باب 15

لہریں
(WAVES)

S168CH15

15.1 تعارف (INTRODUCTION)

پچھلے باب میں تنہا ارتکاز کرتی ہوئی اشیا کی حرکت کا مطالعہ کیا۔ ایسے نظام میں کیا ہوگا جو ایسی اشیا کا مجموعہ ہے؟ مادی واسطہ (medium material) ایسی مثال فراہم کرتا ہے۔ یہاں لچکیلی قوتیں اجزائے ترکیبی کو ایک دوسرے سے باندھے رکھتی ہیں اور ایک جز کی حرکت دوسروں کی حرکت کو متاثر کرتی ہے۔ اگر آپ ساکت پانی کے تالاب میں ایک چھوٹی سی کنکری گرائیں تو پانی کی سطح مضطرب ہو جاتی ہے۔ یہ اضطراب ایک مقام پر محدود نہیں رہتا بلکہ ایک دائرے کی شکل میں باہر کی طرف رواں ہو جاتا ہے۔ اگر آپ تالاب میں کنکریاں ڈالنا جاری رکھیں، تو آپ جس نقطہ پر تالاب کی سطح میں اضطراب پیدا ہوا ہے، وہاں سے باہر کی طرف تیزی سے حرکت کرتے ہوئے دائرے دیکھیں گے۔ اس سے ایسا محسوس ہوتا ہے، جیسے نقطۂ اضطراب سے باہر کی طرف پانی حرکت کر رہا ہے۔

اگر آپ مضطرب سطح پر کچھ کارک کے ٹکڑے رکھ دیں تو آپ دیکھیں گے کہ کارک کے ٹکڑے اوپر نیچے حرکت کرتے ہیں لیکن اضطراب کے مرکز سے دور نہیں جاتے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ پانی کی کمیت، دائروں کے ساتھ، باہر کی طرف نہیں بہتی بلکہ ایک حرکت پیدا کرتا ہوا اضطراب پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح جب ہم بولتے ہیں تو آواز کی لہریں ہم سے باہر کی طرف حرکت کرتی ہیں، لیکن ان کے ساتھ واسطے کے ایک حصے سے دوسرے حصے میں کوئی ہوا کا بہاؤ نہیں ہوتا۔ ہوا میں پیدا ہوا خلل (اضطراب Distrubance) بہت کم واضح ہوتا ہے اور اسے صرف ہمارے کان یا مائیکروفون ہی معلوم کر پاتے ہیں۔ یہ نمونے جو حقیقی طبعی منتقلی یا مجموعی طور پر مادے کے بہاؤ کے بغیر حرکت کرتے ہیں، لہر (waves) کہلاتے ہیں۔ اس باب میں ہم ایسی ہی لہروں کا مطالعہ کریں گے۔

ایک لہر میں، اطلاع اور توانائی، اشاروں (سگنل Signals) کی شکل میں، ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک پہنچتی ہے۔ لیکن کوئی مادی شے حرکت نہیں کرتی ہماری تمام خبر رسانی، لہروں کے ذریعے سگنلوں کی ترسیل (Transmission) پر منحصر ہے۔ جب ہم کسی دور مقام پر اپنے دوست کو ٹیلیفون کرتے ہیں، ایک آواز کی لہر ہماری صوتی رگ سے ہمارا پیغام، ٹیلیفون تک لے جاتی ہے۔ وہاں ایک برقی سگنل پیدا ہوتا ہے دھات کے تار کے ساتھ حرکت کرتا ہوا آگے بڑھتا ہے۔ اگر فاصلہ بہت زیادہ ہوتا تو پیدا ہوئے برقی سگنل کو ایک روشنی کے سگنل یا برقی ومقناطیسی لہروں میں تبدیل کیا جا سکتا ہے اور نوری کیبل (Optical Cables) یا فضا سے، ممکنہ طور پر ایک ترسیل سیارچہ کے راستے سے، اس کی ترسیل کی جا سکتی ہے۔ سننے والے سرے پر اس برقی، یا روشنی کے سگنل یا برق ومقناطیسی لہر کو دوبارہ آواز کی لہروں میں بدلا جاتا ہے جو ٹیلیفون سے کان تک سفر کرتی ہیں۔

برقی ومقناطیسی لہروں کو اپنی اشاعت (Propagation) کے لیے واسطے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ ہم جانتے ہیں کہ روشنی کی لہریں خلاء (Vaccum) سے گذر سکتی ہیں۔ ستاروں کے ذریعے خارج کی گئی روشنی، جو ہم سے سینکڑوں نوری برسوں کے فاصلے پر ہیں، بین نجمی فضا (inter-stellar space) سے گذر کر ہم تک پہنچتی ہے، جو کہ عملی طور پر خلاء ہے۔

جن لہروں سے ہمارا واسطہ پڑتا ہے، وہ بنیادی طور پر تین قسم کی ہیں: (a) میکانیکی لہریں (b) برقی ومقناطیسی لہریں (c) مادی لہریں۔ میکانیکی لہروں سے ہم سب سے بہتر طور پر واقف ہیں اس لیے کہ ان سے اکثر ہمارا سامنا ہوتا رہتا ہے۔ ان کی عام مثالیں ہیں: پانی کی لہریں، آواز کی لہریں، زلزلے کی لہریں وغیرہ۔ ان تمام لہروں کی کچھ مرکزی خاصیتیں ہیں: ان پر نیوٹن کے قانونوں کا اطلاق ہوتا ہے اور صرف مادی واسطے ہی میں پائی جا سکتی ہیں جیسے پانی، ہوا یا چٹان۔ برقی و مقناطیسی لہروں کی عام مثالیں ہیں: بصری (Visibile) اور بالا بنفشی (Ultraviolet) روشنی، ریڈیائی لہریں (Radio waves) مائیکرو ولہریں (Microwaves) اور x-شعائیں (x-rays) وغیرہ۔ ہر برقی و مقناطیسی لہر، خلا میں یکساں چال C سے سفر کرتی ہے:

$$c = 299,792,458 \text{ m s}^{-1} \quad \text{(روشنی کی رفتار)} \quad (15.1)$$

میکانیکی لہروں کے برخلاف، برقی ومقناطیسی لہروں کو اپنی اشاعت کے لیے کسی واسطے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ آپ ان لہروں کے بارے میں آئندہ مزید سیکھیں گے۔

مادی لہریں، متحرک الیکٹرانوں، پروٹانوں، نیوٹرانوں اور دوسرے بنیادی ذرات اور یہاں تک کہ ایٹموں اور مالیکیولوں سے منسلک ہیں۔ کیونکہ ہم عام طور سے ان سب کو مادے کے اجزائے ترکیبی تصور کرتے ہیں، اس لیے یہ لہریں مادی لہریں کہلاتی ہیں۔ فطرت کی کوانٹم میکانیکی توضیح میں ان کی ضرورت پڑتی ہے، جس کے بارے میں آپ آئندہ سیکھیں گے۔ حالانکہ تصوراتی طور پر، یہ میکانیکی یا برقی ومقناطیسی لہروں سے زیادہ تجریدی ہیں، ان کا استعمال جدید ٹکنالوجی کے بنیادی آلات میں کیا جانے لگا ہے۔ الیٹرانوں سے منسلک مادی لہریں، الیکٹرانی خوردبین (electron microscopes) میں استعمال کی جاتی ہے۔

اس باب میں ہم میکانیکی لہروں کا مطالعہ کریں گے، جن کو اپنی اشاعت کے لیے واسطہ (Medium) کی ضرورت ہوتی ہے۔

لہروں کا فنون لطیفہ اور ادب پر جمالیاتی اثر تو زمانہ قدیم سے دیکھنے میں آتا ہے، لیکن لہری حرکت (Wave motion) کا پہلا سائنسی تجزیہ سترہویں (17th) صدی میں کیا گیا ہے۔ لہری حرکت کی طبیعیات سے جڑے ہوئے کچھ اہم سائنسداں ہیں: کرسٹیان ہائی جین (Christiaan Huygens) (1629-1695)، روبرٹ ہوک اور اسحاق نیوٹن۔ لہروں کی طبیعیات کی تفہیم، اسپرنگ سے منسلک کمیتوں کے اہتزاز کی طبیعیات اور سادہ پنڈولم کی طبیعیات کی تفہیم کے بعد ہوئی۔ لچکیلے واسطوں میں لہریں ہارمونی اہتزازات سے نزدیکی طور پر منسلک ہیں۔ (تنی ہوئی ڈوریاں، چھلے دار اسپرنگ، ہوا وغیرہ، لچکیلے واسطوں کی مثالیں ہیں۔) ہم سادہ مثالوں کے ذریعے یہ تعلق واضح کریں گے۔

اسپرنگ کا ایک مجموعہ لیں، جس میں اسپرنگ ایک دوسرے سے اس طرح منسلک ہیں جیسے شکل 15.1 میں دکھایا گیا ہے کہ اگر ایک سرے کے اسپرنگ

کو اچانک کھینچ کر چھوڑ دیا جائے تو خلل (Disturbance) دوسرے سرے تک پہنچ جاتا ہے۔ کیا ہوا ہے؟ پہلے اسپرنگ کی توازن لمبائی میں بگاڑ (خلل) پیدا کیا گیا ہے۔ کیونکہ دوسرا اسپرنگ پہلے اسپرنگ سے منسلک ہے، اس لیے یہ بھی کھنچ جاتا ہے یا دب جاتا ہے، اور اس طرح دوسرے اسپرنگ بھی متاثر ہوتے ہیں۔ خلل ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے،

شکل 15.1: اسپرنگ کا ایک مجموعہ، جس میں اسپرنگ ایک دوسرے سے منسلک ہیں۔ سرے A کو اچانک کھینچ کر خلل پیدا کیا جاتا ہے، جو دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے۔

لیکن ہر اسپرنگ صرف چھوٹے اہتزازات کرتا ہے (اپنے مقامِ توازن کے گرد)۔ اس حالت کی ایک عملی مثال کے بہ طور ریلوے اسٹیشن پر کھڑی ہوئی (ساکت) ٹرین تصور کریں۔ ریل گاڑی کے مختلف ڈبے ایک دوسرے سے اسپرنگوں کے ذریعے جڑے ہوتے ہیں۔ جب ایک سرے پر انجن جوڑا جاتا ہے، تو وہ اپنے پیچھے والے ڈبے کو ایک دھکا لگاتا ہے، اور یہ دھکا ایک ڈبے سے دوسرے ڈبے تک ترسیل ہو جاتا ہے اور پوری ریل گاڑی مجسم طور پر منتقل نہیں ہوتی۔

آیئے اب ہوا میں آواز کی لہروں کی اشاعت کو دیکھیں۔ جب لہر ہوا سے گذرتی ہے، تو وہ ہوا کے ایک چھوٹے علاقے کو دباتی یا پھیلاتی ہے۔ اس سے اس علاقہ کی ہوا کی کثافت میں تبدیلی آجاتی ہے فرض کیجیے $\delta\rho$۔ یہ تبدیلی دباؤ میں ایک تبدیلی δp پیدا کرتی ہے۔ دباؤ، کیوں کہ قوت فی اکائی رقبہ ہے، اس لیے اس خلل کے متناسب ایک بحالی قوت پیدا ہوتی ہے۔ بالکل ویسے ہی جیسے اسپرنگ میں ہوتا ہے۔ اس صورت میں توسیع (Extension) یا داب (Compression) جیسی مقدار کثافت کی تبدیلی ہے۔ اگر ایک علاقہ میں داب پیدا ہوتا ہے، تو اس علاقے کے مالیکیول ایک دوسرے کے نزدیک آجاتے ہیں اور وہ متصل علاقے میں حرکت کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس طرح متصل علاقے میں کثافت میں اضافہ کرتے ہیں یا داب پیدا کرتے ہیں۔ اس کے نتیجے میں، پہلے علاقے کی ہوا میں تلطیف (Rarefaction) ہوتی ہے۔ اگر ایک علاقہ مقابلتاً تلطیف شدہ (Rarefied) ہو تو آس پاس کی ہوا اس علاقے میں تیزی سے آئے گی اور اس طرح متصل علاقے میں حرکت دے گی۔ اس طرح داب (Compression) اور تلطیف ایک علاقہ سے دوسرے علاقہ میں حرکت کرتے ہیں اور ہوا میں خلل کی اشاعت کو ممکن بناتے ہیں۔

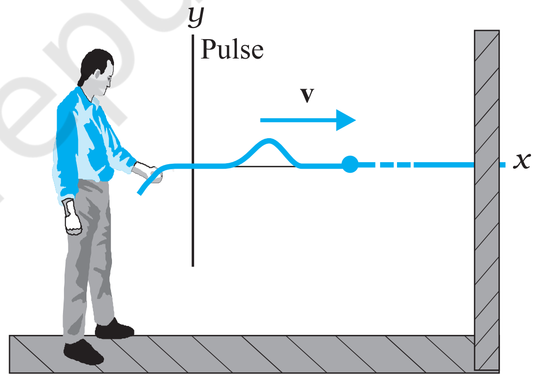
ٹھوس اشیا کے لیے بھی اسی طرح کے دلائل پیش کیے جاسکتے ہیں۔ ایک قلمی (Crystalline) ٹھوس میں ایٹم یا ایٹموں کے گروپ ایک دَوری جالی (لیٹس Lattice) میں مرتب (arranged) ہوتے ہیں۔ ان میں، ہر ایٹم یا ایٹموں کا گروپ، انہیں گھیرے ہوئے ایٹموں کی قوتوں کی وجہ سے حالت توازن میں ہوتا ہے۔ ایک ایٹم کو منتقل کرنے سے دوسروں کو اپنی جگہ قائم رکھتے ہوئے، بحالی قوتیں پیدا ہوتی ہیں، بالکل اسپرنگ کی طرح۔ اس طرح ایک لیٹس کے ایٹموں کو ہم سروں کے نقطے مان سکتے ہیں جن کے جوڑوں کے درمیان اسپرنگ لگے ہیں۔

اس باب کے اگلے حصوں میں ہم لہروں کی خصوصی خاصیتوں سے بحث کرنے جا رہے ہیں۔

15.2 عرضی اور طولی لہریں (TRANSVERSE AND LONGITUDINAL WAVES)

میکانیکی لہریں عرضی (Transverse) یا طولی (Longitudinal) ہوسکتی ہیں۔ یہ اس پر منحصر ہے کہ واسطے میں خلل یا منتقلی کی سمت اور لہر کی اشاعت کی سمت میں کیا رشتہ ہے۔ ان دونوں میں فرق کرنے کے لیے آیئے ایک سرے پر جڑی ہوئی ایک تنی ہوئی ڈوری کا ردعمل دیکھیں۔ اگر آپ اس ڈور کے آزاد سرے کو اوپر نیچے ایک جھٹکا دیں، تو جیسا کہ شکل 15.2 دکھایا گیا ہے، تو ڈوری پر ایک واحد ضرب (پلس Plus) کی شکل میں ایک لہر گذرتی ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ پلس کے ناپ کے مقابلے میں ڈوری بہت لمبی ہے، اس لیے

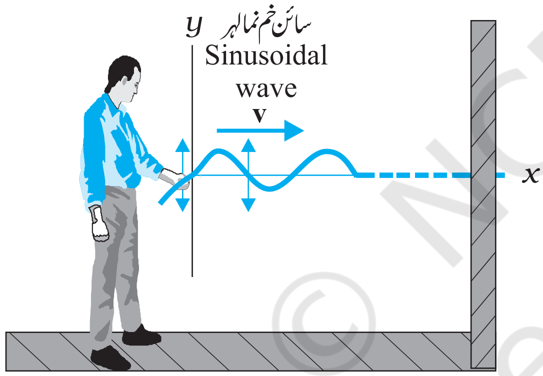
دوسرے سرے تک پہنچتے پہنچتے پلس کا اسراف (Dissipates) ہوجاتا ہے، اس لیے دوسرے سرے سے اس کے انعکاس کونظرانداز کیا جاسکتا ہے۔ اس پلس کا تشکیل پانا اوراس کی اشاعت اس لیے ممکن ہے کیونکہ ڈوری میں تناؤ ہے۔ جب آپ رسی کے اپنی طرف کے سرے کواوپر کھینچتے ہیں تو یہ سرا، رسی کے متصل حصے کو اوپر کی طرف کھینچنا شروع کردیتا ہے، کیونکہ رسی کے ان دونوں حصوں کے درمیان تناؤ کام کررہا ہے۔ جیسے متصل حصہ اوپر کی طرف حرکت شروع کرتا ہے یہ اس کے بعد کے حصے کو اوپر کھینچنا شروع کرتا ہے اوراسی طرح اور— اس دوران آپ رسی کے اپنی طرف کے سرے کو نیچے جھٹکا دے چکے ہوتے ہیں۔ جیسے باری باری سے ہرحصہ اوپر کی طرف حرکت کرنا شروع کرتا ہے وہ اپنے ان پڑوسی حصوں کے ذریعے دوبارہ نیچے کی طرف کھنچتا ہے جو پہلے ہی نیچے کی طرف حرکت شروع کرچکے ہوتے ہیں۔ اس کا کل نتیجہ یہ ہے کہ ڈوری کی شکل میں ایک بگاڑ (distortion) پیدا ہوتا ہے اور یہ بگاڑ (پلس Plus) ڈوری پر رفتار **v** سے حرکت کرتا ہے۔



شکل **15.2**: ایک تنی ہوئی ڈوری پرسے ایک واحد پلس بھیجی گئی ہے۔ ڈوری کا ایک مخصوص جز (جیسے کہ نقطے سے نشان زد کیا گیا حصہ) پلس کے اس جز سے گزرنے پر پہلے اوپر اورپھر نیچے حرکت کرتا ہے۔ جز کی حرکت اس سمت پر عمود ہے، جس میں لہر حرکت کر رہی ہے۔

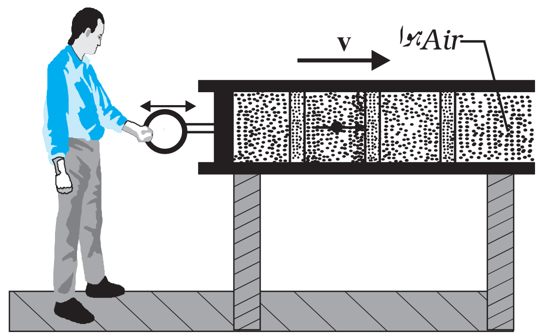
اگر آپ اپنی طرف کے سرے کومستقل اوپر نیچے حرکت دیتے رہیں تو ڈوری پرسے ایک مسلسل لہر، **v** رفتار سے، گذرتی ہے۔ لیکن اگر آپ کے ہاتھ کی حرکت، وقت کا سائن خم نما، تفاعل (sinusoidal function of time) ہے تو وقت کی کسی دی ہوئی ساعت پر، لہر کی شکل، سائن خم نما ہوگی، جیسا کہ شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے۔ دکھائی گئی لہر کی شکل سائن یا کوسائن منحنی جیسی ہے۔

شکل (15.3) میں دکھائی گئی لہروں کا مطالعہ دوطریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔ ایک طریقہ تو یہ ہے کہ لہر کی شکلوں کی نگرانی، ان کے دایں طرف حرکت کرتے ہوئے کی جائے یعنی کہ دی ہوئی ساعت وقت پر ڈوری کا فوری فوٹو لیا جائے۔ دوسرا متبادل طریقہ یہ ہے کہ ہم اپنی توجہ ڈوری کے کسی ایک خاص مقام پر مرکوز کردیں اوراس نقطہ پر ایک جز کی حرکت کی نگرانی کریں کہ جب اس سے ایک لہر گذرتی ہے تو وہ کیسے اوپر نیچے اہتزاز کرتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ اس طرح اہتزاز کرتے ہوئے ڈوری کے ہر جز کا نقل، لہر کے گذرنے کی سمت کے، عرضی سمت (یعنی کہ عمودی سمت) میں ہوگا، جیسا کہ شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسی لہر کو عرضی لہر (Transverse wave) کہتے ہیں۔



شکل **15.3**: ایک سائن خم نما لہر ڈوری پرسے گذاری گئی ہے ڈوری کا ایک مخصوص جز، لہر کے گذرنے کے ساتھ، مستقل اوپر نیچے حرکت کرتا ہے۔ یہ ایک عرضی لہر ہے۔

اب، ہم ایک لمبے ہوا بھرے ہوئے پائپ میں، ایک پسٹن کی حرکت کے ذریعے، لہروں کے پیدا ہونے کے دیکھتے ہیں، جیسا کہ شکل 15.4 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر آپ پسٹن کو تیزی سے دائیں موڑیں اورپھر بائیں موڑیں، تو آپ پائپ میں سے دباؤ کی ایک پلس بھیج رہے ہیں۔ بائیں طرف پسٹن کو موڑنے سے، اس کے پاس کی ہوا کا دباؤ کم ہوجاتا ہے۔ اس کی وجہ سے اس کے بعد کے ہوا کے اجزا واپس بائیں طرف حرکت کرتے ہیں اورپھر دور



شکل 15.4: ایک پسٹن کو آگے پیچھے حرکت کر کے، ایک ہوا سے بھرے ہوئے پائپ میں ایک آواز کی لہر پیدا کی جاتی ہے۔ ہوا کے ایک جز کے اہتزاز اس سمت کے متوازی ہیں، جس میں لہر حرکت کررہی ہے۔ یہ لہرایک طولی لہرہے۔

کے اجزا بھی ایسا ہی کرتے ہیں۔اس لیے ہوا کی حرکت اور ہوا کے دباؤ میں تبدیلی دائیں طرف پائپ میں بہ طور پلس حرکت کرتے ہیں۔

اگر آپ پسٹن کو ایک سادہ ہارمونی طرز سے دھکیلیں اور کھینچیں تو پائپ میں سے ایک سائن خم نما لہر گذرے گی۔ یہ نوٹ کیا جاسکتا ہے کہ ہوا کے اجزا کی حرکت، لہر کی اشاعت کی سمت کے متوازی ہے۔ ایسی حرکت طولی (Longitudinal) کہلاتی ہے اوراس لیے پیدا ہوئی لہر طولی لہر کہلاتی ہے۔ ہوا میں پیدا ہونے والی آواز کی لہریں، ایسی ہی دباؤ لہریں ہیں، اوراس لیے طولی خاصیت کی ہیں۔

مختصراً، عرضی لہروں میں واسطے کے اجزائے ترکیبی، لہر کی اشاعت کی سمت کی عمودی سمت میں اہتزاز کرتے ہیں اور طولی لہروں میں وہ لہر کی اشاعت کی سمت میں اہتزاز کرتے ہیں۔

ایک لہر، چاہے عرضی ہو یا طولی، رواں (travelling or progressive) لہر کہلاتی ہے، اگر وہ واسطے میں ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک جاتی ہے۔ ایک رواں لہر اور ایک مقیم (standing or stationary) لہر میں فرق کرنا ہوگا۔ (دیکھیے حصہ 15.7)۔ شکل 15.3 میں عرضی لہریں ڈوری کے ایک سرے سے دوسرے تک جاتی ہیں، جب کہ 15.4 میں طولی لہریں پائپ کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک جاتی ہیں۔ ہم پھر نوٹ کرتے ہیں کہ دونوں صورتوں میں، یہ لہر خلل ہے جو ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے، وہ مادہ نہیں جس میں لہر سے اشاعت ہوتی ہے۔

عرضی لہروں میں ذرات کی حرکت، لہر کی اشاعت کی سمت کی عمودی سمت میں ہوتی ہے۔ اس لیے جیسے جیسے لہر آگے بڑھتی ہے، واسطہ کے ہر جز میں ایک تحریفی بگاڑ (Shearing Strain) پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے عرضی لہروں کی صرف انہیں واسطوں میں اشاعت ہو سکتی ہے جو تحریفی ذرر (Shearing Stress) کو برداشت کر سکتے ہیں، جیسے ٹھوس اشیاء میں اور سیالوں میں نہیں۔ سیال اور ٹھوس اشیاء دابی بگاڑ (Compressive Strain) کو برداشت کر سکتی ہیں، اس لیے طولی موجیں ہر لچکیلے واسطے میں سے گذر سکتی ہیں۔ مثلاً ایک فولاد کی چھڑ کو اگر بہ طور واسطہ لیا جائے تو اس میں سے طولی اور عرضی دونوں لہریں گذر سکتی ہیں جب کہ ہوا صرف طولی موجوں کو برقرار رکھ سکتی ہے۔ پانی کی سطح پر پیدا ہونے والی لہریں دو قسم کی ہوتی ہیں: شعری (Capillary) لہریں اور زمینی کشش لہریں (gravity waves) اول الذکر، کافی کم طولِ لہر، چند سینٹی میٹر سے زیادہ نہیں، کے حلقے (Ripple) ہیں اور بحالی قوت جو انہیں پیدا کرتی ہے، وہ پانی کا سطحی تناؤ ہے۔ زمینی کشش لہر کی طول لہر کئی میٹر سے لے کر کئی سو میٹر تک کی سعت میں ہو سکتی ہے۔ انہیں پیدا کرنے والی بحالی قوت ہے زمینی کشش کا کھنچاؤ جو پانی کی سطح کو اس کی کم ترین اونچائی پر رکھتا ہے۔ ان لہروں میں ذرات کے اہتزاز صرف سطح تک ہی محدود نہیں ہوتے بلکہ کم ہوتی ہوئی سعت کے ساتھ، پیندے تک پہنچتے ہیں۔ پانی کی لہروں میں، ذرات کی حرکت پیچیدہ ہوتی ہے: یہ صرف اوپر نیچے ہی حرکت نہیں کرتے بلکہ آگے۔ پیچھے بھی حرکت کرتے ہی۔ ایک سمندر میں اٹھنے والی موجیں (لہریں)، طولی اور عرضی، دونوں قسم کی لہروں کا مجموعہ ہیں۔ سُمانی لہریں اِن کی مثال ہیں۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ عام طور سے عرضی اور طولی لہریں یکساں واسطے میں سے مختلف چالوں سے گذرتی ہیں۔

مثال 15.1: نیچے لہری حرکت کی کچھ مثالیں دی گئی ہیں۔ ہر دی ہوئی صورت میں بتائیے کہ لہری حرکت، عرضی ہے، طولی ہے یا دونوں کا مجموعہ ہے۔

(a) ایک طولی اسپرنگ میں اسپرنگ کے ایک سرے کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے سے پیدا ہونے والے پیچ کی حرکت۔

(b) ایک رقیق سے بھرے استوانے میں، اس کے پسٹن کو آگے پیچھے حرکت دینے سے پیدا ہونے والی لہریں۔

(c) پانی میں تیرتی ہوئی موٹر بوٹ کے ذریعے پیدا کی گئی لہریں۔

(d) ایک ارتعاش کرتے ہوئے کوارٹز کے قلم (Crystal) کے ذریعے ہوا میں پیدا کی گئی بالاصوتی لہریں۔

جواب

(a) عرضی اور طولی

(b) طولی

(c) عرضی اور طولی

(d) طولی

15.3 ایک رواں لہر میں نقل کا رشتہ (DISPLACEMENT RELATION IN A PROGRESSIVE WAVE)

ایک واسطے میں ایک لہر کی حرکت (اور واسطے کے کسی جز ترکیبی کی حرکت) کو بیان کرنے کے لیے، ہمیں ایک ایسے تفاعل کی ضرورت ہے جو وقت کی ہر ساعت پر، لہر کی مکمل طور پر شکل دے سکے۔ مثال کے طور پر، ایک ڈوری پر بنی لہر کو بیان کرنے کے لیے (اور اس کی لمبائی کے کسی جز کی حرکت کو بیان کرنے کے لیے) ہمیں ایک ایسے رشتے کی ضرورت ہے جو ایک مخصوص مقام پر ایک جز کے نقل کو بہ طور تفاعل وقت بیان کر سکے اور ساتھ ہی، دی ہوئی ساعت وقت پر ڈوری کی لمبائی کے مختلف عناصر کے ارتعاش کی حالت بھی بیان کر سکے۔ ایک سائن خم نما لہر کے لیے، جیسا شکل (15.3) میں دکھایا گیا ہے، یہ تفاعل، مکاں (Space) اور زماں (وقت Time) دونوں میں دوری ہونا چاہیے۔ فرض کیجیے، $y(x,t)$، مقام x اور وقت t پر جزء کا عرضی نقل ظاہر کرتا ہے۔ جیسے جیسے لہر، ڈوری کے بعد کے جزوں سے گذرتی ہے، یہ جزء y– محور کے متوازی اہتزاز کرتے ہیں۔ کسی بھی دیے ہوئے وقت t پر مقام x کے جز کا نقل y دیا جاتا ہے:

$$y\,(x,t)=a\sin\,(kx-\omega t+\phi) \qquad (15.2)$$

اسی طرح cosine تفاعل یا Sine اور Cosine تفاعلات کا ایک خطی مجموعہ بھی لیا جا سکتا ہے۔

جیسے: $y\,(x,t)=A\sin(kx-\omega t)+B\cos(kx-\omega t), \qquad (15.3)$

تب مساوات (15.2) میں

$$a=\sqrt{A^2+B^2}\;,\;\phi=\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

مساوات (15.2) میں ظاہر کیا گیا تفاعل مقام کو آرڈی نیٹ x اور وقت t میں دوری ہے۔ یہ x– محور پر ایک عرضی لہر کو ظاہر کرتا ہے۔ کسی بھی وقت t پر لہر کی شکل بتاتا ہے اور ظاہر کرتا ہے کہ لہر کیسے آگے بڑھتی ہے۔ مساوات (15.2) میں دیے ہوئے جیسے تفاعل، x– محور کی مثبت سمت میں حرکت کر رہی ایک رواں لہر (Progressive wave) کو ظاہر کرتے ہیں۔

دوسری طرف ایک تفاعل:

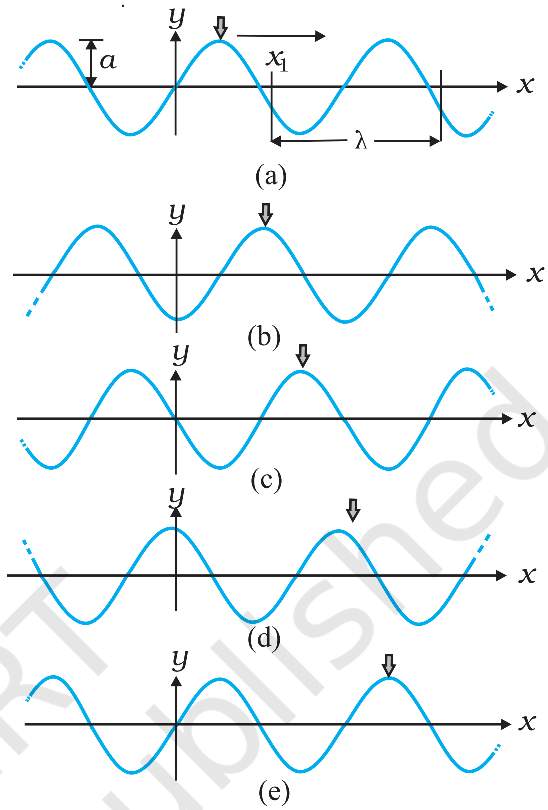
$$y\,(x,t)=a\sin\,(kx+\omega t-\phi) \qquad (15.4)$$

x– محور کی منفی سمت میں حرکت کر رہی لہر کو ظاہر کرتا ہے (دیکھیے حصہ 15.4)۔ مساوات (15.2) میں چار مقداروں (پیرامیٹروں) a، ϕ، ω اور w کا سیٹ، ایک ہارمونی لہر کو مکمل طور پر ظاہر کرتا ہے۔ ان پیرامیٹروں کے نام شکل 15.5 میں دکھائے گئے ہیں۔ اور بعد میں ان کی تعریف کی گئی ہے۔

$$\overbrace{y\,(x,t)}^{\text{نقل}} = \overbrace{a}^{\text{سعت}}\;\overbrace{\sin(\underbrace{kx}_{\text{زاوئی لہر عدد}} - \underbrace{\omega t}_{\text{زاوئی تعدد}} + \underbrace{\phi}_{\text{آغازی فیز زاویہ}})}^{\text{فیز}}$$

شکل 15.5: ایک رواں لہر کے لیے، مساوات (15.2) کی مقداروں کے نام

مساوات (15.2) کی مقداروں کی سمجھنے کے لیے، آیئے شکل 15.6 میں دکھائے گئے گراف دیکھیں۔ یہ وقت t کی 5 مختلف قدروں کے لیے مساوات (15.2) کے گراف ہیں، جبکہ لہر x– محور کی مثبت سمت میں حرکت رہی ہے۔ ایک لہر پر، از حد مثبت نقل کا نقطہ، جس کی تیر کے نشان کے ذریعے



شکل 15.6: ایک x-محور کی مثبت سمت میں حرکت کرتی ہوئی لہر کے لیے، وقت t کی 5 مختلف قدروں پر، مساوات (15.2) کے گراف

نشان دہی کی گئی ہے، فراز (Crest) کہلاتا ہے اور ازحد منفی نقل کا نقطہ نشیب (Trough) کہلاتا ہے۔ لہر کے آگے بڑھنے کی نشاندہی لہر کے فراز پر بنائے گئے چھوٹے تیر کی دائیں طرف حرکت کے ذریعے کی گئی ہے۔ جیسے جیسے ہم ایک گراف سے دوسرے گراف پر جاتے ہیں، مختصر تیر، لہر شکل کے ساتھ دائیں طرف حرکت کرتا ہے لیکن ڈوری صرف y- محور کے متوازی حرکت کرتی ہے۔ یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ ہم جیسے جیسے گراف (a) سے (e) کی طرف بڑھتے ہیں، ڈوری کا ایک مخصوص جز، تبدیلیوں کے ایک مکمل سائیکل سے گذرتا ہے یا ایک پورا اہتزاز مکمل کرتا ہے۔ اس وقفہ وقت کے دوران، مختصر تیر کے نشان یا لہر نے x- محور پر ایک خصوصی فاصلہ طے کیا ہے۔

اب ہم مندرجہ بالا 5 گرافوں کے تناظر میں، مساوات (15.2) کی مختلف مقداروں کی، جو شکل 15.5 میں دکھائی گئی ہیں، تعریف کرتے ہیں۔

15.3.1 سعت اور فیز (Amplitude & Phase)

شکل 15.5 یا شکل 15.6 میں دکھائی گئی جیسی لہر کی سعت 'a' اجزا کے مقامات توازن سے ازحد نقل کی عددی قدر ہے جو لہر کے ان پر سے گذرنے میں ہوتا ہے۔ اسے شکل (a)15.6 میں دکھایا گیا ہے۔ کیونکہ a ایک عددی قدر ہے، یہ ایک مثبت مقدار ہے، چاہے نقل منفی بھی ہو۔

لہر کا فیز، مساوات (15.2) میں، اہتزازی رکن $\sin(kx-\omega t+\phi)$ کا حامل زاویہ $(kx-\omega t+\phi)$ ہے۔ یہ لہر کے ایک ڈوری کے جز پر ایک خاص مقام x سے گذرنے پر حرکت کی حالت بیان کرتا ہے۔ یہ وقت t کے ساتھ خطی طور پر تبدیل ہوتا ہے اور 1+ اور 1– کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ اس کی منتہائی مثبت قدر 1+ اس جز سے گذرتی ہوئی لہر کے فراز سے مطابقت رکھتی ہے، تب مقام x پر y کی قدر a ہے۔ اس کی منتہائی منفی قدر 1–، اس جز سے گذرتی ہوئی لہر کے نشیب سے مطابقت رکھتی ہے؛ تب مقام x پر y کی قدر (1–) ہے۔ اس طرح، سائن تفاعل اور ایک لہر کا تابع وقت فیز، ڈوری کے ایک جز کے اہتزاز سے مطابقت رکھتے ہیں اور لہر کی سعت سے جز کے نقل کی انتہائی قدروں کا تعین ہوتا ہے۔ مستقلہ ϕ، آغازی فیز زاویہ کہلاتا ہے۔ ϕ کی قدر جز کی آغازی $(t=0)$ نقل اور رفتار (فرض کیجیے $x=0$ پر) سے معلوم کی جاتی ہے۔

ہم مبدے $(x=0)$ اور آغازی ساعت $(t=0)$ کو ہمیشہ اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ $\phi=0$ ہو۔ اگر مساوات (15.2) میں $\phi=0$ رکھا جائے تو بھی مساوات کی عمومیت میں کوئی کمی نہیں آتی۔

15.3.2 طول لہر اور زاویائی لہر عدد (Wavelength and angular wave number)

ایک لہر کا طول لہر، لہر کی شکل کے لگاتار دہرائے جانے کے درمیان فاصلہ ہے (لہر کی اشاعت کی سمت کے متوازی)۔ یہ دو لگاتار نشیب یا فراز کے درمیان یا لہری حرکت کے یکساں فیز والے دو لگاتار نقطوں کے درمیان، کم ترین فاصلہ

ہے۔ ایک مخصوص طول لہر کی نشاندہی شکل (a)15.6 میں کی گئی ہے۔ جو t=0 اور ϕ=0 کے لیے مساوات (15.2) کی ترسیم (Plot) ہے ۔ اس صورت میں، مساوات (15.2) ہو جاتی ہے۔

$$y(x,0)=a\ \sin kx \qquad (15.5)$$

تعریف کے مطابق، اس طول موج کے دونوں سروں پر، نقل y یکساں ہے۔ یعنی کہ $x = x_1$ اور $x = x_1+\lambda$ پر، اس لیے مساوات (15.2) کے ذریعے

$$a\ \sin k\,x_1 = a \sin k\,(x_1+\lambda)$$
$$= a \sin (k\,x_1 + k\lambda)$$

یہ شرط صرف اسی وقت مطمئن ہو سکتی ہے جب

$$k\,\lambda = 2\pi n$$

جہاں، n=1,2,3...، کیونکہ λ کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ یکساں فیز والے نقطوں کے درمیان کم ترین فاصلہ ہے، اس لیے n=1 اور

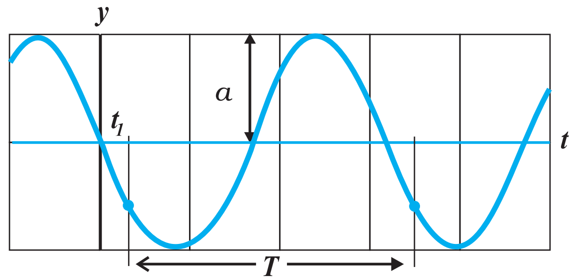
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (12.6)$$

k اشاعت مستقلہ (Propagation Constant) یا زاویائی لہر عدد کہلاتا ہے، اس کی SI اکائی ریڈین فی میٹر یا* ($rad\ m^{-1}$) ہے۔

یہ نوٹ کیا جا سکتا ہے کہ شکل (15.6) میں ہم جیسے جیسے ایک ترسیم سے دوسری ترسیم کی طرف جاتے ہیں، لہر اپنی دائیں طرف فاصلہ ¼λ سے حرکت کرتی ہے۔ اس لیے پانچویں ترسیم پر پہنچ کر، لہر دائیں طرف فاصلہ λ سے حرکت کر چکی ہے۔

15.3.3 دور، زاویائی تعدد اور تعدد (Period, angular frequency and frequency)

شکل 15.7 میں، مساوات (15.2) سے دیے جانے والے، نقل y برخلاف t گراف کو، ڈوری کے کسی مقام پر، جسے x=0 لیا گیا ہے، دکھایا گیا ہے، اگر



شکل 15.7: ڈوری کے جز کے نقل کا، **x=0** پر، بہ طور تفاعل وقت گراف، جب کہ شکل **14.6** کی سائن خم نما لہر اس جز سے گذرتی ہے۔ سعت **a** کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ایک بے قاعدہ وقت t_1 سے مخصوص دور **T** کی بھی نشاندہی کی گئی ہے۔

آپ ڈوری کی نگرانی کریں، تو آپ دیکھیں گے کہ اس مقام پر ڈوری جز، سادہ ہارمونی حرکت میں، اوپر نیچے حرکت کرتا ہے، جو x=0 کے ساتھ، مساوات (15.2) سے دی جاتی ہے۔

$$y\ (0,t)=a\ \sin(-\omega t)$$
$$=-a \sin \omega t$$

شکل (15.7) اس مساوات کا گراف ہے، یہ لہر کی شکل نہیں دکھاتا۔

ایک لہر کے اہتزاز کے دور T کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ کسی بھی ڈوری کے جز کے ذریعے ایک مکمل اہتزاز میں لیا گیا وقت ہے۔ شکل 15.7 میں ایک مخصوص دور کی نشاندہی کی گئی ہے۔ مساوات (15.2) کو اس وقفہ وقت کے دونوں سروں پر استعمال کرتے ہوئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$-a \sin \omega t = -a \sin \omega (t_1 + T)$$
$$= -a \sin (\omega t_1 + \omega T)$$

یہ تب صادق ہو سکتا ہے، جب ωt کی کم ترین قدر 2π ہو، یا اگر

$$\omega = 2\pi/T \qquad (15.7)$$

ω لہر کا زاویائی تعدد کہلاتا ہے۔ اس کی SI اکائی: $rad\ s^{-1}$ ہے۔

شکل 15.6 میں ایک رواں لہر کے گرافوں کو دوبارہ دیکھیے۔ دو لگا تار گرافوں کے درمیان وقفہ وقت T/4 ہے۔ اس لیے پانچویں گراف تک آتے آتے، ڈوری کا ہر جز ایک مکمل اہتزاز کر چکا ہے۔

* یہاں پر بھی ریڈین کو چھوڑا جا سکتا ہے اور اکائی صرف m^{-1} لکھی جا سکتی ہے۔ اس لیے k، 2π ضرب، ان لہروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے (یا کل فیز کے فرق کو) جو اکائی لمبائی میں سما سکتی ہے اس لیے SI اکائی m^{-1} ہے۔

ایک لہر کے تعدد کی تعریف بہ طور $\frac{1}{T}$ کی جاتی ہے اور اس کا زاویائی تعدد سے رشتہ ہے:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (15.8)$$

یہ ایک ڈوری کے جز کے ذریعے کیے گئے اہتزازات کی تعداد فی اکائی وقت ہے، جو کہ وہ جز اس سے لہر کے گذرنے کے دوران کرتا ہے۔ یہ عام طور سے ہرٹز میں ناپی جاتی ہے۔

اور پردی ہوئی بحث میں ڈوری پر سے گذرتی ہوئی لہر یا ایک عرضی لہر کا حوالہ دیا گیا ہے۔ ایک طولی لہر میں، واسطے کے ایک جز کا نقل، لہر کی اشاعت کی سمت کے متوازی ہوتا ہے۔ مساوات (15.2) میں، ایک طولی موج کے لیے نقل تفاعل لکھا جائے گا۔

$$s(x,t) = a\ \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.9)$$

جہاں $s(x,t)$، واسطے کے ایک جز کا، مقام x اور وقت t پر، لہر کی اشاعت کی سمت میں، نقل ہے۔ مساوات (15.9) میں a نقل کی سعت ہے، باقی مقداروں کے وہی معنی ہیں جو عرضی لہر کی صورت میں ہیں سوائے اس کے کہ نقل تفاعل $y(x,t)$ کی جگہ $s(x,t)$ ہے۔

مثال 15.2 : ایک ڈوری سے گذر رہی لہر، بیان کی جاتی ہے $y(x,t) = 0.005 \sin 80.0(x - 3.0t)$، جس میں عددی مستقلے SI اکائیوں میں ہیں۔ $(0.005\ \text{m}, 80.0\ \text{rad m}^{-1}, 3.0\ \text{rad s}^{-1})$۔
حساب لگائیے (a) لہر کی سعت (b) طول لہر (c) دور اور تعدد۔ اور $x = 30.0\text{cm}$، $t = 20\text{s}$ پر لہر کے نقل y کا بھی حساب لگائیے۔

جواب: اس نقل مساوات کا مساوات (15.2) سے مقابلہ کرنے پر:

$$y(x,t) = a\ \sin(kx - \omega t)$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے:

(a) $0.005\ \text{m} = 5\ \text{mm}$ = لہر کی سعت

(b) $\omega = 3.0\ \text{s}^{-1}$ زاویائی تعدد، $k = 80.0\ \text{m}^{-1}$ زاویائی لہر عدد

پھر ہم طول لہر λ اور k کے بیچ رشتہ، مساوات (15.6) سے لکھتے ہیں۔

$$\lambda = 2\pi/k = \frac{2\pi}{80.0\ \text{m}^{-1}} = 7.85\ \text{cm}$$

(c) اب T اور ω میں رشتہ لکھتے ہیں:

$$T = 2\pi/\omega = \frac{2\pi}{3.0\ \text{s}^{-1}} = 2.09\ \text{s}$$

اور

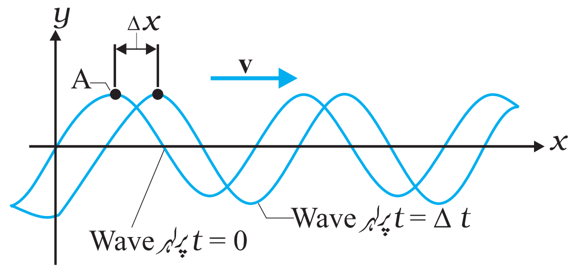
$$\upsilon = 1/T = 0.48\ \text{Hz}$$

$x = 30.0\ \text{cm}$ اور $t = 20\ \text{s}$ پر نقل y دیا جاتا ہے

$$\begin{aligned} y &= (0.005\ \text{m}) \sin(80.0 \times 0.3 - 3.0 \times 20) \\ &= (0.005\ \text{m}) \sin(-36 + 12\pi) \\ &= (0.005\ \text{m}) \sin(1.699) \\ &= (0.005\ \text{m}) \sin(97^0) \simeq 5\ \text{mm} \end{aligned}$$

15.4 ایک رواں لہر کی چال (THE SPEED OF A TRAVELLING WAVE)

آیئے ایک ڈوری پر سے گذرتی ہوئی لہر، جو مساوات (15.2) سے دی جاتی ہے، کی اشاعت کا معائنہ کریں۔ لہر x- کی مثبت سمت میں رواں ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ایک خاص مقام x پر ڈوری کا ایک جز، اوپر نیچے، بہ طور تفاعل وقت، حرکت کرتا ہے، لیکن لہر کی شکل دائیں جانب بڑھتی ہے۔ دو مختلف اوقات t اور $t+\Delta t$ پر جہاں Δt بہت چھوٹا ہے، ڈوری کے مختلف اجزا کا نقل، شکل 15.8 میں دکھایا گیا ہے۔ (فیز زاویہ ϕ، صفر لیا گیا ہے)۔ یہ دیکھنے میں آتا ہے کہ اس وقفہ وقت کے دوران مکمل لہر نمونہ، x کی مثبت سمت میں، ایک فاصلہ x سے حرکت کرتا ہے۔ اس لیے، لہر دائیں طرف حرکت کر رہی ہے۔ x کی مثبت سمت میں نسبت $\Delta x/\Delta t$، لہر کی چال υ ہے۔



شکل 15.8: مساوات (15.2) کے وقت کی دو ساعتوں، پہلے t=0 اور پھر t=Δt پر گراف، جن میں وقفہ Δt کا فرق ہے۔ جیسے لہر v سے دائیں طرف حرکت کرتی ہے پورا منحنی، Δt کے دوران فاصلہ Δt سے منتقل ہوتا ہے۔ نقطہ A، لہر پر سفر کرتا ہے، لیکن ڈوری کا جز صرف اوپر-نیچے حرکت کرتا ہے۔

جیسے لہر حرکت کرتی ہے۔ (شکل 15.8)، حرکت کرتی ہوئی لہر (گراف) کا ہر نقطہ، لہر کا ایک مخصوص فیز ظاہر کرتا ہے اور اپنے نقل y کو برقرار رکھتا ہے۔ یہ نوٹ کیا جا سکتا ہے کہ ڈوری کے نقطے اپنے نقل کو برقرار نہیں رکھتے جب کہ لہر کے نقطے برقرار رکھتے ہیں۔ آیئے ایک نقطہ جیسے A لیں، جس کی نشاندہی لہر کے فراز پر کی گئی ہے۔ اگر ایک نقطہ، جیسے A، حرکت کرتے ہوئے اپنے نقل کو برقرار رکھتا ہے تو مساوات (15.2) سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ یہ تب ہی ممکن ہے جب کہ حامل زاویہ مستقلہ ہے۔ اس لیے، یہ اخذ ہوتا ہے کہ

$$kx - \omega t = \text{مستقلہ} \qquad (15.10)$$

نوٹ کریں کہ حامل زاویہ میں x اور t دونوں تبدیل ہو رہے ہیں، اس لیے حامل زاویہ کو مستقلہ رکھنے کے لے اگر t بڑھتا ہے تو x کو بھی لازمی طور پر بڑھنا چاہیے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب لہر مثبت x-سمت میں حرکت کر رہی ہو۔

لہر رفتار υ معلوم کرنے کے لیے، ہم مساوات (15.10) کا t کی مناسبت سے تفرق (Differential) معلوم کرتے ہیں:

$$\frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0$$

یا

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

یا

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon \qquad (15.12)$$

مساوات (15.6) تا مساوات (15.8) استعمال کرتے ہوئے، ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \qquad (15.12)$$

مساوات (15.11) ایک عمومی رِشتہ ہے جو تمام رواں لہروں کے لیے جائز ہے۔ یہ صرف اتنا بیان کرتا ہے کہ لہر اہتزاز کے ایک دور میں ایک طول لہر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ لہر کی چال اس کی طولِ لہر اور تعدد سے مساوات (15.12) کے ذریعے منسلک ہے، لیکن اس کا تعین واسطے کی خاصیتوں کے ذریعے ہوتا ہے۔ اگر لہر ایک واسطے، جیسے ہوا، پانی، فولاد یا ایک تنی ہوئی ڈوری، سے گذرتی ہے تو اسے اس واسطے سے گذرتے ہوئے اس واسطے کے ذرات میں اہتزاز پیدا کرنا چاہیے۔ اس لیے واسطہ میں کمیت اور لچک ہونی ضروری ہے۔ اس لیے واسطے کی خطی کمیت کثافت (یا خطی نظاموں جیسے ایک تنی ہوئی ڈوری کے لیے کمیت فی اکائی لمبائی) اور لچکیلی خاصیتیں یہ متعین کرتی ہیں کہ لہر اس واسطے میں کتنی تیزی سے گذر سکتی ہے۔ اس کے برعکس، ان خاصیتوں کی شکل میں، واسطے میں لہر کی چال کا حساب لگانا ممکن ہونا چاہیے۔ اس باب کے آگے آنے والے تحت حصوں میں ہم کچھ مخصوص واسطوں میں میکانیکی لہروں کی رفتار کے لیے مخصوص ریاضیاتی عبارتیں حاصل کریں گے۔

15.4.1 ایک تنی ہوئی ڈوری پر ایک عرضی لہر کی چال (Speed of a Transverse wave on stretched string)

ایک ڈوری پر عرضی لہر کی چال دو عوامل پر منحصر ہے: (i) خطی کمیت کثافت یا کمیت فی اکائی لمبائی، μ اور (ii) تناؤ T۔ کمیت کی ضرورت اس لیے ہے تاکہ حرکی توانائی ہو اور تناؤ کے بغیر، ڈوری میں کسی خلل کی اشاعت ممکن نہیں ہے۔ ایک تنی ہوئی رسی پر لہر کی چال اور مندرجہ بالا دونوں عوامل میں رشتہ بالکل درست طور پر مشتق کرنا اس کتاب کے دائرہ سے باہر ہے۔ اس لیے ہم ایک

مقابلتاً سادہ طریقہ اپناتے ہیں۔ ابعادی تجزیہ میں ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ (باب 2) مختلف مقداروں کے درمیان، جو ایک دوسرے سے رشتہ رکھتی ہوں، رشتہ کیسے معلوم کیا جاتا ہے۔ اس طرح حاصل کیا گیا رشتہ، ایک مستقلہ جزضربی کی حد تک غیر متعین ہوگا۔

ایک ڈوری کی خطی کمیت کثافت، اس کی کمیت m کو اس کی لمبائی l سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوگی۔ اس لیے اس کے ابعاد $[ML^{-1}]$ ہیں۔ تناؤ T کے ابعاد قوت کے ابعاد ہیں، یعنی کہ $[MLT^{-2}]$۔ ہمارا مقصد μ اور T کو اس طرح یک جا کرنا ہے کہ v [ابعاد: $(L\ T^{-1})$] حاصل ہو سکے۔ اگر ہم ان مقداروں کے ابعاد کو جانچیں، تو یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ نسبت T/μ کے ابعاد ہیں۔

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2\ T^{-2}]$$

اس لیے، اگر v، T اور μ کے تابع ہے، تو ان کے درمیان رشتہ ہونا چاہیے:

$$v = C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.13)$$

یہاں C ایک غیر ابعادی مستقلہ ہے جو ابعادی تجزیہ سے حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ زیادہ سخت قاعدوں پر مبنی طریقہ اختیار کر کے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ C کی قدر واقعی 1 ہے۔ اس لیے، ایک تنی ہوئی رسی میں عرضی لہر کی چال ہے:

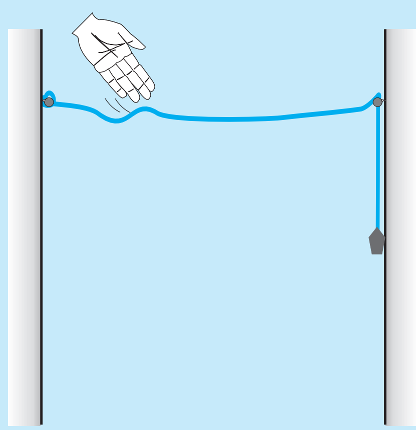
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.14)$$

مساوات (15.14) ہمیں بتاتی ہے

کہ کہ ایک تنی ہوئی مثالی ڈوری میں ایک لہر کی رفتار صرف ڈوری کے تناؤ اور اس کی خطی کمیت کثافت کے تابع ہے اور لہر کے تعدد کے تابع نہیں ہے۔

لہر کا تعدد اس وسیلے (Source) سے طے ہوتا ہے، جو لہر پیدا کرتا ہے، اور پھر طولِ لہر مساوات (15.12) کی اس شکل سے متعین ہوتی ہے:

ایک پلس کی ایک ڈوری پر اشاعت (Propagation of a pulse on a rope)



آپ ایک ڈوری پر ایک پلس کی حرکت بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں۔ آپ ایک استوار حد سے اس کا انعکاس ہوتا ہوا بھی دیکھ سکتے ہیں اور اس کے ڈوری پر سے گذرنے کی رفتار بھی ناپ سکتے ہیں۔ آپ کو، قطر 1 سے 3 سینٹی میٹر کی، ایک ڈوری دو ہک (Hooks) اور کچھ اوزان چاہیے ہوں گے۔ آپ اپنے کلاس روم یا تجربہ گاہ میں تجربہ کر سکتے ہیں۔

ایک لمبی رسّی یا موٹی ڈوری لیجیے (قطر 1 سے 3 سینٹی میٹر) اور ایک بڑے کمرے یا تجربہ گاہ کی آمنے سامنے کی دیواروں پر اسے ایک ہک سے باندھ دیجیے۔ ایک سرے کو ہک سے لٹکنے دیجیے اور اس سے کچھ وزن لٹکا دیجیے۔ (1 سے 5 کلوگرام تک)۔ دیواروں کے درمیان تقریباً 1 سے 5 میٹر کی دوری ہو۔

ایک چھڑ یا ڈنڈی لیجیے اور اسے رسی کے سرے کے قریب ایک نقطے پر زور سے ماریے۔ اس سے رسی میں ایک پلس پیدا ہوگی جو اس پر سے گذرے گی۔ آپ اسے دوسرے سرے تک پہنچتے اور وہاں سے واپس منعکس ہوتے دیکھ سکتے ہیں۔ آپ واقع پلس (Incident pluse) اور منعکس پلس (Reflected pulse) کے درمیان فیز رشتے کی جانچ بھی کر سکتے ہیں۔ پلس ختم ہونے سے پہلے آپ بہ آسانی دو یا تین انعکاس دیکھ سکتے ہیں۔ آپ ایک اسٹاپ واچ کی مدد سے پلس کو دو دیواروں کا درمیانی فاصلہ طے کرنے میں لگنے والا وقت بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ اور اس طرح اس کی رفتار ناپ سکتے ہیں۔ اس کا مقابلہ مساوات (15.14) سے حاصل ہوئی قدر سے کیجیے۔

ایک آلہ موسیقی کے باریک دھاتی تار میں بھی یہی ہوتا ہے۔ بڑا فرق یہ ہے کہ یہاں (دھاتی تار) پر رفتار کافی تیز ہوتی ہے کیونکہ ایک موٹی رسی کے مقابلے میں اس کی کمیت فی اکائی لمبائی کم ہوتی ہے۔ موٹی رسی پر پلس کی رفتار کم ہونے کی وجہ سے ہم اس کی حرکت کو بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں اور پیائش کر سکتے ہیں۔

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} \qquad (15.15)$$

مثال 15.3: فولاد کے بنے 0.72m تار کی کمیت 5.0×10^{-3} kg ہے۔ اگر تار 60N کے ایک تناؤ کے زیر اثر ہے، تو اس تار پر گذر رہی عرضی لہر کی رفتار کیا ہوگی؟

جواب: تار کی کمیت فی اکائی لمبائی μ:

$$\mu = \frac{5.0\times10^{-3}\ \text{kg}}{0.72\ \text{m}}$$

$$= 6.9\times10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}$$

$$T = 60\ \text{N}$$

تار سے گذر رہی لہر کی رفتار v دی جاتی ہے:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60\ \text{N}}{6.9\times10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}}} = 93\ \text{m s}^{-1}$$

15.4.2 ایک طولی لہر کی رفتار۔ آواز کی لہر کی رفتار

Speed of a longitudinal wave speed of sound

ایک طولی لہر میں واسطے کے اجزائے ترکیبی، آگے پیچھے، لہر کی اشاعت کی سمت میں اہتزاز کرتے ہیں۔ ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ آواز کی لہریں، ہوا کے چھوٹے جموں کے دابوں اور تلطیفات (Compressions and rarefactions) کی شکل میں سفر کرتی ہیں۔ وہ خاصیت، جو یہ متعین کرتی ہے کہ واسطے کے ایک جز پر دباؤ کی تبدیلی سے اس جز کے حجم میں کتنی تبدیلی ہوگی، حجم مقیاس (Bulk modulus) کہلاتی ہے۔ جس کی تعریف ہے (دیکھیے باب 9)

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad ...(15.16)$$

جہاں $\Delta V/V$، دباؤ تبدیلی ΔP کے ذریعے ہونے والی، حجم میں کسری تبدیلی ہے۔ دباؤ کی SI اکائی Nm^{-2} یا پاسکل ہے۔ اب کیونکہ طولی لہریں، ایک واسطے میں، دابوں اور تلطیفات یا کثافت میں تبدیلی کی شکل میں حرکت کرتی ہیں اس لیے واسطے کی اندرونی خاصیت جو اس عمل میں شامل ہوسکتی ہے، وہ ہے کثافت ρ۔ کثافت کے ابعاد $[\text{ML}^{-3}]$ ہیں۔ اس لیے نسبت B/ρ کے ابعاد ہیں

$$\frac{\left[\text{M L}^{-1}\ \text{T}^{-2}\right]}{\left[\text{M L}^{-3}\right]} = \left[\text{L}^2\ \ \text{T}^{-2}\right] \qquad (15.17)$$

اس لیے، ابعادی تجزیے کی بنیاد پر، ایک واسطے میں طولی لہر کی رفتار کے لیے، مناسب ترین ریاضیاتی عبارت ہے:

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (15.18)$$

جہاں C ایک غیر ابعادی مستقلہ ہے اور یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اس کی قدر 1 ہے۔ اس لیے، ایک واسطے میں طولی لہروں کی رفتار دی جاتی ہے:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (15.19)$$

اس لیے، ایک سیال میں، ایک طولی لہر کی اشاعت کی رفتار صرف واسطے کے حجم مقیاس اور اس کی کثافت کے تابع ہے۔

جب ایک ٹھوس چھڑ کے سرے پر ایک چوٹ لگائی جاتی ہے تو صورت حال، مستقلہ تراشی رقبے کے استوانے (یا ٹیوب) میں رکھے ہوئے سیال سے مختلف ہوتی ہے۔ اس صورت میں، لچک کا متعلقہ مقیاس، ینگ کا مقیاس ہے، کیونکہ اطراف میں ہونے والی، چھڑ کی توسیع نظر انداز کی جاسکتی ہے اور صرف طولی بگاڑ ہی قابل لحاظ ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ایک چھڑ میں طولی موج کی رفتار ہے:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (15.20)$$

جہاں Y چھڑ کے میٹیریل کا ینگ کا مقیاس ہے۔

جدول 15.1 میں مختلف واسطوں میں آواز کی رفتار دی گئی ہے۔

جدول 15.1 کچھ واسطوں میں آواز کی رفتار

واسطہ	رفتار (ms^{-1})
گیسیں	
ہوا (0°C)	331
ہوا (20°C)	343
ہیلیم	965
ہائیڈروجن	1484
رقیق اشیا	
پانی (0°C)	1402
پانی (20°C)	1482
سمندر کا پانی	1522
ٹھوس اشیا	
المونیم	6420
تانبہ	3560
فولاد	5941
گرینائٹ	6000
ولکائی ہوئی (Vulcanised) ربر (Rubber)	54

یہ نوٹ کیا جا سکتا ہے کہ حالانکہ ٹھوس اور رقیق اشیاء کی کثافتیں، گیسوں کے مقابلے میں بہت زیادہ ہوتی ہیں، پھر بھی ان میں آواز کی رفتار، گیسوں میں آواز کی رفتار سے زیادہ ہوتی ہے۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کیونکہ ٹھوس اور رقیق اشیاء گیسوں کے مقابلے میں کم داب پذیر ہیں، یعنی ان کے حجم مقیاس کی قدر، گیسوں کے مقابلے میں بہت زیادہ ہوتی ہے۔ اب دیکھیے مساوات (15.19) ٹھوس اور مائع اشیاء کی کمیت کثافتیں، گیسوں کے مقابلے میں زیادہ ہوتی ہیں، لیکن حجم مقیاس میں متطابق اضافہ، ٹھوس اور مائع اشیاء میں گیسوں کے مقابلے میں کہیں زیادہ ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ آواز کی لہریں گیسوں کے مقابلے میں ٹھوس اور مائع واسطوں میں زیادہ رفتار سے سفر کرتی ہیں۔

ایک کامل گیس کے لیے دباؤ، P اور حجم V میں رشتہ ہے (دیکھیے باب 11)

$$PV = Nk_BT \qquad (15.21)$$

جہاں N، حجم V میں مالیکیولوں کی تعداد، k_B بولٹز مین مستقلہ، اور

T گیس کا درجہ حرارت (کیلون میں) ہے۔

اس لیے مساوات (15.21) سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ایک ہم تاپی تبدیلی کے لیے

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

یا

$$-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$$

اس لیے، مساوات (15.16) میں رکھنے پر،

$$B = P$$

اس لیے، مساوات (15.19) سے، ایک کامل گیس میں، طولی لہر کی رفتار دی جاتی ہے:

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (15.22)$$

یہ رشتہ سب سے پہلے نیوٹن نے دیا تھا، اس لیے نیوٹن کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

مثال 15.4: معیاری دباؤ اور درجہ حرارت پر، ہوا میں آواز کی رفتار کا تخمینہ لگائیے۔ ہوا کے ایک مول کی کمیت 29.0×10^{-3} kg ہے۔

جواب: ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی گیس کے ایک مول کا S.T.P. پر حجم 22.4 لیٹر ہوتا ہے۔ اس لیے STP پر ہوا کی کثافت δ_o ہے۔

$\delta_o =$ STP پر ہوا کے ایک مول کا حجم

$$\text{ہوا کے ایک مول کی کمیت} = \frac{29.0\times10^{-3}\ \text{kg}}{22.4\times10^{-3}\ \text{m}^3}$$

$$= 1.29\ \text{kg m}^{-3}$$

ایک وسیلے میں آواز کی رفتار کے نیوٹن کے فارمولے کے مطابق، ہم ہوا میں STP پر آواز کی رفتار حاصل کرتے ہیں:

$$v = \left[\frac{1.01\times10^5\ \text{N m}^{-2}}{1.29\ \text{kg m}^{-3}}\right]^{1/2} = 280\ \text{ms}^{-1} \qquad (15.23)$$

مساوات (15.23) میں دکھایا گیا نتیجہ، تجرباتی قدر $331\ \text{m s}^{-1}$، جو جدول 15.1 میں دی گئی ہے، کے مقابلے میں تقریباً 15% کم ہے۔ ہم نے کہاں غلطی کی؟ اگر ہم نیوٹن کے بنیادی مفروضے، ایک واسطے میں آواز کی اشاعت کے دوران ہونے والی دباؤ کی تبدیلیاں، ہم تاپ ہیں، کو جانچیں تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ مفروضہ درست نہیں ہے۔ لیپلیس (Laplace) نے یہ نشاندہی معلوم کی کیوں کہ آواز کی لہروں کی اشاعت کے دوران ہونے والے دباؤ

کے تغیرات اتنے تیز رفتار ہوتے ہیں کہ حرارت کے بہاؤ کو مستقلہ درجۂ حرارت برقرار رکھنے کے لیے ملنے والا وقت ناکافی ہوتا ہے۔ اس لیے، یہ تغیرات حرنا گزار ہیں۔ حرنا گزار طریق کے لیے کامل گیس مساوات ہے

$$PV^{\gamma} = \text{مستقلہ}$$

یعنی کہ

$$\Delta PV^{\gamma} = 0$$

جہاں γ، نوعی حرارتوں کی نسبت C_p/C_v ہے۔ اس لیے ہوا کی رفتار مساوات (15.19) سے دی جاتی ہے:

$$P^{\gamma}\, V^{\gamma-1}\Delta V + V^{\gamma}\Delta P = 0$$

اس لیے ایک کامل گیس کے لیے حرنا گزار حجم مقیاس دیا جاتا ہے

$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

$$= \gamma P$$

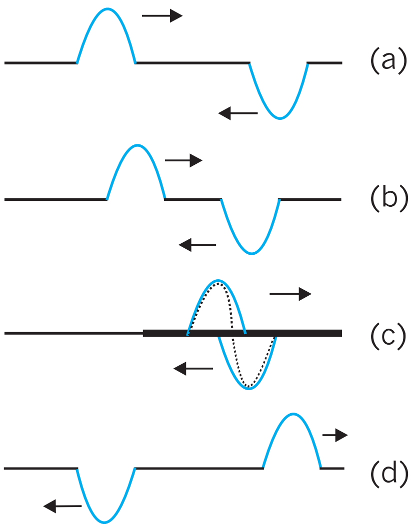
$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (15\text{-}24)$$

نیوٹن کے فارمولے کی یہ ترمیم لیپلیس تصحیح (Laplace correction) کہلاتی ہے۔ ہوا کے لیے، γ=7/5۔ اب مساوات (15.24) کے ذریعے ہوا میں، STP پر آواز کی رفتار کا تخمینہ لگانے پر، ہمیں قدر $331.3\,ms^{-1}$ حاصل ہوتی ہے، جو تجربہ کے ذریعے معلوم کی گئی قدر سے مطابقت رکھتی ہے۔

15.5 لہروں کے انطباق کا اصول

(THE PRINCIPLE OF SUPERPOSITION OF WAVES)

ہم دو ایسی لہریں تصور کرتے ہیں جو ایک ہی تنی ہوئی ڈوری پر مختلف سمتوں میں، ہمہ وقت (Simultaneously) حرکت کر رہی ہیں۔ شکل 15.9 میں دکھایا گیا تصویروں کا ترتیب وار سلسلہ، ڈوری کے مختلف اجزا کی، وقت کی مختلف ساعتوں پر نقل کی حالتوں کو ظاہر کرتا ہے۔ ہر تصویر ایک دی ہوئی ساعت وقت پر، ڈوری میں، ماحصل لہر شکل کو ظاہر کرتی ہے۔ مشاہدہ یہ بتاتا ہے کہ دیے ہوئے لمحہ وقت پر ڈوری کے کسی بھی جز کا کل نقل (Net displacement)، ہر لہر کی وجہ سے ہونے والے انفرادی نقل کا الجبرائی حاصل جمع (Algebraiscum) ہے۔ انفرادی لہری شکلوں کو اس طرح جوڑ کر کل لہر شکل معلوم کرنے کا یہ طریقہ



شکل 15.9: تصویروں کا ایک ترتیب وار سلسلہ، جو ایک تنی ہوئی ڈوری پر دو پلسوں کو مخالف سمت میں گذرتے ہوئے دکھاتا ہے۔ وہ ایک دوسرے سے ملتی ہیں، ایک دوسرے میں سے گذرتی ہیں اور پھر انفرادی طور پر آزادانہ حرکت کرتی ہیں، جیسا کہ مختلف وقتوں پر لیے گئے فوری فوٹو (a) سے (d) تک کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔ کل خلل، ہر لہر کی وجہ سے ہونے والے انفرادی نقل کا الجبریائی حاصل جمع ہے۔ جب دونوں خلل ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں تو وہ ایک پیچیدہ نمونہ دیتے ہیں، جیسا کہ شکل (c) میں دکھایا گیا ہے۔ علاقہ (d) میں ایک دوسرے سے گذر چکے ہیں اور اب بنا تبدیل ہوئے حرکت کرتے ہیں۔

انطباق کا اصول (Principle of superposition) کہلاتا ہے۔ اس قاعدے کو ریاضیاتی شکل میں لکھنے کے لیے، فرض کیجیے کہ $y_1(x, t)$ اور $y_2(x, t)$ وہ نقل ہیں جو ڈوری کے کسی بھی جز میں ہوتے ہیں اگر ہر لہر اس جز میں سے انفرادی طور پر گذر رہی ہوتی۔ اس جز کا نقل $y(x,t)$، جو دونوں لہروں کے ایک دوسرے پر منطبق (Overlap) ہونے کی وجہ سے ہوتا ہے، دیا جاتا ہے:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \qquad (15.25)$$

انطباق کا اصول ایسے بھی بیان کیا جا سکتا ہے: منطبق لہریں، الجبرائی طور پر جمع ہوتی ہیں اور ایک ماحصل لہر (Resultant wave) پیدا کرتی ہیں (یا کل لہر)۔ اس اصول کے معنی ہیں، کہ منطبق لہریں کسی بھی طرح سے ایک دوسرے کی حرکت کو تبدیل نہیں کرتیں۔

اگر ہمارے پاس ایک واسطے میں دو یا دو سے زیادہ حرکت کرتی ہوئی لہریں ہیں تو ماحصل لہر، انفرادی لہروں کے لہر تفاعلات کا حاصل جمع ہے۔ یعنی کہ اگر حرکت کرتی ہوئی لہروں کے لہر تفاعلات ہیں۔

$$y_1 = f_1(x - vt),$$
$$y_2 = f_2(x - vt),$$
$$..........$$
$$..........$$
$$y_n = f_n(x - vt)$$

تب واسطے میں، خلل کو بیان کرنے والا لہر تفاعل ہے:

$$y = f_1(x-vt) + f_2(x-vt) + \ldots + f_n(x-vt)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x - vt) \qquad (15.26)$$

اس اصول کی وضاحتی مثال کے طور پر، ہم لہروں کے تداخل (Interference) اور انعکاس (Reflection) کے مظاہر کا مطالعہ کرتے ہیں۔

فرض کیجیے کہ ایک تنی ہوئی ڈوری پر حرکت کرتی ہوئی ایک لہر دی جاتی ہے:

$$y_1(x,t) = a \sin(kx - \omega t) \qquad (15.27)$$

اور دوسری لہر، جو پہلی لہر سے فیز ϕ سے ہٹی ہوئی ہے، دی جاتی ہے

$$y_2(x,t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.28)$$

دونوں لہروں کے زاویائی تواتر یکساں ہیں، زاویائی لہر عدد k یکساں ہیں (یکساں طول لہر) اور سعت a یکساں ہے۔ وہ یکساں چال سے x-محور کی مثبت سمت میں حرکت کرتی ہیں۔ ان کے فیز کا فرق ایک دیے ہوئے فاصلے اور ساعت وقت پر، ایک مستقلہ زاویہ ϕ ہے۔ یہ کہا جا سکتا ہے کہ وہ ϕ سے فیز کے باہر (out of phase) ہیں یا ان میں فیز ϕ کا فرق ہے۔

اب لہروں کے انطباق کا اصول استعمال کرنے پر، ماحصل لہر دونوں جز ترکیبی لہروں کا الجبرائی حاصل جمع ہے اور اس کا نقل ہے:

$$y(x,t) = a\sin(kx - \omega t) + a\sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.29)$$

اب ہم مندرجہ ذیل ٹرگنومیٹریائی رشتہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \qquad (15.30)$$

اس رشتہ کو مساوات (15.29)، میں استعمال کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$y(x,t) = [2a\cos\frac{1}{2}\phi]\sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi) \qquad (15.31)$$

مساوات (15.31) ظاہر کرتی ہے کہ ماحصل لہر بھی ایک سائن خم نما لہر ہے جو x- کی مثبت سمت میں حرکت کر رہی ہے۔

ماحصل لہر، جز ترکیبی لہروں سے دو طرح سے مختلف ہے۔ (i) اس کا فیز زاویہ $(½)\phi$ ہے (ii) اس کی سعت، مساوات (15.31) میں قوسین [ ] میں دی ہوئی مقدار ہے، یعنی کہ

$$A(\phi) = 2a\cos(½)\phi \ldots (15.32)$$

اگر $\phi = 0$ یعنی کہ دونوں لہریں فیز میں ہوں تو مساوات (15.31) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$A(u) = 2a;\ y(xt)\phi = 0 = 2a\sin(kx - \omega t) \qquad (15.33)$$

ماحصل لہر کی سعت $2a$ ہے، جو $A(\phi)$ کی سب سے بڑی ممکنہ قدر ہے۔

اگر $\phi = \pi$، تو دونوں لہریں مکمل طور پر فیز کے باہر ہیں تو مساوات (15.32) کے ذریعے دی گئی ماحصل لہر کی سعت کی قدر صفر ہو جاتی ہے۔

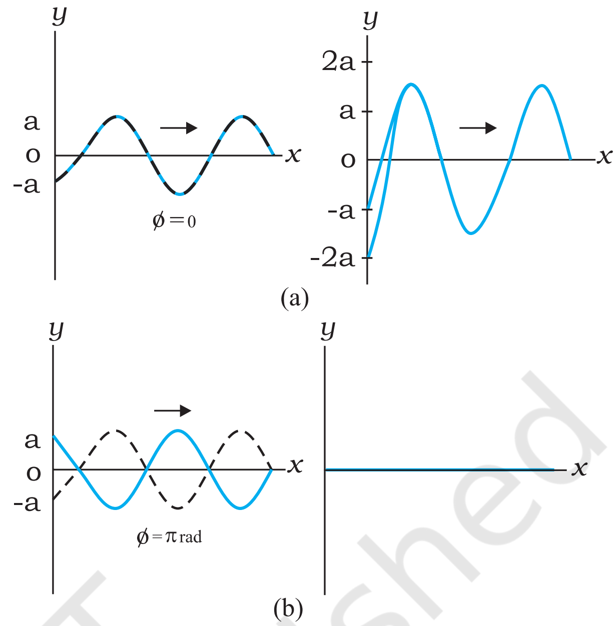
تب ہر x اور t کے لیے، ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$y(x,t) = 0 \qquad (15.34)$$

یہ صورتیں، شکل 15.10 میں دکھائی گئی ہیں۔

15.6 لہروں کا انعکاس (REFLECTION OF WAVES)

پچھلے حصوں میں ہم نے غیر سرحدی (Unbounded) واسطوں میں لہر کی اشاعت سے بحث کی ہے۔ کیا ہوگا، اگر ایک پلس یا رواں لہر ایک استوار حد



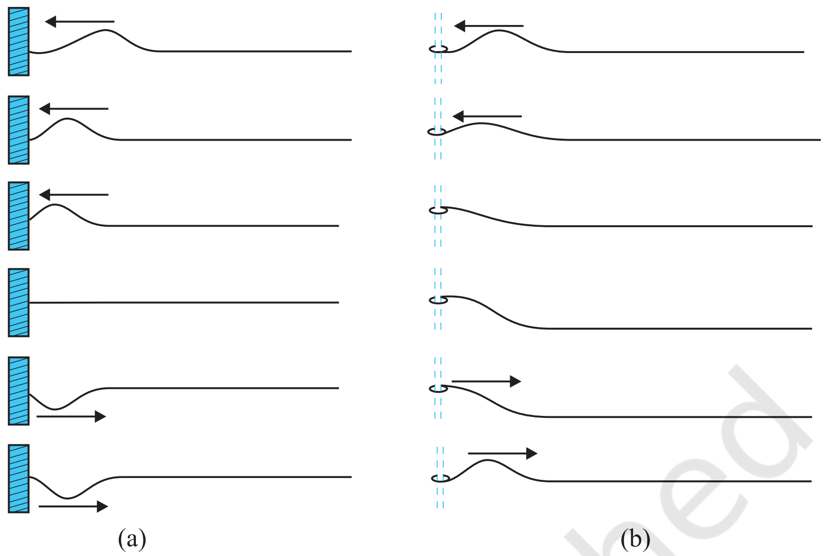
شکل 15.10: دو متماثل سائن خم نما لہریں ، $y_1(x, t)$ اور $y_2(x, t)$ ، ایک تنی ہوئی رسی پر، **x**-محور کی مثبت سمت میں، حرکت کرتی ہیں۔ وہ ایک ماحصل لہر **y(x,t)** دیتی ہیں۔ دونوں لہروں کے درمیان فیز فرق ہے: **0 (b), π (a)** یا **180o**۔ متطابق ماحصل لہریں **(C)** اور **(d)** میں دکھائی گئی ہیں۔

ایک سرحد پر، ایک لہر کے انعکاس کی وضاحت کرنے کے لیے ہم دو صورتیں لیتے ہیں۔ پہلی صورت: ایک ڈوری، جس کا بایاں سرا ایک استوار دیوار میں نصب ہے، جیسا کہ شکل (a)15.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اور دوسری صورت: ڈوری کا بایاں سرا ایک چھلے (ring) سے بندھا ہوا ہے جو ایک چھڑ پر، بنا کسی رگڑ کے، اوپر نیچے پھسلتا ہے، جیسا کہ شکل (b)15.11 میں دکھایا گیا ہے۔ ایک پلس کو ان دونوں ڈوریوں پر سے گذرنے دیا جاتا ہے۔ یہ پلس بائیں سرے پر پہنچنے پر منعکس ہو جاتی ہے۔ مختلف ساعتوں پر، ڈور میں خلل کی حالت، شکل 15.11 میں دکھائی گئی ہے۔

شکل (a)15.11 میں، ڈوری کا دایاں سرا دیوار میں نصب ہے، جب پلس اس سرے پر پہنچتی ہے تو وہ دیوار پر، اوپر کی جانب، ایک قوت لگاتی ہے۔ نیوٹن کے تیسرے قانون کے مطابق دیوار، ڈوری پر یکساں عددی قدر کی مخالفت قوت لگاتی ہے۔ یہ دوسری قوت سہارے (دیوار) پر ایک پلس پیدا کرتی ہے جو ڈوری پر سے واپس گذرتی ہے، یعنی کہ اس کی سمت واقع پلس کے سمت کی مخالف ہوتی ہے۔ اس قسم کے انعکاس میں، سہارے پر کوئی نقل نہیں ہونا چاہیے کیونکہ ڈوری وہاں نصب ہے۔ منعکس اور واقع پلسوں کی علامتیں مخالف ہونا ضروری ہیں، تا کہ اس نقطے پر ایک دوسرے کو منسوخ (Cancel) کر سکیں۔ اس لیے ایک رواں لہر کی صورت میں، ایک استوار سرحد پر ہونے والے انعکاس میں فیز الٹ جائے گا یا فیز فرق π یا 180° ہوگا۔

شکل (b)15.11 میں ڈوری ایک چھلے میں بندھی ہے، جو ایک چھڑ پر، بنا رگڑ کے، پھسلتا ہے۔ اس صورت میں، جب پلس بائیں سرے پر پہنچتی ہے، تو چھلا چھڑ میں اوپر حرکت کرتا ہے۔ جب چھلا حرکت کرتا ہے تو یہ رسی کو کھینچتا ہے، جس سے رسی میں تناؤ پیدا ہوتا ہے اور ایک منعکس پلس بنتی ہے، جس کی علامت اور سعت، واقع پلس کے یکساں ہوتے ہیں۔ اس لیے ایسے انعکاس میں، واقع اور منعکس پلسیں ایک دوسرے کو تقویت بخشتی ہیں، جس سے ڈوری کے سرے پر از حد نقل پیدا ہوتا ہے، چھلے کا از حد نقل، جو کسی ایک پلس کی سعت کا دگنا ہوتا ہے۔ اس لیے انعکاس بغیر کسی اضافی فیز تبدیلی کے ہوتا ہے۔ ایک رواں لہر کی صورت میں، ایک کھلی سرحد پر جیسے ایک آرگن پائپ کے کھلے سے ٹکرائے؟ یہ عام تجربہ ہے کہ اس صورت میں پلس یا لہر منعکس ہو جاتی ہے۔

آواز کی لہروں کے ایک استوار سرحد سے منعکس ہونے کی، روزمرہ کی ایک مثال، گونج (Echo) کا مظہر ہے۔ اگر سرحد مکمل طور پر استوار نہ ہو یا دو لچکیلے واسطوں کے درمیان بین رخ ہو، تو ان سرحدی شرائط (Boundary conditions) کا وقوعی پلس یا لہر (Incident pluse or wave) پر اثر کچھ پیچیدہ ہوتا ہے۔ لہر کا ایک حصہ منعکس ہو جاتا ہے اور ایک حصہ کی دوسرے واسطے میں ترسیل ہو جاتی ہے۔ اگر ایک لہر، دو مختلف واسطوں کی درمیانی سرحد پر ترچھی واقع (Obliquely incident) ہو تو ترسیل ہوئی لہر (transmitted wave) انعطافی لہر (Refracted wave) کہلاتی ہے ۔ واقع اور انعطاف لہریں، انعکاس کے اسنیل کے قانون (Snell's Law refraction) کی پابندی کرتی ہیں اور واقع اور انعکاسی لہریں، انعکاس کے عام قوانین کی پابندی کرتی ہیں۔



شکل 15.11: (a) ایک پلس جو دائیں سمت سے واقع ہے، ایک ڈوری کے بائیں سرے پر، جو دیوار میں بندھا ہے، منعکس ہوتی ہے۔ نوٹ کریں کہ منعکس پلس، واقع پلس کی مناسبت سے الٹی ہے۔ (b) یہاں بایاں سرا ایک ایسے چھلّے سے بندھا ہے جو ایک چھڑ پر، بنا کسی رگڑ کے، اوپر نیچے پھسل سکتا ہے۔ اب انعکاس کے ذریعے منعکس لہرالٹی نہیں ہوتی۔

ہوئے سرے پر، انعکاس بغیر کسی فیز تبدیلی کے ہوتا ہے۔

اب ہم، ایک سرحد یا دو واسطوں کے مابین رخ پر، لہروں کے انعکاس کا خلاصہ مندرجہ ذیل شکل میں پیش کر سکتے ہیں: ایک رواں لہر، ایک استوار سرحد یا ایک بند سرے پر، فیز کے الٹنے کے ساتھ منعکس ہوتی ہے۔ لیکن ایک کھلی سرحد پر انعکاس بغیر کسی فیز تبدیلی کے ساتھ ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا بیان کو ریاضیاتی شکل میں ظاہر کرنے کے لیے، فرض کیجیے کہ واقع لہر کو ظاہر کیا جاتا ہے

$$y^{i}(x,t) = a \sin(kx - \omega t)$$

تب، ایک استوار سرحد پر انعکاس کے لیے، منعکس لہر ظاہر کی جاتی ہے

$$y_r(x,t) = a \sin(kx + \omega t + \pi).$$

$$= -a \sin(kx + \omega t) \qquad (15.35)$$

ایک کھلی سرحد پر، منعکس لہر ظاہر کی جاتی ہے:

$$y_r(x,t) = a \sin(kx + \omega t). \qquad (15.26)$$

15.6.1 مقیم لہریں اور نارمل مُوڈ (Standing waves and normal modes)

پچھلے حصے میں ہم نے ایسا نظام لیا تھا جو ایک سرے پر مقید تھا۔ آیئے اب ایک ایسا نظام لیتے ہیں جو دونوں سروں پر مقید ہے، جیسے کہ دونوں سروں پر بندھی ہوئی رسی یا ایک متناہی لمبائی کا ہوا کا کالم ایک ایسے نظام میں ہم کسی خاص تعدد کی ایک لگاتار، سائن خم نما لہر بھیجتے ہیں، فرض کیجیے دائیں طرف۔ جب لہر دائیں سرے پر پہنچتی ہے تو یہ منعکس ہو جاتی ہے اور واپس لوٹنا شروع کر دیتی ہے۔ جب بائیں جانب جارہی لہر، بائیں سرے پر پہنچتی ہے تو یہ دوبارہ منعکس ہوتی ہے اور یہ نئی منعکس ہوئی لہر دائیں سمت حرکت کرنا شروع کرتی ہے، اور بائیں سمت جارہی لہر پر منطبق ہوتی ہے۔ یہ عمل جاری رہتا ہے اور اس لیے جلد ہی ہمیں بہت سی منطبق لہریں ملتی ہیں، جو ایک دوسرے سے تداخل کرتی ہیں۔ ایسے نظام میں کسی نقطہ پر، کسی وقت پر، ہمیشہ دو لہریں ہوتی ہے۔ ایک بائیں طرف حرکت کرتی ہوئی اور دوسری دائیں طرف۔ اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$y_1(x,t) = a \sin(kx - \omega t)$$ (x-محور کی مثبت سمت میں حرکت کرتی ہوئی لہر)

$$y_2(x,t) = a \sin(kx + \omega t)$$ (x-محور کی منفی سمت میں حرکت کرتی ہوئی لہر)

متحدہ (Combined) لہر کے لیے، انطباق کا اصول دیتا ہے:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$= a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx + \omega t)$$

$$= (2a \sin kx) \cos \omega t \qquad (15.37)$$

مساوات (15.37) کے ذریعے بیان کی گئی لہر، ایک رواں لہر کو نہیں ظاہر کرتی۔ کیونکہ لہر کی شکل یا خلل کسی طرف حرکت نہیں کرتا۔ یہاں مقدار: $2a \sin kx$ (قوسین کے اندر)، مقام x پر پائے جانے والے ڈوری کے

جز کے اہتزاز کی سعت ہے۔ اس کے برخلاف، ایک رواں لہر میں تمام اجزا کے لیے لہر یکساں ہوتی ہے۔ اس لیے مساوات (15.37) ایک مقیم لہر (Standing wave) کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک ایسی لہر جس میں لہر کی شکل حرکت نہیں کرتی۔ ایسی لہروں کی تشکیل شکل 15.12 میں دکھائی گئی ہے۔

یہ دیکھنے میں آتا ہے کہ بیش ترین اور کم ترین سعت کے نقاط ایک ہی مقام پر ٹھہرے رہتے ہیں۔

kx کی ان قدروں کے لیے سعت صفر ہے جو $\sin kx=0$ دیتی ہیں۔

یہ قدریں ہیں:

$$kx = n\pi, \quad (n=0,1,2,3,\ldots \text{ کے لیے})$$

اس مساوات میں $k=2\pi/\lambda$ رکھنے پر،

$$x=n\lambda/2 \ldots (n=0,1,2,3,\ldots \text{ کے لیے}) \qquad (15.38)$$

صفر سعت کے مقامات نوڈ (Nodes) کہلاتے ہیں۔ نوٹ کریں کہ دو لگاتار نوڈوں کے درمیان $\lambda/2$ یا نصف طول لہر کا فاصلہ ہوتا ہے۔

سعت کی بیش ترین قدر $2a$ ہے۔ یہ kx کی ان قدروں پر ہوتی ہے، جو $|\sin kx|=1$ دیتی ہیں۔

ایسی قدریں ہیں:

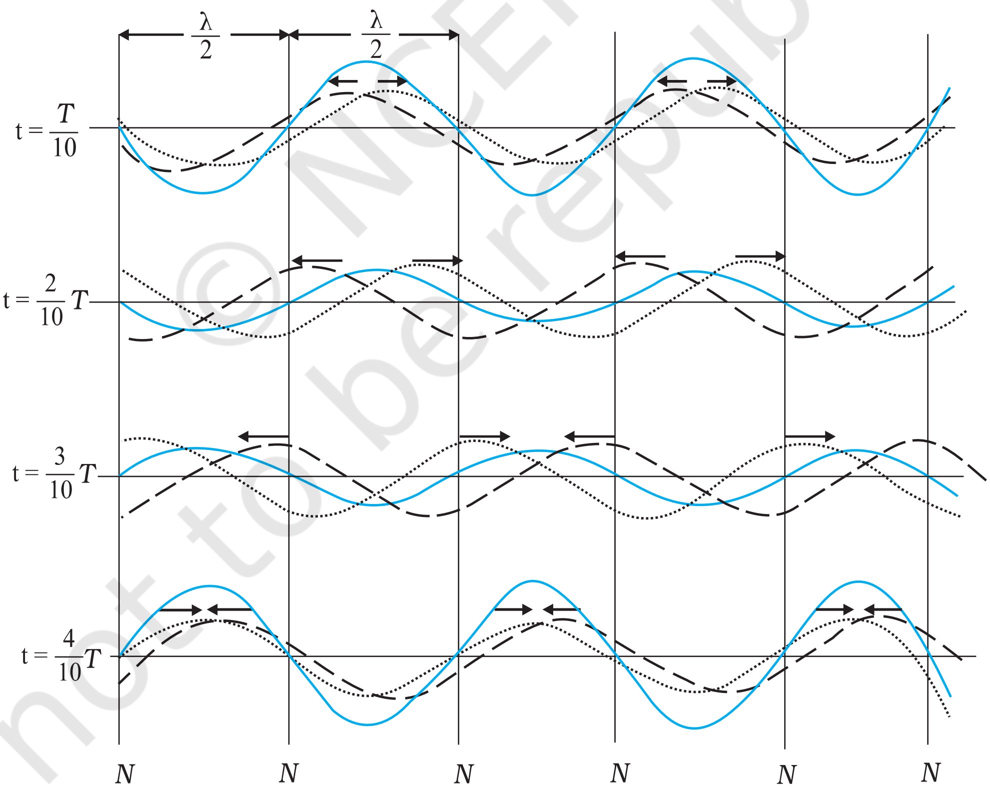
$$kx=(n+½)\,\pi \quad (n=0,1,2,3,\ldots \text{ کے لیے})$$

اس مساوات میں $\kappa = 2\pi/\lambda$ رکھنے پر، ہمیں از حد سعت کے مقام حاصل ہوتے ہیں:

$$x=(n+½)\frac{\lambda}{2} \quad (n=0,1,2,3,\ldots \text{ کے لیے}) \qquad (15.39)$$

یہ اینٹی نوڈ (ضد نوڈ Antinode) کہلاتے ہیں۔ اینٹی نوڈوں کے درمیان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلہ ہوتا ہے اور یہ نوڈوں کے جوڑے کے درمیان، ان کے وسطی نقطے پر ہوتے ہیں۔

ایک لمبائی L کی تنی ہوئی ڈوری کے لیے، جس کے دونوں سرے بندھے ہوئے



شکل 15.12: ایک تنی ہوئی ڈوری میں ایک مقیم لہر کا بننا۔ دو یکساں سعت کی سائن ضم نما لہریں، ڈوری پر مخالف سمتوں میں حرکت کرتی ہیں۔ تصویروں کا سیٹ، چار مختلف مقامات پر تقل کی حالت دکھاتا ہے۔ جن مقامات کی نشاندہی N کے ذریعے کی گئی ہے، ان مقامات پر تقل، وقت کی ہر قدر پر، صفر ہوتا ہے۔ یہ مقامات نوڈ کہلاتے ہیں۔

ہیں،ڈوری کے دونوں سرے نوڈ (Node) ہی ہونا چاہئیں۔اگر ہم ایک سرے کو مقام $x=0$ منتخب کر لیں۔تو دوسرا سرا $x=L$ ہے۔اس دوسرے سرے کو بھی نوڈ ہونے کے لیے ضروری ہے، کہ L مندرجہ ذیل شرط کو لازمی طور پر مطمئن کرے۔

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (n=1,2,3,... \text{ کے لیے}) \qquad (15.40)$$

یہ شرط ظاہر کرتی ہے کہ لمبائی L کی ایک ڈوری پر لہر کے طول لہر محدود ہوتے ہیں۔جو دیے جاتے ہیں۔

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (n=1,2,3,... \text{ وغیرہ کے لیے}) \qquad (15.41)$$

ان طول لہر کے متطابق تعدد، مساوات (15.12) سے حاصل ہوتے ہیں:

$$\nu = n\frac{v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, .. \text{ وغیرہ کے لیے}) \qquad (15.42)$$

جہاں v رواں لہروں کی ڈوری پر رفتار ہے۔مساوات (15.42) کے ذریعے دیا گیا تعدد کا سیٹ، نظام کے اہتزاز کے موڈ یا قدرتی تعدد کہلاتے ہیں۔یہ مساوات ہمیں بتاتی ہے کہ ایک ڈوری کے قدرتی تعدد، کم ترین تعدد، $\nu = \frac{v}{2L}$، کے صحیح عدد اضعاف (Integral multiples) ہیں، جو کہ n=1 سے مطابقت رکھتا ہے۔اس کم ترین تعدد والا اہتزاز موڈ، بنیادی موڈ (Fundamental Mode) یا پہلا ہارمونک (First Harmonic) کہلاتا ہے۔دوسرا ہارمونک، n=2 کے ساتھ اہتزاز موڈ ہے۔تیسرا ہارمونک n=3 سے مطابقت رکھتا ہے، اور اسی طرح اور آگے بھی۔ان موڈوں سے منسلک تعدد اکثر ν_1، ν_2، ν_3 (اور اسی طرح اور آگے) لیبل کیے جاتے ہیں۔تمام ممکنہ موڈوں کا مجموعہ ہارمونک سلسلہ (Harmonic series) کہلاتا ہے۔

دونوں سروں پر بندھی ، ایک تنی ہوئی ڈوری کے کچھ ہارمونک شکل 15.13 میں دکھائے گئے ہیں۔انطباق کے اصول کے مطابق ، دونوں سروں پر بندھی، تنی ہوئی رسی ، بہ یک وقت کئی موڈوں میں ارتعاش کر سکتی ہے۔کون سا موڈ زیادہ ارتعاش کرے گا، یہ اس پر منحصر ہے کہ ڈوری کے کس مقام پر ضرب لگائی گئی ہے۔ستار اور وائلن جیسے آلات موسیقی اسی اصول پر ڈیزائن کیے جاتے ہیں۔

اب ہم ایسے نظام کے ارتعاش کے موڈوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔ جو ایک سرے پر بند ہے، اور جس کا دوسرا سرا آزاد ہے۔ہوا کا کالم، جیسے جزوی طور پر پانی سے بھری ہوئی ٹیوب، ایسے نظاموں کی مثال ہے۔ان میں ہوا کے کالم کی لمبائی کو ٹیوب میں پانی کی سطح کو تبدیل کر کے، ضرورت کے مطابق کم یا زیادہ کیا جا سکتا ہے۔ایسے نظاموں میں، ہوا کے کالم کا وہ سرا جو پانی سے لمس میں ہوتا ہے، اس کا کوئی نقل نہیں ہوتا، کیونکہ وہاں منعکس اور واقع لہریں، بالکل درست طور پر، فیز کے باہر ہوتی ہیں۔اسی وجہ سے، یہاں پر دباؤ کی تبدیلیاں سب سے زیادہ ہوتی ہیں۔کیونکہ جب داب جز (Compressional part) منعکس ہوتا ہے تو دباؤ میں اضافہ دگنا ہو جاتا ہے اور جب تلطیف جز (Rarefaction part) منعکس ہوتا ہے تو دباؤ میں کمی دُگنی ہوتی ہے۔دوسری طرف، کھلے ہوئے سرے پر، از حد نقل اور کم ترین دباؤ تبدیلی ہوتی ہے۔یہاں پر مخالف سمتوں میں حرکت کرتی ہوئی دونوں لہریں فیز میں ہوتی ہیں۔اس لیے دباؤ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔اب، اگر ہوا کے کالم کی لمبائی L ہے، تب کھلا ہوا سرا، $x=L$، ایک اینٹی نوڈ ہے، اس لیے مساوات (15.39) سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ:

$$L = (n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \quad (n=0,1,2,3,.. \text{ کے لیے})$$

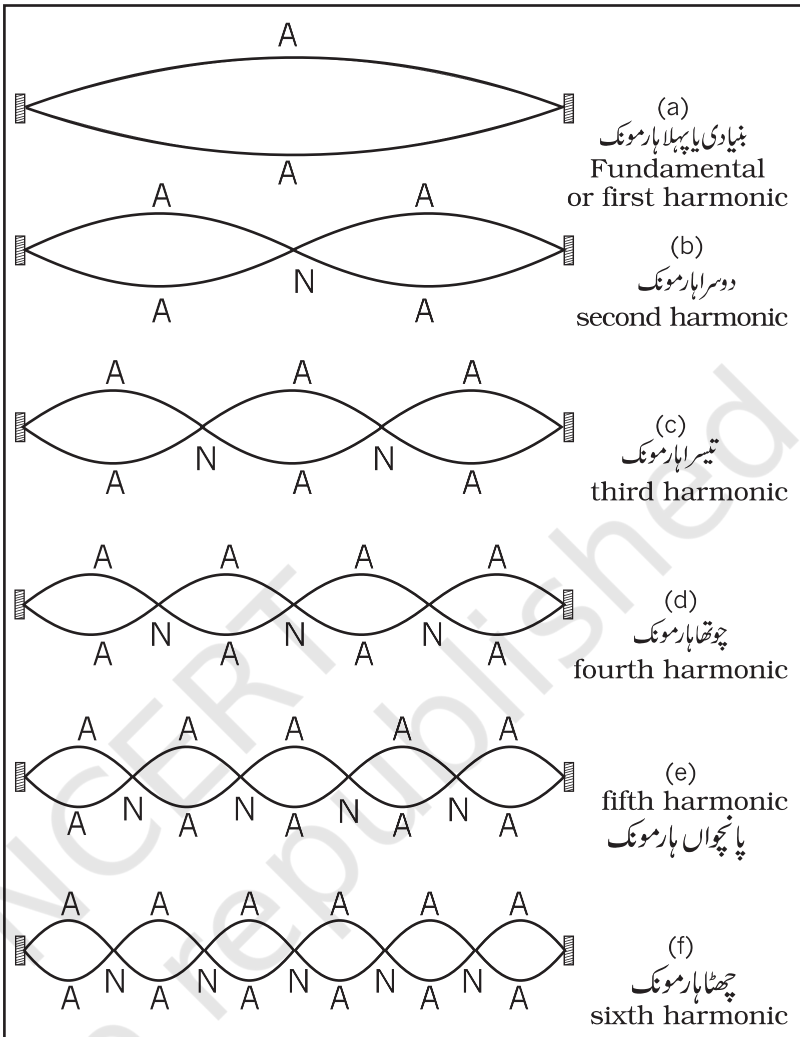
وہ موڈ جو مندرجہ ذیل شرط کو مطمئن کرتے ہیں

$$\lambda = \frac{2L}{(n + 1/2)} \quad (n=0,1,2,3,... \text{ کے لیے}) \qquad (15.43)$$

ایسے ہوا کے کالم میں برقرار رہتے ہیں۔ایسے ہوا کے کالم کے مختلف موڈوں کے مطابق تعدد دیے جاتے ہیں:

$$\nu = (n+\frac{1}{2})\frac{v}{2L} \quad (n=0,1,2,3,... \text{ کے لیے}) \qquad (15.44)$$

ایک ہوا کالم کے جس کا ایک سرا کھلا ہوا ہے،، کچھ نارمل موڈ شکل 15.14 میں دکھائے گئے ہیں۔



شکل 15.13: دونوں سروں پر بندھی، تنی ہوئی ڈوری میں مقیم لہریں۔ ارتعاش کے مختلف موڈ دکھائے گئے ہیں۔

بنیادی تعدد $\frac{v}{4L}$ اور اس سے اونچے تعدد، بنیادی تعدد کے طاق ہارمونک (odd harmonic) ہیں۔

یعنی کہ $3\frac{v}{4L}$، $5\frac{v}{4L}$ وغیرہ۔

اگر ایک پائپ دونوں سروں پر کھلا ہو، تو دونوں سروں پر اینٹی نوڈ ہوں گے اور تمام ہارمونک پیدا ہوں گے۔

ایک دائری جھلّی، جو محیط سے استوار طور پر جڑی ہوئی ہو، جیسے طبلہ میں، کے نارمل موڈ اس سرحدی شرط (Boundary Condition) کے ساتھ معلوم کیے جاتے ہیں کہ جھلّی کے محیط کا کوئی نقطہ ارتعاش نہیں کرتا۔ اس نظام کے نارمل موڈوں کے تعدد کا تخمینہ لگانا زیادہ پیچیدہ ہے۔ اس مسئلے میں دو ابعاد میں لہر کی اشاعت شامل ہے۔ حالانکہ، متعلقہ طبیعیات یکساں ہے۔

ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ ایک دونوں سروں پر بندھی ہوئی ڈوری میں، مقیم لہریں صرف کچھ تعدد پر بنتی ہیں، جو مساوات (15.42) سے دی جاتی ہیں، یا ان تعدد پر نظام گمک کرتا ہے۔ اسی طرح ایک سرے پر کھلا ہوا کالم، مساوات (15.44) سے دیے گئے تعدد پر گمک کرتا ہے۔

> **مثال 15.5:** ایک 30 cm لمبا پائپ دونوں سروں پر کھلا ہوا ہے۔ پائپ کا کون سا ہارمونک موڈ، 1.1k Hz وسیلے (Source) کے ساتھ گمک کرے گا؟ کیا اس وسیلے سے گمک ہوگی، اگر پائپ کا ایک سرا بند کردیا جائے

جواب: پہلا ہارمونک تعدد دیا جاتا ہے:

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} \text{ (کھلا پائپ)}$$

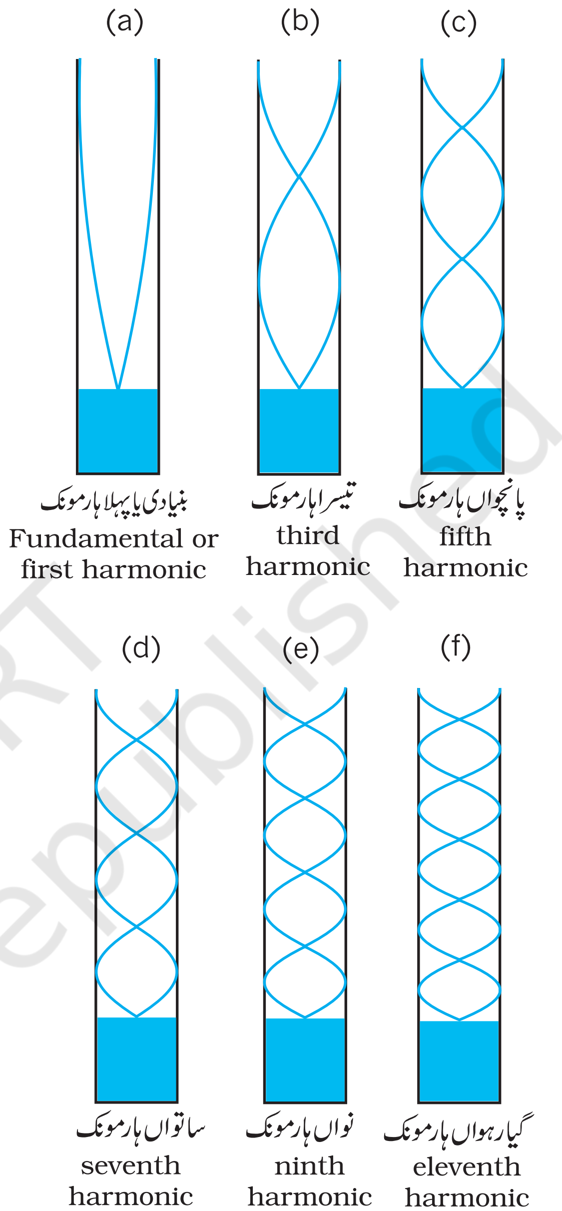
جہاں پائپ کی لمبائی ہے۔ اس کے nth ہارمونک کا تعدد ہے:

$$\nu_n = \frac{nv}{2L} \quad (n=1,2,3,\ldots) \text{ (کھلا پائپ)}$$

ایک سرے پر کھلے پائپ کے کچھ موڈ شکل 15.15 میں دکھائے گئے ہیں۔

$L=30.0\text{cm}$ اور $v = 330 \text{ m s}^{-1}$ کے لیے

$$\nu_n = \frac{n \times 330 \text{ (m s}^{-1})}{0.6 \text{ (m)}} = 550 n \text{ s}^{-1}$$



شکل **15.14**: ایک سرے پر کھلے ہوا کے کالم کے ارتعاش کے کچھ نارمل موڈ

واضح ہے کہ ایک 1.1khz تعدد کا وسیلہ، υ_2 یعنی کہ دوسرے ہارمونک پر گمک کرے گا۔

اب اگر پائپ کا ایک سرا بند کر دیا جائے (شکل 15.14)، تو مساوات (15.44) سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ بنیادی تعدد ہے:

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon}{\lambda_1} = \frac{\upsilon}{4L} \quad \text{(ایک سرے پر بند پائپ)}$$

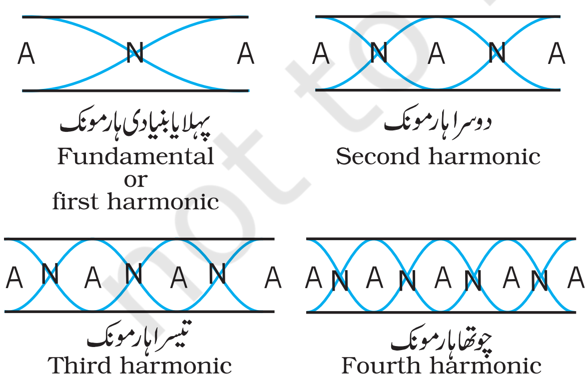
اور صرف طاق اعداد کے ہارمونک ہی بنتے ہیں:

$$\upsilon_3 = \frac{3\upsilon}{4L}, \upsilon_5 = \frac{5\upsilon}{4L}$$

$\upsilon = 330 \text{ m s}^{-1}$ اور L=30cm کے لیے، ایک سرے پر بند پائپ کا بنیادی تعدد ہے 275HZ اور وسیلے کا تعدد اس کے چوتھے ہارمونک سے مطابقت رکھتا ہے۔ کیونکہ یہ ہارمونک ایک ممکنہ موڈ نہیں ہے، جیسے ہی ایک سرا بند کیا جائے گا وسیلے کے ساتھ کوئی گمک نہیں سنائی دے گی۔ ◀

15.7 ضربیں (BEATS)

اگر ہم چند منٹ کے وقفے سے، دو ایسی آوازیں سنیں، جن کے تعدد ایک دوسرے سے بہت قریب ہوں، جیسے 256HZ اور 260HZ، تو ہم ان میں فرق نہیں کر پاتے۔ لیکن اگر یہی دونوں آوازیں ہمارے کانوں تک ایک ساتھ پہنچیں تو ہم تعدد 258HZ، دونوں متحد ہونے والے تعدد کا اوسط کی ایک آواز سنتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہمیں آواز کی شدت (Intensity) میں ایک نمایاں تبدیلی سنائی دیتی ہے۔ یہ آہستہ تھرتھراتی (جھلملاتی) ضربوں میں زیادہ اور کم ہوتی ہے جو 4HZ کے تعدد، آنے والی آوازوں کے تعدد کے مابین فرق، پر دہرائی جاتی ہے۔ جب تقریباً یکساں تعدد اور وسعت کی دو لہریں، یکساں سمت میں حرکت کرتے ہوئے ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں، تو آواز کی شدت کے تھرتھرانے کا مظہر، ضربیں (Beats) کہلاتا ہے۔



شکل **15.15**: ایک کھلے ہوئے پائپ میں مقیم لہریں، پہلے چار ہارمونک دکھائے گئے ہیں۔

آیئے معلوم کریں کہ کیا ہوتا ہے جب دو لہریں، جن کے تعدد میں معمولی سا فرق ہے، ایک دوسرے پر منطبق کی جاتی ہیں۔ فرض کیجیے کہ ایک خاص مقام پر دونوں آواز کی لہروں کے نقل کے وقت تابع تغیرات دیے جاتے ہیں:

$$s_1 = a\cos\omega_1 t \text{ ، } s_2 = a\cos\omega_2 t \quad \omega_1 > \omega_2 \qquad (15.45)$$

جہاں ہم نے آسانی کے لیے فرض کر لیا ہے کہ دونوں لہروں کی سعتیں اور فیز یکساں ہیں۔ انطباق کے اصول کے مطابق، ماحصل نقل ہے۔

$$s = s_1 + s_2 = a\,(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

$$= 2a\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2} \qquad (15.46)$$

اگر ہم لکھیں: $\omega_b = \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}$ ، $\omega_a = \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}$

تب مساوات (15.46) لکھی جا سکتی ہے:

$$s = [2a\cos\omega_b t]\cos\omega_a t \qquad (15.47)$$

اگر، $|\omega_1-\omega_2| << \omega_1, \omega_2, \omega_a >> \omega_b$

تب مساوات (15.47) میں اصل وقت انحصار اس کوسائن تفاعل سے آتا ہے، جس کا زاویائی تواتر ω_a ہے۔ قوسین میں دی ہوئی مقدار کو اس تفاعل کا سعت سمجھا جا سکتا ہے (جو مستقلہ نہیں ہے، بلکہ اس میں زاویائی تعدد کی خفیف تبدیلی ω_b شامل ہے)۔ یہ از حد ہو جاتا ہے، جب بھی $\cos\omega_b t$ کی قدر (+1) یا (−1) ہوتی ہے۔ کیونکہ ω_1 اور ω_2 کی قدریں ایک دوسرے کے بہت نزدیک ہیں، ω_a اور ان دونوں میں سے کسی ایک میں بھی فرق کر پانا آسان نہیں ہے۔ اس لیے تقریباً یکساں تعدد والی دو لہروں کے انطباق کا نتیجہ ایک ایسی لہر ہے، جس کا زاویائی تعدد تقریباً یکساں ہے لیکن سعت مستقلہ نہیں ہے۔ اس لیے، ماحصل آواز لہر کی شدت ایک زاویائی تعدد $\omega_{beat} = 2\omega_b = \omega_1 - \omega_2$ کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔ اب رشتہ $\omega = 2\pi\upsilon$ استعمال کرتے ہوئے، ضرب تعدد (Beat Frequency) ω_{beat} دی جاتی ہے:

$$\upsilon_{beat} = \upsilon_1 - \upsilon_2 \qquad (15.48)$$

سریلے ستون (Musical Pillars)

مندروں میں ستونوں پر اکثر ایسی تصاویر بنائی جاتی ہیں، جن میں انسانوں کو ساز بجاتے دکھایا جاتا ہے۔ لیکن یہ ستون خود موسیقی شاذ و نادر ہی پیدا کرتے ہیں۔ تامل ناڈو میں نیل اپر (Nellaiappar) مندر میں ایک ہی چٹان کے ٹکڑے سے بنائے گئے ستونوں کا ایک ایسا مجموعہ ہے، جس پر اگر آہستہ سے تھپتھپایا جائے تو ہندوستانی کلاسیکی موسیقی کے بنیادی سر نکلتے ہیں، یعنی کہ سا رے، گا، ما، پا، دھا، نی، سا۔ ان ستونوں کے ارتعاش استعمال کے گئے پتھر کی لچک، اس کی کثافت اور اس کی شکل پر منحصر ہیں۔

سریلے ستونوں کی تین قسموں میں درجہ بندی کی جاتی ہے: پہلی قسم شروتی ستون (Shruthi) کہلاتی ہے کیونکہ یہ بنیادی سر (سُوار Swaras) پیدا کرتے ہیں۔ دوسری قسم گانا تھونگل (Gana Thoongal) ہے جو وہ بنیادی دھنیں پیدا کرتے ہیں جو ”راگ“ بناتی ہیں۔ تیسری قسم لے تھونگل (Lay Thongal) ستونوں کی ہے جو ”تال“ (ضرب Beats) پیدا کرتے ہیں۔ نیل اپر مندر کے ستون شروتی اور لے قسموں کے ستونوں کا مجموعہ ہیں۔

ماہرینِ آثار قدیمہ، نیل اپر مندر کو ساتویں صدی کا بنا ہوا بتاتے ہیں اور ان کا دعویٰ ہے کہ اسے پانڈیان سلاطین نے بنوایا تھا۔

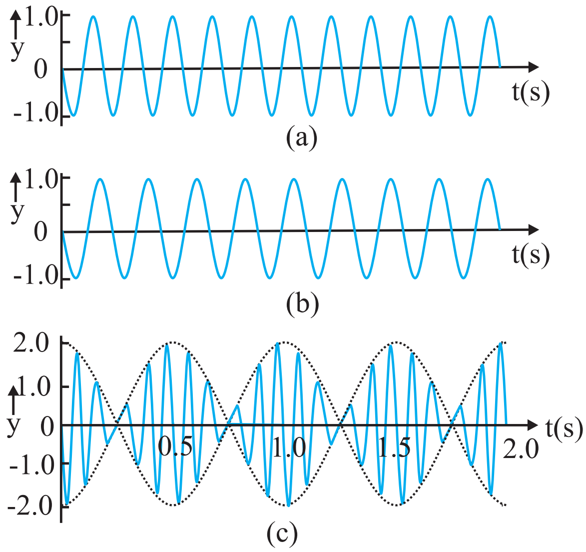
نیل اپر کے سریلے ستون اور جنوبی ہند کے کئی دوسرے مندروں، جیسے ہام بھی (تصویر)، کنیا کماری اور تھرووانن تھاپورم کے مندروں کے ستون اس ملک کی انفرادیت ہیں اور دنیا کے کسی حصے میں ان جیسی کوئی مثال نہیں ملتی۔

ایک کھلے پائپ میں آواز کا انعکاس
(Reflection of sound in an open pipe)

جب ایک زیادہ دباؤ والی ہوا کی پلس، ایک کھلے پائپ میں حرکت کرتے ہوئے دوسرے سرے تک پہنچتی ہے، تو اس کا معیار حرکت ہوا کو باہر کھلے میں ڈھکیل دیتا ہے، جہاں دباؤ تیزی سے گر کر فضائی دباؤ پر آ جاتا ہے۔ اس لیے اس کے پیچھے آنے والی ٹیوب میں، ہوا باہر نکل جاتی ہے۔ ٹیوب کے سرے پر کم دباؤ ٹیوب میں اوپر کی ہوا کھینچتا ہے۔ ہوا کھلے سرے کی طرف کھینچتی ہے، جس کم دباؤ والا علاقہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے۔ جس کے نتیجے میں زیادہ دباؤ کی ہوا کی، نیچے کی سمت میں حرکت کرتی ہوئی، پلس کم دباؤ کی ہوا کی، اوپر کی سمت میں حرکت کرتی ہوئی پلس میں بدل جاتی ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ کھلے سرے پر ایک دباؤ لہر، 180^0 فیز کی تبدیلی کے ساتھ، منعکس ہوئی ہے۔ ایک کھلے پائپ آرگن، جیسے بانسری، میں مقیم لہریں، اسی مظہر کا نتیجہ ہیں۔

اس نتیجہ کا مقابلہ اس سے کیجیے جو زیادہ دباؤ کی ہوا کے بند سرے پر پہنچنے سے ہوتا ہے: یہ تصادم کرتی ہے اور اس کے نیچے میں ہوا کو مخالف سمت میں پیچھے ڈھکیلتی ہے۔ یہاں ہم کہتے ہیں کہ دباؤ لہر، بغیر کسی فیز تبدیلی کے، منعکس ہوئی ہے۔

اس لیے ہم کم-زیادہ ہوتی ہوئی شدت کی آواز سنتے ہیں، جس کا تعدد، منطبق ہونے والی لہروں کے تعدد کا فرق ہوتا ہے۔ تعدد 11 HZ اور تعدد 9HZ کی دو لہروں کے وقت نقل گراف شکل 15.16 (a) اور 15.16 (b) میں دکھائے گئے ہیں۔ ان کے انطباق کا نتیجہ شکل 15.16(c) میں دکھایا گیا ہے۔ موسیقی کار اپنے سازوں کی لے ملانے (انہیں ٹیون کرنے) میں ضرب مظہر استعمال کرتے ہیں۔ اگر ایک ساز کو ایک معیاری تعدد کے سامنے بجایا جائے اور اس وقت تک ٹیون کیا جاتا رہا ہے جب تک بیٹ غائب نہ ہو جائے، تو ساز اس معیار کے ساتھ لے میں (ٹیون کیا ہو) ہوتا ہے۔



شکل 15.16: (a)11HZ تعدد کی ہارمونی لہر کا گراف (b)9HZ تعدد کی ہارمونی لہر کا گراف (c)(a) اور (b) کا انطباق - جس میں 2HZ تعدد کی ضربیں (Beats) دکھائی گئی ہیں۔

مثال 15.6: ستار کے دو تار A اور B جن سے سُر 'دھا' نکل رہے ہیں، ایک دوسرے سے پوری طرح لے میں نہیں ہیں اور 5HZ تعدد کی ضرب پیدا کر رہے ہیں۔ تار B کے تناؤ میں تھوڑا سا اضافہ کیا گیا تو ضرب کا تعدد کم ہو کر 3 ہو گیا۔ B کا آغازی تعدد کیا ہے، اگر A کا تعدد 427HZ ہے۔

جواب: ایک تار کے تناؤ میں اضافہ، اس کے تعدد میں اضافہ کرتا ہے اگر B کا آغازی تعدد (υ_b)، A کے تعدد سے زیادہ ہوتا تو (υ_b) میں مزید اضافہ سے ضرب تعدد بڑھنا چاہیے تھا۔ لیکن ضرب تعدد کم ہو رہا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے $\upsilon_B < \upsilon_A$، کیونکہ $\upsilon_A - \upsilon_B = 5HZ$ اور $\upsilon_A = 427$ Hz، ہمیں ملتا ہے، $\upsilon_B = 422$Hz

15.8 ڈوپلر اثر (DOPPELR EFFECT)

یہ روزمرہ کا تجربہ ہے کہ ایک تیزی سے حرکت کرتی ہوئی ریل گاڑی جب ہم

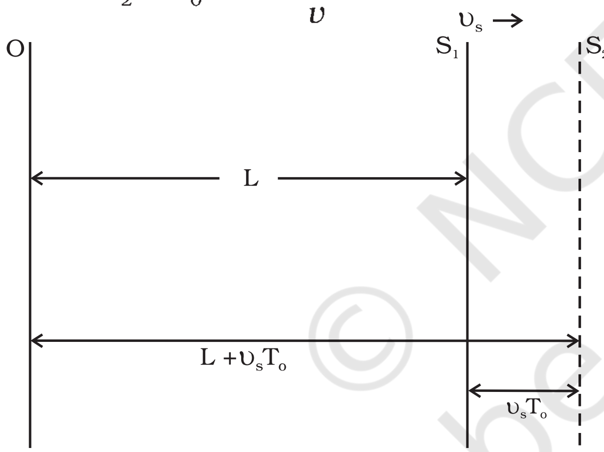
سے دور ہوتی جاتی ہے تو اس کی سیٹی کا سر (پچ) (Pitch) یا تعدد کم ہوتا جاتا ہے۔ اور جب ہم کسی آواز کے قائم (غیر متحرک) منبع (وسیلے (Source)) کی طرف تیزی سے جاتے ہیں، تو سنائی دینے والی آواز کی پچ، منبع کی پچ سے زیادہ معلوم ہوتی ہے۔ جیسے جیسے مشاہد، وسیلے سے دور جاتا ہے تو سنائی دینے والی پچ یا تعدد وسیلے کی پچ سے نیچی ہوتی جاتی ہے۔ یہ حرکت- منسلک تعدد تبدیلی، ڈوپلر اثر (Doppler effect) کہلاتا ہے۔ آسٹریلیائی طبیعیات داں، جون کرسٹین ڈوپلر نے سب سے پہلے 1842 میں یہ اثر تجویز کیا۔ بائز بیلٹ (Buys Ballot) نے 1845 میں ہولینڈ میں اس کی تجربہ کے ذریعے جانچ کی۔ ڈوپرل اثر ایک لہر، مظہر ہے۔ یہ صرف آواز کے لیے ہی نہیں بلکہ برقی مقناطیسی لہروں کے لیے بھی صادق ہے۔ حالانکہ، اس وقت ہم صرف آواز کی لہروں کو ہی لیں گے۔

ہم تین مختلف صورتوں میں تعدد میں ہونے والی تبدیلیوں کا تجزیہ کریں گے: (1) مشاہد، مقیم (Stationary) ہے اور وسیلہ (Source) حرکت کر رہا ہے، (2) مشاہد حرکت کر رہا ہے اور وسیلہ مقیم ہے، (3) مشاہد اور وسیلہ دونوں حرکت کر رہے ہیں۔ حالت (1) اور (2) مشاہد اور واسطے کے درمیان اضافی حرکت (Relative motion) کی موجودگی یا غیر موجودگی کی وجہ سے ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ زیادہ تر لہروں کو اشاعت کے لیے واسطے کی ضرورت ہوتی ہے، لیکن برقی ومقناطیسی لہروں کو اپنی اشاعت کے لیے واسطے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اگر کوئی واسطہ موجود نہ ہو تو چاہے وسیلہ حرکت کرے یا مشاہد حرکت کرے ڈوپلر شفٹ (Doppler Shift) یکساں ہوتی ہے، کیونکہ اب دونوں صورتوں میں فرق کرنے کا کوئی ذریعہ نہیں ہے۔

15.8.1 وسیلہ متحرک: مشاہد قائم
(Source moving ; observer stationary)

ہم یہ قرار داد (Convention) منتخب کرتے ہیں کہ رفتار کی مثبت سمت مشاہد سے وسیلہ کی طرف ہے۔ فرض کیجیے کہ ایک وسیلہ S رفتار υ_s سے حرکت کر رہا ہے اور ایک وسیلہ اس فریم میں قائم ہے، جس میں واسطہ بھی حالت سکون پر ہے۔ فرض کیجیے کہ ایک زاویائی تعدد ω اور T_0 کی لہر رفتار v ہے اور ω اور T_0 ایک ایسے مشاہد کے ذریعے ناپے جاتے ہیں جو واسطے کی مناسبت سے حالت سکون پر ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مشاہد کے پاس ایک ایسا شناس کار (Detector) ہے جو اس پر پہنچنے والے لہر کے ہر فراز کو، اس کے پہنچتے ہی، شمار کرتا ہے۔ جیسا شکل 15.17 میں دکھایا گیا ہے۔ وقت t=0 پر، وسیلہ نقطہ S_1 پر ہے، جو مشاہد سے فاصلہ L پر واقع ہے اور ایک فراز خارج کرتا ہے۔ یہ مشاہد تک وقت $t_1=L/v$ پر پہنچتا ہے۔ وقت $t = T_0$ پر، وسیلہ ایک فاصلہ $\upsilon_s T_0$ طے کر چکا ہوگا اور اب یہ نقطہ S_2 پر ہے، جو مشاہد سے فاصلہ $(L+\upsilon_S T_0)$ پر واقع ہے۔ S_2 پر وسیلہ دوسرے فراز کا اخراج کرتا ہے۔ یہ مشاہد تک پہنچتا ہے وقت t_2 پر:

$$t_2 = T_0 + \frac{(L+\upsilon_s T_0)}{\upsilon}$$



شکل 15.17: υ_S رفتار سے حرکت کرتا ہوا ایک وسیلہ نقطہ S_1 پر ایک لہر فراز خارج کرتا ہے۔ $\upsilon_S T_0$ فاصلہ طے کرنے کے بعد، S_2 پر یہ اگلا لہرفراز خارج کرتا ہے۔

وقت nT_0 پر، وسیلہ $(n+1)^{th}$ فراز خارج کرتا ہے اور یہ مشاہد تک وقت t_{n+1} پر پہنچتا ہے:

$$t_{n+1} = nT_0 + \frac{(L+n\upsilon_s T_0)}{\upsilon}$$

اس لیے، وقفہ وقت

$$\left[nT_0 + \frac{(L+n\upsilon_s T_0)}{\upsilon} - \frac{L}{\upsilon}\right]$$

میں مشاہد کا شناس کار n فراز شمار کرتا ہے اور مشاہد لہر کا دور بہ طور T ریکارڈ کرتا ہے، جو دیا جاتا ہے:

$$T = \left[nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v} - \frac{L}{v} \right] / n$$

$$= T_0 + \frac{v_s T_0}{v}$$

$$= T_0 \left(1 + \frac{v_s}{v} \right) \qquad (15.49)$$

مساوات (15.49) کو تعدد ν اور ν_0 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے،

جہاں ν_0 وہ تعدد ہے جو ناپی جاتی جاتی، اگر وسیلہ اور مشاہد دونوں قائم ہوتے ν وہ تعدد ہے جو وسیلہ کے حرکت کرتے وقت ناپی گئی ہے۔

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_s}{v} \right)^{-1} \qquad (15.50)$$

اگر v_s، v کے مقابلے میں چھوٹی ہے تو دو رکنی توسیع (Binomial expansion) میں $\frac{v_s}{v}$ کے پہلے درجہ کے رکن کو برقرار رکھتے ہوئے اور اس سے اونچے درجات کے رکنوں کو نظر انداز کرتے ہوئے، مساوات (15.50) لکھی جاسکتی ہے

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v_s}{v} \right) \qquad (15.51)$$

اگر ایک وسیلہ، مشاہد کے نزدیک آرہا ہو تو v_s کو $(-v_s)$ سے تبدیل کر دیتے ہیں، اور

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_s}{v} \right) \qquad (15.52)$$

اس لیے مشاہد کم تعدد ناپتا ہے، جب کہ وسیلہ اس سے دور جا رہا ہو، بہ مقابلہ اس تعدد کے جب کہ وسیلہ حالت سکون پر ہو، اسی طرح زیادہ تعدد ناپتا ہے جب کہ وسیلہ اس کے نزدیک آرہا ہو بہ مقابلہ اس تعدد کے جب کہ وسیلہ حالت سکون پر ہو۔

15.8.2 مشاہد حرکت کر رہا ہے، وسیلہ قائم ہے (Observer moving; source stationary)

اب جب کہ مشاہد رفتار v_0 سے وسیلہ کی طرف حرکت کر رہا ہے اور وسیلہ حالت سکون پر ہے، ہمیں ڈوپلر شفٹ مشتق کرنے کے لیے مختلف طریقہ اختیار کرنا ہوگا۔ ہم حرکت کرتے ہوئے مشاہد کے حوالہ فریم میں کام کرتے ہیں۔ اس حوالہ فریم میں وسیلہ (Source) اور واسطہ (Medium) رفتار v_0 سے نزدیک آرہے ہیں اور لہر رفتار $v_0 + v$ سے نزدیک آرہی ہے۔ جو طریقہ پچھلی صورت میں اختیار کیا تھا، اس پر عمل کرتے ہوئے، ہم معلوم کرتے ہیں کہ پہلے اور $(n+1)^{th}$ فراز کی آمد میں وقفہ وقت ہے:

$$t_{n+1} - t_1 = n\ T_0 - \frac{n v_0 T_0}{v_0 + v}$$

اس لیے، مشاہد، لہر کا دور ناپتا ہے:

$$= T_0 \left(1 - \frac{v_0}{v_0 + v} \right)$$

$$= T_0 \left(1 + \frac{v_0}{v} \right)^{-1}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_0}{v} \right) \qquad (15.53)$$

اگر v_0 / v خفیف ہے تو ڈوپلر شفٹ تقریباً یکساں ہے، چاہے مشاہد حرکت کر رہا ہو، وسیلہ، کیونکہ تقریبی رشتے مساوات (15.53) اور مساوات (15.51) یکساں ہیں۔

15.8.3 وسیلہ اور مشاہد دونوں حرکت کر رہے ہیں (Both source and observer moving)

اب ہم ڈوپلر شفٹ کے لیے ایک مجموعی عبارت مشتق کریں گے، جب کہ وسیلہ اور مشاہد رفتاروں v_s اور v_0 سے، حسب ترتیب، حرکت کر رہے ہیں، جیسا کہ شکل 15.18 میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کیجیے کہ وقت t=0 پر مشاہد O_1 پر ہے، اور وسیلہ S_1 پر ہے، O_1، S_1 کی بائیں طرف ہے۔ وسیلہ، رفتار v تعدد ν اور دور T_0 کی ایک لہر خارج کرتا ہے، اور یہ سب اس مشاہد کے ذریعے ناپے جاتے ہیں جو واسطہ کی مناسبت سے حالت سکون پر ہے۔ فرض کیجیے t=0 پر O_1 اور S_1 کے درمیان فاصلہ L ہے، جب کہ وسیلہ پہلا فراز

ڈوپلر اثر کا استعمال
(Application of Doppler effect)

ڈوپلر اثر کی وجہ سے ایک حرکت کرتی ہوئی شے کی تعدد میں ہونے والی تبدیلی کا استعمال، مختلف مقامات پر، جیسے فوج، طبی سائنس، علم فلکیات وغیرہ، شے کی رفتار ناپنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ پولس بھی اس کا استعمال سواروں کی مقررہ حد سے زیادہ تیز رفتار کو جانچنے کے لیے کرتی ہے۔

حرکت کرتی ہوئی شے کی جانب، ایک آواز کی لہر یا برقی۔ مقناطیسی لہر، جس کا تعدد معلوم ہے، بھیجی جاتی ہے۔ اس لہر کا کچھ حصہ شے سے منعکس ہوتا ہے اور اس کا تعدد، نگرانی کررہے اسٹیشن کے ذریعے، ناپا جاتا ہے۔ تعدد میں آئی یہ تبدیلی، ڈوپلر شفٹ کہلاتی ہے۔

ہوائی اڈوں پر اس کا استعمال جہازوں کی راہ نمائی کرنے اور فوج میں، دشمن کے جہازوں کو شناس کرنے میں کیا جاتا ہے۔ علم فلکیات میں یہ ستاروں کی رفتار کی پیمائش میں استعمال ہوتا ہے۔

ڈاکٹر، دل کی دھڑکن اور جسم کے مختلف حصوں میں دوران خون کا مطالعہ کرنے کے لیے اسے استعمال کرتے ہیں۔ یہاں وہ بالاصوتی لہریں (Ultrasonic waves)، عام طور سے، استعمال کرتے ہیں اور یہ طریقہ صوتی ترسیم (Sonography) کہلاتا ہے۔ بالاصوتی لہریں، انسان کے جسم میں داخل ہوتی ہیں، ان میں سے کچھ واپس منعکس ہوجاتی ہیں اور خون کی حرکت، دل کے والووں (Volves) کی دھڑکن اور یہاں تک کہ جنین (Foetus) کے دل کی دھڑکن، کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہیں۔ دل کی صورت میں، ان کے ذریعے بنائی گئی تصویر گونج قلبی نگارش (Echocardiogram) کہلاتی ہے۔

خارج کرتا ہے۔ اب کیونکہ مشاہد حرکت کررہا ہے، اس لیے مشاہد کی مناسبت سے لہر کی رفتار $v + v_0$ ہے۔ اس لیے پہلا فراز مشاہد تک وقت t_1 پر پہنچتا ہے: $t_1 = L/v + v_0$ وقت $t = T_0$ پر مشاہد اور وسیلہ دونوں اپنے نئے مقامات، بالترتیب، O_2 اور S_2 پر پہنچ گئے ہیں۔ مشاہد اور وسیلہ کے درمیان نیا فاصلہ $S_2 O_2$ ہوگا: $[L + v_s - v_0]$ ۔ S_2 پر وسیلہ دوسرا فراز خارج کرتا ہے۔ یہ مشاہد تک وقت t_2 پر پہنچتا ہے:

$$t_2 = \frac{T_o + [L + (v_s - v_o)T_o)]}{(v + v_o)}$$

اسی لیے وقفہ وقت $(t_{n+1} - t_1)$

$$= \frac{nT_o + [L + n(v_s - v_o)T_o)]}{(v + v_o)} - \frac{L}{(v + v_o)}$$

میں مشاہد n فراز شمار کرتا ہے اور مشاہد لہر کا دور T کے مساوی ریکارڈ کرتا ہے، جو دیا جاتا ہے۔

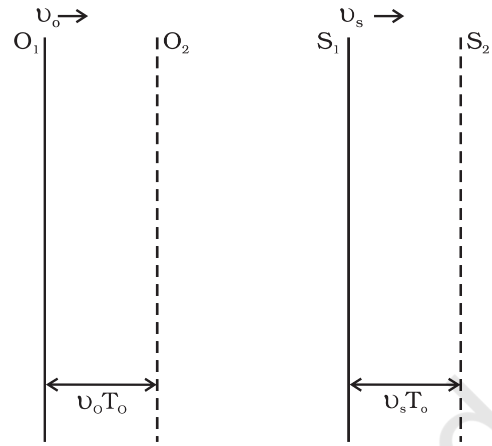
$$T = T_0\left(1 + \frac{v_s - v_0}{v + v_0}\right) = T_0\left(\frac{v + v_s}{v + v_0}\right) \qquad (15.54)$$

مشاہد کے ذریعے ناپا گیا تعدد ν دیا جاتا ہے:

$$\nu = \nu_0\left(\frac{v + v_0}{v + v_s}\right) \qquad (15.55)$$

ایک مسافر کو لیجیے جو ایک سیدھی پٹری پر چلتی ہوئی ریل گاڑی میں بیٹھا ہے۔ فرض کیجیے وہ ٹرین کے ڈرائیور کے ذریعے بجائی گئی سیٹی سنتا ہے۔ وہ کیا تعدد سنے گا یا ناپے گا؟ یہاں مشاہد اور وسیلہ دونوں یکساں رفتار سے حرکت کررہے ہیں، اس لیے تعدد میں کوئی شفٹ نہیں ہوگی اور مسافر قدرتی تعدد ہی سنے گا۔ لیکن ایک ٹرین کے باہر کھڑا ہوا مشاہد، جو کہ پٹری کی مناسبت سے مقیم ہے، قدرتی تعدد سے زیادہ تعدد سنے گا، اگر ریل گاڑی اس کی طرف آرہی ہے اور کم تعدد سنے گا اگر ریل گاڑی اس سے دور جارہی ہے۔

نوٹ کریں کہ ہم نے مشاہد سے وسیلہ کی سمت میں مثبت سمت معرف کی تھی۔ اس لیے، اگر مشاہد واسطے کی طرف حرکت کررہا ہے تو v_0 کی مثبت (عددی) قدر ہوگی اور اگر O، S سے دور جارہا ہے تو v_0 کی منفی قدر ہوگی۔ دوسری طرف، اگر S، O سے دور جارہا تو v_s کی مثبت قدر ہوگی اور اگر وہ O کی طرف حرکت کررہا ہے تو v_s کی منفی قدر ہوگی۔ وسیلے کے ذریعے خارج کی گئی آواز تمام سمتوں میں جاتی ہے۔ مشاہد، آواز کا وہ حصہ شناس کرتا ہے جو اس کی طرف آتا ہے۔ اس لیے مشاہد کی مناسبت سے، آواز کی اضافی رفتار، تمام صورتوں میں، $v + v_o$ ہے۔



شکل 15.18: مشاہد O اور وسیلہ S دونوں رفتاروں υ_0 اور υ_s سے، بالترتیب، حرکت کر رہے ہیں۔ وقت t=0 پر وہ مقام O_1 اور S_1 پر ہیں، جبکہ وسیلہ آواز کا پہلا فراز خارج کرتا ہے، جس کی رفتار، واسطے کی مناسبت سے υ ہے۔ایک دورے بعد، $t - T_o$، وہ بالترتیب O_2 اور S_2 تک حرکت کرچکے ہیں، اورانھوں نے فاصلہ $\upsilon_0\, T_0$ اور $\upsilon_o\, T_o$ طے کیا ہے، جب کہ وسیلہ دوسرا فراز خارج کرتا ہے۔

مثال 15.7: ایک راکٹ ایک مقیم نشانے کی طرف $200\ m\ s^{-1}$ کی چال سے حرکت کر رہا ہے۔حرکت کرتے ہوئے وہ 1000Hz تعدد کی لہر خارج کرتا ہے۔نشانے تک پہنچنے والی کچھ آواز راکٹ تک، ایک گونج کی شکل میں، منعکس ہوکر واپس پہنچتی ہے۔حساب لگائیے: (1) نشانے کے ذریعے شناس کی گئی آواز کا تعدد (2) راکٹ کے ذریعے شناس کیا گیا، گونج کا تعدد۔

جواب: (1) مشاہد حالت سکون پر ہے اور وسیلہ رفتار $200\ m\ s^{-1}$ سے حرکت کر رہا ہے۔ کیونکہ یہ رفتار آواز کی رفتار $330\ m\ s^{-1}$ سے قابل مقابلہ ہے، اس لیے ہمیں مساوات (15.50) استعمال کرنا ہوگی، مساوات (15.51) سے دیا گیا تقریبی رشتہ نہیں۔ کیونکہ وسیلہ، ایک مقیم نشانہ کی طرف آرہا ہے، $\upsilon_0 = 0$ اور υ_s کو $-\upsilon_s$ بدلنا ہوگا:

$$v = v_0\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1}$$

$$\upsilon = 1000\ Hz \times \left[\frac{1-200\ m\ s^{-1}}{[330\ m\ s^{-1}]^{-1}}\right]$$

$$\simeq 2540\ Hz$$

اب نشانہ وسیلہ ہے (کیونکہ یہ گونج کا منبع ہے) اور راکٹ کا شناس اب شناس یا مشاہد ہے (کیونکہ یہ گونج شناس کرتا ہے)۔اس لیے $\upsilon_s = 0$ اور υ_0 کی مثبت قدر ہے۔اس لیے وسیلہ (نشانہ) کے ذریعہ خارج کی گئی آواز کا تعدد υ ہے اور نشانے کے ذریعے وصول کیا گیا تعدد υ_0 نہیں ہے۔اس لیے وہ تعدد جو راکٹ ناپے گا، ہے۔

$$v' = v\left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon}\right)$$

$$= 2540\ Hz \times \left(\frac{200\ m\ s^{-1} + 330\ m\ s^{-1}}{330\ m\ s^{-1}}\right)$$

$$\simeq 4080\ Hz$$

خلاصہ (Summary)

1. میکانیکی لہریں، مادی واسطوں میں ہی رہ سکتی ہیں اور ان پر نیوٹن کے قوانین لاگو ہوتے ہیں۔
2. عرضی لہریں وہ لہریں ہیں جن میں واسطے کے ذرات، لہر کی اشاعت کی سمت کی عمودی سمت میں اہتزاز کرتے ہیں۔
3. طولی لہریں وہ لہریں ہیں جن میں واسطے کے ذرات، لہر کی اشاعت کی سمت میں اہتزاز کرتے ہیں۔
4. رواں لہر وہ لہر ہے جو واسطے کے ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک حرکت کرتی ہے۔
5. مثبت x-سمت میں حرکت کرتی ہوئی ایک سائن خم نما لہر کا نقل دیا جاتا ہے:

$$y(x,t) = a\ \sin(kx - \omega t + \phi)$$

جہاں a لہر کی سمت ہے، k زاویائی لہر عدد ہے، ω زاویائی تعدد ہے، $(kx - \omega t + \phi)$ فیز ہے اور ϕ فیز مستقلہ یا فیز زاویہ ہے۔

.6 ایک رواں لہر کی طول لہر λ، ایک دیے ہوئے وقت پر، یکساں فیز کے دو متواتر نقطوں کے درمیانہ فاصلہ ہے۔ ایک قائم لہر میں یہ دو متواتر نوڈ یا اینٹی نوڈ کے درمیان فاصلے کا دگنا ہے۔

.7 ایک لہر کے اہتزاز کے دور T کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے یہ وہ وقت ہے جو واسطہ کا کوئی بھی جز ایک مکمل اہتزاز سے گذرنے میں لیتا ہے۔ یہ زاویائی تعدد ω سے مندرجہ ذیل رشتے سے منسلک ہے

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

.8 ایک لہر کے تعدد کی تعریف بہ طور $1/T$ کی جاتی ہے، اور اس کا زاویائی تعدد سے رشتہ ہے:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

.9 ایک رواں لہر کی رفتار دی جاتی ہے: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$

.10 ایک تنی ہوئی ڈوری پر، ایک عرضی لہر کی رفتار، ڈوری کی خاصیتوں سے متعین ہوتی ہے۔ ایک ڈوری پر، جس میں تناؤ T ہو اور جس کی خطی کمیت کثافت μ ہو آواز کی رفتار ہے:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

.11 آوار کی لہریں وہ طولی میکانیکی لہریں ہیں جو ٹھوس اشیاء، رقیق اشیاء اور گیسوں میں سے گذر سکتی ہیں۔

ایک رقیق میں، جس کا حجم مقیاس B اور کثافت S ہو، آواز کی رفتار ہے: $v = \sqrt{\frac{B}{S}}$

ایک دھات کی بنی چھڑ میں طولی لہروں کی رفتار ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

گیسوں کے لیے، کیونکہ $B = \gamma P$، اس لیے آواز کی رفتار ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

.12 جب دو یا دو سے زیادہ لہریں، ایک ہی واسطے سے بہ یک وقت گذرتی ہیں، تو واسطے کے کسی بھی جز کا نقل، ہر لہر کی وجہ سے ہونے والے انفرادی نقل کا الجبرائی حاصل جمع ہوتا ہے۔ یہ لہروں کے انطباق کا اصول کہلاتا ہے:

$$y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x - vt)$$

.13 ایک ہی ڈوری پر حرکت کر رہی دو سائن خم نما لہریں، تداخل دکھاتی ہیں، یعنی انطباق کے اصول کے مطابق جمع یا تنسیخ ہوتی ہے۔ اگر دونوں ایک ہی سمت میں حرکت کر رہی ہوں اور دونوں کی سعت a اور تعدد یکساں ہو، لیکن فیز میں ایک فیز مستقلہ ϕ کا فرق ہو تو نتیجہ میں ایک واحد لہر حاصل ہوتی ہے، جس کا تعدد بھی ω ہوتا ہے۔

$$y(x,t) = \left[2a\cos\frac{1}{2}\phi\right]\ \sin\left(kx - \omega t\ + \frac{1}{2}\phi\right)$$

اگر $\phi=0$ یا 2π کا صحیح عدد ہو، تو لہریں بالکل درست طور پر فیز میں ہوتی ہیں اور تداخل تعمیری ہوتا ہے، اگر $\phi=\pi$ ہو تو ہو بالکل درست طور پر فیز کے باہر ہوتی ہیں اور تداخل تخریبی ہوتا ہے۔

.14 ایک رواں لہر، ایک استوار سرحد یا بند سرے پر فیز کے الٹنے کے ساتھ، منعکس ہوتی ہے، جب کہ ایک کھلی سرحد پر انعکاس بغیر کسی فیز کی تبدیلی کے ہوتا ہے۔

ایک واقع لہر کے لیے

$$y_i\ (x, t) = a\ \sin\ (kx - \omega t)$$

استوار سرحد پر منعکس لہر ہے:

$$y_r\ (x, t) = -\ a\ \sin\ (kx + \omega t)$$

ایک کھلی سرحد پر انعکاس کے لیے:

$$y_r\ (x, t) = a\ \sin\ (kx + \omega t)$$

.15 مخالف سمتوں میں حرکت کرتی ہوئی دو متماثل لہروں کا تداخل ''قائم لہریں'' پیدا کرتا ہے۔ ایک ڈوری میں، جس کے دونوں سرے بندھے ہوں، قائم لہر دی جاتی ہے

$$y\ (x, t) = [2\ \sin\ kx]\cos\omega t$$

قائم لہروں کی خاصیت، صفر نقل کے متعین مقامات ہیں جو نوڈ کہلاتے ہیں اور از حد نقل کے متعین مقامات ہیں جو انیٹی نوڈ کہلاتے ہیں۔ دو متواتر نوڈ یا اینٹی نوڈ کے درمیان $\lambda/2$ فاصلہ ہوتا ہے۔

ایک تنی ہوئی رسی، جس کے دونوں سرے بندھے ہوں اور جس کی لمبائی L ہو، مندرجہ ذیل تعدد سے اہتزاز کرتی ہے:

$$\upsilon = \frac{nv}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, ..$$

مندرجہ بالا رشتے سے دیے گئے تعددوں کا سیٹ، نظام کے اہتزاز کے نارمل موڈ کہلاتے ہیں۔ کم ترین تعدد کا اہتزاز موڈ، بنیادی موڈ یا پہلا ہارمونک کہلاتا ہے۔ دوسرا ہارمونک، $n=2$ کے ساتھ اہتزاز موڈ ہے، اور اسی طرح آگے بھی۔

ایک لمبائی L کا پائپ، جس کا ایک سرا بند ہوا اور دوسرا کھلا ہو (جیسے ہوا کالم)، مندرجہ ذیل رشتے سے دیے گئے تعدد کے ساتھ اہتزاز کرتا ہے۔

$$\upsilon = (n + ½)\ \frac{v}{2L} \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

مندرجہ بالا رشتے سے دیے گئے تعددوں کا سیٹ، اس قسم کے نظام کے اہتزاز کے نارمل موڈ ہیں۔ $\frac{v}{4L}$ سے دیا جانے والا کم ترین تعدد بنیادی نوڈ یا پہلا ہارمونک ہے۔

.16 دونوں سروں پر بندھی ہوئی L لمبائی کی ڈوری یا ایک سرے پر بندھی اور ایک سرے پر کھلا ہوا یا دونوں سروں پر کھلا ہوا کالم جن مخصوص تعددوں سے اہتزاز کرتے ہیں وہ ان کے نارمل موڈ کہلاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک تعدد، نظام کا گمک دار تعدد ہے۔

.17 ضربیں (Beats) تب بنتی ہیں جب دو ایسی لہریں منطبق ہوتی ہیں، جن کے تعدد υ_1 اور υ_2 میں معمولی فرق ہوتا ہے اور جن کی سعتیں قابل مقابلہ ہوتی ہیں۔ ضرب تعدد ہے:

$$\upsilon_{beats} = \upsilon_1 \sim \upsilon_2$$

.18 ڈوپلر اثر، ایک لہر کے اس وقت ناپے گئے تعدد میں تبدیلی ہے جب وسیلہ S یا مشاہد (o) یا وسیلہ اور مشاہد دونوں، واسطے کی مناسبت سے حرکت کر رہے ہوں۔ آواز کے لیے، ناپی گئی تعدد v وسیلہ کے تعدد υ_0 کی شکل میں دیا جاتا ہے:

$$\upsilon = \upsilon_0 \left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon \ + \upsilon_s} \right)$$

یہاں v واسطہ میں آواز کی رفتار ہے، υ_0 مشاہد کی واسطہ کے مناسبت سے رفتار ہے اور υ_s وسیلہ کے واسطہ کی مناسبت سے رفتار ہے۔ اس فارمولہ کو استعمال کرنے میں، os کی سمت میں جو رفتاریں ہوں انہیں مثبت اور جو اس کے مخالف ہوں انہیں منفی لینا چاہیے۔

طبعی مقدار	علامت	ابعاد	اکائی	ریمارک
طول موج	λ	[L]	m	یکساں فیز کے دو متواتر نقطوں کے درمیان فاصلہ
اشاعت مستقلہ	k	$[L^{-1}]$	m^{-1}	$k = 2\pi / \lambda$
لہر چال	υ	$[LT^{-1}]$	ms^{-1}	$v = \upsilon\lambda$
ضرب تعدد	υ_{beat}	$[T^{-1}]$	s^{-1}	منطبق لہروں کے دو نزدیکی تعددوں کا فرق

قابل غور نکات

.1 ایک لہر، واسطے میں مادہ کی مجسّم طور پر حرکت نہیں ہے۔ ہوا کا چلنا اور ہوا میں آواز کی لہر کا گذرنا ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ اول الذکر میں ایک مقام سے دوسرے مقام تک ہوا کی حرکت شامل ہے۔ آخر الذکر میں ہوا کی پرتوں کے داب اور انطلاف شامل ہیں۔

.2 ایک لہر میں، ایک نقطے سے دوسرے نقطہ تک توانائی منتقل ہوتی ہے، مادہ نہیں۔

.3 کسی میکانیکی لہر میں توانائی کی منتقلی، واسطے کے نزدیکی اہتزاز کرتے ہوئے جزوں کے درمیان لچکیلی قوتوں کے ذریعے جفتگی کی وجہ سے ہوتی ہے۔

.4 عرضی لہریں صرف انہیں واسطوں میں سے گذر سکتی ہیں، جن کے لچک کے تحریفی مقیاس کی قدر قابل لحاظ ہوتی ہے۔طولی لہروں کے لیے لچک کے حجم مقیاس کی ضرورت ہوتی ہے، اس لیے وہ ہر قسم کے واسطے، ٹھوس رقیق اور گیسوں میں سے گذر سکتی ہیں۔

.5 ایک دئے ہوئے تعدد کی ہارمونی رواں لہر میں تمام ذرات کی سعت یکساں ہوتی ہے لیکن فیز مختلف ہوتے ہیں (دیے ہوئے وقت پر)۔ایک مقیم لہر میں، دونوڈوں کے درمیان تمام ذرات، ایک دیے ہوئے وقت پر یکساں فیز میں ہوتے ہیں لیکن ان کی سعتیں مختلف ہوتی ہیں۔

.6 ایک ایسے مشاہد کی مناسبت سے جو ایک واسطے میں حالت سکون پر ہو، اس واسطے میں ایک میکانیکی لہر کی رفتار v، صرف واسطے کی لچکیلی اور دوسری خاصیتوں (جیسے کمیت کثافت) پر منحصر ہے۔ یہ وسیلے کی رفتار پر منحصر نہیں ہے۔

.7 واسطے کی مناسبت سے رفتار v_0 سے حرکت کرتے ہوئے مشاہد کے لیے، ایک لہر کی رفتار v سے مختلف ہوتی ہے اور دی جاتی ہے: $v \pm v_0$

مشق

15.1 ایک 2.50kg کمیت کی ڈوری 200N تناؤ کے زیر اثر ہے۔ تنی ہوئی ڈوری کی لمبائی 20.0m ہے۔ اگر ایک سرے پر عرضی جھٹکا لگایا جائے، تو ڈوری کے دوسرے سرے تک پہنچنے میں خلل کو کتنا وقت لگے گا؟

15.2 ایک 300m اونچے مینار پر سے گرایا گیا پتھر، مینار کی بنیاد کے نزدیک تالاب کے پانی میں گرتا ہے۔ پتھر کے پانی میں گرنے کی آواز مینار پر کب سنائی دے گی۔ دیا ہے، ہوا میں آواز کی رفتار 340ms^{-1} ہے۔ ($g = 9.8 \text{ ms}^{-1}$)۔

15.3 ایک فولاد کے تار کی لمبائی 12.0m اور کمیت 2.10kg ہے۔ تار میں تناؤ کتنا ہونا چاہیے کہ تار پر ایک عرضی لہر کی رفتار، سوکھی ہوا میں آواز کی رفتار 343 ms^{-1} (20 °C) پر کے مساوی ہو۔

15.4 فارمولہ $v = \sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$ کے استعمال کے ذریعے وضاحت کیجیے کہ ہوا میں آواز کی رفتار کیوں۔

(a) دباؤ کے تابع نہیں ہے

(b) درجہ حرارت کے ساتھ بڑھتی ہے

(c) مرطوبیت (Humidity) کے ساتھ بڑھتی ہے

15.5 آپ سیکھ چکے ہیں کہ ایک رواں لہر، ایک بُعد میں، ایک تفاعل: $y = f(x,t)$ کے ذریعے ظاہر کی جاتی ہے، جہاں x اور t کو x-vt یا $(x+vt)$ کی شکل میں متحد ہونا لازمی ہے، یعنی کہ، $y = f(x + vt)$ کیا اس کا برعکس بھی صادق ہے؟ جانچیے کہ کیا y کے لیے مندرجہ ذیل تفاعلات کا ایک رواں لہر کو ظاہر کرنا ممکن ہے:

(a) $(x - vt)^2$

(b) $\log [(x + vt)/x_0]$

(c) $\dfrac{1}{x + vt}$

15.6 ایک چمگادڑ ہوا میں تعدد 1000khz کی بالاصوتی آواز خارج کرتی ہے۔ اگر آواز ایک پانی کی سطح سے ٹکراتی ہے تو، کیا طول لہر ہوگی؟(a) منعکس آواز کی (b) ترسیل ہونے والی آواز کی ؟ آواز کی رفتار: ہوا میں $340\ ms^{-1}$ ، پانی میں $1486\ ms^{-1}$۔

15.7 ایک اسپتال ایک نسیج (Tissue) میں رسولیوں کا مقام پتہ کرنے کے لیے ایک بالاصوتی تقطیع کار (Ultrasonic Scanner) استعمال کرتا ہے۔ اس نسیج میں آواز کی طول لہر کیا ہوگی، جس میں آواز کی چال $1.7\ Km\ s^{-1}$ ہے؟ تقطیع کار کے کام کرنے کا تعدد 4.2MHz ہے۔

15.8 ایک ڈوری پر ایک ہارمونی عرضی لہر دی جاتی ہے: $y(x,t) = 3.0\ sin(36\ t + 0.018x + \pi/4)$
جہاں x اور y، سینٹی میٹر میں ہیں اور t سیکنڈ میں۔ x کی مثبت سمت، بائیں سے دائیں ہے۔

(a) یہ ایک رواں لہر ہے یا قائم لہر؟ یہ اگر حرکت کر رہی ہے تو اس کی اشاعت کی چال اور سمت کیا ہیں؟

(b) اس کی سعت اور تعدد کی کیا قدریں ہیں؟

(c) مبدے پر آغازی فیز کیا ہے

(d) لہر میں دو متواتر فرازوں کے درمیان کم ترین فاصلہ کیا ہے؟

15.9 مشق 15.8 میں بیان کی گئی لہر کے لیے، نقل (y) بہ مقابلہ t گراف $x=0.2$ اور $x=4cm$ کے لیے کھینچیے۔ ان گرافوں کی شکلیں کیسی ہیں؟ لہر میں اہتزازی حرکت، ایک نقطہ سے دوسرے تک، کس طور پر مختلف ہے: سعت، تعدد یا فیز کے لحاظ سے۔

15.10 مندرجہ ذیل ہارمونی لہر: $y(x,t) = 2.0\ \cos 2\pi(10t - 0.0080x + 0.35)$
کے لیے، جہاں x اور y سینٹی میٹر میں ہیں، اور t سیکنڈ میں، ایسے دو نقطوں پر اہتزازی حرکت میں فیز فرق معلوم کیجیے، جن کے درمیان فاصلہ ہے:۔

(a) 4 m

(b) 0.5 m

(c) $\lambda/2$

(d) $3\lambda/4$

15.11 ایک دونوں سروں پر بندھی ہوئی ڈوری کا عرضی نقل دیا جاتا ہے: $y(x,t) = 0.06\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}x\right)\cos\ (120\ \pi t)$
جہاں x اور y سینٹی میٹر میں اور t سیکنڈ میں۔ ڈوری کی لمبائی 1.5m اور اس کی کمیت $3.0\times10^{2}kg$ ہے۔

مندرجہ ذیل کے جواب دیجیے:

(a) تفاعل ایک رواں لہر کو ظاہر کرتا ہے یا مقیم لہر کو؟

(b) اس لہر کی، مخالف سمتوں میں حرکت کرتی ہوئی دو لہروں کے انطباق کے بہ طور، تشریح کیجیے۔ ہر لہر کی طول لہر، تعدد اور چال کیا ہے؟

(c) ڈوری میں تناؤ معلوم کیجیے۔

15.12 (i) مشق 15.11 میں بیان کی گئی ڈوری پر، کیا ڈوری کے تمام نقاط یکساں (a) تعدد (b) فیز (c) سعت سے اہتزاز کرتے ہیں؟ اپنے جوابات کی وضاحت کیجیے۔ (ii) ایک نقطہ جو ایک سرے 0.375m دور ہے، اس پر سعت کتنی ہے؟

15.13 نیچے ایک لچکیلی لہر کے نقل کو ظاہر کرنے کے لیے (عرضی یا طولی نقل)، x اور t کے کچھ تفاعلات دیے گئے ہیں۔ بتائیے کہ ان میں سے کون ظاہر کرتے ہیں (i) ایک رواں لہر (ii) ایک قائم لہر یا (iii) کوئی لہر نہیں۔

(a) $y = 2\cos(3x)\sin(10t)$

(b) $y = 2\sqrt{x - vt}$

(c) $y = 3\sin(5x - 0.5t) + 4\cos(5x - 0.5t)$

(d) $y = \cos x \sin t + \cos 2x \sin 2t$

15.14 دو استوار سہاروں کے درمیان تنا ہوا ایک تار، 45Hz کے تعدد کے ساتھ، اپنے اساسی موڈ میں اہتزاز کرتا ہے۔ تار کی کمیت $3.5\times10^{-2}kg$ اور اس کی خطی کمیت کثافت $4.0\times10^{-2}kg\,m^{-1}$ ہے۔ (a) تار پر عرضی لہر کی چال کیا ہے؟ (a) تار میں تناؤ کتنا ہے۔

15.15 ایک میٹر لمبی ایک ٹیوب کا ایک سرا کھلا ہے اور دوسرے سرے پر حرکت کر سکنے والا پسٹن لگا ہے۔ جب ٹیوب کی لمبائی 25.5cm یا 79.3cm ہوتی ہے تو یہ ایک معین تعدد والے وسیلے (340Hz کی ٹیوننگ فارک) سے گمک ظاہر کرتی ہے۔ تجربہ کے درجہ حرارت پر ہوا میں آواز کی رفتار کا تخمینہ لگائیے۔ کنارہ اثرات (edge effects) نظر انداز کیے جا سکتے ہیں۔

15.16 100cm لمبی فولادی چھڑ، اپنے وسطی نقطہ پر بندھی ہوئی ہے۔ چھڑ کے طولی ارتعاشوں کا بنیادی تعدد 2.53kHz ہے۔ فولاد میں آواز کی رفتار کیا ہے؟

15.17 ایک 20cm لمبا پائپ ایک سرے پر بند ہے۔ ایک 430Hz کے وسیلے سے پائپ کا کون سا ہارمونی موڈ گمک کرے گا؟ کیا یہی وسیلہ پائپ کے ساتھ جب بھی گمک کرے گا اگر پائپ کے دونوں سرے کھلے ہوں؟ (ہوا میں آواز کی رفتار $340\,ms^{-1}$ ہے۔

15.18 ستار کے دو تار A اور B ایک دوسرے سے لے میں تھوڑے باہر ہیں (Ga سُر میں) اور 6Hz تعدد کی ضرب پیدا کرتے ہیں۔ تار A میں تناؤ کو کچھ کم کیا جاتا ہے اور ضرب تعدد کم ہو کر 3Hz ہو جاتا ہے۔ اگر A کا آغازی تعدد 324Hz ہے، تو B کا تعدد کیا ہے؟

15.19 وضاحت کیجیے کیوں (یا کیسے):

(a) ایک آواز کی لہر میں، ایک نقل نوڈ ایک دباؤ اینٹی نوڈ ہوتا ہے اور اس کے برخلاف بھی۔

(b) چمگادڑیں بغیر آنکھوں کے بھی، فاصلے، سمتیں اور رکاوٹوں کی طبع اور سائز معلوم کر لیتی ہیں۔

(c) ایک وائلن سر اور ایک ستار سر کا تعدد اگر یکساں ہو تو بھی ہم ان دونوں کے سروں میں فرق کر سکتے ہیں۔

(d) ٹھوس اشیا، طولی اور عرضی دونوں لہروں کو سہار سکتے ہیں، جب کہ گیسوں میں سے صرف طولی لہریں گذر سکتی ہیں۔

(e) ایک انکساری واسطے (Dipressive medium) میں سے گذرتے ہوئے ایک پلس کی شکل خراب ہو جاتی ہے۔

15.20 ایک اسٹیشن کے باہر سگنل پر کھڑی ریل گاڑی، 400Hz تعدد کی، ساکت ہوا میں، سیٹی بجاتی ہے۔ (a) ایک پلیٹ فارم پر کھڑے مشاہد کے لیے سیٹی کا تعدد کیا ہوگا جب ٹرین (a) $10\,ms^{-1}$ کی چال سے پلیٹ فارم کی طرف آتی ہے (b) پلیٹ فارم سے $10\,ms^{-1}$ کی رفتار سے دور جاتی ہے۔ (ii) دونوں میں سے ہر صورت میں آواز کی رفتار کیا ہے؟ ساکت ہوا میں آواز کی رفتار $340\,ms^{-1}$ ہے۔

15.21 ایک اسٹیشن یارڈ میں کھڑی ٹرین، ساکت ہوا میں 400Hz تعدد کی سیٹی بجاتی ہے۔ یارڈ سے اسٹیشن کی جانب، ہوا $10\,ms^{-1}$ کی چال سے، چلنے لگتی ہے۔ ایک اسٹیشن کے پلیٹ فارم پر کھڑے مشاہد کے لیے آواز کی تعدد، سعت اور چال کی قدریں کیا ہیں۔ کیا یہ صورت بالکل ویسی ہی ہے (متماثل ہے)، جیسے کہ ہوا ساکت ہو، اور مشاہد یارڈ کی جانب $10\,ms^{-1}$ کی چال سے دوڑے؟ ساکت ہوا میں آواز کی رفتار $340\,ms^{-1}$ لی جا سکتی ہے۔

اضافی مشق

15.22 ایک ڈوری پر ایک رواں ہارمونی لہر، بیان کی جاتی ہے: $y(x,t) = 7.5\sin(0.0050x + 12t + \pi/4)$

(a) $x = 1\text{cm}$، $t = 1\text{s}$ پر ایک نقطہ کے اہتزاز کے نقل اور رفتار کیا ہوں گے؟

(b) ڈوری کے ان نقاط کے مقام معلوم کیجیے جن کے عرضی نقل اور رفتار کی قدریں وہی ہوں گی جو $x = 1\text{cm}$ نقطہ کی t=2s,11s5s پر ہیں۔

15.23 ایک پتلی آواز پلس ایک واسطے میں سے بھیجی جاتی ہے (a) کیا اس پلس کی متعین ہے (i) تعدد (ii) طول موج (iii) اشاعت کی چال (b) اگر پلس شرح، ہر 20S پر 1 ہے (یعنی کہ سیٹی ہر 20S بعد، سیکنڈ کے ایک ذرا سے حصے کے لیے بجائی جاتی ہے)، تو سیٹی کے ذریعے پیدا کیے گئے سر کا تعدد کیا 1/20 یا 0.5Hz کے مساوی ہوگا۔

15.24 ایک خطی کمیت کثافت $8.0\times10^{-3}\ kgm$ کی ڈوری کا ایک سرا، 256Hz تعدد کی بجلی سے چلنے والی ٹیونک فارک سے منسلک ہے۔ دوسرا سرا ایک گراری سے گذرتا ہوا ایک پلڑے سے بندھا ہے، جس میں 90Kg کی کمیت رکھی ہے۔ گراری کا سرا آرہی ساری توانائی جذب کر لیتا ہے، اس طرح کہ اس سرے پر منعکس لہروں کی سعت نظر انداز کی جا سکتی ہے۔

t=0 پر، بایاں سرا (فورک کا سرا)، $x=0$ کا عرضی نقل $(y=0)$ صفر ہے اور وہ مثبت y سمت میں حرکت کر رہا ہے۔ لہر کی سعت 5.0cm ہے۔ ڈوری پر لہر کو بیان کرنے والا عرضی نقل y، بہ طور تفاعل x اور t، لکھیے۔

15.25 ایک پن ڈبی میں نصب سونار نظام 40.0KHz کے تعدد پر کام کرتا ہے۔ دشمن کی ایک پن ڈبی، $360\ kmh^{-1}$ کی رفتار سے سونار کی طرف آتی ہے۔ پن ڈبی سے منعکس ہوئی آواز کا تعدد کیا ہے؟ پانی میں آواز کی رفتار $1450 ms^{-1}$ لیجیے۔

15.26 زلزلے زمین کے اندر آواز کی لہریں پیدا کرتے ہیں۔ ایک گیس کے برخلاف، زمین عرضی، (s) اور طولی (p) دونوں آواز کی لہریں محسوس کر سکتی ہے۔ s لہر کی رفتار $4.0 kms^{-1}$ اور P لہر کی $8.0 kms^{-1}$ ہے۔ ایک زلزلہ نگار ایک زلزلے کی P اور S لہریں ریکارڈ کرتا ہے۔ پہلی P لہر، پہلی S لہر سے 4.0 منٹ پہلے آتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ لہریں خط مستقیم میں حرکت کرتی ہیں، بتائیے کہ زلزلہ کتنے فاصلے پر آیا۔

15.27 ایک چمگادڑ ایک غار میں چکر کاٹ رہی ہے اور بالاصوتی آواز کے ذریعے راستہ تلاش کر رہی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ چمگادڑ کا آواز خارج کرنے کا تعدد 40KHz ہے۔ ایک سیدھی دیوار کی طرف ایک بار براہ راست اڑاتے ہوئے چمگادڑ ہوا میں آواز کی رفتار کے 0.03 کی رفتار سے اڑتی ہے۔ دیوار سے منعکس ہونے کے بعد چمگادڑ کیا تعدد سنتی ہے؟