संख्याओं से खेलना

(Playing with Numbers)

अध्याय-3

3.1 परिचय

इस घटना को देखें :

हासिनी उसके जन्मदिवस पर मित्रों को चॉकलेट बांटना चाहती है। उसके पिताजी एक चॉकलेट का डिब्बा लाते हैं। उसमें 125 चॉकलेट हैं। उस कक्षा में 25 छात्र हैं।

वह सोचती है कि सभी मित्रों को समान चॉकलेट मिले। वह पहले 2 चॉकलेट देना चाहती है। कुछ चॉकलेट बचते हैं, वह बाद में 3 चॉकलेट देना सोचती है। अब भी कुछ और चॉकलेट बचते हैं। बाद में वह पांच चॉकलेट देना चाहती है, तो शेष कुछ भी नहीं बचता।

क्या कुछ ऐसी आसान विधि है जिससे उनके मित्रों में समान रूप से चाकलेट बांटे जाइए? सोचिए। वह 125 को 5 से विभाजित कर सकती है। आप पिछली कक्षा में 2, 3, 5, 6, 9 और 10 से विभाजन के नियम से परिचित है। उसी प्रकार हम 4, 8 और 11 से विभाजन का नियम सीखेंगे।

3.2 विभाजन का नियम (Rule of Divisibility)

मान लो एक संख्या 29 है, उसे 4 से भाग देने पर 1 शेष आएगा, भागफल 7। क्या तुम कह सकते हो कि 29 पूर्ण रूपसे विभाजित है 4 से? कैसे?

24 को चार से विभाजित करने पर शेषांक ज्ञात करो?

क्या 24, 4 से पूरी तरह विभाजित होता है?

अतः कोई संख्या किसी संख्या से पूर्ण रूप से विभाजित होकर शेष 0 बचता है, वह पूर्ण संख्या है।

कोई संख्या बिना भाग किए किसी संख्या से पूर्ण विभाजित है या नहीं देखने की विधि को विभाजन का नियम कहते हैं।

अब हम पिछली कक्षा के विभाजन नियम का स्मरण करेंगे।

SCERT TELANGANA

3.2.1 2 से विभाजन

इस सारणी में संख्याओं को देखो

सारणी चार्ट

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2 के गुणक को काटो। इन संख्याओं में से इकाई के स्थान पर कोई पैटर्न दिखाई देता है?

इन संख्याओं में केवल एक अंक 0, 2, 4, 6, 8 इकाई में है। यदि इकाई में 0, 2, 4, 6, 8 हो तो वह संख्या 2 से विभाजित होती है, यह नियम 2 से विभाजन का है।

इसे करो

क्या 953,9534,900,452 संख्यायें 2 से विभाजित होती है? सही विभाजन मालूम करो।

3.2.2 3 से विभाजन

3 के सभी गुणक को गोल करो। ये संख्याएं 21, 27, 36, 54 आदि हैं। क्या तुम इकाई में कुछ ऐसी संख्याओं को देखते हो ? नहीं, क्योंकि समान इकाई वाले अंक 3 से विभाजित होते हैं या नहीं। उदाहरण के लिए 27 और 37 में इकाई के स्थान पर 7 है क्या वे दोनों 4 से विभाजित है क्या ?

21, 36, 54, 63, 72, 117 के अंकों को जोड़ो :

2 + 1 = 3   5 + 4 = ______   7 + 2 = ______

3 + 6 = _____   6 + 3 = ______   1 + 1 + 7 = ______

सभी संख्याएं 3 से विभाजित हैं।

हम यह कह सकते हैं कि यदि संख्याओं का योग 3 से विभाजित है, तो वह संख्या 3 से विभाजित होती है। इसी तरह सभी वृत्त में के संख्याओं को देखो।

SCERT TELANGANA

इसे करो

क्या निम्न संख्याएं 3 से विभाजित है ?

i. 45986 ii. 36129 iii. 7874

3.2.3 6 से विभाजन

ऐसी संख्याएं जो 6 से विभाजित है, उन्हें काटो।

क्या तुम देखोगे कि इनमें से कोई विशेष है ?

हां, वे संख्याएं 2 और 3 से विभाजित होती हैं।

यदि कोई संख्या 2 और 3 से विभाजित है, तो वे 6 से भी विभाजित होती है।

इसे करो

1. क्या 7224 विभाजित है 6 से, क्यों ?
2. 4 अंकों की संख्या का कोई उदाहरण दो, जो 6 से विभाजित होती है ?
3. क्या तुम ऐसा उदाहरण दे सकते हो, जो 6 से विभाजित है, लेकिन 2 और 3 से नहीं, क्यों ?

3.2.4 9 से विभाजन

☐ इस तरह का डब्बा बनाओ, जो 9 का गुणक है।

संख्याओं की तालिका में अब 9 से विभाजन का नियम मालूम करो (अंकों को जोड़ने पर)

संख्याओं के अंकों का योगफल 9 से विभाजित होता है।

उदाहरण : 81 लो, $8 + 1 = 9$ उसी प्रकार 99, $9 + 9 = 18$, 9 से विभाजित होता।

यदि दो संख्याओं के अंकों का योग 9 से विभाजित हो तो वह संख्या 9 से विभाजित होती है।

इसे करो

1. 9846 यह संख्या 9 से विभाजित है क्या ?
2. बिना गुणा किए, बताइए कि क्या 8998794 यह संख्या 9 से विभाजित होती है ?
3. 786 यह संख्या 3 और 9 से विभाजित होती है क्या ?

3.2.5 5 से विभाजन

क्या 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 ये सभी संख्याएं 5 से विभाजित होती है।

क्या 53 विभाजित है 5 से, क्यों ?

क्या तुम कह सकते कि इकाई के स्थान पर 0 और 5 हो तो वह 5 से विभाजित है।

इन संख्याओं को देखो 5785, 6021, 1000, 101010, 9005. इन संख्याओं में कौनसी संख्या 5 से विभाजित होती है और देखो की सही विभाजन है क्या ?

SCERT TELANGANA

3.2.6 10 से विभाजन

10 से विभाजित होने वाली संख्याओं को अंकित करो।

तुम क्या देखोगे ?

1. इकाई के स्थान पर 0 रहता हैं।
2. सभी संख्याएँ 5 और 2 से विभाजित होते हैं।

अभ्यास 3.1

1. इनमें से कौनसी संख्या 2, 3 से और 6 से विभाजित होती है?

   (i) 321729 (ii) 197232 (iii) 972132 (iv) 1790184

   (v) 312792 (vi) 800552 (vii) 4335 (viii) 726352

2. निम्न में कौनसी संख्या 5 और 10 से विभाजित होती है?

   25, 125, 250, 1250, 10205, 70985, 45880

   वह संख्या जो 10 से विभाजित है और 2 और 5 से भी विभाजित होती है।

3. 3 और 9 का विभाजन नियम का उपयोग करो।

संख्या	संख्या में पदों का योगफल	विभाजित	
		3	9
72	....		
197	....		
4689	....		
79875	....		
988974	9 + 8 + 8 + 9 + 7 + 4 = 45	हाँ	हाँ

4. 3 अंकों के 3 विभिन्न संख्याएं बनाओ 1, 9, 8। इन संख्याओं के उपयोग से। एक संख्या का उपयोग एक बार ही करना चाहिए। बताओ कि यह संख्या 9 से विभाजित है क्या?

5. इनमें से कौनसी संख्या 2, 3, 5, 6, 9 विभाजित करती है 12345 को पूर्ण रूप से?

6. दो अंकों की अलग संख्या लिखो, जिसमें अंक 3, 4 और 5 का उपयोग हो और बताओ कि क्या यह संख्या 2, 3, 5, 6 और 9 से विभाजित है क्या?

7. सबसे छोटी संख्या और बड़ी संख्या लिखो, इस रिक्त स्थान में, जो कि 3 से विभाजित हो सके।

   i. __ 6724 ii. 4765__ 2 iii. 7221__ 5

8. 123 में कौनसी सबसे छोटी संख्या जोड़ना चाहिए कि जो 5 से पूर्ण विभाजित हो जाए।

9. 256 में से कौनसी छोटी संख्या घटाने पर वह 10 से पूर्ण विभाजित होगी।

SCERT TELANGANA

3.3 *गुणन खण्ड* (Factors)

हम विभाजन और 2, 3, 5, 6, 9 और 10 के विभाजन का नियम सीखे। अब हम गुणन खण्ड के बारे में जानेंगे।

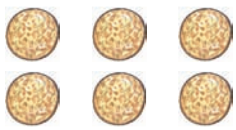
अब इस घटना को देखो।

देवी के पास 6 सिक्के हैं। वह उन्हें इस तरह से स्तंभों में व्यवस्थित करना चाहती है कि प्रत्येक स्तंभ में सिक्कों की संख्या समान हो और वह सभी सिक्कों का उपयोग करके कई तरीकों से व्यवस्थित करती है।

स्थिति 1 1 सिक्का प्रत्येक स्तंभ में रखो

स्तंभों की संख्या = 6

कुल सिक्के $= 1 \times 6 = 6$

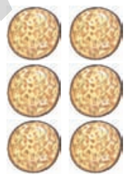


स्थिति 2 2 सिक्के प्रत्येक स्तंभ में रखो

स्तंभों की संख्या = 3

कुल सिक्के $= 2 \times 3 = 6$

स्थिति 3 3 सिक्के प्रत्येक स्तंभ में रखो



स्तंभों की संख्या = 2

कुल सिक्के $= 3 \times 2 = 6$

स्थिति 4 6 सिक्के प्रत्येक स्तंभ में रखो

स्तंभों की संख्या = 1

कुल सिक्के $= 6 \times 1 = 6$

सभी सिक्कों को उपरोक्त आकार द्वारा व्यवस्थित किया जा सकता है।

इस व्यवस्था से देवी ने यह देखा कि 6 को दो के गुणन खण्ड के रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$6 = 1 \times 6$ $\quad 6 = 2 \times 3$ $\quad 6 = 3 \times 2$ $\quad 6 = 6 \times 1$

$6 = 2 \times 3$ से 2 और 3 विभाजित होता 6 पूर्ण रूप से। अतः 6 के गुणन खण्ड 2 और 3 है। उनके गुणनफल से $6 = 1 \times 6$, अतः 6 और 1 खण्ड है 6 के।

1, 2, 3 और 6 खण्ड है 6 के।

वह संख्या जो किसी संख्या से पूर्ण विभाजित होती है, उसे खण्ड कहते हैं। प्रत्येक संख्या पूर्ण रूप से विभाजित होती है गुणन खण्ड से। 1, 2, 3 और 6 गुणन खण्ड है 6 का, उसी तरह 1 और 19 गुणन खण्ड है 19 गुणन खण्ड नहीं है क्यों ?

इस तालिका को देखो :

संख्या	गुणन खण्ड
12	1, 2, 3, 4, 6, 12
18	1, 2, 3, 6, 9, 18
20	1, 2, 4, 5, 10, 20
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

इस तालिका से हम यह देखते हैं कि

1. 1 सभी संख्याओं का गुणन खण्ड है, यह सबसे छोटा गुणन खण्ड है।

SCERT TELANGANA

2. सभी संख्याएँ स्वयं के गुणन खण्ड है और
3. सभी खण्ड समान है या गुणन खण्ड से कम है।
4. दिए गए संख्याओं के गुणन खण्ड को गिन सकते।

इसे करो

1. 80 के गुणन खण्ड मालूम करो?
2. दिए गए सभी संख्याओं का गुणन खण्ड मालूम करो, जो पूर्ण विभाजित होता है। 28 के गुणन खण्ड मालूम करो। विभाजन द्वारा जाँच करो।
3. 15 और 24 का गुणन खण्ड 3 है, उनके अंतर में भी 3 गुणन खण्ड है क्या?

3.4 रूढ़ और संयुक्त संख्या (Prime and Composite Numbers)

इन संख्याओं के कुछ गुणन खण्ड देखो :

संख्या	खंड	खंडों की संख्या
1	1	1
2	1, 2	2*
3	1, 3	2*
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2*
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2*

इस तालिका में कौनसी संख्या के सिर्फ दो गुणन खण्ड है।

चार संख्याएं 2, 3, 5, 7 के दो गुणन खण्ड है, जिसे इस * चिन्ह से दर्शाया गया।

अतः 1 और स्वयं संख्या में जिस संख्या का खण्ड स्वयं और 1 है, उसे रूढ संख्या कहते हैं।

कौनसी संख्या में दो से खण्ड रहते हैं?

दो से ज्यादा खण्ड जिसमें रहते उदाः 4 और 6 वे संयुक्त संख्या कहलाती है।

10 से बड़ी पांच संयुक्त संख्या के उदाहरण दो। जिसमें एक ही गुणनखण्ड रहता है।

संख्या 1 में केवल एक ही खण्ड रहता स्वयं का, अतः 1 न तो रूढ है और न तो संयुक्त है।

इसे करो

1. सबसे छोटी रूढ संख्या कौनसी है?
2. सबसे छोटी संयुक्त संख्या कौनसी है?
3. सबसे छोटी विषम संयुक्त संख्या कौनसी है?
4. 5 विषम और 5 सम संयुक्त संख्याएं बताओ?
5. क्या 1 रूढ या सम संख्या है और क्यों?

SCERT TELANGANA

यह विविध ग्रिक के गणितज्ञ एरोस्थेनेस ने तीसरी शताब्दी बी.सी. में मालूम की थी। 1 से 100 तक की संख्याओं को लिखोः

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चरण 1 : 1 को काटो क्योंकि यह न तो सम है न ही संयुक्त है।

चरण 2 : 2 को गोलाकार करो। सभी 2 के गुणक को काटो जैसे 2, 4, 6, 8, ...

चरण 3 : तुम देखोगे कि जो नहीं कटे वह संख्या 3 होगी। 3पर गोला लगाओ। अब सभी 3 के गुणकों को काटो।

चरण 4 : अब शेष 5 है। 5 पर गोला लगाओ। सभी 5 के गुणक को काटो।

चरण 5 : सभी संख्याओं को इसी प्रकार से दोहराओ जब तक या तो गोलाकार या कटने वाले हो।

गोले में आनेवाली सभी संख्याएँ रूढ संख्याएँ हैं एक के अलावा जो काटी गयी संख्याएँ संयुक्त संख्यायें होगी।

इसे करो

1. एक ऐसी संख्या जो रूढ है, जिसे विलोम करने पर दूसरी रूढ संख्या आती है।
2. यदि 311 रूढ संख्या है, तो दूसरी दो रूढ संख्या बताओ, जिसे दुबारा व्यवस्थित करके लिखते है ?

3.4.1 सहरूढ़ी या संबंधित रूढ़ी संख्याएँ (Co-prime or relative prime)

3 और 8 को देखो।

3 के गुणन खण्ड 1 और 3 है।

8 के गुणन खण्ड 1, 2, 4, 8 है।

3 और 8 के समान गुणन 1 है।

SCERT TELANGANA

जिस संख्या का केवल गुणन खण्ड 1 होता है, एंसी संख्या को सह रूढ संख्या कहते हैं। दो सह रूढ संख्या के उदाहरण दो, जिनके समान खण्ड ज्ञात करो।

उदाहरण 1: 4 और 5 दो सह रूढ संख्या है।

हल : क्या दोनों रूढ संख्या है? नहीं 4 रूढ नहीं है, सिर्फ 5 रूढ संख्या है।

हम कह सकते हैं कि दो रूढ संख्या सह रूढ संख्या कहलाती है, लेकिन सभी सह रूढी संख्याएँ रूढी संख्या रहना जरूरी नहीं है।

3.4.2 *जुड़वी रूढ संख्या* (Twin Primes)

जिन रूढ संख्याओं में 2 का अंतर रहता है, उसे जुड़वी रूढ संख्या कहते हैं। उदाहरण (3, 5), (5, 7), (11, 13), (41, 43) आदि।

क्या जुड़वा रूढ़ संख्या सम्बल रूढ़ संख्या है। समझाओ?

इसे करो

इनमें जुड़वी रूढ संख्या कौनसी है, पहचानो :

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 और 10

अभ्यास 3.2

1. सभी संख्याओं के खण्ड मालूम करो :

   i. 36 ii. 23 iii. 96 iv. 115

2. निम्न में से कौनसी जोड़ी सम रूढ है?

   i. 18 और 35 ii. 216 और 215

   iii. 30 और 415 iv. 17 और 68

3. 1 और 20 में बड़ी रूढ संख्या कौनसी है?

4. 10 और 30 में रूढ संख्या और संयुक्त संख्याओं को अलग करो।

5. 17 और 71 रूढ संख्या है। दोनों में समान अंक 1 और 7 है। 100 से कम युग्म के और दो जोड़ी मालूम करो?

6. 20 से कम जुड़वी रूढ संख्या ज्ञात करो?

7. दो रूढ संख्या मालूम करो, जिनका गुणनफल 35 है?

8. 36 की दो सम रूढ संख्याएँ लिखिए?

9. 100 से कम सात संयुक्त संख्या लिखो?

10. 53 को तीन रूढ संख्याओं के योगफल के रूप में लिखिए?

11. दो रूढ संख्याओं को इस प्रकार लिखो, जिसका अंतर 10 है?

12. 20 से कम ऐसी तीन जोड़ी रूढ संख्या लिखिए जिनका योगफल 5 से विभाजित है।

SCERT TELANGANA

3.5 रूढ़ खण्डन (Prime Factorization)

यदि कोई संख्या को उसके गुणन खंडों के गुणनफल द्वारा दर्शाते हैं तो हमें कह सकते है कि वह संख्या को गुणनखंडित किया गया। खण्ड मालूम करने की विधि को गुणन खण्ड कहते हैं।

इसी तरह और कई विधियां हैं गुणन खण्ड मालूम करने की। उदाहरण के लिए एक संख्या 24 लो। 24 को इस प्रकार लिख सकते।

i) $24 = 1 \times 24$ ii) $24 = 2 \times 12$ iii) $24 = 3 \times 8$

iv) $24 = 4 \times 6$ v) $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

उदाहरण (ii) और (iii) में दोनों खण्ड एक रूढ़ और दूसरा सम संख्या है। उदाहरण (iv) में दोनों सम संख्या है, परंतु (v) में सभी खण्ड रूढ़ है। (i) में खण्ड संयुक्त संख्या है।

(v) वाले खण्डो को जो सभी रूढ़ संख्या है, खण्डन करना कहते हैं।

खण्डन अर्थात एक रूढ़ खण्डन वह है, जिसमें और खण्डन नहीं किया जा सकता है।

3.5.1 रूढ़ खण्डन पद्धति

1. भाग पद्धति : 42 का विषम गुणन खण्ड मालूम करने के लिए विभाजन का नियम लागू करते है।
   सबसे छोटी रूढ संख्या से शुरू करो, जब तक शेष नहीं रहता विभाजन करो।
   ∴ रूढ गुणन खण्ड 42 का $2 \times 3 \times 7$

2	42
3	21
7	7
	1

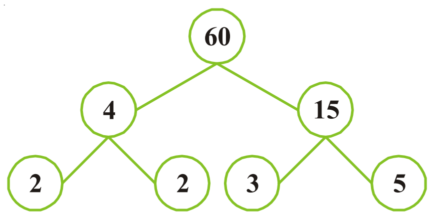
2. गुणन खण्ड वृक्ष विधि : 60 का रूढ गुणन खण्ड वृक्ष चित्र की सहायता से मालूम करना।

चरण 1: 6 के दो खण्ड मालूम करो।

चरण 2: 4 और 5 के खण्ड मालूम करो, जो कि संयुक्त संख्या है।

चरण 3: सभी संख्याएं रूढ संख्या आने तक खण्ड बनाओ।

60 के रूढ गुणन खण्ड = 2 x 2 x 3 x 5



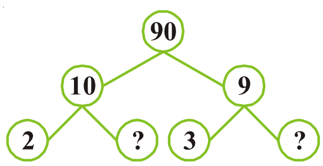
इसे करो

1. विभाजन विधि से 28 और 36 के रूढ गुणन खण्ड मालूम करो।
2. 42 के गुणन खण्ड वृक्ष चित्र की सहायता से मालूम करो।

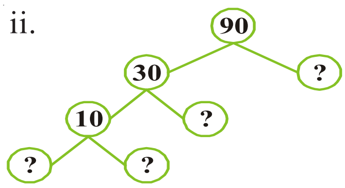
अभ्यास 3.3

1. 90 के गुणन खण्ड में रिक्त पद मालूम करो?

i.



ii.



SCERT TELANGANA

2. 84 को विभाजन विधि से हल करो ?

3. 4 अंकों की बड़ी संख्या को रूढ खण्डों में व्यक्त करो ?

4. मैं सबसे बड़ी संख्या हूं, जिसमें चार अलग रूढ खण्ड हैं, क्या तुम मुझे पहचान सकते हो ?

3.6 *सामान्य गुणनखण्ड* (Common Factors)

इस तालिका को देखो :

संख्या	12	18
खण्ड	1, 2, 3, 4, 6, 12	1, 2, 3, 6, 9, 18

12 और 18 के समान खण्ड 1, 2, 3 और 6 है।

समान खण्ड वह है जो सभी संख्याओं के खण्ड है।

20 और 24 के समान खण्ड मालूम करो।

3.6.1 *महत्तम सम अपवर्त्य* (H.C.F.)

ऊपर की सारणी से हम यह देखते हैं कि 12 और 18 के समान गुणन खण्ड 1, 2, 3 और 6 है।

इसमें सबसे बड़ी संख्या कौनसी है? 6 है तो हम कह सकते हैं कि 12 और 18 की सबसे बड़ी समान खण्ड म.स.भ. 6 है।

दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स.भ. या समान गुणन खण्ड। यह गरिष्ठ समान विभाजन जी.सी.डी. भी कहते हैं

3.6.2 *म.स.भ. मालूम करने की विधि :*

1. **रूढ खंडों की विधि**

20, 30, 45 का म.स.भ. मालूम करो।

2	12
2	6
3	3
	1

2	30
3	15
5	5
	1

3	36
3	12
2	4
2	2
	1

अतः 12 = [2] × [3] × 2

30 = [2] × [3] × 5

36 = [2] × [3] × 2 × 3

36, 12, 30 को समान खण्ड 6 है या 2 x 3 = 6.

अर्थात म.स.भ. 12, 30, 36 का 6 है।

इसे करो

12, 16, 28 का म.स.भ. मालूम करो ?

SCERT TELANGANA

2. म.स.भ. विभाजन विधि द्वारा :

ग्रीक के महान गणितज्ञ यूक्लिड ने इस विधि का अविष्कार किया, सबसे बड़ी संख्या को छोटी सख्या से विभाजन करो और फिर पूर्व संख्या को शेष से विभाजन करो और फिर पूर्व संख्या को शेष से विभाजन तब तक करो, जब तक कि शून्य आवे। आखरी विभाजन म.स.भ. होगा।

उदाहरण : 56 और 64 का म.स. ज्ञात करो।

हल :

```
                56)  64 (1
                    -56
आखरी विभाजक        8) 56 ( 7
                     -56
                       0
```

आखरी विभाजन 8 और शेष 0 है, तो 56 और 64 का म.स. 8 है।

यह विधि से हम बड़ी संख्याओं का म.स.भ. ज्ञात कर सकते है?

उदाहरण 3: 40, 56 और 60 का म.स. ज्ञात करो।

हल :

चरण 1: 40 और 56 का म.स.

```
                40)  56 (1
                    -40
शेष                16) 40 (2
                      -32
आखरी विभाजक            8) 16 (2
                         -16
                           0
```

40 और 56 का म.स. 8 है।

चरण 2: तीसरी संख्या का म.स. और प्रथम दो संख्याओं का म.स.।

60 और 8 का म.स.

```
                8)  60  (7
                   -56
आखरी विभाजक      4) 8  (2
                  -8
शेष                0
```

8 और 60 का म.स. 4 है।

चरण 3: यह संख्या तीनों दी गयी संख्याओं का म.स. है।

अतः 40, 56 और 60 का म.स. 4 है।

SCERT TELANGANA

इसे करो

28, 35 और 49 का म.स. ज्ञात करो?

सोचो, विचार करो और लिखो

किन्हीं दो का म.स. क्या है?

(i) क्रमगत संख्या (ii) क्रमगत सम संख्या

(iii) क्रमगत विषम संख्या

तुमने इससे क्या सिखा? अपने मित्र से इसकी चर्चा करो।

उदाहरण 4: दो टैंक में 850 लीटर, 680 लीटर केरोसीन है।

हल : म.स.भ. प्राप्त करने के लिए हमें एक ऐसा पात्र लेना है, जो दोनों टैंकरों को पूर्णतः विभाजित करता है और उसका आयतन अधिकतम हो।

अर्थात 850 और 680 का म.स.भ. 170 होगा, जो 850 को 5 बार विभाजित करताहै और 680 को 4 बार।

अभ्यास 3.4

1. म.स. ज्ञात करो रूढ गुणन खण्डों के उपयोग से म.स.अ ज्ञात करों।

   i. 18, 27, 36 ii. 106, 159, 265

   iii. 10, 35, 40 iv. 32, 64, 96, 128

2. 504, 792 और 1080 इन संख्याओं की बड़े गुणन खण्ड ज्ञात करों।

3. एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई ऊँचाई क्रमशः 12, 15, 18 मीटर है, तो सबसे बड़ी टेप की लम्बाई मालूम करो, जिससे कमरा नाप सके।

4. 4 और 15 की सम रूढ संख्या मालूम करो।

   4 = 2 x 2 और 15 = 3 x 5 क्योंकि कोई समान रूढ खण्ड नहीं है। 4 और 5 का म.स. 0 है। क्या यह उत्तर सही है? यदि नहीं, तो सही उत्तर क्या है?

5. तीन डब्बे जो 32 लीटर, 24 लीटर, 48 लीटर के हैं तीनों डिब्बों से तेल खाली करने के लिए आवश्यक डिब्बों की अधिकतम क्षमता क्या होगी?

3.7 समान गुणक (Common Multiples)

4 और 6 के गुणक

4 के गुणक = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ..., ..., ...

6 के गुणक = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ..., ..., ...

4 और 6 के समान गुणक = 12, 24, 36, ..., ..., ...

SCERT TELANGANA

3.7.1 लघुतम सम अपवर्त्य (L.C.M.)

4 और 6 के समान गुणक 12, 24, 36, ..., ..., ...

इनमें सबसे कम 12 है।

4 और 6 के गुणक में सबसे छोटी संख्या 12 है।

∴ अतः 4 और 6 का ल.स. 12 है।

उदाहरण 5 : यदि दो घंटी एक साथ बजती है, यदि प्रत्येक घंटी 4 मिनट और 4 मिनट से बजती है, यदि कुछ समय बाद दोनों एक साथ कब बजेंगी ?

हल : पहली घंटी 3 मिनट के बाद बजेगी।

3 मिनट के बाद 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ..., ... (3 के गुणक)

दूसरी घंटी 4 मिनट के बाद बजेगी।

4 मिनट के बाद दूसरी घंटी 8, 12, 16, 20, 24, ..., ..., (4 के गुणक)

दोनों घंटी एक साथ 12 मिनट, 24 मिनट ....., ..., (दोनों के समान गुणक 3 और 4)

इनमें सबसे छोटी (ल.स.) 12 मिनट है अर्थात 12 मिनट के बाद दोनों एक साथ बजेगी।

अर्थात हम कह सकते हैं कि

सबसे छोटी दो संख्याओं का गुणक दो या दो से अधिक संख्याओं का समान गुणक रहता है।

सभी समान गुणक लिखने के बदले, हम ल.स. लेते हैं सीधे।

3.7.2 लघुतम सम अपवर्त्य मालूम करने की विधि :

1. रूढ गुणन खण्ड विधिः

36 और 60 का ल.स. रूढ गुणन खण्ड विधि से–

चरण1: प्रत्येक संख्या को उनके गुणक के रूप में लिखो–

36 के खण्ड $= \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 3$

60 के खण्ड $= \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 5$

चरण2: समान खण्ड को लो $2 \times 2 \times 3$

चरण3: दूसरे बचे हुए खण्ड लो 3×5

चरण4: सभी समान गुणक और बचे हुए खण्ड ल.स. कहलाते है।

अतः 36 और 60 का ल.स. $= (2 \times 2 \times 3) \times 3 \times 5 = 180$

प्रयत्न कीजिए

1. ल.स. मालूम करो

i.	3, 4	ii.	10, 11	iii.	5, 6, 7
iv.	10, 30	v.	4, 12, 24	vi.	3, 12

तुम क्या देखोगे ?

SCERT TELANGANA

यदि दो संख्याओं में एक गुणक है, दूसरे का तो सबसे बड़ी संख्या ल.स. रहती है दूसरी संख्या की।

2. भाग पद्धति

24 और 90 का एल.सी.एम. ल.स. ज्ञात करो।

चरण1: संख्याओं को पंक्ति में लिखो।

चरण2: छोटी संख्या से कम से कम दो संख्याओं को विभाजित करो। शेष बची हुई संख्या जो विभाजित नहीं होती, नीचे लिखो।

चरण3: उसी तरह शेष 1 आने तक भाग दो।

चरण4: विभाजन के गुणक और शेष संख्या का गुणा ल.स. कहलाता है।

2	24, 90
3	12, 45
	4, 15

अतः 24 और 90 का ल.स. $2 \times 3 \times 4 \times 15 = 360$

उदाहरण6: 21, 35 और 42 का ल.स. ज्ञात करो।

हल

7	21, 35, 42
3	3, 5, 6
	1, 5, 2

अतः 21, 35 और 42 का ल.स. $7 \times 3 \times 5 \times 2 = 210$

सोचो, विचार करो और लिखो

कब दो या दो से अधिक संख्याओं का गुणनफल स्वयं का ल.स. होगा।

अभ्यास 3.5

1. रूढ गुणन खण्ड विधि से ल.स. ज्ञात करो।

   i. 12 और 15   ii. 15 और 25   iii. 14 और 21

   iv. 18 और27   v. 48, 56 और 72   vi. 26, 14 और 91.

2. भाग पद्धति से ल.स. ज्ञात करो।

   i. 84, 112, 196   ii. 102, 119, 153   iii. 45, 99, 132, 165

3. 5 में कौनसी छोटी संख्या जोड़ने पर 12, 14, 18 से पूर्व विभाजित होगा।

4. 3 अंकों की बड़ी संख्या मालूम करो जिसे 75, 45, 60 को भाग देने पर शेष बचेगा।

   i. शेशांक नहीं बचेगा   ii. हर बार 4 बचेगा

5. प्रसाद और राजू मार्केट में माह के पहले दिन मिले हैं । प्रसाद हर तीसरे दिन मार्केट जाता है तथा राजू हर चौथे दिन मार्केट जाता है। अगली बार माह के कौन-सी दिन दोनों मिलेंगे ?

SCERT TELANGANA

3.8 ल.स.अ और म.स.अ में संबंध :

दो संख्याएं 18 और 27 लो

18 के खण्ड $= 2 \times 3 \times 3$; 27 के खण्ड $= 3 \times 3 \times 3$

18 और 27 का ल.स. $3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$

18 और 27 का म.स. $3 \times 3 = 9$

ल.स. × म.स. $= 54 \times 9 = 486$

18 और 27 का गु.फ. $= 18 \times 27 = 486$

तुमने इसमें क्या देखा ?

हम देखते हैं कि

ल.स.अ (L.C.M.) और म.स.अ. (H.C.F.) का गुणनफल = दिए गए दो संख्याओं का गुणन फल

उदाहरण7: 8 और 12 का ल.स.

हल: 8 और 12 का ल.स. $= 2 \times 3 \times 4 = 24$

4	8, 12
	2, 3

ल.स. × म.स.भ. = दो संख्याओं का गुणनफल

म.स.भ. $= \dfrac{\text{दो संख्याओं का गुणनफल}}{\text{ल. स.}}$

$$= \frac{8 \times 12}{24} = 4$$

एच.सी.एफ 8 और 12 का = 4

सोचो, विचार करो और लिखो

सम रूढ संख्या का म.स.अ. और ल.स.अ. ज्ञात करो।

अभ्यास 3.6

1. ल.स.अ. और म.स.अ. निम्न संख्याओं का ज्ञात करो ?
   i. 15, 24 ii. 8, 25 iii. 12, 48
   उनका संबंध मालूम करो।
2. दो संख्याओं का ल.स. 216 है, उनका गुणनफल 7776, तो म.स. ज्ञात करो ?
3. दो संख्याओं का गुणनफल 3276 है, उनका म.स. 6 है, तो ल.स. ज्ञात करो।
4. दो संख्याओं का म.स. 6 और ल.स. 36 है। यदि एक संख्या 12 है, तो दूसरी संख्या क्या होगी ?

SCERT TELANGANA

3.9 4,8 और 11 के लिए विभाजन नियम (Tests of Divisibility)

हमने 2, 3, 5, 6, 9 और 10 से विभाजन का नियम सीखा। अब 4, 8 और 11 के लिए नियम मालूम करेंगे।

3.9.1 4 से विभाजन का नियम

इसे देखो

संख्या	इस तरह लिख सकते	4 से विभाजित है क्या ?
100	100	हाँ
600	6×100	हाँ
1000	10×100	हाँ
10000	100×100	हाँ
100000	1000×100	हाँ

ऊपर के तालिका में हम यह देखते हैं कि 100 विभाजित होता है 4 से। 600, 1000, 10000, 100000 यह 100 का गुणक है। इसलिए यह संख्याएं 4 से विभाजित है।

तुम्हें मालूम है कि सभी सम संख्याएं 2 से विभाजित हैं।

क्या सभी सम संख्याएं 4 से विभाजित है क्या ?

इसे देखेंगे ?

126 यह सम संख्या है, जो 2 से विभाजित होती है क्या, यह 4 से विभाजित है क्या ?

126 को इस तरह लिख सकते $= 100 + 26$

तुम्हें मालूम है कि 100 विभाजित होता है 4 से, लेकिन 26, 4 से विभाजित नहीं होता। अतः हम कह सकते कि सम संख्या 4 से विभाजित होना यह जरूरी नहीं है।

तुम्हें यह मालूम है कि विषम संख्या 4 से विभाजित नहीं होती।

उदाहरण के लिए 76532 को देखो।

76532 को $70000 + 6000 + 500 + 30 + 2$ इस तरह लिख सकते। 100, 1000, 10000 यह 100 के गुणक है। 4 से विभाजित होती, इसलिए प्रत्येक बार इसे टेस्ट करके नहीं देखना चाहिए। आखरी के दो अंक को देखना। अतः 32 यह 4 से विभाजित है क्या ? हां यह 4 से विभाजित होती है। अतः 76532 यह 4 से विभाजित होती है।

किसी संख्या के आखरी दो अंक 4 से विभाजित हो तो वह संख्या 4 से विभाजित होती है।

यह नियम 100 से बड़ी संख्या में उपयोग होता है। छोटी संख्या (1 या 2 अंकों की संख्या) को विभाजन करके देखना होगा।

उदाहरण8: 56496 यह 4 से विभाजित है क्या ?

हल : $56496 = 50000 + 6000 + 400 + 96$

हमें मालूम है कि 50000, 6000, 400 यह 100 के गुणक है। 4 से विभाजित होते हैं।

SCERT TELANGANA

हमें 96 (आखरी के दो अंक) 4 से विभाजित होता है क्या यह देखना होगा।

96, 4 से विभाजित होता।

अतः दी गयी संख्या 56496 भी 4 से विभाजित होती है।

इसे करो

1. क्या 100000 यह 4 से विभाजित है ?
2. कोई दो अंकों की संख्या जो 2 से विभाजित होती है, लेकिन 4 से नहीं। इसका एक उदाहरण दो ?

3.9.2 8 से विभाजन का नियम :

हम 4 से विभाजन का नियम सीख चुके हैं, जो संख्याओं को विस्तार से लिखना अतः 10, जो 4 से विभाजित नहीं होती, उसके बाद 100 लेंगे। आखरी दो अंक 4 से विभाजित है। 10 विभाजित नहीं है 8 से अब हम 100 का विचार करेंगे।

क्या 100 विभाजित है 8 से ? नहीं

क्या 1000 विभाजित है 8 से ? हाँ

कोई भी संख्या जो 1000 से बड़ी है, उसे कुछ संख्या 1000 के गुणक में जोड़कर लिख सकते। उदाहरण $4825 = 4 \times 1000 + 825$.

यदि आखरी तीन अंक 8 से विभाजित है, तो वह संख्या 8 से विभाजित होती है। एक उदाहरण को देखेंगे।

उदाहरण 9: 93624 यह संख्या 8 से विभाजित है क्या ?

हल : $93624 = 90000 + 3000 + 600 + 20 + 4$

हमें मालूम है कि 1000 विभाजित है 8 से।

9000 और 3000 गुणक है 1000 के, वे 8 से पूर्ण विभाजित है।

अतः इन संख्याओं के आखरी तीन अंक विभाजित होते हैं ?

क्या 624 विभाजित होता है 8 से ? हाँ।

अतः दी गयी संख्या 93624 विभाजित है 8 से।

4 या उससे अधिक अंकों वाली संख्या 8 से तभी विभाजित है, जब आखिरी तीन अंक 8 से विभाजित होते हैं। जब 1, 2 या 3 के स्थान वाले अंकों की संख्या 8 से विभाजित हो, और उन 3 अंकों का विभाजन (भाग) करके देखना होगा।

इसे करो

1. क्या 76104 विभाजित है 8 से ?
2. 100 और 200 के बीच रहने वाली 8 से विभाजित होने वाली संख्या मालूम करो ?

SCERT TELANGANA

3.9.3 11 से विभाजन का नियम :

Fill the blanks and complete the table.

संख्या	विषम संख्याओं का योग (दाएं से)	सम संख्याओं का योग (बाएं से)	अंतर	क्या यह संख्या 11 से विभाजित है
29843				
90002				
80927				
19091908	8+9+9+9=35	0+1+0+1=2	35-2=33	हाँ
83568				

तुम इस तालिका में क्या देखते हो?

प्रत्येक स्थिति में हम यह देखते हैं कि संख्या का अंतर 0 है या 11 से विभाजित है। सभी संख्याएं 11 से विभाजित हैं।

संख्या 83568 में अंतर 12 है, जो 11 से विभाजित नहीं है। अतः 83568 यह संख्या विभाजित नहीं है।

दी गयी संख्या 11 से तभी विभाजित है, जब उनके विषम संख्याओं का योग और सम संख्याओं का अंतर 0 होना चाहिए या 11 से विभाजित होना चाहिए।

उदाहरण 10: क्या 6535, 11 से विभाजित है?

हल : विषम संख्याओं का योग $= 5 + 5 = 10$

सम संख्याओं का योग $= 3 + 6 = 9$

अंतर $= 10 - 9 = 1$

क्या 1 विभाजित है 11 से ? नहीं

अतः 6535, 11 से विभाजित नहीं है।

उदाहरण 11: क्या 1221 विभाजित है 11 से?

हल : विषम संख्याओं का योग $= 1 + 2 = 3$

सम संख्याओं का योग $= 2 + 1 = 3$

अंतर $= 3 - 3 = 0$

अतः, 11 से 1221 विभाजित है।

SCERT TELANGANA

इसे करो

1221 यह संख्या मुरजबंध संख्या (Polyndroid Number) है। उसे विलोम करने पर वही संख्या होगी। अर्थात प्रत्येक Polyndroid Number सम अंकोंवाली संख्या जो 11 से विभाजित है ?

6 अंकों की मुरजबंध संख्या लिखो और प्रमाणित कीजिए की यह संख्या 11 से विभाजित है।

अभ्यास 3.7

1. कौनसी संख्या 4 से विभाजित है ?

   i. 572 ii. 21,084 iii. 14,560

   iv. 1,700 v. 2150

2. 8 से यह संख्याएं विभाजित है क्या ?

   i. 9774 ii. 5,31,048 iii. 5500

   iv. 6136 v. 4152

3. निम्न संख्याएं 11 से विभाजित हैं क्या ?

   i. 859484 ii. 10824 iii. 20801

4. क्या निम्न संख्याएं 4 से और 8 से विभाजित हैं क्या ?

   i. 2104 ii. 726352 iii. 1800

5. 289279 में कौनसी छोटी संख्या जोड़ने पर 8 से विभाजित होगी ?
6. 1965 में से कौनसी संख्या घटाने पर 4 से विभाजित होगी।
7. 1000 और 1100 के बीच के कितने संभव संख्याएं लिख सकते लिखो, जो 11 से विभाजित होते हैं
8. 1240 के नजदीक की संख्या लिखो, जो 11 से विभाजित है ?
9. 105 के नजदीक की संख्या लिखो जो 4 से विभाजित है ?

हमने क्या सीखा ?

1. हमने गुणक, विभाजक, खण्डों को और गुणको को पहचानना सीखा?
2. हमने यह सीखा।

   i. किसी संख्या का खण्ड उस संख्या का पूर्ण भाजक होता है।

   ii. प्रत्येक संख्या स्वयं का खण्ड रहता है। एक प्रत्येक संख्या का खण्ड है।

   iii. प्रत्येक संख्या का खण्ड उससे कम या उसके बराबर होता है।

   iv. प्रत्येक संख्या उसके खण्डों का गुणक होती है।

   v. प्रत्येक गुणक दि गयी संख्या से बडा या उसके बराबर रहता है।

   vi. प्रत्येक संख्या स्वयं का गुणक रहता है।

SCERT TELANGANA

3. हमने सीखा :

i. 1 को छोड़ कर अन्य संख्याएँ जिसके केवल दो खण्ड एक या वही संख्या हो तो वह रुढ़ी संख्या कहलाती है। दो या दो से अधिक खण्ड रहने पर वह संयुक्त संख्या कहलाती है। 1 न तो रूढ है और न ही संयुक्त है।

ii. 2 यह संख्या सबसे छोटी सम रूढ संख्या है, 2 के अतिरिक्त प्रत्येक रूढ संख्या विषम रहती है।

iii. दो संख्याएं जिनक खण्डों में केवल 1 ही सामान्य हो तो वे सह रूढ़ संख्याएँ कहलाती है।

iv. यदि कोई संख्या दूसरी किसी संख्या से विभाजित होती है, तो वह दूसरी संख्या के खण्डों से भी विभाजित होती है।

v. यदि कोई संख्या सह रूढ़ संख्या से विभाजित होती है, तो वह उनके गुणनफल से भी विभाजित होती है।

4. हमने पहले ही चर्चा की है कि संख्या को देखकर कह सकते हैं कि वह छोटी संख्या 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 से विभाजित होती है या नहीं। हमने ज्ञात किया है कि संख्या में दिए गए अंक और उसकी भाजकता एक दूसरे से कैसे संबंधित रहते है।

i. संख्या के आखरी पद को देखकर कह सकते हैं कि वह 2, 5, 10 से विभाजित होता है या नहीं।

ii. 3 और 9 से विभाजित होने वाली संख्या को उनमें दिए गए सभी अंकों के योगफल से ज्ञात किया जाता है।

iii. 4 और 8 से विभाजित होने वाली संख्या को उस संख्या के आखरी 2 और 3 पदों को देखकर बताया जा सकता है।

iv. 11 से विभाजित होने वाली संख्या को उस संख्या के सम और विषम पदों के योगफलों के अंतर को देखकर बताया जा सकता है।

5. हमने प्राप्त किया है कि यदि दो संख्याएँ किसी एक संख्या से विभाजित होती है तो उनका योगफल और अंतर भी उस संख्या से विभाजित होता है।

6. हमने सीखा है कि–

i. दो या दो से अधिक संख्याओं का सबसे बड़ा भाजक म.स.भा (HCF) कहलाता है।

ii. दो या दो से अधिक संख्याओं का लघु गुणक (LCM) ल.स. कहलाता है।

7. यदि दो संख्याओं में एक संख्या दूसरी का गुणक हो, तो बड़ी संख्या लस होती है।

8. लस और मसभ का संबंध

लस × मस = दो संख्याओं का गुणनफल

दत्तात्रेया रामचंद्रा काप्रेकर (भारत)

1905 - 1986 AD

वे एक अध्यापक थे जो संख्याओं के साथ खेलतें थे।

6174 *को "कप्रेकर के स्थिर" के रूप में माना जाता है।*

उन्होंने "डेम्लो संख्याये" और स्वयं संख्याओं की खोज़ की।

SCERT TELANGANA