संख्या पद्धति
(Number System)

अंकगणित संख्याओं एवं उनके बीच के संबंधों का विज्ञान है। इसके अंतर्गत उन विधियों एवं प्रक्रियाओं का अध्ययन किया जाता है, जो खास तौर से संख्याओं पर ही लागू होते हैं।

संख्याओं को 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 एवं 0, जिसे अंक कहा जाता है के सहारे व्यक्त करते हैं। इनमें से '0' को असार्थक (insignificant) अंक एवं शेष को सार्थक (significant) अंक कहा जाता है।

***संख्यांक* (Numeral):** अंकों का ऐसा समूह, जो किसी संख्या को व्यक्त करता हो, संख्यांक या Numeral कहलाता है। संख्याओं को निम्नलिखित वर्गों में विभाजित किया जाता है।

***प्राकृत संख्या* (Natural Number):** जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता हो, उन्हें प्राकृत संख्या कहते हैं। इन्हें 'N' से सूचित किया जाता है।

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

***पूर्ण संख्या* (Whole Number):** जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में '0' को भी शामिल कर लेते हैं, तब हमें पूर्ण संख्याओं का परिवार मिलता है। इसे W से सूचित करते हैं।

W = {0, 1, 2, 3, 4, 5 ....}

***रूढ़ संख्या* (Prime Number):** 1 के अतिरिक्त वे समस्त संख्याएँ जो 1 और स्वयं को छोड़कर अन्य किसी भी संख्या से विभाजित नहीं होती हों, रूढ़ संख्याएँ कहलाती हैं। इसे अभाज्य संख्या भी कहते हैं।

उदाहरण: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ....

***रूढ़ संख्या की जाँच* (To test whether a given number is prime)**

यदि आप इस बात का पता लगाना चाहते हैं कि प्रदत्त संख्या रूढ़ है या नहीं, तो यह नुस्खा आजमाइए। प्रदत्त संख्या के संभावित वर्गमूल से बड़ी कोई संख्या लीजिए। मान लीजिए, यह संख्या x है। अब x से छोटी समस्त रूढ़ संख्याओं से प्रदत्त संख्या की विभाज्यता का परीक्षण कीजिए। यदि यह इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है तो यह निश्चित रूप से एक रूढ़ संख्या होगी। यदि यह रूढ़ नहीं है तो इसे यौगिक (composite) संख्या कहेंगे।

उदा. 1: क्या 349 एक रूढ़ संख्या है?

हल: 349 का संभावित वर्गमूल है 19। 19 से छोटी सभी रूढ़ संख्याएँ हैं: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

स्पष्ट है कि 349 इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है। इसलिए 349 एक रूढ़ संख्या है।

उदा. 2: क्या 881 एक रूढ़ संख्या है?

हल: 881 का संभावित वर्गमूल है 30A

30 से छोटी रूढ़ संख्याएँ हैं: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29। चूँकि 881 उपर्युक्त किसी भी संख्या से विभाज्य नहीं है, इसलिए यह एक रूढ़ संख्या है।

उदा. 3: क्या 979 एक रूढ़ संख्या है?

हल: 979 का संभावित वर्गमूल है 32।

32 से छोटी रूढ़ संख्याएँ हैं: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31। चूँकि 979, 11 से विभाज्य है। इसलिए यह रूढ़ संख्या नहीं है।

उदा. 4: क्या 857, 509, 757, 1003, 1009, 919, 913, 647, 649, 657 एवं 659 रूढ़ संख्याएँ हैं। [इन्हें स्वयं हल करें]

***यौगिक संख्या* (Composite Number):** 1 के अतिरिक्त वे समस्त संख्याएँ, जो रूढ़ नहीं हैं, यौगिक कहलाती हैं। इसे संयुक्त संख्या भी कहा जाता है। उदाहरण के लिए 4, 6, 8, 9, 12, 14 यौगिक संख्याएँ हैं।

***सम संख्या* (Even Number):** वे सभी संख्याएँ, जो 2 से पूरी तरह विभाजित हो जाती हैं, सम संख्या कहलाती हैं। उदाहरण के लिए 2, 4, 8, 12, 24, 28 ...... सम संख्याएँ हैं। इसका स्वरूप है 2n, जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

***विषम संख्या* (Odd Number):** जो संख्या 2 से विभाजित नहीं होती है, उसे विषम संख्या कहा जाता है। उदा.: 3, 9, 11, 17, 19, ... आदि।

***क्रमागत संख्याएँ* (Consecutive Numbers):** संख्याओं की ऐसी श्रेणी, जिसमें प्रत्येक अपने पूर्ववर्त्ती संख्या से एक बड़ा हो, क्रमागत संख्या कहलाती है। उदाहरण के लिए 6, 7, 8 या 13, 14, 15, 16 या 101, 102, 103, 104, 105 ... क्रमागत संख्याएँ हैं।

***पूर्णांक* (Integers):** संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हों, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती हैं। इसे I से सूचित किया जाता है। उदाहरण के लिए, $I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ...\}$

***परिमेय संख्या* (Rational Number):** भिन्न के रूप में लिखी गई संख्याएँ परिमेय कहलाती हैं। इन्हें Q से सूचित किया जाता है जैसे, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{13}{15}$ आदि।

अथवा,

वे संख्याएँ, जिन्हें $\frac{a}{b}$ (जहाँ a एवं b पूर्णांक हैं, तथा $b \neq 0$) के रूप में लिखा जा सके, परिमेय संख्याएँ कही जाती हैं।

***अपरिमेय संख्या* (Irrational Number):** वे संख्याएँ जिन्हें p/q (जहाँ p एवं q पूर्णांक संख्याएँ हैं और $q \neq 0$) के रूप में नहीं लिखा जा सके अपरिमेय (Irrational) कहलाती हैं।

उदाहरण के लिए, $\sqrt{3} = 1.732..., \sqrt{2} = 1.414...$

पर, आवर्त्ती दशमलव, जैसे $\frac{8}{3} = 2.666$ या $2.\overline{6}$ को p/q के रूप में लिखा जा सकता है। इसलिए यह एक परिमेय संख्या है।

***वास्तविक संख्या* (Real Number):** परिमेय एवं अपरिमय संख्याओं के परिवार को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं।

किसी भी संख्या के अंकों के मान

किसी भी संख्या के अंकों के दो मान होते हैं।

(i) नैज-मान (Intrinsic Value)

(ii) स्थानिक मान (Local Value or Place Value)

उदाहरण के लिए किसी संख्या 5347 में अंक 3 का नैज मान 3 इकाइयाँ हैं जबकि उसका स्थानिक मान तीन सौ है।

इसके अतिरिक्त, एक निश्चित अंकों वाली सबसे बड़ी संख्या (greatest number) वह संख्या होगी जिसमें प्रत्येक अंक 9 होगा तथा छोटी से छोटी संख्या (least number) वह संख्या होगी जिसमें पहला अंक 1 तथा उसके दायीं ओर के शेष अंक शून्य होंगे। उदाहरण के लिए पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या 99999 तथा सबसे छोटी संख्या 10000 होगी।

सरलीकरण के नियम (Rule of Simplification)

i) किसी व्यंजक के सरलीकरण के क्रम में, सर्वप्रथम रेखा-कोष्ठक (vinculum) को हटाने का प्रयास किया जाता है। उदाहरण के लिए, $-8-10=-18$

लेकिन $-\overline{8-10}=-(-2)=2$

ii) रेखा-कोष्ठक हटाने के बाद (), {} एवं [] के क्रम में कोष्ठकों की क्रिया करनी चाहिए।

iii) कोष्ठकों को निबटाने के बाद निम्नलिखित क्रम में अन्य गणितीय क्रियाएँ की जानी चाहिए: (a) of (का), (b) भाग, (c) गुणा, (d) जोड़ एवं (e) घटाव

नोट: इस नियम को VBODMAS भी कहते हैं, जहाँ V = Vinculm (रेखा-कोष्ठक), B = Bracket (कोष्ठक), O = Of (का), D = Division (भाग), M = Multiplication (गुणा), A = Addition (जोड़), S = Subtraction (घटाव)

उदा. सरल करें: $1\div\frac{3}{7}$ का $\left(6+8\times\overline{3-2}\right)+\left[\frac{1}{5}\div\frac{7}{25}-\left\{\frac{3}{7}+\frac{8}{14}\right\}\right]$

हल: $1\div\frac{3}{7}$ का $(6+8\times1)+\left[\frac{1}{5}\div\frac{7}{25}-\frac{14}{14}\right]$

$=1\div\frac{3}{7}$ का $(6+8)+\left[\frac{1}{5}\times\frac{25}{7}-1\right]$

$=1\div\frac{3}{7}$ का $14+\left[\frac{5}{7}-1\right]$

$$=1\div6+\left[-\frac{2}{7}\right]$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{2}{7}=\frac{7-12}{42}=-\frac{5}{42}$$

अंकगणितीय समस्याओं के सरलीकरण के सामान्य-नियम

1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

या, $\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$

या, $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$

2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

6) $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=a+b$ या, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

7) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$ या, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

8) $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ba-ca}=(a+b+c)$

9) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

10) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

11) $(a^x)^y = a^{xy}$

12) $a^x = b^x \Rightarrow$ या तो $a=b$ या, $x=0$

13) $a^x = a^y \Rightarrow$ या तो $x=y$ या, $a=0, 1$

14) $a^x = 1 \Rightarrow x=0$ (a के सभी मानों के लिए, '0' को छोड़कर)

परिमेय संख्याओं के आरोही एवं अवरोही क्रम (Ascending or Desceding Orders in Rational Numbers)

इस अध्याय के अन्तर्गत, सर्वप्रथम, दो परिमेय संख्याओं की परस्पर तुलना करने पर विचार किया जाएगा।

नियम 1: यदि किसी भिन्न का अंश एवं हर समान रूप से बढ़ता जाए, तो इस तरह प्राप्त अंतिम भिन्न सबसे बड़ा होता है।

उदा. 1: निम्नलिखित में से कौन-सा भिन्न सबसे बड़ा है? $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ एवं $\frac{5}{6}$

हल: यहाँ प्रदत्त भिन्नों के अंश एवं हर दोनों में क्रमशः 1 की वृद्धि हो रही है। इसलिए आखिरी भिन्न $\frac{5}{6}$ ही सबसे बड़ा है।

उदा. 2: निम्नलिखित भिन्नों में कौन सबसे बड़ा है? $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}$ एवं $\frac{6}{9}$

हल: यहाँ प्रदत्त भिन्नों के अंश एवं हर दोनों ही क्रमशः 2 से बढ़ रहे हैं। इसलिए आखिरी भिन्न $\frac{6}{9}$ ही सबसे बड़ा है।

उदा. 3: निम्नलिखित में से कौन-सा भिन्न सर्वाधिक बड़ा है? $\frac{1}{8}, \frac{4}{9}$ एवं $\frac{7}{10}$

हल: यहाँ अंश में 3 की वृद्धि हो रही है और हर में 1 की। इसलिए आखिरी भिन्न $\frac{7}{10}$ सबसे बड़ा है।

> इस प्रकार नियम का सामान्य रूप इस तरह हुआ:
>
> $\frac{x}{y}, \frac{x+a}{y+b}, \frac{x+2a}{y+2b}, \frac{x+3a}{y+3b}, \ldots, \frac{x+na}{y+nb}$ जैसे भिन्नों में $\frac{x+na}{x+nb}$ का मान सर्वाधिक है, जबकि
>
> i) $a = b$ या, ii) $a > b$

पर जरा उस परिस्थिति की तुलना कीजिए, जब $a < b$.
निम्नलिखित उदाहरण देखिए,

उदा. 4: निम्नलिखित में कौन सबसे बड़ा है? $\frac{1}{8}, \frac{2}{12}, \frac{3}{16}$ एवं $\frac{4}{20}$

हल: उपर्युक्त उदाहरण में अंश एवं हर असमान स्थिरांकों के अंतर से बढ़ते हैं। अंश में एक की वृद्धि हो रही है और हर में 4 की। यदि उपर्युक्त भिन्नों को दशमलव में बदल दें तो पाएँगे कि ये भिन्न आरोही (बढ़ते क्रम) क्रम में लिखे गए हैं। इसलिए श्रेणी का अंतिम भिन्न $\frac{4}{20}$ सबसे बड़ा है।

उदा. 5: निम्नलिखित में से कौन-सा भिन्न सबसे बड़ा है? $\frac{2}{7}, \frac{4}{15}$ एवं $\frac{6}{23}$

हल: यहाँ अंश में क्रमशः 2 की वृद्धि हो रही है एवं हर में 8 की। पर अंतिम भिन्न $\frac{6}{23}$ सबसे छोटा है।

नोट: उपर्युक्त दोनों उदाहरणों से पता चलता है कि यदि $a < b$, तो उपर्युक्त नियम पर पूरी तरह भरोसा नहीं किया जा सकता। इसलिए उपर्युक्त नियम का इस्तेमाल करते वक्त सावधानी बरतें।

उपर्युक्त नियम लागू होता है यदि

$$\frac{\text{अंश में वृद्धि}}{\text{हर में वृद्धि}} > \text{पहला भिन्न}$$

पर यदि,

$$\frac{\text{अंश में वृद्धि}}{\text{हर में वृद्धि}} < \text{पहला भिन्न}$$

तो अंतिम भिन्न सबसे छोटा होता है।

$$\text{जब } \frac{\text{अंश में वृद्धि}}{\text{हर में वृद्धि}} = \text{पहला भिन्न}$$

तब सभी भिन्न आपस में बराबर होते हैं।

नियम-2: वज्र-गुणन के बाद जिस भिन्न का अंश सबसे बड़ा हो जाता हो, वह भिन्न सबसे बड़ा होता है।

उदा. 6: निम्नलिखित में से कौन बड़ा है: $\frac{5}{8}$ या $\frac{9}{14}$?

हल: विद्यार्थी ऐसे प्रश्न को हल करने के लिए या तो भिन्न को दशमलव में बदल देते हैं या हर को समान बनाने की कोशिश करते हैं। पर निम्नलिखित विधि से आप उत्तर तक बड़ी आसानी से पहुँच सकते हैं।

पहला चरण: प्रदत्त भिन्नों का वज्र-गुणन करें।

$$\frac{5}{8} \times \frac{9}{14}$$

$5 \times 14 = 70$ एवं $9 \times 8 = 72$

दूसरा चरण: चूँकि $72 > 70$ एवं 72 से संबद्ध अंश है '9'। इसलिए भिन्न $\frac{9}{14}$ बड़ा है।

उदा. 7: निम्नलिखित में से कौन बड़ा है: $\frac{4}{15}$ या $\frac{6}{23}$?

पहला चरण: $4 \times 23 > 15 \times 6$

दूसरा चरण: चूँकि 4×23, 4 से संबद्ध है, इसलिए $\frac{4}{15}$ बड़ा है।

उदा. 8: निम्नलिखित में से कौन बड़ा है: $\frac{13}{15}$ या $\frac{20}{23}$?

हल: ***पहला चरण:*** $13 \times 23 < 15 \times 20$

दूसरा चरण: $\frac{20}{23}$ बड़ा है।

आप देख ही चुके हैं कि गणना की यह विधि कितनी तेज रफ्तार से काम करती है। यदि अभ्यास कर लें तो गणना की जरूरत ही नहीं पड़ेगी। आप सीधे उत्तर तक पहुँच सकते हैं। इस प्रकार दिए गए भिन्न को आरोही या अवरोही क्रम मे सजाना अब मुश्किल नहीं रहा। आप किसी भी दो भिन्न को एक साथ चुन लें, पता लगाएँ कि इनमें कौन बड़ा है। इस प्रकार दिए गए भिन्नों को वांछित क्रम में सजाया जा सकता है।

नोट: कभी-कभी जब प्रदत्त भिन्न छोटे परिमाण वाले (10 से कम) होते हैं, तब परंपरागत विधि अधिक सुविधाजनक प्रतीत होती है। इस विधि के अंतर्गत या तो प्रदत्त भिन्नों को दशमलव रूप में बदल देते हैं या फिर हरों का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) निकालकर इन्हें समीकृत (equate) किया जाता है।

उदा. 9: निम्नलिखित भिन्नों को आरोही क्रम में सजाएँ: $\frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{1}{2}$ एवं $\frac{3}{5}$

हल: ***पहली विधि:***

7, 5, 9, 2 एवं 5 का लघुत्तम समापवर्त्य = 630

दिए गए भिन्नों को समीकृत करने के लिए लघुत्तम समापवर्त्य में हर से भाग देते हैं तथा भागफल से संबद्ध अंश में गुणा कर देते हैं। जैसे, $\frac{3}{7}$ के संदर्भ में $630 \div 7 = 90$, इसलिए 3 में 90 से गुणा करें। इस प्रकार दिए गए भिन्न क्रमशः निम्नलिखित रूप में तब्दील हो जाते हैं:

$\frac{270}{630}, \frac{504}{630}, \frac{490}{630}, \frac{315}{630}$ एवं $\frac{378}{630}$

जिस भिन्न का अंश सबसे बड़ा है, निश्चय ही वह भिन्न भी सबसे बड़ा होगा। इस प्रकार,

$$\frac{504}{630} > \frac{490}{630} > \frac{378}{630} > \frac{315}{630} > \frac{270}{630}$$

या, $\frac{4}{5} > \frac{7}{9} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

दूसरी विधि: भिन्नों को दशमलव में बदल डालें:

$$\frac{3}{7} = 0.428, \frac{4}{5} = 0.8, \frac{7}{9} = 0.777, \frac{1}{2} = 0.5, \frac{3}{5} = 0.6$$

निश्चय ही $\frac{4}{5} > \frac{7}{9} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

तीसरी विधि: वज्र-गुणन विधि:

पहला चरण: सर्वप्रथम प्रथम दो भिन्नों को लेते हैं। वज्र-गुणन विधि से (जैसा कि नियम-2 में बताया गया है) बड़ा भिन्न प्राप्त करते हैं।

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{5}$$

$3 \times 5 < 7 \times 4$

$\therefore \ \frac{4}{5} > \frac{3}{7}$

दूसरा चरण: अब तीसरे भिन्न को लीजिए। उपर्युक्त चरण से प्राप्त बड़े भिन्न के साथ इसका वज्र-गुणन कीजिए।

$$\frac{4}{5} \times \frac{7}{9}$$

$4 \times 9 > 7 \times 5$

$\therefore \ \frac{4}{5} > \frac{7}{9}$

इस प्रकार हम पाते हैं कि $\frac{7}{9}, \frac{3}{7}$ के बाद आता है या फिर $\frac{4}{5}$ एवं $\frac{3}{7}$ के बीच में आता है। इसलिए हम $\frac{3}{7}$ एवं $\frac{7}{9}$ पर वज्र-गुणन की क्रिया करते हैं और पाते हैं कि $\frac{7}{9} > \frac{3}{7}$

$\therefore \ \frac{4}{5} > \frac{7}{9} > \frac{3}{7}$

तीसरा चरण: अब अगले भिन्न को लीजिए। $\frac{3}{7}$ एवं $\frac{1}{2}$ पर वज्र-गुणन की क्रिया कीजिए। और हमलोग देखते हैं कि $\frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

फिर यही क्रिया $\frac{7}{9}$ एवं $\frac{1}{2}$ के साथ दुहराइए। $\Rightarrow \ \frac{7}{9} > \frac{1}{2}$

इसलिए, $\frac{4}{9} > \frac{7}{9} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

इसी प्रकार की क्रियाएँ दुहराकर हम अंतिम परिणाम भी पा लेते हैं: $\frac{4}{5} > \frac{7}{9} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

नोट: इस विधि की कुछ खामियाँ भी हैं, पर यदि आप दक्षता हासिल कर लें तो शीघ्रता से अंतिम परिणाम तक पहुँच सकते हैं। इस विधि को यों ही मत छोड़ दीजिए, इसके अपने लाभ भी हैं।

गिनती की संख्याओं से संबद्ध कुछ नियम

I. प्रथम 'n' प्राकृत संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

उदाहरण के लिए $1+2+3+...+105 = \frac{105\times(105+1)}{2} = 5565$

II. प्रथम 'n' विषम संख्याओं का योग $= n^2$

उदाहरण के लिए, $1+3+5+7 = 4^2 = 16$ (यहाँ विषम संख्याओं की संख्या 4 है)

ऐसे ही $1+3+5+...+20$ वीं विषम संख्या $(20\times 2-1=39) = 20^2 = 400$

III. प्रथम 'n' सम संख्याओं का योग $= n(n+1)$

उदाहरण के लिए, $2+4+6+8+...+100$ (या 50वीं सम संख्या)

$= 50\times(50+1) = 2550$

IV. प्रथम 'n' प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

उदाहरण के लिए: $1^2+2^2+3^2+.......+10^2$

$= \frac{10(10+1)(2\times10+1)}{6} = \frac{10\times11\times21}{6} = 385$

V. प्रथम 'n' प्राकृत संख्याओं के घनों का योग $= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

उदाहरण के लिए,

$1^3+2^3+......+6^3 = \left[\frac{6\times(6+1)}{2}\right]^2 = (21)^2 = 441$

नोट: 1. गिनती की प्रथम n संख्याओं में $\frac{n}{2}$ सम संख्याएँ होती हैं एवं $\frac{n}{2}$ विषम संख्याएँ, बशर्तेकि n (संख्याओं की संख्या) एक सम संख्या हो। यदि n (संख्याओं की संख्या) एक विषम संख्या हो तो $\frac{1}{2}(n+1)$ विषम संख्याएँ होंगी तथा $\frac{1}{2}(n-1)$ सम संख्याएँ होंगी। उदाहरण के लिए 1 से 50 तक की प्राकृत संख्याओं में $\frac{50}{2} = 25$ विषम संख्याएँ है एवं $\frac{50}{2} = 25$ सम संख्याएँ हैं। 1 से 51 के बीच $\frac{51+1}{2} = 26$ विषम संख्याएँ है एवं $\frac{51-1}{2} = 25$ सम संख्याएँ हैं।

2. दो लगातार संख्याओं के वर्ग का अंतर हमेशा एक विषम संख्या होती है।

उदा. 1: $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, जो कि एक विषम संख्या है।

उदा. 2: $26^2 - 25^2 = 51$, जो कि एक विषम संख्या है।

3. दो लगातार संख्याओं के वर्ग का अंतर उन दो संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।

उदा. 1: $5^2 - 4^2 = 5 + 4 = 9$

उदा. 2: $(26)^2 - (25)^2 = 26 + 25 = 51$

कारण: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (a+b) \quad \because \; a - b = 1$

हल किए हुए प्रश्न:

1. 1 से 400 तक की समस्त सम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 1 से 400 के बीच 400 संख्याएँ हैं।

इसलिए सम संख्याओं की संख्या $= \frac{400}{2} = 200$

इसलिए सम संख्याओं का योगफल $= 200\,(200 + 1) = 40200$

[नियम सं. III से]

2. 1 से 361 तक की समस्त सम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 1 से 361 के बीच 361 संख्याएँ हैं। इसलिए सम संख्याओं की संख्या

$= \frac{361-1}{2} = \frac{360}{2} = 180$

$\therefore$ सम संख्याओं का योगफल $= 180\,(180 + 1) = 32580$

3. 1 से 180 तक की समस्त विषम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 1 से 180 के बीच विषम संख्याओं की संख्या $= \frac{180}{2} = 90$

$\therefore$ इन संख्याओं का योगफल $= (90)^2 = 8100$

4. 1 से 51 के बीच की समस्त विषम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 1 से 51 के बीच विषम संख्याओं की संख्या $= \frac{51+1}{2} = 26$

$\therefore$ इनका योगफल $= (26)^2 = 676$

5. 20 से 101 के बीच की समस्त विषम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 20 से 101 के बीच विषम संख्याओं का योगफल = (1 से 101 तक की विषम संख्याओं का योगफल) – (1 से 20 तक की विषम संख्याओं का योगफल)

= प्रथम 51 विषम संख्याओं का योगफल – प्रथम 10 विषम संख्याओं का योगफल

$= 51^2 - 10^2 = 2601 - 100 = 2501$

घात एवं घातांक (Power and Index)

यदि किसी संख्या P को n बार P से ही गुणा किया जाए तो गुणनफल को P का ***n वाँ घात*** कहते हैं और इसे P^n लिखते हैं। P^n में P को ***आधार*** एवं n को ***घातांक*** कहा जाता है।

हल किए गए प्रश्न

1. $(729)^{59}$ में इकाई के स्थान पर कौन-सी संख्या है?

हल: जब 729 को 729 से गुणा करते हैं तो हमें इकाई के स्थान पर 1 प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, यदि 729 पर सम घातांक हो तो हमें इकाई के स्थान पर 1 मिलेगा। इसलिए $(729)^{58}$ में इकाई के स्थान पर 1 होगा।

$(729)^{59} = (729)^{58} \times 729$
$= (....1) \times 729$
= इकाई के स्थान पर 9।

2. $(623)^{36}, (623)^{38}$ एवं $(623)^{39}$ में इकाई के स्थान पर स्थित संख्या ज्ञात करें।

हल: जब 623 को आपस में गुणा करते हैं, तब हमें इकाई के स्थान पर 9 मिलता है। यदि इसे 4 बार आपस में गुणा करते हैं तो हमें इकाई के स्थान पर 1 मिलता है। इसलिए यह कहा जा सकता है कि यद 623 को 4n बार गुणा किया जाए तो हमें इकाई के स्थान पर 1 मिलता है।

$(623)^{36} = (623)^{4\times9}$ = इकाई के स्थान पर 1

$(623)^{38} = (623)^{4\times9} \times (623)^2 = (...1)\times(...9)$ = इकाई के स्थान पर 9

$(623)^{39} = (623)^{4\times9} \times (623)^3 = (...1)\times(...7)$ = इकाई के स्थान पर 7

नोट: जब विषम संख्याओं के संदर्भ में आप ऐसे प्रश्न हल करते हैं तो प्रयास करें कि किसी तरह इकाई के स्थान पर 1 आ जाए। उपर्युक्त प्रश्न को हल करते वक्त इस बात का ध्यान रखा गया है।

3. $(122)^{20}, (122)^{22}$ तथा $(122)^{23}$ में इकाई के स्थान पर स्थित संख्या का पता लगाएँ।

हल: $(....2) \times (....2) = ...4$
$(....2) \times (....2) \times (....2) = ...8$
$(....2) \times (....2) \times (....2) \times (....2) = 6$
हम जानते हैं कि $(....6) \times (....6) = (....6)$
इस प्रकार जब 122 को 4n बार आपस में गुणा किया जाता है, तब हमें इकाई के रूप में '6' प्रप्त होता है।

$\therefore\ (122)^{20} = (122)^{4\times5} = (...6)$ = इकाई के स्थान पर 6

$(122)^{22} = (122)^{4\times5} \times (122)^2 = (...6)\times(...4)$ = इकाई के स्थान पर 4

$(122)^{23} = (122)^{4\times5} \times (122)^3 = (....6)\times(....8)$ = इकाई के स्थान पर 8

4. $(98)^{40}, (98)^{42}$ एवं $(98)^{43}$ में इकाई के स्थान पर स्थित संख्या ज्ञात करें।

हल: $(98)^4 = (...6)$

$\therefore\ (98)^{4n} = (...6)$

इस प्रकार $(98)^{40} = (98)^{4\times10} = (...6)$ = इकाई के स्थान पर 6

$(98)^{42} = (98)^{4\times10} \times (98)^2 = (...6)\times(...4)$ = इकाई के स्थान पर 4

$(98)^{43} = (98)^{4\times10} \times (98)^3 = (...6)\times(...2)$ = इकाई के स्थान पर 2

नोट: यदि आधार में इकाई के स्थान पर सम संख्या हो तो उसमें इकाई के स्थान पर 6 लाने की कोशिश करें। उपर्युक्त दोनों प्रश्न (3 एवं 4) को हल करने में इस बात का ध्यान रखा गया है।

इस प्रकार उपर्युक्त प्रश्नों को हल करने के क्रम में हमें निम्नलिखित सामान्य नियम प्राप्त होते हैं।

I. यदि आधार में इकाई के स्थान पर 5 के अतिरिक्त कोई अन्य विषम संख्या हो तो इस संख्या को तब तक परस्पर गुणा करते रहें, जब तक कि इकाई के स्थान पर 1 प्राप्त नहीं हो जाता।

$(....1)^n = (....1)$

$(....3)^{4n} = (....1)$

$(....7)^{4n} = (....1)$

जहाँ $n = 1, 2, 3, ...$

II. यदि आधार में दी गई संख्या में इकाई के स्थान पर कोई सम संख्या हो तो इस संख्या को तब तक परस्पर गुणा करें जब तक कि इकाई के स्थान पर 6 न प्राप्त हो जाए।

$(....2)^{4n} = (....6)$

$(....4)^{2n} = (....6)$

$(....6)^n = (....6)$

$(....8)^{4n} = (....6)$, जहाँ $n = 1\ 2, 3, 4\ .....$

नोट: यदि आधार में इकाई के स्थान पर 1, 5 या 6 हों तो चाहे कितनी ही बार इन्हें आपस में गुणा कर लें, इकाई के स्थान पर 1, 5 एवं 6 ही प्राप्त होंगे।

$(...1)^n = (...1)$

$(...5)^n = (...5)$

$(...6)^n = (...6)$

5. यदि 781, 325, 497 एवं 243 को आपस में गुणा किया जाए तो गुणनफल में इकाई के स्थान पर कौन-सी संख्या होगी?

हल: प्रदत्त संख्याओं में इकाई के स्थान पर स्थित सभी संख्याओं को आपस में गुणा करें: $1 \times 5 \times 7 \times 3$; इस प्रकार गुणनफल में इकाई के स्थान पर 5 होगा।

कुछ अधिक सामान्य सूत्रों को नियम 1 तथा नियम 2 को मिलाकर बनाया जा सकता है। निम्नलिखित बिन्दुओं पर ध्यान दें :

(1) यदि हम $4n$ घात को किसी भी संख्या से बढ़ा देते हैं तो ***नई संख्या*** के इकाई का अंक 1, 5 या 6 होगा।

(2) यदि ***नई संख्या*** को हम किसी भी घात से बढ़ाते हैं, तो ***दूसरी नई संख्या*** के इकाई का अंक वही रहता है।

(3) 5 को कितनी बार भी गुणा किया जाता है तो इकाई का अंक वही रहता है (हम इससे अच्छी तरह से अवगत हैं)। अत: यह कोई समस्या खड़ा नहीं करता है।

$(6215)^x = (\ldots 5)$; यहाँ x कोई धनात्मक पूर्ण संख्या (positive integer) है।

(4) 1 को किसी भी संख्या से कितनी बार भी गुणा किया जाता है, तो वही संख्या प्राप्त होती है। अत: इकाई का अंक वही रहता है।

(5) जब एक सम संख्या को 6 से गुणा किया जाता है तो इकाई का अंक समान रहता है।

$1\underline{2} \times 6 = 7\underline{2}$

$1\underline{4} \times 6 = 8\underline{4}$

$1\underline{6} \times 6 = 9\underline{6}$

$1\underline{8} \times 6 = 10\underline{8}$

उपर्युक्त बिन्दुओं को दिमाग में रखकर हम निम्नलिखित रूप से क्रिया कर सकते हैं :

माना कि निम्नलिखित प्रश्नों में इकाई अंक ज्ञात करना है :

1. $(623)^{49}$ 2. $(624)^{50}$ 3. $(627)^{52}$ 4. $(629)^{55}$
5. $(628)^{59}$ 6. $(625)^{60}$ 7. $(622)^{64}$

1. इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए हम घात में 4 से भाग देते हैं तथा शेष ज्ञात करते हैं जैसा कि नीचे दिया गया है :

$49 \div 4 = 12 \times 4 + 1$

अत: $(623)^{49}$ का इकाई अंक $= (623)^1$ का इकाई अंक $= 3$

उसी प्रकार,

2. $(624)^{50}$ का इकाई अंक $= (624)^2$ का इकाई अंक {चूँकि $50 = 12 \times 4 + 2$} $= 6$

3. $(627)^{52}$ का इकाई अंक = 1 {क्योंकि 52 में 4 से भाग दिया जाता है तथा हम जानते हैं कि यदि विषम संख्या के घात 4 के अपवर्त्य (multiple) हों तो इससे इकाई अंक 1 प्राप्त होता है।}

4. $(629)^{55}$ का इकाई अंक = $(629)^3$ का इकाई अंक = 9
5. $(628)^{59}$ का इकाई अंक = $(628)^3$ का इकाई अंक = 2
6. $(625)^{60}$ का इकाई अंक = 5 {चूँकि 5 इकाई अंक को परिवर्तित नहीं करता है।}
7. $(622)^{64}$ का इकाई अंक = 6 {क्योंकि 64 में 4 से भाग दिया जाता है तथा हम जानते हैं कि यदि सम संख्या के घात 4 के अपवर्त्य (multiple) हों तो इससे इकाई अंक 6 प्राप्त होता है।}

विविध उदाहरण

भाग वाले सवाल में चार अंग होते हैं: भाज्य (Dividend), भाजक (Divisor), भागफल (Quotient) एवं शेष (Remainder)।

भाज्य = (भाजक × भागफल) + शेष

यदि पूरा-पूरा भाग लग जाए, अर्थात् शेष '0' बचे तो भाज्य = भाजक × भागफल

उदा. 1: यदि 24446 को किसी संख्या से विभाजित करने पर भागफल 79 आता है तथा शेष 35 बचता है तो वह संख्या (भाजक) क्या है?

हल: भाजक × भागफल = भाज्य – शेष

∴ 79 × भाजक = 24446 – 35 = 24411

∴ भाजक = 24411 ÷ 79 = 309

उदा. 2: उस न्यूनतम संख्या के बारे में बताइए, जिसे 8961 में जोड़े जाने पर वह 84 से पूरी तरह विभाजित हो जाए।

हल: 8961 को 84 से विभाजित करने पर शेष मिलता है 57

∴ अभीष्ट संख्या = 84 – 57 = 27

उदा. 3: वह न्यूनतम संख्या बताइए, जिसे 8961 में से घटाने पर वह 84 से पूरी तरह विभाजित हो जाए।

हल: 8961 को 84 से विभाजित करने पर शेष बचा 57। इसलिए अभीष्ट संख्या = 57.

नोट: उदा॰-2 में आपने देखा कि प्रदत्त संख्या को 84 से पूरी तरह विभाजित होने के लिए 27 और चाहिए, जबकि उदा॰-3 में प्रदत्त संख्या आवश्यकता से 57 बड़ी है।

उदा. 4: 5 अंकों की वह न्यूनतम संख्या बताएँ, जो कि 89 से पूरी तरह विभाज्य हो।

हल: 5 अंकों की न्यूनतम संख्या = 10000

10000 ÷ 89 से शेष मिलता है 32।

यदि हम 10000 में (89 – 32) = 57 जोड़ दें तो संख्या 89 से पूरी तरह विभाजित हो जाएगी।

∴ अभीष्ट संख्या = 10000 + 57 = 10057.

उदा. 5: 5 अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है जो 137 से पूरी तरह विभाज्य हो?

हल: 5 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 99999

99999 में 137 से भाग देने पर शेष बचता है 126

∴ अभीष्ट संख्या = 99999 – 126 = 99873

नोट: उदा.-5 एवं उदा.-6 में क्या अंतर है? इस पर ध्यान दीजिए।

उदा. 6: 1834 के निकटतम वह कौन-सी संख्या है, जो 12 से पूरी तरह विभाज्य है?

हल: $1834 \div 12$ से शेष मिलता है 10

चूँकि शेष 10, भाजक 12 के आधे से भी बड़ा है, इसलिए निकटतम पूर्णांक $(12 - 10) = 2$ जोड़ने से मिलेगा।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 1834 + (12 - 10) = 1836$

उदा. 7: 1829 के निकटस्थ वह संख्या ज्ञात करें, जो 12 से पूरी तरह विभाज्य हो।

हल: $1829 \div 12$ से शेष बचता है 5। चूँकि शेष 5, भाजक 12 के आधे से भी कम है, इसलिए निकटस्थ संख्या प्राप्त करने के लिए 1829 में से 5 घटाना होगा।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= (1829 - 5) = 1824$

नोट: क्या उदा.-6 एवं उदा.-7 के बीच के अंतर पर आपने ध्यान दिया?

उदा. 8: यदि किसी संख्या को 899 से विभाजित करते हैं तो शेष बचता है 63। उसी संख्या को 29 से विभाजित करने पर शेष क्या बचेगा?

हल: संख्या $= 899 \times$ भागफल $+ 63$

$= 29 \times 31 \times$ भागफल $+ 2 \times 29 + 5$

इसलिए 29 से विभाजित करने पर शेष बचेगा 5

उदा. 9: यदि किसी संख्या को 899 से विभाजित करते हैं तो शेष बचता है 62। यदि उसी संख्या को 31 से विभाजित करें तो कितना शेष बचेगा?

हल: संख्या $= 899 \times$ भागफल $+ 62$

$= 31 \times 29 \times$ भागफल $+ 31 \times 2 + 0$

इसलिए उसी संख्या को 31 से विभाजित करने के बाद शेष मिलेगा '0'।

नोट: उदा.-8 एवं उदा.-9 से स्पष्ट है कि प्रथम भाजक, द्वितीय भाजक का एक अपवर्त्य होना चाहिए। पर यदि ऐसा नहीं होता तो कैसी स्थितियाँ पैदा होती हैं। निम्नलिखित उदाहरणों में देखिए।

उदा. 10: यदि किसी संख्या में 12 से भाग दें तो शेष बचता है 7। उसी संख्या में 7 से भाग देने पर कितना शेष बचेगा?

हल: इस प्रश्न में पहला भाजक 12, दूसरे भाजक 7 का अपवर्त्य नहीं है। अब हम 139 एवं 151 दो संख्याएँ लेते हैं, जिन्हें 12 से विभाजित करने पर शेष बचता है 7। पर जब हम उपर्युक्त दोनों संख्याओं को 7 से विभाजित करते हैं तो क्रमश: 6 एवं 4 शेष बचते हैं। इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि दिया गया प्रश्न गलत है।

उदा. 11: एक लड़के को 432051 को 56827 से गुणा करने को कहा गया। जल्दबाजी में उसने एक अंक गलत पढ़ लिया और जिस नतीजे पर पहुँचा, वह था 21959856177। उसने किस अंक को पढ़ने में भूल की?

हल: भाग देने पर हम पाते हैं कि 56827 से 21959856177 में पूरी तरह भाग नहीं लगता। इसलिए लड़के ने 56827 को पढ़ने में भूल की। 432051 से प्रदत्त गुणनफल को विभाजित करने पर 50827 प्राप्त होता है। इस प्रकार लड़के ने '6' की जगह '0' पढ़ लिया।

उदा. 12: किसी लड़के ने 423 में एक खास संख्या से गुणा करने पर 65589 उत्तर पाया। यदि दोनों 5 को छोड़कर शेष अंक सही हों तो सही उत्तर प्राप्त करें।

हल: ***पहला चरण:*** गुणनफल में अंक 9, 8 एवं 6 सही हैं। इकाई के स्थान पर 9 प्राप्त करने के लिए हमें इकाई 3 से 423 में गुणा करना होगा।

```
  423
  **3
 ----
 1269
  ....
 .....
 -----
 6**89
```

दूसरा चरण: गुणनफल में दहाई के स्थान पर 8 पाने के लिए पहली पंक्ति के 6 के नीचे 2 होना चाहिए। इसलिए गुणक में दहाई के स्थान पर 4 होना जरूरी है।

```
   423
   *43
  ----
  1269
 1692
 ----
 6**89
```

तीसरा चरण: गुणनफल में सबसे बायीं ओर के स्थान पर 6 पाने के लिए यह जरूरी है कि दूसरी पंक्ति में 1 के नीचे 4 हो, जो कि तभी संभव है जब गुणक में सैकड़ा के स्थान पर 1 स्थित हो। इस प्रकार,

```
   423
   143
  ----
  1269
 1692
 423
 -----
 60489
```

इसलिए सही उत्तर है : 60489

उदा. 13: $6^7 \times 35^3 \times 10^{11}$ में कितनी रूढ़ संख्याएँ (Prime Numbers) हैं?

हल: $6^7 \times 35^3 \times 11^{10} = (2 \times 3)^7 \times (5 \times 7)^3 \times 11^{10}$

$= 2^7 \times 3^7 \times 5^3 \times 7^3 \times 11^{10}$

$\therefore$ रूढ़ संख्याओं की संख्या $= 7 + 7 + 3 + 3 + 10 = 30$

उदा. 14: एक संख्या को क्रम से 5, 7 एवं 8 से विभाजित करने पर क्रमशः 2, 3 एवं 4 शेष बचता है। यदि भाग देने का क्रम उलट दिया जाए तो क्या शेष बचेंगे?

हल:

5	* * *	
7	* *	2
8	*	3
	1	4

इसी प्रकार * = 8 × 1 + 4 = 12

$** = 7 \times 12 + 3 = 87$

$*** = 5 \times 87 + 2 = 437$

इस प्रकार अभीष्ट संख्या 437 ***हो सकता*** है।

यदि भाग देने का क्रम उलट दिया जाए तो

8	4 3 7	
7	5 4	5
5	7	5
	1	2

$\therefore$ अभीष्ट शेष = 5, 5 एवं 2

नोट: ऊपर हमने 'हो सकता है' इसलिए इस्तेमाल किया है कि यह अनेक संभावित संख्याओं में से एक है। हमने अंतिम भागफल के रूप में 1 रखा है, और इसीलिए हमें 437 प्राप्त हुआ। यदि भागफल 2, 3 ..... आदि लिए गए होते तो संख्या कुछ और आती। और फिर भी उत्तर एक समान ही होता।

उदा. 15: एक घड़ी 95 सेकेंड में 90 बार टिक-टिक करती है, दूसरी घड़ी 323 सेकेंड में 315 बार टिक-टिक करती है। यदि दोनों घड़ियों को एक साथ शुरू किया गया हो तो पहले घंटे ये दोनों कितनी बार साथ-साथ टिक-टिक करेंगे?

हल: पहली घड़ी $\frac{95}{90}$ सेकेंड के बाद टिक-टिक करती है, और दूसरी घड़ी $\frac{323}{315}$ सेकेंड के बाद टिक-टिक करती है।

अतः ये दोनों घड़ियाँ ($\frac{95}{90}$ एवं $\frac{323}{315}$ का लघुत्तम समापवर्त्य) सेकेंड के बाद एक साथ टिक-टिक करेंगी।

$\frac{95}{90}$ एवं $\frac{323}{315}$ का लघुत्तम समापवर्त्य

$$= \frac{95 \text{ एवं } 323 \text{ का लघुत्तम समापवर्त्य}}{90 \text{ एवं } 315 \text{ का महत्तम समापवर्तक}} = \frac{19 \times 5 \times 17}{45}$$

प्रथम 3600 सेकेंड में ये घड़ियाँ साथ-साथ

$3600 \div \frac{19 \times 5 \times 17}{45}$ बार टिक-टिक करेंगी।

$$= \frac{3600 \times 45}{19 \times 5 \times 17} = 100\frac{100}{323}$$

एक बार चूँकि वे शुरू में ही टिक-टिक कर चुके होंगे, इसलिए एक घंटे में सहध्वनि की संख्या = 100 + 1 = 101

उदा. 16: 1000 से छोटी किस संख्या से 43259 में गुणा किया जाए कि गुणनफल की दायीं ओर स्थित अंतिम तीन अंक 437 हो?

हल: स्पष्ट है कि अभीष्ट संख्या में 3 अंक हैं। मान लीजिए कि यह संख्या abc है। इसलिए,

```
  43259
    abc
  -----
  ----7
 ----
-----
  -----
    437
```

निश्चय ही, c = 3, इस प्रकार,

```
  43259
    ab3
  -----
  --777
 ----
-----
  -----
    437
```

हम देखते हैं कि दायीं ओर से गुणनफल का दूसरा अंक '3' है। यह तभी संभव है जब पहली पंक्ति के 7 में 6 जोड़ा जाए। और इसके लिए b का 4 होना जरूरी है। इस प्रकार,

```
  43259
    a43
  -----
    777
  --36
----
  -----
    437
```

गुणनफल में दायीं ओर से तीसरी संख्या के 4 होने के लिए तीसरी पंक्ति में 3 होना जरूरी है, जो कि तभी संभव है, जब a = 7 हो। इस प्रकार,

```
  43259
    743
  -----
    777
  --36
---3
  -----
    437
```

∴ अभीष्ट गुणक = 743

नोट: उपर्युक्त प्रश्न को विस्तार से इसलिए सरल किया गया है ताकि आप हर चरण को समझ सकें। एक बार अच्छी तरह समझ लेने पर आप इसे बस एक चरण में ही संपन्न कर सकेंगे। हाँ, एक बात ध्यान में रखनी चाहिए कि जब गुणनफल के अंतिम 3 अंक दिए गए हों तो किसी भी पंक्ति में तीसरे कॉलम से आगे गणना करने की कोई आवश्यकता नहीं है।

उदा. 17: वह न्यूनतम संख्या निकालें, जिससे 19404 में गुणा करने या भाग देने पर वह एक पूर्ण वर्ग बन जाएगा।

हल: $19404 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11$

इस प्रकार यदि 19404 को 11 से विभाजित कर दिया जाए या फिर 11 से गुणा कर दिया जाए तो परिणामी संख्या एक पूर्ण वर्ग होगी।

उदा. 18: 4*56 में * की जगह कौन-सी संख्या डाली जाए कि यह 33 से पूरी तरह विभाजित हो जाए?

हल: प्रदत्त संख्या के 33 से विभाजित होने का मतलब है, उसका 3 एवं 11 से विभाज्य होना। संख्या के 3 से विभाज्य होने के लिए जरूरी है कि उसका आंकिक योग 3 से विभाजित हो जाए। इसलिए * की जगह हम 0, 3, 6, 9 रख सकते हैं। हम यह भी जानते हैं कि 11 से विभाज्य होने के लिए एकांतर अंकों (alternate digit) के योगफल का अंतर 0 हो या 11 से विभाज्य हो। यहाँ

$S_1 = 4+5 = 9$ [संख्या में विषम स्थान पर स्थित अंकों का योग]

$\therefore$ $S_2 = 9$ होना चाहिए।

$\therefore$ $* = 3$

नोट: यहाँ $S_2 = 9+11k(\approx 20, 31, 42...)$ आदि हो, यह कतई संभव नहीं है। क्योंकि ऐसी स्थिति में * एक दो अंकों की संख्या हो जाएगी।

प्रमेय (Theorem): जब दो पृथक् संख्याएँ किसी तीसरी संख्या द्वारा विभाजित होने पर समान शेष छोड़ती हों तो उन संख्याओं का अंतर तीसरी संख्या द्वारा पूरी तरह अवश्य विभाज्य होगा।

प्रमाण: मान लें कि ऐसी दो संख्याएँ A एवं B हैं तथा भाजक (तीसरी संख्या) एवं शेष क्रमशः x एवं y हैं। तब प्रश्नानुसार,

$nx + y = A$ ....(i)

$mx + y = B$ ....(ii)

(i) में से (ii) को घटाने पर,

$nx - mn = A - B$

या, $x(n-m) = A - B$

$\Rightarrow$ $(A-B)$, x से पूरी तरह विभाज्य है।

उदा. 19: 24345 एवं 33334 को तीन अंकों वाली एक खास संख्या से विभाजित किया जाता है, और दोनों ही स्थितियों में समान शेष प्राप्त होते हैं। भाजक एवं शेष का पता लगाएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के आधार पर कहा जा सकता है कि 24345 एवं 33334 का अंतर भी उस खास भाजक से विभाज्य होगा।

$33334 - 24345 = 8989 = 101 \times 89$

$\therefore$ भाजक = 101 (चूँकि यह एक तीन अंकों वाली संख्या है।)

शेष प्राप्त करने के लिए 33334 या 24345 में 101 से भाग दें। 24345 में 101 से भाग देने पर शेष बचता है: 4

उदा. 20: 451 एवं 607 को किसी खास संख्या से विभाजित करने पर समान शेष प्राप्त होते हैं। 1 को छोड़कर सभी संभव भाजकों का उल्लेख करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

607 – 451 = 156, अभीष्ट भाजकों से पूरी तरह विभाज्य है।

$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$\therefore$ 1 अंक वाली संख्याएँ, $2, 3, 2\times 3, 2\times 2 = 2, 3, 4, 6$

दो अंकों वाली संख्याएँ 12, 13, 26, 39, 52, 78

तीन अंकों वाली संख्याएँ = 156

उदा. 21: दो संख्याओं का योगफल 14 है और उनका अंतर 10 है। इन दोनों संख्याओं का गुणनफल निकालें।

हल: मान लें कि अभीष्ट संख्याएँ x एवं y हैं।

प्रश्नानुसार, $x + y = 14$ एवं $(x - y) = 10$

हमें पता है कि $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ या, $14^2 = 10^2 + 4xy$

$$\therefore \quad xy = \frac{14^2 - 10^2}{4} = 24$$

सूत्र विधि:

$$\text{गुणनफल} = \frac{(\text{योगफल} + \text{अंतर})(\text{योगफल} - \text{अंतर})}{4}$$

$$= \frac{(14+10)(14-10)}{4} = 24$$

नोट = संख्याएँ भी सूत्र के सहारे प्राप्त की जा सकती हैं

$$x = \frac{\text{योगफल} + \text{अंतर}}{2} = \frac{14+10}{2} = 12$$

$$y = \frac{\text{योगफल} - \text{अंतर}}{2} = \frac{14-10}{2} = 2$$

उदा. 22: किन्हीं दो संख्याओं का योगफल उनके अंतर का दुगुना है। यदि इनमें से एक संख्या 10 है तो दूसरी संख्या क्या होगी?

हल: मान लिया कि अभीष्ट संख्याएँ x एवं y हैं।

प्रश्नानुसार, $x + y = 2(x - y)$

या, $x - 3y = 0$ या $x = 3y$

दूसरी संख्या $x = 3 \times 10 = 30$

उदा. 23: दो संख्याओं का अनुपात 3 : 5 है। यदि दोनों में से 9 घटा लिया जाए तो उनका अनुपात 12 : 23 हो जाता है। संख्याएँ बताएँ।

हल: मान लीजिए की संख्याएँ 3x एवं 5x हैं।

तब प्रश्नानुसार,

$$\frac{3x-9}{5x-9} = \frac{12}{23}$$

या, $69x - 9 \times 23 = 60x - 12 \times 9$

या, $9x = 207 - 108 = 99$

$$\therefore \quad x = \frac{99}{9} = 11$$

$3x = 33$ एवं $5x = 55$

$\therefore$ अभीष्ट संख्याएँ = 33 एवं 55

उदा. 24: एक लड़के से कहा गया कि प्रदत्त भिन्न का $\frac{7}{9}$ निकालें। उसने जल्दबाजी में प्रदत्त भिन्न में $\frac{7}{9}$ से भाग दे दिया और इस प्रकार जो उत्तर उसे प्राप्त हुआ वह सही उत्तर से $\frac{8}{21}$ अधिक है। सही उत्तर बताएँ।

हल: मान लिया कि प्रदत्त भिन्न x है।

$$x \div \frac{7}{9} - x \text{ का } \frac{7}{9} = \frac{8}{21}$$

या, $$\frac{9x}{7} - \frac{7x}{9} = \frac{8}{21}$$

या, $$\frac{x(81-49)}{7 \times 9} = \frac{8}{21}$$

$$\therefore \quad x = \frac{8}{21}\left[\frac{7 \times 9}{32}\right] = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ सही उत्तर है: $\frac{3}{4} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{12}$

उदा. 25: किसी संख्या का $\frac{4}{5}$ उस संख्या के $\frac{3}{4}$ से 4 ज्यादा है, तो संख्या बताएँ।

हल: $$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = 4$$

या, $\frac{1}{20} = 4 \quad \therefore \; 1 = 80$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 80

उदा. 26: यदि किसी संख्या के आधे का एक-तिहाई और फिर उसका पाँचवाँ हिस्सा 15 के बराबर हो, तो संख्या बताएँ।

हल: मान लें कि संख्या x है

प्रश्नानुसार,

$$x\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 15$$

$$\therefore \quad x = 15 \times 5 \times 3 \times 2 = 450$$

सूत्र विधि:

(*) अभीष्ट संख्या $= 15\left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right) = 450$

नोट: अभीष्ट संख्या प्राप्त करने के लिए परिणामी संख्या को प्रदत्त भिन्नों के व्युत्क्रम (reverse) से गुणा करें।

उदा. 27: यदि किसी भिन्न का अंश 12% बढ़ा दिया जाए एवं हर 2% घटा दिया जाए तो भिन्न का मान $\frac{6}{7}$ हो जाता है। मूल-भिन्न का मान निकालें।

हल: मान लें कि मूल-भिन्न $= \frac{x}{y}$

प्रश्नानुसार, $\frac{x \text{ का } 112\%}{y \text{ का } 98\%} = \frac{6}{7}$

या, $\frac{x}{y} = \frac{6 \text{ का } 98\%}{7 \text{ का } 112\%} = \frac{98 \times 6}{112 \times 7} = \frac{3}{4}$

उदा. 28: दो अंकों वाली किसी संख्या के दोनों अंकों का योग 8 है। यदि अंकों को उलट दिया जाए तो संख्या पहले की अपेक्षा 54 कम हो जाती है, तो संख्या क्या है?

हल: मान लें कि दो अंकों वाली संख्या $10x + y$ है।

प्रश्नानुसार, $x + y = 8$ ....(i)

एवं $10y + x = 10x + y - 54$

या, $x - y = \frac{54}{9} = 6$ ....(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से,

$x = \frac{8+6}{2} = 7$ एवं $y = 1$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 7 \times 10 + 1 = 71$

सूत्र विधि: अभीष्ट संख्या $= 5\left[\text{अंकों का योग} + \frac{\text{कमी}}{9}\right] + \frac{1}{2}\left[\text{अंकों का योग} - \frac{\text{कमी}}{9}\right]$

$= 5(8+6) + \frac{1}{2}(8-6) = 70 + 1 = 71$

उदा. 29: तीन संख्याएँ परस्पर 3:4:5 के अनुपात में हैं। सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या का योगफल तीसरी संख्या में 52 जोड़ने से प्राप्त होता है तो सबसे छोटी संख्या क्या है?

हल: प्रश्न से यह स्पष्ट है कि सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या का योगफल तीसरी संख्या से 52 अधिक है। इसलिए

$3+5-4 \rightarrow 52$

$4 \rightarrow 52$

$\therefore \; 1 \rightarrow 13$

$\therefore$ सबसे छोटी संख्या $= 3 \times 13 = 39$

उदा. 30: यदि किसी संख्या का 40 प्रतिशत 360 के बराबर हो तो उस संख्या के 15% का 15% कितना होगा?

हल: मान लें कि संख्या = x, प्रश्नानुसार,

x का 40% = 360

या, $x = \frac{360 \times 100}{40} = 900$

अब, x का 15% = $900 \times \frac{15}{100} = 135$

फिर, 135 का 15% = $135 \times \frac{15}{100} = 20.25$

द्रुत विधि:

40% = 360

$\therefore$ 15% का 15% $= \frac{360}{40\%} \times 15\% \times 15\%$

$= \frac{360}{40} \times 15$ का 15%

$= \frac{360}{40} \times \frac{15 \times 15}{100} = 20.25$

उदा. 31: किन्हीं दो संख्याओं के योगफल एवं अंतर का अनुपात 7:1 है। इन दोनों संख्याओं का अनुपात बताएँ।

हल: मान लें कि ये संख्याएँ हैं x एवं y। प्रश्नानुसार, $\frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{1}$

$\Rightarrow x+y = 7(x-y)$

या, $6x = 8y \; \therefore \; \frac{x}{y} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 4:3$

***द्रुत विधि:* (componendo-dividendo *नियम का प्रयोग करें*)**

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{1}$$

या, $\frac{(x+y)+(x-y)}{(x+y)-(x-y)} = \frac{7+1}{7-1}$

या, $\frac{2x}{2y}=\frac{8}{6}\quad\therefore\quad\frac{x}{y}=\frac{4}{3}=4:3$

उदा. 32: यदि दो अंकों की किसी संख्या एवं उस संख्या के दोनों अंकों को परस्पर उलटने पर प्राप्त संख्या के बीच का अंतर 27 हो तो संख्या के दोनों अंकों का योगफल एवं अंतर बताएँ।

हल: मान लें कि यह संख्या $10x + y$ है। प्रश्नानुसार,

$(10x+y)-(10y+x)=27$

या, $9(x-y)=27$

$\therefore\ x-y=\frac{27}{9}=3$

इस प्रकार संख्या के दोनों अंकों का अंतर 3 है, पर हम इनका योगफल नहीं निकाल सकते।

सूत्र विधि:

दो अंकों का अंतर $=\frac{\text{मूल संख्या एवं परिवर्तित संख्या के बीच का अंतर}}{9}=\frac{27}{9}=3$

उदा. 33: दो अंकों वाली किसी संख्या में इकाई के स्थान पर स्थित अंक को 50% बढ़ा दिया जाता है तथा दहाई के स्थान पर स्थित अंक को 100% बढ़ा दिया जाता है। इस प्रकार जो संख्या प्राप्त होती है वह मूल संख्या से 33 बड़ी है। मूल संख्या क्या है?

हल: मान लें कि संख्या $= 10x + y$

$\therefore$ परिवर्तित संख्या $=10\left[x\left(\frac{200}{100}\right)\right]+y\left[\frac{150}{100}\right]=20x+1.5y$

प्रश्नानुसार, $(20x+1.5y)-(10x+y)=33$

या, $10x+0.5y=33=10\times3+3$

$\therefore\ x=3, y=6\ \therefore$ संख्या $=36$

द्रुत विधि: इकाई के स्थान के लिए $50\% = 3$

$\therefore\ 100\%=6$

दहाई के स्थान के लिए $100\% = 3$

$\therefore$ संख्या $= 36$

उदा. 34: यदि $(2^{32} + 1)$ किसी खास संख्या से पूर्णतया विभाज्य हो तो निन्नलिखित में से कौन उस खास संख्या से विभाज्य होगा?

1) $2^{96}+1$ 2) $2^{16}-1$ 3) $2^{16}+1$ 4) 7×2^{33}

5) इनमें से कोई नहीं

हल : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$2^{96}+1 = (2^{32})^3+(1)^3=(2^{32}+1)\{(2^{32})^2-1\times(2^{32})^2+1\}$

इस प्रकार, $(2^{96} + 1)$, $(2^{32} + 1)$ से विभाज्य है।

$\therefore\ 2^{96}+1$ उस खास संख्या से भी विभाज्य होगा।

उदा. 35: जब किसी खास संख्या में 223 से भाग दिया जाता है तो 79 शेष बचता है। और जब उस खास संख्या में 179 से भाग दिया जाता है तो भागफल 315 प्राप्त होता है, शेष का मान क्या होगा?

हल : जब $(179 \times 315) = 56385$ में 223 से भाग दिया जाता है तो शेष 189 प्राप्त होता है।
इसलिए अभीष्ट शेष $= 79 + (223 - 189) = 79 + 34 = 113$

***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि संख्या N है। तो $N = 223\,Q + 79$; यहाँ, जब N में 223 से भाग दिया जाता है, तो Q भागफल (quotient) है।

पुन : $N = 179 \times 315 + R$

$= 56385 + R$

$= 223 \times 252 + 189 + R$

या, $223\,Q + 79 = 223 \times 252 + 189 + R$

$\therefore R = 223\,(Q - 252) + 79 - 189$

चूँकि R, 179 से अधिक नहीं हो सकता है, $Q - 252 = 1$, अर्थात्

$R = 223 \times 1 + 79 - 189 = 113$

नोट: 1. जब $Q - 252 = 2$

$R = 223 \times 2 + 79 - 189 = 336$ जो कि संभव नहीं है।

2. जब $Q - 252 = 0$, तो R ऋणात्मक होता है जो कि संभव नहीं है।

3. Q का एक मात्र संभव मान 253 है। इस स्थिति में, हम देखते हैं कि $N = 223 \times 253 + 79 = 56498$ तथा $56498 = 179 \times 315 + 113$, जो हमारे उत्तर को सुनिश्चित करता है।

उदा. 36: प्राकृत संख्याओं (natural numbers) को एक-के-बाद-एक लिखकर निम्नलिखित तरीके से एक 21 अंकों वाली संख्या बनाई जाती है :

$N = 123456789101112 ....$

जब उपर्युक्त संख्या N में 11 से भाग दिया जाता है तो शेष क्या बचेगा ?

हल : $N = 1234 ....1415$

विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग

$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 40$

सम स्थानों पर स्थित अंकों का योग

$= 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 26$

संख्या को 11 से विभाज्य होने के लिए, विषम स्थानों एवं सम स्थानों पर के अंकों के योग के बीच का अंतर 11 का अपवर्त्य (multiple) होना चाहिए। यहाँ अंतर (40 - 26=) 14 है, जो 11 होना चाहिए। चूँकि N का अंतिम अंक विषम स्थान पर है, इसलिए यदि हम 21 वें स्थान के अंक को 3 से कम कर देते हैं, तो संख्या 11 से विभाज्य होगी। दूसरे शब्दों में, संख्या N, 11 के अपवर्त्य

(multiple) से 3 अधिक है। अर्थात् यदि हम संख्या को 11 से भाग देते हैं तो हमें 3 शेष के रूप में प्राप्त होता है।

उदा. 37: 10 के पहले 100 अपवर्त्यों यानि 10, 20, 30 .... 1000, को आपस में गुणा करने पर, गुणनफल में शून्य की संख्या क्या होगी?

हल : इस प्रश्न का हल करने के लिए हमलोगों के पास द्रुत विधि नहीं है। विद्यार्थियों के लिए हमारी सलाह है कि इसके विस्तृत हल को समझने की कोशिश करें।

किसी गुणनफल के अंत में शून्य की संख्या तीन तथ्यों पर निर्भर करती है।

1) संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या।

2) संख्याओं के दहाई स्थान पर 5 एवं साथ ही इकाई स्थान पर शून्य का होना

3) संख्याओं के सैकड़ा स्थान पर 5 तथा साथ ही दहाई एवं इकाई स्थान पर शून्य का होना।

तथ्य (1) के कारण शून्यों की संख्या:

एक शून्य वाली संख्याओं की संख्या = 90

दो शून्यों वाली संख्याओं की संख्या = 9

तीन शून्यों वाली संख्याओं की संख्या = 1

इस तथ्य के कारण कुल शून्यों की संख्या = $90 \times 1 + 9 \times 2 + 1 \times 3 = 111$

तथ्य (2) के कारण शून्यों की संख्या:

यदि 5 को किसी भी सम संख्या से गुणा किया जाए तो शून्य प्राप्त होता है।

ऐसी संख्याओं, जिसके दहाई स्थान पर 5 एवं साथ ही इकाई स्थान पर शून्य हो (जैसे 50, 150, 250, ..., 950), की संख्या 10 है।

इस प्रकार इस तथ्य के कारण 10 शून्य प्राप्त होते हैं।

तथ्य (3) के कारण शून्यों की संख्या:

हम कह सकते हैं कि 500 को 200 से गुणा करने पर एक अधिक शून्य प्राप्त होगा।

इस प्रकार कुल शून्यों की संख्या = $111 + 10 + 1 = 122$

उदा. 38: सात लगातार पूर्णांकों का औसत 7 है। इन पूर्णांकों के वर्गों का औसत ज्ञात कीजिए।

हल : निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करें :

[यदि लगातार पूर्णांकों (consecutive integers) की संख्या विषम हो]:

वर्गों का औसत

$$= \frac{1}{\text{पूर्णांकों की संख्या}} \times \left[\frac{n_1(n_1+1)(2n_1+1)}{6} - \frac{n_2(n_2+1)(2n_2+1)}{6}\right]$$

जहाँ, $n_1 = \text{औसत} + \frac{\text{पूर्णांकों की संख्या} - 1}{2}$ एवं

$$n_2 = \text{औसत} - \frac{\text{पूर्णांकों की संख्या}+1}{2}$$

इस प्रश्न में,

$$n_1 = 7+\frac{7-1}{2} = 10$$

$$n_2 = 7-\frac{7+1}{2} = 3$$

$$\therefore \text{ वर्गों का औसत } = \frac{1}{7}\left[\frac{10\times 11\times 2}{6} - \frac{3\times 4\times 7}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{7}[385-14] = \frac{371}{7} = 53$$

उदा. 39: वह न्यूनतम संख्या ज्ञात करें जिसमें 9, 11 एवं 13 से भाग देने पर शेष क्रमशः 1, 2 एवं 3 बचता हो।

हल : वस्तुतः इस प्रश्न को हल करने के लिए कोई स्थापित विधि नहीं है। हम प्रश्न में दिए हुए विकल्पों के सहारे जाँच-एवं-भूल (trial-and-error) की विधि का प्रयोग कर उत्तर तक पहुँचने का प्रयास करते हैं। हो सकता है कि ऐसी कोई संख्या हो परन्तु उस संख्या को ज्ञात करना लगभग असंभव है। फिर भी, प्रत्येक स्थिति में ऐसा नहीं है। नीचे लिख हुए उदाहरण को देखें।

"वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 9, 11 एवं 13 से भाग देने पर शेष क्रमशः 1, 3 एवं 5 बचता हो।"

हम देखते हैं कि :

$$9-1 = 11-3 = 13-5 = 8$$

इसप्रकार के प्रश्न के लिए हमारे पास स्थापित विधि है।

9, 11 एवं 13 का ल. स. = 1287

$\therefore$ अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 1287 − 8 = 1279

नोट: ***1.*** वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 13, 15 एवं 19 से भाग देने पर शेष क्रमशः 2, 4 एवं 8 बचता हो। क्या हम इसका विशिष्ट हल(specific solution) निकाल सकते हैं?

हल: हाँ। इस प्रश्न का हल संभव है क्योंकि 13 − 2 = 15 − 4 = 19 − 8 = 11

अब, 13, 15 एवं 19 का ल. स. = 3705

$\therefore$ अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 3705 − 11 = 3694

2. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 13, 15 एवं 19 से भाग देने पर शेष क्रमशः 1, 2 एवं 3 बचता हो। क्या हम इसका हल निकाल सकते हैं?

हल : नहीं। लेकिन क्यों? क्योंकि

$$13-1 \neq 15-2 \neq 19-3$$

उदा. 40: निम्नलिखित में से किससे $4^{61}+4^{62}+4^{63}+4^{64}+4^{65}$ विभाज्य है?

1) 3 2) 5 3) 11 4) 17 5) इनमें से कोई नहीं

हल : $4^{61}[1+4+4^2+4^3+4^4] = 4^{61}[1+4+16+64+256] = 341 \times 4^{61}$

चूँकि 341, 11 से विभाज्य है, इसलिए दिया हुआ व्यंजक भी 11 से विभाज्य होगा।

उदा. 41: दो अंकों की संख्या एवं उस संख्या के दोनों अंकों के योग के बीच का अनुपात 4 : 1 है। यदि इकाई स्थान पर स्थित अंक, दहाई स्थान पर स्थित अंक से 3 ज्यादा हो तो संख्या क्या है?

हल : मान लिया कि दो अंकों की संख्या = $10x + y$

अब प्रश्नानुसार, $\frac{10x+y}{x+y} = \frac{4}{1}$

या, $10x + y = 4x + 4y$

या, $6x = 3y$

या, $2x = y$

या, $x = y - x = 3$ (दिया हुआ है) एवं $x = 6$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 36

उदा. 42: यदि $(7^{13}+1)$ में 6 से भाग दिया जाता है तो शेष ज्ञात कीजिए।

हल : Binomial Expansion का प्रयोग :

$(x+y)^n = x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} y + {}^nC_2\, x^{n-2} y^2 + {}^nC_3\, x^{n-3} y^3 \ldots\ldots {}^nC_{n-1}\, x^{n-1} + y^n$

उपर्युक्त अंतिम पद (y^n) को छोड़कर सभी पदों में x सम्मिलित है। इसका अर्थ है कि पद y^n को छोड़कर सभी पद x से पूर्णतया विभाज्य है। (***नोट:*** y^n, x से पूर्णतया विभाज्य हो सकता है। परंतु हमलोग बिना x एवं y का मान जाने ऐसा नहीं कह सकते हैं।)

अब,

$7^{13} = (6+1)^{13}$ अर्थात $(6+1)^{13}$ का प्रत्येक पद, (1^{13}) को छोड़कर, 6 से पूर्णतया विभाज्य है। इस प्रकार जब 7^{13} में 6 से भाग दिया जाता है तो शेष $(1^{13}=)$ 1 बचता है। और इस प्रकार $(7^{13}+1)$ में 6 से भाग देने पर शेष $(1+1=)$ 2 बचता है।

उदा. 43: दो संख्याओं का गुणनफल 7168 है एवं म. स. 16 है। संख्याएँ ज्ञात करें।

हल: संख्याएँ निश्चय ही उनके म. स. का अपवर्त्य होंगी।

मान लिया कि वे संख्याएँ 16a एवं 16b हैं,

जहाँ a और b आपस में अभाज्य हैं।

$\therefore\ 16a \times 16b = 7168$

$\therefore\ a \times b = 28$

अब, निम्नलिखित जोड़े ऐसे हैं जिनमें संख्याओं का गुणनफल 28 है;

$(28, 1)$; $(14, 2)$ और $(7, 4)$

इनमें (14, 2) परस्पर अभाज्य नहीं हैं, इसलिए इसे नजरअंदाज करें।

∴ अभीष्ट संख्या $= (28 \times 16, 1 \times 16)$ एवं $(7 \times 16, 4 \times 16)$

$= (448, 16)$ एवं $(112, 64)$

नोट :

1. इस प्रकार के प्रश्नों में संख्याओं के जोड़े 1 से अधिक हो सकते हैं।
2. यदि आप उपर्युक्त विधि के तर्क को समझ चुके हैं तो आप निम्नलिखित तरीके से अपने काम को और आसान कर सकते हैं।

***चरण* I :** $\frac{\text{गुणनफल}}{(\text{म. स.})^2}$ का मान निकालें।

***चरण* II :** चरण I में प्राप्त मान के गुणनखंडों के सभी संभव जोड़ों को ज्ञात करें।

***चरण* III :** चरण II में प्राप्त मान सभी परस्पर अभाज्य गुणनखंडों के जोड़ों में म. स. से गुणा करें।

उपर्युक्त प्रश्न के लिए :

***चरण* I :** $\frac{7168}{(16)^2} = 28$

***चरण* II :** (1, 28); (2, 14); (4, 7)

***चरण* III :** $(1 \times 16, 28 \times 16)$ एवं $(4 \times 16, 7 \times 16)$ या, (16, 448) एवं (64, 112)

उदा. 44: वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जिससे 55, 127 एवं 175 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचता हो।

हल : माना कि शेष = x

संख्याएँ (55 - x), (127 - x) एवं (175 - x) अभीष्ट संख्या से अवश्य ही विभाज्य होंगी।

अब, हमलोग जानते हैं कि यदि दो संख्याएँ किसी खास संख्या से विभाज्य होंगी तो उनका अंतर भी उस खास संख्या से विभाज्य होगी।

∴ संख्याएँ, $(127 - x) - (55 - x), (175 - x) - (127 - x)$ एवं $(175 - x) - (155 - x)$,

या, 72, 48 एवं 120 भी अभीष्ट संख्या से विभाज्य होगी।

72, 48 एवं 120 का म. स. = 24

∴ अभीष्ट संख्या = 24

नोट : यदि आप इस विधि के विस्तार में नहीं जाना चाहते हों तो संख्याओं के धनात्मक अंतर का म. स. निकाल लें। इससे आपका काम आसानी से एवं जल्द हो जाएगा।

उदा. 45: यदि किसी संख्या में 5 एवं 7 से लगातार भाग दिया जाता है तो शेष क्रमशः 2 एवं 4 बचता है। यदि उस संख्या को (7 × 5=) 35 से भाग दिया जाए तो शेष क्या बचेगा?

हल :

5	*A*	
7	*B*	2
	C	4

उपर्युक्त सजावट में, A एक संख्या है जिसमें 5 से भाग देने पर भागफल एवं शेष क्रमशः B एवं 2 प्राप्त होता है। फिर, जब B में 7 से भाग दिया जाता है तो भागफल एवं शेष क्रमशः C एवं 4 प्राप्त होता है।

अब, C का मान 1 रखने पर,

$\therefore \quad B = 7 \times 1 \times 4 = 11$ एवं $A = 5 \times 11 + 2 = 57$

अब 57 में 35 से भाग देने पर 22 शेष प्राप्त होता है।

***सूत्र विधि* (Direct Formula) :**

अभीष्ट शेष $= d_1 \times r_2 + r_1$

जहाँ $d_1 =$ पहला भाजक $= 5$

$r_1 =$ पहला शेष $= 2$

$r_2 =$ दूसरा शेष $= 4$

$\therefore$ अभीष्ट शेष $= 5 \times 4 + 2 = 22$

उदा. 46: भाग के एक प्रश्न में, शुरू से लेकर अंत तक शेष क्रमशः 221, 301, 334 एवं 280 हैं। यदि भाज्य 987654 हो तो भाजक एवं भागफल ज्ञात करें।

हल : ***चरण* I :**

$$\begin{array}{l} ___)\,987654\,(_ \\ \quad\;\; \underline{abc} \\ \quad\;\; 221 \end{array}$$

a) चूँकि हमारे पास 4 शेष हैं, इसलिए हमारा गुणक तीन अंकों वाला होना चाहिए (क्यों?)

b) चूँकि सारे शेष तीन अंकों की संख्याएँ हैं, हमलोग अनुमान लगा सकते हैं कि भाजक भी तीन अंकों की एक संख्या होगी। (यह सही नहीं भी हो सकता है।)

c) हमलोग abc का मान ज्ञात कर सकते हैं।

$$abc = 987 - 221 = 766$$

अब, हमारा भाजक 766 का निश्चय ही एक गुणनखण्ड होगा। इस प्रकार, यह या तो 766 है या 383 ।

***चरण* II :**

$$\begin{array}{l} ___)\,987654\,(_\,_ \\ \quad\;\; \underline{766} \\ \quad\;\; 2216 \\ \quad\;\; \underline{defg} \\ \quad\;\;\; 301 \end{array}$$

$\therefore \quad defg = 2216 - 301 = 1915$

अब, हम 766 एवं 1915 का म. स. निकालकर अपने भाजक को सुनिश्चित करते हैं।

$\therefore$ भाजक = 766 एवं 1915 का म. स. = 383

एक बार जब हमें भाजक ज्ञात हो जाता है तो भाग को पूरा किया जा सकता है।

$$
\begin{array}{l}
383)\,987654\,(2578 \\
\underline{766} \\
2216 \\
\underline{1915} \\
\;3015 \\
\;\underline{2681} \\
\;\;3344 \\
\;\;\underline{3064} \\
\;\;\;280
\end{array}
$$

इस प्रकार हमारा भाजक = 383 एवं भागफल = 2578

उदा. 47: गुणनफल के अंत में प्राप्त शून्यों की संख्या ज्ञात करें।

(a) $12 \times 18 \times 15 \times 40 \times 25 \times 16 \times 55 \times 105$

(b) $5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25 \times 30 \times 35 \times 40 \times 40 \times 45$

हल : हमें यह अवश्य जानना चाहिए कि निम्नलिखित कारणों से किसी गुणनफल के अंत में शून्य प्राप्त होता है:

1. यदि किसी गुणक (Multiplicand) के अंत में शून्य हो।

2. यदि 5 या 5 के अपवर्त्यों को किसी सम संख्या से गुणा किया जाता है।

ऊपर के कथनों के आधार पर हम कह सकते हैं कि:

$(5)^n\,(2)^m$ में शून्यों की संख्या n है, यदि $n < m$ हो, या m है यदि $m < n$ हो

इस प्रकार गुणनफल को $(2^m \times 5^m \times ....)$ के रूप में लिखें।

(a) $12 \times 18 \times 15 \times 40 \times 25 \times 16 \times 55 \times 105$

$= 12 \times 18 \times 16 \times 40 \times 15 \times 25 \times 55 \times 105$

$= (2^2 \times 3) \times (2 \times 9) \times (2)^4 \times (2^3 \times 5) \times (5 \times 3) \times 5^2 \times (5 \times 11) \times (5 \times 21)$

$= 2^{10} \times 5^6 \times ......$

(चूँकि 2 एवं 5 के अलावा सारी संख्याएँ हमारे लिए काम के नहीं हैं)

चूँकि $6 < 10$, $\therefore$ गुणनफल के अंत में 6 शून्य हैं।

(b) $5 \times (2 \times 5)\,(3 \times 5)\,(2^2 \times 5)\,(5^2)\,(2 \times 3 \times 5)\,(5 \times 7)\,(2^3 \times 5)(2^3 \times 5)(5 \times 9)$

$= (2)^{10} \times (5)^{11} \times ....$

चूँकि $10 < 11$ $\therefore$ गुणनफल के अंत में 10 शून्य हैं।

नोट : किसी भी गुणनफल के शृंखला के अंत में शून्यों की संख्या को ज्ञात करने का यह सबसे आसान विधि है। इस विधि की सहायता से आप $(1 \times 2 \times 3 \times .... \times 100)$ में शून्यों की संख्या जो कि 24 है आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। कोशिश करें।

किसी यौगिक संख्या के विभिन्न भाजकों की संख्या

नियम: प्रदत्त संख्या के समस्त रूढ़ गुणनखंडों का पता लगाएँ एवं प्रत्येक गुणनखंड के घातांक को 1 बढ़ा दें। इन बढ़े हुए घातांकों का गुणनफल उन समस्त विभाजकों की संख्या बताएगा, जिससे प्रदत्त संख्या विभाजित हो सकती है। इन विभाजकों में 1 एवं स्वयं प्रदत्त संख्या भी शामिल होगी।

उदा. 1: 1 एवं 50 के अतिरिक्त उन सभी भाजकों की संख्या का पता लगाएँ जिससे 50 पूरी तरह विभाज्य है।

हल: यदि आप इस प्रश्न को हल करने में उपर्युक्त नियम का इस्तेमाल नहीं करते हैं तो आप 1 से 50 तक की संख्याओं के संदर्भ में 50 की विभाज्यता जाँचेंगे। यह तरीका न केवल लंबा है बल्कि इसमें त्रुटि की भी संभावना है।

50 के विभिन्न विभाजक हैं: 1, 2, 5, 10, 25, 50 यदि इनमें से 1 एवं 50 को नजरंदाज कर दें तो विभाजकों की संख्या = 4

नियम से: $50 = 2 \times 5 \times 5 = 2^1 \times 5^2$

$\therefore$ विभाजकों की कुल संख्या $= (1+1)(2+1) = 2 \times 3 = 6$

$\therefore$ 1 और 50 को छोड़कर विभाजकों की कुल संख्या $= 6 - 2 = 4$

उदा. 2: 1 के अतिरिक्त 40 के समस्त विभाजकों की संख्या = ?

हल: $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^1$

$\therefore$ विभाजकों की कुल संख्या $= (3+1) \times (1+1) = 4 \times 2 = 8$

$\therefore$ 1 के अतिरिक्त विभाजकों की कुल संख्या $= 8 - 1 = 7$

उदा. 3: 1 के अतिरिक्त 37800 के समस्त विभाजकों की संख्या का पता लगाएँ।

हल: $37800 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$

$= 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^1$

$\therefore$ विभाजकों की कुल संख्या $= (3+1)(3+1)(2+1)(1+1) = 96$

$\therefore$ 1 के अतिरिक्त विभाजकों की कुल संख्या $= 96 - 1 = 95$

किसी पूर्णांक द्वारा विभाज्य समस्त संख्याओं की संख्या

उदा. 1: 100 तक 6 से कितनी संख्याएँ विभाज्य हैं?

हल: 100 में 6 से भाग दें। प्राप्त भागफल ही अभीष्ट संख्याओं की संख्या है।

$100 = \underline{16} \times 6 + 4$

$\therefore$ संख्याओं की संख्या = 16

उदा. 2: 200 तक 4 एवं 3 से समान रूप से विभाज्य कितनी संख्याएँ हैं?

हल: 4 एवं 3 का लघुत्तम समापवर्त्य = 12

200 में 12 से भाग दें। प्राप्त भागफल ही अभीष्ट संख्याओं की संख्या है।

$200 = \underline{16} \times 12 + 8$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 16

उदा. 3: 100 एवं 300 के बीच कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

हल: 100 तक ऐसी 14 संख्याएँ हैं जो 7 से विभाज्य हों, क्योंकि $100 = \underline{14} \times 7 + 2$

300 तक ऐसी 42 संख्याएँ हैं जो 7 से विभाज्य हों, क्योंकि $300 = \underline{42} \times 7 + 6$

$\therefore$ अभीष्ट संख्याओं की संख्या $= 42 - 14 = 28$

दूसरी विधि:

पहला चरण: सर्वप्रथम प्रदत्त सीमाओं का प्रसार (range) ज्ञात करें। यहाँ प्रसार $= (300 - 100) = 200$

दूसरा चरण: प्रसार को 7 से विभाजित करें। भागफल ही अभीष्ट संख्याओं की संख्या है:
$200 \div 7 = 28$
$\therefore$ अभीष्ट संख्याओं की संख्या = 28

नोट: उपर्युक्त विधि हर जगह उपयोगी नहीं हो सकती है। कभी-कभी इससे प्राप्त उत्तर गलत भी हो सकता है। उदाहरण के लिए निम्नलिखित प्रश्न को देखें:

उदा. 4: 100 एवं 300 के बीच कितनी संख्याएँ 13 से विभाज्य हैं?

हल: ***पहली विधि:***
100 तक 13 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या = 7, क्योंकि
$100 = \underline{7} \times 13 \times 9$
इसी तरह 300 तक 13 से विभाजित होनेवाली संख्याओं की संख्या = 23, क्योंकि
$300 = \underline{23} \times 13 + 1$
$\therefore$ अभीष्ट संख्याओं की संख्या = 23 – 7 = 16

दूसरी विधि:
प्रसार = 300 – 100 = 200 एवं
$200 = \underline{15} \times 13 + 5$
$\therefore$ संख्याओं की संख्या 15, जो कि सही नहीं है।

नोट: आपने देखा कि किस तरह एक ही प्रश्न के दो उत्तर प्राप्त हो गए। पाठकों को सलाह दी जाती है कि कृपया केवल पहली विधि का ही इस्तेमाल करें।

उदा. 5: 1000 से कम वह कौन-सी संख्या है, जिससे 43521 में गुणा करने पर गुणनफल के दायीं ओर स्थित अंतिम तीन अंक 791 होंगे?

हल: गुणनखंड का आखिरी अंक 1 है। इसलिए गुणक का आखिरी अंक भी 1 होगा। अब मान लें कि गुणक का दूसरा अंक x है; तब गुणा के नियम के अनुसार (गुणनखंड एवं गुणक के अंतिम दो अंकों के बीच वज्र-गुणनफल)

$$\begin{array}{r} 43521 \\ x1 \\ \hline 791 \end{array}$$

$1 \times 2 + 1 \times x = 9 \therefore x = 7$
अब गुणक की तीसरी संख्या प्राप्त करने के लिए,

$$\begin{array}{r} 43521 \\ x71 \\ \hline 791 \end{array}$$

$5 \times 1 + 2 \times 7 + 1 \times x = -7$
या $19 + x = -7$
$\therefore x = 8$
$\therefore$ तीन अंकों वाली अभीष्ट संख्या = 871

उदा. 6: निम्नलिखित समीकरण में Q का महत्तम मान क्या होगा?

$$5P9 + 3R7 + 2Q8 = 1114$$

(1) 8 (2) 7 (3) 5 (4) 4
(5) इनमें से कोई नहीं

हल : $5P9 + 3R7 + 2Q8 = 1114$

Q के महत्तम मान के लिए, P एवं R के मानों को निश्चय ही शून्य होना चाहिए।

अब, $509 + 307 + 2Q8 = 1114$

या, $816 + 2Q8 = 1114$

या, $2Q8 = (1114 - 816 =) 298$

$\therefore$ Q का अभीष्ट मान = 9

उदा. 7: यदि तीन अंकों वाली किसी संख्या के अंतिम दो अंकों को परस्पर बदल दिया जाए तो इस प्रकार प्राप्त नयी संख्या, मूल संख्या से 54 अधिक हो जाता है। उस संख्या के दोनों अंकों के बीच का अंतर ज्ञात करें।

(1) 9 (2) 12 (3) 6
(4) आंकड़ा पर्याप्त नहीं है (5) इनमें से कोई नहीं

हल : माना कि तीन अंकों की संख्या = $100x \ 10y + z$

प्रश्नानुसार,

$$(100x + 10z + y) - (100x + 10y + z) = 54$$

या, $9z - 9y = 54$, या $z - y = 6$

नोट : इस प्रकार की स्थिति में अंतिम दो अंकों के बीच का अंतर

$$= \frac{\text{दोनों मानों के बीच का अंतर}}{9} = \frac{54}{9} = 6$$ ***(याद रखें)***

अभ्यास प्रश्न

1. 120 तक कितनी संख्याएँ 8 से विभाज्य हैं?
2. 200 से 500 के बीच कितनी संख्याएँ 13 से विभाज्य हैं?
3. 100 से 300 के बीच कितनी संख्याएँ 13 के अपवर्त्य हैं?
4. 1 से 201 के बीच की समस्त विषम संख्याओं का योगफल निकालें।
5. 101 से 309 के बीच की समस्त सम संख्याओं का योगफल निकालें।
6. 50 से 151 तक की समस्त सम एवं विषम संख्याओं के योगफल का अंतर निकालें।
7. 7 अंकों की कुल कितनी संख्याएँ बन सकती हैं?
8. 200 तक कितनी ऐसी संख्याएँ हैं जो 5 एवं 7 दोनों से विभाज्य हों?
9. 200 एवं 400 के बीच कितनी ऐसी संख्याएँ हैं, जो 3, 4 एवं 5 तीनों से विभाज्य हों?
10. यदि दो संख्याओं का योग 22 है एवं उनका अंतर 14, तो उन संख्याओं का गुणनफल निकालें।
11. यदि दो संख्याओं का योगफल 30 है एवं उनका अंतर 6 तो उनके वर्गों का अंतर प्राप्त करें।
12. यदि दो पदों का गुणनफल 39 है एवं उनका अंतर 28 है तो उनके व्युत्क्रमों का अंतर प्राप्त करें।

13. 9680 से ठीक बड़ी वह कौन-सी संख्या है, जो 71 से विभाज्य हो?
14. 7, 3, 1, 4 के इस्तेमाल से निर्मित सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्याओं के बीच का अंतर बताएँ।
15. वह न्यूनतम संख्या कौन-सी है, जो एक पूर्ण वर्ग हो तथा जिसका एक गुणनखंड 3675 हो?
16. वह न्यूनतम संख्या बताएँ, जिसे 9600 में से घटाने पर वह 78 से विभाज्य हो जाता हो।
17. वह न्यूनतम संख्या कौन-सी है, जिसे 3000 में जोड़ने पर वह 57 का अपवर्त्य बन जाए?
18. भाग के एक प्रश्न में भागफल 105 है तथा शेष 195 है। यदि भाजक, भागफल एवं शेष का योगफल है, तो भाज्य क्या है?
19. 200 एवं 600 के बीच की उन समस्त संख्याओं का योगफल निकालें जो 16 से विभाज्य हों।
20. क्या 1001 एक रूढ़ संख्या है?
21. क्या 401 एक रूढ़ संख्या है?
22. 60 एवं 80 के बीच की समस्त रूढ़ संख्याओं का योगफल निकालें।
23. जब एक खास संख्या में 13 से गुणा किया जाता है तो गुणनफल में केवल 7 ही दिखाई पडते हैं। ऐसी न्यूनतम संख्या कौन-सी है?
24. वह कौन-सी संख्या है, जिसमें 16 से गुणा करने पर उस संख्या में 225 की वृद्धि हो जाती है?
25. गिनती की पहली 200 संख्याओं को लिखने के लिए अर्थात् 1, 2, 3, ... से 200 तक लिखने के लिए टाइपराइटर की कुंजी को कितनी बार दबाना होगा?
26. भाग के एक सवाल में भाजक, भागफल का 4 गुना है और शेष का 3 गुना। भाज्य क्या है, यदि शेष 4 हो?
27. 10000 में से 79 को कितनी बार घटाया जाए कि शेष 6445 बचे?
28. 30^6 में शामिल समस्त रूढ़ संख्याओं की संख्या बताएँ?
29. वह कौन-सी संख्या है, जिसको अपने में ही 20 बार जोड़ने से परिणाम 861 आता हो?
30. यदि 97 में किसी संख्या से गुणा करते हैं तो उसमें 7584 की वृद्धि होती है तो वह संख्या बताएँ।
31. किसी संख्या को यदि पहले 3 से एवं बाद में 5 से विभाजित किया जाता है तो शेष क्रमशः 1 एवं 2 मिलते हैं। शेष कितना बचेगा, यदि उसी संख्या को 15 से विभाजित किया जाए?
32. ऐसी न्यूनतम संख्या बताएँ जिसमें पहले 7 से एवं फिर 9 से भाग देने पर शेष क्रमशः 3 एवं 5 प्राप्त होते हैं।
33. किसी संख्या में 36 से भाग देने पर शेष 21 बचता है। शेष क्या बचेगा, यदि उसी संख्या को 12 से विभाजित किया जाए?
34. किसी संख्या में 13 से गुना करने पर गुणनफल में केवल 5-ही-5 मिलते हैं। ऐसी संख्या का न्यूनतम मान बताएँ।
35. यदि $a = 16$ एवं $b = 15$ हो तो $\dfrac{a^2 + b^2 + ab}{a^3 - b^3}$ का मान बताएँ।
36. वह कौन-सी सबसे बड़ी प्राकृत संख्या है, जिससे तीन लगातार सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सदा विभाज्य हो?
37. यदि $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$ हो तो $\dfrac{6}{7} + \dfrac{y - x}{y + x}$ का मान क्या होगा?

38. यदि $\sqrt{\left\{1+\frac{27}{169}\right\}}=\left\{1+\frac{x}{13}\right\}$ हो तो $x = ...$ है।

39. * को वह कौन-सा न्यूनतम मान दिया जाए ताकि संख्या 6135 * 2, 9 से पूरी तरह विभाज्य हो जाए?

40. * का वह कौन-सा न्यूनतम मान है, जिसके लिए 97215*6, 11 से विभाज्य हो जाएगी?

41. * के किस न्यूनतम मान के लिए 91876*2, 8 से विभाज्य है?

42. चार अंकों वाली सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है, जो 88 से पूरी तरह विभाजित हो जाए?

43. पहली रूढ़ संख्या कौन-सी है?

44. यदि संख्या $\left(10^n-1\right)$, 11 से विभाज्य हो तो n

1) विषम संख्या है
2) सम संख्या है
3) कोई भी संख्या हो सकती है
4) 11 का अपवर्त्य है

45. यदि $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ हो तो $\frac{3a+2b}{3a-2b}=?$

46. $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=?$

47. $\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{3}{5}\right)\left(2-\frac{5}{7}\right)\ldots\left(2-\frac{997}{999}\right)=?$

48. $\frac{137\times137+137\times133+133\times133}{137\times137\times137-133\times133\times133}=?$

49. $\frac{?}{54}=\frac{96}{?}$

50. $(6)^{10}\times(7)^{17}\times(11)^{27}$ में रूढ़ गुणनखंडों की संख्या बताएँ।

हल (संकेत)

1. $\frac{120}{8}=15$

2. 200 तक 13 से विभाज्य संख्याओं की संख्या $=\frac{200}{13}=15+\frac{5}{13}\approx15$

500 तक 13 से विभाज्य संख्याओं की संख्या $=\frac{500}{13}=38+\frac{6}{13}\approx38$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $=38-15=23$

3. 100 तक 13 के अपवर्त्यों की संख्या $= \frac{100}{13} = 7 + \frac{9}{13} \approx 7$

300 तक 13 के अपवर्त्यों की संख्या $= \frac{300}{13} = 23 + \frac{1}{13} \approx 23$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 23 - 7 = 16$

4. संख्याओं की संख्या (201) एक विषम संख्या है, इसलिए विषम संख्याओं की संख्या

$= \frac{1}{2}(201+1) = 101$ विषम संख्याएँ

$\therefore$ पहले 101 विषम संख्याओं का योगफल $= (101)^2 = 10201$

5. 309 तक की सम संख्याओं की संख्या $= \frac{1}{2}(309-1) = 154$

पहली 154 सम संख्याओं का योगफल $= 154\,(154+1) = 23870$

101 तक की सम संख्याओं की संख्या $= \frac{1}{2}(101-1) = 50$

$\therefore$ पहली 50 सम-संख्याओं का योगफल $= 50(50+1) = 2550$

$\therefore$ अभीष्ट योगफल $= 23870 - 2550 = 21320$

6. यदि शृंखला सम संख्या से शुरू होकर विषम संख्या पर समाप्त होती हो तो अभीष्ट अंतर

$= \frac{151-50+1}{2} = \frac{102}{2} = 51$

नोट: 1) यदि शृंखला विषम संख्या से शुरू होती हो और विषम संख्या पर ही समाप्त भी होती हो तो ऐसा अंतर $= \frac{\text{अंतिम संख्या} + \text{पहली संख्या}}{2}$

2) यदि शृंखला सम संख्या से शुरू होकर विषम संख्या पर समाप्त होती हो तो ऐसा अंतर $= \frac{\text{अंतिम संख्या} - \text{पहली संख्या} + 1}{2}$

3) यदि शृंखला सम संख्या से शुरू होकर सम संख्या पर ही समाप्त होती हो तो ऐसा अंतर $= \frac{\text{अंतिम संख्या} + \text{प्रथम संख्या}}{2}$

7. 7 अंकों वाली न्यूनतम संख्या $= 1000000$

7 अंकों वाली महत्तम संख्या $= 9999999$

$\therefore$ 7 अंकों वाली संख्याओं की संख्या $= 9999999 - 1000000 + 1 = 9 \times 10^6$

8. जो संख्याएँ एक साथ 5 एवं 7 दोनों ही से विभाज्य हों तो वे संख्याएँ उनके लघुत्तम समापवर्त्य से भी विभाज्य होंगी।

5 एवं 7 का लघुत्तम समापवर्त्य = 35

$\therefore$ अभीष्ट संख्याओं की संख्या $= \frac{200}{35} = 5 + \frac{25}{35} \approx 5$

9. 3, 4 एवं 5 का ल.स. (लघुत्तम समापवर्त्य) = 60

200 तक 60 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या $= \frac{200}{60} = 3 + \frac{1}{3} \approx 3$

400 तक 60 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या $= \frac{400}{60} = 6 + \frac{2}{3} \approx 6$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 6 - 3 = 3$

10. मान लिया कि संख्याएँ x एवं y हैं।

तब, $x + y = 22$ ....(1)

$x - y = 14$ ....(2)

(1) एवं (2) को वर्ग करने पर,

$x^2 + y^2 + 2xy = 484$ ....(3)

$x^2 + y^2 - 2xy = 196$ ....(4)

(4) में से (3) घटाने पर,

$4xy = 288$

$\therefore \quad xy = \frac{288}{4} = 72$

द्रुत विधि:

I. दो संख्याओं का गुणनफल $= \frac{(\text{योगफल})^2 - (\text{अंतर})^2}{4}$

$$= \frac{(22)^2 - (14)^2}{4} = \frac{36 \times 8}{4} = 72$$

II. $x = \frac{22 + 14}{2} = 18$

$y = \frac{22 - 14}{2} = 4$

$\therefore \; xy = 18 \times 4 = 72$

11. मान लिया कि दो संख्याएँ x एवं y हैं।

$x + y = 30, x - y = 6$

या, $(x + y)(x - y) = 180$ या, $x^2 - y^2 = 180$

12. मान लिया कि दो पद x एवं y हैं।
प्रश्नानुसार,

$x - y = 28 \ldots\ldots (i)$

एवं $xy = 39 \ldots\ldots (ii)$

(ii) से (i) को विभाजित करने पर, $\frac{x}{xy} - \frac{y}{xy} = \frac{28}{39}$ या, $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{28}{39}$

13. 9680 को 71 से विभाजित करने पर हमें शेष मिलता है 24।
∴ 9680, 71 से पूरी तरह विभाज्य हो, इसके लिए इसमें $(71 - 24) = 47$ जोड़ने की जरूरत है।
∴ अभीष्ट संख्या $= 9680 + 47 = 9727$

14. महत्तम संख्या $= 7431$ एवं न्यूनतम संख्या $= 1347$
∴ अभीष्ट अंतर $7431 - 1347 = 6084$

15. $3675 = 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 = 3 \times 5^2 \times 7^2$
यहाँ 3 के अतिरिक्त सभी गुणनखंड वर्ग हैं। यदि 3675 को 3 से गुणा कर दिया जाए तो प्राप्त संख्या एक पूर्ण वर्ग होगी, जिसका एक गुणनखंड 3675 भी होगा।
∴ अभीष्ट न्यूनतम संख्या $= 3675 \times 3 = 11025$

16. 9600 में 78 से भाग देने पर शेष बचता है 6। यदि 9600 में से 6 घटा लिया जाए तो प्राप्त संख्या में कुछ भी शेष नहीं बचेगा। ∴ अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 6

17. 3000 में 57 से भाग देने पर शेष मिलता है 36। इसलिए अभीष्ट न्यूनतम संख्या $= 57 - 36 = 21$, जिसे 3000 में जोड़ने पर प्राप्त संख्या 57 का अपवर्त्य हो जाती है अर्थात् यह संख्या 57 से पूरी तरह विभाज्य हो जाती है।

18. $Q = 105, R = 195, D = Q + R = 105 + 195 = 300$
भाज्य $= D \times Q + R = 31695$

19. ऐसी न्यूनतम संख्या $= 16 \times 13 = 208$
ऐसी महत्तम संख्या $= 16 \times 37 = 592$

अभीष्ट योगफल $= 16 \times 13 + 16 \times 14 + \ldots. + 16 \times 37$

$$= 16(13 + 14 + \ldots. + 37)$$
$$= 16[(1 + 2 + \ldots. + 37) - (1 + 2 + \ldots. + 12)]$$
$$= 16\left[\frac{37 \times 38}{2} - \frac{12 \times 13}{2}\right]$$
$$= 16[703 - 78] = 10000$$

20. 1001 का संभावित वर्गमूल = 32
32 से छोटी रूढ़ संख्याएँ = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 एवं 31
यहाँ 1001, 7 से विभाज्य है, इसलिए यह रूढ़ संख्या नहीं है।

21. 401 का संभावित वर्गमूल = 20

20 से छोटी रूढ़ संख्याएँ = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19।

401 उपर्युक्त किसी भी रूढ़ संख्या से विभाज्य नहीं है। इसलिए 401 एक रूढ़ संख्या है।

22. योगफल $= 61 + 67 + 71 + 73 + 79 = 351$

23. एक ऐसी संख्या लिखें, जिसमें केवल दो 7 हों (77)। इसमें 13 से भाग दें। यदि यह पूर्णतया विभाज्य है तो विभाजन से प्राप्त भागफल ही अभीष्ट संख्या है। यदि यह संख्या विभाज्य नहीं है, तब एक और 7 लिखें एवं 13 से इसकी विभाज्यता का परीक्षण करें। यदि यह पूर्णतया विभाज्य है तो भागफल ही अभीष्ट संख्या है। यदि नहीं तो एक और 7 लिखें और फिर उपर्युक्त क्रिया करें। इस तरह करते रहने पर

$777777 \div 13 = 59829$

24. मान लिया कि संख्या x है। प्रश्नानुसार, $16x - x = 225$

$$\therefore \quad x = \frac{225}{15} = 15$$

नोट: इस स्थिति में अभीष्ट संख्या $= \dfrac{\text{बढ़ा हुआ मान}}{\text{गुणक - 1}}$

25. 200 तक एक, दो एवं तीन अंकों की संख्याएँ क्रमशः 9, 90 एवं 101 हैं।

$\therefore$ टाइपराइटर की कुंजी $= 9 \times 1 + 90 \times 2 + 101 + 3$

$= 9 + 180 + 303 = 492$ बार दबानी होगी।

26. $R = 4, D = 3 \times R = 12, Q = \dfrac{D}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$

भाज्य $= DQ + R = 12 \times 3 + 4 = 40$

27. अभीष्ट बारंबारता $= \dfrac{10000 - 6445}{79} = 45$

28. $(30)^6 = (2 \times 3 \times 5)^6 = 2^6 \times 3^6 \times 5^6$

2, 3, एवं 5 में से प्रत्येक का घातांक 6 है, इसलिए

रूढ़ संख्याओं की संख्या $= 6 + 6 + 6 = 18$

29. अभीष्ट संख्या $= \dfrac{861}{20+1} = \dfrac{861}{21} = 41$

30. अभीष्ट संख्या $= \dfrac{7584}{97-1} = 79$

31. ***द्रुत विधि से:*** अभीष्ट शेष $= d_1 \times r_2 + r_1 = 3 \times 2 + 1 = 7$

नोट: यह बहुत महत्वपूर्ण विधि है, इसलिए याद रखें।

32. अंतिम भागफल से शुरू करें जो कि 1 है।

5	* * *	
9	* *	–3
	1	–5

$** = 9 \times 1 + 5 = 14$

$*** = 7 \times 14 + 3 = 101$

33. संख्या $= 36x + 21 = 36x + 12 + 9 = (36x + 12) + 9$

चूँकि $(36x + 12)$, 12 से विभाज्य है, इसलिए शेष $= 9$

नोट: जब पहला भाजक दूसरे भाजक से विभाज्य हो, तो अभीष्ट शेष प्राप्त करने के लिए पहले शेष में दूसरे भाजक से भाग देना होगा।

34. प्रश्न-23 के समान ही हल करें।

35. $\frac{a^2 + b^2 + ab}{a^3 - b^3} = \frac{1}{a - b} = \frac{1}{16 - 15} = 1$

36. ऐसी महत्तम संख्या $= (2 \times 4 \times 6) = 48$

37. $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ (componendo-dividendo वाले नियम के अनुसार)

$\frac{y - x}{y + x} = \frac{4 - 3}{4 + 3} = \frac{1}{7}$

तब, $\frac{6}{7} + \frac{y - x}{y + x} = \frac{6}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$

38. $\sqrt{1 + \frac{27}{169}} = \sqrt{\frac{196}{169}} = \frac{14}{13} = 1 + \frac{1}{13} \quad \therefore \; x = 1$

39. कोई संख्या 9 से तभी विभाज्य होगी, जब उस संख्या का आंकिक योग भी 9 से विभाज्य हो। * को छोड़कर प्रदत्त संख्या के शेष सभी अंकों का योग = 17 है। यदि * = 1 रख दें तो प्रदत्त संख्या 9 से पूरी तरह विभाज्य हो जाएगी।

40. 97215 * 6

विषम-स्थानों पर स्थिति अंकों का योग $= 9 + 2 + 5 + 6 = 22$

(* को छोड़कर) सम-स्थानों पर स्थित अंकों का योग $= 7 + 1 = 8$

दोनों का अंतर या तो शून्य होना चाहिए या 11 से विभाज्य होना चाहिए।

इसलिए * = 3

41. अंतिम तीनों अंक 8 से विभाज्य होना चाहिए। इसलिए * = 3

42. चार अंकों वाली महत्तम संख्या = 9999

9999 में 88 से भाग देने पर शेष बचता है 55। अब यदि यह शेष 9999 में से घटा दिया जाए, तो प्राप्त संख्या 88 से पूर्णतया विभाज्य होगी।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 9999 - 55 = 9944$

43. 2

44. n एक सम संख्या होनी चाहिए।

45. $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ (componendo-dividendo नियम के अनुसार)

$$\frac{3a+2b}{3a-2b} = \frac{3\times4+2\times3}{3\times4-2\times3} = \frac{18}{6} = 3$$

46. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\times....\times\frac{n-1}{n} = \frac{2}{n}$

47. $\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}\times....\times\frac{1001}{999} = \frac{1001}{3}$

48. सूत्र $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ का इस्तेमाल करें।

इस प्रकार प्रदत्त समीकरण $= \frac{1}{137-133} = \frac{1}{4}$

49. $(?)^2 = 54\times96$

$\therefore \ ? = \sqrt{9\times6\times6\times16} = 3\times6\times4 = 72$

50. $(6)^{10}\times(7)^{17}\times(11)^{27} = (2)^{10}\times(3)^{10}\times(7)^{17}\times(11)^{27}$

$\therefore$ रूढ़ गुणनखंडों की कुल संख्या $= 10+10+17+27 = 64$