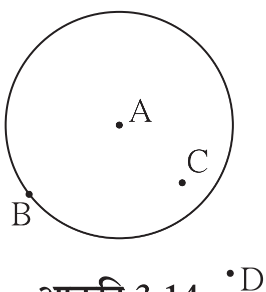
$\therefore$ रेखा l उस वृत्त की स्पर्श रेखा है ।

आओ चर्चा करें

A केंद्रवाले किसी वृत्त पर कोई बिंदु B स्थित है । इस वृत्त के बिंदु B से होकर जानेवाली स्पर्श रेखा खींचनी है ।

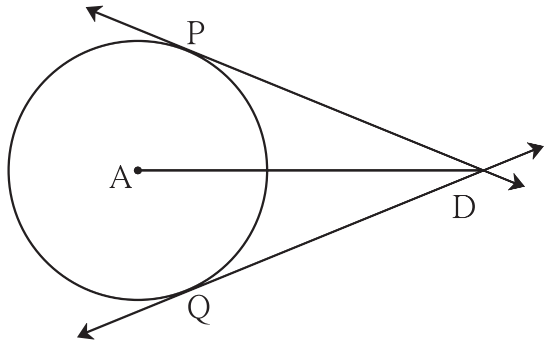
B बिंदु से जानेवाली असंख्य रेखाएँ हो सकती हैं । उनमें से कौन-सी रेखा इस वृत्त की स्पर्श रेखा होगी ? उसे कैसे खींचा जा सकता है ?

क्या बिंदु B से जाने वाली एक से अधिक स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं ?



आकृति 3.14

क्या वृत्त के अंतःभाग में स्थित बिंदु C से उस वृत्त पर स्पर्श रेखा खींची जा सकती है?



आकृति 3.15

क्या वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु D से उस वृत्त पर स्पर्श रेखा खींची जा सकती है? यदि हाँ तो कितनी स्पर्श रेखाएँ होंगी?

चर्चा से आपको ध्यान में आया होगा कि आकृति में दर्शाए अनुसार वृत्त के बाह्यभाग से उस वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

संलग्न आकृति में A केंद्रवाले वृत्त पर रेखा DP और रेखा DQ दो स्पर्शरेखाएँ, क्रमशः बिंदु P और बिंदु Q पर स्पर्श करती हैं।

रेख DP और रेख DQ को स्पर्शरेखाखंड कहते हैं।

स्पर्शरेखाखंड का प्रमेय (Tangent segment theorem)

प्रमेय : वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु से उस वृत्त पर खींचे गए स्पर्श रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं।

साथ की आकृति के आधार पर दत्त और साध्य निश्चित कीजिए।

त्रिज्या AP और AQ खींचकर इस प्रमेय की उपपत्ति नीचे दिए गए रिक्त स्थानों को भरकर पूर्ण कीजिए।

उपपत्ति : Δ PAD और Δ QAD में,

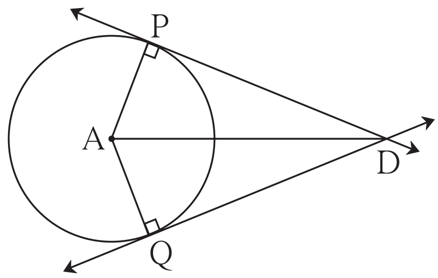
भुजा PA $\cong$ ________ (एक ही वृत्त की त्रिज्या)

भुजा AD $\cong$ भुजा AD ________________

$\angle$ APD = $\angle$ AQD = 90° ......(स्पर्श रेखा का प्रमेय)

$\therefore$ Δ PAD $\cong$ Δ QAD ________________

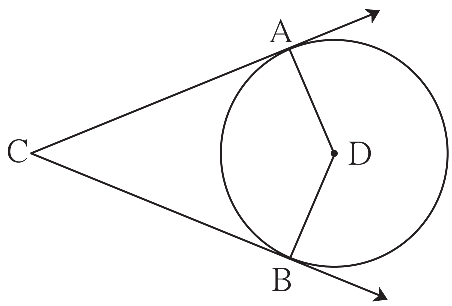
$\therefore$ भुजा DP $\cong$ भुजा DQ ________________



आकृति 3.16

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) दी गई आकृति में, D केंद्रवाला वृत्त $\angle$ ACB के भुजाओं को बिंदु A तथा बिंदु B पर स्पर्श करता है। यदि $\angle$ ACB = 52°, तो $\angle$ ADB का माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.17

हल : चतुर्भुज के चारों कोणों के मापों का योगफल 360° होता है।

$\therefore$ $\angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$

$\therefore$ $52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ$ .... (स्पर्श रेखा त्रिज्या प्रमेय)

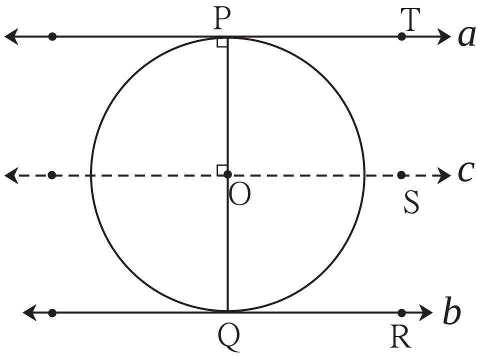
$\therefore$ $\angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$

$\therefore$ $\angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$

उदा. (2) रेखा a और रेखा b, O केंद्रवाले वृत्त की समांतर स्पर्श रेखाएँ वृत्त को क्रमशः बिंदु P तथा Q पर स्पर्श करती हैं, सिद्ध कीजिए कि रेख PQ उस वृत्त का व्यास है ।

उपपत्ति : बिंदु O से रेखा a के समांतर रेखा c खींचिए ।

आकृति में दर्शाएनुसार रेखा a, c, b पर क्रमशः बिंदु T, S, R लीजिए ।



आकृति 3.18

त्रिज्या OP और त्रिज्या OQ खींचिए ।

अब, $\angle OPT = 90°$ ..... (स्पर्श रेखा त्रिज्या प्रमेय)

$\therefore$ $\angle SOP = 90°$..... (अंतःकोण गुणधर्म) .... (I)

अब, रेखा $a \parallel$ रेखा c ..... (रचना से)

रेखा $a \parallel$ रेखा b ..... (दत्त)

रेखा $b \parallel$ रेखा c ..... (स्पर्श रेखा प्रमेय)

अब $\angle OQR = 90°$.... (स्पर्श रेखा त्रिज्या प्रमेय)

$\therefore$ $\angle SOQ = 90°$..... (अंतःकोण गुणधर्म) .... (II)

$\therefore$ (I) तथा (II) से,

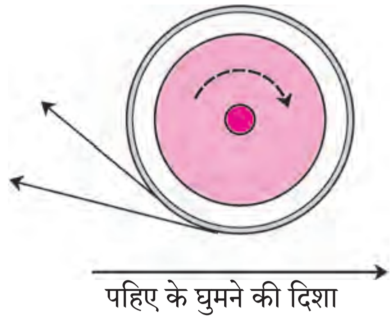
$\angle SOP + \angle SOQ = 90° + 90° = 180°$

$\therefore$ किरण OP और किरण OQ विपरीत किरण हैं ।

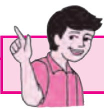
$\therefore$ बिंदु P, O, Q एकरेखीय हैं ।

$\therefore$ रेख PQ वृत्त का व्यास है ।

बरसात में रास्ते पर जमा पानी में मोटर साइकिल जाते समय उसके पिछले पहिए से उड़ने वाले पानी की धारा को आपने देखा होगा । आप के ध्यान में आया होगा कि वे धाराएँ वृत्त की स्पर्श रेखा जैसे दिखाई देती हैं । वे धाराएँ ऐसे ही क्यों दिखाई देती है ? उसकी जानकारी आप अपने विज्ञान अध्यापक से लीजिए ।



घूमते हुए भूचक्र से निकलने वाली चिंगारियाँ उसी प्रकार चाकू को धार देते समय निकलने वाली चिंगारियों का निरीक्षण कीजिए । क्या वह स्पर्श रेखा जैसी दिखाई देती है ?



इसे ध्यान में रखें

(1) स्पर्श रेखा – त्रिज्या प्रमेय : वृत्त के किसी भी बिंदु से होकर जाने वाली स्पर्श रेखा उस बिंदु को केंद्र से जोड़ने वाली त्रिज्या पर लंब होती है ।

(2) स्पर्श रेखा – त्रिज्या प्रमेय का विलोम : वृत्त की त्रिज्या के बाह्य सिरे से होकर जाने वाली और उस त्रिज्या पर लंब रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है ।

(3) वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से उस वृत्त पर खींचे गए स्पर्श रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 3.1

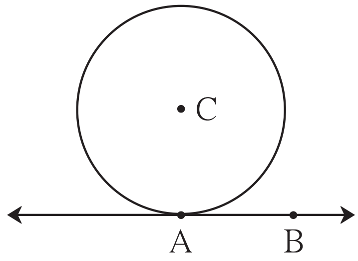
1. संलग्न आकृति में, C केंद्रवाले वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है । रेखा AB वृत्त को बिंदु A पर स्पर्श करता है । इस जानकारी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

   (1) $\angle CAB$ का माप कितने अंश है ? क्यों ?

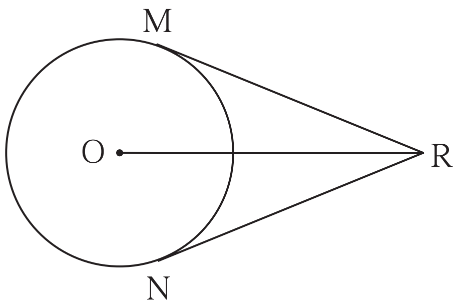
   (2) बिंदु C, रेखा AB से कितनी दूरी पर है ? क्यों ?

   (3) यदि $d(A,B) = 6$ सेमी, तो $d(B,C)$ ज्ञात कीजिए ।

   (4) $\angle ABC$ का माप कितने अंश है ? क्यों ?



आकृति 3.19



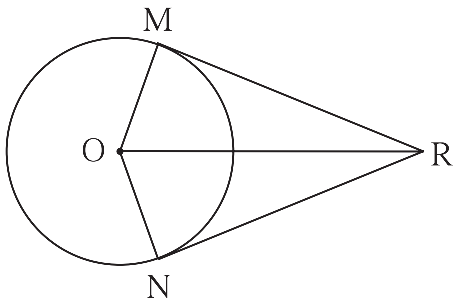
आकृति 3.20

2. संलग्न आकृति में, O केंद्रवाले वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु R से खींचे गए RM और RN स्पर्श रेखाखंड वृत्त को बिंदु M और N पर स्पर्श करते हैं ।
   यदि $l(O,R) = 10$ सेमी तथा वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी हो तो –

   (1) प्रत्येक स्पर्श रेखाखंड की लंबाई कितनी होगी ?

   (2) $\angle$ MRO का माप कितना होगा ? (3) $\angle$ MRN का माप कितना होगा ?

3. रेख RM और रेख RN, O केंद्रवाले वृत्त के स्पर्श रेखाखंड हैं । सिद्ध कीजिए की रेख OR, $\angle MRN$ और $\angle MON$ दोनों कोणों का समद्विभाजक है ।



आकृति 3.21

4. 4.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ परस्पर समांतर हैं । उन स्पर्श रेखाओं के बीच की दूरी कितनी होगी कारण सहित लिखिए ।

ICT Tools or Links

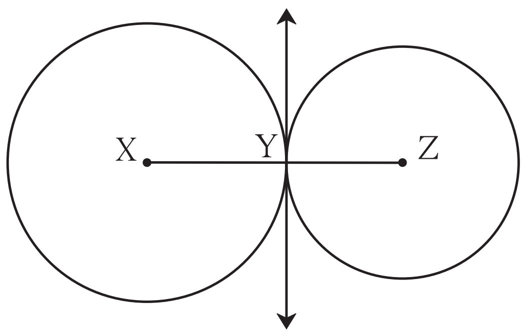
संगणक पर जिओजेब्रा इस सॉफ्टवेअर की सहायता से वृत्त तथा वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु से स्पर्श रेखा खींचकर स्पर्श रेखाखंड़ सर्वांगसम है इसकी जाँच कीजिए ।

आओ जानें

स्पर्श वृत्त (Touching circle)

कृति I :

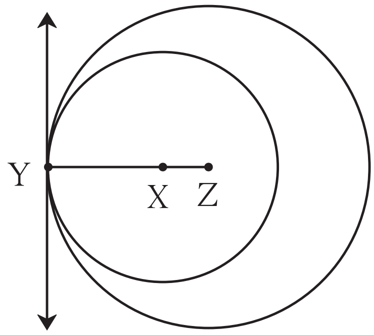
आकृति 3.22 में दर्शाए अनुसार X-Y-Z एकरैखिक बिंदु लीजिए । केंद्र X तथा त्रिज्या XY लेकर वृत्त खींचिए । केंद्र Z तथा त्रिज्या YZ लेकर एक दूसरा वृत्त खींचिए । यह दोनों वृत्त एक दूसरे को एक ही सामान्य बिंदु Y पर स्पर्श करते हैं । बिंदु Y से रेख XZ पर लंब रेखा खींचिए । यह ध्यान रहे कि यह रेखा दोनों वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है ।



आकृति 3.22

कृति II :

आकृति 3.23 में दर्शाए अनुसार Y-X-Z एकरैखिक बिंदु खींचिए ।
केंद्र Z और ZY त्रिज्या लेकर वृत्त खींचिए ।
केंद्र X और XY त्रिज्या लेकर वृत्त खींचिए ।
दोनों वृत्त एक दूसरे को एक ही सामान्य बिंदु Y पर स्पर्श करते हैं ।
बिंदु Y से रेख YZ पर लंब रेखा खींचिए । ध्यान रहे यह रेखा दोनों वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है ।



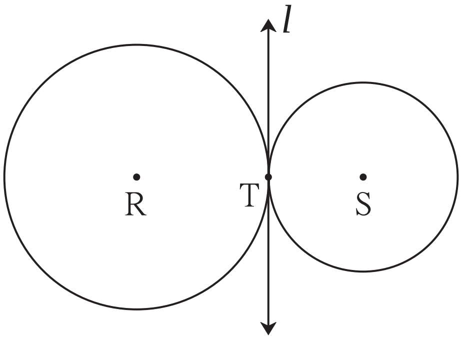
आकृति 3.23

उपर्युक्त कृतियों में आपके ध्यान में आया होगा कि दोनों आकृतियों में वृत्त एक ही प्रतल में हैं और एक दूसरे को एक ही बिंदु पर स्पर्श करते हैं । ऐसे वृत्तों को एक दूसरे को स्पर्श करने वाले वृत्त या **स्पर्श वृत्त** कहते हैं ।

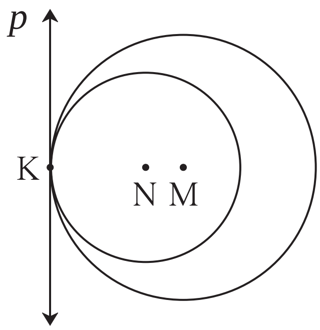
स्पर्श वृत्तों की परिभाषा आगे दिए अनुसार की जाती है ।

किसी प्रतल में स्थित दो वृत्त उसी प्रतल में स्थित एक रेखा को एक ही बिंदु पर स्पर्श करते हों तो उन्हें स्पर्श वृत्त कहते हैं । वह रेखा उन दोनों वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा होती है ।

दोनों वृत्त तथा रेखा पर स्थित सामान्य बिंदु को **सामान्य स्पर्श बिंदु** कहते हैं ।



आकृति 3.24



आकृति 3.25

आकृति 3.24 में केंद्र R तथा केंद्र S वाले वृत्त रेख l को एक ही बिंदु T पर स्पर्श करते हैं । अर्थात उन दोनों स्पर्श वृत्तों की रेखा l सामान्य स्पर्श रेखा है । इस आकृति में वृत्त **बाह्यस्पर्शी** हैं ।

आकृति 3.25 में वृत्त **अंतःस्पर्शी** हैं तथा रेख p उनकी सामान्य स्पर्श रेखा है ।

थोड़ा सोचें

(1) आकृति 3.24 में दिए गए वृत्तों के जैसे परस्पर स्पर्श करने वाले वृत्तों को बाह्यस्पर्शी वृत्त क्यों कहते हैं?

(2) आकृति 3.25 में दिए गए वृत्तों के जैसे परस्पर स्पर्श करने वाले वृत्तों को अंतःस्पर्शी वृत्त क्यों कहते हैं?

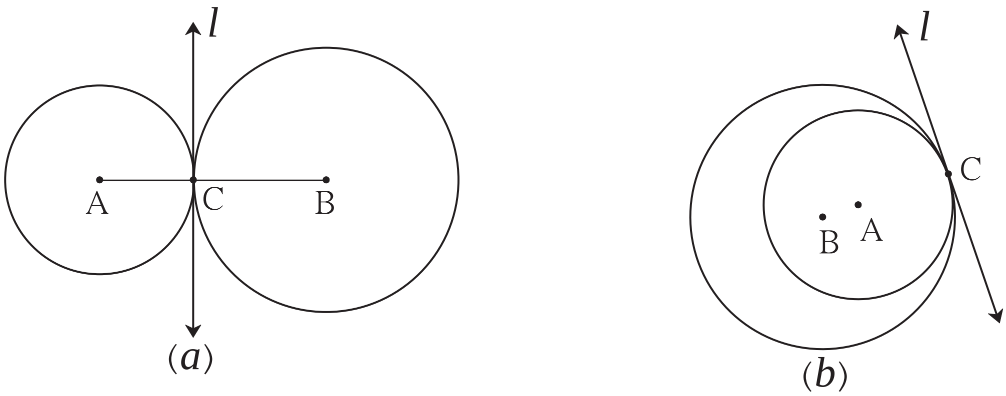
(3) नीचे दी गई आकृति 3.26 में, केंद्र A तथा B वाले वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 3 सेमी तथा 4 सेमी हो तो –

(i) आकृति 3.26 (a) में d(A,B) कितना होगा?

(ii) आकृति 3.26 (b) में d(A,B) कितना होगा?

स्पर्श वृत्त प्रमेय (Theorem of touching circles)

प्रमेय : यदि दो स्पर्श वृत्त हैं तो सामान्य बिंदु उन दो वृत्तों के केंद्रों को मिलने वाली रेखा पर होता है ।



आकृति 3.26

दत्त : बिंदु A तथा B केंद्र वाले वृत्तों का स्पर्श बिंदु C है ।

साध्य : C बिंदु रेखा AB पर स्थित है ।

उपपत्ति : माना, रेखा l स्पर्श वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है ।

रेखा $l \perp$ रेख AC, रेखा $l \perp$ रेख BC. $\therefore$ रेख AC तथा रेख BC रेखा l पर लंब हैं।

बिंदु C से रेखा l पर एक ही लंब रेखा खींची जा सकती है। $\therefore$ C, A, B एकरेखीय हैं।

इसे ध्यान में रखें

(1) परस्पर एक दूसरे को स्पर्श करने वाले वृत्तों का स्पर्श बिंदु उन वृत्तों के केंद्र बिंदु को जोड़नेवाले रेखा पर होता है ।

(2) बाह्यस्पर्शी वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के योगफल के बराबर होती है ।

(3) अंतःस्पर्शी वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के अंतर के बराबर होती है ।

प्रश्नसंग्रह 3.2

1. परस्पर अंतःस्पर्श करने वाले दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 3.5 सेमी तथा 4.8 सेमी हों तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

2. बाह्यस्पर्शी दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 5.5 सेमी तथा 4.2 सेमी हों तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

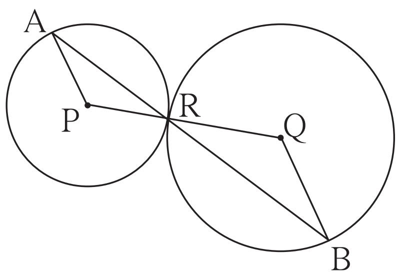
3. 4 सेमी और 2.8 सेमी त्रिज्या वाले (1) बाह्यस्पर्शी (2) अंतःस्पर्शी वृत्त बनाइए ।

4. आकृति 3.27 में P तथा Q केंद्र वाले वृत्त एकदूसरे को R बिंदु पर स्पर्श करते हैं। बिंदु R से जानेवाली रेखा उन वृत्तों को क्रमशः बिंदु A तथा बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करती हो तो –

(1) सिद्ध कीजिए रेख AP || रेख BQ

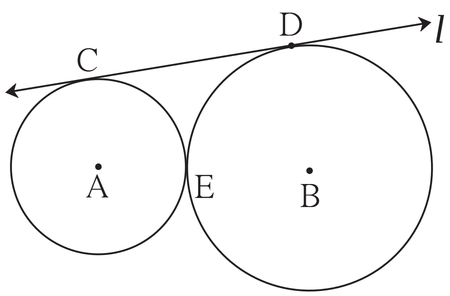
(2) सिद्ध कीजिए $\Delta APR \sim \Delta RQB$

(3) यदि $\angle PAR$ का माप 35° हो, तो $\angle RQB$ का माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.27

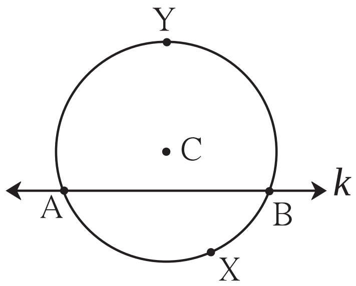
5. आकृति 3.28 में A तथा B केंद्रवाले वृत्त परस्पर बिंदु E पर स्पर्श करते हैं । उनकी सामान्य स्पर्शरेखा l उन्हें क्रमशः C तथा D बिंदुओं पर स्पर्श करती है। यदि वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 4 सेमी तथा 6 सेमी हो तो रेख CD की लंबाई कितनी होगी ?



आकृति 3.28

थोड़ा याद करें

वृत्त चाप (Arc of a circle)



आकृति 3.29

वृत्त की छेदन रेखा द्‌वारा वृत्त दो भागों में विभाजित होता है । इनमें से कोई भी एक भाग और वृत्त की छेदन रेखा के वृत्त पर स्थित बिंदुओं को मिलाकर बनने वाली आकृति को **वृत्त चाप** कहते हैं ।

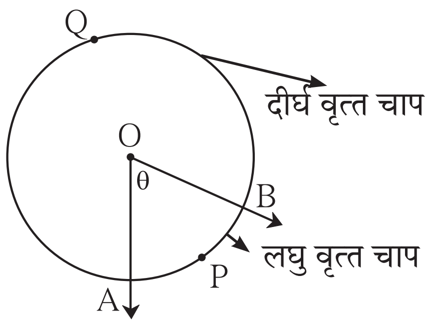
वृत्त और छेदन रेखा के छेदन बिंदुओं को चाप के अंत्यबिंदु अथवा चाप के सिरे कहते हैं ।

आकृति 3.29 में वृत्त की छेदन रेखा k द्‌वारा, C केंद्र वाले वृत्त के AYB और AXB दो चाप बनते हैं ।

वृत्त की छेदन रेखा के जिस ओर वृत्त का केंद्र होता है उस ओर के चाप को **दीर्घ चाप** तथा दूसरी ओर के चाप को **लघु चाप** कहते हैं । आकृति 3.29 में चाप AYB दीर्घ चाप और चाप AXB लघु चाप है । किसी वृत्त चाप का नाम तीन अक्षरों का उपयोग करके लिखने से संकल्पना स्पष्ट होती है । परंतु यदि कोई संदेह न हो तो लघु चाप का नाम उनके अंत बिंदु दर्शाने वाले दो अक्षरों द्‌वारा लिखते हैं । उदाहरण के लिए आकृति 3.29 में चाप AXB को चाप AB भी लिखते हैं ।

हम चाप का नाम लिखने के लिए इसी पद्‌धति का उपयोग करने वाले हैं ।

केंद्रीय कोण (Central angle)



आकृति 3.30

जिस कोण का शीर्ष बिंदु वृत्त के केंद्र पर होता है, उस कोण को केंद्रीय कोण कहते हैं ।

आकृति 3.30 में O केंद्रवाले वृत्त का $\angle AOB$ केंद्रीय कोण है ।

वृत्त की छेदन रेखा की तरह ही केंद्रीय कोण द्‌वारा भी वृत्त के दो चाप बनते हैं ।

चाप का माप (Measure of an arc)

कई बार दो चापों में तुलना करने की आवश्यकता होती है। इसके लिए चाप के माप की व्याख्या आगे दी गई है।

(1) लघु चाप का माप उसके संगत केंद्रीय कोण के माप के बराबर होता है ।

आकृति 3.30 में केंद्रीय $\angle$ AOB का माप θ है। इसलिए लघु चाप APB का भी माप θ होगा ।

(2) दीर्घ चाप का माप = 360° − संगत लघु चाप का माप

आकृति 3.30 में दीर्घ चाप AQB का माप = 360° − चाप APB का माप = $360^\circ - \theta$

(3) अर्धवृत्तीय चाप, अर्थात अर्ध वृत्त का माप 180° होता है ।

(4) पूर्ण वृत्तचाप का माप, अर्थात पूर्ण वृत्त का माप, 360° होता है ।

आओ जानें

चाप की सर्वांगसमता (Congruence of arcs)

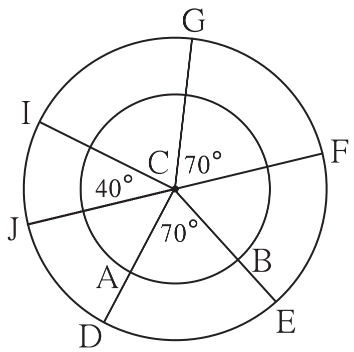
जब दो एक प्रतलीय आकृतियाँ एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेती हैं तो कहा जाता है कि वे आकृतियाँ एक दूसरे की सर्वांगसम हैं । सर्वांगसमता की इस संकल्पना के आधार पर समान मापवाले कोण सर्वांगसम होते हैं यह हमें ज्ञात है ।

इसी प्रकार दो चापों के माप समान हों तो वे दोनों चाप सर्वांगसम होंगे क्या?

इस प्रश्न का उत्तर दी गई कृति करके प्राप्त कीजिए ।

कृति :

आकृति 3.31 में दर्शाए अनुसार C केंद्रवाले दो वृत्त खींचिए। $\angle$ DCE और $\angle$ FCG समान मापवाले कोण बनाइए। इन कोणों के माप से अलग मापवाला $\angle$ ICJ खींचिए ।



आकृति 3.31

$\angle$ DCE की भुजा द्वारा आंतरिक वृत्त को प्रतिच्छेदित करने पर प्राप्त चाप को AB नाम दीजिए ।

चाप के माप की व्याख्या के आधार पर, चाप AB और चाप DE के माप समान है, यह ध्यान में आता है । क्या वे दोनों चाप आपस में एक दूसरे को ढँक लेंगे? निश्चित ही ढँक नहीं पाएँगे ।

अब C-DE; C-FG और C-IJ वृत्त खंड काटकर अलग कीजिए । उन्हें एक दूसरे के ऊपर रखकर देखिए कि DE, FG और IJ में से कौन-सा चाप एक दूसरे को ढँक लेता है ।

इस कृति के आधार पर यह ध्यान आता है कि दो चाप सर्वांगसम होने के लिए 'उनके माप समान हैं' यह पर्याप्त नहीं है?

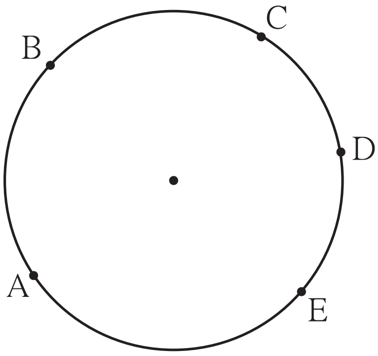
दो चाप सर्वांगसम होने के लिए अन्य कौन-सी शर्तें पूरी होनी आवश्यक हैं?

उपर्युक्त कृति से ज्ञात होता है, कि -

दो चापों की त्रिज्या एवं माप समान होते हैं तो वे दोनों चाप परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

'चाप DE तथा चाप GF सर्वांगसम हैं।' इसे चिन्ह द्वारा चाप DE $\cong$ चाप GF ऐसे दर्शाते हैं ।

चाप के मापों के योग का गुणधर्म (Property of sum of measures of arcs)



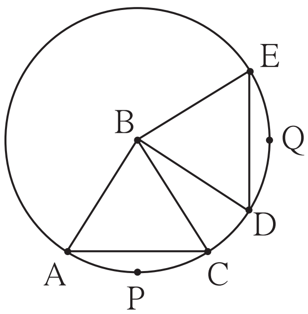
आकृति 3.32

आकृति 3.32 में A, B, C, D, E एक ही वृत्त के बिंदु हैं। इन बिंदुओं से अनेक चाप बनते हैं । इनमें से चाप ABC और चाप CDE के बीच एक और सिर्फ एक ही बिंदु C सामान्य है । अर्थात चाप ABC और चाप CDE के मापों का योगफल चाप ACE के माप के बराबर होता है ।

m(चाप ABC) + m(चाप CDE) = m(चाप ACE)

परंतु चाप ABC और चाप BCE के बीच एक से अधिक [चाप BC के सभी] सामान्य बिंदु हैं । अर्थात चाप ABC और चाप BCE के माप का योगफल चाप ABE के माप के बराबर नहीं होता है ।

प्रमेय : एक ही वृत्त के (या सर्वांगसम वृत्तों के) सर्वांगसम चापों की संगत जीवा सर्वांगसम होती है ।



आकृति 3.33

दत्त : B केंद्र वाले वृत्त में चाप APC ≅ चाप DQE

साध्य : जीवा AC ≅ जीवा DE

उपपत्ति : (रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।)

Δ ABC और Δ DBE में,

भुजा AB ≅ भुजा DB .... (...................)

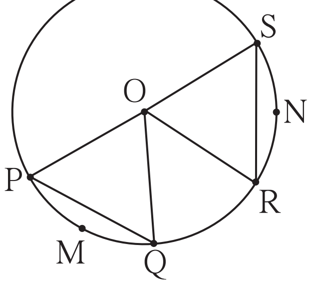
भुजा .... ≅ भुजा .... (...................)

$\angle$ABC ≅ $\angle$DBE .... (सर्वांगसम चापों की परिभाषा)

$\therefore$ Δ ABC ≅ Δ DBE .... (...................)

$\therefore$ जीवा AC ≅ जीवा DE ..... (...................)

प्रमेय : एक ही वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) सर्वांगसम जीवाओं के संगत चाप सर्वांगसम होते हैं ।



आकृति 3.34

दत्त : O केंद्र वाले वृत्त में रेख PQ और रेख RS, सर्वांगसम जीवाएँ हैं ।

साध्य : चाप PMQ ≅ चाप RNS

आगे दिए गए विचार को ध्यान में रखकर उपपत्ति लिखिए । दो चाप सर्वांगसम होने के लिए उनकी त्रिज्याएँ तथा माप समान होने चाहिए । चाप PMQ और चाप RNS एक ही वृत्त के चाप होने के कारण उनकी त्रिज्या

समान है । उन चापों के माप अर्थात उनके संगत केंद्रीय कोण के माप होते हैं । यह केंद्रीय कोण प्राप्त करने के लिए त्रिज्या OP, OQ, OR और OS खींचना पड़ेगा । इसे खींचने पर प्राप्त Δ OPQ और Δ ORS सर्वांगसम हैं कि नहीं ?

उपर्युक्त दोनों प्रमेय आप सर्वांगसम वृत्तों के लिए सिद्‌ध कीजिए ।

थोड़ा सोचें

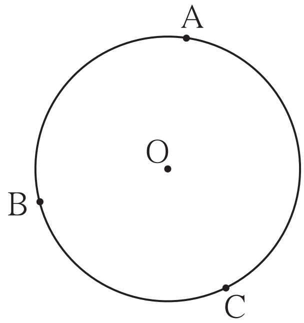
- उपर्युक्त दो में से पहले प्रमेय में लघुचाप APC और चाप DQE लघु चाप को सर्वांगसम माना है । क्या इनके संगत दीर्घ चापों को सर्वांगसम मानकर भी यह प्रमेय सिद्‌ध किया जा सकता है ?
- क्या दूसरे प्रमेय में सर्वांगसम जीवा के संगत दीर्घ चाप भी सर्वांगसम होते हैं ? जीवा PQ और जीवा RS यदि व्यास हों तो भी क्या यह प्रमेय सही होता है ?

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) O केंद्रवाले वृत्त के A, B तथा C तीन बिंदु हैं ।

(i) इन तीन बिंदुओं से बनने वाले सभी चापों के नाम लिखिए ।

(ii) चाप BC और चाप AB के माप क्रमशः 110° और 125° हों तो शेष सभी चापों के माप लिखिए ।



आकृति 3.35

हल : (i) चाप का नाम –

चाप AB, चाप BC, चाप AC, चाप ABC, चाप ACB, चाप BAC

(ii) चाप ABC का माप = चाप AB का माप + चाप BC का माप

$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$

चाप AC का माप = 360° – चाप ACB का माप

$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

इसी प्रकार चाप ACB का माप = $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$

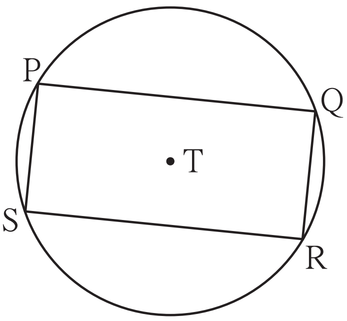
और चाप BAC का माप = $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

उदा. (2) आकृति 3.36 में T केंद्र वाले वृत्त में आयत PQRS अंतर्लिखित है ।

दिखाइए कि –

(1) चाप PQ ≅ चाप SR

(2) चाप SPQ ≅ चाप PQR



आकृति 3.36

हल : (1) □ PQRS एक आयत है ।

∴ जीवा PQ ≅ जीवा SR .... (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

∴ चाप PQ ≅ चाप SR ...... (सर्वांगसम जीवा के संगत चाप)

(2) जीवा PS ≅ जीवा QR ..... (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

∴ चाप SP ≅ चाप QR ..... (सर्वांगसम जीवा के संगत चाप)

∴ चाप SP और चाप QR के माप समान हैं ..... (I)

अब, चाप SP और चाप PQ के मापों का योगफल

= चाप PQ और चाप QR के मापों का योगफल

∴ चाप SPQ का माप = चाप PQR का माप

∴ चाप SPQ ≅ चाप PQR

इसे ध्यान में रखें

(1) जिस कोण का शीर्षबिंदु वृत्त के केंद्र पर होता है उस कोण को केंद्रीय कोण कहते हैं ।

(2) चाप के माप की परिभाषा – (i) लघु चाप का माप उसके संगत केंद्रीय कोण के माप के बराबर होता है । (ii) दीर्घ चाप का माप = 360° – संगत लघु चाप का माप (iii) अर्धवृत्त के चाप का माप 180° होता है ।

(3) किन्हीं दो वृत्त चापों की त्रिज्या और माप समान हों तो वे सर्वांगसम होते हैं ।

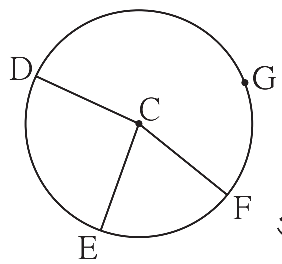
(4) एक ही वृत्त के चाप ABC और चाप CDE के बीच जब एक ही सामान्य बिंदु C होता है, तब m(चाप ABC) + m(चाप CDE) = m(चाप ACE)

(5) एक ही वृत्त के (या सर्वांगसम वृत्तों के) सर्वांगसम चापों की संगत जीवाएँ सर्वांगसम होती हैं ।

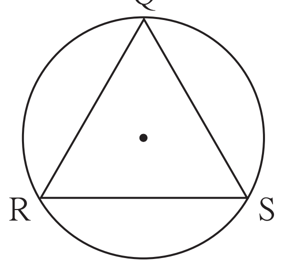
(6) एक ही वृत्त के (या सर्वांगसम वृत्तों के) सर्वांगसम जीवाओं के संगत चाप सर्वांगसम होते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. आकृति 3.37 में, C केंद्रवाले वृत्त पर G, D, E और F बिंदु हैं। ∠ ECF का माप 70° और चाप DGF का माप 200° हो, तो चाप DE और चाप DEF के माप ज्ञात कीजिए ।



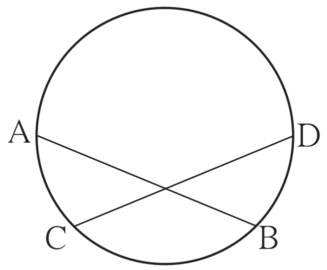
आकृति 3.37



आकृति 3.38

2*. आकृति 3.38 में Δ QRS समबाहु त्रिभुज है ।
तो सिद्ध कीजिए –
(1) चाप RS ≅ चाप QS ≅ चाप QR
(2) चाप QRS का माप 240° है ।

3. आकृति 3.39 में,
जीवा AB ≅ जीवा CD,
तो सिद्ध कीजिए –
चाप AC ≅ चाप BD



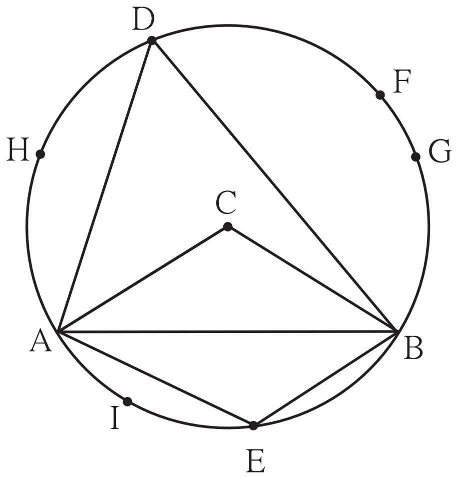
आकृति 3.39

आओ जानें

वृत्त और बिंदु, वृत्त और रेखा (स्पर्श रेखा) में परस्पर संबंध बताने वाले कुछ गुणधर्म हमने देखें । आइए अब हम वृत्त और कोण में संबंध दर्शाने वाले कुछ गुणधर्म देखते हैं। इनमें से कुछ गुणधर्म दी गई कृतियों से जानिए ।

कृति I :

C केंद्र वाला एक पर्याप्त बड़ा वृत्त खींचिए। आकृति 3.40 में दर्शाए अनुसार उसकी जीवा AB खींचिए ।



आकृति 3.40

केंद्रीय कोण ACB खींचिए । आकृति 3.40 में दर्शाए अनुसार उसकी जीवा AB द्वारा बनने वाले दीर्घ चाप पर कोई बिंदु D तथा लघु चाप पर कोई बिंदु E लें ।

(1) $\angle$ADB और $\angle$ACB मापें। उनके मापों की तुलना कीजिए ।

(2) $\angle$ADB और $\angle$AEB मापें। प्राप्त मापों का योगफल ज्ञात करके देखें ।

(3) चाप ADB पर F, G, H ऐसे कुछ और बिंदु लीजिए ।
$\angle$AFB, $\angle$AGB, $\angle$AHB, ... के माप ज्ञात कीजिए ।
इन मापों की आपस में तथा $\angle$ADB के माप से तुलना कीजिए ।

(4) चाप AEB पर एक अन्य बिंदु I लीजिए । $\angle$ AIB को मापकर उसके माप की तुलना $\angle$ AEB के माप से कीजिए।

इस कृति से आपको इस प्रकार का अनुभव प्राप्त होता है –

(1) $\angle$ ACB का माप $\angle$ ADB के माप का दो गुना होता है ।

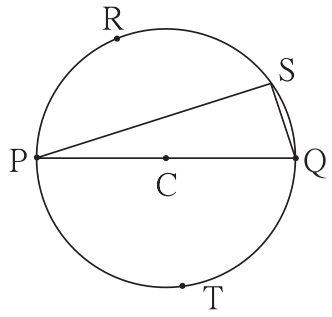
(2) $\angle$ ADB और $\angle$ AEB के मापों का योगफल $180°$ होता है ।

(3) $\angle$ AHB, $\angle$ ADB, $\angle$ AFB, $\angle$ AGB इन सभी के माप समान हैं ।

(4) $\angle$ AEB और $\angle$ AIB के माप समान हैं ।

कृति II :

आकृति 3.41 में दर्शाएनुसार C केंद्रवाला एक बड़ा वृत्त बनाइए। उसमें एक व्यास PQ खींचिए । इस व्यास से बने दोनों अर्धवृत्तों पर R,S,T ऐसे कुछ बिंदु लीजिए। $\angle$ PRQ, $\angle$ PSQ, $\angle$ PTQ मापिए । इनमें से प्रत्येक कोण समकोण है यह अनुभव कीजिए।



आकृति 3.41

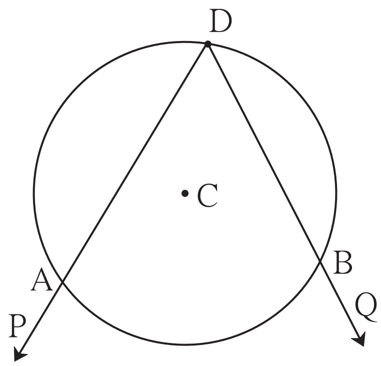
उपर्युक्त कृति से प्राप्त गुणधर्म का अर्थ वृत्त और कोण से संबंधित प्रमेय है।

अब इस प्रमेय की उपपत्ति सीखें, इससे पहले कुछ संज्ञाओं (संबोधो) की पहचान करनी होगी।

अंतर्लिखित कोण (Inscribed angle)

आकृति 3.42 में C केंद्रवाला एक वृत्त है । $\angle$ PDQ का शीर्षबिंदु D इस वृत्त पर है । कोण की भुजाएँ DP और DQ वृत्त को क्रमशः A और B पर प्रतिच्छेदित करती हैं। ऐसे कोण को वृत्त का अंतर्लिखित कोण कहते हैं ।

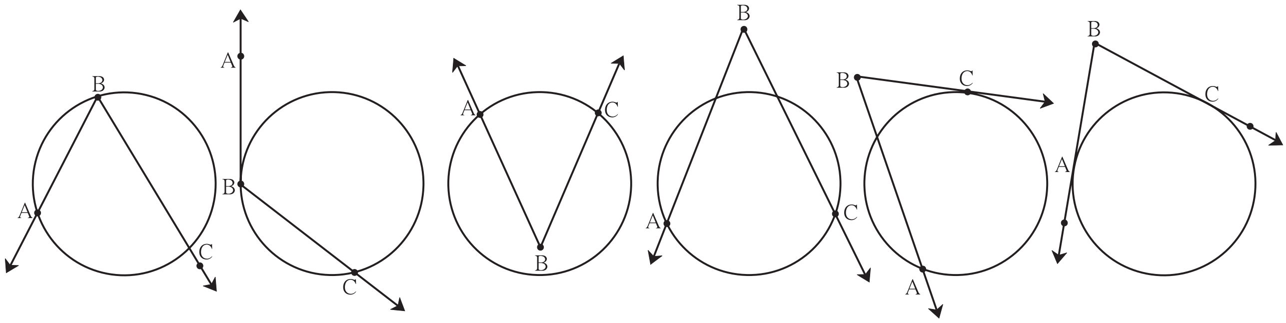
आकृति 3.42 में $\angle$ ADB चाप ADB में अंतर्लिखित है ।



आकृति 3.42

अंतःखंडित चाप (Intercepted arc)

दी गई आकृति 3.43 में (i) से (vi) सभी आकृतियों का निरीक्षण कीजिए ।



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

आकृति 3.43

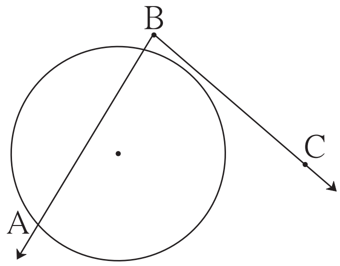
प्रत्येक आकृति में ∠ ABC के अंतःभाग में आनेवाले वृत्त चाप को ∠ ABC द्‌वारा अंतःखंडित चाप कहते हैं।

अंतःखंडित चाप के अंतबिंदु वृत्त और कोण के छेदन बिंदु होते हैं। कोण की प्रत्येक भुजा पर चाप का एक अंत बिंदु होना आवश्यक होता है ।

आकृति 3.43 के (i), (ii) तथा (iii) आकृतियों में प्रत्येक कोण ने एक ही चाप अंतःखंडित किया है; (iv), (v) तथा (vi) में प्रत्येक कोण ने दो चाप अंतःखंडित किया है ।

ध्यान रहे, आकृति (ii) तथा (v) में कोण की एक भुजा और (vi) में कोण की दोनों भुजाएँ वृत्त को स्पर्श करती हैं ।

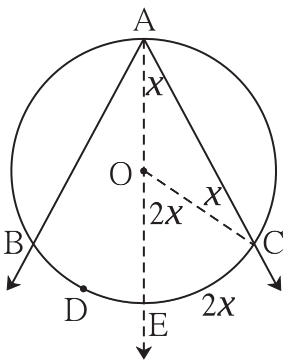
आकृति 3.44 में चाप, अंतःखंडित चाप नहीं है क्योंकि कोण की भुजा BC पर चाप का एक भी अंत बिंदु नहीं है ।



आकृति 3.44

अंतर्लिखित कोण का प्रमेय (Inscribed angle theorem)

वृत्त में अंतर्लिखित कोण का माप उसके द्‌वारा अंतःखंडित चाप के माप का आधा होता है ।



आकृति 3.45

दत्त : O केंद्र वाले वृत्त में, ∠ BAC चाप BAC में अंतर्लिखित है । इस कोण द्‌वारा चाप BDC अंतःखंडित हुआ है ।

साध्य : $\angle BAC = \frac{1}{2}\ m(\text{चाप } BDC)$

रचना : किरण AO खींचिए। यह वृत्त को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करता है । त्रिज्या OC खींचिए ।

उपपत्ति : Δ AOC में

भुजा OA $\cong$ भुजा OC ...... (एक ही वृत्त की त्रिज्या)

$\therefore$ $\angle OAC = \angle OCA$ ..... (समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय)

माना $\angle OAC = \angle OCA = x$ ...... (I)

अब, $\angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$ .... (त्रिभुज के बहिष्कोण का प्रमेय)

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

परंतु $\angle EOC$ यह केंद्रीय कोण है ।

$\therefore$ m(चाप EC) = $2x^\circ$ .... (चाप के माप की परिभाषा से) ..... (II)

$\therefore$ (I) तथा (II) के आधार पर

$\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2}$ m(चाप EC) ..... (III)

इसी प्रकार, त्रिज्या OB खींचकर, $\angle EAB = \frac{1}{2}$ m(चाप BE) सिद्ध किया जा सकता है ...(IV)

$\therefore$ $\angle EAC + \angle EAB = \frac{1}{2}$ m(चाप EC) + $\frac{1}{2}$ m(चाप BE) .... (III) तथा (IV) से

$\therefore$ $\angle BAC = \frac{1}{2}$ [m(चाप EC) + m(चाप BE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(चाप BEC) = $\frac{1}{2}$ [m(चाप BDC)] ..... (V)

ध्यान रहे, कि वृत्त में अंतर्लिखित कोण और वृत्त केंद्र से संबंधित तीन दशाएँ संभव हैं । वृत्त केंद्र कोण की भुजा पर हो, अंतःभाग में हो या बाह्य भाग में हो । इनमें से पहली दो दशाएँ (III) तथा (V) में सिद्ध हो गई हैं । अब शेष तीसरी दशा पर विचार करेंगे ।

आकृति 3.46 में,

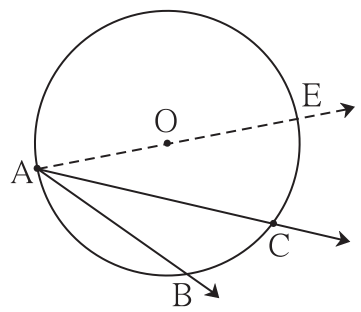
$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

$= \frac{1}{2}$ [m(चाप BCE) $- \frac{1}{2}$ m(चाप CE)]

...... (III) से

$= \frac{1}{2}$ [m(चाप BCE) $-$ m(चाप CE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(चाप BC)] ...... (VI)



आकृति 3.46

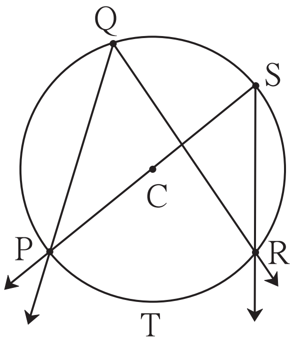
इस प्रमेय का कथन इस प्रकार भी लिखतें हैं ।

वृत्त चाप द्‌वारा वृत्त के किसी भी बिंदु से अंतरित (subtended)किए गए कोण का माप उसी चाप द्‌वारा वृत्त केंद्र से अंतरित किए गए कोण के माप के आधा होता है ।

इस प्रमेय के आगे दिए गए उप प्रमेयों के कथन भी इस परिभाषा के अनुसार लिख सकते हैं ।

अंतर्लिखित कोण के प्रमेय का उपप्रमेय (Corollaries of inscribed angle theorem)

1. एक ही चाप में अंतर्लिखित सभी कोण सर्वांगसम होते हैं ।



आकृति 3.47

आकृति 3.47 के आधार पर दत्त और साध्य लिखिए ।

दिए गए प्रश्नों का विचार करके उपपत्ति लिखिए ।

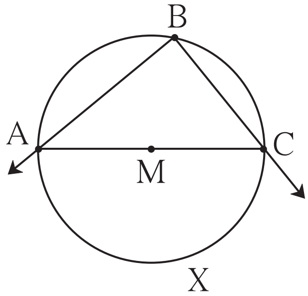
(1) ∠ PQR से कौन-सा चाप अंतःखंडित है ?

(2) ∠ PSR से कौन-सा चाप अंतःखंडित है ?

(3) अंतर्लिखित कोण के माप और उससे अंतःखंडित चाप के माप में किस प्रकार का संबंध है ?

2. अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण समकोण होता है ।

संलग्न आकृति 3.48 के आधार पर प्रमेय के दत्त, साध्य और उपपत्ति लिखिए ।



आकृति 3.48

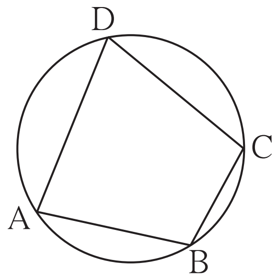
चक्रीय चतुर्भुज (Cyclic quadrilateral)

किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष बिंदु एक ही वृत्त पर हों तो उस चतुर्भुज को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं ।

चक्रीय चतुर्भुज का प्रमेय (Theorem of cyclic quadrilateral)

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण परस्पर संपूरक होते हैं ।

आगे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उसे पूर्ण कीजिए ।



आकृति 3.49

दत्त : □ ______ एक चक्रीय चतुर्भुज है ।

साध्य : $m\angle B + m\angle D =$ ______

______ $+ \angle C = 180°$

उपपत्ति : ∠ ADC एक अंतर्लिखित कोण है तथा इसके द्वारा चाप ABC अंतःखंडित किया गया है ।

$\therefore\ m\angle ADC = \frac{1}{2}$ ______ .... (I)

इसी प्रकार ______ एक अंतर्लिखित कोण है तथा इसके द्वारा चाप ADC अंतःखंडित किया गया है ।

$\therefore \boxed{} = \frac{1}{2}$ m(चाप ADC) ..... (II)

$\therefore m\angle ADC + \boxed{} = \frac{1}{2}\boxed{} + \frac{1}{2}$ m(चाप ADC) ..... (I) तथा (II) से

$= \frac{1}{2}\,[\boxed{} +$ m(चाप ADC)]

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$ .... [चाप ABC और चाप ADC मिलकर पूरा वृत्त बनता है ।]

$= \boxed{}$

इसी प्रकार $\angle A + \angle C = \boxed{}$ सिद्ध किया जा सकता है ।

चक्रीय चतुर्भुज के प्रमेय का उपप्रमेय (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

चक्रीय चतुर्भुज के बहिष्कोण उसके संलग्न कोण के सम्मुख कोण के सर्वांगसम होते हैं ।

इस प्रमेय की उपपत्ति लिखिए ।

थोड़ा सोचें

(1) उपर्युक्त प्रमेय में $\angle B + \angle D = 180^\circ$ यह सिद्ध करने पर शेष सम्मुख कोणों के मापों का योगफल भी 180° होता है, क्या यह किसी अन्य प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है?

चक्रीय चतुर्भुज के प्रमेय का विलोम (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

प्रमेय : किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक हों तो वह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है ।

यह प्रमेय अप्रत्यक्ष पद्धति से सिद्ध किया जाता है । प्रयत्न कीजिए ।

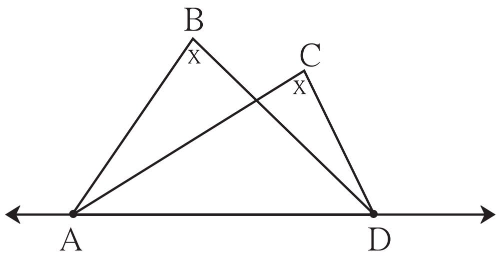
उपर्युक्त विलोम के आधार पर यह ध्यान में आता है कि, यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं तो उस चतुर्भुज का परिवृत्त होता है ।

प्रत्येक त्रिभुज का एक परिवृत्त होता है, यह हमें ज्ञात है। परंतु प्रत्येक चतुर्भुज का परिवृत्त होता है ऐसा नहीं है, इसे समझिए ।

कौन-सी शर्त पूरी होने पर परिवृत्त होता है, अर्थात चतुर्भुज के शीर्षबिंदु वृत्त पर होते हैं इसे हम समझते हैं ।

एक अन्य परिस्थिति में चार अरेखीय बिंदु चक्रीय होते हैं । यह आगे दिए प्रमेय में बताया गया है ।

प्रमेय : **किसी रेखा पर स्थित दो भिन्न बिंदु उसी रेखा के एक ही ओर स्थित दो भिन्न बिंदुओं पर सर्वांगसम कोण बनाते हों तो वे चारों बिंदु एक ही वृत्त पर होते हैं ।**



आकृति 3.50

दत्त : बिंदु B तथा C रेखा AD के एक ही ओर स्थित हैं । $\angle ABD \cong \angle ACD$

साध्य : बिंदु A, B, C, D एक ही वृत्त पर हैं। (अर्थात $\square$ ABCD चक्रीय चतुर्भुज है ।)

पिछले प्रमेय के अनुसार इसको अप्रत्यक्ष रूप से सिद्ध कर सकते हैं ।

थोड़ा सोचें

उपर्युक्त प्रमेय किस प्रमेय का विलोम है ?

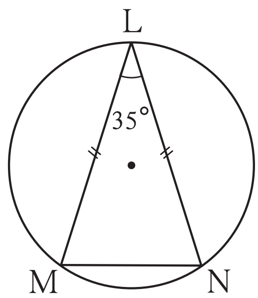
हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आकृति 3.51 में, जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\angle L = 35^\circ$ तो

(i) m(चाप MN) = कितना ?

(ii) m(चाप LN) = कितना ?



आकृति 3.51

हल : (i) $\angle L = \frac{1}{2}\, m$(चाप MN) ...... (अंतर्लिखित कोण प्रमेय)

$\therefore\ 35 = \frac{1}{2}\, m$(चाप MN)

$\therefore\ 2 \times 35 = m$(चाप MN) $= 70^\circ$

(ii) m(चाप MLN) $= 360^\circ - m$(चाप MN) ...... (चाप के माप की परिभाषा से)

$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

अब, जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\therefore$ चाप LM $\cong$ चाप LN

परंतु m(चाप LM) + m(चाप LN) = m(चाप LMN) = 290°.....(चापों के योगफल का गुणधर्म)

m(चाप LM) = m(चाप LN) $= \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$

अथवा, (ii) जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\therefore\ \angle M = \angle N$ ...... (समद्विबाहु त्रिभुज प्रमेय)

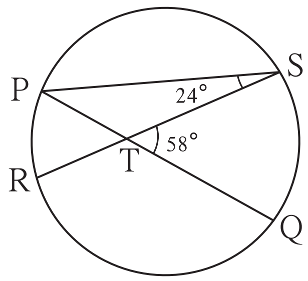
$\therefore\ 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

$\therefore\ \angle M = \frac{145^\circ}{2}$

m(चाप LN) $= 2 \times \angle M$ .... (अंतर्लिखित कोण प्रमेय)

$$= 2 \times \frac{145°}{2} = 145°$$

उदा. (2) आकृति 3.52 में, जीवा PQ और जीवा RS एक दूसरे को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करते हैं।



आकृति 3.52

(i) यदि $\angle STQ = 58°$ और $\angle PSR = 24°$, तो m(चाप SQ) ज्ञात कीजिए।

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(चाप PR) + m(चाप SQ)] इसकी जाँच कीजिए।

(iii) जीवा PQ और जीवा RS के बीच किसी भी माप का कोण हो फिर भी सिद्ध कीजिए कि $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(चाप PR) + m(चाप SQ)]

(iv) इस उदाहरण से सिद्ध होने वाले गुणधर्म को कथन के रूप में लिखिए।

हल : (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58 - 24 = 34°$ .... (त्रिभुज के बाह्य् कोण का प्रमेय)

m(चाप QS) $= 2\angle SPQ = 2 \times 34 = 68°$

(ii) m(चाप PR) $= 2\angle PSR = 2 \times 24 = 48°$

अब, $\frac{1}{2}$ [m(चाप PR) + m(चाप SQ)] $= \frac{1}{2}[48 + 68]$

$$= \frac{1}{2} \times 116 = 58°$$

$$= \angle STQ$$

(iii) इस गुणधर्म की उपपत्ति रिक्त स्थानों की पूर्ति कर पूर्ण कीजिए।

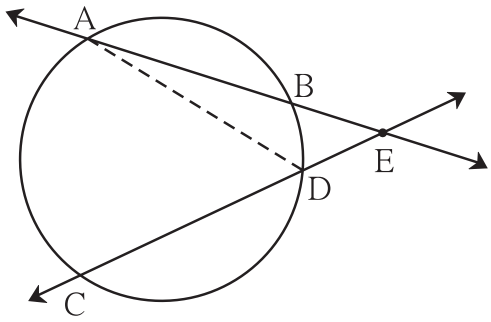
$m\angle STQ = m\angle SPQ +$ [ ] .... (त्रिभुज के बाह्य् कोण का प्रमेय)

$= \frac{1}{2}$ m(चाप SQ) + [ ] .... (अंतर्लिखित कोण का प्रमेय)

$= \frac{1}{2}$ [[ ] + [ ]]

(iv) वृत्त की जीवाएँ एक दूसरे को वृत्त के अंतःभाग में प्रतिच्छेदित करती हों तो उन जीवाओं के बीच बनने वाला कोण, उस कोण द्वारा अंतःखंडित चाप और उसके शीर्षाभिमुख कोण द्वारा अंतःखंडित चाप के माप के योगफल का आधा होता है।

उदा. (3) सिद्‌ध कीजिए कि वृत्त की जीवाओं को समाविष्ट करने वाली रेखा यदि वृत्त के बाह्य भाग में प्रतिच्छेदित करती हो तो उन रेखाओं द्‌वारा बने कोण का माप उस कोण द्‌वारा अंतःखंडित चापों के मापों की दूरी का आधा होता है । सिद्‌ध कीजिए ।



आकृति 3.53

दत्त : वृत्त की जीवा AB और जीवा CD उस वृत्त के बाह्यभाग में स्थित बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

साध्य : $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{चाप } AC) - m(\text{चाप } BD)]$

रचना : रेख AD खींचा ।

उपपत्ति : इस गुणधर्म को उपर्युक्त उदा. (2) में दी गई उपपत्ति के अनुसार सिद्‌ध किया जा सकता है । इसके लिए Δ AED के कोण, उस त्रिभुज के बहिष्कोण इत्यादि को ध्यान में रखकर उपपत्ति लिखिए ।

इसे ध्यान में रखें

(1) वृत्त में अंतर्लिखित कोण का माप, उसके द्‌वारा अंतःखंडित चाप के माप का आधा होता है ।

(2) वृत्त के एक ही चाप में अंतर्लिखित सभी कोण सर्वांगसम होते हैं ।

(3) अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण समकोण होते हैं ।

(4) यदि चतुर्भुज के चारों शीर्षबिंदु एक ही वृत्त पर हों तो उस चतुर्भुज को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं ।

(5) चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं ।

(6) चक्रीय चतुर्भुज के बहिष्कोण उसके संलग्न कोण के सम्मुख कोण के सर्वांगसम होते हैं ।

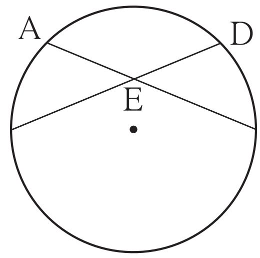
(7) चतुर्भुज के सम्मुख कोण परस्पर संपूरक हों तो चतुर्भुज चक्रीय होता है ।

(8) किसी रेखा पर स्थित दो भिन्न बिंदु उसी रेखा के एक ही ओर स्थित दो भिन्न बिंदुओं पर सर्वांगसम कोण बनाते हों तो वे चारों बिंदु एक ही वृत्त पर होते हैं ।

(9) संलग्न आकृति 3.54 में,

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{चाप } AC) + m(\text{चाप } DB)]$

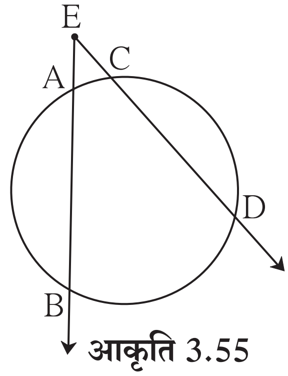
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}[m(\text{चाप } AD) + m(\text{चाप } CB)]$



आकृति 3.54

(10) संलग्न आकृति 3.55 में,

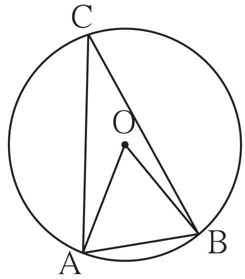
$$\angle BED = \frac{1}{2}\ [m(\text{चाप } BD) - m(\text{चाप } AC)]$$



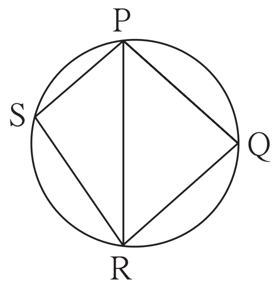
आकृति 3.55

प्रश्नसंग्रह 3.4

1. आकृति 3.56 में, O केंद्र वाले वृत्त की जीवा AB की लंबाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर है । तो (1) ∠AOB (2) ∠ACB (3) चाप AB और (4) चाप ACB का माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.56

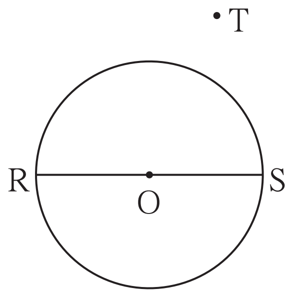


आकृति 3.57

2. आकृति 3.57 में, □ PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है। भुजा PQ ≅ भुजा RQ ∠PSR = 110°, तो
   (1) ∠PQR = कितना ?
   (2) m(चाप PQR) = कितना ?
   (3) m(चाप QR) = कितना ?
   (4) ∠PRQ = कितना ?

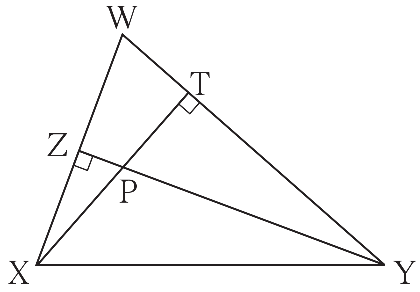
3. चक्रीय □ MRPN में, ∠R = $(5x - 13)°$ और ∠N = $(4x + 4)°$, तो ∠R और ∠N के माप ज्ञात कीजिए ।

4. आकृति 3.58 में रेख RS ; O केंद्रवाले वृत्त का व्यास है । बिंदु T वृत्त के बाह्यभाग में स्थित एक बिंदु है । तो सिद्‌ध कीजिए ∠RTS एक न्यूनकोण है ।



आकृति 3.58

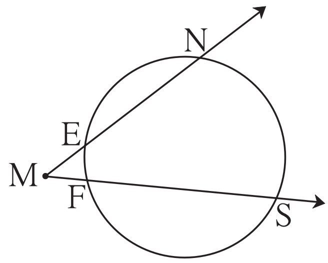
5. सिद्‌ध कीजिए कि कोई भी आयत चक्रीय चतुर्भुज होता है ।



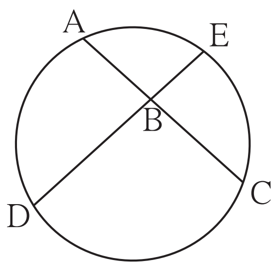
आकृति 3.59

6. आकृति 3.59 में, रेख YZ और रेख XT Δ WXY के शीर्षबिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि
   (i) □ WZPT एक चक्रीय चतुर्भुज है ।
   (ii) बिंदु X, Z, T, Y एक ही वृत्त पर हैं ।

7. आकृति 3.60 में m(चाप NS) = 125°, m(चाप EF) = 37°, तो ∠NMS का माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.60



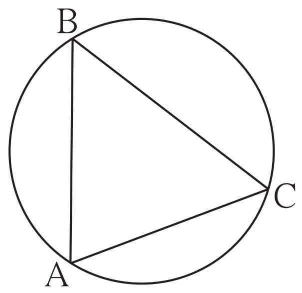
आकृति 3.61

8. आकृति 3.61 में जीवा AC और जीवा DE बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करती हैं । यदि ∠ABE = 108° और m(चाप AE) = 95° तो m(चाप DC) ज्ञात कीजिए ।

आओ जानें

कृति :

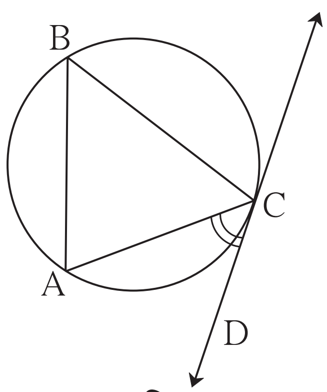
एक पर्याप्त बड़े आकार का वृत्त खींचिए । आकृति 3.62 में दर्शाए अनुसार वृत्त में एक जीवा AC खींचिए ।



आकृति 3.62

वृत्त पर एक बिंदु B लीजिए । ∠ABC एक अंतर्लिखित कोण बनाइए । ∠ABC का माप ज्ञात कर के लिखिए ।

अब, आकृति 3.63 में दर्शाए अनुसार उस वृत्त की स्पर्शरेखा CD खींचिए । ∠ACD का माप नापिए ।



आकृति 3.63

$\angle$ACD का माप, $\angle$ABC के माप के बराबर है । यह आपको समझ में आएगा ।

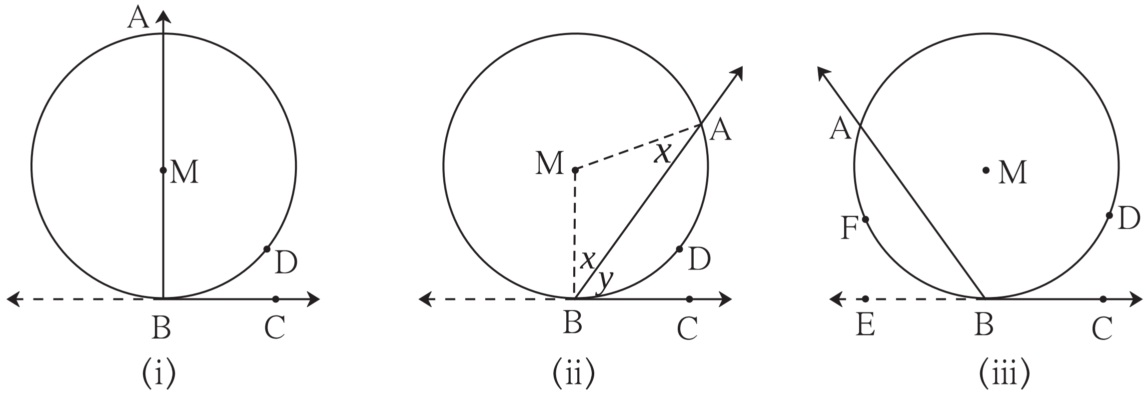
आप जानते हैं कि, $\angle ABC = \frac{1}{2}\, m$(चाप AC) ।

इस आधार पर यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि, $\angle$ACD का माप चाप AC के माप के आधा होता है ।

यह भी वृत्त की स्पर्शरेखा का एक महत्त्वपूर्ण गुणधर्म है। आइए इसे हम सिद्ध करें ।

स्पर्श रेखा–छेदन रेखा कोण का प्रमेय (Theorem of angle between tangent and secant)

यदि किसी कोण का शीर्षबिंदु वृत्त पर है, एक भुजा वृत्त को स्पर्श करती है तथा दूसरी भुजा वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती हो, तो कोण का माप उसके द्वारा अंतःखंडित चाप के माप का आधा होता है ।



आकृति 3.64

दत्त : $\angle$ ABC का शीर्ष बिंदु M केंद्र वाले वृत्त पर है । भुजा BC वृत्त को स्पर्श करती है । भुजा BA वृत्त को बिंदु A पर प्रतिच्छेदित करती है । चाप ADB, कोण $\angle$ ABC द्वारा अंतःखंडित चाप है ।

साध्य : $\angle ABC = \frac{1}{2}\, m$(चापADB)

उपपत्ति : यह प्रमेय सिद्ध करने के लिए तीन संभावनाओं पर विचार करना होगा ।

(1) आकृति 3.64 (i) के अनुसार वृत्त का केंद्र M, $\angle$ ABC के एक भुजा पर हो,

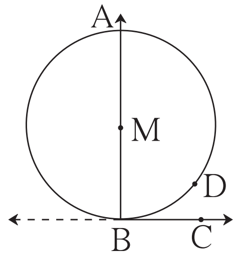
तो $\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ$ ..... (स्पर्शरेखा प्रमेय) (I)

चाप ADB एक अर्धवृत्त है ।

$\therefore\ m$(चाप ADB) = 180° ..... (चाप के माप की परिभाषा से) (II)

(I) तथा (II) से

$\angle ABC = \frac{1}{2}\, m$(चाप ADB)



आकृति 3.64(i)

(2) आकृति 3.64 (ii) के अनुसार केंद्र M, $\angle$ ABC के बाह्यभाग में होने पर,

त्रिज्या MA और त्रिज्या MB खींचिए ।

अब, $\angle MBA = \angle MAB$ ..... (समद्विबाहु त्रिभुज प्रमेय)

इसी प्रकार, $\angle MBC = 90^\circ$ ..... (स्पर्शरेखा प्रमेय) ..... (I)

माना $\angle$ MBA = $\angle$ MAB = x, $\angle$ ABC = y

$\angle$ AMB = 180 – ($x + x$) = 180 – $2x$

$\angle$ MBC = $\angle$ MBA + $\angle$ ABC = $x + y$

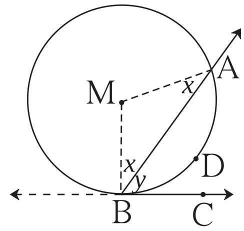
$\therefore x + y = 90^\circ$ $\qquad\qquad \therefore 2x + 2y = 180^\circ$

Δ AMB में $2x + \angle$ AMB = 180°

$\therefore 2x + 2y = 2x + \angle$ AMB

$\therefore 2y = \angle$ AMB

$\therefore\ y = \angle \text{ABC} = \frac{1}{2}\angle \text{AMB} = \frac{1}{2}$ m(चाप ADB)



आकृति 3.64(ii)

(3) तीसरी संभावना के लिए नीचे दी गई उपपत्ति आकृति 3.64 (iii) के आधार पर, रिक्त स्थानों की पूर्ति कर स्वयं पूर्ण कीजिए ।

किरण ______ किरण BC की विपरीत किरण खींचा ।

अब, $\angle$ABE = $\frac{1}{2}$ m(______) ...... (2) में सिद्ध किया है ।

$\therefore$ 180 – ______ = $\angle$ABE ..... (रैखिक युगल कोण)

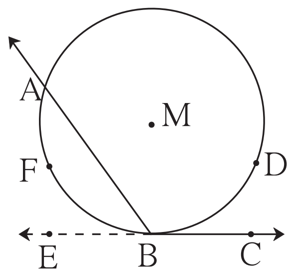
$\therefore$ 180 – ______ = $\frac{1}{2}$ m(चाप AFB)

= $\frac{1}{2}$ (360 – $\angle$ ______

$\therefore$ 180 – $\angle$ABC = 180 – $\frac{1}{2}$ m(चाप ADB)

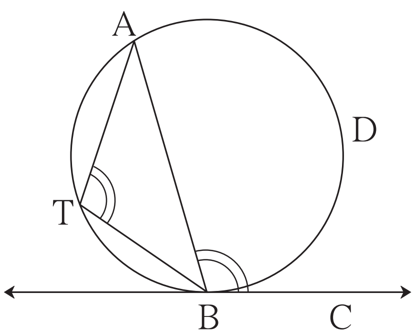
$\therefore$ – $\angle$ABC = – $\frac{1}{2}$ m(______)

$\therefore$ $\angle$ABC = $\frac{1}{2}$ m(चाप ADB)



आकृति 3.64(iii)

स्पर्श रेखा – छेदन रेखा कोण के प्रमेय का वैकल्पिक कथन



आकृति 3.65

आकृति में AB वृत्त की छेदन रेखा और BC स्पर्श रेखा है। चाप ADB, $\angle$ABC द्वारा अंतःखंडित चाप है । जीवा AB वृत्त को दो चापों में विभाजित करती है । दोनों चाप एक दूसरे के विपरीत चाप होते हैं । अब चाप ADB के विपरीत चाप पर एक बिंदु T लिया। उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार $\angle$ABC = $\frac{1}{2}$ m(चाप ADB) = $\angle$ATB ।

$\therefore$ वृत्त की स्पर्शरेखा तथा स्पर्श बिंदु से खींची गई जीवा द्वारा बना कोण, उसी कोण द्वारा अंतःखंडित चाप के विपरित चाप में अंतर्लिखित किए गए कोण के बराबर होता है ।

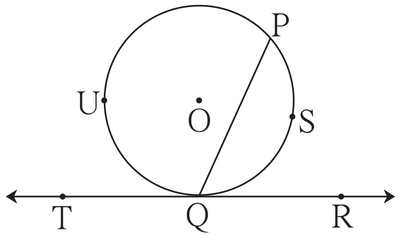
स्पर्श रेखा – छेदन रेखा कोण के प्रमेय का विलोम

किसी वृत्त की जीवा के एक अंत बिंदु से होकर जानेवाली रेखा खींचने पर, उस रेखा द्‌वारा उस जीवा पर बने कोण का माप उस कोण के अंतःखंडित चाप के माप का आधा हो, तो वह रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है ।

आकृति 3.66 में,

यदि $\angle PQR = \frac{1}{2}\ m$(चाप PSQ) हो,

[अथवा $\angle PQT = \frac{1}{2}\ m$(चाप PUQ) हो]



आकृति 3.66

तो रेखा TR वृत्त की स्पर्श रेखा होती है । इस विलोम का उपयोग, वृत्त की स्पर्श रेखा खींचने की किसी रचना के लिए होता है ।

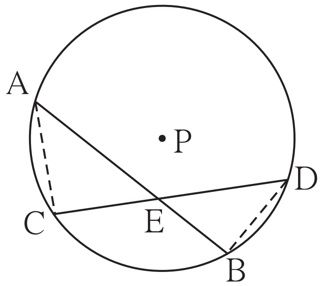
जीवाओं का अंतःछेदन प्रमेय (Theorem of internal division of chords)

किसी वृत्त की दो जीवाएँ जब वृत्त के अंतःभाग में प्रतिच्छेदित करती हैं तब एक जीवा के दोनों भागों की लंबाईयों का गुणनफल दूसरी जीवा के बने दोनों भागों की लंबाइयों के गुणनफल के बराबर होता है ।

दत्त : P केंद्रवाले वृत्त की जीवा AB और जीवा CD, वृत्त के अंतःभाग में स्थित बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।

साध्य : $AE \times EB = CE \times ED$

रचना : रेख AC और रेख DB खींचिए ।



आकृति 3.67

उपपत्ति : Δ CAE और Δ BDE में,

$\angle AEC \cong \angle DEB$ ..... (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ ..... (एक ही वृत्तचाप के अंतर्लिखित कोण)

$\therefore \Delta CAE \sim \Delta BDE$ ..... (समरूपता की को- को कसौटी)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ..... (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजा)

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$

थोड़ा सोचें

आकृति 3.67 में रेख AC और रेख DB खींचकर हमने प्रमेय सिद्‌ध किया। इसके स्थान पर क्या रेख AD और रेख CB खींच कर यह प्रमेय सिद्‌ध किया जा सकेगा ?

अधिक जानकारी हेतू

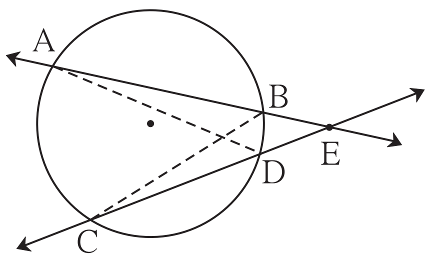
आकृति 3.67 में जीवा AB के, बिंदु E द्वारा AE और EB दो भाग हुए हैं। रेख AE और रेख EB संलग्न भुजाओं वाली आकृति बनाई, तो AE × EB उस आयत का क्षेत्रफल होगा। इसी प्रकार CE × ED जीवा CD के दो भागों द्वारा बनने वाले आयत का क्षेत्रफल होगा। हमने AE × EB = CE × ED सिद्ध किया है ।

इस प्रमेय को अन्य शब्दों में इस प्रकार कहा जा सकता है–

किसी वृत्त की दो जीवाएँ वृत्त के अंतःभाग में प्रतिच्छेदित करती हों, तो एक जीवा के दो रेखाखंडों द्वारा बनने वाले आयत का क्षेत्रफल दूसरी जीवा के दो रेखाखंडों द्वारा बनने वाले आयत के क्षेत्रफल के बराबर होता है ।

जीवाओं का बहिर्च्छेदन प्रमेय (Theorem of external division of chords)

किसी वृत्त के AB और CD जीवा को समाविष्ट करने वाली प्रतिच्छेदन रेखाएँ एक दूसरे को वृत्त के बहिर्भाग में बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती हों, तो AE × EB = CE × ED ।



आकृति 3.68

प्रमेय के उपर्युक्त कथन और आकृति के आधार पर दत्त तथा साध्य स्वयं निश्चित कीजिए ।

रचना : रेख AD और रेख BC खींचिए ।

रिक्त स्थानों की पूर्ति कर नीचे दी गई उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

उपपत्ति : Δ ADE और Δ CBE में,

∠ AED ≅ [ ] .... (समान्य कोण)

∠ DAE ≅ ∠ BCE .... ([ ])

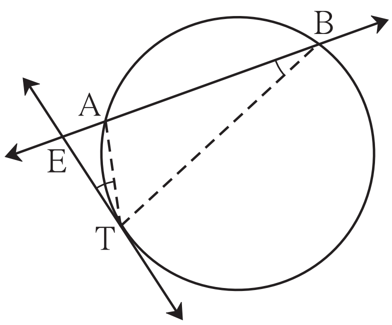
∴ Δ ADE ~ [ ] .... ([ ])

$\therefore \frac{l(AE)}{[\ ]} = \frac{[\ ]}{[\ ]}$ .... (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

∴ [ ] = CE × ED

स्पर्शरेखा छेदन रेखा रेखाखंडों का प्रमेय (Tangent secant segments theorem)

यदि किसी वृत्त के बहिर्भाग में स्थित बिंदु E से खींची गई वृत्त की छेदन रेखा वृत्त को बिंदु A तथा B पर प्रतिच्छेदित करती हो और उसी बिंदु से होकर जाने वाली स्पर्शरेखा वृत्त को T बिंदु पर स्पर्श करती हो, तो $EA \times EB = ET^2$ ।



आकृति 3.69

प्रमेय के उपर्युक्त कथन को ध्यान में रखते हुए दत्त और साध्य निश्चित कीजिए ।

रचना : रेख TA और रेख TB खींचिए।

उपपत्ति : Δ EAT और Δ ETB में,

$\angle AET \cong \angle TEB$ .... (सामान्य कोण)

$\angle ETA \cong \angle EBT$.... (स्पर्श रेखा-छेदन रेखा प्रमेय)

$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB$ .... (समरूपता की को-को कसौटी)

$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$ .... (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ)

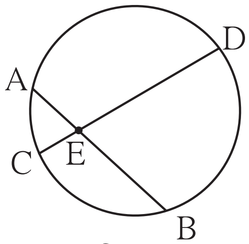
$\therefore EA \times EB = ET^2$

इसे ध्यान में रखें

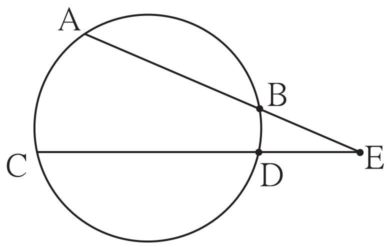
(1) आकृति 3.70 के अनुसार,

$AE \times EB = CE \times ED$

इस गुणधर्म को जीवा अंतःछेदन प्रमेय कहते हैं ।



आकृति 3.70



आकृति 3.71

(2) आकृति 3.71 के अनुसार,

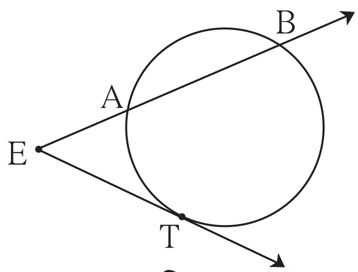
$AE \times EB = CE \times ED$

इस गुणधर्म को जीवा बहिर्छेदन प्रमेय कहते हैं ।

(3) आकृति 3.72 के अनुसार,

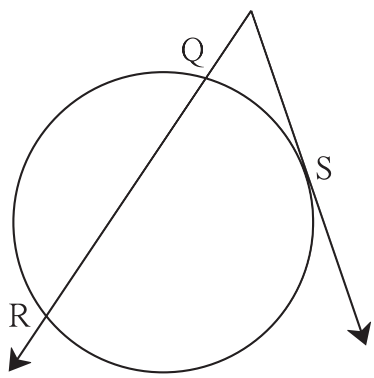
$EA \times EB = ET^2$

इस गुणधर्म को स्पर्शरेखा- छेदन रेखा रेखाखंड का प्रमेय कहते हैं ।



आकृति 3.72

उदा. (1) आकृति 3.73 में, रेख PS स्पर्श रेखाखंड है ।
रेखा PR वृत्त की छेदन रेखा है ।
यदि PQ = 3.6,
QR = 6.4 तो PS = ?(कितना)



आकृति 3.73

हल : $PS^2 = PQ \times PR$ .... स्पर्शरेखा छेदन रेखा रेखाखंड प्रमेय

$= PQ \times (PQ + QR)$

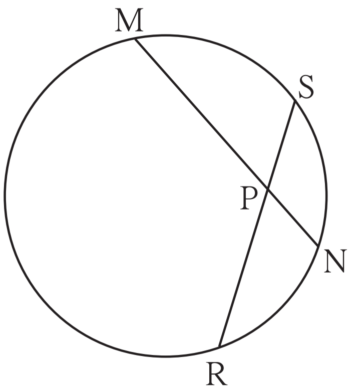
$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

$= 36$

$\therefore PS = 6$

उदा. (2) आकृति 3.74 में, जीवा MN और जीवा RS एक दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि PR = 6, PS = 4, MN = 11 तो PN ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.74

हल : जीवाओं के अंतःछेदन प्रमेय से,

$PN \times PM = PR \times PS$... (I)

माना $PN = x$ $\therefore$ $PM = 11 - x$

यह मान (I) में रखनेपर,

$x(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore 11x - x^2 - 24 = 0$

$x^2 - 11x - 24 = 0$

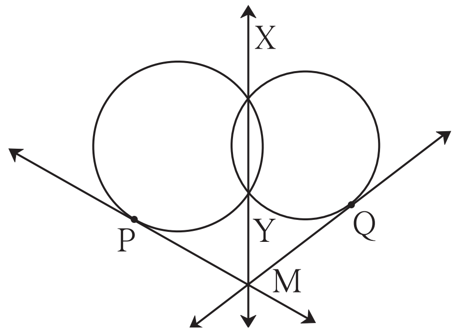
$\therefore (x - 3)(x - 8) = 0$

$\therefore x - 3 = 0$ या $x - 8 = 0$

$\therefore x = 3$ या $x = 8$

$\therefore PN = 3$ या $PN = 8$

उदा. (3) आकृति 3.75 में, दो वृत्त एक दूसरे को बिंदु X तथा Y पर प्रतिच्छेदित करते हैं। रेखा XY पर स्थित बिंदु M से खींची गई स्पर्श रेखा उस वृत्त को बिंदु P तथा Q पर स्पर्श करती है। तो सिद्‌ध कीजिए, रेख PM $\cong$ रेख QM ।



आकृति 3.75

हल : रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति लिखिए ।

रेखा MX दोनों वृत्तों की सामान्य .... है ।

$\therefore PM^2 = MY \times MX$ ..... (I)

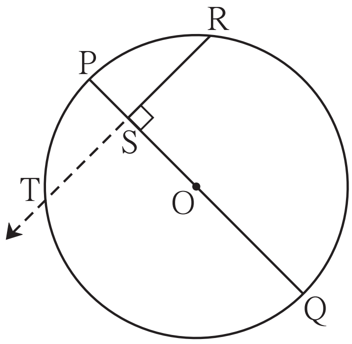
इसी प्रकार .... = ... × .... , (स्पर्शरेखा – छेदन रेखा रेखाखंड प्रमेय) ..... (II)

$\therefore$ (I) तथा (II) से ...... = QM^2

$\therefore$ PM = QM

रेख PM $\cong$ रेख QM

उदा. (4)



आकृति 3.76

आकृति 3.76 में, रेख PQ, 'O' केंद्रवाले वृत्त का व्यास है । बिंदु R वृत्त पर स्थित कोई एक बिंदु है । रेख RS $\perp$ रेख PQ
तो सिद्‌ध कीजिए कि SR, PS तथा SQ का ज्यामितीय माध्य है ।
[अर्थात $SR^2 = PS \times SQ$]

हल : निम्नलिखित सोपानों के आधार पर उपपत्ति लिखिए ।

(1) किरण RS खींचिए । वह किरण वृत्त को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है उस बिंदु को T नाम दीजिए ।

(2) RS = TS दर्शाइए ।

(3) जीवाओं के अंतःछेदन प्रमेय का उपयोग कर समानता लिखिए ।

(4) RS = TS का उपयोग कर साध्य सिद्‌ध कीजिए ।

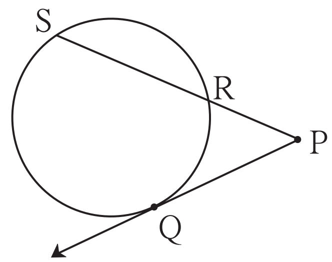
थोड़ा सोचें

(1) उपर्युक्त आकृति 3.76 में रेख PR और रेख RQ खींचने पर Δ PRQ किस प्रकार का होगा ?

(2) क्या उपर्युक्त उदा. (4) में सिद्‌ध किया गया गुणधर्म इसके पहले भी भिन्न तरीके से सिद्‌ध किया है ?

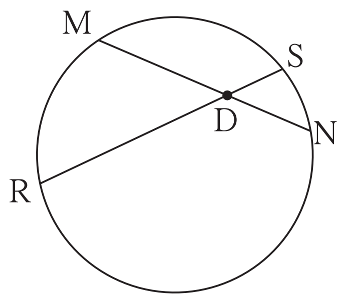
प्रश्नसंग्रह 3.5

1. आकृति 3.77 में, बिंदु Q एक स्पर्शबिंदु है ।
यदि PQ = 12, PR = 8,
तो PS = कितना ? RS = कितना ?



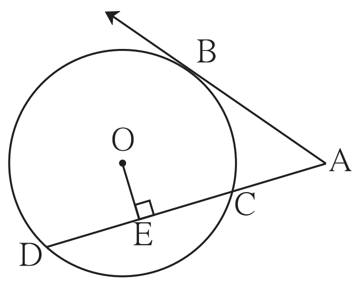
आकृति 3.77

2. आकृति 3.78 में, जीवा MN और RS एक दूसरे को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।
(1) यदि RD = 15, DS = 4,
MD = 8 तो DN = कितना ?
(2) यदि RS = 18, MD = 9,
DN = 8 तो DS = कितना ?



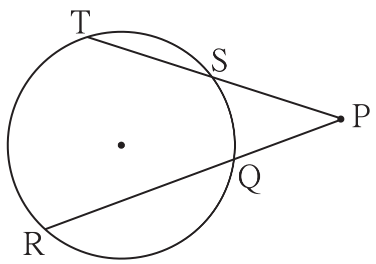
आकृति 3.78

3. आकृति 3.79 में, बिंदु B स्पर्श बिंदु और 'O' वृत्त का केंद्र है ।
रेख OE ⊥ रेख AD, AB = 12,
AC = 8 तो
(1) AD (2) DC और
(3) DE = ज्ञात कीजिए।



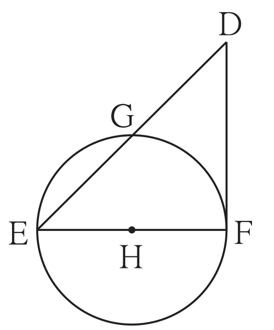
आकृति 3.79

4. आकृति 3.80 में, यदि l(PQ) = 6,
QR = 10, PS = 8
तो TS = कितना ?



आकृति 3.80

5. आकृति 3.81 में, रेख EF व्यास और रेख DF स्पर्श रेखाखंड है। वृत्त की त्रिज्या r हो, तो सिद्ध कीजिए –
DE × GE = $4r^2$



आकृति 3.81

1. दिए गए प्रत्येक उप प्रश्न के लिए चार वैकल्पिक उत्तर दिए हैं । उनमें से उचित विकल्प चुनकर लिखिए ।

(1) क्रमशः 5.5 सेमी और 3.3 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त परस्पर स्पर्श करते हैं । उनके केंद्रों के बीच की दूरी कितने सेमी होगी ?

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 5.5 या 2.2

(2) परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले दो वृत्त एक दूसरे के केंद्र से होकर जाते हैं । यदि उनके केंद्रों के बीच की दूरी 12 सेमी हो, तो प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या कितने सेमी होगी ?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) बताया नहीं जा सकता

(3) 'यदि कोई वृत्त किसी समांतर चतुर्भुज की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है, तो समांतर चतुर्भुज .... होना चाहिए', इस कथन में रिक्त स्थान में उचित शब्द लिखिए ।

(A) आयत (B) समचतुर्भुज (C) वर्ग (D) समलंब चतुर्भुज

(4) यदि किसी वृत्त के केंद्र से 12.5 सेमी की दूरी पर स्थित किसी बिंदु से उस वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाखंड की लंबाई 12 सेमी हो, तो उस वृत्त का व्यास कितने सेमी होगा ?

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) परस्पर बाह्य स्पर्श करने वाले दो वृत्तों में अधिक से अधिक कितनी स्पर्शरेखाएँ खींची जा सकती हैं ?

(A) एक (B) दो (C) तीन (D) चार

(6) 'O' केंद्र वाले वृत्त के चाप ACB में $\angle ACB$ अंतर्लिखित किया गया है । यदि $m\angle ACB = 65^\circ$ तो m(चाप ACB) = कितना ?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) किसी वृत्त की जीवाएँ AB और CD परस्पर वृत्त के अंतर्भाग में बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती हैं । यदि AE = 5.6, EB = 10, CE = 8 तो ED = कितना ?

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) चक्रीय □ ABCD में $\angle A$ के माप का दुगुना $\angle B$ के माप के तिगुने के बराबर हो, तो $\angle C$ का माप कितना होगा ?

(A) 36° (B) 72° (C) 90° (D) 108°

(9*) किसी वृत्त पर बिंदु A, B, C इस प्रकार है, कि m(चाप) AB = m(चाप BC) = 120° और दोनों चापों का कोई भी बिंदु सामान्य नहीं है । तो Δ ABC किस प्रकार का त्रिभुज है ?

(A) समबाहु त्रिभुज (B) विषमबाहु त्रिभुज

(C) समकोण त्रिभुज (D) समद्विबाहु त्रिभुज

(10)रेख XZ व्यास वाले वृत्त के अन्तःभाग में एक बिंदु Y है । तो निम्नलिखित में से कितने कथन सत्य हैं?

(1) $\angle$ XYZ न्यूनकोण नहीं हो सकता ।

(2) $\angle$ XYZ समकोण नहीं हो सकता ।

(3) $\angle$ XYZ अधिक कोण है ।

(4) $\angle$ XYZ के माप के संदर्भ में कोई निश्चित कथन नहीं किया जा सकता ।

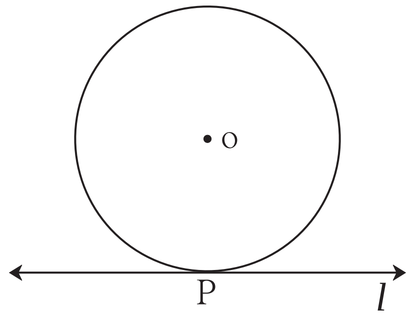
(A) सिर्फ एक (B) सिर्फ दो (C) सिर्फ तीन (D) सभी

2. 'O' केंद्रवाले वृत्त को रेखा l, बिंदु P पर स्पर्श करती है । यदि वृत्त की त्रिज्या 9 सेमी हो, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(1) d(O, P) = कितना? क्यों?

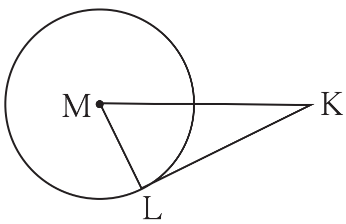
(2) यदि d(O, Q) = 8 सेमी हो,तो बिंदु Q का स्थान कहाँ होगा?

(3) d(O, R) = 15 सेमी, हो तो रेखा l पर बिंदु R कितनी जगह पर हो सकता है? वे बिंदु P से कितनी दूरी पर होंगे?



आकृति 3.82

3.



आकृति 3.83

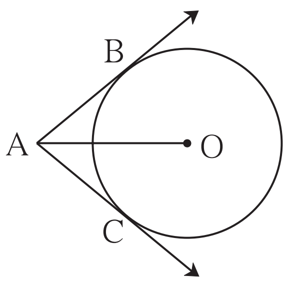
संलग्न आकृति 3.83 में, बिंदु M वृत्त का केंद्र और रेख KL स्पर्श रेखाखंड है ।

यदि MK = 12, KL = $6\sqrt{3}$ तो

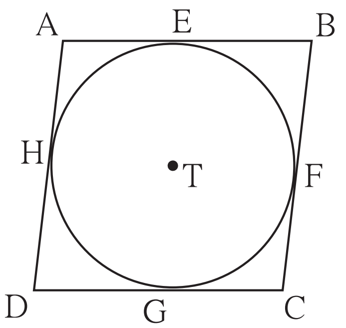
(1) वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

(2) $\angle$K और $\angle$M का माप ज्ञात कीजिए ।

4. आकृति 3.84 में, बिंदु 'O' वृत्त का केंद्र और रेख AB तथा रेख AC स्पर्शरेखाखंड हैं । यदि वृत्त की त्रिज्या r और AB = r हो, तो सिद्ध कीजिए कि, $\square$ ABOC एक वर्ग है ।



आकृति 3.84

5. 

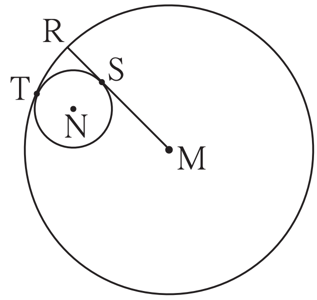
आकृति 3.85

आकृति 3.85 में, T केंद्र वाले वृत्त के चारों ओर समांतर □ ABCD परिलिखित किया गया है । (अर्थात उस चतुर्भुज की चारों भुजाएँ वृत्त को स्पर्श करती हैं ।) बिंदु E, F, G और H स्पर्श बिंदु है । यदि AE = 4.5 और EB = 5.5, तो AD का मान ज्ञात कीजिए ।

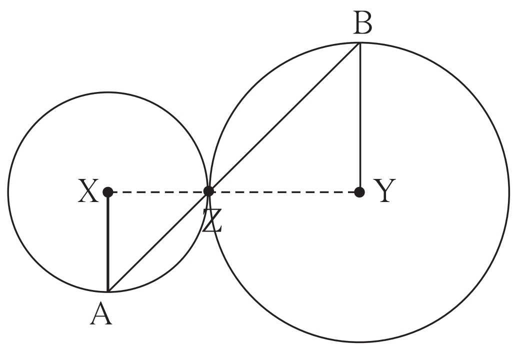
6. आकृति 3.86 में, N केंद्र वाला वृत्त M केंद्रवाले वृत्त को बिंदु T पर स्पर्श करता है । बड़े वृत्त की त्रिज्या छोटे वृत्त को बिंदु S पर स्पर्श करती है । यदि बड़े तथा छोटे वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 9 सेमी तथा 2.5 सेमी हो तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर ज्ञात कर इसके आधार पर MS : SR का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(1) MT = कितना ? (2) MN = कितना ?

(3) ∠NSM = कितना ?



आकृति 3.86



आकृति 3.87

7. संलग्न आकृति में, X और Y केंद्रवाले वृत्त परस्पर Z बिंदु पर स्पर्श करते हैं । बिंदु Z से होकर जानेवाली वृत्त की छेदन रेखा उन वृत्तों को क्रमशः बिंदु A तथा बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करती है । सिद्ध कीजिए कि त्रिज्या XA || त्रिज्या YB. नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति को पूर्ण कीजिए ।

रचना : रेख XZ और .... खींचिए ।

उपपत्ति : स्पर्शवृत्तों के प्रमेयानुसार, बिंदु X, Z, Y .... हैं ।

∴ ∠ XZA ≅ .... (शीर्षाभिमुख कोण)

माना ∠ XZA = ∠ BZY = a ..... (I)

अब, रेख XA ≅ रेख XZ .... (..........)

∴ ∠ XAZ = ... = a .... (समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय) (II)

उसी प्रकार रेख YB ≅ .... (..........)

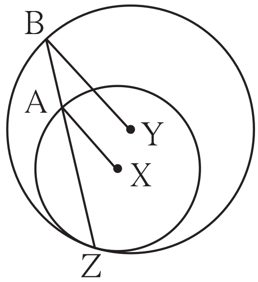
∴ ∠ BZY = ... = a .... (..........) (III)

∴ (I), (II) तथा (III) से,

∠ XAZ ≅ ....

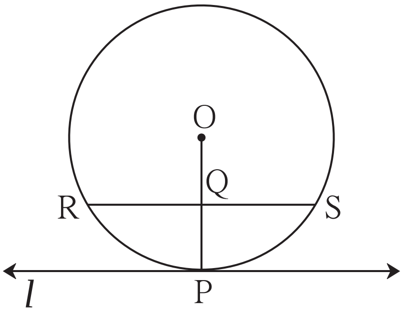
∴ त्रिज्या XA || त्रिज्या YB .... (..........)

8. आकृति 3.88 में, बिंदु X तथा बिंदु Y केंद्रवाले अंतःस्पर्शी वृत्त बिंदु Z पर स्पर्श करते हैं । बड़े वृत्त की जीवा BZ छोटे वृत्त को बिंदु A पर प्रतिच्छेदित करती है, तो
सिद्‌ध कीजिए, कि – रेख AX || रेख BY.



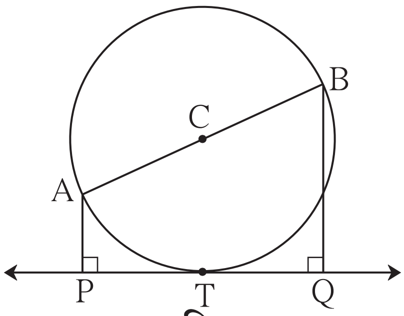
आकृति 3.88

9. संलग्न आकृति 3.89 में रेखा l, बिंदु O केंद्र वाले वृत्त को बिंदु P पर स्पर्श करती है । बिंदु Q त्रिज्या OP का मध्य बिंदु है । बिंदु Q से होकर जाने वाली जीवा RS || रेखा l । यदि RS = 12 सेमी हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.89

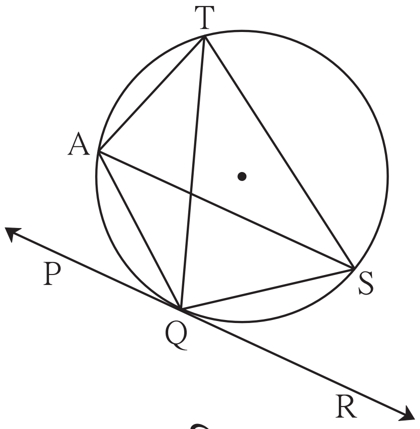
10★. आकृति 3.90 में, रेख AB बिंदु C केंद्रवाले वृत्त का व्यास है । वृत्त की स्पर्श रेखा PQ वृत्त को बिंदु T पर स्पर्श करती है ।
रेख AP ⊥ रेखा PQ और रेख BQ ⊥ रेखा PQ तो सिद्‌ध कीजिए कि, रेख CP ≅ रेख CQ.



आकृति 3.90

11★. 3 सेमी त्रिज्या तथा बिंदु A, B तथा C केंद्रवाले वृत्तों की रचना इस प्रकार कीजिए कि प्रत्येक वृत्त अन्य दो वृत्तों को स्पर्श करता हो ।

12★. सिद्‌ध कीजिए कि वृत्त के कोई भी तीन बिंदु एक रैखिक नहीं होते ।



आकृति 3.91

13. आकृति 3.91 में, रेखा PR वृत्त को Q बिंदु पर स्पर्श करती है। आकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

(1) $\angle$TAQ और $\angle$ TSQ के मापों का योगफल कितना होगा?

(2) $\angle$AQP के सर्वांगसम कोण का नाम बताइए।

(3) $\angle$QTS के सर्वांगसम कोण का नाम बताइए।

(4) यदि $\angle TAS = 65^\circ$, तो $\angle$TQS और चाप TS के माप बताइए।

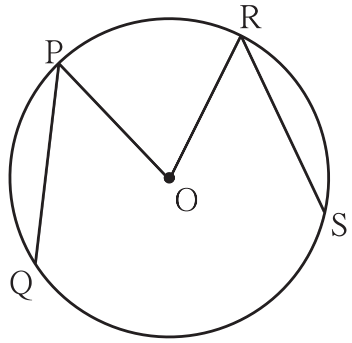
(5) यदि $\angle AQP = 42^\circ$ और $\angle SQR = 58^\circ$, तो $\angle$ATS के माप ज्ञात कीजिए।

14. संलग्न आकृति में, O केंद्रवाले वृत्त में रेख PQ तथा रेख RS सर्वांगसम जीवा हैं। यदि $\angle$ POR = 70° तथा m(चाप RS) = 80°, तो –

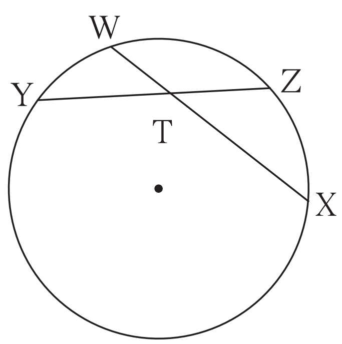
(1) m(चाप PR) कितना?

(2) m(चाप QS) कितना?

(3) m(चाप QSR) कितना?



आकृति 3.92



आकृति 3.93

15. आकृति 3.93 में, m(चाप WY) = 44°, m(चाप ZX) = 68°, तो

(1) $\angle$ZTX का माप ज्ञात कीजिए।

(2) WT = 4.8, TX = 8.0, YT = 6.4 तो TZ = कितना?

(3) WX = 25, YT = 8, YZ = 26, तो WT = कितना?

16. आकृति 3.94 में,

(1) m(चाप CE) = 54°,

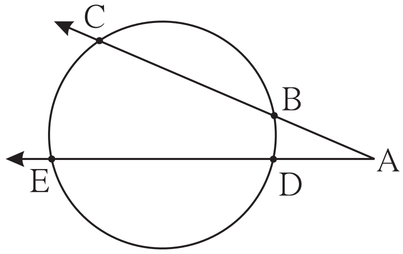
m(चाप BD) = 23°, तो ∠CAE = कितना ?

(2) AB = 4.2, BC = 5.4,

AE = 12.0 तो AD = कितना ?

(3) AB = 3.6, AC = 9.0,

AD = 5.4 तो AE = कितना ?



आकृति 3.94

17. संलग्न आकृति में, जीवा EF || जीवा GH तो सिद्ध कीजिए कि, जीवा EG ≅ जीवा FH

नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

उपपत्ति : रेख GF खींचिए ।

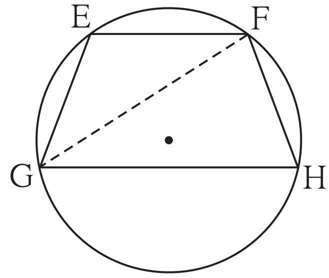
∠ EFG = ∠ FGH .... ______ (I)

∠ EFG = ______ (अंतर्लिखित कोण के प्रमेय से) (II)

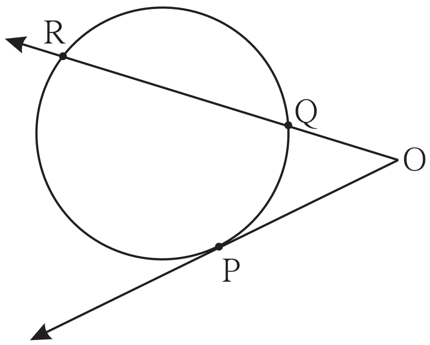
∠ FGH = ______ (अंतर्लिखित कोण के प्रमेय से)(III)

∴ m (चाप EG) = ______ [(I), (II) तथा (III) से]

जीवा EG ≅ जीवा FH .... (______)



आकृति 3.95



आकृति 3.96

18. संलग्न आकृति में बिंदु P एक स्पर्श बिंदु है ।

(1) m(चाप PR) = 140°,

∠ POR = 36° तो

m(चाप PQ) = कितना ?

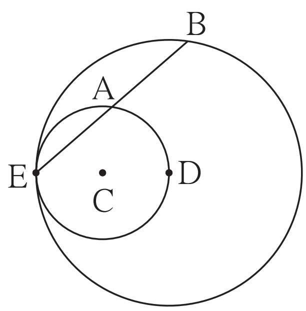
(2) OP = 7.2, OQ = 3.2, तो

OR तथा QR ज्ञात कीजिए ।

(3) OP = 7.2, OR = 16.2, तो

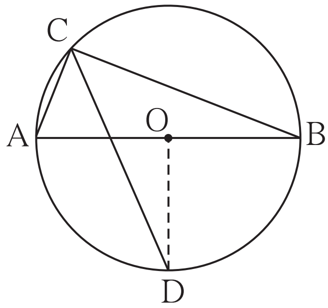
QR का मान कितना ?

19. संलग्न आकृति में, C केंद्रवाला वृत्त D केंद्रवाले वृत्त को E बिंदु पर अंतःस्पर्श करता है । बिंदु D अंतःवृत्त पर है । बाह्य वृत्त की जीवा EB अंतःवृत्त को A बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है । सिद्ध कीजिए, कि रेख EA ≅ रेख AB



आकृति 3.97

20. आकृति 3.98 में, रेख AB बिंदु O केंद्रवाले वृत्त का व्यास है। अंतर्लिखित $\angle$ ACB का समद्विभाजक वृत्त को D बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है। सिद्ध कीजिए कि
रेख AD $\cong$ रेख BD ।
नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थान की पूर्ति कर पूर्ण कीजिए ।



आकृति 3.98

उपपत्ति : रेख OD खींचिए।

$\angle$ ACB = [ ] (अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण)

$\angle$ DCB = [ ] (रेख CD, $\angle$ C का समद्विभाजक है)

m(चाप DB) = [ ] (अंतर्लिखित कोण का प्रमेय)

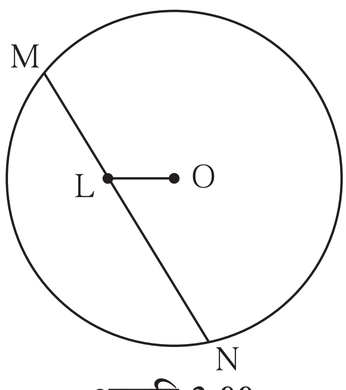
$\angle$ DOB = [ ] (चाप के माप की परिभाषा) (I)

रेख OA $\cong$ रेख OB.......... ([ ]) (II)

$\therefore$ रेखा OD रेख AB की [ ] रेखा है। (I) तथा (II) से

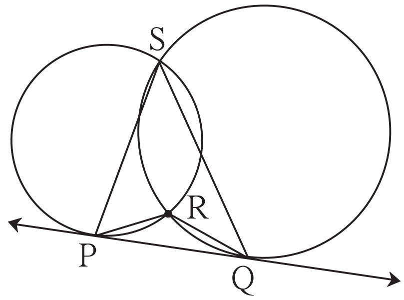
$\therefore$ रेख AD $\cong$ रेख BD

21. संलग्न आकृति 3.99 में रेख MN 'O' केंद्रवाले वृत्त की जीवा है । MN = 25, जीवा MN पर बिंदु L इस प्रकार है कि, ML = 9 और d(O, L) = 5 तो इस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

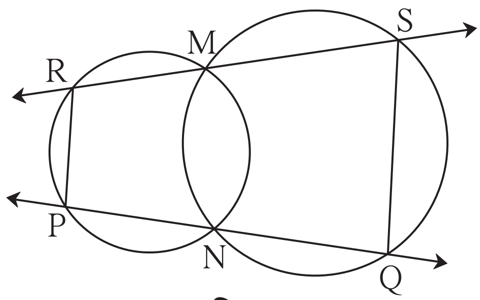


आकृति 3.99

22★. आकृति 3.100 में दो वृत्त परस्पर बिंदु S तथा बिंदु R पर प्रतिच्छेदित करते हैं । रेखा PQ उन वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है जो उन्हे बिंदु P तथा Q पर स्पर्श करती है । सिद्ध कीजिए कि –
$\angle$ PRQ + $\angle$ PSQ = 180°



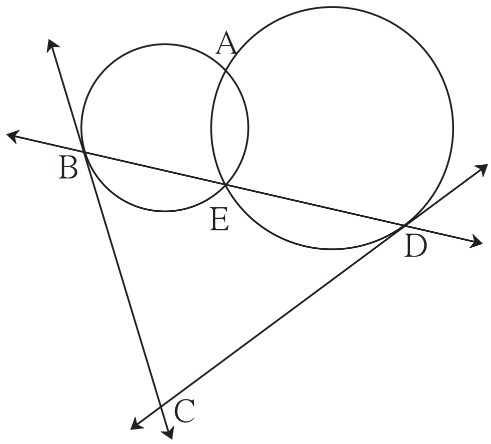
आकृति 3.100



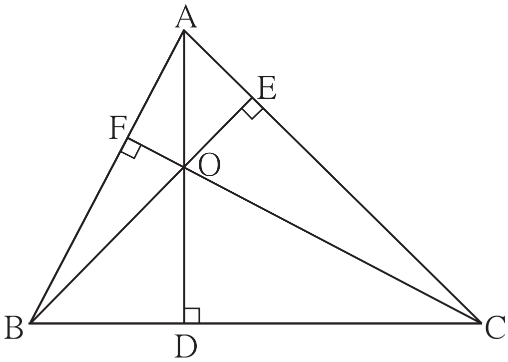
आकृति 3.101

23★. आकृति 3.101 में, दो वृत्त एक दूसरे को बिंदु M तथा N पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि बिंदु M तथा N से खींची गई वृत्त की छेदन रेखाएँ वृत्तों के क्रमशः बिंदु R तथा S पर तथा बिंदु P तथा Q पर प्रतिच्छेदित करती हों तो सिद्ध कीजिए कि PR || QS

24★. दो वृत्त परस्पर बिंदु A तथा बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करते हैं । बिंदु E से खींची गई सामान्य छेदन रेखा वृत्तों को बिंदु B तथा बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती है । बिंदु B तथा बिंदु D से खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर बिंदु C पर प्रतिच्छेदित करती हैं । सिद्ध कीजिए कि, □ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है ।



आकृति 3.102



आकृति 3.103

25★. Δ ABC में, रेख AD ⊥ भुजा BC, रेख BE ⊥ भुजा AC, रेख CF ⊥ भुजा AB । बिंदु 'O' लंबपाद हो तो सिद्ध कीजिए कि, बिंदु 'O' Δ DEF का अंतःकेंद्र है ।

ICT Tools or Links

जिओजेब्रा की सहायता से विविध वृत्त खींचिए ।
उसमें जीवा तथा स्पर्श रेखा खींचकर गुणधर्म की जाँच कीजिए ।

PFN3N6