माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ०प्र० द्वारा निर्धारित नवीनतम पाठ्यक्रमानुसार

U.P. Series

गणित

कक्षा-10

लेखन
अनुभवी लेखकों के द्वारा

इकाई-1 बीजगणित (Algebra)

1

महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य
(Highest Common Factors and Least Common Multiples)

अभ्यास 1.1

1. निम्नलिखित बहुपदों के महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए—

(i) $4xy^2z^2, 16x^2y^3z^4$ (ii) $8a^2b^3, 4a^3b^2, 6a^4b^2$

(iii) x^2-4, x^3+8 (iv) z^3-4z, z^3+8

(v) $2+2x+2x^2, 1-x^3$ (vi) a^2-9, a^2-5a+6

(vii) x^3-9x, x^2-2x-3 (viii) $9-y^2, y^2+4y+3$

(ix) x^3+y^3, x^2-y^2 (x) $pq^3, p^3q(p+z)$

हल– (i) दिए हुए बहुपद $=4xy^2z^2$ तथा $16x^2y^3z^4$

गुणनखण्ड करने पर,

$$4xy^2z^2 = 2\times 2\times x\times y\times y\times z\times z$$

तथा $$16x^2y^3z^2 = 2\times 2\times 2\times 2\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z$$

उपर्युक्त बहुपदों के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=2\times 2\times x\times y\times y\times z\times z = 4xy^2z^2$

अतः अभीष्ट म०म० $= \mathbf{4xy^2z^2}$ **उत्तर**

(ii) दिए हुए बहुपद $=8a^2b^3, 4a^3b^2$ तथा $6a^4b^2$

गुणनखण्ड करने पर,

$$8a^2b^3 = 2\times 2\times 2\times a\times a\times b\times b\times b$$

$$4a^3b^2 = 2\times 2\times a\times a\times a\times b\times b$$

$$6a^4b^2 = 2\times 3\times a\times a\times a\times a\times b\times b$$

उपर्युक्त बहुपदों के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=2\times a\times a\times b\times b = 2a^2b^2$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{2a^2b^2}$ **उत्तर**

(iii) दिए हुए बहुपद $=x^2-4$ तथा x^3+8

गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-4 = x^2-2^2 = (x+2)(x-2)$$

तथा $$x^3+8 = x^3+2^3 = (x+2)(x^2-2x+4)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= x+2$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(x+2)}$ **उत्तर**

(iv) दिए हुए बहुपद $= z^3-4z$ तथा z^3+8

गुणनखण्ड करने पर,

$$z^3-4z = z(z^2-4) = z(z^2-2^2) = z(z+2)(z-2)$$

तथा $$z^3+8 = z^3+2^3 = (z+2)(z^2-2z+4)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (z+2)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(z+2)}$ **उत्तर**

(v) दिए हुए बहुपद $= 2+2x+2x^2$ तथा $1-x^3$

गुणनखण्ड करने पर,

$$2+2x+2x^2 = 2(1+x+x^2)$$

तथा $$1-x^3 = 1^3-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (1+x+x^2)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(1+x+x^2)}$ **उत्तर**

(vi) दिए हुए बहुपद $= a^2-9$ तथा a^2-5a+6

गुणनखण्ड करने पर,

$$a^2-9 = a^2-3^2 = (a+3)(a-3)$$

$$a^2-5a+6 = a^2-(3+2)a+6 = a^2-3a-2a+6$$
$$= a(a-3)-2(a-3) = (a-3)(a-2)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (a-3)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(a-3)}$ **उत्तर**

(vii) दिए हुए बहुपद $= x^3-9x,\ x^2-2x-3$

$$x^3-9x = x(x^2-9) = x(x^2-3^2) = x(x+3)(x-3)$$

तथा $$x^2-2x-3 = x^2-(3-1)x-3 = x^2-3x+x-3$$
$$= x(x-3)+1(x-3) = (x-3)(x+1)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (x-3)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(x-3)}$ **उत्तर**

(viii) दिए हुए बहुपद $= 9-y^2,\ y^2+4y+3$

गुणनखण्ड करने पर,

$$9-y^2 = 3^2-y^2 = (3+y)(3-y) = (y+3)(3-y)$$

तथा $$y^2+4y+3 = y^2+3y+y+3 = y(y+3)+1(y+3)$$
$$= (y+3)(y+1)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (y+3)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(y+3)}$ **उत्तर**

(ix) दिए हुए बहुपद $= x^3+y^3,\ x^2-y^2$

गुणनखण्ड करने पर,

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

तथा $$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(x+y)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(x+y)$ **उत्तर**

(x) दिए हुए बहुपद $=pq^3, p^3q(p+z)$

गुणनखण्ड करने पर,

$$pq^3=p\times q\times q\times q$$

तथा $$p^3q(p+z)=p\times p\times p\times q(p+z)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=p\times q=pq$

अतः अभीष्ट म०स० $=pq$ **उत्तर**

2. a^3-27, a^2-9 तथा a^4-3a^3 का म०स० ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद $=a^3-27, a^2-9$ तथा a^4-3a^3

गुणनखण्ड करने पर,

$$a^3-27=a^3-3^3=(a-3)(a^2+3a+9)$$

$$a^2-9=a^2-3^2=(a+3)(a-3)$$

तथा $$a^4-3a^3=a^3(a-3)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(a-3)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(a-3)$ **उत्तर**

3. $x^2-xy-12y^2$ व x^2+3xy का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद $=x^2-xy-12y^2, x^2+3xy$

गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-xy-12y^2=x^2-(4-3)xy-12y^2=x^2-4xy+3xy-12y^2$$
$$=x(x-4y)+3y(x-4y)=(x-4y)(x+3y)$$

तथा $$x^2+3xy=x(x+3y)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(x+3y)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(x+3y)$ **उत्तर**

4. a^3-4a, a^2-4a+4 व a^4-16 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद $=a^3-4a, a^2-4a+4$ व a^4-16

$$a^3-4a=a(a^2-4)=a(a^2-2^2)=a(a+2)(a-2)$$

$$a^2-4a+4=a^2-(2+2)a+4=a^2-2a-2a+4$$
$$=a(a-2)-2(a-2)=(a-2)(a-2)$$

$$a^4-16=(a^2)^2-(4)^2=(a^2+4)(a^2-4)$$
$$=(a^2+4)(a^2-2^2)=(a^2+4)(a+2)(a-2)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(a-2)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(a-2)$ **उत्तर**

5. $x^3+3x^2+3x+1, (x+1)^4$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद $=x^3+3x^2+3x+1$ तथा $(x+1)^4$

गुणनखण्ड करने पर,

$$(x+1)^4=(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)$$

तथा x^3+3x^2+3x+1 के गुणनखण्ड करने के लिए बहुपद में $x=-1$ रखने पर,

$$x^3+3x^2+3x+1=(-1)^3+3\times(-1)^2+3\times(-1)+1$$
$$=-1+3\times1-3+1=-1+3-3+1=0$$

अतः $(x+1)$ दिए हुए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

अब $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)A$

या $$A=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}=x^2+2x+1$$
$$=x^2+x+x+1=x(x+1)+1(x+1)$$
$$=(x+1)(x+1)$$

या $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)(x+1)(x+1)$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(x+1)(x+1)(x+1)=(x+1)^3$

अतः अभीष्ट म०स० $=(x+1)^3$ **उत्तर**

6. $p(x)=(x^2-10x+16)$ और $q(x)=x^3-512$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$p(x)=x^2-10x+16=x^2-8x-2x+16$$
$$=x(x-8)-2(x-8)=(x-8)(x-2)$$

तथा $$q(x)=x^3-512=x^3-8^3$$
$$=(x-8)(x^2+8x+64)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(x-8)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(x-8)$ **उत्तर**

7. निम्नलिखित बहुपदों के महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए–

(i) a^2+5a+6, a^2-4

(ii) x^2-x, x^2-2x+1

(iii) $x^2+3x-18$ व $x^3+8x^2+4x-48$

(iv) $x^2-5x+6, x^2-7x+12$

(v) $(x^2+x), (x+1)^3$ व (x^3+1)

(vi) $10(16p^4-q^4)$ तथा $6(8p^3-q^3)$

(vii) z^3-27, z^2-5z+6 व z^2-9

(viii) $18-2x^2, 2x^2+8x+6$

(ix) $3x^2y(x^3-y^3), 6xy^2(x^2-y^2)$

(x) $16x^4-81, 8x^4-27x$ व $6x^2-5x-6$

हल– (i) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$a^2+5a+6=a^2+3a+2a+6=a(a+3)+2(a+3)$$
$$=(a+3)(a+2)$$

तथा $$a^2-4=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(a+2)$ **उत्तर**

(ii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-x=x(x-1)$$

तथा $$x^2-2x+1=x^2-x-x+1=x(x-1)-1(x-1)$$
$$=(x-1)(x-1)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(x-1)$ **उत्तर**

(iii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2+3x-18=x^2+6x-3x-18$$
$$=x(x+6)-3(x+6)=(x+6)(x-3)$$

तथा $x^3+8x^2+4x-48=x^3-2x^2+10x^2-20x+24x-48$
$$=x^2(x-2)+10x(x-2)+24(x-2)$$
$$=(x-2)(x^2+10x+24)$$
$$=(x-2)(x^2+6x+4x+24)$$
$$=(x-2)\{x(x+6)+4(x+6)\}$$
$$=(x-2)\{(x+6)(x+4)\}$$
$$=(x-2)(x+6)(x+4)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(x+6)$ **उत्तर**

(iv) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-5x+6=x^2-3x-2x+6=x(x-3)-2(x-3)$$
$$=(x-3)(x-2)$$

तथा $$x^2-7x+12=x^2-4x-3x+12$$
$$=x(x-4)-3(x-4)=(x-4)(x-3)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(x-3)$ **उत्तर**

(v) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2+x=x(x+1)$$
$$(x+1)^3=(x+1)(x+1)(x+1)$$

तथा $$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(x+1)$ **उत्तर**

(vi) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$10(16p^4-q^4)=2\times5\{(4p^2)^2-(q^2)^2\}$$
$$=2\times5\{(4p^2+q^2)(4p^2-q^2)\}$$
$$=2\times5(4p^2+q^2)\{(2p)^2-p^2\}$$
$$=2\times5(4p^2+q^2)(2p+q)(2p-q)$$

तथा $6(8p^3-q^3)=2\times 3\{(2p)^3-(q)^3\}$

$=2\times 3\{(2p-q)(4p^2+2pq+q^2)\}$

$=2\times 3(2p-q)(4p^2+2pq+q^2)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{2(2p-q)}$ **उत्तर**

(vii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$z^3-27=z^3-3^3=(z-3)(z^2+3z+9)$

$z^2-5z+6=z^2-3z-2z+6$

$=z(z-3)-2(z-3)=(z-3)(z-2)$

$z^2-9=z^2-3^2=(z+3)(z-3)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{(z-3)}$ **उत्तर**

(viii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$18-2x^2=2(9-x^2)=2(3+x)(3-x)=2(x+3)(3-x)$

$2x^2+8x+6=2(x^2+4x+3)=2(x^2+3x+x+3)$

$=2\{x(x+3)+1(x+3)\}$

$=2\{(x+3)(x+1)\}=2(x+3)(x+1)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{2(x+3)}$ **उत्तर**

(ix) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$3x^2y(x^3-y^3)=3x^2y(x-y)(x^2+xy+y^2)$

तथा $6xy^2(x^2-y^2)=2\times 3xy^2(x+y)(x-y)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{3xy(x-y)}$ **उत्तर**

(x) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$16x^4-81=(4x^2)^2-(9)^2=(4x^2+9)(4x^2-9)$

$=(4x^2+9)\{(2x)^2-(3)^2\}$

$=(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$

$8x^4-27x=x(8x^3-27)=x\{(2x)^3-(3)^3\}$

$=x\{(2x-3)(4x^2+6x+9)\}$

$=x(2x-3)(4x^2+6x+9)$

तथा $6x^2-5x-6=6x^2-9x+4x-6$

$=3x(2x-3)+2(2x-3)=(2x-3)(3x+2)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{(2x-3)}$ **उत्तर**

8. x^8-256 व x^2+2x-8 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^8-256=(x^4)^2-(16)^2=(x^4+16)(x^4-16)$

$=(x^4+16)(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^4+16)(x^2+4)(x+2)(x-2)$

तथा $x^2+2x-8=x^2+4x-2x-8$

$$= x(x+4)-2(x+4) = (x+4)(x-2)$$

अतः अभीष्ट म०स० $= (x-2)$ **उत्तर**

9. x^4-49 तथा x^4-15x^2+56 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^4-49 = (x^2)^2-(7)^2 = (x^2+7)(x^2-7)$$

तथा $x^4-15x^2+56 = x^4-8x^2-7x^2+56$

$$= x^2(x^2-8)-7(x^2-8) = (x^2-8)(x^2-7)$$

अतः अभीष्ट म०स० $= (x^2-7)$ **उत्तर**

10. $p^2-pq-12q^2$ व p^3+3p^2q का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$p^2-pq-12q^2 = p^2-4pq+3pq-12q^2$$

$$= p(p-4q)+3q(p-4q) = (p-4q)(p+3q)$$

तथा $p^3+3p^2q = p^2(p+3q)$

अतः अभीष्ट म०स० $= (p+3q)$ **उत्तर**

अभ्यास 1.2

1. यदि $p(x)=ax^2+bx+c$ और $q(x)=bx^2+ax+c$ का म०स० $(x+1)$ हो तो सिद्ध कीजिए— $c=0$ या $a=b$

हल– दिए हुए बहुपद,

$$p(x) = ax^2+bx+c$$

तथा $q(x) = bx^2+ax+c$

चूँकि $(x+1)$, बहुपद $p(x)$ तथा $q(x)$ का म०स० है। अतः $(x+1)$ दोनों बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड होगा।

अतः प्रत्येक बहुपद में $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ रखने पर शेषफल शून्य आएगा।

अब बहुपद ax^2+bx+c में $x=-1$ रखने पर,

$$\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+c=0$$

$$\Rightarrow a\times 1-b+c=0$$

$$\Rightarrow a-b+c=0 \quad \ldots(1)$$

बहुपद bx^2+ax+c में $x=-1$ रखने पर

$$b(-1)^2+a(-1)+c=0$$

$$b-a+c=0 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$2c=0 \Rightarrow c=0$$

अब c का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$a-b+0=0$$

$$a=b$$

इति सिद्धम्

2. एक फल विक्रेता के पास x^2-x-12 सेब तथा $x^2-3x-18$ आम हैं। फल विक्रेता इन फलों को समान संख्या में अलग-अलग पेटियों में रखकर पार्सल करना चाहता है। ज्ञात कीजिए कि फल विक्रेता को कम-से-कम कितनी पेटियों की आवश्यकता होगी?

हल– फल विक्रेता के पास सेबों की संख्या $=x^2-x-12$

$$=x^2-4x+3x-12$$
$$=x(x-4)+3(x-4)=(x-4)(x+3)$$

तथा आमों की संख्या $=x^2-3x-18=x^2-6x+3x-18$

$$=x(x-6)+3(x-6)=(x-6)(x+3)$$

सेबों तथा आमों की संख्याओं का म०स० $=(x+3)$

अतः प्रत्येक पेटी में $(x+3)$ आम या सेब होंगे।

$$\text{सेबों की पेटियों की संख्या}=\frac{\text{सेबों की संख्या}}{\text{प्रत्येक पेटी में सेबों की संख्या}}$$

$$=\frac{(x-4)(x+3)}{(x+3)}=(x-4)$$

इसी प्रकार, आमों की पेटियों की संख्या $=\dfrac{(x-6)(x+3)}{(x+3)}=(x-6)$

कुल पेटियों की संख्या $=x-4+x-6=\mathbf{(2x-10)}$ **उत्तर**

3. यदि दो बहुपदों A व B का महत्तम समापवर्तक H है तो बहुपदों $(A+B)$ एवं $(A-B)$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बहुपद A व B का महत्तम समापवर्तक $=H$

माना बहुपद $A=xH$ तथा बहुपद $B=yH$

अब $A+B=xH+yH$ या $(A+B)=(x+y)H$

तथा $A-B=xH-yH$ या $(A-B)=(x-y)H$

बहुपद $(A+B)$ व $(A-B)$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=H$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{H}$ **उत्तर**

4. बहुपदों a^2-9 तथा $a^2+2a-15$ का महत्तम समापवर्तक $(a-l)$ है। l का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$a^2-9=a^2-3^2=(a+3)(a-3)$$

तथा $a^2+2a-15=a^2+5a-3a-15$

$$=a(a+5)-3(a+5)=(a+5)(a-3)$$

अतः उपर्युक्त बहुपदों का म०स० $=(a-3)$

परन्तु, प्रश्नानुसार, म०स० $=(a-l)$

या $a-3=a-l$ या $3=l\Rightarrow l=3$ **उत्तर**

5. बहुपदों (x^2-1) तथा $\{ax^3-b(x+1)\}$ का महत्तम समापवर्तक $(x-1)$ है, तो a व b में संबंध ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद,

$$x^2-1 \text{ तथा } \{ax^3-b(x+1)\}$$

तथा म०स० $=(x-1)$

अत: प्रत्येक बहुपद में $x-1=0 \Rightarrow x=1$ रखने पर शेषफल शून्य आएगा।

अब बहुपद $\{ax^3-b(x+1)\}$ में $x=1$ रखने पर,

$\{a\times 1^3-b(1+1)\}=0$ या $a\times 1-b\times 2=0$

या $a-2b=0$ या $a=2b$ **उत्तर**

6. p के किस मान के लिए $a^2-2a-24$ तथा a^2-pa-6 का महत्तम समापवर्तक $(a-6)$ होगा?

हल– दिए हुए बहुपद,

$a^2-2a-24$ तथा a^2-pa-6

तथा म०स० $=a-6$

अत: प्रत्येक बहुपद में $a-6=0 \Rightarrow a=6$ रखने पर शेषफल शून्य आएगा।

अब बहुपद a^2-pa-6 में $a=6$ रखने पर

$6^2-p\times 6-6=0$ या $36-6p-6=0$

या $30-6p=0$ या $5-p=0$

या $5=p \Rightarrow p=5$ **उत्तर**

7. यदि बहुपदों a^2+pa+q तथा a^2+la+m का महत्तम समापवर्तक $(a+x)$ है।

सिद्ध कीजिए— $x=\dfrac{m-q}{l-p}$

हल– दिए हुए बहुपद, a^2+pa+q तथा a^2+la+m तथा म०स० $=(a+x)$

अत: प्रत्येक बहुपद में $x+a=0$ या $a=-x$ रखने पर शेषफल शून्य आएगा।

अब बहुपद a^2+pa+q में $a=-x$ रखने पर,

$(-x)^2+p\times(-x)+q=0$ या $x^2-px+q=0$ ...(1)

तथा बहुपद a^2+la+m में $a=-x$ रखने पर,

$(-x)^2+l\times(-x)+m=0$

या $x^2-lx+m=0$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$x^2-px+q=x^2-lx+m$ या $-px+q=-lx+m$

या $lx-px=m-q$ या $(l-p)x=m-q$

या $x=\dfrac{m-q}{l-p}$ **इति सिद्धम्**

अभ्यास 1.3

1. निम्नलिखित के लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए—

(i) x^2y, y^2z, z^2x **(ii)** $4x^2y^3, 2xy^2, 6xy^3$

(iii) $(x^2-4), (x^2+x-6)$ **(iv)** (x^2-9) व (x^3+27)

(v) $(x^2+xy+y^2), (x^3-y^3)$ **(vi)** $2(x^3-1)$ व $6(x^3+x^2+x)$

(vii) $(x^2-7x+12)$ व (x^2-2x-3) **(viii)** (x^3+1) व (x^2-1)

(ix) $(x^2-x-2), (x^2+x-6)$

(x) $4(x^2-y^2), 10(x^3-y^3)$ तथा $6(x^4-y^4)$

हल– **(i)** दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^2y = x\times x\times y,\quad y^2z = y\times y\times z$ तथा $z^2x = z\times z\times x$

अतः अभीष्ट ल०स० $= x\times x\times y\times y\times z\times z$

$= x^2y^2z^2$ **उत्तर**

(ii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$4x^2y^3 = 2\times 2\times x\times x\times y\times y\times y$

$2xy^2 = 2\times x\times y\times y$

$6xy^3 = 2\times 3\times x\times y\times y\times y$

अतः अभीष्ट ल०स० $= 2\times 2\times x\times x\times y\times y\times y\times 3 = \mathbf{12x^2y^3}$ **उत्तर**

(iii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^2-4 = x^2-2^2 = (x+2)(x-2)$

तथा $x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6$

$= x(x+3)-2(x+3) = (x+3)(x-2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= \mathbf{(x+2)(x-2)(x+3)}$ **उत्तर**

(iv) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^2-9 = (x+3)(x-3)$

तथा $x^3+27 = (x^3+3^3) = (x+3)(x^2-3x+9)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x+3)(x-3)(x^2-3x+9)$

या $= (x-3)(x^3+27) = \mathbf{(x^3+27)(x-3)}$ **उत्तर**

(v) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$(x^2+xy+y^2) = (x^2+xy+y^2)$

तथा $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x-y)(x^2+xy+y^2) = \mathbf{x^3-y^3}$ **उत्तर**

(vi) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$2(x^3-1) = 2(x^3-1^3) = 2(x-1)(x^2+x+1)$

तथा $6(x^3+x^2+x) = 2\times 3x(x^2+x+1)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= 2\times 3x(x-1)(x^2+x+1)$

या $= \mathbf{6x(x^3-1)}$ **उत्तर**

(vii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^2-7x+12 = x^2-4x-3x+12$

$= x(x-4)-3(x-4) = (x-4)(x-3)$

तथा $x^2-2x-3 = x^2-3x+x-3$

$= x(x-3)+1(x-3) = (x-3)(x+1)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x-4)(x-3)(x+1)$ **उत्तर**

(viii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

तथा $$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)$

$$=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$$ **उत्तर**

(ix) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-x-2=x^2-2x+x-2$$

$$=x(x-2)+1(x-2)=(x-2)(x+1)$$

तथा $$x^2+x-6=x^2+3x-2x-6$$

$$=x(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x-2)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=(x-2)(x+1)(x+3)$ **उत्तर**

(x) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$4(x^2-y^2)=2\times2(x+y)(x-y)$$

$$10(x^3-y^3)=2\times5(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

तथा $$6(x^4-y^4)=2\times3(x^2+y^2)(x^2-y^2)$$

$$=2\times3(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=2\times2\times5\times3(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)$

$$=60(x^2+y^2)(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$=60(x^4-y^4)(x^2+xy+y^2)$$ **उत्तर**

2. x^4-xy^3, $4(x^2-y^2)$ तथा $6(x^3+y^3)$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^4-xy^3=x(x^3-y^3)=x(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$4(x^2-y^2)=2\times2(x+y)(x-y)$$

तथा $$6(x^3+y^3)=2\times3(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=2\times2\times3\times x(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$=12x(x^3-y^3)(x^3+y^3)$$ **उत्तर**

3. बहुपदों $8(x^3-2x^2+4x)$ व $28(x^3+8)$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$8(x^3-2x^2+4x)=8x(x^2-2x+4)=2\times2\times2\times x(x^2-2x+4)$$

तथा $$28(x^3+8)=2\times2\times7(x^3+2^3)$$

$$=2\times2\times7(x+2)(x^2-2x+4)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=2\times2\times2\times7\times x(x+2)(x^2-2x+4)$

$$=56x(x+2)(x^2+4-2x)$$ **उत्तर**

4. $(x^2-7x+12)$ व (x^2-16) का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-7x+12 = x^2-4x-3x+12$$
$$= x(x-4)-3(x-4) = (x-4)(x-3)$$

तथा $(x^2-16) = x^2-4^2 = (x+4)(x-4)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x-4)(x-3)(x+4)$

$= (x^2-16)(x-3)$ **उत्तर**

5. $x^2+x-6, 6x^2-24$ तथा x^2-6x+8 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6$$
$$= x(x+3)-2(x+3) = (x+3)(x-2)$$
$$6x^2-24 = 6(x^2-4) = 2\times 3(x+2)(x-2)$$

तथा $x^2-6x+8 = x^2-4x-2x+8$

$= x(x-4)-2(x-4) = (x-4)(x-2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= 2\times 3(x+2)(x-2)(x+3)(x-4)$

$= 6(x-2)(x+2)(x+3)(x-4)$ **उत्तर**

6. $x^2-y^2-2yz-z^2$, $x^2-y^2+2xz+z^2$ व $x^2-2xy+y^2-z^2$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-y^2-2yz-z^2 = x^2-(y^2+z^2+2yz)$$
$$= x^2-(y+z)^2 = (x+y+z)(x-y-z)$$
$$x^2-y^2+2xz+z^2 = x^2+z^2+2xz-y^2 = (x+z)^2-y^2$$
$$= (x+z+y)(x+z-y) = (x+y+z)(x-y+z)$$

तथा $x^2-2xy+y^2-z^2 = (x-y)^2-z^2$

$= (x-y+z)(x-y-z)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x+y+z)(x-y+z)(x-y-z)$ **उत्तर**

7. x^2-9y^2 तथा x^3-27y^3 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-9y^2 = x^2-(3y)^2 = (x+3y)(x-3y)$$

तथा $x^3-27y^3 = (x)^3-(3y)^3 = (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x+3y)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

$= (x^2-9y^2)(x^2+3xy+9y^2)$ **उत्तर**

8. $x(x^2-x+1)$ व (x^3+1) का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x(x^2-x+1) = x(x^2-x+1)$$

तथा $(x^3+1) = (x+1)(x^2-x+1)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= x(x+1)(x^2-x+1)$

$= x(x^3+1)$ **उत्तर**

9. $8(x^3-x^2+x)$ व $12(x^3+1)$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$8(x^3-x^2+x) = 2\times 2\times 2x(x^2-x+1)$

तथा $12(x^3+1) = 2\times 2\times 3(x+1)(x^2-x+1)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= 2\times 2\times 2\times 3\times x(x+1)(x^2-x+1)$

$= 24x(x^3+1)$ **उत्तर**

10. $3x^2-10x-8$ व $9x^2-4$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$3x^2-10x-8 = 3x^2-12x+2x-8$

$= 3x(x-4)+2(x-4) = (x-4)(3x+2)$

तथा $9x^2-4 = (3x)^2-(2)^2 = (3x+2)(3x-2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x-4)(3x+2)(3x-2)$ **उत्तर**

11. $8x^2-10xy+3y^2$ व $64x^3-27y^3$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$8x^2-10xy+3y^2 = 8x^2-6xy-4xy+3y^2$

$= 2x(4x-3y)-y(4x-3y) = (4x-3y)(2x-y)$

तथा $64x^3-27y^3 = (4x)^3-(3y)^3$

$= (4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (4x-3y)(2x-y)(16x^2+12xy+9y^2)$

$= (8x^2-4xy-6xy+3y^2)(16x^2+12xy+9y^2)$

$= (8x^2-10xy+3y^2)(16x^2+12xy+9y^2)$ **उत्तर**

अभ्यास 1.4

1. दो बहुपदों का म०स० $(x-2)$ तथा ल०स० (x^3-5x^2+6x) है। यदि पहला बहुपद (x^2-2x) है, तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—म०स० $= (x-2)$, ल०स० $= x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6)$

तथा पहला बहुपद $= x^2-2x = x(x-2)$

हम जानते हैं—

पहला बहुपद × दूसरा बहुपद = ल०स० × म०स०

$x(x-2)\times$ दूसरा बहुपद $= x(x^2-5x+6)\times(x-2)$

या दूसरा बहुपद $= \dfrac{x(x-2)(x^2-5x+6)}{x(x-2)} = (x^2-5x+6)$ **उत्तर**

2. P तथा Q दो बहुपद हैं, जिनके म०स० तथा ल०स० क्रमशः H व L है। यदि $P+Q=H+L$ हो, तो सिद्ध कीजिए—

$$P^2+Q^2=H^2+L^2$$

हल– हम जानते हैं— दो बहुपदों का गुणनफल = ल०स० × म०स०

अतः $P\times Q=H\times L \quad \Rightarrow \quad PQ=HL$ ...(1)

दिया है— $P+Q=H+L$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(P+Q)^2=(H+L)^2$$

या $P^2+Q^2+2PQ=H^2+L^2+2HL$ ...(2)

समीकरण (1) से $PQ=HL$ समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

या $P^2+Q^2+2HL=H^2+L^2+2HL$

या $P^2+Q^2=H^2+L^2$ **इति सिद्धम्**

3. a व b के मान ज्ञात कीजिए—यदि बहुपदों $(x^2+3x+2)\,(x^2-7x+a)$ और $(x^2-x-12)\,(x^2+5x+b)$ का महत्तम समापवर्तक $(x+1)\,(x-4)$ है।

हल– दिए हुए बहुपद,

$$p(x)=(x^2+3x+2)\,(x^2-7x+a)$$

$$q(x)=(x^2-x-12)\,(x^2+5x+b)$$

तथा म०स० $=(x+1)\,(x-4)$

अतः दोनों बहुपदों में $x+1=0$ या $x-4=0 \Rightarrow x=-1$ तथा $x=4$ रखने पर शेषफल शून्य होगा।

बहुपद $p(x)$ में $x=4$ रखने पर,

$$(4^2+4\times3+2)\,(4^2-4\times7+a)=0$$

या $(16+12+2)\,(16-28+a)=0$

या $30\,(-12+a)=0$

या $-12+a=0 \quad \Rightarrow \quad a=12$ **उत्तर**

अब बहुपद $q(x)$ में $x=-1$ रखने पर,

$$\{(-1)^2-(-1)-12\}\,\{(-1)^2+5\times(-1)+b\}=0$$

या $(1+1-12)\,\{1-5+b\}=0$

या $(-10)\,\{-4+b\}=0$ या $\{-4+b\}=0$

$b=4$ **उत्तर**

4. दो बहुपदों का गुणनफल $\{(x+2)^2\,(x-2)\,(x-5)\}$ तथा महत्तम समापवर्तक $(x+2)$ है। बहुपदों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

दो बहुपदों का गुणनफल $=\{(x+2)^2(x-2)(x-5)\}$

महत्तम समापवर्तक $=(x+2)$

हम जानते हैं कि—

$$\text{लघुत्तम समापवर्त्य} = \frac{\text{दो बहुपदों का गुणनफल}}{\text{महत्तम समापवर्तक}}$$

$$= \frac{(x+2)^2(x-2)(x-5)}{(x+2)}$$

$$= (x+2)(x-2)(x-5) \qquad \text{उत्तर}$$

5. दो बहुपदों का महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य क्रमशः $(x-5)$ और $(x-5)(x^2-7x+12)$ है यदि उसमें से एक बहुपद $(x^2-8x+15)$ हो, तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— म०स० $= (x-5)$ ल०स० $= (x-5)(x^2-7x+12)$

पहला बहुपद $= (x^2-8x+15)$

अतः दूसरा बहुपद $= \dfrac{\text{म०स०} \times \text{ल०स०}}{\text{पहला बहुपद}}$

$$= \frac{(x-5)(x-5)(x^2-7x+12)}{(x^2-8x+15)}$$

$$= \frac{(x-5)(x-5)(x^2-4x-3x+12)}{(x^2-5x-3x+15)}$$

$$= \frac{(x-5)(x-5)\{x(x-4)-3(x-4)\}}{\{x(x-5)-3(x-5)\}}$$

$$= \frac{(x-5)(x-5)\{(x-4)(x-3)\}}{\{(x-5)(x-3)\}} = (x-5)(x-4)$$

$$= (x^2-4x-5x+20) = \mathbf{(x^2-9x+20)} \qquad \text{उत्तर}$$

6. दो बहुपदों का गुणनफल $\{(a-b)^2(a+b)^2\}$ तथा महत्तम समापवर्तक (a^2-b^2) व्यंजकों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— दो बहुपदों का गुणनफल $= \{(a-b)^2(a+b)^2\}$

तथा म०स० $= a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

हम जानते हैं कि— ल०स० $= \dfrac{\text{दो बहुपदों का गुणनफल}}{\text{म०स०}} = \dfrac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}$

$$= (a-b)(a+b) = \mathbf{a^2-b^2} \qquad \text{उत्तर}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 20, 21 एवं 22 का अवलोकन कीजिए।

■ □ ■

2

परिमेय व्यंजक
(Rational Expressions)

अभ्यास 2.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन बहुपद हैं? कारण सहित लिखिए।

(i) $x^2+3\sqrt{x}+5$ **(ii)** $x^2-x\sqrt{x}$

(iii) $x^2-5\sqrt{x}+7$ **(iv)** x^2-3x+4

(v) $3x^7$ **(vi)** $3x^2-8x+\frac{6}{x}$

(vii) x^2+5x+6 **(viii)** x^3+1

हल– हम जानते हैं कि $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ के रूप का प्रत्येक बीजीय व्यंजक बहुपद कहलाता है।

(i) व्यंजक $x^2+3\sqrt{x}+5$ में x की घात भिन्नात्मक रूप में है। अत: यह बहुपद **नहीं** है।

(ii) व्यंजक $x^2-x\sqrt{x}$ में x की घात भिन्नात्मक रूप में है। अत: यह बहुपद **नहीं** है।

(iii) $x^2-5\sqrt{x}+7$ में x की घात भिन्नात्मक रूप में है। अत: यह बहुपद **नहीं** है।

(iv) व्यंजक x^2-3x+4 में प्रत्येक पद में चर x की घात ऋणेतर पूर्णांक है। अत: वह एक बहुपद **है**।

(v) $3x^7$ एक बहुपद है क्योंकि इसके चर की घात ऋणेत्तर पूर्णांक है।

(vi) व्यंजक $3x^2-8x+\frac{6}{x}$ के तीसरे पद $\frac{6}{x}$ या $6x^{-1}$ में चर x का घातांक -1 ऋण पूर्णांक होने के कारण यह बहुपद **नहीं** है।

(vii) व्यंजक x^2+5x+6 एक बहुपद **है**। क्योंकि प्रत्येक पद में चर x की घात ऋणेत्तर पूर्णांक है।

(viii) व्यंजक x^3+1 के प्रत्येक पद में चर x की घात ऋणेत्तर पूर्णांक है। अत: यह एक बहुपद **है**।

2. निम्नलिखित में कौन-कौन परिमेय व्यंजक हैं?

(i) $\frac{x^3-3x^2}{2x+3}$ **(ii)** $\frac{\sqrt{3}x^2-4x+8}{\sqrt{8}}$

(iii) $\frac{x^2-1}{2\sqrt{x}+4}$ **(iv)** $\frac{x^2\sqrt{3}-\sqrt{4}x+7}{x+\sqrt{5}}$

(v) $\frac{3x^2+5\sqrt{x}+6}{x+1}$ **(vi)** $\frac{x^2+2x+4}{2x+3}$

हल– हम जानते है कि— $\frac{p(x)}{q(x)}$ परिमेय व्यंजक होगा यदि $p(x)$ एवं $q(x)$ दोनों बहुपद है।

(i) व्यंजक $\frac{x^3-3x^2}{2x+3}$ में अंश व हर दोनों बहुपद है। अतः यह एक परिमेय व्यंजक है।

(ii) व्यंजक $\frac{\sqrt{3}x^2-4x+8}{\sqrt{8}}$ में अंश एक बहुपद है तथा हर $\neq 0$। अतः यह एक परिमेय व्यंजक है।

(iii) व्यंजक $\frac{x^2-1}{2\sqrt{x}+4}$ में अंश एक बहुपद है तथा हर बहुपद नहीं है। अतः परिमेय व्यंजक नहीं है।

(iv) व्यंजक $\frac{x^2\sqrt{3}-\sqrt{4}x+7}{x+\sqrt{5}}$ में अंश व हर दोनों बहुपद हैं। अतः यह एक बहुपद है।

(v) व्यंजक $\frac{3x^2+5\sqrt{x}+6}{x+1}$ में अंश एक बहुपद नहीं है। जबकि हर बहुपद है। अतः यह एक परिमेय व्यंजक नहीं है।

(vi) व्यंजक $\frac{x^2+2x+4}{2x+3}$ में अंश एवं हर दोनों बहुपद हैं। अतः यह एक परिमेय व्यंजक है।

3. एक परिमेय व्यंजक ज्ञात कीजिए, जिसका अंश शून्यक -2 एवं 1 वाला एक द्विघात बहुपद हो तथा हर शून्यक 2 और 3 वाला एक द्विघात बहुपद हो।

हल– दिया है : परिमेय व्यंजक का अंश = शून्यक -2 तथा 1 वाला द्विघात बहुपद

$$=(x+2)(x-1)$$
$$=x^2-x+2x-2=x^2+x-2$$

तथा परिमेय व्यंजक का हर = शून्यक 2 तथा 3 वाला द्विघात बहुपद

$$=(x-2)(x-3)$$
$$=x^2-3x-2x+6=x^2-5x+6$$

अतः अभीष्ट परिमेय व्यंजक $=\frac{x^2+x-2}{x^2-5x+6}$ **उत्तर**

4. एक ऐसा परिमेय व्यंजक ज्ञात कीजिए, जिसका अंश 3 तथा $\frac{1}{2}$ शून्यकों वाला द्विघात बहुपद है तथा जिसका हर $-\frac{3}{2}$ तथा 4 शून्यकों वाला द्विघात बहुपद है।

हल– दिया है— अंश = शून्यकों 3 व $\frac{1}{2}$ वाला बहुपद $=(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

हर = शून्यकों $-\frac{3}{2}$ तथा 4 वाला बहुपद $=\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-4)$

अतः परिमेय व्यंजक $=\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}=\frac{(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-4)}$

$$= \frac{(x-3)(2x-1)}{(2x+3)(x-4)} = \frac{2x^2-x-6x+3}{2x^2-8x+3x-12}$$

अतः अभीष्ट परिमेय व्यंजक $= \frac{2x^2-7x+3}{2x^2-5x-12}$ उत्तर

5. यह कथन सत्य है या असत्य– परिमेय व्यंजक $\frac{x^6-7x^2+2}{x^2+4}$ के हर की घात 6 है।

हल– व्यंजक $\frac{x^6-7x^2+2}{x^2+4}$ के हर x^2+4 की घात 2 है। अतः दिया गया कथन असत्य है।

अभ्यास 2.2

1. निम्नलिखित को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए—

(i) $\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$ **(ii)** $\frac{12a^3b^5c^4}{24a^2b^6c^5}$

(iii) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ **(iv)** $\frac{x^2-4}{(x+2)^2}$

(v) $\frac{9-x^2}{(x+3)^2}$ **(vi)** $\frac{x^3-8}{x^2-4}$

(vii) $\frac{x^2-13x-48}{x^2-2x-15}$ **(viii)** $\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

(ix) $\frac{2x^4-2x}{x^3+x^2+x}$ **(x)** $\frac{x^2-4}{x^3-8}$

हल— **(i)** $\frac{x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)}$ उत्तर

(ii) $\frac{12a^3b^5c^4}{24a^2b^6c^5} = \frac{2\times2\times3\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times b\times b\times c\times c\times c\times c}{2\times2\times2\times3\times a\times a\times b\times b\times b\times b\times b\times b\times c\times c\times c\times c\times c}$

$= \frac{a}{2bc}$ उत्तर

(iii) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)} = (a-b)$ उत्तर

(iv) $\frac{x^2-4}{(x+2)^2} = \frac{x^2-2^2}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+2)} = \frac{(x-2)}{(x+2)}$ उत्तर

(v) $\frac{9-x^2}{(x+3)^2} = \frac{3^2-x^2}{(x+3)^2} = \frac{(3+x)(3-x)}{(x+3)(x+3)} = \frac{3-x}{x+3}$ उत्तर

(vi) $\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$ उत्तर

(vii) $\frac{x^2-13x-48}{x^2-2x-15}=\frac{x^2-16x+3x-48}{x^2-5x+3x-15}=\frac{x(x-16)+3(x-16)}{x(x-5)+3(x-5)}$

$=\frac{(x-16)(x+3)}{(x-5)(x+3)}=\frac{x-16}{x-5}$ उत्तर

(viii) $\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{x^2-3x-2x+6}{x-3}=\frac{x(x-3)-2(x-3)}{(x-3)}$

$=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)}=(x-2)$ उत्तर

(ix) $\frac{2x^4-2x}{x^3+x^2+x}=\frac{2x(x^3-1)}{x(x^2+x+1)}=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)}$

$=2(x+1)$ उत्तर

(x) $\frac{x^2-4}{x^3-8}=\frac{x^2-2^2}{x^3-2^3}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)}$ उत्तर

2. निम्नलिखित को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए–

(i) $\frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^3-8x+3}$ **(ii)** $\frac{8(a+b-c)^2}{12(a+b-c)^3}$

(iii) $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(b+c)x+bc}$ **(iv)** $\frac{x^3+x^2}{x^2+5x+4}$

(v) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$ **(vi)** $\frac{x^3+4x^2}{x^2+5x+4}$

(vii) $\frac{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}{x^4-b^4}$ **(viii)** $\frac{(x^2-1)(x+2)(x^2-x-72)}{(x-9)(x+1)}$

हल– **(i)** $\frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^3-8x+3}=\frac{x^3+3x^2-x^2-3x+x+3}{x^3+3x^2-3x^2-9x+x+3}$

$=\frac{x^2(x+3)-x(x+3)+1(x+3)}{x^2(x+3)-3x(x+3)+1(x+3)}$

$=\frac{(x+3)(x^2-x+1)}{(x+3)(x^2-3x+1)}=\frac{x^2-x+1}{x^2-3x+1}$ उत्तर

(ii) $\frac{8(a+b-c)^2}{12(a+b-c)^3}=\frac{2\times2\times2(a+b-c)(a+b-c)}{2\times2\times3(a+b-c)(a+b-c)(a+b-c)}$

$=\frac{2}{3(a+b-c)}$ उत्तर

(iii) $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(b+c)x+bc}=\frac{x^2+ax+bx+ab}{x^2+bx+cx+bc}$

$=\frac{x(x+a)+b(x+a)}{x(x+b)+c(x+b)}=\frac{(x+a)(x+b)}{(x+b)(x+c)}=\frac{x+a}{x+c}$ उत्तर

(iv) $\frac{x^3+x^2}{x^2+5x+4}=\frac{x^2(x+1)}{x^2+4x+x+4}=\frac{x^2(x+1)}{x(x+4)+1(x+4)}$

$=\frac{x^2(x+1)}{(x+4)(x+1)}=\frac{x^2}{x+4}$ उत्तर

(v) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x^2+xy+y^2)}{(x+y)}$ उत्तर

(vi) $\frac{x^3+4x^2}{x^2+5x+4}=\frac{x^2(x+4)}{x^2+4x+x+4}=\frac{x^2(x+4)}{x(x+4)+1(x+4)}$

$=\frac{x^2(x+4)}{(x+4)(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}$ उत्तर

(vii) $\frac{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}{x^4-b^4}=\frac{x^4-a^2x^2-b^2x^2+a^2b^2}{(x^2+b^2)(x^2-b^2)}$

$=\frac{x^2(x^2-a^2)-b^2(x^2-a^2)}{(x^2+b^2)(x^2-b^2)}$

$=\frac{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}{(x^2+b^2)(x^2-b^2)}=\frac{(x^2-a^2)}{(x^2+b^2)}$ उत्तर

(viii) $\frac{(x^2-1)(x+2)(x^2-x-72)}{(x-9)(x+1)}=\frac{(x+1)(x-1)(x+2)(x^2-9x+8x-72)}{(x-9)(x+1)}$

$=\frac{(x-1)(x+2)\{x(x-9)+8(x-9)\}}{(x-9)}$

$=\frac{(x-1)(x+2)\{(x-9)(x+8)\}}{(x-9)}$

$=\frac{(x-1)(x+2)(x-9)(x+8)}{(x-9)}$

$=(x-1)(x+2)(x+8)$ उत्तर

3. क्या $\frac{3(4-x^2)}{(x+2)^2}$ अपने निम्नतम पदों में है? यदि नहीं तो इसे निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

हल– व्यंजक $\frac{3(4-x^2)}{(x+2)^2}$ अपने निम्नतम पदों में नहीं है।

$\frac{3(4-x^2)}{(x+2)^2}=\frac{3(2^2-x^2)}{(x+2)(x+2)}$

$=\frac{3(2+x)(2-x)}{(x+2)(x+2)}=\frac{3(2-x)}{(x+2)}$ उत्तर

4. व्यंजक $\frac{5x-10}{x^2+x-6}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{5x-10}{x^2+x-6}=\frac{5(x-2)}{x^2+3x-2x-6}$

$=\frac{5(x-2)}{x(x+3)-2(x+3)}$

$=\frac{5(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\frac{5}{(x+3)}$ उत्तर

5. $\frac{27-x^3}{x^2-9}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{27-x^3}{x^2-9}=\frac{x^3-3^3}{x^2-3^2}=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x^2+3x+9}{x+3}$ उत्तर

6. $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}=\frac{(x-4)^2}{x^2-4^2}=\frac{(x-4)(x-4)}{(x+4)(x-4)}=\frac{x-4}{x+4}$ उत्तर

7. निम्नलिखित परिमेय व्यंजकों को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए–

(i) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$ (ii) $\frac{x+1}{2x^2+x-1}$

(iii) $\frac{x^2-6x-27}{x^2-9}$ (iv) $\frac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

(v) $\frac{9x^2-(x^2-4)^2}{3x+4-x^2}$ (vi) $\frac{4(2x^2+x-1)}{4x^2-4}$

हल– (i) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}=\frac{x^2-4x-2x+8}{x^2-3x-2x+6}=\frac{x(x-4)-2(x-4)}{x(x-3)-2(x-3)}$

$=\frac{(x-4)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-4}{x-3}$ उत्तर

(ii) $\frac{x+1}{2x^2+x-1}=\frac{x+1}{2x^2+2x-x-1}=\frac{(x+1)}{2x(x+1)-1(x+1)}$

$=\frac{(x+1)}{(x+1)(2x-1)}=\frac{1}{2x-1}$ उत्तर

(iii) $\frac{x^2-6x-27}{x^2-9}=\frac{x^2-9x+3x-27}{x^2-3^2}=\frac{x(x-9)+3(x-9)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{(x-9)(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x-9}{x-3}$ उत्तर

(iv) $\frac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}=\frac{(x-1)(x-2)(x^2-7x-2x+14)}{(x-7)(x^2-2x-x+2)}$

$=\frac{(x-1)(x-2)\{x(x-7)-2(x-7)\}}{(x-7)\{x(x-2)-1(x-2)\}}$

$=\frac{(x-1)(x-2)\{(x-7)(x-2)\}}{(x-7)\{(x-2)(x-1)\}}$

$=\frac{(x-1)(x-2)(x-7)(x-2)}{(x-7)(x-2)(x-1)}=(x-2)$ उत्तर

(v) $\frac{9x^2-(x^2-4)^2}{3x+4-x^2}=\frac{(3x)^2-(x^2-4)^2}{3x+4-x^2}$

$=\frac{(3x+x^2-4)(3x-x^2+4)}{(3x+4-x^2)}=3x+x^2-4$

$=x^2+3x-4=x^2+4x-x-4$

$=x(x+4)-1(x+4)=(x+4)(x-1)$ उत्तर

(vi) $\frac{4(2x^2+x-1)}{4x^2-4}=\frac{4(2x^2+x-1)}{4(x^2-1)}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

$=\frac{2x^2+2x-x-1}{x^2-1^2}=\frac{2x(x+1)-1(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x-1}{x-1}$ उत्तर

8. $\frac{x^2-5x-6}{x^2+3x+2}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x^2-5x-6}{x^2+3x+2}=\frac{x^2-6x+x-6}{x^2+2x+x+2}=\frac{x(x-6)+1(x-6)}{x(x+2)+1(x+2)}$

$=\frac{(x-6)(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\frac{x-6}{x+2}$ उत्तर

9. $\frac{3x^2-x-4}{9x^2-16}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{3x^2-x-4}{9x^2-16}=\frac{3x^2-4x+3x-4}{(3x)^2-(4)^2}=\frac{x(3x-4)+1(3x-4)}{(3x+4)(3x-4)}$

$=\frac{(3x-4)(x+1)}{(3x+4)(3x-4)}=\frac{x+1}{3x+4}$ उत्तर

10. $\frac{x^8-a^8}{x^6-a^6}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x^8-a^8}{x^6-a^6}=\frac{(x^4)^2-(a^4)^2}{(x^3)^2-(a^3)^2}=\frac{(x^4+a^4)(x^4-a^4)}{(x^3+a^3)(x^3-a^3)}$

$$=\frac{(x^4+a^4)\{(x^2)^2-(a^2)^2\}}{(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)(x^2+ax+a^2)}$$

$$=\frac{(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x^2-a^2)}{(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}$$

$$=\frac{(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}{(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}$$

$$=\frac{(x^4+a^4)(x^2+a^2)}{(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}$$ उत्तर

11. $\frac{3x^4+3x}{x^3-x^2+x}$ को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

हल– $\frac{3x^4+3x}{x^3-x^2+x}=\frac{3x(x^3+1)}{x(x^2-x+1)}=\frac{3x(x^3+1^3)}{x(x^2-x+1)}$

$$=\frac{3(x+1)(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)}=3(x+1)$$ उत्तर

अभ्यास 2.3

1. निम्नलिखित व्यंजकों को परिमेय व्यंजकों के रूप में व्यक्त कीजिए—

(i) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x-2}$ (ii) $\frac{x^2+x-1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^3+2}$

(iii) $\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x+2}$

(iv) $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)}+\frac{(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$

(v) $\frac{x}{(x-y)}+\frac{y}{(x+y)}-\frac{2xy}{y^2-x^2}$ (vi) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

(vii) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}$ (viii) $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}$

हल– (i) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{x+1+x-1}{(x-2)}=\frac{2x}{(x-2)}$ उत्तर

(ii) $\frac{x^2+x-1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^3+2}=\frac{(x^3+2)(x^2+x-1)+(x^2-1)(x+1)}{(x^2-1)(x^3+2)}$

$$=\frac{(x^5+x^4-x^3+2x^2+2x-2+x^3+x^2-x-1)}{(x^2-1)(x^3+2)}$$

$$=\frac{(x^5+x^4+3x^2+x-3)}{(x^2-1)(x^3+2)}$$ उत्तर

(iii) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x^2+1)+(x^2-1)(x+1)}{(x^2-1)(x+2)}$

$=\dfrac{x^3+x+2x^2+2+x^3+x^2-x-1}{(x^2-1)(x+2)}$

$=\dfrac{\mathbf{2x^3+3x^2+1}}{\mathbf{(x^2-1)(x+2)}}$ **उत्तर**

(iv) $\dfrac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)}+\dfrac{(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$

$=\dfrac{(2x-1)(x+2)+(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$

$=\dfrac{2x^2+4x-x-2+4x^4-x^2-16x^2+4}{(x+3)}$

$=\dfrac{\mathbf{4x^4-15x^2+3x+2}}{\mathbf{x+3}}$ **उत्तर**

(v) $\dfrac{x}{(x-y)}+\dfrac{y}{(x+y)}-\dfrac{2xy}{y^2-x^2}=\dfrac{x(x+y)+y(x-y)}{(x-y)(x+y)}-\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)}$

$=\dfrac{x(x+y)+y(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\dfrac{2xy}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{x^2+xy+xy-y^2-2xy}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=\mathbf{1}$ **उत्तर**

(vi) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}+\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}=\dfrac{x^2-3x+2x-6}{x^2-3^2}+\dfrac{x^2+6x-4x-24}{x^2-4x+3x-12}$

$=\dfrac{x(x-3)+2(x-3)}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{x(x+6)-4(x+6)}{x(x-4)+3(x-4)}$

$=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{(x+6)(x-4)}{(x-4)(x+3)}$

$=\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+6}{x+3}=\dfrac{x+2+x+6}{x+3}$

$=\dfrac{2x+8}{x+3}=\dfrac{\mathbf{2(x+4)}}{\mathbf{(x+3)}}$ **उत्तर**

(vii) $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{(x+2)^2+(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{x^2+4+4x+x^2+4-4x}{(x^2-4)}$

$$=\frac{2x^2+8}{(x^2-4)}=\frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)}$$ उत्तर

(viii) $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{x(x-y)+y(x+y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$

$$=\frac{x^2-xy+xy+y^2}{(x+y)(x-y)}+\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{(x+y)(x-y)}+\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x^2+y^2+2xy}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x+y}{x-y}$$ उत्तर

2. निम्नलिखित व्यंजकों को परिमेय व्यंजकों के रूप में व्यक्त कीजिए—

(i) $\frac{x^2+1}{x-3}-\frac{2x^2+3}{x-3}$ (ii) $\frac{x^2+2}{x-1}-\frac{x-3}{x+1}$

(iii) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}$ (iv) $\frac{4x-x^2+1}{1-x}-\frac{2x+x^2-1}{2+x}$

(v) $\left[\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}\right]-\frac{3x^2}{x-1}$ (vi) $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1-x^4}$

(vii) $\frac{x^3}{x^2-1}-\frac{x^2}{x+1}$ (viii) $\frac{x^2-1}{x+1}-\frac{1-x^3}{1+x+x^2}$

हल– (i) $\frac{x^2+1}{x-3}-\frac{2x^2+3}{x-3}=\frac{(x^2+1)-(2x^2+3)}{(x-3)}$

$$=\frac{x^2+1-2x^2-3}{x-3}=\frac{-x^2-2}{x-3}$$

$$=\frac{-(x^2+2)}{x-3}=\frac{x^2+2}{3-x}$$ उत्तर

(ii) $\frac{x^2+2}{x-1}-\frac{x-3}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2+2)-(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)}$

$$=\frac{x^3+2x+x^2+2-(x^2-3x-x+3)}{(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3+2x+x^2+2-x^2+3x+x-3}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^3+6x-1}{x^2-1}$$ उत्तर

(iii) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{x^2+1+2x-(x^2+1-2x)}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^2+1+2x-x^2-1+2x}{x^2-1}=\frac{\mathbf{4x}}{\mathbf{x^2-1}}$$ उत्तर

(iv) $\frac{4x-x^2+1}{1-x}-\frac{2x+x^2-1}{2+x}=\frac{(2+x)(4x-x^2+1)-(1-x)(2x+x^2-1)}{(1-x)(2+x)}$

$$=\frac{8x-2x^2+2+4x^2-x^3+x-(2x+x^2-1-2x^2-x^3+x)}{2+x-2x-x^2}$$

$$=\frac{8x-2x^2+2+4x^2-x^3+x-2x-x^2+1+2x^2+x^3-x}{2+x-2x-x^2}$$

$$=\frac{6x^2-3x^2+9x-3x+x^3-x^3+3}{2-x-x^2}$$

$$=\frac{3x^2+6x+3}{2-x-x^2}=\frac{\mathbf{3(x^2+2x+1)}}{\mathbf{2-x-x^2}}$$ उत्तर

(v) $\left[\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}\right]-\frac{3x^2}{x-1}=\left[\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\right]-\frac{3x^2}{x-1}$

$$=\frac{x^2+1+2x+x^2+1-2x}{(x-1)(x+1)}-\frac{3x^2}{(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)}-\frac{3x^2}{(x-1)}=\frac{(2x^2+2)-3x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2+2-3x^3-3x^2}{x^2-1^2}=\frac{\mathbf{-3x^3-x^2+2}}{\mathbf{x^2-1}}$$ उत्तर

(vi) $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1-x^4}$

$$=\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{1+x^2+2x-(1+x^2-2x)}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{1+x^2+2x-1-x^2+2x}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{4x}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x^2}{1-x^4}$$

$$=\frac{4x(1+x^2)+4x(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{4x+4x^3+4x-4x^3}{1-x^4}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{8x}{1-x^4}-\frac{8x}{1-x^4}=0$$ उत्तर

(vii) $\frac{x^3}{x^2-1}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^3}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2}{(x+1)}$

$$=\frac{x^3-(x-1)x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^3-x^3+x^2}{x^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$$ उत्तर

(viii) $\frac{x^2-1}{x+1}-\frac{1-x^3}{1+x+x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}-\frac{(1-x)(x^2+x+1)}{(1+x+x^2)}$

$$=x-1-(1-x)=x-1-1+x=2x-2$$ उत्तर

3. परिमेय व्यंजक $\frac{x-1}{x+2}$ का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल– व्यंजक $\frac{x-1}{x+2}$ का योज्य प्रतिलोम $=-\frac{x-1}{x+2}=\frac{1-x}{x+2}$ उत्तर

4. यदि $A=\frac{x-2}{x+2}$ तो $A-\frac{1}{A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $A=\frac{x-2}{x+2}$

अतः $A-\frac{1}{A}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{1}{\frac{x-2}{x+2}}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}$

$$=\frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2+4-4x-(x^2+4+4x)}{x^2-4}$$

$$=\frac{x^2+4-4x-x^2-4-4x}{x^2-4}=\frac{-8x}{x^2-4}$$ उत्तर

5. $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1+x^4}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1+x^4}=\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1+x^4}$

$$=\frac{1+x^2+2x-(1+x^2-2x)}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1+x^4}$$

$$=\frac{1+x^2+2x-1-x^2+2x}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1+x^4}$$

$$=\frac{4x}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1+x^4}$$

$$=\frac{4x(1+x^2)+4x(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}-\frac{8x}{1+x^4}$$

$$= \frac{8x}{1-x^4} - \frac{8x}{1+x^4} = \frac{8x(1+x^4) - 8x(1-x^4)}{(1-x^4)(1+x^4)}$$

$$= \frac{8x + 8x^5 - 8x + 8x^5}{1-x^8} = \frac{\mathbf{16x^5}}{\mathbf{1-x^8}}$$ उत्तर

6. व्यंजक $\frac{x^2-3x}{x-2}$ में क्या जोड़ा जाए कि योगफल $\frac{x^2}{x-2}$ हो जाए?

हल– माना व्यंजक $\frac{x^2-3x}{x-2}$ में A जोड़ने पर योगफल $\frac{x^2}{x-2}$ हो जाता है।

अतः $$\frac{x^2-3x}{x-2} + A = \frac{x^2}{x-2}$$

$$A = \frac{x^2}{x-2} - \frac{x^2-3x}{x-2}$$

या $$A = \frac{x^2 - (x^2-3x)}{x-2}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 + 3x}{x-2} = \frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{x-2}}$$ उत्तर

7. $A = \frac{x^2+2}{x-3}$, $B = \frac{x^2-1}{x}$ तो $A - B$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $A = \frac{x^2+2}{x-3}$ तथा $B = \frac{x^2-1}{x}$

अतः $$A - B = \frac{x^2+2}{x-3} - \frac{x^2-1}{x}$$

$$= \frac{x(x^2+2) - (x-3)(x^2-1)}{x(x-3)}$$

$$= \frac{x^3 + 2x - (x^3 - x - 3x^2 + 3)}{x(x-3)}$$

$$= \frac{x^3 + 2x - x^3 + x + 3x^2 - 3}{x(x-3)} = \frac{\mathbf{3x^2 + 3x - 3}}{\mathbf{x(x-3)}}$$ उत्तर

8. परिमेय व्यंजक $\frac{x^3+6x-1}{(x-1)(x+1)}$ में क्या जोड़ा जाए कि योगफल $\frac{x^2+1}{x-1}$ हो जाए?

हल– माना व्यंजक $\frac{x^3+6x-1}{(x-1)(x+1)}$ में A जोड़ने पर योगफल $\frac{x^2+1}{x-1}$ हो जाता है।

अतः $$\frac{x^3+6x-1}{(x-1)(x+1)} + A = \frac{x^2+1}{x-1}$$

या $$A = \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^3+6x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2+1)-(x^3+6x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x^3+x+x^2+1-x^3-6x+1}{(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^2-5x+2}{x^2-1}$$ उत्तर

9. $\frac{3x-x^2}{2-x}$ का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल– $\frac{3x-x^2}{2-x}$ का योज्य प्रतिलोम $=\frac{3x-x^2}{2-x}=\frac{-3x+x^2}{2-x}=\frac{x^2-3x}{2-x}$ उत्तर

10. $P=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$ तो P^{-1} का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $P=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$

या $P=\frac{x^2+16}{4x}$ या $\frac{1}{P}=\frac{4x}{x^2+16}$

या $P^{-1}=\frac{4x}{x^2+16}$ उत्तर

11. $\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}-\frac{c-b}{(b-a)(x-b)}$ को हल कीजिए।

हल– $\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}-\frac{c-b}{(b-a)(x-b)}=\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}+\frac{c-b}{(a-b)(x-b)}$

$$=\frac{(a-c)(x-b)+(c-b)(x-a)}{(a-b)(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{ax-ab-cx+bc+cx-ac-bx+ab}{(a-b)(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{ax+bc-bx-ac}{(a-b)(x-a)(x-b)}=\frac{ax-bx-ac+bc}{(a-b)(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{x(a-b)-c(a-b)}{(a-b)(x-a)(x-b)}=\frac{(a-b)(x-c)}{(a-b)(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{(x-c)}{(x-a)(x-b)}$$ उत्तर

अभ्यास 2.4

1. निम्नलिखित परिमेय व्यंजक युग्मों के गुणनफल ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{x^2}{yz}, \frac{y^2}{zx}, \frac{z^2}{xy}$

(ii) $\frac{x+2}{x-2}, \frac{x+1}{x-1}$

(iii) $\frac{x^2-9}{x+2}, \frac{x^2-4}{x+3}$

(iv) $\frac{5x+2}{5x-3}, \frac{x+6}{x+2}$

हल– (i) दिए हुए परिमेय व्यंजक $=\frac{x^2}{yz}, \frac{y^2}{zx}, \frac{z^2}{xy}$

अतः गुणनफल $=\frac{x^2}{yz}\times\frac{y^2}{zx}\times\frac{z^2}{xy}=\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}=1$ **उत्तर**

(ii) दिए हुए परिमेय व्यंजक $\frac{x+2}{x-2}$ तथा $\frac{x+1}{x-1}$

अतः गुणनफल $=\frac{(x+2)}{(x-2)}\times\frac{(x+1)}{(x-1)}=\frac{x^2+x+2x+2}{x^2-x-2x+2}$

$=\frac{\boldsymbol{x^2+3x+2}}{\boldsymbol{x^2-3x+2}}$ **उत्तर**

(iii) दिए हुए परिमेय व्यंजक $\frac{x^2-9}{x+2}, \frac{x^2-4}{x+3}$

अतः गुणनफल $=\frac{(x^2-9)}{(x+2)}\times\frac{(x^2-4)}{(x+3)}=\frac{x^2-3^2}{(x+2)}\times\frac{x^2-2^2}{(x+3)}$

$=\frac{(x+3)(x-3)\times(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+3)}=(x-3)(x-2)$

$=x^2-2x-3x+6=\boldsymbol{x^2-5x+6}$ **उत्तर**

(iv) दिए हुए परिमेय व्यंजक $\frac{5x+2}{5x-3}$ तथा $\frac{x+6}{x+2}$

अतः गुणनफल $=\frac{(5x+2)}{(5x-3)}\times\frac{(x+6)}{(x+2)}=\frac{5x^2+30x+2x+12}{5x^2-3x+10x-6}$

$=\frac{\boldsymbol{5x^2+32x+12}}{\boldsymbol{5x^2+7x-6}}$ **उत्तर**

2. $\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{8}}{x^2+3}\times\frac{x\sqrt{8}-\sqrt{32}}{x+4}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए परिमेय व्यंजक $=\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{8}}{x^2+3}$ तथा $\frac{x\sqrt{8}-\sqrt{32}}{x+4}$

अतः गुणनफल $=\frac{(x\sqrt{2}-\sqrt{8})}{(x^2+3)}\times\frac{(x\sqrt{8}-\sqrt{32})}{(x+4)}$

$=\frac{\sqrt{16}x^2-\sqrt{64}x-\sqrt{64}x+\sqrt{256}}{(x^3+4x^2+3x+12)}$

$=\frac{4x^2-8x-8x+16}{x^3+4x^2+3x+12}=\frac{\boldsymbol{4x^2-16x+16}}{\boldsymbol{x^3+4x^2+3x+12}}$ **उत्तर**

3. निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{x^2-7x+10}{(x-4)^2}\times\frac{x^2-7x+12}{(x-5)}$ **(ii)** $(x^2+3x+2)\frac{x+4}{x+2}$

(iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}$

(iv) $\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2+4x+1}\times\dfrac{4x^2+5x+1}{5x^2+6x+1}\times\dfrac{15x^2+8x+1}{8x^2+6x+1}$

हल– **(i)** $\dfrac{x^2-7x+10}{(x-4)^2}\times\dfrac{x^2-7x+12}{(x-5)}=\dfrac{x^2-5x-2x+10}{(x-4)^2}\times\dfrac{x^2-4x-3x+12}{(x-5)}$

$=\dfrac{x(x-5)-2(x-5)}{(x-4)^2}\times\dfrac{x(x-4)-3(x-4)}{(x-5)}$

$=\dfrac{(x-5)(x-2)(x-4)(x-3)}{(x-4)^2(x-5)}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-4)}$

$=\dfrac{x^2-3x-2x+6}{x-4}=\dfrac{\mathbf{x^2-5x+6}}{\mathbf{x-4}}$ **उत्तर**

(ii) $(x^2+3x+2)\times\dfrac{x+4}{x+2}=(x^2+2x+x+2)\times\dfrac{(x+4)}{(x+2)}$

$=\{x(x+2)+1(x+2)\}\dfrac{(x+4)}{(x+2)}$

$=(x+2)(x+1)\times\dfrac{(x+4)}{(x+2)}=(x+1)(x+4)$

$=x^2+x+4x+4=\mathbf{x^2+5x+4}$ **उत्तर**

(iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x^3-2^3)}{(x)^2-(2)^2}\times\dfrac{x^2+4x+2x+8}{x^2-2x+1}$

$=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{x(x+4)+2(x+4)}{(x^2-2x+1)}$

$=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)(x+4)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x^2-2x+1)}$

$=\dfrac{(x^2+2x+4)(x+4)}{(x^2-2x+1)}$

$=\dfrac{x^3+4x^2+2x^2+8x+4x+16}{x^2-2x+1}$

$=\dfrac{\mathbf{x^3+6x^2+12x+16}}{\mathbf{x^2-2x+1}}$ **उत्तर**

(iv) $\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2+4x+1}\times\dfrac{4x^2+5x+1}{5x^2+6x+1}\times\dfrac{15x^2+8x+1}{8x^2+6x+1}$

$=\dfrac{2x^2+2x+x+1}{3x^2+3x+x+1}\times\dfrac{4x^2+4x+x+1}{5x^2+5x+x+1}\times\dfrac{15x^2+5x+3x+1}{8x^2+4x+2x+1}$

$$=\frac{2x(x+1)+1(x+1)}{3x(x+1)+1(x+1)}\times\frac{4x(x+1)+1(x+1)}{5x(x+1)+1(x+1)}\times\frac{5x(3x+1)+1(3x+1)}{4x(2x+1)+1(2x+1)}$$

$$=\frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(3x+1)}\times\frac{(x+1)(4x+1)}{(x+1)(5x+1)}\times\frac{(3x+1)(5x+1)}{(2x+1)(4x+1)}$$

$$=1$$ उत्तर

4. $\frac{x^2-2}{3x^2+4}$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल– $\frac{x^2-2}{3x^2+4}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $=\frac{1}{\frac{x^2-2}{3x^2+4}}=\frac{3x^2+4}{x^2-2}$ उत्तर

5. $\frac{x^7-x\sqrt{2}}{8x^7-x\sqrt{3}}$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल– $\frac{x^7-x\sqrt{2}}{8x^7-x\sqrt{3}}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $=\frac{1}{\frac{x^7-x\sqrt{2}}{8x^7-x\sqrt{3}}}=\frac{8x^7-x\sqrt{3}}{x^7-x\sqrt{2}}$ उत्तर

6. $\frac{2y+1}{y^2+2y+4}\times\frac{y^4-8y}{2y^2-5y-3}\times\frac{y+3}{y^2-2y}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{2y+1}{y^2+2y+4}\times\frac{y^4-8y}{2y^2-5y-3}\times\frac{y+3}{y^2-2y}$

$$=\frac{(2y+1)}{(y^2+2y+4)}\times\frac{y(y^3-8)}{(2y^2-6y+y-3)}\times\frac{(y+3)}{y(y-2)}$$

$$=\frac{(2y+1)}{(y^2+2y+4)}\times\frac{y(y^3-2^3)}{[2y(y-3)+1(y-3)]}\times\frac{(y+3)}{y(y-2)}$$

$$=\frac{(2y+1)}{(y^2+2y+4)}\times\frac{y(y-2)(y^2+2y+4)}{[(y-3)(2y+1)]}\times\frac{(y+3)}{y(y-2)}$$

$$=\frac{(2y+1)}{(y^2+2y+4)}\times\frac{y(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-3)(2y+1)}\times\frac{(y+3)}{y(y-2)}$$

$$=\frac{y+3}{y-3}$$ उत्तर

7. $\frac{x}{(x+y)^2-2xy}\times\frac{x^4-y^4}{(x+y)^3-3xy(x+y)}\times\frac{(x+y)^2-3xy}{(x+y)^2-4xy}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x}{(x+y)^2-2xy}\times\frac{x^4-y^4}{(x+y)^3-3xy(x+y)}\times\frac{(x+y)^2-3xy}{(x+y)^2-4xy}$

$$= \frac{x}{x^2+y^2+2xy-2xy} \times \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^3+y^3+3xy(x+y)-3xy(x+y)} \times \frac{x^2+y^2+2xy-3xy}{x^2+y^2+2xy-4xy}$$

$$= \frac{x}{(x^2+y^2)} \times \frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x^3+y^3)} \times \frac{(x^2+y^2-xy)}{x^2+y^2-2xy}$$

$$= \frac{x}{(x^2+y^2)} \times \frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2-xy)} \times \frac{(x^2+y^2-xy)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x}{x-y}$$ उत्तर

8. $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc} \times \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$ **को सरल कीजिए।**

हल– $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc} \times \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$

$$= \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}$$

$[\because x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)]$

$$= \frac{x+y+z}{a+b+c}$$ उत्तर

9. $\frac{x^4-7x^2+3}{x+5}$ **का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।**

हल– $\frac{x^4-7x^2+3}{x+5}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $= \frac{1}{\frac{x^4-7x^2+3}{x+5}} = \frac{x+5}{x^4-7x^2+3}$ उत्तर

10. $\frac{a^2-25}{a+2} \times \frac{a^2-4}{a+5}$ **का गुणनफल ज्ञात कीजिए।**

हल– $\frac{a^2-25}{a+2} \times \frac{a^2-4}{a+5} = \frac{(a^2-5^2)}{(a+2)} \times \frac{(a^2-2^2)}{(a+5)}$

$$= \frac{(a+5)(a-5)}{(a+2)} \times \frac{(a+2)(a-2)}{(a+5)} = (a-5)(a-2)$$

$$= a^2-5a-2a+10$$

$$= a^2-7a+10$$ उत्तर

अभ्यास 2.5

1. $\frac{x^2-1}{x+4} \div \frac{x^2+3x+1}{2x-7}$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– दिया हुआ व्यंजक $\frac{x^2-1}{x+4} \div \frac{x^2+3x+1}{2x-7} = \frac{(x^2-1)}{(x+4)} \times \frac{(2x-7)}{(x^2+3x+1)}$

$$= \frac{2x^3-7x^2-2x+7}{x^3+3x^2+x+4x^2+12x+4}$$

$$= \frac{2x^3-7x^2-2x+7}{x^3+7x^2+13x+4}$$ उत्तर

2. निम्नलिखित को सरल कीजिए—

(i) $\frac{x^2+8x+12}{x^2-7x+12} \div \frac{x^2+4x-12}{x-4}$

(ii) $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \div \frac{(x+2)(3x+1)}{(x+3)(4x+3)}$

हल– (i) $\frac{x^2+8x+12}{x^2-7x+12} \div \frac{x^2+4x-12}{x-4} = \frac{x^2+8x+12}{x^2-7x+12} \times \frac{(x-4)}{x^2+4x-12}$

$$= \frac{x^2+6x+2x+12}{x^2-4x-3x+12} \times \frac{(x-4)}{x^2+6x-2x-12}$$

$$= \frac{x(x+6)+2(x+6)}{x(x-4)-3(x-4)} \times \frac{(x-4)}{x(x+6)-2(x+6)}$$

$$= \frac{(x+6)(x+2)}{(x-4)(x-3)} \times \frac{(x-4)}{(x+6)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+2)}{(x-2)(x-3)}$$ उत्तर

(ii) $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \div \frac{(x+2)(3x+1)}{(x+3)(4x+3)} = \frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \times \frac{(x+3)(4x+3)}{(x+2)(3x+1)}$

$$= \frac{(2x-1)(4x+3)}{(3x+1)} = \frac{8x^2+6x-4x-3}{3x+1}$$

$$= \frac{8x^2+2x-3}{3x+1}$$ उत्तर

3. $\frac{x^2-1}{x+1} \div \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x^2-1}{x+1} \div \frac{x^3-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} \times \frac{x^2+x+1}{x^3-1} = \frac{(x^2-1^2)}{(x+1)} \times \frac{(x^2+x+1)}{(x^3-1^3)}$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} \times \frac{(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = 1$$ उत्तर

4. $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \div \frac{(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \div \frac{(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$

$$= \frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \times \frac{(x+3)}{(x^2-4)(4x^2-1)}$$

$$= \frac{(2x-1)(x+2)}{(x^2-2^2)\{(2x)^2-1^2\}}$$

$$= \frac{(2x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)(2x+1)(2x-1)}$$

$$= \frac{1}{(x-2)(2x+1)} = \frac{1}{2x^2+x-4x-2}$$

$$= \frac{1}{2x^2-3x-2}$$ उत्तर

5. $\left[\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{x}{1+x}-1\right)\right] \div \frac{1+x^2}{1-x^2}$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– $\left[\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{x}{1+x}-1\right)\right] \div \frac{1+x^2}{1-x^2} = \left[\left(\frac{1-x+x}{1-x}\right)\left(\frac{x-1-x}{1+x}\right)\right] \times \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)}$

$$= \left[\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{-1}{1+x}\right)\right] \times \frac{(1+x)(1-x)}{(1-x^2)}$$

$$= \frac{-1}{(1-x)(1+x)} \times \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)}$$

$$= -\frac{1}{1+x^2}$$ उत्तर

6. $\left[\frac{2x^2+3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1}\right] \div \frac{x^2-1}{3x}$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– $\left[\frac{2x^2+3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1}\right] \div \frac{x^2-1}{3x} = \left[\frac{(x+1)(2x^2+3)+(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}\right] \times \frac{3x}{x^2-1}$

$$= \frac{(2x^3+3x+2x^2+3+x^2+3x-x-3)}{(x^2-1)} \times \frac{3x}{(x^2-1)}$$

$$= \frac{(2x^3+3x^2+5x)}{(x^2-1)^2} \times 3x$$

$$= \frac{6x^4+9x^3+15x^2}{x^4-2x^2+1}$$ उत्तर

7. यदि $P=\frac{x^2+2}{x-3}$ व $Q=\frac{x-1}{x}$ तब $P\div Q$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $P=\frac{x^2+2}{x-3}$ तथा $Q=\frac{x-1}{x}$

अत: $P\div Q=\frac{x^2+2}{x-3}\div\frac{x-1}{x}=\frac{x^2+2}{x-3}\times\frac{x}{x-1}$

$=\frac{x^3+2x}{x^2-x-3x+3}=\frac{x^3+2x}{x^2-4x+3}$ उत्तर

8. $\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+y+z)^2}\div\left[\frac{(x-z)^2-y^2}{x^2+xy+zx}\div\frac{(x-y)^2-z^2}{x^2+xy+zx}\right]$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+y+z)^2}\div\left[\frac{(x-z)^2-y^2}{x^2+xy+zx}\div\frac{(x-y)^2-z^2}{x^2+xy+zx}\right]$

$=\frac{(x+y+z)(x+y-z)}{(x+y+z)^2}\div\left[\frac{(x-z)^2-y^2}{(x^2+xy+zx)}\times\frac{(x^2+xy+zx)}{(x-y)^2-z^2}\right]$

$=\frac{(x+y-z)}{(x+y+z)}\div\left[\frac{(x-z)^2-y^2}{(x-y)^2-z^2}\right]=\frac{(x+y-z)}{(x+y+z)}\times\frac{(x-y)^2-z^2}{(x-z)^2-y^2}$

$=\frac{(x+y-z)}{x+y+z}\times\frac{(x-y+z)(x-y-z)}{(x-z+y)(x-z-y)}$

$=\frac{(x+y-z)}{(x+y+z)}\times\frac{(x-y+z)(x-y-z)}{(x+y-z)(x-y-z)}=\frac{(x-y+z)}{(x+y+z)}$ उत्तर

9. यदि $P=\left[\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right]\left[\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right]\left[\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right]$

तथा $Q=\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right]\left[\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right]\left[\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right]$ तो $P\div Q$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $P=\left[\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right]\left[\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right]\left[\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right]$

$=\left[\frac{x^2-y^2}{xy}\right]\left[\frac{y^2-z^2}{zy}\right]\left[\frac{z^2-x^2}{xz}\right]$

$=\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{x^2y^2z^2}$

$Q=\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right]\left[\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right]\left[\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right]$

$=\left[\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\right]\left[\frac{z^2-y^2}{y^2z^2}\right]\left[\frac{x^2-z^2}{z^2x^2}\right]$

$$=\frac{(y^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}{x^4y^4z^4}$$

$$P\div Q=\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{x^2y^2z^2}\div\frac{(y^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}{x^4y^4z^4}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{x^2y^2z^2}\times\frac{x^4y^4z^4}{(y^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}$$

$$=\frac{(x^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}{(y^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}\times\frac{x^4y^4z^4}{x^2y^2z^2}$$

$$=-x^2y^2z^2$$ उत्तर

10. $\frac{1}{x^2-7x+12}\div\frac{1}{x^2+x-20}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{1}{x^2-7x+12}\div\frac{1}{x^2+x-20}=\frac{1}{x^2-7x+12}\times\frac{x^2+x-20}{1}$

$$=\frac{x^2+5x-4x-20}{x^2-4x-3x+12}=\frac{x(x+5)-4(x+5)}{x(x-4)-3(x-4)}$$

$$=\frac{(x+5)(x-4)}{(x-4)(x-3)}=\frac{x+5}{x-3}$$ उत्तर

11. $\left[x-y+\frac{y^2}{x+y}\right]\div\left[x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2-y^2}\right]$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– $\left[x-y+\frac{y^2}{x+y}\right]\div\left[x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2-y^2}\right]$

$$=\left[\frac{(x-y)(x+y)+y^2}{(x+y)}\right]\div\left[\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)+y^4}{x^2-y^2}\right]$$

$$=\left[\frac{x^2-y^2+y^2}{x+y}\right]\div\left[\frac{x^4-y^4+y^4}{x^2-y^2}\right]=\frac{x^2}{x+y}\div\frac{x^4}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2}{x+y}\times\frac{x^2-y^2}{x^4}=\frac{x^2}{(x+y)}\times\frac{(x+y)(x-y)}{x^4}=\frac{x-y}{x^2}$$ उत्तर

12. $\frac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2}\div\frac{3x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– $\frac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2}\div\frac{3x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}=\frac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2}\times\frac{2x^2-3x-2}{3x^2+2x-1}$

$$=\frac{3x^2+15x-x-5}{x^2-2x-x+2}\times\frac{2x^2-4x+x-2}{3x^2+3x-x-1}$$

$$=\frac{3x(x+5)-1(x+5)}{x(x-2)-1(x-2)}\times\frac{2x(x-2)+1(x-2)}{3x(x+1)-1(x+1)}$$

$$=\frac{(x+5)(3x-1)}{(x-2)(x-1)}\times\frac{(x-2)(2x+1)}{(x+1)(3x-1)}=\frac{(x+5)(2x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+x+10x+5}{x^2-1}=\frac{2x^2+11x+5}{x^2-1}$$ उत्तर

अभ्यास 2.6

यदि r व s परिमेय व्यंजक हों, तो निम्नलिखित कथनों में से सत्य व असत्य कथन छाँटिए—

1. $(r-s)^2=r^2-2rs+s^2$
2. $(r+s)(r-s)=r^2-s^2$
3. $r^3+s^3=(r+s)(r^2-rs+s^2)$
4. $r^3-s^3=(r-s)(r^2+s^2+rs)$
5. $r^3+s^3=(r+s)(r^2+rs-s^2)$
6. $r^3-s^3=(r-s)(r^2-rs+s^2)$
7. $8r^3+27s^3=(2r+3s)(4r^2+6rs+9s^2)$
8. $8r^3-27s^3=(2r-3s)(4r^2+6rs+9s^2)$

हल– 1. सत्य, 2. सत्य, 3. सत्य, 4. सत्य, 5. असत्य, 6. असत्य, 7. असत्य, 8. सत्य।

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 38 व 39 का अवलोकन कीजिए।

3

द्विघात समीकरण
(Quadratic Equation)

अभ्यास 3.1

1. निम्नलिखित समीकरणों में कौन-कौन से द्विघात समीकरण हैं?

(i) $x^2 = 5$ (ii) $x^3 + 7x = -1$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 1$

(iv) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ (v) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$

(vi) $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 5$ (vii) $x^2 + \frac{7}{x^2} = 1$

(viii) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$ (ix) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$

(x) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

हल– (i) $x^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 5 = 0$ एक **द्विघात समीकरण है,** क्योंकि उच्चतम घात वाले पद का घातांक 2 है।

(ii) $x^3 + 7x = -1 \Rightarrow x^3 + 7x + 1 = 0$ यहाँ उच्चतम घात वाले पद का घातांक 3 है। इसलिए यह **द्विघात समीकरण नहीं है।**

(iii) $x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ एक **द्विघात समीकरण है,** क्योंकि उच्चतम घात वाले पद का घातांक 2 है।

(iv) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

या $2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$

या $2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5$

या $2x^2 - x^2 - 7x - 4x + 3 + 5 = 0$

या $x^2 - 11x + 8 = 0$ जो कि **द्विघात समीकरण है।**

(v) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$ या $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$

या $x + 1 = x\sqrt{x} \times \sqrt{x}$ या $x + 1 = x^2$

या $x^2 = x + 1$

या $x^2 - x - 1 = 0$ जो कि **द्विघात समीकरण है।**

(vi) $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x\sqrt{x} + 1 = 5x \Rightarrow x\sqrt{x} - 5x + 1 = 0$ जो कि **द्विघात समीकरण नहीं है।**

(vii) $x^2+\frac{7}{x^2}=1 \Rightarrow x^4+7=x^2 \Rightarrow x^4-x^2-7$ जो कि **द्विघात समीकरण नहीं** है। क्योंकि उच्चतम घात वाले पद की घातांक 4 है।

(viii) $x^2+3x+1=(x-2)^2$ या $x^2+3x+1=x^2-4x+4$

या $3x+1=-4x+4$ या $3x+4x+1-4=0$

या $7x-3=0$ जो कि **द्विघात समीकरण नहीं है।**

(ix) $(x+2)^3=2x(x^2-1)$

या $x^3+2^3+3x\times 2(x+2)=2x^3-2x$

या $x^3+8+6x^2+12x=2x^3-2x$

या $-2x^3+x^3+8+6x^2+12+2x=0$

या $-x^3+6x^2+14x+8=0$ जो कि **द्विघात समीकरण नहीं है।**

(x) $(x+1)^2=2(x-3)$ या $x^2+2x+1=2x-6$

या $x^2+2x-2x+1+6=0$

या $x^2+7=0$ जो कि **द्विघात समीकरण है।** क्योंकि यहाँ उच्चतम घात वाले पद का घातांक 2 है।

2. प्रत्येक समीकरण के लिए जाँच कीजिए, कि उनके सामने दिए हुए मान समीकरण के हल हैं अथवा नहीं—

(i) $2x^2-6x+3=0$ $\quad x=\frac{1}{2}$

(ii) $x^2+\sqrt{2}x-4=0$ $\quad x=\sqrt{2},-2\sqrt{2}$

(iii) $x^2+6x+5=0$ $\quad x=-1,-5$

(iv) $a^2x^2-3abx+ab^2=0$ $\quad x=\frac{a}{b},\frac{b}{a}$

(v) $9x^2-3x-2=0$ $\quad x=-\frac{1}{3},\frac{2}{3}$

(vi) $3x^2-2x-1=0$ $\quad x=1$

(vii) $100x^2-20x+1=0$ $\quad x=\frac{1}{10}$

हल– (i) दिए गए समीकरण, $2x^2-6x+3=0$ में $x=\frac{1}{2}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\times\frac{1}{2}+3=2\times\frac{1}{4}-3+3=\frac{1}{2}\neq \text{R.H.S.}$$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ दिए हुए समीकरण का **हल नहीं है।** **उत्तर**

(ii) दिए हुए समीकरण, $x^2+\sqrt{2}x-4=0$ में $x=\sqrt{2}$ रखने पर,

$\text{L.H.S.}=(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\times(\sqrt{2})-4=2+2-4=4-4=0=\text{R.H.S.}$

इसी प्रकार $x=-2\sqrt{2}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=(-2\sqrt{2})^2+\sqrt{2}(-2\sqrt{2})-4$$
$$=8-4-4=8-8=0=\text{R.H.S.}$$

$\therefore \sqrt{2},-2\sqrt{2}$ दिए हुए समीकरण के **हल हैं।** **उत्तर**

(iii) दिए हुए समीकरण, $x^2+6x+5=0$ में $x=-1$ रखने पर,

L.H.S. $=(-1)^2+6\times(-1)+5=1-6+5=6-6=0=$ R.H.S.

इसी प्रकार, $x=-5$ रखने पर,

L.H.S. $=(-5)^2+6\times(-5)+5=25-30+5=30-30=0=$ R.H.S.

$\therefore x=-1,-5$ दिए हुए समीकरण के **हल हैं।** **उत्तर**

(iv) दिए हुए समीकरण, $a^2x^2-3abx+ab^2=0$ में $x=\frac{a}{b}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=a^2\left(\frac{a}{b}\right)^2-3ab\times\frac{a}{b}+ab^2=a^2\times\frac{a^2}{b^2}-3a^2+ab^2$$

$$=\frac{a^4}{b^2}-3a^2+ab^2\neq\text{R.H.S.}$$

इसी प्रकार, $x=\frac{b}{a}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=a^2\times\left(\frac{b}{a}\right)^2-3ab\times\frac{b}{a}+ab^2=b^2-3b^2+ab^2\neq\text{R.H.S.}$$

$\therefore x=\frac{a}{b},\frac{b}{a}$ दिए हुए समीकरण के **हल नहीं हैं।** **उत्तर**

(v) दिए हुए समीकरण, $9x^2-3x-2=0$ में $x=-\frac{1}{3}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=9\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)-2=9\times\frac{1}{9}+1-2$$

$$=1+1-2=2-2=0=\text{R.H.S.}$$

इसी प्रकार, $x=\frac{2}{3}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\left(\frac{2}{3}\right)-2=9\times\frac{4}{9}-2-2=4-4=0=\text{R.H.S.}$$

$\therefore x=-\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ दिए हुए समीकरण के **हल हैं।** **उत्तर**

(vi) दिए हुए समीकरण, $3x^2-2x-1=0$ में $x=1$ रखने पर,

L.H.S. $=3\times1^2-2\times1-1=3\times1-2-1=3-3=0=$ R.H.S.

$\therefore x=1$ दिए हुए समीकरण के **हल है।** **उत्तर**

(vii) दिए हुए समीकरण, $100x^2-20x+1=0$ में $x=\frac{1}{10}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=100\times\left(\frac{1}{10}\right)^2-20\times\frac{1}{10}+1=100\times\frac{1}{100}-2+1$$

$$=1-2+1=2-2=0=\text{R.H.S.}$$

$\therefore x=\frac{1}{10}$ दिए हुए समीकरण के **हल हैं।** **उत्तर**

3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण एक द्विघात समीकरण है—

$$4x^2+5x+3=3x^2+4x+2$$

हल– $4x^2+5x+3=3x^2+4x+2$

या $4x^2-3x^2+5x-4x+3-2=0$

या $x^2+x+1=0$ जो कि एक द्विघात समीकरण है।

∴ दिया हुआ समीकरण **द्विघात समीकरण** है। **उत्तर**

4. यदि समीकरण $3x^2+2px-3=0$ का एक मूल $x=-\frac{1}{2}$ है, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए समीकरण, $3x^2+2Px-3=0$ का एक मूल $x=-\frac{1}{2}$ है।

अतः यह समीकरण को सन्तुष्ट करेगा।

समीकरण में $x=-\frac{1}{2}$ रखने पर,

$$3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times p\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3=0 \quad \text{या} \quad \frac{3}{4}-p-3=0$$

या $\frac{3}{4}-3=p \Rightarrow p=\frac{3-12}{4}=-\frac{9}{4}$ **उत्तर**

5. यदि समीकरण $3x^2-2lx+2m=0$ के मूल $x=2$ तथा $x=3$ हैं, तो l व m के मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए समीकरण, $3x^2-2lx+2m$ के मूल $x=2$ तथा $x=3$ हैं। अतः ये मूल समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे।

समीकरण $3x^2-2lx+2m=0$ में $x=2$ रखने पर,

$$3\times(2)^2-2l\times2+2m=0 \quad \text{या} \quad 3\times4-4l+2m=0$$

या $12-4l+2m=0$ ...(1)

इसी प्रकार, $x=3$ रखने पर,

$$3\times(3)^2-2l\times3+2m=0$$

या $27-6l+2m=0$ ...(2)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) घटाने पर

$$15-2l=0 \quad \text{या} \quad 15=2l \Rightarrow 2l=15 \Rightarrow l=\frac{15}{2}$$

अब l का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$12-4\times\frac{15}{2}+2m=0 \quad \text{या} \quad 12-30+2m=0$$

या $-18+2m=0$ या $-9+m=0$

या $m=9$ अतः $l=\frac{15}{2}$, $m=9$ **उत्तर**

6. यदि समीकरण $x^2-(a+b)x+k=0$ का एक मूल $x=a$ है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए समीकरण, $x^2-(a+b)x+k=0$ में $x=a$ रखने पर,

$a^2-(a+b)\times a+k=0 \Rightarrow a^2-a^2-ab+k=0$

$\Rightarrow -ab+k=0 \Rightarrow k=ab$ उत्तर

अभ्यास 3.2

1. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को गुणनखण्ड विधि द्वारा हल कीजिए—

(i) $x^2+6x+5=0$ (ii) $5(x-5)(x+5)=55$

(iii) $16x^2=25$ (iv) $x^2+x-12=0$

(v) $3x^2-4x+1=0$ (vi) $3x^2-2x-21=0$

(vii) $(2x+3)(3x-7)=0$ (viii) $5x^2-3x-2=0$

(ix) $2x^2+1=33$ (x) $\frac{x}{4}=\frac{4}{x}$

हल– (i) $x^2+6x+5=0 \Rightarrow x^2+5x+x+5=0$

$\Rightarrow x(x+5)+1(x+5)=0 \Rightarrow (x+5)(x+1)=0$

अब, यदि $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

तथा $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

अत: $x=-5,-1$ उत्तर

(ii) $5(x-5)(x+5)=55 \Rightarrow (x-5)(x+5)=11$

$\Rightarrow x^2-25=11 \Rightarrow x^2-25-11=0$

$\Rightarrow x^2-36=0 \Rightarrow x^2-6^2=0$

$\Rightarrow (x+6)(x-6)=0$

अब, यदि $x+6=0 \Rightarrow x=-6$

तथा $x-6=0 \Rightarrow x=6$

अत: $x=\pm 6$ उत्तर

(iii) $16x^2=25 \Rightarrow 16x^2-25=0$

$\Rightarrow (4x)^2-5^2=0 \Rightarrow (4x+5)(4x-5)=0$

अब, यदि $4x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{4}$

तथा $4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$

अत: $x=\pm\frac{5}{4}$ उत्तर

(iv) $x^2+x-12=0 \Rightarrow x^2+4x-3x-12=0$

$\Rightarrow x(x+4)-3(x+4)=0 \Rightarrow (x+4)(x-3)=0$

अब, यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$ तथा $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

अत: $x=3,-4$ उत्तर

(v) $3x^2-4x+1=0 \Rightarrow 3x^2-3x-x+1=0$

$\Rightarrow 3x(x-1)-1(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(3x-1)=0$

अब, यदि $x-1=0 \Rightarrow x=1$ तथा $3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

अत: $x=1, \frac{1}{3}$ उत्तर

(vi) $3x^2-2x-21=0 \Rightarrow 3x^2-9x+7x-21=0$

$\Rightarrow 3x(x-3)+7(x-3)=0 \Rightarrow (x-3)(3x+7)=0$

अब, यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$ तथा $3x+7=0 \Rightarrow x=-\frac{7}{3}$

अतः $x=3,-\frac{7}{3}$ **उत्तर**

(vii) $(2x+3)(3x-7)=0$

यदि $2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ तथा $3x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$

अतः $x=-\frac{3}{2},\frac{7}{3}$ **उत्तर**

(viii) $5x^2-3x-2=0 \Rightarrow 5x^2-5x+2x-2=0$

$\Rightarrow 5x(x-1)+2(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(5x+2)=0$

अब यदि $x-1=0 \Rightarrow x=1$ तथा $5x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{5}$

अतः $x=1,-\frac{2}{5}$ **उत्तर**

(ix) $2x^2+1=33 \Rightarrow 2x^2+1-33=0$

$\Rightarrow 2x^2-32=0 \Rightarrow x^2-16=0$

$\Rightarrow x^2-4^2=0 \Rightarrow (x+4)(x-4)=0$

अब, यदि $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ तथा $x-4=0 \Rightarrow x=4$

अतः $x=\pm 4$ **उत्तर**

(x) $\frac{x}{4}=\frac{4}{x} \Rightarrow x^2=4^2$

$\Rightarrow x^2-4^2=0 \Rightarrow (x+4)(x-4)=0$

अब, यदि $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ तथा $x-4=0 \Rightarrow x=4$

अतः $x=\pm 4$ **उत्तर**

2. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को गुणनखण्ड विधि द्वारा हल कीजिए—

(i) $(a+1)x^2+2ax+a-1=0$ **(ii)** $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$

(iii) $x^2-\frac{10x}{3}+1=0$ **(iv)** $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=\frac{x}{12}+\frac{12}{x}$

(v) $y^2+2\sqrt{3}y+3=0$ **(vi)** $x^2-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0$

(vii) $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ **(viii)** $4x^2+4bx-(a^2-b^2)=0$

(ix) $x^2-4x-60=0$

(x) $(a+b)^2x^2-(a+b)x-6=0,\ (a+b\neq 0)$

हल– (i) $(a+1)x^2+2ax+a-1=0$

$\Rightarrow (a+1)x^2+(a+1)x+(a-1)x+(a-1)=0$

$\Rightarrow (a+1)x(x+1)+(a-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow (x+1)\{(a+1)x+(a-1)\}=0$

अब, यदि $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ तथा $\{(a+1)x+(a-1)\}=0$

$\Rightarrow \quad x=-\frac{a-1}{a+1} \Rightarrow x=\frac{1-a}{1+a}$ अत: $x=-1, \frac{1-a}{1+a}$ उत्तर

(ii) $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}x^2+5x+2x+5\sqrt{2}=0$

$\Rightarrow \quad x(\sqrt{2}x+5)+\sqrt{2}(\sqrt{2}x+5)=0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2}x+5)(x+\sqrt{2})=0$

अब, यदि $\sqrt{2}x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-5}{\sqrt{2}}$ तथा $x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2}$

अत: $x=\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ उत्तर

(iii) $x^2-\frac{10x}{3}+1=0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-10x+3=0$

$\Rightarrow \quad 3x^2-9x-x+3=0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x-3)-1(x-3)=0$

$\Rightarrow \quad (x-3)(3x-1)=0$

अब, यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$ तथा $3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

अत: $x=3, \frac{1}{3}$ उत्तर

(iv) $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=\frac{x}{12}+\frac{12}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3}-\frac{x}{12}=\frac{12}{x}-\frac{3}{x}$

$\Rightarrow \quad \frac{4x-x}{12}=\frac{12-3}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{12}=\frac{9}{x}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{4}=\frac{9}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2=36$

$\Rightarrow \quad x^2-36=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-6^2=0$

$\Rightarrow \quad (x+6)(x-6)=0$

अब, यदि $x-6=0 \Rightarrow x=6$ तथा $x+6=0 \Rightarrow x=-6$

अत: $x=\pm 6$ उत्तर

(v) $y^2+2\sqrt{3}y+3=0 \quad \Rightarrow \quad y^2+\sqrt{3}y+\sqrt{3}y+3=0$

$\Rightarrow \quad y(y+\sqrt{3})+\sqrt{3}(y+\sqrt{3})=0 \quad \Rightarrow \quad (y+\sqrt{3})(y+\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow \quad (y+\sqrt{3})^2=0 \quad \Rightarrow \quad (y+\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow \quad y=-\sqrt{3}$ उत्तर

(vi) $x^2-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-\sqrt{6}x-\sqrt{2}x+2\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow \quad x(x-\sqrt{6})-\sqrt{2}(x-\sqrt{6})=0 \quad \Rightarrow \quad (x-\sqrt{6})(x-\sqrt{2})=0$

अब, यदि $x-\sqrt{6}=0 \Rightarrow x=\sqrt{6}$ तथा $x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$

अत: $x=\sqrt{6}, \sqrt{2}$ उत्तर

(vii) $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-\sqrt{2}x+\sqrt{2}=0$

$\Rightarrow \quad x(x-1)-\sqrt{2}(x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-\sqrt{2})=0$

अब यदि $x-1=0 \Rightarrow x=1$ तथा $x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$

अत: $x=1, \sqrt{2}$ उत्तर

(viii) $4x^2+4bx-(a^2-b^2)=0$

$\Rightarrow \quad 4x^2+4bx-(a+b)(a-b)=0$

$\Rightarrow \quad 4x^2+2(a+b)x-2(a-b)x-(a+b)(a-b)=0$

$\Rightarrow \quad 2x[(2x+(a+b)]-(a-b)[2x+(a+b)]=0$

$\Rightarrow \quad [2x+(a+b)][2x-(a-b)]=0$

अब, यदि $2x+a+b=0 \Rightarrow x=\frac{(a+b)}{2}$

तथा $2x-(a-b)=0 \Rightarrow x=\frac{(a-b)}{2}$

अतः $x=\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}$ उत्तर

(ix) $x^2-4x-60=0 \Rightarrow x^2-10x+6x-60=0$

$\Rightarrow \quad x(x-10)+6(x-10)=0 \Rightarrow (x-10)(x+6)=0$

अब, यदि $x-10=0 \Rightarrow x=10$ तथा $x+6=0 \Rightarrow x=-6$

अतः $x=\mathbf{10, -6}$ उत्तर

(x) $(a+b)^2x^2-(a+b)x-6=0, \ (a+b\neq 0)$

$\Rightarrow \quad (a+b)^2x^2-3(a+b)x+2(a+b)x-6=0$

$\Rightarrow \quad (a+b)x\{(a+b)x-3\}+2\{(a+b)x-3\}=0$

$\Rightarrow \quad \{(a+b)x-3\}\{(a+b)x+2\}=0$

अब, यदि $(a+b)x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{a+b}$

तथा $(a+b)x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{a+b}$

अतः $x=\frac{3}{a+b}, -\frac{2}{a+b}$ उत्तर

3. द्विघात समीकरण $6+x-2x^2=0$ को हल कीजिए।

हल– $6+x-2x^2=0 \Rightarrow 6+4x-3x-2x^2=0$

$\Rightarrow \quad 2(3+2x)-x(3+2x)=0 \Rightarrow (3+2x)(2-x)=0$

अब यदि $3+2x=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ तथा $2-x=0 \Rightarrow x=2$

अतः $x=-\frac{3}{2}, 2$ उत्तर

4. $\frac{1}{x^2+5}=\frac{1}{9}$ को हल कीजिए।

हल– $\frac{1}{x^2+5}=\frac{1}{9} \Rightarrow x^2+5=9 \Rightarrow x^2+5-9=0$

$\Rightarrow \quad x^2-4=0 \Rightarrow x^2-2^2=0 \Rightarrow (x+2)(x-2)=0$

अब यदि, $x+2=0 \Rightarrow x=2$ तथा $x-2=0 \Rightarrow x=2$

अतः $x=\pm 2$ उत्तर

अभ्यास 3.3

निदेश : प्रत्येक द्विघात समीकरण को श्रीधराचार्य सूत्र द्वारा हल कीजिए—

1. $x^2-4x-2\frac{1}{4}=0$
2. $1+x+x^2=0$
3. $2x^2+p^2=(q-x)^2$
4. $9x^2-10+2=0$
5. $6x^2-7x-5=0$
6. $\sqrt{3}x^2+10x-8\sqrt{3}=0$
7. $3x^2-2x-21=0$
8. $2y^2-5y-24=0$
9. $x^2+6x+7=0$
10. $2x+\frac{7}{x}=9$
11. $\frac{x-1}{2}-\frac{2}{x}=x-\frac{3}{x}$
12. $5x^2-15x+6=0$
13. $x^2-6x-15=0$
14. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}$
15. $x^2+x-(a+2)(a+1)=0$
16. $(x^2+12x)^2+35(x^2+12x)+150=0$
17. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}=3,\ x\neq 0, 2$
18. $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$
19. $x+\frac{1}{x}=3,\ x\neq 0$
20. $x^2+5x+5=0$
21. $5x^2-31x+30=0$
22. $(x+2)(x+3)=5x+7$

हल– 1. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-4x-2\frac{1}{4}=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1,\ b=-4,\ c=-2\frac{1}{4}=-\frac{9}{4}$$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 1\times\left(-\frac{9}{4}\right)}}{2\times 1}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16+9}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{4\pm 5}{2}$$

धनात्मक मान लेने पर, $x=\frac{4+5}{2}=\frac{9}{2}$

ऋणात्मक मान लेने पर, $x=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2}$

अत: $x=\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}$ **उत्तर**

2. दी गई द्विघात समीकरण, $1+x+x^2=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1,\ b=1,\ c=1$$

अत: श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times 1}}{2\times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

अतः $\boldsymbol{x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}}$ **उत्तर**

3. दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 + p^2 = (q - x)^2$

या $2x^2 + p^2 = q^2 + x^2 - 2qx$

या $x^2 + 2qx + p^2 - q^2 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1,\ b = 2q,\ c = p^2 - q^2$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2q \pm \sqrt{(2q)^2 - 4 \times 1(p^2 - q^2)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4p^2 + 4q^2}}{2}$$

$$= \frac{-2q \pm \sqrt{8q^2 - 4p^2}}{2} = \frac{-2q \pm 2\sqrt{2q^2 - p^2}}{2}$$

$$= \frac{2(-q \pm \sqrt{2q^2 - p^2})}{2} = \boldsymbol{-q \pm \sqrt{2q^2 - p^2}}$$ **उत्तर**

4. दी गई द्विघात समीकरण, $9x^2 - 10x + 2 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 9,\ b = -10,\ c = 2$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 9 \times 2}}{2 \times 9}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 72}}{18} = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{18}$$

$$= \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{18} = \boldsymbol{\frac{5 \pm \sqrt{7}}{9}}$$ **उत्तर**

5. दी गई द्विघात समीकरण, $6x^2 - 7x - 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 6,\ b = -7,\ c = -5$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5)}}{2 \times 6}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{7 \pm 13}{12}$$

धनात्मक मान लेने पर, $x = \frac{7 + 13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

ऋणात्मक मान लेने पर, $x = \frac{7 - 13}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

अतः दी गई समीकरण का हल $\boldsymbol{x = \frac{5}{3}, -\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

6. दी गई द्विघात समीकरण, $\sqrt{3}x^2+10x-8\sqrt{3}=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=\sqrt{3},\ b=10,\ c=-8\sqrt{3}$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-10\pm\sqrt{(10)^2-4\times\sqrt{3}(-8\sqrt{3})}}{2\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{-10\pm\sqrt{100-96}}{2\sqrt{3}}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{2\sqrt{3}}=\frac{-10\pm14}{2\sqrt{3}}$$

धनात्मक मान लेने पर, $x=\frac{-10+14}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

ऋणात्मक मान लेने पर, $x=\frac{-10-14}{2\sqrt{3}}=-\frac{24}{2\sqrt{3}}=-4\sqrt{3}$

अतः $x=\frac{2}{\sqrt{3}},-4\sqrt{3}$ **उत्तर**

7. दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2-2x-21=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=3,\ b=-2,\ c=-21$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3(-21)}}{2\times3}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4+252}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{256}}{6}=\frac{2\pm16}{6}=\frac{1\pm8}{3}$$

धनात्मक मान लेने पर, $x=\frac{1+8}{3}=\frac{9}{3}=3$

ऋणात्मक मान लेने पर, $x=\frac{1-8}{3}=-\frac{7}{3}$

अतः $x=3,-\frac{7}{3}$ **उत्तर**

8. दी गई द्विघात समीकरण, $2y^2-5y-24=0$ की तुलना $ay^2+by+c=0$ से करने पर,

$$a=2,\ b=-5,\ c=-24$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times(-24)}}{2\times2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{25+192}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{217}}{4}$$ **उत्तर**

9. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+6x+7=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1,\ b=6,\ c=7$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times7}}{2\times1}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{36-28}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$=\frac{-6\pm2\sqrt{2}}{2}=-3\pm\sqrt{2}$$ **उत्तर**

10. दी गई द्विघात समीकरण, $2x+\frac{7}{x}=9$ या $2x^2+7=9x$

या $2x^2-9x+7=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=2,\ b=-9,\ c=7$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\times2\times7}}{2\times2}$$

$$=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{9\pm5}{4}$$

अतः $$x=\frac{9+5}{4},\frac{9-5}{4}=\frac{14}{4},\frac{4}{4}=\frac{7}{2},1$$ **उत्तर**

11. दी गई द्विघात समीकरण, $\frac{x-1}{2}-\frac{2}{x}=x-\frac{3}{x}$

या $$\frac{x^2-x-4}{2x}=\frac{x^2-3}{x}$$ या $$\frac{x^2-x-4}{2}=x^2-3$$

या $$x^2-x-4=2x^2-6$$ या $$2x^2-x^2+x+4-6=0$$

या $x^2+x-2=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1,\ b=1,\ c=-2$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}$$

अतः $$x=\frac{-1+3}{2},\frac{-1-3}{2}=\frac{2}{2},-\frac{4}{2}=1,-2$$ **उत्तर**

12. दी गई द्विघात समीकरण, $5x^2-15x+6=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=5,\ b=-15,\ c=6$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\times5\times6}}{2\times5}$$

$$=\frac{15\pm\sqrt{225-120}}{10}=\frac{15\pm\sqrt{105}}{10}$$ **उत्तर**

13. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-6x-15=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

$$a=1,\ b=-6,\ c=-15$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times(-15)}}{2\times1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{36+60}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{96}}{2}$$

$$=\frac{6\pm4\sqrt{6}}{2}=3\pm2\sqrt{6}$$ **उत्तर**

14. दी गई द्विघात समीकरण, $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}$

या $$\frac{x+2-x}{x(x+2)}=\frac{(x+4)-(x+1)}{(x+1)(x+4)}$$

या $$\frac{2}{x^2+2x}=\frac{x+4-x-1}{x^2+4x+x+4}$$

या $$\frac{2}{x^2+2x}=\frac{3}{x^2+5x+4}$$

या $$2x^2+10x+8=3x^2+6x$$

या $$3x^2-2x^2+6x-10x-8=0$$

या $$x^2-4x-8=0$$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1,\ b=-4,\ c=-8$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-8)}}{2\times1}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16+32}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{48}}{2}$$

अतः $$=\frac{4\pm4\sqrt{3}}{2}=2\pm2\sqrt{3}$$ **उत्तर**

15. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+x-(a+2)(a+1)=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=1,\ B=1,\ C=-(a+2)(a+1)$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\{-(a+2)(a+1)\}}}{2\times1}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(a+2)(a+1)}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(a^2+2a+a+2)}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^2 + 8a + 4a + 8}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{4a^2 + 12a + 9}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(2a+3)^2}}{2} = \frac{-1 \pm (2a+3)}{2}$$

अतः $$x = \frac{-1 + (2a+3)}{2}, \frac{-1 - (2a+3)}{2}$$

$$= \frac{-1 + 2a + 3}{2}, \frac{-1 - 2a - 3}{2}$$

$$= \frac{2a+2}{2}, \frac{-2a-4}{2}$$

$$= \frac{2(a+1)}{2}, \frac{-2(a+2)}{2}$$

$$= (a+1), -(a+2)$$ **उत्तर**

16. दी गई द्विघात समीकरण, $(x^2 + 12x)^2 + 35(x^2 + 12x) + 150 = 0$ में $x^2 + 12 = X$ रखने पर, $X^2 + 35X + 150 = 0$ की तुलना $AX^2 + BX + C = 0$ से करने पर,

$$A = 1,\ B = 35,\ C = 150$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$= \frac{-35 \pm \sqrt{(35)^2 - 4 \times 1 \times 150}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{2} = \frac{-35 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$= \frac{-35 \pm 25}{2}$$

अतः $$X = \frac{-35 + 25}{2}, \frac{-35 - 25}{2}$$

$$= \frac{-10}{2}, \frac{-60}{2} = -5, -30$$

या $x^2 + 12x = -5$ तथा $x^2 + 12x = -30$

या $x^2 + 12x + 5 = 0$ या $x + 12x + 30 = 0$

पुनः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$ तथा $$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times 30}}{2 \times 1}$$

या $$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 20}}{2}$$ तथा $$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 120}}{2}$$

या $x=\frac{-12\pm\sqrt{124}}{2}$ तथा $x=\frac{-12\pm\sqrt{24}}{2}$

या $x=\frac{-12\pm\sqrt{4\times 31}}{2}$ तथा $x=\frac{-12\pm 2\sqrt{6}}{2}$

या $x=\frac{-12\pm 2\sqrt{31}}{2}$ तथा $x=-6\pm\sqrt{6}$

या $x=-6\pm\sqrt{31}$

अतः दी हुई द्विघात समीकरण के अभीष्ट हल $x=-6\pm\sqrt{31},\ -6\pm\sqrt{6}$ **उत्तर**

17. दी गई द्विघात समीकरण,

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}=3$ या $\frac{x-2-x}{x(x-2)}=3$

या $\frac{-2}{x^2-2x}=3$ या $-2=3x^2-6x$

या $3x^2-6x+2=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=3,\ b=-6,\ c=2$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times 3\times 2}}{2\times 3}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6}$$

अतः $x=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ **उत्तर**

18. दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=2,\ b=-2\sqrt{2},\ c=1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{(-2\sqrt{2})^2-4\times 2\times 1}}{2\times 2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-8}}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\pm 0}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\pm 0$$

अतः $x=\frac{1}{\sqrt{2}}+0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}-0=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}$ **उत्तर**

19. दी गई द्विघात समीकरण, $x+\frac{1}{x}=3$

या $x^2+1=3x$

या $x^2-3x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर, $a=1, b=-3, c=1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$ **उत्तर**

20. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+5x+5=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=1, b=5, c=5$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4\times1\times5}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{25-20}}{2}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$ **उत्तर**

21. दी गई द्विघात समीकरण, $5x^2-31x+30=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=5, b=-31, c=30$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-31)\pm\sqrt{(-31)^2-4\times5\times30}}{2\times5}$$

$$=\frac{31\pm\sqrt{961-600}}{10}=\frac{31\pm\sqrt{361}}{10}=\frac{31\pm19}{10}$$

अतः $x=\frac{31+19}{10}, \frac{31-19}{10}=\frac{50}{10}, \frac{12}{10}=5, \frac{6}{5}$ **उत्तर**

22. दी गई द्विघात समीकरण, $(x+2)(x+3)=5x+7$

या $x^2+3x+2x+6=5x+7$ या $x^2+5x+6=5x+7$

या $x^2+5x-5x+6-7=0$

या $x^2-1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=1, b=0, c=-1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$=\frac{\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{\pm2}{2}=\pm1$$ उत्तर

अभ्यास 3.4

निर्देश : प्रत्येक द्विघात समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाकर हल कीजिए—

1. $2x^2-5x-12=0$
2. $6x^2-13x+5=0$
3. $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2\frac{1}{2}$
4. $4x^2+16x-9=0$
5. $-21-2x+3x^2=0$
6. $4x^2-8x+3=0$
7. $2x+3-x^2=0$
8. $6x^2-7x-3=0$
9. $x^2-4x-60=0$
10. $2x^2-7x+3=0$
11. $4x^2+4\sqrt{3}x+3=0$
12. $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30}, x\neq4, 7$

हल–

1. दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-5x-12=0$

या $2x^2-5x=12$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{5}{2}x=6$ (दोनों पक्षों में 2 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=6+\left(\frac{5}{4}\right)^2$ [दोनों पक्षों में $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ जोड़ने पर]

या $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=6+\frac{25}{16}$ या $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{96+25}{16}$

या $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$ या $\left(x-\frac{5}{4}\right)=\pm\sqrt{\frac{121}{16}}$

या $x-\frac{5}{4}=\pm\frac{11}{4}$

अब, यदि $x-\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$ तो $x=\frac{11}{4}+\frac{5}{4}=\frac{16}{4}=4$

इसी प्रकार, यदि $x-\frac{5}{4}=-\frac{11}{4}$ तो $x=-\frac{11}{4}+\frac{5}{4}=\frac{-11+5}{4}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$

अतः $x=4, -\frac{3}{2}$ उत्तर

2. दी गई द्विघात समीकरण, $6x^2-13x+5=0$

या $6x^2-13x=-5$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{13}{6}x=-\frac{5}{6}$ (दोनों पक्षों में 6 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{13}{6}x+\left(\frac{13}{12}\right)^2=-\frac{5}{6}+\left(\frac{13}{12}\right)^2$ {दोनों पक्षों में $\left(\frac{13}{12}\right)^2$ जोड़ने पर}

या $\left(x-\frac{13}{12}\right)^2=\frac{-5}{6}+\frac{169}{144}$

या $\left(x-\frac{13}{12}\right)^2=\frac{-120+169}{144}$ या $\left(x-\frac{13}{12}\right)^2=\frac{49}{144}$

या $x-\frac{13}{12}=\pm\sqrt{\frac{49}{144}}$ या $x-\frac{13}{12}=\pm\frac{7}{12}$

अब, यदि $x-\frac{13}{12}=\frac{7}{12}$ तो $x=\frac{7}{12}+\frac{13}{12}=\frac{7+13}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

तथा यदि $x-\frac{13}{12}=-\frac{7}{12}$ तो $x=\frac{13}{12}-\frac{7}{12}=\frac{13-7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

अत: $x=\frac{5}{3}, \frac{1}{2}$ **उत्तर**

3. दी गई द्विघात समीकरण, $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2\frac{1}{2}$

या $\frac{x^2+(x-1)^2}{(x-1)(x)}=\frac{5}{2}$ या $\frac{x^2+x^2+1-2x}{x^2-x}=\frac{5}{2}$

या $\frac{2x^2+1-2x}{x^2-x}=\frac{5}{2}$ या $4x^2+2-4x=5x^2-5x$

या $5x^2-5x+4x-4x^2=2$ या $x^2-x=2$

या $x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ {दोनों पक्षों में $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ जोड़ने पर}

या $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=2+\frac{1}{4}$ या $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{8+1}{4}$

या $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ या $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

या $x-\frac{1}{2}=\pm\frac{3}{2}$

अब, यदि $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ तो $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$

तथा यदि $x-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$ तो $x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

अत: $x=2,-1$ **उत्तर**

4. दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2+16x-9=0$

या $4x^2+16x=9$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2+4x=\frac{9}{4}$ (दोनों पक्षों में 4 से भाग करने पर)

या $x^2+4x+2^2=\frac{9}{4}+2^2$ (दोनों पक्षों में 2^2 जोड़ने पर)

या $(x+2)^2=\frac{9}{4}+4$ या $(x+2)^2=\frac{25}{4}$

या $x+2=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}$ या $x+2=\pm\frac{5}{2}$

अब, यदि $x+2=\frac{5}{2}$ तो $x=\frac{5}{2}-2=\frac{5-4}{2}=\frac{1}{2}$

यदि $x+2=-\frac{5}{2}$ तो $x=-\frac{5}{2}-2=\frac{-5-4}{2}=-\frac{9}{2}=-4\frac{1}{2}$

अत: $x=\mathbf{\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

5. दी गई द्विघात समीकरण, $-21-2x+3x^2=0$

या $3x^2-2x=21$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{2}{3}x=7$ (दोनों पक्षों में 3 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=7+\left(\frac{1}{3}\right)^2$ (दोनों पक्षों में $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ जोड़ने पर)

या $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=7+\frac{1}{9}$ या $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{63+1}{9}$

या $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{64}{9}$ या $x-\frac{1}{3}=\pm\sqrt{\frac{64}{9}}$

या $x-\frac{1}{3}=\pm\frac{8}{3}$

अब, यदि $x-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$ तो $x=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8+1}{3}=\frac{9}{3}=3$

यदि $x-\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}$ तो $x=\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=\frac{1-8}{3}=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$

अत: $x=\mathbf{3, -2\frac{1}{3}}$ **उत्तर**

6. दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2-8x+3=0$

या $4x^2-8x=-3$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-2x=-\frac{3}{4}$ (दोनों पक्षों में 4 से भाग करने पर)

या $x^2-2x+1^2=-\frac{3}{4}+1^2$ (दोनों पक्षों में 1^2 जोड़ने पर)

या $(x-1)^2=-\frac{3}{4}+1$ या $(x-1)^2=\frac{-3+4}{4}$

या $(x-1)^2=\frac{1}{4}$ या $x-1=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

या $x-1=\pm\frac{1}{2}$

अब, यदि $x-1=\frac{1}{2}$ तो $x=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

यदि $x-1=-\frac{1}{2}$ तो $x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

अतः $x=\mathbf{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$ **उत्तर**

7. दी गई द्विघात समीकरण, $2x+3-x^2=0$

या $x^2-2x=3$

या $x^2-2x+1^2=3+1^2$ (दोनों पक्षों में 1^2 जोड़ने पर)

या $(x-1)^2=3+1$ या $(x-1)^2=4$

या $x-1=\pm\sqrt{4}$ या $x-1=\pm2$

यदि $x-1=2$ तो $x=2+1=3$

तथा यदि $x-1=-2$ तो $x=-2+1=-1$

अतः $x=\mathbf{3, -1}$ **उत्तर**

8. दी गई द्विघात समीकरण, $6x^2-7x-3=0$

या $6x^2-7x=3$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{7}{6}x=\frac{1}{2}$ (दोनों पक्षों में 6 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{12}\right)^2$ (दोनों पक्षों में $\left(\frac{7}{12}\right)^2$ जोड़ने पर)

या $\left(x-\frac{7}{12}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{49}{144}$ या $\left(x-\frac{7}{12}\right)^2=\frac{72+49}{144}$

या $\left(x-\frac{7}{12}\right)^2=\frac{121}{144}$ या $\left(x-\frac{7}{12}\right)^2=\pm\sqrt{\frac{121}{144}}$

या $x-\frac{7}{12}=\pm\frac{11}{12}$

अब, यदि $x-\frac{7}{12}=\frac{11}{12}$ तो $x=\frac{11}{12}+\frac{7}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$

तथा यदि $x-\frac{7}{12}=-\frac{11}{12}$ तो $x=-\frac{11}{12}+\frac{7}{12}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$

अतः $x=\mathbf{\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}}$ **उत्तर**

9. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-4x-60=0$

या $x^2-4x=60$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-4x+2^2=60+2^2$ (दोनों पक्षों में 2^2 जोड़ने पर)

या $(x-2)^2=60+4$ या $(x-2)^2=64$

या $x-2=\pm\sqrt{64}$ या $x-2=\pm 8$

अब, यदि $x-2=8$ तो $x=8+2=10$

तथा यदि $x-2=-8$ तो $x=2-8=-6$

अत: $x=10,-6$ **उत्तर**

10. दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-7x+3=0$

या $2x^2-7x=-3$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}$ (दोनों पक्षों में 2 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{3}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^2$ (दोनों पक्षों में $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ जोड़ने पर)

या $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{3}{2}+\frac{49}{16}$ या $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{-24+49}{16}$

या $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$ या $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\pm\sqrt{\frac{25}{16}}$

या $x-\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$

अब, यदि $x-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}$ तो $x=\frac{5}{4}+\frac{7}{4}=\frac{5+7}{4}=\frac{12}{4}=3$

तथा यदि $x-\frac{7}{4}=-\frac{5}{4}$ तो $x=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

अत: $x=3,\ \frac{1}{2}$ **उत्तर**

11. दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2+4\sqrt{3}x+3=0$

या $4x^2+4\sqrt{3}x=-3$ या $x^2+\sqrt{3}x=-\frac{3}{4}$

या $x^2+\sqrt{3}x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

या $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}$ या $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$

या $x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm\sqrt{0}$ या $x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm 0$

अब, यदि $x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ तो $x=0-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

तथा यदि $x+\frac{\sqrt{3}}{2}=-0$ तो $x=-0-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

अत: $x=-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **उत्तर**

12. दी गई द्विघात समीकरण,

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30}$$

या $\frac{(x-7)-(x+4)}{(x+4)(x-7)}=\frac{11}{30}$ या $\frac{x-7-x-4}{x^2-7x+4x-28}=\frac{11}{30}$

या $\frac{-11}{x^2-3x-28}=\frac{11}{30}$ या $\frac{-1}{x^2-3x-28}=\frac{1}{30}$

या $x^2-3x-28=-30$ या $x^2-3x=28-30$

या $x^2-3x=-2$ या $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

या $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-2+\frac{9}{4}$ या $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{-8+9}{4}$

या $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ या $\left(x-\frac{3}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

या $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}$

अब, यदि $x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ तो $x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2$

यदि $x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ तो $x=\frac{3}{2}\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$

अतः $x=2,1$ **उत्तर**

अभ्यास 3.5

1. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के विविक्तकर ज्ञात कीजिए–

(i) $2x^2+11x+15=0$ **(ii)** $x^2+x+1=0$

(iii) $3x^2+2x+12=0$ **(iv)** $2x^2-7x+5=0$

(v) $2x^2-9x+10=0$ **(vi)** $3x^2+8x+4=0$

(vii) $2x^2+7x+6=0$ **(viii)** $x^2-4x+1=0$

(ix) $2x^2-5x+8=0$ **(x)** $\sqrt{3}x^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{3}=0$

हल–

(i) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+11x+15=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=2, b=11, c=15$$

अतः विविक्तकर $D=b^2-4ac$

$=11^2-4\times2\times15$

$=121-120=1$ **उत्तर**

(ii) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1, b=1, c=1$$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= 1^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 1 - 4 = -3$ **उत्तर**

(iii) दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 + 2x + 12 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 3, b = 2, c = 12$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 \times 3 \times 12$

$= 4 - 144 = -140$ **उत्तर**

(iv) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 7x + 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 2, b = -7, c = 5$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-7)^2 - 4 \times 2 \times 5$

$= 49 - 40 = 9$ **उत्तर**

(v) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 9x + 10 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 2, b = -9, c = 10$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-9)^2 - 4 \times 2 \times 10$

$= 81 - 80 = 1$ **उत्तर**

(vi) दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 + 8x + 4 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 3, b = 8, c = 4$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= 8^2 - 4 \times 3 \times 4$

$= 64 - 48 = 16$ **उत्तर**

(vii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 + 7x + 6 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 2, b = 7, c = 6$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4 \times 2 \times 6$

$= 49 - 48 = 1$ **उत्तर**

(viii) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2 - 4x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 1, b = -4, c = 1$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 16 - 4 = 12$ **उत्तर**

(ix) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 5x + 8 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = -5, c = 8$$

अत: विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-5)^2 - 4 \times 2 \times 8$

$= 25 - 64 = -39$ **उत्तर**

(x) दी गई द्विघात समीकरण, $\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{3}, b = -2\sqrt{2}, c = -2\sqrt{3}$$

अत: विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times (-2\sqrt{3})$

$= 8 + 24 = 32$ **उत्तर**

2. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए—

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ **(ii)** $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$ **(iv)** $2x^2 + 5x + 4 = 0$

(v) $x^2 + 8x + 7 = 0$ **(vi)** $25x^2 + 10x + 1 = 0$

(vii) $p^2x^2 + px + 1 = 0$ **(viii)** $x^2 + 5x + 5 = 0$

(ix) $3x^2 + 2\sqrt{5}x - 5 = 0$

हल–

(i) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 3x + 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = -3, c = 5$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31$

या $D < 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** है। **उत्तर**

(ii) दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, b = -4\sqrt{3}, c = 4$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 4 = 48 - 48 = 0$

या $D = 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के **मूल वास्तविक, समान** तथा **परिमेय** होंगे। **उत्तर**

(iii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 6x + 3 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = -6, c = 3$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 36 - 24 = 12$

या $D > 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, असमान** तथा **अपरिमेय** होंगे। **उत्तर**

(iv) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 + 5x + 4 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 5, c = 4$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= 5^2 - 4 \times 2 \times 4 = 25 - 32 = -7$

या $D < 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** होंगे। **उत्तर**

(v) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2 + 8x + 7 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 8, c = 7$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= 8^2 - 4 \times 1 \times 7 = 64 - 28 = 36$

या $D > 0$ (धनात्मक तथा पूर्ण वर्ग)

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, असमान तथा परिमेय** होंगे। **उत्तर**

(vi) दी गई द्विघात समीकरण, $25x^2 + 10x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 25, b = 10, c = 1$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= 10^2 - 4 \times 25 \times 1 = 100 - 100 = 0$

या $D = 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, समान तथा परिमेय** होंगे। **उत्तर**

(vii) दी गई द्विघात समीकरण, $p^2x^2 + px + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = p^2, b = p, c = 1$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= p^2 - 4 \times p^2 \times 1 = p^2 - 4p^2 = -3p^2$

या $D < 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** हैं। **उत्तर**

(viii) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2 + 5x + 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 5, c = 5$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= 5^2 - 4 \times 1 \times 5 = 25 - 20 = 5$

या $D > 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, असमान तथा अपरिमेय** होंगे। **उत्तर**

(ix) दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2+2\sqrt{5}x-5=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=3, b=2\sqrt{5}, c=-5$$

अतः $D=b^2-4ac$

या $=(2\sqrt{5})^2-4\times3\times(-5)=20+60=80$

या $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, असमान तथा अपरिमेय** होंगे। **उत्तर**

3. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से किन-किन समीकरणों के मूल वास्तविक होंगे–

(i) $x^2+x+1=0$ **(ii)** $x^2+2x+1=0$

(iii) $2x^2+x-1=0$ **(iv)** $4x^2+6x+2=0$

(v) $4x^2+12x+9=0$ **(vi)** $x^2+2x+4=0$

(vii) $6x^2+x-2=0$ **(viii)** $2x^2+5\sqrt{3}x+6=0$

हल–

(i) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1, b=1, c=1$$

अतः $D=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$

अर्थात् $D<0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** हैं। **उत्तर**

(ii) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+2x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1, b=2, c=1$$

अतः $D=b^2-4ac=2^2-4\times1\times1=4-4=0$

अर्थात् $D=0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** हैं। **उत्तर**

(iii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+x-1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=2, b=1, c=-1$$

अतः $D=b^2-4ac=1^2-4\times2\times(-1)=1+8=9$

अर्थात् $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** हैं। **उत्तर**

(iv) दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2+6x+2=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=4, b=6, c=2$$

अतः $D=b^2-4ac=6^2-4\times4\times2=36-32=4$

अर्थात् $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** हैं। **उत्तर**

(v) दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2+12x+9=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=4, b=12, c=9$$

अतः $D=b^2-4ac=12^2-4\times4\times9=144-144=0$

अर्थात् $D=0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** होंगे। **उत्तर**

(vi) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+2x+4=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1, b=2, c=4$$

अतः $D=b^2-4ac=2^2-4\times1\times4=4-16=-12$

अर्थात् $D<0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** हैं। **उत्तर**

(vii) दी गई द्विघात समीकरण, $6x^2+x-2=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=6, b=1, c=-2$$

अतः $D=b^2-4ac=1^2-4\times6\times(-2)=1+48=49$

अर्थात् $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** होंगे। **उत्तर**

(viii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+5\sqrt{3}x+6=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=2, b=5\sqrt{3}, c=6$$

अतः $D=b^2-4ac=(5\sqrt{3})^2-4\times2\times6=75-48=37$

अर्थात् $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** होंगे। **उत्तर**

4. यदि समीकरण $x^2-2(3+a)x+a^2-3=0$ के मूल बराबर हों तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-2(3+a)x+a^2-3=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=1, B=-2(3+a), C=(a^2-3)$$

ज्ञात है—समीकरण के मूल बराबर हैं।

अतः $B^2-4AC=0$

या $\{-2(3+a)\}^2-4\times1\times(a^2-3)=0$ या $4(3+a)^2-4(a^2-3)=0$

या $(3+a)^2-(a^2-3)=0$ या $9+a^2+6a-a^2+3=0$

या $6a+12=0$ या $6a=-12$

या $a=-2$ **उत्तर**

5. यदि समीकरण $3x^2 - 5x + k = 0$ के मूल समान हैं, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 - 5x + k = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, b = -5, c = k$$

दिया है—समीकरण के मूल समान हैं।

अतः $b^2 - 4ac = 0$

या $(-5)^2 - 4 \times 3k = 0$ या $25 - 12k = 0$

या $25 = 12k \Rightarrow k = \frac{25}{12}$ **उत्तर**

6. यदि समीकरण $\frac{25}{81}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{1}{4} = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $\frac{25}{81}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{1}{4} = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \frac{25}{81}, b = \frac{5}{9}, c = \frac{1}{4}$$

अतः $D = b^2 - 4ac$ या $D = \left(\frac{5}{9}\right)^2 - 4 \times \frac{25}{81} \times \frac{1}{4}$

या $D = \frac{25}{81} - \frac{25}{81}$ या $D = 0$

अतः दी गई समीकरण के मूल **वास्तविक, परिमेय** तथा **समान** होंगे। **उत्तर**

7. p का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए समीकरण $px^2 + 4x + 1 = 0$ के मूल समान तथा वास्तविक हैं।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $px^2 + 4x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = p, b = 4, c = 1$$

चूँकि समीकरण के मूल समान एवं वास्तविक हैं।

अतः $b^2 - 4ac = 0$

या $4^2 - 4 \times p \times 1 = 0$ या $16 - 4p = 0$

या $4 - p = 0$

या $4 = p \Rightarrow p = 4$ **उत्तर**

8. समीकरण $kx^2 + (k-1)x + k - 1 = 0$ के मूल बराबर हैं तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $kx^2 + (k-1)x + k - 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = k, b = (k-1), c = (k-1)$$

चूँकि समीकरण के मूल बराबर हैं।

अतः $b^2 - 4ac = 0$

या $(k-1)^2 - 4 \times k \times (k-1) = 0$ या $(k-1) - 4k = 0$

या $k - 1 - 4k = 0$ या $-1 - 3k = 0$

या $-1 = 3k \Rightarrow 3k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$ **उत्तर**

9. समीकरण $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ के मूल बराबर हैं। सिद्ध कीजिए–

$$2b=a+c$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=(b-c),\ B=(c-a),\ C=(a-b)$$

चूँकि समीकरण के मूल बराबर हैं।

अतः $B^2-4AC=0$

या $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$

या $c^2+a^2-2ca-4(ab-b^2-ca+bc)=0$

या $c^2+a^2-2ca-4ab+4b^2+4ca-4bc=0$

या $a^2+c^2+4ac-2ac+4b^2-4ab-4bc=0$

या $a^2+c^2+2ac+4b^2-4b(a+c)=0$

या $(a+c)^2+(2b)^2-2\times 2b(a+c)=0$

या $\{(a+c)-2b\}^2=0$

दोनों पक्षों का वर्गमूल करने पर,

या $\{(a+c)-2b\}=0$

या $a+c-2b=0$

या $a+c=2b \quad \Rightarrow \quad 2b=a+c$ **इति सिद्धम्**

10. समीकरण $(c^2-ab)x^2-2(a^2-bc)x+(b^2-ac)=0$ के मूल बराबर हैं। सिद्ध कीजिए– $a=0$ या $a^3+b^3+c^3=3abc$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $(c^2-ab)x^2-2(a^2-bc)x+(b^2-ac)=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=c^2-ab,\ B=-2(a^2-bc),\ C=b^2-ac$$

चूँकि समीकरण के मूल बराबर हैं।

अतः $B^2-4AC=0$

या $\{-2(a^2-bc)\}^2-4(c^2-ab)(b^2-ac)=0$

या $4(a^2-bc)^2-4(b^2c^2-ac^3-ab^3+a^2bc)=0$

या $4(a^4+b^2c^2-2a^2bc)-4(b^2c^2-ac^3-ab^3+a^2bc)=0$

या $(a^4+b^2c^2-2a^2bc)-(b^2c^2-ac^3-ab^3+a^2bc)=0$

या $a^4+b^2c^2-2a^2bc-b^2c^2+ac^3+ab^3-a^2bc=0$

या $a^4+ab^3+ac^3-3a^2bc=0$

या $a(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

या $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

या $a^3+b^3+c^3=3abc$

पुनः $a(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

या $a = \dfrac{0}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$

या $a = 0$ इति सिद्धम

11. k के किस मान के लिए $kx^2 + 4x + 1 = 0$ द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक होंगे?

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $kx^2 + 4x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = k, b = 4, c = 1$$

समीकरण के मूल वास्तविक होंगे। यदि $b^2 - 4ac \geq 0$

या $4^2 - 4 \times k \times 1 \geq 0$ या $16 - 4k \geq 0$

या $16 \geq 4k$ या $4 \geq k \Rightarrow k \leq 4$ उत्तर

12. p के वे मान ज्ञात कीजिए, जिनके लिए समीकरण $x^2 + 5px + 16 = 0$ के मूल वास्तविक नहीं हैं।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2 + 5px + 16 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 5p, c = 16$$

समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे, यदि $b^2 - 4ac < 0$

या $(5p)^2 - 4 \times 1 \times 16 < 0$ या $25p^2 - 64 < 0$

या $p^2 - \dfrac{64}{25} < 0$ या $p^2 - \left(\dfrac{8}{5}\right)^2 < 0$

या $\mathbf{-\dfrac{8}{5} < p < \dfrac{8}{5}}$ उत्तर

13. निम्नलिखित समीकरणों में a के वे मान ज्ञात कीजिए, जिन्हें प्रतिस्थापित करने पर द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक होंगे–

(i) $2x^2 + 3x + a = 0$ **(ii)** $ax^2 + 4x + 1 = 0$

(iii) $2x^2 + ax + 3 = 0$ **(iv)** $ax^2 - 6x - 2 = 0$

हल–

(i) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 + 3x + a = 0$ की तुलना $Ax^2 + Bx + C = 0$ से करने पर,

$$A = 2, B = 3, C = a$$

समीकरण के मूल वास्तविक होंगे, यदि $B^2 - 4AC \geq 0$

या $3^2 - 4 \times 2 \times a \geq 0$ या $9 - 8a \geq 0$ या $9 \geq 8a$

या $\dfrac{9}{8} \geq a \Rightarrow \mathbf{a \leq \dfrac{9}{8}}$ उत्तर

(ii) दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2 + 4x + 1 = 0$ की तुलना $Ax^2 + Bx + C = 0$ से करने पर,

$$A = a, B = 4, C = 1$$

समीकरण के मूल वास्तविक होंगे, यदि $B^2 - 4AC \geq 0$

या $4^2 - 4 \times a \times 1 \geq 0$ या $16 - 4a \geq 0$ या $16 \geq 4a$

या $4 \geq a \Rightarrow \mathbf{a \leq 4}$ उत्तर

(iii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+ax+3=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=2, B=a, C=3$$

समीकरण के मूल वास्तविक होंगे, यदि $B^2-4AC\geq 0$

या $a^2-4\times 2\times 3\geq 0$

या $a^2-24\geq 0$

या $a^2-(2\sqrt{6})^2\geq 0$

या $\boldsymbol{a\geq 2\sqrt{6}}$ **उत्तर**

(iv) दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2-6x-2=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=a, B=-6, C=-2$$

समीकरण के वास्तविक मूलों के लिए, $B^2-4AC\geq 0$

या $(-6)^2-4\times a\times(-2)\geq 0$

या $36+8a\geq 0$

या $8a\geq -36$

या $a\geq -\frac{36}{8}\Rightarrow \boldsymbol{a\geq \frac{9}{2}}$ **उत्तर**

14. यदि द्विघात समीकरण $(1+l^2)x^2+2lax+(a^2-b^2)=0$ के मूल बराबर हैं तो सिद्ध कीजिए–

$$\boldsymbol{a^2=b^2(1+l^2)}$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण $(1+l^2)x^2+2lax+(a^2-b^2)=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=1+l^2,\ B=2la,\ C=a^2-b^2$$

चूँकि दी गई समीकरण के मूल बराबर है।

अतः $B^2-4AC=0$

या $(2la)^2-4(1+l^2)(a^2-b^2)=0$

या $4l^2a^2-4(a^2+l^2a^2-l^2b^2-b^2)=0$

या $4l^2a^2-4a^2-4l^2a^2+4l^2b^2+4b^2=0$

या $-4a^2+4l^2b^2+4b^2=0$

या $4a^2=4l^2b^2+4b^2\Rightarrow a^2=l^2b^2+b^2$

$\Rightarrow a^2=b^2(l^2+1)$

$\Rightarrow \boldsymbol{a^2=b^2(1+l^2)}$ **इति सिद्धम्**

अभ्यास 3.6

1. द्विघात समीकरण $3x^2 - 7x - 5 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 - 7x - 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3,\ b = -7,\ c = -5$$

अतः मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} = \frac{-(-7)}{3} = \frac{7}{3}$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \frac{c}{a} = \frac{-5}{3}$ **उत्तर**

2. समीकरण $2x^2 - 3x - 5 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 3x - 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2,\ b = -3,\ c = -5$$

अतः मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$ **उत्तर**

3. बिना हल किए समीकरण $2x^2 - 4x - 3 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 4x - 3 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2,\ b = -4,\ c = -3$$

अतः मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \frac{c}{a} = \frac{-3}{2}$ **उत्तर**

4. समीकरण $2x = x^2 - 5$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x = x^2 - 5$

या $0 = x^2 - 2x - 5 \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 5 = 0$

अतः मूलों का योगफल $= -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-(-2)}{1} = 2$

तथा मूलों का गुणनफल $= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-5}{1} = -5$ **उत्तर**

5. समीकरण $ax^2 - 5x + c = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल प्रत्येक 5 के बराबर है। a तथा c के मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2 - 5x + c = 0$

मूलों का योगफल $= \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $5 = \frac{-(-5)}{a}$

या $5 = \frac{5}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{5} = 1$

तथा मूलों का गुणनफल $=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$$5=\frac{c}{a} \Rightarrow c=5a=5\times 1=5$$ उत्तर

6. द्विघात समीकरण $x^2-3x-4=0$ के मूल α व β हैं, तो समीकरण हल किए बिना $(\alpha+\beta)$ और $(\alpha\cdot\beta)$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-3x-4=0$

अतः मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=-\frac{(-3)}{1}=3$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha\cdot\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=\frac{-4}{1}=-4$ उत्तर

7. यदि द्विघात समीकरण $2x^2+px+4=0$ का एक मूल 2 हो, तो दूसरा मूल और p का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+px+4=0$ तथा इसका एक मूल $(\alpha)=2$, दूसरा मूल $(\beta)=?$

मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $$\alpha+\beta=\frac{p}{2} \Rightarrow 2+\beta=\frac{p}{2}$$

या $$4+2\beta=-p \quad \ldots(1)$$

मूलों का गुणनफल $(\alpha\cdot\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$$2\times\beta=\frac{4}{2} \Rightarrow \beta=\frac{4}{4}=1$$

β का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$4+2\times 1=-p \Rightarrow -p=4+2=6$$

$$\Rightarrow p=-6$$ उत्तर

8. यदि समीकरण $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0$ के मूल बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि : $c^2=a^2(1+m^2)$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0$ तथा मूल $\alpha=\beta$

मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha+\beta=\frac{2mc}{1+m^2}$

या $$\alpha+\alpha=\frac{2mc}{1+m^2} \Rightarrow 2\alpha=\frac{2mc}{1+m^2}$$

या $$\alpha=\frac{mc}{1+m^2} \quad \ldots(1)$$

मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\alpha \times \alpha = \dfrac{c^2 - a^2}{1+m^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \dfrac{c^2 - a^2}{1+m^2}$

या $\alpha = \sqrt{\dfrac{c^2 - a^2}{1+m^2}}$ ... (2)

समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{mc}{1+m^2} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{1+m^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(\frac{mc}{1+m^2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{c^2 - a^2}{1+m^2}}\right)^2 \quad \text{या} \quad \frac{m^2c^2}{(1+m^2)^2} = \frac{c^2 - a^2}{(1+m^2)}$$

या $\dfrac{m^2c^2}{1+m^2} = c^2 - a^2$

या $m^2c^2 = c^2 - a^2 + m^2c^2 - m^2a^2$

या $c^2 - a^2 = m^2a^2$ या $c^2 = a^2 + m^2a^2$

या $\mathbf{c^2 = a^2(1+m^2)}$ **इति सिद्धम्**

9. यदि समीकरण $3x^2 + px - 6 = 0$ का एक मूल -3 है, तो p का मान तथा समीकरण का दूसरा मूल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 + px - 6 = 0$ तथा इसका एक मूल $(\alpha) = -3$, दूसरा मूल $(\beta) = ?$, $p = ?$

मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $-3 \times \beta = \dfrac{-6}{3} = -2$

या $\beta = \dfrac{-2}{-3} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

तथा मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $-3 + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{p}{3}$

या $\dfrac{-9+2}{3} = -\dfrac{p}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-7}{3} = -\dfrac{p}{3}$

या $7 = p \quad \Rightarrow \quad p = 7$ **उत्तर**

10. द्विघात समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्नलिखित हैं–

(i) 3 तथा –4 **(ii) $3+\sqrt{7}$ तथा $3-\sqrt{7}$**

(iii) $\sqrt{3}+1$ तथा $\sqrt{3}-1$ **(iv) $2+\sqrt{3}$ तथा $2-\sqrt{3}$**

(v) $b-2a$ तथा $b+2a$ **(vi) 3 तथा –3**

(vii) -3 तथा $\frac{1}{3}$ (viii) -5 तथा $-\frac{1}{5}$

(ix) $-\frac{3}{2}$ तथा $-\frac{1}{2}$ (x) $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ तथा $1-\frac{\sqrt{5}}{2}$

हल–

(i) दिए गए मूल $=3$ तथा -4

मूलों का योगफल $=3+(-4)=3-4=-1$

तथा मूलों का गुणनफल $=3\times(-4)=-12$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-(-1)x+(-12)=0$

या $\mathbf{x^2+x-12=0}$ उत्तर

(ii) दिए गए मूल $=3+\sqrt{7}$ तथा $3-\sqrt{7}$

मूलों का योगफल $=(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}=6$

तथा मूलों का गुणनफल $=(3+\sqrt{7})\times(3-\sqrt{7})=9-7=2$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

$\mathbf{x^2-6x+2=0}$ उत्तर

(iii) दिए गए मूल $=\sqrt{3}+1$ तथा $\sqrt{3}-1$

मूलों का योगफल $=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}$

तथा मूलों का गुणनफल $=(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{3}-1)=3-1=2$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $\mathbf{x^2-2\sqrt{3}x+2=0}$ उत्तर

(iv) दिए गए मूल $=2+\sqrt{3}$ तथा $2-\sqrt{3}$

मूलों का योगफल $=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$

तथा मूलों का गुणनफल $=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $\mathbf{x^2-4x+1=0}$ उत्तर

(v) दिए गए मूल $=b-2a$ तथा $b+2a$

मूलों का योगफल $=b-2a+b+2a=2b$

तथा मूलों का गुणनफल $=(b-2a)\times(b+2a)=(b^2-4a^2)$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $\mathbf{x^2-2bx+(b^2-4a^2)=0}$ उत्तर

(vi) दिए गए मूल $=3$ तथा -3

मूलों का योगफल $=3+(-3)=3-3=0$

तथा मूलों का गुणनफल $=3\times(-3)=-9$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-0\times x+(-9)=0$

या $\mathbf{x^2-9=0}$ उत्तर

(vii) दिए गए मूल $=-3$ तथा $\frac{1}{3}$

मूलों का योगफल $=-3+\frac{1}{3}=\frac{-9+1}{3}=\frac{-8}{3}$

तथा मूलों का गुणनफल $=-3\times\frac{1}{3}=-1$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-\left(\frac{-8}{3}\right)x+(-1)=0$ या $x^2+\frac{8}{3}x-1=0$

या $\mathbf{3x^2+8x-3=0}$ **उत्तर**

(viii) दिए गए मूल $=-5$ तथा $-\frac{1}{5}$

मूलों का योगफल $=-5+\left(-\frac{1}{5}\right)=-5-\frac{1}{5}=\frac{-25-1}{5}=\frac{-26}{5}$

तथा मूलों का गुणनफल $=-5\times\left(-\frac{1}{5}\right)=1$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-\left(\frac{-26}{5}\right)x+1=0$ या $\mathbf{5x^2+26x+5=0}$ **उत्तर**

(ix) दिए गए मूल $=-\frac{3}{2}$ तथा $-\frac{1}{2}$

मूलों का योगफल $=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

तथा मूलों का गुणनफल $=-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-(-2)x+\frac{3}{4}=0$ या $x^2+2x+\frac{3}{4}=0$

या $\mathbf{4x^2+8x+3=0}$ **उत्तर**

(x) दिए गए मूल $=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ तथा $1-\frac{\sqrt{5}}{2}$

मूलों का योगफल $=\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1+\frac{\sqrt{5}}{2}+1-\frac{\sqrt{5}}{2}=2$

तथा मूलों का गुणनफल $=\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\times\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-2x+\left(-\frac{1}{4}\right)=0$ या $x^2-2x-\frac{1}{4}=0$

या $\mathbf{4x^2-8x-1=0}$ **उत्तर**

11. यदि समीकरण $x^2-3x+k=0$ का एक मूल दूसरे मूल का दो गुना है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-3x+k=0$

प्रश्नानुसार, समीकरण एक मूल 2α हो, तो दूसरा α मूल होगा।

अतः मूलों का योगफल $(2\alpha+\alpha)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $2\alpha+\alpha=-\frac{-3}{1}$

या $3\alpha=3$ या $\alpha=1$

तथा मूलों का गुणनफल $(2\alpha+\alpha)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $2\alpha\times\alpha=\frac{k}{1}$

या $2\alpha^2=k$ या $k=2\alpha^2$

या $k=2\times1^2=2\times1=2$ **उत्तर**

12. यदि समीकरण $2x^2-8x-m=0$ का एक मूल $\frac{5}{2}$ है, तो दूसरा मूल तथा m का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-8x-m=0$, तथा समीकरण का एक मूल $(\alpha)=\frac{5}{2}$

माना समीकरण का दूसरा मूल $=\beta$

मूलों का योगफल $=(\alpha+\beta)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\frac{5}{2}+\beta=\frac{-8}{2}$

या $\frac{5}{2}+\beta=4$ या $\beta=4-\frac{5}{2}$ या $\beta=\frac{3}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $=(\alpha\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{-m}{2}$

या $\frac{15}{2}=-m$ या $m=-\frac{15}{2}$ **उत्तर**

13. समीकरण $x^2-7x+12=0$ के मूलों के व्युत्क्रमों का योग ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-7x+12=0$

माना समीकरण के मूल α व β हैं। तब

मूलों का योगफल $=(\alpha+\beta)=\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\alpha+\beta=\frac{-7}{1}=7$ ...(1)

तथा मूलों का गुणनफल $=(\alpha\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\alpha\beta=\frac{12}{1}=12$ ...(2)

अब मूलों के व्युत्क्रमों का योग $= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{12}$ (समी० (1) व (2) से)

उत्तर

14. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α और β हों, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके मूल $\alpha+h$ और $\beta+h$ हैं।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2+bx+c=0$ तथा मूल α व β हैं। तब

मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad \ldots(1)$$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $$\alpha\beta=\frac{c}{a} \quad \ldots(2)$$

दिए गए मूल $\alpha+h$ तथ $\beta+h$

मूलों का योगफल $=\alpha+h+\beta+h=\alpha+\beta+2h=-\frac{b}{a}+2h=\left(2h-\frac{b}{a}\right)$

मूलों का गुणनफल $=(\alpha+h)(\beta+h)=\alpha\beta+\alpha h+\beta h+h^2$

$$=\alpha\beta+(\alpha+\beta)h+h^2$$

$$=\frac{c}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)h+h^2=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}h+h^2$$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2-(मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $$x^2-\left(2h-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}h+h^2=0$$

या $$x^2-\left(-\frac{b}{a}+2h\right)x+h^2-\frac{b}{a}h+\frac{c}{a}=0$$

या $$x^2+\left(\frac{b}{a}-2h\right)x+h^2-\frac{b}{a}h+\frac{c}{a}=0$$

दोनों पक्षों में a से गुणा करने पर,

$$ax^2+(b-2ah)x+(ah^2-bh+c)=0$$

उत्तर

15. यदि समीकरण $px^2+qx+r=0$ का एक मूल दूसरे मूल का दो गुना हो, तो सिद्ध कीजिए कि– $2q^2=9pr$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $px^2+qx+r=0$

माना समीकरण का दूसरा मूल α है, तो पहला मूल $=$ दूसरा मूल $\times 2=2\alpha$ होगा।

अतः मूलों का योगफल $=2\alpha+\alpha=\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $3\alpha = -\frac{q}{p}$ या $\alpha = -\frac{q}{3p}$ ...(1)

तथा मूलों का गुणनफल $= 2\alpha \times \alpha = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $2\alpha^2 = \frac{r}{p}$ या $2\left(-\frac{q}{3p}\right)^2 = \frac{r}{p}$ [समी० (1) से]

या $2 \times \frac{q^2}{9p^2} = \frac{r}{p}$ या $2q^2 = \frac{9p^2 r}{p}$

या $2q^2 = 9pr$ इति सिद्धम्

16. यदि α और β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हों, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ **(ii)** $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ (iii) $\alpha^3 + \beta^3$

(iv) $\alpha^2 + \beta^2$ **(v)** $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β हैं।

अतः मूलों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ...(1)

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$ ...(2)

(i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$

या $= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$ या $= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

या $= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}}$ या $= \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}}$

$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a}{c} = \frac{b^2 - 2ac}{ac}$ उत्तर

(ii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta}$

या $= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)}{\alpha\beta}$

या $= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 3\alpha\beta)}{\alpha\beta}$

या $= \dfrac{(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta\}}{\alpha\beta} = \dfrac{-\dfrac{b}{a}\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 3\dfrac{c}{a}\right\}}{\dfrac{c}{a}}$

या $= \dfrac{-\dfrac{b}{a}\left\{\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{3c}{a}\right\}}{\dfrac{c}{a}}$ या $= \dfrac{-\dfrac{b}{a}\left\{\dfrac{b^2-3ac}{a^2}\right\}}{\dfrac{c}{a}}$

या $= \dfrac{-\dfrac{b}{a^3}(b^2-3ac)}{\dfrac{c}{a}}$ या $= -\dfrac{ab}{a^3c}(b^2-3ac)$

$= \dfrac{-b^3+3abc}{a^2c}$ **उत्तर**

(iii) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$

या $= (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-3\alpha\beta)$

या $= (\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$

$= -\dfrac{b}{a}\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 3\dfrac{c}{a}\right\}$ या $= -\dfrac{b}{a}\left\{\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{3c}{a}\right\}$

$= -\dfrac{b}{a}\left\{\dfrac{b^2-3ac}{a^2}\right\}$ या $= \dfrac{-b^3+3abc}{a^3}$ **उत्तर**

(iv) $\alpha^2+\beta^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$= \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2\times\dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a} = \dfrac{b^2-2ac}{a^2}$ **उत्तर**

(v) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$= \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2-ac}{a^2}$ **उत्तर**

17. यदि α और β द्विघात समीकरण $2x^2-3x+5=0$ के मूल हों, तो $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-3x+5=0$

मूलों का योगफल $= \alpha+\beta = \dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{-3}{2} = \dfrac{3}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{5}{2}$

अतः $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{5}{2}\times\dfrac{3}{2} = \dfrac{15}{4}$ **उत्तर**

18. वह द्विघात समीकरण बनाइए, जिसके मूल $p-2q$ व $p+2q$ हैं।

हल– दिए गए मूल $= p-2q$ तथा $p+2q$

मूलों का योगफल $= p-2q+p+2q = 2p$

तथा मूलों का गुणनफल $= (p-2q)(p+2q) = p^2-4q^2$

अतः द्विघात समीकरण; $x^2 -$ (मूलों का योगफल)$x +$ मूलों का गुणनफल $= 0$

या $x^2 - 2px + (p^2 - 4q^2) = 0$ **उत्तर**

19. यदि समीकरण $3kx^2 - 25kx + k + 8 = 0$ के मूलों का गुणनफल 1 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $3kx^2 - 25kx + k + 8 = 0$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

या $1 = \dfrac{k+8}{3k}$ या $3k = k+8$ या $3k - k = 8$

या $k = 4$ **उत्तर**

20. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β हैं, तो $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β हैं।

$$\text{मूलों का योगफल} = \alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \quad \text{या} \quad (\alpha+\beta) = -\frac{b}{a}$$

$$\text{तथा मूलों का गुणनफल} = \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \quad \text{या} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

अतः
$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$ **उत्तर**

21. यदि समीकरण $lx^2 + nx + n = 0$ के मूल $p : q$ के अनुपात में हैं, तो सिद्ध कीजिए–

$$\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = 0$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $lx^2+nx+n=0$ तथा मूल $p:q$ के अनुपात में है।

अतः मूलों का योगफल $=p+q=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{n}{l}$

तथा मूलों का गुणनफल $=pq=\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=\dfrac{n}{l}$

$$\text{L.H.S.} \quad =\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=\frac{p+q}{\sqrt{pq}}+\sqrt{\frac{n}{l}}$$

$$=-\frac{n/l}{\sqrt{n/l}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=-\sqrt{\frac{n}{l}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0=\text{R.H.S.}$$

22. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे मूल का दो गुना हो तो सिद्ध कीजिए—

$$2b^2=9ac$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2+bx+c=0$

माना समीकरण का एक मूल 2α तब दूसरा मूल α होगा।

अतः मूलों का योगफल $=2\alpha+\alpha=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $3\alpha=-\dfrac{b}{a}$

या $$\alpha=-\frac{b}{3a} \qquad \ldots(1)$$

तथा मूलों का गुणनफल $=2\alpha\times\alpha=\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $2\alpha^2=\dfrac{c}{a}$

या $$2\left(-\frac{b}{3a}\right)^2=\frac{c}{a} \qquad \text{(समी० (1) से)}$$

या $$2\times\frac{b^2}{9a^2}=\frac{c}{a} \qquad \text{या} \qquad 2b^2=\frac{9a^2c}{a}$$

या $$2b^2=9ac \qquad \textbf{इति सिद्धम्}$$

23. यदि समीकरण $ax^2-bx+b=0$ के मूल α व β हैं, तो सिद्ध कीजिए–

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{b}{a}}=0$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2-bx+b=0$ तथा इसके मूल α व β हैं।

मूलों का योगफल $=\alpha+\beta=\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $$(\alpha+\beta)=\frac{-b}{a} \qquad \text{या} \qquad (\alpha+\beta)=\frac{b}{a}$$

तथा मूलों का गुणनफल $=\alpha\beta=\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha\beta=\dfrac{b}{a}$

$$\text{L.H.S} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{b/a}{\sqrt{b/a}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$= \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = 0 = \text{R.H.S}$$

24. यदि समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूल α व β हैं, तो व्यंजक $(\alpha^2\beta + \beta^2\alpha)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 3x + 1 = 0$ तथा मूल α व β हैं।

अत: मूलों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\alpha + \beta = \frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

अब, $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ **उत्तर**

25. यदि समीकरण $cx^2 + ax + b = 0$ के मूल α व β हैं, तो व्यंजक $(\alpha^3 + \beta^3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $cx^2 + ax + b = 0$ तथा मूल α व β हैं।

अत: मूलों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha + \beta = -\frac{a}{c}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha\beta = \frac{b}{c}$

अब, $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 3\alpha\beta)$
$= (\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta\} = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$= \left(-\frac{a}{c}\right)^3 - 3\frac{b}{c} \times \left(-\frac{a}{c}\right) = -\frac{a^3}{c^3} + 3\frac{ab}{c^2}$
$= \frac{-a^3 + 3abc}{c^3} = \frac{3abc - a^3}{c^3} = \frac{a(3bc - a^2)}{c^3}$ **उत्तर**

26. यदि समीकरण $cx^2 + bx + a = 0$ के मूल α व β हैं, तो व्यंजक $(\alpha^3 - \beta^3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $cx^2 + bx + a = 0$ तथा मूल α व β हैं।

अत: मूलों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha + \beta = -\frac{b}{c}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha\beta = \frac{a}{c}$

अब, $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}\times(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\alpha\beta)$

$=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)}\times\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$

$=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta)}\times\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$

$=\sqrt{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}\times\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$

$=\sqrt{\left\{\left(-\frac{b}{c}\right)^2-4\frac{a}{c}\right\}}\times\left\{\left(-\frac{b}{c}\right)^2-\frac{a}{c}\right\}$

$=\sqrt{\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{4a}{c}\right)}\times\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{a}{c}\right)=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{c^2}}\times\left(\frac{b^2-ac}{c^2}\right)$

$=\frac{1}{c^3}(b^2-ac)\sqrt{(b^2-4ac)}$ **उत्तर**

27. यदि समीकरण $(l^2-3)x^2+3lx+3l+1=0$ के मूल आपस में व्युत्क्रम हों, तो l का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $(l^2-3)x^2+3lx+3l+1=0$

माना इस समीकरण का एक मूल α है, तो दूसरा मूल $\frac{1}{\alpha}$ होगा।

मूलों का गुणनफल $=\alpha\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\text{अचर पद}}{x^2\text{ का गुणांक}}$

या $1=\frac{3l+1}{l^2-3}$ या $l^2-3=3l+1$

या $l^2-3l-3-1=0$ या $l^2-3l-4=0$

या $l^2-4l+l-4=0$ या $l(l-4)+1(l-4)=0$

या $(l-4)(l+1)=0$

यदि $l-4=0$ तो $l=4$ तथा यदि $l+1=0$ तो $l=-1$ अतः $l=-1$ या 4 **उत्तर**

अभ्यास 3.7

निम्नलिखित समीकरणों को द्विघात समीकरण में परिवर्तित करके हल कीजिए–

1. $z^4-10z^2+9=0$

हल– दी गई समीकरण $z^4-10z^2+9=0$

या $(z^2)^2-10z^2+9=0$ [$z^2=x$ रखने पर]

या $x^2-10x+9=0$

या $x^2-9x-x+9=0$ या $x(x-9)-1(x-9)=0$

या $(x-9)(x-1)=0$ [$x=z^2$ रखने पर]

या $(z^2-9)(z^2-1)=0$

अब, यदि $z^2-9=0\Rightarrow z^2=9\Rightarrow z=\pm\sqrt{9}\Rightarrow\pm3$

तथा यदि $z^2-1=0 \Rightarrow z^2=1 \Rightarrow z=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \pm 1$

अतः $z=\pm 3, \pm 1$ **उत्तर**

2. $x^4-26x^2+25=0$

हल– दी गई समीकरण, $x^4-26x^2+25=0$

या $(x^2)^2-26x^2+25=0$

या $y^2-26y+25=0$ [$x^2=y$ रखने पर]

या $y^2-25y-y+25=0$ या $y(y-25)-1(y-25)=0$

या $(y-25)(y-1)=0$

या $(x^2-25)(x^2-1)=0$ [$y=x^2$ रखने पर]

अब, यदि $x^2-25=0$ तो $x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$ तथा यदि $x^2-1=0$ तो $x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

अतः $x=\pm 1, \pm 5$ **उत्तर**

3. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8=0$

हल– दी गई समीकरण, $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8=0$

या $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-8=0$

या $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8=0$

या $(y+4)(y+6)-8=0$ ($x^2+5x=y$ रखने पर)

या $y^2+10y+24-8=0$ या $y^2+10y+16=0$

या $(y+8)(y+2)=0$

यदि $y+8=0$ तो $x^2+5x+8=0$ यहाँ $a=1, b=5, c=8$

$D=b^2-4ac=5^2-4\times 1\times 8=25-32=-7$

या $D<0$ अतः समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** हैं।

यदि $y+2=0$ तो $x^2+5x+2=0$ ($y=x^2+5x$ रखने पर)

यहाँ $a=1, b=5, c=2$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 1\times 2}}{2\times 1}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{25-8}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$ **उत्तर**

4. $2x+\frac{4}{x}=9$

हल– दी गई समीकरण, $2x+\frac{4}{x}=9$

या $2x^2+4=9x$ या $2x^2-9x+4=0$

या $2x^2-x-8x+4=0$ या $x(2x-1)-4(2x-1)=0$

या $(2x-1)(x-4)=0$

अब, यदि $2x-1=0$ तो $x=1/2$

तथा यदि $x-4=0$ तो $x=4$ **उत्तर**

5. $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3x}=0$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3x}=0$

या $\sqrt{x^2+2}=-\sqrt{3x}$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$x^2+2=3x$

या $x^2-3x+2=0$ या $(x-1)(x-2)=0$

अब, यदि $x-1=0$ तो $x=1$

तथा यदि $x-2=0$ तो $x=2$

अतः $x=1, 2$ **उत्तर**

6. $(x^2+3x+2)^2-8(x^2+3x)-4=0$

हल– दी गई समीकरण, $(x^2+3x+2)^2-8(x^2+3x)-4=0$

या $(y+2)^2-8y-4=0$ ($x^2+3x=y$ रखने पर)

या $y^2+4y+4-8y-4=0$ या $y^2-4y=0$ या $y(y-4)=0$

अतः $y=0$ तथा $y-4=0$ या $y=4$

या $x^2+3x=0$ तथा $x^2+3x-4=0$ ($y=x^2+3x$ रखने पर)

या $x(x+3)=0$ तथा $x^2+4x-x-4=0$

अब $x=0$ या $x+3=0$ तथा $x(x+4)-1(x+4)=0$

या $x=-3$ तथा $(x+4)(x-1)=0$

यदि $x+4=0$ तो $x=-4$

यदि $x-1=0$ तो $x=1$

अतः $x=(0,-3,1,-4)$ **उत्तर**

7. $x-2-\sqrt{2x-5}=0$

हल– दी गई समीकरण, $x-2-\sqrt{2x-5}=0$

या $(x-2)=\sqrt{2x-5}$

या $(x-2)^2=(2x-5)$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x^2-4x+4=2x-5$ या $x^2-4x-2x+4+5=0$

या $x^2-6x+9=0$

या $(x-3)^2=0$ या $(x-3)=0$ या $x=3$ **उत्तर**

8. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=2\dfrac{1}{2}$

हल– दी गई समीकरण, $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=2\dfrac{1}{2}$

या $\dfrac{(x-2)^2+(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{5}{2}$ या $\dfrac{x^2+4-4x+x^2+4+4x}{x^2-4}=\dfrac{5}{2}$

या $\dfrac{2x^2+8}{x^2-4}=\dfrac{5}{2}$ या $4x^2+16=5x^2-20$

या $5x^2-4x^2-20-16=0$ या $x^2-36=0$

या $x^2=36 \Rightarrow x=\pm\sqrt{36} \Rightarrow x=\pm 6$ **उत्तर**

9. $6\left(\frac{2x+5}{x+1}\right)-4\left(\frac{x+1}{2x+5}\right)=5$

हल– दी गई समीकरण, $6\left(\frac{2x+5}{x+1}\right)-4\left(\frac{x+1}{2x+5}\right)=5$

या $6y-4\frac{1}{y}=5$ $\left(\frac{2x+5}{x+1}=y \text{ रखने पर}\right)$

या $6y^2-4=5y$ या $6y^2-5y-4=0$

या $6y^2-8y+3y-4=0$ या $2y(3y-4)+1(3y-4)=0$

या $(3y-4)(2y+1)=0$

अब, यदि $3y-4=0$ तो $3\times\frac{2x+5}{x+1}-4=0$ $\left(y=\frac{2x+5}{x+1} \text{ रखने पर}\right)$

या $6x+15-4x-4=0$ या $2x+11=0$ या $x=\frac{11}{2}$

तथा यदि $2y+1=0$ तो $2\times\frac{2x+5}{x+1}+1=0$ $\left(y=\frac{2x+5}{x+1} \text{ रखने पर}\right)$

या $4x+10+x+1=0$ या $5x+11=0$ या $x=-\frac{11}{5}$

अत: $x=-\frac{11}{2},-\frac{11}{5}$ **उत्तर**

10. $\sqrt{2x^2-2x+21}=2x-3$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{2x^2-2x+21}=2x-3$

या $2x^2-2x+21=(2x-3)^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $2x^2-2x+21=4x^2-12x+9$ या $4x^2-2x^2-12x+2x+9-21=0$

या $2x^2-10x-12=0$ या $x^2-5x-6=0$

या $x^2-6x+x-6=0$ या $x(x-6)+1(x-6)=0$

या $(x-6)(x+1)=0$

अब, यदि $x-6=0$ तो $x=6$ या $x+1=0$ तो $x=-1$ **उत्तर**

11. $\sqrt{2x+9}=13-x$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{2x+9}=13-x$

या $2x+9=(13-x)^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $2x+9=169+x^2-26x$ या $x^2-26x-2x+169-9=0$

या $x^2-28x+160=0$ या $x^2-20x-8x+160=0$

या $x(x-20)-8(x-20)=0$ या $(x-20)(x-8)=0$

यदि $x-20=0$ तो $x=20$ तथा यदि $x-8=0$ तो $x=8$ **उत्तर**

12. $\sqrt{217-x}=x-7$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{217-x}=x-7$

या $217-x=(x-7)^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $217-x=x^2-14x+49$ या $x^2-14x+x+49-217=0$

या $x^2-13x-168=0$ या $x^2-(21-8)x-168=0$

या $x^2-21x+8x-168=0$ या $x(x-21)+8(x-21)=0$

या $(x-21)(x+8)=0$

यदि $x-21=0$ तो $x=\mathbf{21}$ तथा यदि $x+8=0$ तो $x=\mathbf{-8}$ **उत्तर**

13. $\sqrt{3x^2+x+5}=x-3$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{3x^2+x+5}=x-3$

या $3x^2+x+5=(x-3)^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $3x^2+x+5=x^2+9-6x$ या $3x^2-x^2+x+6x+5-9=0$

या $2x^2+7x-4=0$ या $2x^2+8x-x-4=0$

या $2x(x+4)-1(x+4)=0$ या $(x+4)(2x-1)=0$

यदि $x+4=0$ तो $x=\mathbf{-4}$ तथा $2x-1=0$ तो $x=\mathbf{\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

14. $\sqrt{3x+10}+\sqrt{6-x}=6$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{3x+10}+\sqrt{6-x}=6$

या $\sqrt{3x+10}=6-\sqrt{6-x}$

या $(\sqrt{3x+10})^2=(6-\sqrt{6-x})^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $3x+10=36+(6-x)-12\sqrt{6-x}$

या $3x+10=36+6-x-12\sqrt{6-x}$

या $3x+x+10-36-6=-12\sqrt{6-x}$ या $4x-32=-12\sqrt{6-x}$

या $x-8=-3\sqrt{6-x}$

$(x-8)^2=(-3\sqrt{6-x})^2$ (पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x^2+64-16x=9(6-x)$ या $x^2-16x+64=54-9x$

या $x^2-16x+9x+64-54=0$ या $x^2-7x+10=0$

या $x^2-2x-5x+10=0$ या $x(x-2)-5(x-2)=0$

या $(x-2)(x-5)=0$

अब, यदि $x-2=0$ तो $x=\mathbf{2}$ तथा यदि $x-5=0$ तो $x=\mathbf{5}$ **उत्तर**

15. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+9}=5$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+9}=5$

या $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{4-x}$

या $(\sqrt{x+9})^2=(5-\sqrt{4-x})^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x+9=25+(4-x)-10\sqrt{4-x}$ या $x+9=25+4-x-10\sqrt{4-x}$

या $x+x+9-25-4=-10\sqrt{4-x}$ या $2x-20=-10\sqrt{4-x}$

या $x-10=-5\sqrt{4-x}$ (दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर)

या $(x-10)^2=[-5\sqrt{4-x}]^2$ (पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x^2+100-20x=25(4-x)$ या $x^2+100-20x=100-25x$

या $x^2+100-100-20x+25x=0$ या $x^2+5x=0$ या $x(x+5)=0$

अतः $x=0$ या $x+5=0$ तो $x=-5$

अतः $x=\mathbf{0,-5}$ **उत्तर**

16. $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=3$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=3$

या $\sqrt{2x+9}=3+\sqrt{x-4}$

$(\sqrt{2x+9})^2=(3+\sqrt{x-4})^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $(2x+9)=9+(x-4)+6\sqrt{x-4}$

या $2x+9=9+x-4+6\sqrt{x-4}$

या $2x-x+9-9+4=6\sqrt{x-4}$

या $x+4=6\sqrt{x-4}$ पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$(x+4)^2=(6\sqrt{x-4})^2$

या $x^2+16+8x=36(x-4)$ या $x^2+16+8x-36(x-4)=0$

या $x^2+16+8x-36x+144=0$ या $x^2-28x+160=0$

या $x^2-20x-8x+160=0$ वा $x(x-20)-8(x-20)=0$

या $(x-20)(x-8)=0$

यदि $x-20=0$ तो $x=\mathbf{20}$ यदि $x-8=0$ तो $x=\mathbf{8}$ **उत्तर**

17. $\mathbf{6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0}$

हल– दी गई समीकरण, $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$ ...(1)

माना $x+\frac{1}{x}=y$ ...(2)

या $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$ या $x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2$

या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$6(y^2-2)-35y+62=0$ या $6y^2-12-35y+62=0$

या $6y^2-35y+50=0$ या $6y^2-20y-15y+50=0$

या $2y(3y-10)-5(3y-10)=0$ या $(3y-10)(2y-5)=0$

अब, यदि $3y-10=0$ तो $y=\frac{10}{3}$ तथा यदि $2y-5=0$ तो $y=\frac{5}{2}$

या $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ तथा $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

या $x^2+1=\frac{10x}{3}$ तथा $x^2+1=\frac{5x}{2}$

या $3x^2+3=10x$ तथा $2x^2+2=5x$

या $3x^2-10x+3=0$ तथा $2x^2-5x+2=0$

या $3x^2-9x-x+3=0$ तथा $2x^2-4x-x+2=0$

या $3x(x-3)-1(x-3)=0$ तथा $2x(x-2)-1(x-2)=0$

या $(x-3)(3x-1)=0$ तथा $(x-2)(2x-1)=0$

अतः $x=3,\frac{1}{3}$ अतः $x=2,\frac{1}{2}$

अतः $x=\mathbf{2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}}$ **उत्तर**

18. $\mathbf{3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0}$

हल– दी गई समीकरण, $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$ ...(1)

माना $x+\frac{1}{x}=y$ ...(2)

या $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2$ या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$3(y^2-2)-16y+26=0$

या $3y^2-6-16y+26=0$ या $3y^2-16y+20=0$

या $3y^2-10y-6y+20=0$ या $y(3y-10)-2(3y-10)=0$

या $(3y-10)(y-2)=0$

यदि $3y-10=0$ तो $y=\frac{10}{3}$

या $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$

या $3x^2+3=10x$

या $3x^2-10x+3=0$

या $3x^2-9x-x+3=0$

या $3x(x-3)-1(x-3)=0$

या $(x-3)(3x-1)=0$

अतः $x=3$ या $x=\frac{1}{3}$

तथा यदि $y-2=0$ तो $y=2$

तथा $x+\frac{1}{x}=2$

तथा $x^2+1=2x$

तथा $x^2-2x+1=0$

तथा $(x-1)^2=0$

तथा $x-1=0$

तथा $x=1$

अतः $x=\mathbf{1, \frac{1}{3}, 3}$ **उत्तर**

19. $\mathbf{8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-42\left(x-\frac{1}{x}\right)+29=0}$

हल– दी गई समीकरण, $8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-42\left(x-\frac{1}{x}\right)+29=0$ ...(1)

माना $x-\frac{1}{x}=y$ ...(2)

या $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=y^2$ या $x^2+\frac{1}{x^2}-2=y^2$

या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$8(y^2+2)-42y+29=0$

या $8y^2+16-42y+29=0$ या $8y^2-42y+45=0$

या $8y^2-30y-12y+45=0$ या $2y(4y-15)-3(4y-15)=0$

या $(4y-15)(2y-3)=0$

अब, यदि $4y-15=0$ तथा $2y-3=0$

तो $4\left(x-\frac{1}{x}\right)-15=0$ तो $2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0$

या $4x^2-4-15x=0$ तथा $2x^2-2-3x=0$

या $4x^2-16x+x-4=0$ तथा $2x^2-4x+x-2=0$

या $4x(x-4)+1(x-4)=0$ तथा $2x(x-2)+1(x-2)=0$

या $(x-4)(4x+1)=0$ तथा $(x-2)(2x+1)=0$

अतः $x=4, -\frac{1}{4}$ तथा $x=2, -\frac{1}{2}$

अतः $x=\mathbf{4, -\frac{1}{4}, 2, -\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

20. $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0$

हल– दी गई समीकरण, $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0$ ...(1)

माना $x-\frac{1}{x}=y$ ...(2)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=y^2$$

$\Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2}-2=y^2$

या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$6(y^2+2)-25y+12=0$

या $6y^2+12-25y+12=0$ या $6y^2-25y+24=0$

या $6y^2-16y-9y+24=0$ या $2y(3y-8)-3(3y-8)=0$

या $(3y-8)(2y-3)=0$

अब, यदि $3y-8=0$ तथा यदि $2y-3=0$

तो $3\left(x-\frac{1}{x}\right)-8=0$ तो $2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0$

या $3x-\frac{3}{x}-8=0$ तथा $2x-\frac{2}{x}-3=0$

या $3x^2-3-8x=0$ तथा $2x^2-2-3x=0$

या $3x^2-9x+x-3=0$ तथा $2x^2-4x+x-2=0$

या $3x(x-3)+1(x-3)=0$ तथा $2x(x-2)+1(x-2)=0$

या $(x-3)(3x+1)=0$ तथा $(x-2)(2x+1)=0$

अब, यदि $x-3=0\Rightarrow x=3$ अब, यदि $x-2=0\Rightarrow x=2$

तथा $3x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ तथा $2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

अतः $x=3,-\frac{1}{3},2,-\frac{1}{2}$ **उत्तर**

21. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-17=0$

हल– दी गई समीकरण,

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-17=0 \quad ...(1)$$

माना $x-\frac{1}{x}=y$ ...(2)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=y^2 \quad \text{या} \quad x^2+\frac{1}{x^2}-2=y^2$$

या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ ...(3)

अब समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$(y^2+2)-2y-17=0$ या $y^2+2-2y-17=0$

या $y^2-2y-15=0$ या $y^2-5y+3y-15=0$

या $y(y-5)+3(y-5)=0$ या $(y-5)(y+3)=0$

अब यदि $y-5=0$ तो $x-\frac{1}{x}-5=0$

या $x^2-1-5x=0$ या $x^2-5x-1=0$

यहाँ $a=1, b=-5, c=-1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-(-5)\pm\sqrt{25+4}}{2}=\frac{(5)\pm\sqrt{29}}{2}$$

तथा यदि $y+3=0$ तब $x-\frac{1}{x}+3=0$

या $x^2+3x-1=0$

यहाँ $a=1, b=3, c=-1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

अतः $x=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}, \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ **उत्तर**

22. $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{13}{6}$ $x\neq0, x\neq1$

हल– दी गई समीकरण,

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{13}{6} \qquad ...(1)$$

माना $\frac{x}{1-x}=y \Rightarrow \frac{1-x}{x}=\frac{1}{y}$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$\sqrt{y}+\sqrt{\frac{1}{y}}=\frac{13}{6}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(\sqrt{y}+\sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2=\left(\frac{13}{6}\right)^2 \quad \text{या} \quad y+\frac{1}{y}+2=\frac{169}{36}$$

या $y^2+1+2y=\frac{169y}{36}$ या $36y^2+36+72y=169y$

या $36y^2+72y-169y+36=0$ या $36y^2-97y+36=0$

या $36y^2-81y-16y+36=0$

या $9y(4y-9)-4(4y-9)=0$

या $(4y-9)(9y-4)=0$

अब, यदि $4y-9=0$ तो $y=\frac{9}{4}$

या $\frac{x}{1-x}=\frac{9}{4}$ या $4x=9-9x$

या $4x+9x=9$ या $13x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{13}$

तथा यदि $9y-4=0$ या $y=\frac{4}{9}$

या $\frac{x}{1-x}=\frac{4}{9}$ या $9x=4-4x$

या $9x+4x=4$ या $13x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{13}$

अतः $x=\frac{9}{13}, \frac{4}{13}$ **उत्तर**

23. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+1}\right)+6=0,\ x\neq 1$

हल– दी गई समीकरण,

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+1}\right)+6=0 \qquad ...(1)$$

माना $\frac{x}{x+1}=y$ समीकरण (1) में रखने पर,

$y^2-5y+6=0$ या $y^2-3y-2y+6=0$

या $y(y-3)-2(y-3)=0$ या $(y-3)(y-2)=0$

अब, यदि $y-3=0$ या $y=3$

या $\frac{x}{x+1}=3$ या $x=3x+3$

या $x-3x=3$ या $-2x=3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

तथा यदि $y-2=0 \Rightarrow y=2$ या $\frac{x}{x+1}=2$

या $x=2x+2$

या $x-2x=2 \Rightarrow -x=2 \Rightarrow x=-2$

अतः $x=\frac{3}{2}, -2$ **उत्तर**

24. $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2+3-4\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=0, \ (x \neq -2)$

हल– दी गई समीकरण $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2+3-4\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ में $\frac{x-2}{x+2}=y$ रखने पर,

$y^2+3-4y=0$ या $y^2-3y-y+3=0$

$y(y-3)-1(y-3)=0$ या $(y-3)(y-1)=0$

अब, यदि $y-3=0$ या $y=3$

या $\frac{x-2}{x+2}=3$ या $x-2=3x+6$

या $x-3x=6+2$ या $-2x=8 \Rightarrow x=-4$

तथा यदि $y-1=0 \Rightarrow y=1$ या $\frac{x-2}{x+2}=1$ जो कि असत्य है।

अतः $x=-4$ **उत्तर**

25. $9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-27\left(x+\frac{1}{x}\right)=10$

हल– दी गई समीकरण $9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-27\left(x+\frac{1}{x}\right)=10$ में $x+\frac{1}{x}=y$ रखने पर,

$9y^2-27y-10=0$ या $9y^2-30y+3y-10=0$

$3y(3y-10)+1(3y-10)=0$

या $(3y-10)(3y+1)=0$

अब, यदि $3y-10=0$ या $3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$

या $3x^2+3-10x=0$ या $3x^2-9x-x+3=0$

या $3x(x-3)-1(x-3)=0$ या $(x-3)(3x-1)=0$

अतः $x=3, \frac{1}{3}$

तथा यदि $3y+1=0 \Rightarrow 3\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$

या $3x^2+3+x=0$ या $3x^2+x+3=0$

यहाँ $a=3, b=1, c=3$

अतः $D=b^2-4ac=1^2-4\times 3\times 3=1-36=-35$

$D<0$ अतः समीकरण के मूल अवास्तविक होंगे।

अतः $x=3, \frac{1}{3}$ **उत्तर**

26. $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4-13\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+36=0$

हल– दी गई समीकरण, $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4-13\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+36=0$ में $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=y$ रखने पर

$y^2-13y+36=0$ या $y^2-9y-4y+36=0$

या $y(y-9)-4(y-9)=0$ या $(y-9)(y-4)=0$

अब यदि $y-9=0$ या $y=9$

या $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=9 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}=\pm\sqrt{9}$ या $\frac{x-1}{x+1}=\pm 3$

या $\frac{x-1}{x+1}=+3$ तथा $\frac{x-1}{x+1}=-3$

या $x-1=3x+3$ तथा $x-1=-3x-3$

या $x-3x=3+1$ तथा $x+3x=1-3$

या $-2x=4$ तथा $4x=-2$

या $x=-2$ तथा $x=-\frac{1}{2}$

तथा यदि $y-4=0 \Rightarrow y=4$

$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=4 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\pm\sqrt{4}$ या $\frac{x-1}{x+1}=\pm 2$

या $\frac{x-1}{x+1}=2$ तथा $\frac{x-1}{x+1}=-2$

या $x-1=-2x-2$

या $x-2x=2+1$ तथा $x-1=-2x-2$

तथा $x+2x=-2+1$

या $-x=3$ तथा $3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

या $x=-3$

अतः $x=-2, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$ **उत्तर**

27. $2^{x+3}+2^{-x}=6$

हल– दी गई समीकरण, $2^{x+3}+2^{-x}=6$

या $2^x \times 2^3+\frac{1}{2^x}=6 \Rightarrow 8\times 2^x+\frac{1}{2^x}=6$

$2^x=y$ रखने पर,

$8y+\frac{1}{y}=6$ या $8y^2+1=6y$

या $8y^2-6y+1=0$ या $8y^2-4y-2y+1=0$

या $4y(2y-1)-1(2y-1)=0$

या $(2y-1)(4y-1)=0$

अब, यदि $2y-1=0$ या $2y=1$

या $2\times 2^x=1$ या $2^{x+1}=2^0$

दोनों पक्षों में घातों की तुलना करने पर,

$x+1=0$ या $x=-1$

तथा यदि $4y-1=0$ या $4\cdot 2^x=1$

या $2^2\cdot 2^x=1$ या $2^{2+x}=2^0$

दोनों पक्षों में घातों की तुलना करने पर,

$2+x=0 \Rightarrow x=-2$

अतः $x=-1,-2$ **उत्तर**

28. $y^{2/3}-2y^{1/3}=15$

हल– दी गई समीकरण, $y^{2/3}-2y^{1/3}=15$ में, $y^{1/3}=x$ रखने पर,

$x^2-2x=15$ या $x^2-2x-15=0$

या $x^2-5x+3x-15=0$ या $x(x-5)+3(x-5)=0$

या $(x-5)(x+3)=0$

अब, यदि $x-5=0$

या $x=5$ या $y^{1/3}=5$

या $y=5^3=125$

तथा यदि $x+3=0$ या $x=-3$

या $y^{1/3}=-3$ या $y=(-3)^3=-27$

अतः $y=125,-27$ **उत्तर**

29. $6x^{1/4}-x^{1/2}=9$

हल– दी गई समीकरण, $6x^{1/4}-x^{1/2}=9$ में $x^{1/4}=y$ रखने पर,

$6y-y^2=9$ या $y^2-6y+9=0$

या $(y-3)^2=0$ या $y-3=0$

या $y=3$ या $x^{1/4}=3$

या $(x^{1/4})^4=3^4$ या $x=81$ **उत्तर**

30. $2^{2x+3} = 65(2^x - 1) + 57$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2^{2x+3} = 65(2^x - 1) + 57$

या $2^{2x} \cdot 2^3 = 65 \times 2^x - 65 + 57$

या $8 \times (2^x)^2 = 65 \times 2^x - 8$

$2^x = y$ रखने पर,

$8y^2 = 65y - 8$ या $8y^2 - 65y + 8 = 0$

या $8y^2 - 64y - y + 8 = 0$ या $8y(y-8) - 1(y-8) = 0$

या $(y-8)(8y-1) = 0$

अब, यदि $y - 8 = 0$ तो $y = 8$

या $2^x = 2^3$ या $x = 3$

तथा यदि $8y - 1 = 0$ तो $y = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

या $2^x = 2^{-3}$ या $x = -3$

अतः $x = 3, -3$ **उत्तर**

31. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

या $x^3 - 2x^2 + 5x^2 - 10x + 6x - 12 = 0$

या $x^2(x-2) + 5x(x-2) + 6(x-2) = 0$

या $(x-2)(x^2 + 5x + 6) = 0$

या $(x-2)\{x^2 + 3x + 2x + 6\} = 0$

या $(x-2)\{x(x+3) + 2(x+3)\} = 0$

या $(x-2)\{(x+3)(x+2)\} = 0$

या $(x-2)(x+3)(x+2) = 0$

अब, यदि $x - 2 = 0$ तो $x = 2$

यदि $x + 3 = 0$ तो $x = -3$

तथा यदि $x + 2 = 0$ तो $x = -2$

अतः $x = -2, -3, 2$ **उत्तर**

32. $(x^2 + 12x)^2 + 35(x^2 + 12x) + 150 = 0$

हल– दी गई समीकरण,

$(x^2 + 12x)^2 + 35(x^2 + 12x) + 150 = 0$ में $x^2 + 12x = y$ रखने पर,

$y^2 + 35y + 150 = 0$ या $y^2 + 30y + 5y + 150 = 0$

या $y(y+30) + 5(y+30) = 0$ या $(y+30)(y+5) = 0$

अब, यदि $y + 30 = 0$

तो $x^2 + 12x + 30 = 0$

यहाँ $a = 1, b = 12, c = 30$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times1\times30}}{2\times1}$$
$$=\frac{-12\pm\sqrt{144-120}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{24}}{2}$$
$$=\frac{-12\pm2\sqrt{6}}{2}=-6\pm\sqrt{6}$$

तथा यदि $y+5=0$ तो $x^2+12x+5=0$

यहाँ $a=1, b=12, c=5$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times1\times5}}{2\times1}$$
$$=\frac{-12\pm\sqrt{144-20}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{124}}{2}$$
$$=\frac{-12\pm2\sqrt{31}}{2}=-6\pm\sqrt{31}$$

अतः $x=-6\pm\sqrt{6},\ -6\pm\sqrt{31}$ **उत्तर**

33. $(25)^x-6(5)^x+5=0$

हल– दी गई समीकरण,

$$(25)^x-6(5)^x+5=0$$

या $(5)^{2x}-6(5)^x+5=0$ में $5^x=y$ रखने पर,

$$y^2-6y+5=0 \quad \text{या} \quad y^2-5y-y+5=0$$

या $y(y-5)-1(y-5)=0$ या $(y-5)(y-1)=0$

अब, यदि $(y-5)=0$ तो $y=5$

या $5^x=5^1 \Rightarrow x=1$

तथा यदि $y-1=0$ तो $y=1$

या $5^x=1$ या $5^x=5^0 \Rightarrow x=0$

अतः $x=0, 1$ **उत्तर**

34. $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{6}$

हल– दी गई समीकरण, $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{6}$

या $\dfrac{x+5-(x-3)}{(x-3)(x+5)}=\dfrac{1}{6}$

या $\dfrac{x+5-x+3}{x^2+5x-3x-15}=\dfrac{1}{6}$ या $\dfrac{8}{x^2+2x-15}=\dfrac{1}{6}$

या $x^2+2x-15=48$ या $x^2+2x-15-48=0$

या $x^2+2x-63=0$ या $x^2+9x-7x-63=0$

या $x(x+9)-7(x+9)=0$ या $(x+9)(x-7)=0$

अब, यदि $x+9=0$ तो $x=-9$

तथा यदि $x-7=0$ तो $x=7$

अतः $x=-9, 7$ **उत्तर**

अभ्यास 3.8

1. उन दो संख्याओं को ज्ञात कीजिए, जिनका योगफल 27 व गुणनफल 182 है।

हल– माना दो संख्याएँ x तथा y है।

प्रश्नानुसार, $x+y=27$ ...(1)

तथा $xy=182$ ...(2)

समीकरण (1) से $y=27-x$ समीकरण (2) में रखने पर,

$x(27-x)=182$ या $27x-x^2=182$

या $x^2-27x+182=0$ या $x^2-13x-14x+182=0$

या $x(x-13)-14(x-13)=0$ या $(x-13)(x-14)=0$

अब, यदि $x-13=0$ तो $x=13$ समीकरण (1) में रखने पर,

$13+y=27$ या $y=27-13$ या $y=14$

तथा यदि $x-14=0$ तो $x=14$ समीकरण (1) में रखने पर,

$14+y=27$ या $y=27-14$ या $y=13$

अतः अभीष्ट संख्याएँ $=13, 14$ **उत्तर**

2. ऐसे दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों को ज्ञात कीजिए, जिनके वर्गों का योगफल 365 है।

हल– माना दो क्रमागत धन पूर्णांक x तथा $x+1$ हैं।

अतः प्रश्नानुसार,

$x^2+(x+1)^2=365$

या $x^2+x^2+2x+1=365$ या $2x^2+2x=365-1$

या $2x^2+2x=364$ या $x^2+x=182$

या $x^2+x-182=0$ या $x^2+14x-13x-182=0$

या $x(x+14)-13(x+14)=0$ या $(x+14)(x-13)=0$

अब, यदि $x+14=0$ तो $x=-14$ जो अमान्य है।

यदि $x-13=0$ तो $x=13$

तथा $x+1=13+1=14$

अतः अभीष्ट संख्याएँ $=13, 14$ **उत्तर**

3. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई उसकी आधार भुजा से 7 सेमी कम है। यदि उसका कर्ण 13 सेमी है, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल– माना समकोण त्रिभुज की आधार भुजा $=x$ सेमी

प्रश्नानुसार, समकोण त्रिभुज की ऊँचाई $=(x-7)$ सेमी

तथा समकोण त्रिभुज का कर्ण $=13$ सेमी

हम जानते हैं कि— समकोण त्रिभुज में

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{ऊँचाई})^2$$

$$13^2 = x^2 + (x-7)^2 \quad \text{या} \quad 169 = x^2 + x^2 - 14x + 49$$

या $169 - 49 = 2x^2 - 14x$ या $120 = 2x^2 - 14x$

या $60 = x^2 - 7x$ या $x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$

या $x(x-12) + 5(x-12) = 0$ या $(x-12)(x+5) = 0$

अब, यदि $x - 12 = 0$ तो $x = 12$

तथा यदि $x + 5 = 0$ तो $x = -5$ सेमी जो अमान्य है।

अतः समकोण त्रिभुज की ऊँचाई $= x - 7 = 12 - 7 = 5$ सेमी

अतः समकोण त्रिभुज की अन्य दो भुजाएँ = **5 सेमी व 12 सेमी हैं।** **उत्तर**

4. एक कुटीर उद्योग एक दिन में मिट्टी की वस्तुओं की निश्चित संख्या का उत्पादन करता है। एक विशेष दिन प्रेक्षण किया गया कि प्रत्येक वस्तु के उत्पादन का मूल्य (₹ में) उस दिन उत्पादित वस्तुओं की संख्या के दुगने से 3 अधिक था। यदि उस दिन उत्पादन का कुल मूल्य ₹ 90 था, तो उत्पादित वस्तुओं की संख्या तथा प्रत्येक वस्तु का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल– माना उत्पादित वस्तुओं की संख्या $= x$

तथा प्रत्येक वस्तु का मूल्य $= ₹\ y$

प्रश्नानुसार, $y = 2x + 3$ ...(1)

तथा उत्पादन का कुल मूल्य $xy = ₹\ 90$ ...(2)

समीकरण (1) से y का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x(2x+3) = 90 \quad \text{या} \quad 2x^2 + 3x - 90 = 0$$

या $2x^2 + 15x - 12x - 90 = 0$

या $x(2x+15) - 6(2x+15) = 0$

या $(2x+15)(x-6) = 0$

यदि $2x + 15 = 0$ तो $x = \dfrac{-15}{2}$ जो अमान्य है।

अब, यदि $x - 6 = 0$ तो $x = 6$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = 2 \times 6 + 3 = 12 + 3 = 15$$

अतः उत्पादित वस्तुओं की संख्या $= 6$

तथा प्रत्येक वस्तु का मूल्य $= ₹ 15$ **उत्तर**

5. एक आयताकार पार्क को इस तरह से बनाया गया है कि उसकी लम्बाई चौड़ाई से 3 मीटर अधिक है। इसका क्षेत्रफल 12 मीटर ऊँचाई वाले एक समद्विबाहु त्रिभुजाकार पार्क के क्षेत्रफल से 4 वर्ग मीटर अधिक है, जिसका आधार आयताकार पार्क की चौड़ाई के बराबर है। आयताकार पार्क की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना आयताकार पार्क की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः x व y मीटर हैं।

प्रश्नानुसार, $x = y + 3$ ...(1)

समद्विबाहु त्रिभुज का आधार = आयताकार पार्क की चौड़ाई

$= y$ मीटर

समद्विबाहु त्रिभुज की ऊँचाई = 12 मीटर

अतः समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times y \times 12 = 6y$ मीटर^2

पुनः प्रश्नानुसार,

आयताकार पार्क का क्षेत्रफल = समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल + 4

$$x \times y = 6y + 4 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) में समीकरण (1) से $x = y + 3$ रखने पर,

$(y+3)\,y = 6y + 4$ या $y^2 + 3y = 6y + 4$

या $y^2 + 3y - 6y - 4 = 0$ या $y^2 - 3y - 4 = 0$

या $y^2 - 4y + y - 4 = 0$ या $y(y-4) + 1(y-4) = 0$

या $(y-4)(y+1) = 0$

अब, यदि $y - 4 = 0$ तो $y = 4$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x = 4 + 3 = 7$ मीटर

अतः आयताकार मैदान की लम्बाई = **7 मीटर** तथा **चौड़ाई = 4 मीटर** **उत्तर**

6. एक मोटरबोट, जिसकी चाल शान्त जल में 18 किमी/घंटा है किसी बिन्दु से 24 किमी० धारा के अनुकूल जाने की अपेक्षा धारा के प्रतिकूल उसी बिन्दु तक आने में 1 घंटा अधिक समय लेती है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना धारा की चाल x किमी/घंटा है

शान्त जल में मोटरबोट की चाल = 18 किमी/घंटा

अतः धारा के अनुकूल मोटरबोट की चाल = $(18 + x)$ किमी/घंटा

तथा धारा के प्रतिकूल मोटरबोट की चाल = $(18 - x)$ किमी/घंटा

प्रत्येक दशा में मोटरबोट द्वारा तय दूरी = 24 किमी

धारा के अनुकूल जाने में लगा समय $= \frac{\text{तय दूरी}}{\text{धारा के अनुकूल चाल}}$

$$T_1 = \frac{24}{18 + x}$$

तथा धारा के प्रतिकूल आने में लगा समय $= \frac{\text{तय दूरी}}{\text{धारा के प्रतिकूल चाल}}$

$$T_2 = \frac{24}{18 - x}$$

प्रश्नानुसार, $T_2 - T_1 = 1$ या $\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$

या $24\left(\frac{1}{18-x} - \frac{1}{18+x}\right) = 1$ या $24\left\{\frac{18+x-(18-x)}{(18+x)(18-x)}\right\} = 1$

या $24\left\{\frac{18+x-18+x}{18^2 - x^2}\right\} = 1$ या $24\left(\frac{2x}{324 - x^2}\right) = 1$

या $48x = 324 - x^2$

या $x^2+48x-324=0$ या $x^2+54x-6x-324=0$

या $x(x+54)-6(x+54)=0$

या $(x+54)(x-6)=0$

अब, यदि $x+54=0 \Rightarrow x=-54$ किमी/घंटा जो अमान्य है।

तथा यदि $x-6=0 \Rightarrow x=6$ **किमी/घंटा** **उत्तर**

7. एक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम का योगफल $\frac{13}{6}$ है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या x है।

तब x का व्युत्क्रम $=\frac{1}{x}$

प्रश्नानुसार, $x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$ या $\frac{x^2+1}{x}=\frac{13}{6}$

या $6x^2+6=13x$ या $6x^2-13x+6=0$

या $6x^2-9x-4x+6=0$ या $(2x-3)(3x-2)=0$

अब, यदि $2x-3=0$ या $2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

तथा यदि $3x-2=0$ तो $x=\frac{2}{3}$

अतः अभीष्ट संख्या $=\frac{2}{3}$ **या** $\frac{3}{2}$ **उत्तर**

8. एक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम का योगफल $2\frac{9}{10}$ है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या $=x$

तब x का व्युत्क्रम $=\frac{1}{x}$

प्रश्नानुसार, $x+\frac{1}{x}=2\frac{9}{10}$

या $\frac{x^2+1}{x}=\frac{29}{10}$ या $10x^2+10=29x$

या $10x^2-29x+10=0$ या $10x^2-25x-4x+10=0$

या $5x(2x-5)-2(2x-5)=0$ या $5x(2x-5)-2(2x-5)=0$

या $(2x-5)(5x-2)=0$

अब, यदि $2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

तथा यदि $5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5}$

अतः अभीष्ट संख्या $=\frac{2}{5}$ **या** $\frac{5}{2}$ **उत्तर**

9. एक भिन्न का हर उसके अंश से 3 अधिक है। यदि भिन्न तथा उसके व्युत्क्रम का योगफल $2\frac{9}{10}$ है तो भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल– माना भिन्न $=\frac{x}{y}$ तथा इसका व्युत्क्रम $=\frac{y}{x}$

प्रश्नानुसार, $y=x+3$ ...(1)

तथा $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{9}{10}$

या $\frac{x}{x+3}+\frac{x+3}{x}=\frac{29}{10}$ (समीकरण 1 से)

या $\frac{x^2+(x+3)^2}{(x+3)x}=\frac{29}{10}$ या $\frac{x^2+x^2+6x+9}{x^2+3x}=\frac{29}{10}$

या $\frac{2x^2+6x+9}{x^2+3x}=\frac{29}{10}$

या $20x^2+60x+90=29x^2+87x$

या $9x^2+27x-90=0$ या $x^2+3x-10=0$

या $x^2+5x-2x-10=0$ या $x(x+5)-2(x+5)=0$

या $(x+5)(x-2)=0$

अब, यदि $x+5=0$ तो $x=-5$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x-2=0 \Rightarrow x=2$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y=2+3=5$$

अतः भिन्न $=\frac{x}{y}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ **उत्तर**

10. एक भिन्न का हर उसके अंश से 1 अधिक है। भिन्न का 3 गुणा उसके व्युत्क्रम के दो गुने से 1 कम है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल– माना भिन्न $=\frac{x}{y}$

तब भिन्न का व्युत्क्रम $=\frac{y}{x}$

प्रश्नानुसार, $y=x+1$ ...(1)

तथा $3\times\frac{x}{y}=2\times\frac{y}{x}-1$ या $\frac{3x}{y}=\frac{2y}{x}-1$

या $\frac{3x}{y}=\frac{2y-x}{x}$

या $\frac{3x}{x+1}=\frac{2(x+1)-x}{x}$ (समीकरण (1) से)

या $3x^2=2(x+1)^2-(x+1)x$

या $3x^2=2(x^2+2x+1)-x^2-x$

या $3x^2=2x^2+4x+2-x^2-x$

या $3x^2=x^2+3x+2$ या $2x^2-3x-2=0$

या $2x^2-4x+x-2=0$ या $2x(x-2)+1(x-2)=0$

या $(x-2)(2x+1)=0$

अब, यदि $x-2=0$ तो $x=2$

तथा यदि $2x+1=0$ तो $x=-\frac{1}{2}$ जो अमान्य है।

अतः समीकरण (1) में $x=2$ रखने पर,

$y=2+1=3$

अतः अभीष्ट भिन्न $\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{2}{3}$ **उत्तर**

11. किसी पूर्णांक के व्युत्क्रम का $\frac{25}{12}$ गुणा उस पूर्णांक से क्रमशः एक कम तथा एक अधिक पूर्णांक के व्युत्क्रमों के योगफल के बराबर है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

हल– माना पूर्णांक $=x$ इसका व्युत्क्रम $=\frac{1}{x}$

पूर्णांक x से 1 अधिक पूर्णांक $=x+1$, इसका व्युत्क्रम $=\frac{1}{x+1}$

तथा 1 कम पूर्णांक $=x-1$, इसका व्युत्क्रम $=\frac{1}{x-1}$

प्रश्नानुसार, $\frac{25}{12}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$

या $\frac{25}{12x}=\frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)}$

या $\frac{25}{12x}=\frac{2x}{x^2-1}$ या $25x^2-25=24x^2$

या $x^2-25=0$ या $x^2-5^2=0$

या $(x+5)(x-5)=0$

अब, यदि $x+5=0$ तो $x=-5$

तथा यदि $x-5=0$ तो $x=5$

अतः अभीष्ट पूर्णांक $=5$ या -5 **उत्तर**

12. किसी भिन्न का अंश उसके हर से एक कम है। यदि भिन्न के अंश में 4 जोड़ा जाए तथा हर में से 2 घटाया जाए तो नई भिन्न एवं मूल भिन्न का योगफल $\frac{17}{4}$ हो जाता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल– माना भिन्न $=\frac{x}{y}$

प्रश्नानुसार, $x=y-1$ या $y=x+1$ ...(1)

तथा $\frac{x+4}{y-2}+\frac{x}{y}=\frac{17}{4}$

या $\frac{x+4}{x+1-2}+\frac{x}{x+1}=\frac{17}{4}$ (समी० (1) से $y=x+1$ रखने पर)

या $\frac{x+4}{(x-1)}+\frac{x}{(x+1)}=\frac{17}{4}$

या $\frac{(x+4)(x+1)+x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{17}{4}$

या $\frac{x^2+x+4x+4+x^2-x}{x^2-1}=\frac{17}{4}$

या $\frac{2x^2+4x+4}{x^2-1}=\frac{17}{4}$ या $8x^2+16x+16=17x^2-17$

या $9x^2-16x-33=0$ या $9x^2-27x+11x-33=0$

या $9x(x-3)+11(x-3)=0$ या $(x-3)(9x+11)=0$

अतः यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$

तथा यदि $9x+11=0 \Rightarrow x=-\frac{11}{9}$ जो अमान्य है।

समीकरण (1) में $x=3$ रखने पर,

$3=y-1 \Rightarrow y=3+1=4$ **उत्तर**

13. दो संख्याओं का योगफल 15 है। संख्याओं के व्युत्क्रमों का योगफल $\frac{3}{10}$ है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो संख्याएँ $=x$ तथा y हैं।

अतः इनके व्युत्क्रम क्रमशः $\frac{1}{x}$ तथा $\frac{1}{y}$ होंगे।

प्रश्नानुसार, $x+y=15$ ...(1)

तथा $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$ या $\frac{y+x}{xy}=\frac{3}{10}$

या $10(x+y)=3xy$

या $10\times 15=3x(15-x)$ (समीकरण (1) से)

या $150=45x-3x^2$

या $3x^2-45x+150=0$ या $x^2-15x+50=0$

या $x^2-10x-5x+50=0$ या $x(x-10)-5(x-10)=0$

या $(x-10)(x-5)=0$

अब, यदि $x-10=0 \Rightarrow x=10$

तथा यदि $x-5=0 \Rightarrow x=5$

$x=10$ समीकरण (1) में रखने पर,

$10+y=15$ या $y=15-10=5$

इसी प्रकार, $x=5$ रखने पर,

$y=15-5=10$

अतः अभीष्ट संख्याएँ $=$ **5, 10** हैं **उत्तर**

14. दो क्रमागत धनपूर्ण संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल 30 है।

हल—माना दो क्रमागत धनपूर्ण संख्याएँ x तथा $(x+1)$ हैं।

प्रश्नानुसार, $x\times(x+1)=30$

या $x^2+x=30$ या $x^2+x-30=0$

या $x^2+6x-5x-30=0$ या $x(x+6)-5(x+6)=0$

या $(x+6)(x-5)=0$

अब, यदि $x-5=0$ तो $x=5$ तथा $x+1=5+1=6$

अत: दो अभीष्ट क्रमागत धनपूर्ण संख्याएँ = **5, 6** **उत्तर**

15. 40 को ऐसे दो भागों में बाँटिए जिनका गुणनफल 375 है।

हल– माना दो संख्याएँ x तथा y इस प्रकार हैं कि—

$$x+y=40 \quad ...(1)$$

तथा $$xy=375 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) से $y=40-x$ समीकरण (2) में रखने पर,

$x(40-x)=375$ या $40x-x^2=375$

या $x^2-40x+375=0$ या $x^2-25x-15x+375=0$

या $x(x-25)-15(x-25)=0$ या $(x-25)(x-15)=0$

अब, यदि $x-25=0$ तो $x=25$

तथा $x-15=0$ तो $x=15$

$x=25$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$y=40-25=15$$

तथा $x=15$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$y=40-15=25$$

अत: अभीष्ट संख्याएँ = **15, 25** **उत्तर**

16. एक संख्या दो अंकों से बनी है। संख्या में इकाई का अंक दहाई के अंक से 4 अधिक है। संख्या अपने अंकों के गुणनफल से 14 अधिक है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या $=xy$

जहाँ y इकाई अंक तथा x दहाई अंक है। अत: संख्या का मान $=10x+y$

प्रश्नानुसार, $$y=x+4 \quad ...(1)$$

तथा $$10x+y=xy+14 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) से y का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$10x+x+4=x(x+4)+14$ या $11x+4=x^2+4x+14$

या $x^2-7x+10=0$ या $x^2-5x-2x+10=0$

या $x(x-5)-2(x-5)=0$ या $(x-5)(x-2)=0$

अब, यदि $x-5=0 \Rightarrow x=5$ तब $y=5+4=9$

तथा यदि $x-2=0 \Rightarrow x=2$ तब $y=2+4=6$

अत: अभीष्ट संख्याएँ = **26 या 59 हैं** **उत्तर**

17. एक संख्या में दो अंक हैं जिनका गुणनफल 12 है। जब इस संख्या में 36 जोड़ा जाता है तो अंकों के स्थान बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या $=xy$ है, जहाँ x दहाई का अंक तथा y इकाई का अंक है।

अत: संख्या का मान $=10x+y$

प्रश्नानुसार, $$x\times y=12 \quad ...(1)$$

तथा $10x+y+36=10y+x$

या $10x-x+y-10y+36=0$ या $9x-9y+36=0$

या $x-y+4=0$

या $x=y-4$ समीकरण (1) में रखने पर,

$(y-4)\times y=12$

या $y^2-4y-12=0$ या $y^2-6y+2y-12=0$

या $y(y-6)+2(y-6)=0$ या $(y-6)(y+2)=0$

अब, यदि $y-6=0 \Rightarrow y=6$ तो $x=\frac{12}{6}=2$

तथा यदि $y+2=0 \Rightarrow y=-2$ जो अमान्य है।

अतः अभीष्ट संख्या $(xy)=\mathbf{26}$ **उत्तर**

18. दो अंकों की एक धनात्मक संख्या के अंकों का गुणनफल 18 है। संख्या में से 63 घटाने पर अंकों के स्थान बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो अंकों की संख्या $=xy \Rightarrow 10x+y$

जहाँ y इकाई तथा x दहाई अंक है।

प्रश्नानुसार, $x\times y=18$ ...(1)

तथा $10x+y-63=10y+x$

या $10x-x+y-10y-63=0$

या $9x-9y-63=0$ या $x-y-7=0$ या $y=x-7$

$y=x-7$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x(x-7)=18$ या $x^2-7x=18$

या $x^2-7x-18=0$ या $x^2-9x+2x-18=0$

या $x(x-9)+2(x-9)=0$ या $(x-9)(x+2)=0$

अतः यदि $x-9=0 \Rightarrow x=9$ तो $y=2$

अतः अभीष्ट संख्या $=\mathbf{92}$ **उत्तर**

19. एक समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाएँ (सेमी में) $5x$ तथा $(3x-1)$ हैं। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 वर्ग सेमी हो, तो त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल– समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाएँ $=5x$ तथा $(3x-1)$

प्रश्नानुसार, त्रिभुज का क्षेत्रफल $=60$ वर्ग सेमी

या $\frac{(5x)\times(3x-1)}{2}=60$ या $15x^2-5x=120$

या $3x^2-x=24$ या $3x^2-x-24=0$

या $3x^2-9x+8x-24=0$

या $3x(x-3)+8(x-3)=0$ या $(x-3)(3x+8)=0$

अब, यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$

अतः $5x=5\times 3=15$ सेमी

तथा $3x-1=3\times 3-1=9-1=8$

अतः समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाएँ $=\mathbf{15}$ सेमी, **8** सेमी **उत्तर**

20. एक मनुष्य की उम्र अपने पुत्र की उम्र से तीन गुनी है। 6 वर्ष पहले दोनों की उम्र का गुणनफल 288 है। उनकी वर्तमान उम्र ज्ञात कीजिए।

हल– माना पुत्र की वर्तमान उम्र $= x$ वर्ष

तथा पिता की वर्तमान उम्र $= y$ वर्ष

प्रश्नानुसार, $y = 3x$ ...(1)

6 वर्ष पहले पुत्र की उम्र $= x-6$

तथा 6 वर्ष पहले पिता की उम्र $= y-6$

पुनः प्रश्नानुसार, $(x-6)(y-6) = 288$

या $xy-6x-6y+36 = 288$

या $x \times 3x + 36 - 6x - 6 \times 3x = 288$ (समीकरण (1) से)

या $3x^2 + 36 - 6x - 18x = 288$

या $3x^2 - 24x + 36 = 288$ या $x^2 - 8x + 12 = 96$

या $x^2 - 8x + 12 - 96 = 0$ या $x^2 - 8x - 84 = 0$

या $x^2 - 14x + 6x - 84 = 0$

या $x(x-14) + 6(x-14) = 0$ या $(x-14)(x+6) = 0$

अब, यदि $x-14 = 0 \Rightarrow x = 14$

अतः $y = 3 \times 14 = 42$

अतः पुत्र की वर्तमान उम्र $=$ **14 वर्ष**

तथा पिता की वर्तमान उम्र $=$ **42 वर्ष** **उत्तर**

21. किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण छोटी भुजा के दुगुने से 1 कम है। यदि तीसरी भुजा छोटी भुजा से 1 मीटर अधिक हो, तो त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल– माना समकोण त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा $= a$ मीटर

तथा समकोण त्रिभुज का कर्ण $= b$ मीटर

तीसरी भुजा $= c$ मीटर है।

प्रश्नानुसार, $b = 2a-1$ ...(1)

तथा $c = a+1$

हम जानते हैं, समकोण त्रिभुज में

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$b^2 = a^2 + c^2$ या $(2a-1)^2 = a^2 + (a+1)^2$

$4a^2 - 4a + 1 = a^2 + a^2 + 2a + 1$

या $4a^2 - 4a = 2a^2 + 2a$

या $2a^2 - 6a = 0$ या $2a(a-3) = 0$

अब, $a = 0$ या $a-3 = 0$ तो $a = 3$ मीटर

अतः $b = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$ मीटर

$c = 3 + 1 = 4$ मीटर

अतः समकोण त्रिभुज की भुजाएँ $=$ **3 मीटर, 4 मीटर व 5 मीटर** हैं। **उत्तर**

22. किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 20 वर्ग सेमी है तथा उसकी ऊँचाई आधार से 3 सेमी अधिक है। आधार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना त्रिभुज के आधार की लम्बाई $= x$ सेमी है।

प्रश्नानुसार, त्रिभुज की ऊँचाई $= (x+3)$ सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 20$ वर्ग सेमी

या $\frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई $= 20$ या $\frac{1}{2} x \times (x+3) = 20$

या $x^2 + 3x = 40$ या $x^2 + 3x - 40 = 0$

या $x^2 + 8x - 5x - 40 = 0$ या $x(x+8) - 5(x+8) = 0$

या $(x+8)(x-5) = 0$

अब, यदि $x+8=0 \Rightarrow x=-8$ जो अमान्य है।

यदि $x-5=0 \Rightarrow x=5$ **सेमी** **उत्तर**

23. 15 मीटर लम्बाई, 12 मीटर चौड़ाई के एक कमरे के चारों ओर एक 90 वर्ग मीटर क्षेत्रफल का बरामदा है। बरामदे की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना कमरे के चारों ओर बरामदे की चौड़ाई $= x$ मीटर

कमरे की लम्बाई $= 15$ मीटर

तथा कमरे की चौड़ाई $= 12$ मीटर

कमरे के चारों ओर बरामदे की लम्बाई $= 2\times$ कमरे की ल० $+ 2\times$ कमरे की चौ०

$+ 4\times$ बरामदे की चौ०

$= 2\times 15 + 2\times 12 + 4\times x$

$= 30 + 24 + 4x = 54 + 4x$

बरामदे का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई $= 90$

या $(54+4x)\times x = 90$ या $54x + 4x^2 = 90$

या $4x^2 + 54x - 90 = 0$ या $2x^2 + 27x - 45 = 0$

या $2x^2 + 30x - 3x - 45 = 0$

या $2x(x+15) - 3(x+15) = 0$ या $(2x-3)(x+15) = 0$

अब, यदि $2x-3=0$ तो $x = \frac{3}{2} =$ **1.5 मीटर** **उत्तर**

24. एक आयताकार पार्क की लम्बाई, उसकी चौड़ाई से 8 मीटर अधिक है। यदि पार्क का क्षेत्रफल 240 वर्ग मीटर है, तो पार्क की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना पार्क की लम्बाई $= x$ मीटर

अतः पार्क की लम्बाई $= (x+8)$ मीटर

पार्क का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई $= 240$ वर्ग मीटर

या $(x+8)\times x = 240$ या $x^2 + 8x - 240 = 0$

या $x^2 + 20x - 12x - 240 = 0$

या $x(x+20) - 12(x+20) = 0$ या $(x+20)(x-12) = 0$

अब, यदि $x+20=0 \Rightarrow x=-20$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x-12=0 \Rightarrow x=12$

अतः पार्क की लम्बाई $= x+8 = 12+8 =$ **20 मीटर** **उत्तर**

25. एक किसान 100 वर्ग मीटर आयताकार क्षेत्र में सब्जी की क्यारी बनाना चाहता है क्योंकि उसके पास केवल 30 मीटर लम्बा काँटेदार तार है। क्यारी के तीन ओर वह तार लगा देता है और चौथी ओर वह अपने घर की दीवार से घेर देता है। क्यारी की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना क्यारी की लम्बाई $= x$ मीटर

तथा क्यारी की चौड़ाई $= y$ मीटर

अतः क्यारी (आयताकार क्षेत्र) का क्षेत्रफल $= xy = 100$ वर्ग मीटर ...(1)

आयताकार क्षेत्र का तीन ओर से परिमाप $= x + 2y = 30$

या $x = 30 - 2y$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$(30-2y)\,y = 100 \quad \text{या} \quad 30y - 2y^2 = 100$$

या $2y^2 - 30y + 100 = 0$ या $y^2 - 15y + 50 = 0$

या $y^2 - 10y - 5y + 50 = 0$ या $y(y-10) - 5(y-10) = 0$

या $(y-10)(y-5) = 0$

अब, यदि $y - 10 = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow x = 10$ जो अमान्य है।

अतः $y - 5 = 0$ तो $y = 5$ मीटर $\Rightarrow x = 20$ मीटर

अतः क्यारी की लम्बाई = **20 मीटर** तथा चौड़ाई = **5 मीटर** **उत्तर**

26. एक रेलगाड़ी की सामान्य चाल में 5 किमी/घंटा वृद्धि कर देने पर वह 300 किमी की दूरी तय करने में 2 घंटे कम समय लेती है। उसकी सामान्य चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना रेलगाड़ी की चाल $= x$ किमी/घंटा

तय दूरी $= 300$ किमी

अतः 300 किमी दूरी तय करने में लगा समय $= \dfrac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

$$T_1 = \frac{300}{x}$$

अब रेलगाड़ी की चाल $= (x+5)$ किमी/घंटा

तथा 300 किमी की दूरी तय करने में लगा समय $(T_2) = \dfrac{300}{x+5}$ या $T_2 = \dfrac{300}{x+5}$

प्रश्नानुसार, $T_1 - T_2 = 2$

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+5} = 2 \quad \text{या} \quad 300\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5}\right) = 2$$

या $150\left[\dfrac{x+5-x}{x(x+5)}\right] = 1$ या $150\left[\dfrac{5}{x^2+5x}\right] = 1$

या $750 = x^2 + 5x$

या $x^2 + 5x - 750 = 0$

या $x^2 + 30x - 25x - 750 = 0$

या $x(x+30) - 25(x+30) = 0$ या $(x+30)(x-25) = 0$

अब, यदि $x + 30 = 0 \Rightarrow x = -30$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x - 25 = 0 \Rightarrow x =$ **25 किमी/घंटा** **उत्तर**

27. शीना एक नाव को शान्त जल में 4 किमी/घण्टे की दर से चला सकती है। धारा की दिशा में 12 किमी जाने में तथा धारा के विपरीत 12 किमी लौटने में 8 घण्टे का समय लगता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना धारा की चाल $= x$ किमी/घण्टा

शान्त जल में नाव की चाल $= 4$ किमी/घण्टा

अतः धारा की दिशा में नाव की चाल $= (4+x)$ किमी/घण्टा

अब, धारा के दिशा में 12 किमी जाने में लगा समय $= \frac{12}{4+x} = T_1$

तथा धारा के विपरीत 12 किमी लौटने मे लगा समय $= \frac{12}{4-x} = T_2$

परन्तु प्रश्नानुसार, $T_1 + T_2 = 8$

या $\frac{12}{4+x} + \frac{12}{4-x} = 8$ या $12\left(\frac{1}{4+x} + \frac{1}{4-x}\right) = 8$

या $12\left(\frac{4-x+4+x}{4^2-x^2}\right) = 8$ या $\frac{12\times 8}{16-x^2} = 8$

या $\frac{12}{16-x^2} = 1$ या $12 = 16 - x^2$

या $x^2 = 16 - 12$

या $x^2 = 4$ या $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

अतः **$x = 2$ किमी/घंटा** **उत्तर**

28. एक दुकानदार एक वस्तु को ₹ 75 में बेचता है। वह मूल्य के बराबर प्रतिशत मुनाफा लेता है तो उसका मूल्य बताइए।

हल– माना वस्तु का मूल्य $= ₹ x$

अतः मुनाफा $= x\%$

अतः वस्तु का विक्रय मूल्य $= x + x$ का $x\%$

या $x + \frac{x\times x}{100} = 75$ या $\frac{100x + x^2}{100} = 75$

या $100x + x^2 = 7500$

या $x^2 + 100x - 7500 = 0$ या $x^2 + 150x - 50x - 7500 = 0$

या $x(x+150) - 50(x+150) = 0$ या $(x+150)(x-50) = 0$

अब, यदि $x + 150 = 0 \Rightarrow x = -150$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x - 50 = 0 \Rightarrow x = 50$

अतः वस्तु का मूल्य $=$ **₹ 50** **उत्तर**

29. एक विमान अपने निर्धारित समय से 30 मिनट देर से चलता है और 1500 किमी की दूरी पर स्थित अपने गंतव्य स्थान पर समय पर पहुँचने के लिए वह अपनी सामान्य चाल में 250 किमी/घण्टा की वृद्धि कर देता है। विमान की सामान्य चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना विमान की सामान्य चाल $= x$ किमी/घण्टा, तय दूरी $= 1500$ किमी

अतः सामान्य चाल से 1500 किमी की दूरी तय करने मे लगा समय

$$T_1 = \frac{1500}{x} \text{ घण्टा}$$

अब, विमान की चाल $=(x+250)$ किमी/घण्टा

अतः 1500 किमी दूरी तय करने में लगा समय $T_2=\frac{1500}{x+250}$ घण्टा

प्रश्नानुसार, $T_1-T_2=\frac{1}{2}$ घण्टा

$$\frac{1500}{x}-\frac{1500}{x+250}=\frac{1}{2} \quad \text{या} \quad 1500\left\{\frac{x+250-x}{x(x+250)}\right\}=\frac{1}{2}$$

$$\text{या} \quad \frac{1500\times 250}{x^2+250x}=\frac{1}{2} \quad \text{या} \quad \frac{x^2+250x}{375000}=\frac{2}{1}$$

$$\text{या} \quad x^2+250x=750000$$

$$\text{या} \quad x^2+250x-750000=0$$

$$\text{या} \quad x^2+1000x-750x-750000=0$$

$$\text{या} \quad x(x+1000)-750(x+1000)=0$$

$$\text{या} \quad (x+1000)(x-750)=0$$

अब, यदि $x+1000=0 \Rightarrow x=-1000$ जो मान्य नहीं है।

तथा यदि $x-750=0 \Rightarrow x=750$

अतः विमान की चाल $=$ **750 किमी/घण्टा** **उत्तर**

30. एक नाव को, जिसकी शान्त जल में चाल 15 किमी/घण्टा है, धारा की दिशा में 30 किमी जाने और फिर धारा की विपरीत दिशा में लौटने में कुल समय 4 घण्टे 30 मिनट लगता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना धारा की चाल $=x$ किमी/घण्टा

तथा शान्त जल मे नाव की चाल $=15$ किमी/घण्टा

अतः धारा की दिशा में नाव की चाल $=(15+x)$ किमी/घण्टा

तथा धारा की विपरीत दिशा में नाव की चाल $=(15-x)$ किमी/घण्टा

एक दिशा में तय दूरी $=30$ किमी

धारा की दिशा में लगा समय $=\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}=\frac{30}{15+x}=T_1$

तथा धारा के विपरीत दिशा में लगा समय $=\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}=\frac{30}{15-x}=T_2$

प्रश्नानुसार, $T_1+T_2=4\frac{1}{2}$ घण्टा

$$\text{या} \quad \frac{30}{15+x}+\frac{30}{15-x}=\frac{9}{2} \quad \text{या} \quad 30\left(\frac{1}{15+x}+\frac{1}{15-x}\right)=\frac{9}{2}$$

$$\text{या} \quad 30\left(\frac{15-x+15+x}{15^2-x^2}\right)=\frac{9}{2} \quad \text{या} \quad \frac{30\times 30}{225-x^2}=\frac{9}{2}$$

$$\text{या} \quad \frac{10\times 10}{225-x^2}=\frac{1}{2} \quad \text{या} \quad 200=225-x^2$$

$$\text{या} \quad x^2+200-225=0 \quad \text{या} \quad x^2-25=0$$

या $x^2 = 25$ या $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

अतः $x = -5$ जो अमान्य है तथा $x = 5$ **किमी/घण्टा** **उत्तर**

31. एक व्यक्ति ने कुछ कपड़े ₹ 2,250 में खरीदे। यदि कपड़े का मूल्य ₹ 50 प्रति मीटर अधिक होता है तो वह 1.5 मीटर कम कपड़ा ही खरीद पाता। खरीदे गए कपड़े की माप व मूल्य प्रति मीटर ज्ञात कीजिए।

हल– माना कपड़े की माप $= x$ मीटर

तथा प्रति मीटर कपड़े का मूल्य = ₹ y

प्रश्नानुसार, $x \times y = 2250$ ...(1)

तथा $(x - 1.5) \times (y + 50) = 2250$

या $xy + 50x - 1.5y - 75.0 = 2250$

या $2250 + 50x - 1.5y - 75 = 2250$

या $50x - 1.5y = 75$ ...(2)

या $50x - 75 = 1.5y$

या $y = \dfrac{50x - 75}{1.5}$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{x(50x - 75)}{1.5} = 2250 \quad \text{या} \quad 50x^2 - 75x = 3375$$

या $2x^2 - 3x = 135$ या $2x^2 - 3x - 135 = 0$

या $2x^2 - 18x + 15x - 135 = 0$

या $2x(x - 9) + 15(x - 9) = 0$ या $(x - 9)(2x + 15) = 0$

अब, यदि $x - 9 = 0$ तो $x = 9$ **मीटर** समीकरण (1) में रखने पर,

$9 \times y = 2250$

या $y = \dfrac{2250}{9} = ₹250$ **प्रति मीटर** **उत्तर**

32. किसी व्यक्ति के पास कुछ रुपये थे। उसने आधे रुपये दान कर दिए। उसने 6 रुपये का जलपान कर लिया तथा 3 रुपये कहीं गिर गए। उसके पास कुल रुपये के वर्गमूल के चार गुना से 1 रुपया अधिक बचा। ज्ञात कीजिए कि उसके पास कितने रुपये थे?

हल– माना व्यक्ति के पास कुल x रुपये थे।

दान दिए गए $= \dfrac{x}{2}$ रुपये

जलपान में खर्च किए गए = 6 रुपये

कहीं गिर गए = 3 रुपए

शेष रुपये $= x - \left(\dfrac{x}{2} + 6 + 3\right)$

परन्तु प्रश्नानुसार, $x - \left(\dfrac{x}{2} + 6 + 3\right) = 4\sqrt{x} + 1$

या $x - \dfrac{x}{2} - 6 - 3 = 4\sqrt{x} + 1$

या $\dfrac{x}{2} - 9 - 1 = 4\sqrt{x}$ या $\dfrac{x}{2} - 10 = 4\sqrt{x}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(\frac{x}{2}-10\right)^2=(4\sqrt{x})^2$$

या $\frac{x^2}{4}+100-10x=16x$ या $\frac{x^2}{4}-10x-16x+100=0$

या $\frac{x^2}{4}-26x+100=0$ या $x^2-104x+400=0$

या $x^2-100x-4x+400=0$

या $x(x-100)-4(x-100)=0$

या $(x-100)(x-4)=0$

अब यदि $x-100=0 \Rightarrow x=100$

तथा $x-4=0 \Rightarrow x=4$ जो तथ्यों के अनुकूल न होने के कारण अमान्य है।

अतः **व्यक्ति के पास कुल 100 रुपये थे।** **उत्तर**

33. किसी दो अंकों की संख्या के अंकों का गुणनफल 12 है। संख्या में 36 जोड़ने पर संख्या के अंकों के स्थान बदल जाते हैं। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या xy है, जहाँ y इकाई का अंक तथा x दहाई का अंक है।

अतः संख्या का मान $=10x+y$

तथा अंकों के स्थान बदल जाने पर संख्या का मान $=10y+x$

प्रश्नानुसार, $x\times y=12$ ...(1)

तथा $10x+y+36=10y+x$

या $10x-x+y-10y+36=0$

या $9x-9y+36=0$ या $x-y+4=0$

या $y=x+4$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x\times(x+4)=12$ या $x^2+4x=12$

या $x^2+4x-12=0$ या $x^2+6x-2x-12=0$

या $x(x+6)-2(x+6)=0$ या $(x+6)(x-2)=0$

अब, यदि $x+6=0 \Rightarrow x=-6$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x-2=0 \Rightarrow x=2$ समीकरण (1) में रखने पर,

$2y=12 \Rightarrow y=6$

अतः **अभीष्ट संख्या $(xy)=26$ है।** **उत्तर**

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 69 व 70 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-2 वाणिज्यिक गणित
(Commercial Mathematics)

4

कराधान (Taxation)

अभ्यास 4.1

1. कर किसे कहते हैं?

उत्तर– सरकार द्वारा अपने बहुआयामी आर्थिक एवं आर्थिकेतर कार्यकलापों पर किए जाने वाले खर्चे के लिए नागरिकों के योगदान को कर कहते हैं।

2. कर कितने प्रकार के होते हैं?

उत्तर– कर सामान्य रूप से दो प्रकार के होते हैं—

1. प्रत्यक्ष कर—प्रत्यक्ष कर के अन्तर्गत आयकर, सम्पत्ति कर, उपहार कर आदि आते हैं।

2. अप्रत्यक्ष कर—अप्रत्यक्ष कर के अन्तर्गत बिक्री कर, उत्पाद शुल्क एवं सीमा शुल्क आदि आते हैं।

3. सम्पत्ति कर क्या है?

उत्तर– किसी व्यक्ति की सभी परिसम्पत्तियों अर्थात् सम्पत्ति एवं धन पर लगाया गया कर सम्पत्ति कर कहलाता है।

4. प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष कर को संक्षेप में समझाइए।

उत्तर– प्रत्यक्ष कर—सरकार द्वारा किसी व्यक्ति अथवा व्यक्ति-समूह पर लगाया गया ऐसा कर, जो उसे सीधा प्रभावित करता है, प्रत्यक्ष कर कहलाता है। जैसे—आयकर, सम्पत्ति कर एवं उपहार कर आदि प्रत्यक्ष कर हैं।

अप्रत्यक्ष कर—सरकार द्वारा किसी व्यक्ति अथवा व्यक्ति-समूह पर लगाया गया ऐसा कर जो उसे सीधा प्रभावित नहीं करता है, अप्रत्यक्ष कर कहलाता है। जैसे—बिक्रीकर, उत्पाद शुल्क, सीमा शुल्क आदि अप्रत्यक्ष कर हैं।

5. सीमा शुल्क क्या है?

उत्तर– विदेशों से आयातित वस्तुओं पर सरकार द्वारा लगाया गया कर, सीमा शुल्क कहलाता है।

6. वित्तीय वर्ष 2013-14 में *P* की कुल वार्षिक आय ₹ 5,96,600 थी। वह भविष्य निधि खाते में ₹ 15,000 प्रतिमाह जमा करता था तथा उसने ₹ 15,000 वार्षिक अपने जीवन बीमा पॉलिसी का प्रीमियम दिया था। यदि ₹ 2,00,000 तक कोई आयकर नहीं तथा ₹ 2,00,000 से अधिक आय पर 10% की दर से आयकर देय हो तथा आयकर में छूट सभी बचतों का 100% अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 हो तो उसके देय आयकर की गणना कीजिए।

हल– *P* की कुल वार्षिक आय = ₹ 5,96,600

भविष्य निधि बचत = ₹ 15,000 × 12 = ₹ 1,80,000

जीवन बीमा बचत = ₹ 15,000

कुल बचत = ₹ (1,80,000 + 15,000)

= ₹ 1,95,000 > 1,00,000

∵ अधिकतम ₹ 1,00,000 तक बचत पर आयकर में छूट = 100%

∴ कर योग्य आय = 5,96,600 − 1,00,000 = ₹ 4,96,600

कर मुक्त सीमा = ₹ 2,00,000

कर की दर = 10%

अतः देय आयकर = (4,96,600 − 2,00,000) × 10%

$= \frac{2,96,600 \times 10}{100}$ = ₹ 29,660 उत्तर

7. वित्तीय वर्ष 2014-2015 में किसी अधिकारी की वार्षिक आय ₹ 6,25,000 थी। उन्होंने ₹ 50,000 अपनी जीवन बीमा पॉलिसी का वार्षिक प्रीमियम जमा किया तथा ₹ 15,000 प्रतिमाह भविष्य निधि में जमा किए। उस अधिकारी के देय आयकर की गणना कीजिए। आयकर की दरें निम्नवत हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 2,50,000 तक	कोई कर नहीं
(ii) ₹ 2,50,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 2,50,000 से अधिक राशि का 10%
(iii) ₹ 5,00,001 से ₹ 10,00,000 तक	₹ 25,000 + ₹ 5,00,000 से अधिक राशि का 20%

आयकर में छूट : समस्त बचत का 100% अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000।

हल– अधिकारी की कुल वार्षिक आय = ₹ 6,25,000

जीवन बीमा बचत = ₹ 50,000

भविष्य निधि बचत = ₹ 15,000 × 12 = ₹ 1,80,000

अतः कुल बचत = ₹ (50,000 + 1,80,000) = ₹ 2,30,000 > 1,00,000

∵ आयकर में छूट = कुल बचत का 100% अधिकतम सीमा = ₹ 1,00,000

∴ कर योग्य आय = ₹ (6,25,000 − 1,00,000) = ₹ 5,25,000

∵ कर योग्य आय 5,00,001 से 10,00,000 के मध्य है।

∴ देय आयकर = ₹ 25,000 + 5,00,000 से अधिक की राशि का 20%

= ₹ 25,000 + ₹ (5,25,000 − 5,00,000) × 20%

$= ₹\left(25,000 + 25,000 \times \frac{20}{100}\right)$

= ₹ (25,000 + 5,000) = ₹ 30,000 उत्तर

8. वित्तीय वर्ष 2013-2014 में वैभव की वार्षिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) ₹ 5,80,000 थी। उसने ₹ 45,000 अपने सामान्य भविष्य निधि खाते में जमा किया तथा ₹ 12,500 की अर्द्धवार्षिक प्रीमियम एल० आई० सी० में देता था। उसने ₹ 30,000 इन्फ्रास्ट्रक्चर में भी जमा किए। वैभव के वेतन से वित्तीय वर्ष के अन्तिम माह में भुगतान

किए जाने वाले आयकर की गणना कीजिए। यदि वह वर्ष के प्रथम 11 माह में ₹ 1,600 प्रतिमाह आयकर देता रहा हो। आयकर गणना हेतु निम्नलिखित दरों का प्रयोग कीजिए।

(a) आयकर की दरें निम्नवत हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 2,00,000 तक	कोई कर नहीं
(ii) ₹ 2,00,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 2,00,000 से अधिक आय राशि का 10%
(iii) ₹ 5,00,001 से ₹ 10,00,000 तक	₹ 30,000 + ₹ 5,00,000 से अधिक आय राशि का 20%
(iv) ₹ 10,00,001 से अधिक	₹ 1,30,000 + ₹ 10,00,000 से अधिक आय राशि का 30%

(b) छूट : ₹ 1,00,000 तक की बचत कर से मुक्त है।

(c) अधिकार : देय कर का 10% यदि कर योग्य आय ₹ 10,00,000 से अधिक है।

(d) शिक्षा उपकर : देय कर का 2%

हल– वैभव की वार्षिक आय = ₹ 5,80,000

सामान्य भविष्य निधि बचत = ₹ 45,000

एल० आई० सी० बचत = ₹ 2 × 12,500 = ₹ 25,000

इन्फ्रास्ट्रक्चर बचत = ₹ 30,000

अत: कुल बचत = (45,000 + 25,000 + 30,000) = ₹ 1,00,000

∴ आयकर में छूट = ₹ 1,00,000 तक की बचत पर 100% = ₹ 1,00,000

∵ कर योग्य आय = 5,80,000 – 1,00,000 = ₹ 4,80,000

∴ कर योग्य आय ₹ 2,00,001 से 5,00,000 के मध्य है।

∴ आयकर = 2,00,000 से अधिक राशि का 10%

$= (4,80,000 - 2,00,000) \times 10\%$

$= 2,80,000 \times 10\%$

$= \frac{2,80,000 \times 10}{100} = ₹\ 28,000$

शिक्षा उपकर = आयकर का 2%

$= \frac{28,000 \times 2}{100} = ₹\ 560$

अत: शुद्ध देयकर आयकर = ₹ (28,000 + 560) = ₹ 28,560

प्रथम 11 माह में ₹ 1,600 प्रतिमाह की दर से जमा आयकर = 11 × 1,600 = ₹ 17,600

अत: वर्ष के अन्तिम माह में भुगतान किए जाने वाला कर = ₹ (28,560 – 17,600)

= ₹ 10,960 **उत्तर**

9. एक वित्तीय वर्ष में *X* की वार्षिक आय ₹ 3,95,000 है। वह अपने सामान्य भविष्य निधि खाते में ₹ 4,000 प्रतिमाह जमा करता है। वह ₹ 60,000 का राष्ट्रीय बचत-पत्र भी खरीदता है। *X* द्वारा देय आयकर ज्ञात कीजिए, जबकि बचत पर छूट की अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 है।

आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,50,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,50,001 से ₹ 3,00,000 तक	**₹ 1,50,000 से ऊपर की धनराशि का 10%**

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% शिक्षा अधिभार भी लगता है।

हल– X की कुल वार्षिक आय = ₹ 3,95,000

भविष्य निधि बचत = $12 \times 4,000$ = ₹ 48,000

राष्ट्रीय बचत पत्र = ₹ 60,000

अत: कुल बचत = ₹ (48,000 + 60,000) = ₹ 1,08,000 > ₹ 1,00,000

आयकर में छूट = ₹ 1,00,000

अत: कर योग्य आय = ₹ (3,95,000 – 1,00,000) = ₹ 2,95,000

आयकर की दी गई दरों के अनुसार,

$$\text{आयकर} = 1,50,000 \text{ से अधिक आय का } 10\%$$

$$= ₹ (2,95,000 - 1,50,000) \times \frac{10}{100}$$

$$= ₹ \left(1,45,000 \times \frac{10}{100} \right)$$

$$= ₹ \frac{1,45,000 \times 10}{100} = ₹ 14,500$$

तथा शिक्षा अधिभार = आयकर का 3% $= \frac{14,500 \times 3}{100} =$ ₹ 435

अत: शुद्ध देय आयकर = ₹ (14,500 + 435) = ₹ **14,935** **उत्तर**

10. एक वित्तीय वर्ष में सोनू की मासिक आय ₹ 32,000 थी। उन्होंने ₹ 25,000 अपनी जीवन बीमा पॉलिसी का प्रीमियम तथा ₹ 6,000 प्रतिमाह भविष्य निधि में जमा किया। सोनू के देय आयकर की गणना कीजिए, जबकि बचत पर छूट की अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 है।

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,60,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,60,001 से ₹ 3,00,000 तक	**₹ 1,60,000 से ऊपर की धनराशि का 10%**

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% शिक्षा अधिभार भी लगता है।

हल– सोनू की वार्षिक आय = $12 \times 32,000$ = ₹ 3,84,000

जीवन बीमा बचत = ₹ 25,000

भविष्य निधि बचत = $12 \times 6,000$ = ₹ 72,000

अत: कुल बचत = ₹ (25,000 + 72,000) = ₹ 97,000

आयकर में छूट = ₹ 97,000

कर योग्य आय = ₹ (3,84,000 – 97,000) = ₹ 2,87,000

आयकर की दरों के अनुसार,

देय आयकर = 1,60,000 से ऊपर की धनराशि आय का 10%

= ₹ (2,87,000 − 1,60,000) × 10%

$= ₹\left(1,27,000 \times \frac{10}{100}\right) = ₹ 12,700$

शिक्षा उपकर = आयकर का 3% $= \frac{12,700 \times 3}{100} = ₹ 381$

अतः शुद्ध देय आयकर = ₹ 12,700 + 381 = ₹ **13,081** **उत्तर**

11. श्री *A* एक वरिष्ठ नागरिक है। एक वित्तीय वर्ष में उनकी कुल आय ₹ 8,50,000 थी। उस वर्ष उन्होंने ₹ 1,00,000 का एन० एस० सी० खरीदा और ₹ 70,000 प्रधानमंत्री राहत कोष में जमा कराए। ₹ 50,000 एक शैक्षिक संस्था को भी दान दिया, जिस पर उन्हें आयकर में 50% की छूट मिली। ज्ञात कीजिए कि कितना आयकर उन्हें जमा करना होगा, यदि आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,85,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,85,001 से ₹ 2,25,000 तक	**₹ 1,85,000 से ऊपर की धनराशि का 20%**
(iii) ₹ 2,50,001 से ऊपर	**₹ 13,000 + ₹ 2,50,000 से ऊपर की धनराशि का 30%**

कुल आयकर पर 2% शिक्षा उपकर भी देय है।

हल– श्री *A* की कुल वार्षिक आय = ₹ 8,50,000

बचत : एन० एस० सी० = ₹ 1,00,000

प्रधानमंत्री राहत कोष = ₹ 70,000

अतः कुल बचत = ₹ 1,00,000 + ₹ 70,000 = ₹ 1,70,000

शैक्षिक संस्था को दिया गया दान = ₹ 50,000

दान पर छूट = दान का 50%

$= ₹\frac{50,000 \times 50}{100} = ₹ 25,000$

कुल छूट = ₹ (1,70,000 + 25,000) = ₹ 1,95,000

कर योग्य आय = ₹ (8,50,000 − 1,95,000) = ₹ 6,55,000

चूँकि कर योग्य आय 2,50,001 से ऊपर है।

अतः देय आयकर = ₹ 13,000 + (6,55,000 − 2,50,000) का 30%

$= ₹\left(13,000 + 4,05,000 \times \frac{30}{100}\right)$

= ₹ (13,000 + 1,21,500) = ₹ 1,34,500

शिक्षा उपकर = देय आयकर का 2%

$= ₹\frac{1,34,500 \times 2}{100} = ₹ 2,690$

अतः शुद्ध देय आयकर = ₹ (1,34,500 + 2,690) = ₹ **1,37,190** **उत्तर**

12. एक महाविद्यालय के प्राचार्य का एक वित्तीय वर्ष में ₹ 45,000 वेतन था। उन्होंने ₹ 7,000 का प्रतिमाह एक अंशदान भविष्य निधि में जमा किया तथा ₹ 9,225 वार्षिक जीवन बीमा प्रीमियम का भुगतान किया। उन्होंने ₹ 10,000 का राष्ट्रीय बचत-पत्र भी खरीदा। आयकर से छूट के लिए स्वीकार्य अधिकतम धनराशि ₹ 1,00,000 है।

आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,50,000 तक	शून्य
(ii) ₹ 1,50,001 से ₹ 2,50,000 तक	₹ 1,50,000 से अधिक धनराशि का 10%
(iii) ₹ 2,50,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 10,000 + ₹ 2,50,000 से अधिक धनराशि का 20%
(iv) ₹ 5,00,000 से ऊपर	₹ 60,000 + ₹ 5,00,000 से अधिक धनराशि का 30%

देय आयकर पर 2% शिक्षा उपकर भी लगता है। प्राचार्य के आयकर की कुल धनराशि की गणना कीजिए।

हल– प्राचार्य की कुल वार्षिक आय $= 12 \times 45{,}000 = ₹ 5{,}40{,}000$

बचत : भविष्य निधि $= 12 \times 7{,}000 = ₹ 84{,}000$

जीवन बीमा $= ₹ 9{,}225$

राष्ट्रीय बचत-पत्र $= ₹ 10{,}000$

कुल बचत $= ₹ (84{,}000 + 9{,}225 + 10{,}000)$

$= ₹ 1{,}03{,}225 > ₹ 1{,}00{,}000$

अतः आयकर में छूट $= ₹ 1{,}00{,}000$

कर योग्य आय $= 5{,}40{,}000 - 1{,}00{,}000 = ₹ 4{,}40{,}000$

जो कि ₹ 2,50,001 से 5,00,000 के मध्य है।

अतः देय आयकर $= ₹ 10{,}000 + ₹ (4{,}40{,}000 - 2{,}50{,}000)$ का 20%

$= ₹ 10{,}000 + ₹ \frac{1{,}90{,}000 \times 20}{100}$

$= ₹ 10{,}000 + ₹ 38{,}000 = ₹ 48{,}000$

शिक्षा उपकर = देय आयकर का 2%

$= ₹ \frac{48{,}000 \times 2}{100} = ₹ 960$

अतः शुद्ध देय आयकर $= ₹ 48{,}000 + ₹ 960 = ₹ 48{,}960$ **उत्तर**

13. एक व्यक्ति राजकीय अधिकारी है, जिसको वित्तीय वर्ष 2008-09 में कुल ₹ 4,30,500 वेतन भुगतान हुआ तथा उन्होंने विशिष्ट निवेशों से ₹ 50,000 ब्याज प्राप्त किए। उन्होंने इसी अवधि में निम्नलिखित मदों में धन निवेश किए—

जी०पी०एफ०	**₹ 30,000**
पी०पी०एफ०	**₹ 16,000**
पंचवर्षीय डाकघर सावधि जमा	**₹ 50,000**

उपर्युक्त के अतिरिक्त ₹ 20,000 राष्ट्रीय सुरक्षा कोष तथा ₹ 10,000 प्रधानमंत्री राष्ट्रीय कोष में अनुदान दिए। उनके द्वारा देय आयकर की गणना कीजिए। आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,50,000 तक	शून्य
(ii) ₹ 1,50,001 से ₹ 1,80,000 तक	₹ 1,50,000 से अधिक धनराशि का 10%
(iii) ₹ 1,80,001 से ₹ 2,25,000 तक	₹ 3,000 + ₹ 1,80,000 से ऊपर की धनराशि का 10%
(iv) ₹ 2,25,001 से ₹ 3,00,000 तक	₹ 7,500 + ₹ 2,25,000 से ऊपर की धनराशि का 10%
(iv) ₹ 3,00,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 15,000 + ₹ 3,00,000 से ऊपर की धनराशि का 20%

उपर्युक्त के अतिरिक्त निम्नलिखित कर देय है—

शिक्षा उपकर देयकर का 2%

माध्यमिक तथा उच्चतर शिक्षा के लिए उपकर देय कर का 1%

हल– राजकीय अधिकारी का वार्षिक वेतन = ₹ 4,30,500

विशिष्ट निवेशों से प्राप्त ब्याज = ₹ 50,000

अतः अधिकारी की वार्षिक आय = ₹ 4,30,500 + ₹ 50,000 = ₹ 4,80,500

बचत : जी०पी०एफ० = ₹ 30,000

पी०पी०एफ० = ₹ 16,000

पंचवर्षीय डाकघर सावधि जमा = ₹ 50,000

राष्ट्रीय सुरक्षा कोष = ₹ 20,000

तथा प्रधानमंत्री राहत कोष = ₹ 10,000

कुल बचत = ₹ 1,26,000

अतः आयकर में कुल छूट = ₹ 1,26,000

कर योग्य आय = ₹ (4,80,500 – 1,26,000) = ₹ 3,54,500

जो कि ₹ 3,00,001 से 5,00,000 के मध्य है।

अतः देय आयकर = ₹ 15,000 + ₹ (3,54,500 – 3,00,000) का 20%

$$= ₹\,15,000 + ₹\,\frac{54,500 \times 20}{100}$$

$$= ₹\,(15,000 + 10,900) = ₹\,25,900$$

शिक्षा उपकर = देय आयकर का 2%

$$= ₹\,\frac{25,900 \times 2}{100} = ₹\,518$$

तथा उच्च शिक्षा के लिए उपकर = आयकर का 1%

$$= ₹\,\frac{25,900 \times 1}{100} = ₹\,259$$

अतः शुद्ध देय आयकर = ₹ (25,900 + 518 + 259) = ₹ **26,677** **उत्तर**

14. किसी व्यक्ति की प्रतिमाह आय ₹ 45,000 है। उसने प्रधानमंत्री राहत कोष में ₹ 60,000 जमा किया, जिस पर आयकर में 100% की छूट है। किसी मन्दिर में ₹ 10,000 दान किया जिस पर आयकर में 50% की छूट है, भविष्य निधि खाते में ₹ 7,500 प्रतिमाह, ₹ 12,000 वार्षिक जीवन बीमा में तथा ₹ 30,000 का राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदता है। उस वित्तीय वर्ष में उसके द्वारा दिया गया आयकर ज्ञात कीजिए।

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,60,000 तक	कर मुक्त
(ii) ₹ 1,60,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 1,60,000 से ऊपर की धनराशि का 10%
(iii) ₹ 5,00,001 से ₹ 8,00,000 तक	₹ 34,000 + ₹ 5,00,000 से ऊपर आय का 20%
(iv) ₹ 2,25,001 से ₹ 3,00,000 तक	₹ 7,500 + ₹ 2,25,000 से ऊपर की धनराशि का 10%
(iv) ₹ अतिरिक्त शिक्षा अधिभार	आयकर का 3%

हल– व्यक्ति की वार्षिक आय $= 12 \times 45,000 =$ ₹ 5,40,000

बचत : भविष्य निधि $= 12 \times 7,500 =$ ₹ 90,000

जीवन बीमा = ₹ 12,000

राष्ट्रीय बचत-पत्र = ₹ 30,000

कुल बचत = ₹ (90,000 + 12,000 + 30,000)

= ₹ 1,32,000 > ₹ 1,00,000

परन्तु बचत पर अधिकतम छूट = ₹ 1,00,000

प्रधानमंत्री राहत कोष में जमा राशि = ₹ 60,000, जिस पर 100% छूट है

मन्दिर में दान दिया = ₹ 10,000

दान पर छूट = दान का 50%

$= ₹ \left(10,000 \times \frac{50}{100}\right) =$ ₹ 5,000

अतः कुल छूट = ₹ (1,00,000 + 60,000 + 5,000)

= ₹ 1,65,000

अतः कर योग्य आय = ₹ (5,40,000 – 1,65,000) = ₹ 3,75,000

जो कि ₹ 1,60,001 से ₹ 5,00,000 के मध्य है।

अतः देय आयकर = ₹ (3,75,000 – 1,60,000) का 10%

$= ₹ 2,15,000 \times \frac{10}{100} =$ ₹ 21,500

अतिरिक्त शिक्षा अधिभार = देय आयकर का 3%

$= ₹ 21,500 \times \frac{3}{100} =$ ₹ 645

अतः शुद्ध आयकर = ₹ (21,500 + 645) = ₹ **22,145** **उत्तर**

15. वित्तीय वर्ष 2012-13 में *A* की सकल आय ₹ 4,80,000 थी। वह ₹ 7,000 प्रतिमाह अपने सामान्य भविष्य निधि खाते में जमा करता है। व ₹ 50,000 के राष्ट्रीय बचत-पत्र

खरीदता है। उसके द्वारा वित्तीय वर्ष के अन्त में दिए जाने वाले आयकर को ज्ञात कीजिए। आयकर में छूट समस्त बचतों का 100% जिसकी अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 है।

आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,90,000 तक	शून्य
(ii) ₹ 1,90,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 1,90,000 से अधिक धनराशि का 10%

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% शिक्षा उपकर लगाया गया है।

हल– A की सकल आय = ₹ 4,80,000

बचत : भविष्य निधि = 12× 7,000 = ₹ 84,000

राष्ट्रीय बचत-पत्र = ₹ 50,000

अत: कुल बचत = ₹ 84,000 + ₹ 50,000

= ₹ 1,34,000 > ₹ 1,00,000

अत: कुल छूट = ₹ 1,00,000

कर योग्य आय = ₹ 4,80,000 – 1,00,000 = ₹ 3,80,000

आयकर की दरों के अनुसार,

आयकर = ₹ (3,80,000 – 1,90,000) का 10%

$= ₹ 1,90,000 \times \frac{10}{100} = ₹ 19,000$

शिक्षा उपकर = आयकर का 3%

$= 19,000 \times \frac{3}{100} = ₹ 570$

शुद्ध देय आयकर = ₹ (19,000 + 570) = ₹ 19,570 उत्तर

16. रवि जैन की मासिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) ₹ 90,000 है। वह ₹ 72,000 अपने भविष्य निधि खाते में जमा करता है तथा ₹ 24,000 अर्द्धवार्षिक प्रीमियम एल०आई०सी० में देता है। यदि वह वर्ष के प्रथम 11 माह के लिए ₹ 10,000 प्रतिमाह आयकर देता है तो वित्तीय वर्ष के अन्तिम माह में उसके द्वारा भुगतान किए जाने वाले आयकर को ज्ञात कीजिए।

आयकर में छूट : समस्त बचतों का 100% जिसकी अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 है।

आयकर की दरें निम्नलिखित हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 2,00,000 तक	शून्य
(ii) ₹ 2,00,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 2,00,000 से अधिक धनराशि का 10%
(iii) ₹ 5,00,001 से ₹ 8,00,000 तक	₹ 30,000 + ₹ 5,00,000 से अधिक धनराशि का 20%
(iv) ₹ 8,00,000 से अधिक	₹ 90,000 + ₹ 8,00,000 से अधिक धनराशि का 30%

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% अधिभार भी लगता है।

हल– रवि जैन की वार्षिक आय = 12× 90,000 = ₹ 10,80,000

बचत : भविष्य निधि = ₹ 72,000

एल०आई०सी० = 2× 24,000 = ₹ 48,000

कुल बचत = ₹ 72,000 + 48,000

= ₹ 1,20,000 > 1,00,000

आयकर में छूट = ₹ 1,00,000

अत: कर योग्य आय = ₹ (10,80,000 – 1,00,000) = ₹ 9,80,000

जो कि ₹ 8,00,000 से अधिक है।

अत: आयकर = ₹ 90,000 + ₹ (9,80,000 – 8,00,000) का 30%

$= ₹\ 90,000 + ₹\frac{1,80,000 \times 30}{100}$

= ₹ (90,000 + 54,000) = ₹ 1,44,000

शिक्षा उपकर = आयकर का 3%

$= ₹\frac{1,44,000 \times 3}{100} = ₹\ 4,320$

अत: कुल आयकर = ₹ (1,44,000 + 4,320) = ₹ 1,48,320

11 माह तक चुकाया गया आयकर = 11× 10,000 = ₹ 1,10,000

अत: वर्ष के अन्तिम माह में रवि जैन द्वारा भुगतान किया जाने वाला आयकर

= ₹ (1,48,320 – 1,10,000) = ₹ **38,320** **उत्तर**

17. किसी वित्तीय वर्ष में किसी कर्मचारी की सकल वार्षिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) ₹ 4,65,000 है। वह प्रतिमाह ₹ 4,500 अपने भविष्य निधि खाते तथा ₹ 25,000 वार्षिक जीवन बीमा प्रीमियम जमा करता है। वह ₹ 30,000 के राष्ट्रीय बचत बचत-पत्र खरीदता है। प्रधानमंत्री राहत कोष (जो 100% कर मुक्त है) में ₹ 18,000 तथा चैरिटेबल ट्रस्ट में ₹ 12,000 (जिसका 50% कर मुक्त है) दान करता है। उसके द्वारा वर्ष के अन्त में देय आयकर ज्ञात कीजिए। (बचतें ₹ 1,00,000 तक कर मुक्त है) आयकर की दरें निम्नवत् हैं।

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,60,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,60,001 से ₹ 5,00,000 तक	**₹ 1,60,000 से अधिक धनराशि का 10%**
(iii) शिक्षा उपकर	**देयकर का 3%**

हल– कर्मचारी की सकल वार्षिक आय = ₹ 4,65,000

बचत : भविष्य निधि = 12× 45,00 = ₹ 54,000

जीवन बीमा = ₹ 25,000

राष्ट्रीय बचत-पत्र = ₹ 30,000

अत: कुल बचत = ₹ 54,000 + 25,000 + 30,000

= ₹ 1,09,000 > 1,00,000

अत: कुल बचत पर छूट = ₹ 1,00,000

प्रधानमंत्री राहत कोष में जमा राशि = ₹ 18,000 (जो 100% कर मुक्त है)

चैरिटेबल ट्रस्ट में दान = ₹ 12,000

दान पर छूट = ₹ 12,000 का 50%

$= ₹ \frac{12,000 \times 50}{100} = ₹ 6,000$

अतः कुल कर मुक्त धनराशि = ₹ (1,00,000 + 18,000 + 6,000)

= ₹ 1,24,000

अतः कर योग्य आय = ₹ (4,65,000 – 1,24,000) = ₹ 3,41,000

अब आयकर की दरों के अनुसार,

आयकर = ₹ (3,41,000 – 1,60,000) का 10%

$= ₹ 1,81,000 \times \frac{10}{100} = ₹ 18,100$

शिक्षा उपकर = आयकर का 3%

$= ₹ \frac{18,100 \times 3}{100} = ₹ 543$

अतः शुद्ध देय आयकर = ₹ 18,100 + 543 = ₹ **18,643** उत्तर

18. वित्तीय वर्ष 2009-10 में (गृह किराया भत्ता छोड़कर) किसी व्यक्ति की वार्षिक आय ₹ 2.85,400 है। वह ₹ 36,000 भविष्य निधि में, ₹ 8,000 जीवन बीमा निगम में और ₹ 10,000 राष्ट्रीय बचत योजना में लगाता है। उसको वार्षिक देय आयकर पर 3% शिक्षा कर भी देना पड़ेगा। यदि वह ₹ 600 प्रतिमाह आयकर 11 माह तक जमा करता है, तो ज्ञात कीजिए कि अन्तिम माह में उसे कितना आयकर जमा करना होगा। आयकर गणना करने के पहले ज्ञातव्य है कि निम्नलिखित योजनाओं में लगाई गई धनराशि अधिकतम ₹ 1,00,000 कर मुक्त है। (i) भविष्य निधि, (ii) जीवन बीमा राशि, (iii) राष्ट्रीय बचत पत्र में नियोजित राशि।

आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	**आयकर**
(i) ₹ 1,50,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,50,001 से ₹ 3,00,000 तक	**₹ 1,50,000 से अधिक धनराशि का 10%**

हल– व्यक्ति की वार्षिक आय = ₹ 2,85,400

बचत : भविष्य निधि = ₹ 36,000

जीवन बीमा = ₹ 8,000

राष्ट्रीय बचत योजना = ₹ 10,000

अतः कुल बचत = ₹ (36,000 + 8,000 + 10,000) = ₹ 54,000

बचतों पर अधिकतम छूट = ₹ 1,00,000

अतः कुल छूट = ₹ 54,000

कर योग्य आय = ₹ (2,85,400 – 54,000) = ₹ 2,31,400

आयकर की दरों के अनुसार,

आयकर = ₹ (2,31,400 – 1,50,000) का 10%

$$= 81{,}400 \times \frac{10}{100} = ₹\ 8{,}140$$

शिक्षा कर = आयकर का 3%

$$= \frac{8{,}140 \times 3}{100} = ₹\ 244.2 = ₹\ 244$$

अतः शुद्ध देय आयकर $= ₹\ (8{,}140 + 244) = ₹\ 8{,}384$

₹ 600 प्रतिमाह की दर से 11 माह में जमा आयकर $= 600 \times 11 = ₹\ 6{,}600$

अतः वर्ष के अन्तिम माह में व्यक्ति द्वारा देय आयकर

$= ₹\ 8{,}384 - 6600 = ₹\ \mathbf{1{,}784}$ **उत्तर**

अभ्यास 4.2

1. रामू ने एक मोटर साइकिल ₹ 49,500 में खरीदी (बिक्रीकर सहित) यदि बिक्रीकर की दर 10% हो, तो मोटर साइकिल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

मोटर साइकिल का विक्रय मूल्य = ₹ 49,500

तथा बिक्री कर की दर = 10%

माना मोटर साइकिल का मूल्य = x

$$\text{बिक्री कर की राशि} = \frac{\text{मूल्य} \times \text{बिक्रीकर की दर}}{100}$$

$$= \frac{x \times 10}{100} = \frac{x}{10}$$

विक्रय मूल्य = मूल्य + बिक्रीकर

$$49{,}500 = x + \frac{x}{10} \quad \text{या} \quad 49{,}500 = \frac{10x + x}{10}$$

या $$49{,}500 = \frac{11x}{10}$$

या $$x = \frac{49{,}500 \times 10}{11}$$

$= 4500 \times 10 = ₹\ \mathbf{45{,}000}$ **उत्तर**

2. यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य ₹ 120 है तथा उसकी बिक्रीकर की दर 12.5% है, तो वस्तु का विक्रय मूल्य परिकलित कीजिए।

हल– दिया है—

वस्तु का अंकित मूल्य = ₹ 120

बिक्रीकर की दर = 12.5%

$$\text{बिक्रीकर} = \frac{\text{अंकित मूल्य} \times \text{बिक्रीकर की दर}}{100}$$

$$= \frac{120 \times 12.5}{100} = \frac{1500}{100} = ₹\ 15$$

विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य + बिक्रीकर

$= ₹\ (120 + 15) = ₹\ \mathbf{135}$ **उत्तर**

3. एक रेडियो का मूल्य ₹ 1308 है तथा उस पर बिक्रीकर की दर 9% है। ग्राहक ने दुकानदार से रेडियो का मूल्य इतना कम करने के लिए कहा जिससे उसे ₹ 1308 (बिक्रीकर सहित) ही देने पड़े तो रेडियो के मूल्य में आवश्यक कमी गणना कीजिए।

हल– माना रेडियो के मूल्य में कमी करने पर मूल्य = ₹ x

$$\text{बिक्रीकर} = \frac{\text{मूल्य} \times \text{बिक्रीकर की दर}}{100}$$

$$= \frac{x \times 9}{100} = ₹ \frac{9x}{100}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} + \text{बिक्रीकर}$$

$$1308 = x + \frac{9x}{100} \quad \text{या} \quad 1308 = \frac{100x + 9x}{100}$$

या $$1308 = \frac{109x}{100}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1308 \times 100}{109} = 12 \times 100 = ₹\ 1200$$

अत: रेडियो के मूल्य में कमी = ₹ (1308 – 1200) = ₹ **108** **उत्तर**

4. एक टी०वी० का बिक्रीकर सहित मूल्य ₹ 13,440 है। यदि उसका अंकित मूल्य ₹ 12,000 है, तो बिक्रीकर की दर ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

टी०वी० का विक्रय मूल्य = ₹ 13,440

टी०वी० का अंकित मूल्य = ₹ 12,000

अत: $$\text{बिक्रीकर} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{अंकित मूल्य}$$

$$= 13,440 - 12,000 = ₹\ 1,440$$

$$\text{बिक्री कर की दर} = \frac{\text{बिक्रीकर} \times 100\%}{\text{अंकित मूल्य}}$$

$$= \frac{1,440 \times 100}{12,000} = \mathbf{12\%}$$ **उत्तर**

5. एक वस्तु का अंकित मूल्य ₹ 16,000 है, जिस पर 12.5% की छूट मिलती है। यदि बिक्रीकर की दर 8% हो, तो वस्तु को खरीदने के लिए देय कुल धनराशि की गणना कीजिए।

हल– दिया है—

वस्तु का अंकित मूल्य = ₹ 16,000

अंकित मूल्य पर छूट की दर = 12.5% तथा बिक्रीकर की दर = 8%

अत: छूट = 16,000 का 12.5%

$$= \frac{16,000 \times 12.5}{100} = ₹\ 2,000$$

अत: वस्तु का विक्रय मूल्य = 16,000 – 2,000 = ₹ 14,000

$$\text{बिक्रीकर} = \frac{\text{विक्रय मूल्य} \times \text{बिक्रीकर की दर}}{100}$$

$$= \frac{14,000 \times 8}{100} = ₹\ 1,120$$

अत: टी०वी० खरीदने के लिए देय राशि = 14,000 + 1,120 = ₹ **15,120** **उत्तर**

6. मोहन ने एक ग्राइंड मिक्सर खरीदा, जिसका अंकित मूल्य ₹ 2,568 है। यदि मोहन को 7% बिक्रीकर सहित ₹ 2,568 ही देने पड़े, तो ग्राइंड मिक्सर का मूल्य कितना कम करना होगा?

हल– माना मिक्सर का मूल्य कम करने पर मूल्य = ₹ x

दिया है— बिक्रीकर की दर = 7%

तथा बिक्रीकर सहित (विक्रय) मूल्य = ₹ 2,568

$$\text{बिक्रीकर} = x \text{ का } 7\% = \frac{x \times 7}{100} = ₹\frac{7x}{100}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{मूल्य} + \text{बिक्रीकर}$$

या $$2{,}568 = x + \frac{7x}{100}$$

या $$2{,}568 = \frac{107x}{100} \Rightarrow x = \frac{2{,}568 \times 100}{107} = ₹ 2{,}400$$

अत: ग्राइंड मिक्सर के मूल्य में कमी = 2,568 – 2,400 = **₹ 168** **उत्तर**

7. एक व्यक्ति किसी वाशिंग मीशन को बिक्रीकर सहित ₹ 6,510 में खरीदता है। यदि बिक्रीकर की दर 5% हो, तो वाशिंग मशीन का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल– माना वाशिंग मशीन का अंकित मूल्य = ₹ x है।

दिया है— बिक्री कर की दर = 5%

तथा बिक्रीकर सहित वाशिंग मशीन का मूल्य = ₹ 6,510

$$\text{बिक्रीकर} = x \text{ का } 5\% = \frac{x \times 5}{100} = ₹\frac{5x}{100}$$

$$\text{अंकित मूल्य} + \text{बिक्री कर} = \text{बिक्रीकर सहित मूल्य}$$

या $$x + \frac{x}{20} = 6{,}510 \quad \text{या} \quad \frac{20x + x}{20} = 6{,}510$$

या $$\frac{21x}{20} = 6{,}510$$

या $$x = \frac{6{,}510 \times 20}{21} = 310 \times 20 = ₹ 6{,}200$$ **उत्तर**

8. रहमान ₹ 5,500 कीमत की वस्तु को 5% छूट में खरीदता है। 5% की दर से बिक्रीकर देने पर रहमान को वस्तु के कितने रुपये देने पड़ेंगे।

हल– दिया है— वस्तु का अंकित मूल्य = ₹ 5,500

छूट की दर = 5%

अत: वस्तु पर छूट = 5,500 का 5%

$$= \frac{5{,}500 \times 5}{100} = ₹ 275$$

छूट के बाद वस्तु का विक्रय मूल्य = 5,500 – 275 = ₹ 5,225

अब, विक्रय मूल्य पर बिक्रीकर की दर = 5%

अत: बिक्रीकर = 5,225 का 5%

$$= \frac{5{,}225 \times 5}{100} = ₹ 26125$$

अत: वस्तु को खरीदने के लिए देय राशि = 5,225 + 26125 = **₹ 5,486.25** **उत्तर**

9. 8% व्यापार कर सहित एक वस्तु का विक्रय मूल्य ₹ 810 है। वस्तु का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल– माना वस्तु का अंकित मूल्य = ₹ x

बिक्रीकर की दर = 8%

अतः बिक्रीकर = x का 8% = $\frac{x \times 8}{100} = ₹ \frac{2x}{25}$

वस्तु का अंकित मूल्य + बिक्रीकर = विक्रय मूल्य

या $x + \frac{2x}{25} = 810$ या $\frac{27x}{25} = 810$

या $x = \frac{810 \times 25}{27} = 30 \times 25 = ₹ 750$ **उत्तर**

10. एक बाइक ₹ 40,500 में किसी शोरूम में उपलब्ध है। यदि उसका वास्तविक मूल्य ₹ 36,000 है, तो बिक्रीकर की दर ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

वास्तविक (अंकित) मूल्य = ₹ 36,000

विक्रय मूल्य = ₹ 40,500

अतः बिक्रीकर = 40,500 − 36,000 = ₹ 4,500

बिक्रीकर की दर = $\frac{\text{बिक्रीकर} \times 100\%}{\text{अंकित मूल्य}}$

$= \frac{4,500 \times 100}{36,000}\% = 12.5\%$ **उत्तर**

11. राहुल ने बाजार से ₹ 540 के जूते, ₹ 300 की पुस्तकें व ₹ 160 की कॉपियाँ खरीदीं। उसे जूते, पुस्तकें और कापियों पर मूल्य के अतिरिक्त क्रमशः 10%, शून्य और 5% बिक्री कर भी देना पड़ा। कुल देय धनराशि की गणना कीजिए।

हल– दिया है— जूतों का अंकित मूल्य = ₹ 540

जूतों पर बिक्रीकर की दर = 10%

अतः जूतों पर बिक्रीकर = 540 का 10% = $\frac{540 \times 10}{100} = ₹ 54$

अतः जूतों के लिए देय राशि = ₹ 540 + 54 = ₹ 594

पुस्तकों का अंकित मूल्य = ₹ 300

पुस्तकों पर बिक्रीकर की दर = शून्य

पुस्तकों के लिए देय राशि = ₹ 300

कॉपियों का अंकित मूल्य = ₹ 160 तथा बिक्रीकर की दर = 5%

अतः कॉपियों पर बिक्रीकर = 160 का 5% = $\frac{160 \times 5}{100} = ₹ 8$

अतः कॉपियों के लिए देय राशि = ₹ 160 + 8 = ₹ 168

अतः राहुल द्वारा देय कुल राशि = ₹ (594 + 300 + 168) = **₹ 1062** **उत्तर**

12. रवि ने बाजार से निम्नलिखित वस्तुएँ खरीदी—

(i) ₹ 300 की एक बरसाती, बिक्रीकर की दर 10%

(ii) ₹ 460 के जूते, बिक्रीकर की दर 9%

(iii) ₹ 450 के खाद्य पदार्थ, बिक्रीकर की दर 5%

(iv) ₹ 800 के कपड़े, बिक्रीकर की दर 1%

देय धनराशि की गणना कीजिए।

हल– (i) बरसाती का अंकित मूल्य = ₹ 300 तथा बिक्रीकर की दर = 10%

अतः बरसाती पर बिक्रीकर = 300 का 10% $= \frac{300 \times 10}{100} =$ ₹ 30

बरसाती का विक्रय मूल्य = ₹ (300 + 30) = **₹ 330**

(ii) जूतों का अंकित मूल्य = ₹ 460 तथा बिक्रीकर की दर = 9%

अतः जूतों पर बिक्रीकर = 460 का 9% $= \frac{460 \times 9}{100} =$ ₹ 41.40

जूतों का विक्रय मूल्य = ₹ (460 + 41.40) = **₹ 501.40**

(iii) खाद्य पदार्थों का अंकित मूल्य = ₹ 450 तथा बिक्रीकर की दर = 5%

अतः खाद्य पदार्थों पर बिक्रीकर = 450 का 5% $= \frac{450 \times 5}{100} =$ ₹ 22.50

जूतों का विक्रय मूल्य = ₹ (450 + 22.50) = **₹ 472.5**

(iv) कपड़ों का अंकित मूल्य = ₹ 800 तथा बिक्रीकर की दर = 1%

अतः कपड़ों पर बिक्रीकर = 800 का 1% $= \frac{800 \times 1}{100} =$ ₹ 8

जूतों का विक्रय मूल्य = ₹ (800 + 8) = **₹ 808**

अतः रवि द्वारा देय कुल धनराशि = ₹ (330 + 501.40 + 472.5 + 808)

= **₹ 2,111.9** उत्तर

13. सरिता ने ₹ 11,600 अंकित मूल्य का कोई सामान खरीदा। अंकित मूल्य पर उसे 5% की छूट मिलती है। यदि छूट मिलने के उपरान्त 5% की दर से बिक्रीकर लिया गया हो, तो कुल कितने रुपये देने होंगे।

हल– सरिता द्वारा खरीदे गए सामान का अंकित मूल्य = ₹ 11,600

अंकित मूल्य पर छूट की दर = 5%

अतः छूट की राशि = 11,600 का 5% $= \frac{11,600 \times 5}{100} =$ ₹ 580

छूट मिलने के बाद सामान का मूल्य = ₹ (11,600 – 580) = ₹ 11,020

अब, इस मूल्य पर बिक्रीकर की दर = 5%

अतः बिक्रीकर की राशि = 11,020 का 5% $= \frac{11,020 \times 5}{100} =$ ₹ 551

अतः सरिता द्वारा देय राशि = ₹ (11,020 + 551) = **₹ 11,571** उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट– बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 90 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-3 सांख्यिकी (Statistics)

5

केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें
(Measures of Central Tendency)

अभ्यास 5.1

1. 8, 13, 2x, 7 और 20 का समान्तर माध्य 16 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए गए पद $= 8, 13, 2x, 7$ और 20 तथा समान्तर माध्य $= 16$

अत: $\Sigma x = 8+13+2x+7+20 = 48+2x$

तथा पदों की संख्या $(n) = 5$

सूत्र— समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n}$ से

$$16 = \frac{48+2x}{5} \quad \text{या} \quad 80 = 48+2x$$

या $2x = 80-48$

या $2x = 32 \Rightarrow x = \mathbf{16}$ **उत्तर**

2. निम्नलिखित का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

72, 74, 76, 73,70, 78, 75, 79, 76, 69

हल– दिए हुए पद $= 72, 74, 76, 73,70, 78, 75, 79, 76, 69$

$$\Sigma x = 72+74+76+73+70+78+75+79+76+69 = 742$$

पदों की संख्या $(n) = 10$

अत: समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{742}{10} = \mathbf{74.2}$ **उत्तर**

3. दस संख्याओं का समान्तर माध्य 16 है। यदि उनमें से एक संख्या को 10 कम कर दिया जाए, तो नया समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— पदों की संख्या $(n) = 10$

समान्तर माध्य $= 16$

हम जानते हैं— समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n}$

या $\Sigma x = n \times$ समान्तर माध्य

$= 10 \times 16 = 160$

एक संख्या को 10 कम करने पर,

पदों का कुल योग $\Sigma x = 160 - 10 = 150$

अतः $$\text{नया समान्तर माध्य} = \frac{\text{पदों का योग } (\Sigma x)}{\text{पदों की संख्या } (n)} = \frac{150}{10} = \mathbf{15}$$ **उत्तर**

4. 13 अंकों का समान्तर माध्य 68 है। प्रथम सात अंकों का समान्तर माध्य 63 है और अन्तिम 7 अंकों का समान्तर माध्य 70 है। सातवाँ अंक ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— अंकों की संख्या $(n) = 13$

तथा समान्तर माध्य $= 68$

अतः पदों का योग $(\Sigma x) =$ पदों की संख्या $\times$ समान्तर माध्य

$= 13 \times 68 = 884$

प्रथम सात अंकों का समान्तर माध्य $= 63$

अतः प्रथम सात अंकों का योग $= 7 \times 63 = 441$

अंतिम सात अंकों का समान्तर माध्य $= 70$

अतः अन्तिम सात अंकों का योग $= 7 \times 70 = 490$

चूँकि सातवाँ अंक प्रथम सात एवं अन्तिम सात दोनों समूहों में सम्मिलित है।

अतः सातवाँ अंक = प्रथम सात अंकों का योग + अन्तिम सात अंकों का योग

-13 अंकों का योग

$= 441 + 490 - 884$

$= 931 - 884 = \mathbf{47}$ **उत्तर**

5. 40 संख्याओं का समान्तर माध्य 65 है। यदि प्रत्येक संख्या में 5 की वृद्धि कर दी जाए, तो नई संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— अंकों की संख्या $(n) = 40$

तथा समान्तर माध्य $= 65$

अतः संख्याओं का योग $(\Sigma x) = n \times$ समान्तर माध्य

$= 40 \times 65 = 2600$

प्रत्येक संख्या में 5 की वृद्धि करने पर, नई संख्या का योग

$(\Sigma x) = 2500 + 40 \times 5$

$= 2600 + 200 = 2800$

अतः नई संख्याओं का समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{2800}{40} = \mathbf{70}$ **उत्तर**

6. यदि n संख्याओं $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ का समान्तर माध्य m है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संख्या में a जोड़ने पर समान्तर माध्य $(m + a)$ होगा।

हल– दिया है— पदों की संख्या $= n$

तथा समान्तर माध्य $= m$

अतः पदों का योग $\Sigma x =$ पदों की संख्या $\times$ समान्तर माध्य

$= n \times m = nm$

प्रत्येक संख्या में a जोड़ने पर नई संख्याओं का योग

$(\Sigma x) = nm + na = n(m + a)$

$$\text{नई संख्याओं का समान्तर माध्य} = \frac{\text{नई संख्याओं का योग}}{\text{पदों (संख्याओं) की संख्या}}$$

$$= \frac{n(m+a)}{n} = m + a$$ इति सिद्धम्

7. यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ का माध्य $\overline{X}$ हो, तो $mx_1, mx_2, mx_3, \ldots\ldots, mx_n$ का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल— हम जानते हैं कि यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ का समान्तर माध्य $\overline{X}$ हो, तो

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{n}$$

अब, $mx_1, mx_2, mx_3, \ldots\ldots, mx_n$ का समान्तर माध्य

$$= \frac{mx_1 + mx_2 + mx_3 + \ldots\ldots + mx_n}{n}$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n)}{n} = m\overline{X}$$ उत्तर

8. 10 पदों का समान्तर माध्य 24 तथा अंतिम 8 पदों का समान्तर माध्य 20 है। प्रथम दो पदों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— पदों की संख्या $(n) = 10$

तथा समान्तर माध्य $= 24$

अत: पदों का योग (Σx) = पदों की संख्या × समान्तर माध्य

$= 10 \times 24 = 240$

तथा अन्तिम 8 पदों का समान्तर माध्य $= 20$

अत: अन्तिम 8 पदों का योग $= 8 \times 20 = 160$

प्रथम दो पदों का योग = 10 पदों का योग − अंतिम 8 पदों का योग

$= 240 - 160 = 80$

अत: प्रथम दो पदों का समान्तर माध्य $= \frac{80}{2} = \mathbf{40}$ उत्तर

9. निम्नलिखित आंकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

चर (x)	10	20	30	40	50
बारम्बारता (f)	6	8	9	5	2

हल–

चर (x)	बारम्बारता (f)	fx
10	6	60
20	8	160
30	9	270
40	5	200
50	2	100
योग	$\Sigma f = 30$	$\Sigma fx = 790$

सूत्र— समान्तर माध्य $=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

अत: समान्तर माध्य $=\frac{790}{30}=26.33$ उत्तर

10. समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

x	10	30	50	75	89
f	7	8	10	15	10

हल–

x	f	fx
10	7	70
30	8	240
50	10	500
75	15	1125
89	10	890
योग	$\Sigma f=50$	$\Sigma fx=2825$

सूत्र— समान्तर माध्य $=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

अत: समान्तर माध्य $=\frac{2825}{50}=56.50$ उत्तर

11. निम्नलिखित सारणी का समान्तर माध्य लघु विधि द्वारा ज्ञात कीजिए—

x	31	32	33	34	35
f	6	14	16	9	5

हल– लघु विधि द्वारा समान्तर माध्य की गणना—माना कल्पित माध्य, $A=33$

x	f	कल्पित माध्य से विचलन $d=x-A$	fd
31	6	$31-33=-2$	$6\times(-2)=-12$
32	14	$32-33=-1$	$14\times(-1)=-14$
$33=(A)$	16	$33-33=0$	$16\times0=0$
34	9	$34-33=1$	$9\times1=9$
35	5	$35-33=2$	$5\times2=10$
योग	$\Sigma f=50$		$\Sigma fd=-7$

सूत्र— समान्तर माध्य $=A+\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

अत: समान्तर माध्य $=33+\frac{-7}{50}=33-0.14=32.86$ उत्तर

12. निम्नलिखित सारणी में एक कक्षा में 50 छात्रों के भार दिए गए हैं—

भार (किग्रा में)	45	46	47	48
छात्रों की संख्या	15	10	20	5

छात्रों के भारों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल–

भार (किग्रा में) x	छात्रों की संख्या f	fx
45	15	675
46	10	460
47	20	940
48	5	240
योग	$\Sigma f = 50$	$\Sigma fx = 2315$

सूत्र— $\text{समान्तर माध्य} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

अतः $\text{समान्तर माध्य} = \dfrac{2315}{50} = 46.30$ किग्रा उत्तर

13. यदि निम्नलिखित सारणी का समान्तर माध्य 15 है, तो P का मान ज्ञात कीजिए।

x	5	10	15	20	25
f	6	P	6	10	5

हल–

x	f	fx
5	6	$5 \times 6 = 30$
10	P	$10 \times P = 10P$
15	6	$15 \times 6 = 90$
20	10	$20 \times 10 = 200$
25	5	$25 \times 5 = 125$
योग	$\Sigma f = 27 + P$	$\Sigma fx = 10P + 445$

सूत्र— $\text{समान्तर माध्य} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$ या $15 = \dfrac{10P + 445}{27 + P}$

या $405 + 15P = 10P + 445$

या $15P - 10P = 445 - 405$ या $5P = 40$

या $P = \dfrac{40}{5} = 8$ उत्तर

14. निम्नलिखित सारणी का समान्तर माध्य लघु विधि से ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	84–90	90–96	96–102	102–108	108–114
बारम्बारता	8	12	15	10	5

हल– लघु विधि द्वारा समान्तर माध्य की गणना—

वर्ग अन्तराल	मध्यमान x	बारम्बारता f	कल्पित माध्य से विचलन $d = x - A$	fd
84 – 90	87	8	$87 - 99 = -12$	$8 \times (-12) = -96$
90 – 96	93	12	$93 - 99 = -6$	$12 \times (-6) = -72$
96 – 102	$99 = (A)$	15	$99 - 99 = 0$	$15 \times 0 = 0$
102 – 108	105	10	$105 - 99 = 6$	$10 \times 6 = 60$
108 – 114	111	5	$111 - 99 = 12$	$5 \times 12 = 60$
योग		$\Sigma f = 50$		$\Sigma fd = -48$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$$

अतः $$\text{समान्तर माध्य} = 99 + \frac{-48}{50} = 99 - \frac{48}{50}$$

$$= 99 - 0.96 = \mathbf{98.04}$$ उत्तर

15. निम्नलिखित आँकड़ों का पद विचलन विधि द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	50 – 70	70 – 90	90 – 110	110 – 130	130 – 150	150 – 170
बारम्बारता	18	12	13	27	8	22

हल– माना कल्पित माध्य $= 100$ तथा $h = 20$

वर्ग अन्तराल	मध्यमान x	बारम्बारता f	कल्पित माध्य से विचलन $d = x - A$	$u = \frac{x - A}{h}$	$f \times u$
50 – 70	60	18	$60 - 100 = -40$	-2	-36
70 – 90	80	12	$80 - 100 = -20$	-1	-12
90 – 110	$100 = (A)$	13	$100 - 100 = 0$	0	0
110 – 130	120	27	$120 - 100 = 20$	1	27
130 – 150	140	8	$140 - 100 = 40$	2	16
150 – 170	160	22	$160 - 100 = 60$	3	66
योग		$\Sigma fi = 100$			$\Sigma fiui = 61$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = A + h\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}$$

अतः $$\text{समान्तर माध्य} = 100 + 20 \times \frac{61}{100}$$

$$= 100 + 20 \times 0.61 = 100 + 12.20$$

$$= \mathbf{112.20}$$ उत्तर

16. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी का समान्तर $113\frac{23}{29}$ है। इसमें अज्ञात राशि (X) का मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0–40	40–80	80–120	120–160	160–200
बारम्बारता	X	20	35	30	23

हल– माना कल्पित माध्य $(A) = 100$ तथा $h = 40$

वर्ग	मध्यमान x	बारम्बारता f	$d = x - A$	$u = \frac{x-A}{h}$	$f \times u$
0–40	20	X	$20 - 100 = -80$	-2	$-2X$
40–80	60	20	$60 - 100 = -40$	-1	-20
80–120	$100 = (A)$	35	$100 - 100 = 0$	0	0
120–160	140	30	$140 - 100 = 40$	1	30
160–200	180	23	$180 - 100 = 80$	2	46
योग		$\Sigma f_i = X + 108$			$\Sigma f_i u_i = 56 - 2X$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = A + h\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$$

या $$113\frac{23}{29} = 100 + 40 \times \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$\frac{3300}{29} - 100 = 40 \times \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$\frac{3300 - 2900}{29} = 40 \times \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$\frac{400}{29} = 40 \times \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$\frac{400}{29 \times 40} = \frac{56 - 2X}{X + 108} \quad \text{या} \quad \frac{10}{29} = \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$10X + 1080 = 1624 - 58X$$

या $$10X + 58X = 1624 - 1080$$

या $$68X = 544 \quad \text{या} \quad X = \frac{544}{68} = 8$$ उत्तर

17. अग्रलिखित सारणी एक मोहल्ले के बच्चों का दैनिक जेब खर्च प्रदर्शित करती है। यदि समान्तर माध्य जेब खर्च ₹ 18 है तो बारम्बारता f ज्ञात कीजिए—

दैनिक जेब खर्च (₹ में)	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
बारम्बारता	7	6	9	13	f	5	4

हल– समान्तर माध्य = ₹ 18

दैनिक जेब खर्च (₹ में)	मध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	Σfx
11 – 13	12	7	84
13 – 15	14	6	84
15 – 17	16	9	144
17 – 19	18	13	234
19 – 21	20	f	$20f$
21 – 23	22	5	110
23 – 25	24	4	96
योग		$\Sigma f = 44 + f$	$\Sigma fx = 20f + 752$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$18 = \frac{20f + 752}{44 + f}$$

या $$792 + 18f = 20f + 752$$

या $$792 - 752 = 20f - 18f$$

या $$40 = 2f \Rightarrow f = \frac{40}{2} = \mathbf{20}$$ उत्तर

18. यदि निम्नलिखित आँकड़ों का समान्तर माध्य 21.5 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए—

वर्ग अन्तराल	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
बारम्बारता	6	4	3	k	2

हल– दिया है—समान्तर माध्य = 21.5

वर्ग अन्तराल	मध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	$f \times x$
0 – 10	5	6	30
10 – 20	15	4	60
20 – 30	25	3	75
30 – 40	35	k	$35k$
40 – 50	45	2	90
योग		$\Sigma f = k + 15$	$\Sigma fx = 35k + 255$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$21.5 = \frac{35k + 255}{k + 15}$$

या $$21.5k + 322.5 = 35k + 255$$

या $$322.5 - 255 = 35k - 21.5k$$

$$67.5 = 13.5k \quad \text{या} \quad k = \frac{67.5}{13.5} = \mathbf{5}$$ उत्तर

19. एक उप बस्ती के 70 घरों में पानी उपयोग का खर्च (₹ में) निम्नलिखित में दिया गया है। प्रति घर माध्य खर्च (₹ में) ज्ञात कीजिए—

पानी घर खर्च (₹ में)	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70
घरों की संख्या	7	5	7	8	9	11	7	5	4	4	3

हल– समान्तर माध्य = ₹ 18

पानी पर खर्च (₹ में)	मध्यमान (x)	घरों की संख्या (f)	fx
15 – 20	17.5	7	122.50
20 – 25	22.5	5	112.50
25 – 30	27.5	7	192.50
30 – 35	32.5	8	260.00
35 – 40	37.5	9	337.50
40 – 45	42.5	11	467.50
45 – 50	47.5	7	332.50
50 – 55	52.5	5	262.50
55 – 60	57.5	4	230.00
60 – 65	62.5	4	250.00
65 – 70	67.5	3	202.50
योग		$\Sigma f = 70$	$\Sigma fx = 2770.00$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

अत: $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{2770}{70} = ₹\,39.57$$ **उत्तर**

अभ्यास 5.2

1. 30 मानों का माध्य 150 था। जाँच करने पर यह पाया गया कि माध्य का अभिकलन करने के दौरान मान 165 के स्थान पर गलती से 135 लिख दिया गया है। सही माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है : पदों की संख्या = 30

समान्तर माध्य = 150

अत: पदों का योग = पदों की संख्या × समान्तर माध्य

$= 30 \times 150 = 4500$

किन्तु पदों के इस योग में गलती से 165 के स्थान पर 135 लिख दिया गया।

अत: पदों का सही योग $= 4500 + (165 - 135)$

$= 4500 + 30 = 4530$

अत: $$\text{सही माध्य} = \frac{\text{पदों का सही योग}}{\text{पदों की संख्या}} = \frac{4530}{30} = 151$$ **उत्तर**

2. n मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ के 50 से विचलनों का जोड़ -10 है। और इन मानों के 46 से विचलनों का जोड़ 70 है। माध्य और n के मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

n मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ के 50 से विचलनों का योग $= -10$

अर्थात् $(x_1 - 50) + (x_2 - 50) + (x_3 - 50) + \ldots + (x_n - 50) = -10$

या $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - (50 + 50 + 50 + \ldots + n \text{ पदों तक}) = -10$

या $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - 50n = -10$

या $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -10 + 50n$ ...(1)

तथा $(x_1 - 46) + (x_2 - 46) + (x_3 - 46) + \ldots + (x_n - 46) = 70$

या $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - 46n = 70$

या $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 70 + 46n$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$$-10 + 50n = 70 + 46n$$

या $$50n - 46n = 70 + 10$$

या $$4n = 80 \Rightarrow n = \mathbf{20}$$

समीकरण (1) में n का मान रखने पर,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -10 + 50 \times 20$$

या $$\Sigma x = -10 + 1000 = 990$$

अतः $$\text{माध्य} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{990}{20} = \mathbf{49.5}$$ **उत्तर**

3. एक कार रखने वाला व्यक्ति लगातार तीन वर्षों तक पहले वर्ष ₹ 7.50 प्रति लीटर, दूसरे वर्ष ₹ 8.00 प्रति लीटर और तीसरे वर्ष ₹ 8.50 प्रति लीटर की दर से पेट्रोल खरीदता है। यदि वह प्रत्येक वर्ष ₹ 4,000 का पेट्रोल खरीदता है, तो पेट्रोल प्रति लीटर औसत दर ज्ञात कीजिए।

हल— दिया है— तीन वर्षों में प्रथम वर्ष पेट्रोल का मूल्य = ₹ 7.50 प्रति लीटर

दूसरे वर्ष पेट्रोल का मूल्य = ₹ 8.00 प्रति लीटर

तीसरे वर्ष पेट्रोल का मूल्य = ₹ 8.50 प्रति लीटर

प्रत्येक वर्ष खरीदे गए तेल का मूल्य = ₹ 4,000

अतः प्रथम वर्ष खरीदे गए तेल की मात्रा $= \frac{4000}{7.5} = 533.33$ लीटर

दूसरे वर्ष खरीदे गए तेल की मात्रा $= \frac{4000}{8} = 500$ लीटर

तथा तीसरे वर्ष खरीदे गए तेल की मात्रा $= \frac{4000}{8.5} = 470.58$ लीटर

तीनों वर्षों में खरीदे गए पेट्रोल की मात्रा $= 533.33 + 500 + 470.58$

$= 1503.91$ लीटर

तीनों वर्षों में खरीदे गए तेल कुल मूल्य $= 3 \times 4000 =$ ₹ 12,000

अतः तीनों वर्षों में पेट्रोल प्रति लीटर औसत दर $= \frac{12,000}{1503.91} =$ **₹ 7.98 लीटर** **उत्तर**

4. एक कक्षा में 25 छात्रों का औसत भार 40 किग्रा तथा दूसरी कक्षा में 30 छात्रों का औसत भार 42 किग्रा है। दोनों कक्षाओं को मिलाकर छात्रों का औसत भार ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

एक कक्षा में छात्रों की संख्या $n_1 = 25$ तथा उनका औसत भार $W_1 = 40$ किग्रा

तथा दूसरी कक्षा में छात्रों की संख्या $n_2 = 30$ तथा उनका औसत भार $W_2 = 42$ किग्रा

दोनों कक्षाओं के छात्रों का औसत भार $= \dfrac{n_1 W_1 + n_2 W_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{25 \times 40 + 30 \times 42}{25 + 30} = \frac{1000 + 1260}{55}$$

$$= \frac{2260}{55} = \mathbf{41.09 \text{ किग्रा}}$$ **उत्तर**

5. एक कक्षा के 150 छात्रों का माध्य भार 60 किग्रा है। यदि लड़कों का माध्य भार 70 किग्रा है और लड़कियों को मिलाकर भार 55 किग्रा हो तो कक्षा में लड़कों और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल— माना कक्षा में लड़कों और लड़कियों की संख्या क्रमशः n_1 व n_2 है।

अतः प्रश्नानुसार, $n_1 + n_2 = 150$ ...(1)

लड़कों का माध्य भार $(W_1) = 70$ किग्रा

तथा लड़कियों का माध्य भार $(W_2) = 50$ किग्रा

कक्षा के सभी छात्रों का माध्य भार $= W = 60$

अतः कक्षा के सभी छात्रों का माध्य भार $= \dfrac{W_1 n_1 + W_2 n_2}{n_1 + n_2}$ सूत्र से

या $$60 = \frac{70n_1 + 55n_2}{150}$$

या $$9000 = 70n_1 + 55n_2$$

या $$1800 = 14n_1 + 11n_2$$

या $$14n_1 + 11n_2 = 1800$$ ...(2)

समीकरण (1) में 11 की गुणा करने पर,

$$11n_1 + 11n_2 = 1650$$ ...(3)

समीकरण (2) में से समीकरण (3) घटाने पर,

$$3n_2 = 150 \quad \text{या} \quad n_2 = \frac{150}{3} = 50$$

अब n_2 का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$n_1 + 50 = 150$$

या $$n_1 = 150 - 50 = 100$$

अतः कक्षा में लड़कों की संख्या $= \mathbf{100}$

तथा कक्षा में लड़कियों की संख्या $= \mathbf{50}$ **उत्तर**

6. करीम ने गणित में त्रैमासिक परीक्षा में 64 अंक, अर्द्धवार्षिक परीक्षा में 75 अंक तथा वार्षिक परीक्षा में 82 अंक प्राप्त किए। त्रैमासिक परीक्षा का भार 1, अर्द्धवार्षिक परीक्षा का भार 2 तथा वार्षिक परीक्षा का भार 3 है। करीम के प्राप्तांक का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $x_1 = 64$ अंक, $x_2 = 75$ अंक, $x_3 = 82$ अंक

$W_1 = 1, \quad W_2 = 2, \quad W_3 = 3$

अतः भारित माध्य अंक $x_W = \dfrac{W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3}{W_1 + W_2 + W_3}$ सूत्र से

$$= \frac{1\times 64 + 2\times 75 + 3\times 82}{1+2+3}$$

$$= \frac{64+150+246}{6} = \frac{460}{6} = 76.67 \text{ अंक}$$ उत्तर

7. एक विद्यार्थी ने अंग्रेजी की दो मासिक परीक्षाओं में 70 एवं 90 अंक प्राप्त किए जबकि छमाही एवं सालाना परीक्षाओं में क्रमशः 60 एवं 80 अंक प्राप्त किए। मासिक परीक्षाओं के भार समान हैं जबकि छमाही और सालाना परीक्षाओं के भार प्रत्येक मासिक परीक्षा के क्रमशः दो गुने एवं 4 गुने हैं। विद्यार्थी द्वारा अंग्रेजी में प्राप्त अंकों का भारित समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $x_1 = 70$ अंक, $x_2 = 90$ अंक, $x_3 = 60$ अंक तथा $x_4 = 80$ अंक

तथा $W_1 = W_2 = n$ (माना) अतः $W_3 = 2n$, $W_4 = 4n$

विद्यार्थी द्वारा अंग्रेजी में प्राप्त अंकों का भारित समान्तर माध्य

$$\bar{X}_W = \frac{x_1W_1 + x_2W_2 + x_3W_3 + x_4W_4}{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}$$

$$= \frac{70\times n + 90\times n + 60\times 2n + 80\times 4n}{n+n+2n+4n}$$

$$= \frac{70n + 90n + 120n + 320n}{8n} = \frac{600n}{8n} = 75 \text{ अंक}$$ उत्तर

8. एक विद्यालय की दसवीं कक्षा के रसायन के 4 सेक्शनों में क्रमशः 40, 35, 45, 42 छात्र हैं। इन 4 सेक्शनों के रसायन में प्राप्त मध्य अंक क्रमशः 50, 60, 55 और 45 हैं। चारों सेक्शनों को एक साथ मिलाकर प्रति छात्र द्वारा प्राप्त औसत अंक ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $n_1 = 40, n_2 = 35, n_3 = 45, n_4 = 42$

तथा $x_1 = 50, x_2 = 60, x_3 = 55, x_4 = 45$

चारों सेक्शनों के प्रति छात्र द्वारा प्राप्त औसत अंक

$$= \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + x_4n_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$$

$$= \frac{50\times 40 + 60\times 35 + 55\times 45 + 42\times 45}{40+35+45+42}$$

$$= \frac{2000+2100+2475+1890}{162} = \frac{8465}{162} = 52.3$$ उत्तर

9. एक कारखाने के 100 मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य ₹ 38 है। यदि प्रातः पाली के 60 मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य ₹ 40 हो, तो सायं की पाली के 40 मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— मजदूरों की कुल संख्या $(n) = 100$

मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य $(\bar{x}) = ₹ 38$

अतः 100 मजदूरों की कुल दैनिक आय $= 100\times 38 = ₹ 3800$

∵ पाली के 60 मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य = ₹ 40

∴ 60 मजदूरों की कुल दैनिक आय $= 60 \times 40 = ₹\ 2400$

अतः शेष 40 मजदूरों की कुल दैनिक आय $= 3800 - 2400 = ₹\ 1400$

∴ 40 मजदूरों की दैनिक आय का माध्य $= \frac{1400}{40} = ₹\ 35$ **उत्तर**

अभ्यास 5.3

1. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

(i) 6, 9, 11, 14, 18, 22, 28, 31, 34, 43

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

6, 9, 11, 14, 18, 22, 28, 31, 34, 43

पदों की संख्या $(n) = 10$ (जो कि सम है।)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$ (सूत्र से)

$= \frac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{5\text{वाँ पद} + (5+1)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{18+22}{2} = \frac{40}{2} = 20$ **उत्तर**

(ii) 6, 7, 6, 9, 10, 8, 12, 13

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

6, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13

पदों की संख्या $(n) = 8$ (जो कि सम है)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$ (सूत्र से)

$= \frac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{4\text{वाँ पद} + (4+1)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{4\text{वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2} = \frac{8+9}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$ **उत्तर**

(iii) 2, 5, 11, 8, 41, 31, 55, 80

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

2, 5, 8, 11, 31, 41, 55, 80

पदों की संख्या $(n) = 8$ (सम)

अतः माध्यिका $= \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{4\text{ वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{11+31}{2} = \dfrac{42}{2} = \mathbf{21}$ **उत्तर**

(iv) 5, 7, 15, 17, 9, 19, 11, 17

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

5, 7, 9, 11, 15, 17, 17, 19

पदों की संख्या $(n) = 8$ (सम)

अतः माध्यिका $= \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{4\text{ वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{11+15}{2} = \dfrac{26}{2} = \mathbf{13}$ **उत्तर**

(v) 8, 7, 10, 6, 9, 12, 13

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

6, 7, 8, 9, 10, 12, 13

पदों की संख्या $(n) = 7$ (विषम)

अतः माध्यिका $= \dfrac{n+1}{2}$ वें पद का मान (सूत्र से)

$= \dfrac{7+1}{2}$ वाँ पद

$= \dfrac{8}{2}$ वाँ पद $= 4$ वाँ पद $= \mathbf{9}$ **उत्तर**

(vi) 5, 8, 7, 6, 11, 13, 12, 15

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15

पदों की संख्या $(n) = 8$ (सम)

अतः
$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{4\text{ वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{8+11}{2} = \frac{19}{2} = \mathbf{9.5}$$ उत्तर

(vii) 39, 14, 18, 7, 17, 34, 45, 12, 32, 14

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

7, 12, 14, 14, 17, 18, 32, 34, 39, 45

पदों की संख्या $(n) = 10$ (सम)

अतः
$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{17+18}{2} = \frac{35}{2} = \mathbf{17.5}$$ उत्तर

(viii) 3, 13, 0, 9, 5, 18, 7, 4

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

0, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 18

पदों की संख्या $(n) = 8$ (सम)

अतः
$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{4\text{ वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = \mathbf{6}$$ उत्तर

(ix) 12, 30, 14, 18, 25, 28, 22, 20, 25

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

12, 14, 18, 20, 22, 25, 25, 28, 30

पदों की संख्या $(n) = 9$ (विषम)

अतः माध्यिका $= \frac{n+1}{2}$ वाँ पद

$= \frac{9+1}{2}$ वाँ पद $= \frac{10}{2}$ वाँ पद

$= 5$ वाँ पद $= 22$ उत्तर

(x) 2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर—

2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8

पदों की संख्या $(n) = 6$ (सम)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{\frac{6}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{6}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{3\text{वाँ पद} + 4\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{2.5+2.6}{2} = \frac{5.1}{2} = 2.55$ उत्तर

2. प्रथम दस प्राकृत संख्याओं की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल– हम जानते हैं कि— प्रथम दस प्राकृत संख्याएँ निम्न हैं—

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

जो कि स्वयं आरोही क्रम में हैं।

पदों की संख्या $(n) = 10$ (सम)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5.50$ उत्तर

3. प्रथम दस अभाज्य पूर्णांकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल– प्रथम दस अभाज्य पूर्णांक निम्न हैं—

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 जो स्वयं आरोही क्रम है।

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 10$ (सम)

अतः $\text{माध्यिका} = \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2} = \dfrac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{11+13}{2} = \dfrac{24}{2} = \mathbf{12}$ **उत्तर**

4. निम्नलिखित आँकड़ें आरोही क्रम में व्यवस्थित हैं—
8, 11, 13, 15, $(x+1)$, $(x+3)$, 30, 40, 43, 45
यदि इन आँकड़ों की माध्यिका 22 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए—

हल— दिए गए आँकड़े— 8, 11, 13, 15, $(x+1)$, $(x+3)$, 30, 40, 43, 45

यहाँ, पदों की संख्या $(n)=10$, माध्यिका $=22$

अतः $\text{माध्यिका} = \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

या $22 = \dfrac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

या $22 = \dfrac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$

या $22 = \dfrac{(x+1)+(x+3)}{2} = \dfrac{x+1+x+3}{2}$

या $22 = \dfrac{2x+4}{2}$ या $22 = x+2$

या $x = 22-2 = \mathbf{20}$ **उत्तर**

5. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका 7 है, x का मान ज्ञात कीजिए—
2, 3, 5, $(6+x)$, 9, 10, 15

हल– दिए गए आँकड़े— 2, 3, 5, $(6+x)$, 9, 10, 15

यहाँ, पदों की संख्या $(n)=7$, माध्यिका $=7$

अतः $\text{माध्यिका} = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)\text{वाँ पद}$ (सूत्र से)

या $7 = \left(\dfrac{7+1}{2}\right)\text{वाँ पद}$

या $7 = \dfrac{8}{2}\text{वाँ पद}$ या $7 = 4\text{ वाँ पद}$

या $7 = 6+x$

या $x = 7-6 = \mathbf{1}$ **उत्तर**

6. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका 24 है, P का मान ज्ञात कीजिए—
11, 12, 14, 18, $P+2$, $P+4$, 30, 32, 35, 41

हल– दिए गए आँकड़े—

11, 12, 14, 18, $P+2$, 30, 32, 35, 41

तथा इनकी माध्यिका = 24

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 10$ (सम)

अतः $\text{माध्यिका} = \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

या $24 = \dfrac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

या $24 = \dfrac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$

या $24 = \dfrac{(P+2)+(P+4)}{2}$ या $24 = \dfrac{P+2+P+4}{2}$

या $48 = 2P+6$ या $2P = 48-6$

या $2P = 42$ या $P = 21$ **उत्तर**

7. एक परीक्षा में 25 छात्रों ने निम्नलिखित अंक प्राप्त किए—
35, 38, 37, 24, 33, 48, 32, 33, 50, 21, 47, 55, 27, 38, 45, 26, 33, 48, 44, 30, 52, 49, 40, 42, 44

हल– 25 छात्रों द्वारा प्राप्त अंकों को आरोही क्रम में रखने पर,

21, 24, 26, 27, 30, 32, 33, 33, 33, 35, 37, 38, 38, 40, 42, 44, 44, 45, 47, 48, 48, 49, 50, 52, 55

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 25$ (विषम)

अतः $\text{माध्यिका} = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)\text{वाँ पद} = \left(\dfrac{25+1}{2}\right)\text{वाँ पद}$

$= \dfrac{26}{2}\text{वाँ पद} = 13\text{वाँ पद} = \mathbf{38}$ **उत्तर**

8. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

x	15	21	17	19	23
f	8	6	15	7	12

हल– दी गई सारणी को आरोही क्रम संचयी बारम्बारता सारणी—

चर x	बारम्बारता f	संचयी बारम्बारता
15	8	8
17	15	23
19	7	30
21	6	36
23	12	48
योग	$n = 48$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 48$ (सम)

अतः $$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{\frac{48}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{48}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{24\text{वाँ पद} + (24+1)\text{वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{24\text{वाँ पद} + 25\text{वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{19+19}{2}$$ (∵25वाँ व 25वाँ पद दोनों ही संचयी बारम्बारता 30 वाले समूह में हैं।)

$$= \frac{38}{2} = 19$$ **उत्तर**

9. एक कक्षा में कुछ छात्रों के गणित के प्राप्तांक निम्नलिखित हैं—

प्राप्तांक	10	20	30	40	50
छात्र संख्या	3	9	15	7	1

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

प्राप्तांक (x)	छात्र संख्या (f)	संचयी बारम्बारता
10	3	3
20	9	12
30	15	27
40	7	34
50	1	35
जोग	$n = 45$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 35$ (विषम)

अतः $$\text{माध्यिका} = \left(\frac{n+1}{2}\right)\text{वाँ पद} = \frac{35+1}{2}\text{ वाँ पद}$$

$$= \frac{36}{2}\text{वाँ पद} = 18\text{ वाँ पद}$$ (∵18वाँ पद संचयी बारम्बारता 27 वाले समूह में आता है।)

$$= 30$$ **उत्तर**

10. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक	40	18	50	100	80	160
छात्रों की संख्या	12	8	32	14	16	4

हल– दी गई सारणी की आरोही क्रम संचयी बारम्बारता सारणी—

प्राप्तांक x	छात्रों की संख्या f	संचयी बारम्बारता
18	8	8
40	12	20
50	32	52
80	16	68
100	14	82
160	4	86
योग	$n=86$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n)=86$ (सम)

अतः
$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{\frac{86}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{86}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{43\text{वाँ पद} + 44\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{50+50}{2} = \frac{100}{2} = 50$$ उत्तर

11. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

पद	3	5	6	8	12	20	25	38
बारम्बारता	2	7	3	5	8	6	5	5

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

पद x	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
3	2	2
5	7	9
6	3	12
8	5	17
12	8	25
20	6	31
25	5	36
28	5	41
योग	$n=41$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 41$ (विषम)

अतः माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद $= \frac{41+1}{2}$ वाँ पद

$= \frac{42}{2}$ वाँ पद $= 21$ वाँ पद $= 12$ **उत्तर**

12. निम्नलिखित सारणी में कुछ छात्रों की आयु वर्षों में दी गई है। माध्यिका ज्ञात कीजिए—

आयु (वर्षों में)	10	11	12	13	14	15
छात्रों की संख्या	6	8	10	7	3	2

हल– दी गई बारम्बारता सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

आयु वर्षों में	छात्रों की संख्या	संचयी बारम्बारता
10	6	6
11	8	14
12	10	24
13	7	31
14	3	34
15	2	36
योग	$n = 36$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 36$ (सम)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{\frac{36}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{36}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{18\text{वाँ पद} + 19\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{12+12}{2}$

$= \frac{24}{2} = 12$ वर्ष **उत्तर**

13. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

वर्ग अन्तराल	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
बारम्बारता	4	5	16	19	7	5

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c)
20 – 30	4	4
30 – 40	5	9
40 – 50	16	$25 = c$
$l_1 = 50 - 60 = l_2$	$19 = f$	44
60 – 70	7	51
70 – 80	5	56
योग	$n = 56$	

यहाँ, $n = 56$ (सम) तब $\frac{n}{2} = \frac{56}{2} = 28$

∵ 28 संचयी बारम्बारता 44 के अन्तर्गत आती है। अतः $50 - 60$ वर्ग, माध्यिका वर्ग है।

$f = 19,\ c = 25,\ l_1 = 50,\ l_2 = 60$

सूत्र : $$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$= 50 + \frac{60 - 50}{19}(28 - 25)$$

$$= 50 + \frac{10}{19} \times 3 = 50 + \frac{30}{19}$$

$$= 50 + 1.58 = \mathbf{51.58}$$ उत्तर

14. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

वर्ग अन्तराल	5–25	25–45	45–65	65–85	85–105	105–125	125–145
बारम्बारता	4	5	12	20	14	6	4

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c)
5 – 25	4	4
25 – 45	5	9
45 – 65	12	$21 = c$
$l_1 = 65 - 85 = l_2$	$20 = f$	41
85 – 105	14	55
105 – 125	6	61
125 – 145	4	65
योग	$n = 65$	

यहाँ, $n = 65$ (विषम) अतः $\frac{n}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

∵ 32.5 संचयी बारम्बारता 41 के अन्तर्गत आती है। अत: वर्ग 65 – 85, माध्यिका वर्ग है।

इसलिए $l_1 = 65,\ l_2 = 85,\ f = 20,\ c = 21$

सूत्र : $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$

$= 65 + \frac{85-65}{20}(32.5 - 21) = 65 + \frac{20}{20} \times (11.5)$

$= 65 + 11.5 = \mathbf{76.5}$ **उत्तर**

15. निम्नलिखित सारणी में कुछ व्यक्तियों का आयकर दिया गया है। उनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए—

आयकर (₹ में)	10 – 25	25 – 40	40 – 55	55 – 70	70 – 85	85 – 100
व्यक्तियों की संख्या	6	20	44	26	3	1

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

आयकर (₹ में)	व्यक्तियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (c)
10 – 25	6	6
25 – 40	20	$26 = c$
$l_1 = 40 - 55 = l_2$	$44 = f$	70
55 – 70	26	96
70 – 85	3	99
85 – 100	1	100
योग	$n = 100$	

यहाँ, $n = 100$ (सम) अत: $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

∵ 50 संचयी बारम्बारता 70 के अन्तर्गत आती है। अत: वर्ग 40 – 55 माध्यिका वर्ग है।

इसलिए $l_1 = 40,\ l_2 = 55,\ f = 44,\ c = 26$

सूत्र : $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 40 + \frac{55-40}{44}(50 - 26)$

$= 40 + \frac{15}{44} \times 24 = 40 + \frac{360}{44}$

$= 40 + 8.18 = ₹\ \mathbf{48.18}$ **उत्तर**

अभ्यास 5.4

1. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए—

(i) 9, 5, 7, 9, 6, 9, 10, 6, 9, 4, 8, 11

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर—

4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 11

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 9 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **9** **उत्तर**

(ii) 25, 15, 23, 39, 27, 25, 23, 25, 20

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

15, 20, 23, 23, 25, 25, 25, 27, 39

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 25 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **25** **उत्तर**

(iii) 23, 14, 10, 12, 11, 12, 23, 20,18, 12, 10, 12, 23

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

10, 10, 11, 12, 12, 12, 12, 14, 18, 20, 23, 23, 23

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 12 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **12** **उत्तर**

(iv) 13, 14, 10, 12, 11, 12, 13, 20, 18, 12, 10, 12

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

10, 10, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 18, 20

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 12 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **12** **उत्तर**

(v) 5, 7, 9, 8, 7, 9, 7, 7, 3, 5, 2

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

2, 3, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 7 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **7** **उत्तर**

(vi) 2, 4, 6, 3, 4, 3, 4, 4, 7, 2

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 6, 7

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले पद = 4

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **4** **उत्तर**

(vii) 1, 3, 5, 5, 5, 4, 6

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम = 1, 3, 4, 5, 5, 5, 6

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले पद = 5 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **5** **उत्तर**

(viii) 10, 11, 9, 13, 23, 10, 11, 19, 10, 14, 25, 10, 16

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 13, 14, 16, 19, 23, 25

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद = 10

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **10** **उत्तर**

(ix) 22, 23, 02, 5, 25, 23, 25, 5, 16, 23, 26

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

02, 5, 5, 16, 22, 23, 23, 23, 25, 25, 26

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद = 23

अत: दिए गए आँकड़ो का बहुलक = **23** **उत्तर**

(x) 15, 21, 8, 12, 15, 9, 15, 12, 8, 15, 9

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

8, 8, 9, 9, 12, 12, 15, 15, 15, 15, 21

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद = 15

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **15** **उत्तर**

2. निम्नलिखित सारणी का बहुलक ज्ञात कीजिए—

पद	18	22	26	30	34	38
बारम्बारता	3	5	11	3	9	2

हल– दी गई सारणी से स्पष्ट है कि 26 की बारम्बारता सबसे अधिक है।

अत: दी गई सारणी का बहुलक = **26** **उत्तर**

3. निम्नलिखित प्राप्तांकों की बारम्बारता सारणी बनाकर बहुलक ज्ञात कीजिए—

4, 7, 9, 3, 4, 5, 3, 6, 7, 6, 8, 6, 7, 6, 5, 6, 8, 6, 5, 4

हल– दिए गए आँकड़ों को सारणी के रूप में निम्नवत् प्रस्तुत किया जा सकता है—

पद का नाम	टैली चिन्ह	बारम्बारता
3	||	2
4	|||	3
5	|||	3
6	卌 |	6
7	|||	3
8	||	2
9	|	1

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि 6 की बारम्बारता सबसे अधिक है। अत: दिए हुए आँकड़ों का बहुलक = **6** **उत्तर**

4. निम्नलिखित सारणी का बहुलक ज्ञात कीजिए—

पद	5	7	3	4	6	2	1
बारम्बारता	12	6	14	16	10	8	11

हल– दी गई सारणी से स्पष्ट है कि 4 की बारम्बारता सबसे अधिक **16** है।

अत: सारणी का बहुलक = **4** **उत्तर**

5. निम्नलिखित सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
छात्रों की संख्या	1	3	7	9	13	14	18	18	10	8

हल– दी गई सारणी से स्पष्ट है कि सबसे अधिक बारम्बारता 18 वाले दो पद 47 व 48 हैं।

अत: सारणी का बहुलक = **47 व 48** **उत्तर**

6. यदि किसी वितरण के लिए माध्य, माध्यिका और बहुलक एक-दूसरे के निकट हैं और $A = 25.68$, $M = 25.73$ हो, तो M_0 ज्ञात कीजिए।

जहाँ A = माध्य, M = माध्यिका तथा M_0 = बहुलक

हल– दिया है— माध्य $(A)=25.68$, माध्यिका $(M)=25.73$ तथा बहुलक $(M_0)=?$

हम जानते हैं कि— बहुलक $=3\times$ माध्यिका $-2\times$ समान्तर माध्य

$=3\times25.73-2\times25.68$

$=77.19-51.36=\mathbf{25.83}$ **उत्तर**

7. किसी बारम्बारता सारणी का समान्तर माध्य 25.5 व बहुलक 27 है, तो माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल— दिया है— समान्तर माध्य $=25.5$, बहुलक $=27$, माध्यिका $=?$

बहुलक $=3\times$ माध्यिका $-2\times$ समान्तर माध्य

अतः $$\text{माध्यिका}=\frac{\text{बहुलक}+2\times\text{समान्तर माध्य}}{3}$$

$$=\frac{27+2\times25.5}{3}=\frac{27+51}{3}$$

$$=\frac{78}{3}=\mathbf{26}$$ **उत्तर**

8. यदि किसी बारम्बारता सारणी का समान्तर माध्य 24.34 व माध्यिका 26 है, तो बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— समान्तर माध्य $=24.34$, माध्यिका $=26$, बहुलक $=?$

बहुलक $=3\times$ माध्यिका $-2\times$ समान्तर माध्य

$=3\times26-2\times24.34$

$=78-48.68=\mathbf{29.32}$ **उत्तर**

विविध प्रश्नावली

1. 2, 4, 6, 8 व x का समान्तर माध्य 5 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए गए आँकड़े $=2, 4, 6, 8$ व x, यहाँ पदों की संख्या $(n)=5$

तथा समान्तर माध्य $=5$

सूत्र: $$\text{समान्तर माध्य}=\frac{\text{पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}}$$

या $$5=\frac{2+4+6+8+x}{5}$$

या $$5=\frac{20+x}{5} \quad \text{या} \quad 25=20+x$$

या $$x=25-20=\mathbf{5}$$ **उत्तर**

2. 11 से 20 तक की संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई संख्याएँ $=11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

पदों की संख्या $(n)=10$

पदों का योगफल $=(11+12+\ldots\ldots+20)=155=\Sigma(x)$

समान्तर माध्य $=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{155}{10}=\mathbf{15.5}$ **उत्तर**

3. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

10, 06, 08, 04, 06, 03, 06, 07, 08, 02, 05

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

02, 03, 04, 05, 06, 06, 06, 07, 08, 08, 10

यहाँ पदों की संख्या $(n) = \frac{11+1}{2}$ वाँ पद $= \frac{12}{2}$ वाँ पद $= 6$ वाँ पद

$= \mathbf{06}$ **उत्तर**

4. प्राप्तांक 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 36, 22, 26, 36, 36 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

12, 15, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 30, 36, 36, 36

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद $= 36$

अतः दिए गए आँकड़ों का बहुलक **36** है। **उत्तर**

5. 1 से 10 तक की सम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– 1 से 10 तक की सम संख्याएँ निम्न हैं— 2, 4, 6, 8, 10

यहाँ पदों की संख्या $(n) = 5$

तथा पदों का योग $(\Sigma x) = 2+4+6+8+10 = 30$

अतः समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{30}{5} = \mathbf{6}$ **उत्तर**

6. आठ संख्याओं का समान्तर माध्य 12 है। नवीं संख्या अपठनीय है। यदि सभी नौ संख्याओं का समान्तर माध्य 13 है। तो अपठनीय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— 8 संख्याओं का समान्तर माध्य $= 12$

अतः 8 संख्याओं का योग = पदों की संख्या × समान्तर माध्य

$= 8 \times 12 = 96$

तथा 9 संख्याओं का समान्तर माध्य $= 13$

अतः 9 संख्याओं का योग $= 9 \times 13 = 117$

अतः नौवीं संख्या $= 117 - 96 = \mathbf{21}$ **उत्तर**

7. एक विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा 'पर्यावरण जागरूकता' के रूप में एक सर्वेक्षण का संचालन किया गया, जिसमें उन्होंने आस-पास के 20 घरों में लगाए गए पौधों की संख्या के आँकड़े इकट्ठा किए। प्रति घर पौधों की संख्या का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

पौधों की संख्या	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12	12 – 14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

हल–

पौधों की संख्या	मध्यमान x	घरों की संख्या f	कल्पित माध्य द्वारा विचलन $d = x - A$	$f \times d$
0–2	1	1	1–7 = –6	–6
2–4	3	2	3–7 = –4	–8
4–6	5	1	5–7 = –2	–2
6–8	7 = (A)	5	7–7 = 0	0
8–10	9	6	9–7 = 2	12
10–12	11	2	11–7 = 4	8
12–14	13	3	13–7 = 6	18
योग		$\Sigma f = 20$		$\Sigma fd = 22$

सूत्र— समान्तर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

$= 7 + \frac{22}{20} = 7 + 1.1 =$ **8.1 पौधे** उत्तर

8. एक फैक्टरी के 50 मजदूरों के दैनिक वेतन का वितरण निम्नलिखित है—

दैनिक वेतन (₹ में)	100 – 120	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200
मजदूरों की संख्या	12	14	8	6	10

उपयुक्त विधि का प्रयोग करके फैक्टरी के मजदूरों का औसत दैनिक वेतन ज्ञात कीजिए।

हल–

दैनिक वेतन (₹ में)	मध्यमान (x)	मजदूरों की संख्या (f)	$d = x - A$	$f \times u$
100–120	110	12	110–150 = –40	–480
120–140	130	14	130–150 = –20	–280
140–160	150 = (A)	8	150–150 = 0	0
160–180	170	6	170–150 = 20	120
180–200	190	10	190–150 = 40	400
योग		$\Sigma f = 50$		$\Sigma fd = -240$

सूत्र— समान्तर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

$= 150 + \frac{-240}{50} = 150 - \frac{240}{50}$

$= 150 - 4.80 =$ **₹145.20** उत्तर

9. एक डॉक्टर ने एक अस्पताल में 30 महिलाओं का परीक्षण किया और प्रति मिनट हृदय की धड़कनों की संख्या निम्नलिखित सारणी के रूप में निरूपित की। उपयुक्त विधि का प्रयोग करके उन महिलाओं की औसत प्रति मिनट हृदय-धड़कन ज्ञात कीजिए—

प्रति मिनट हृदय धड़कनों की संख्या	65–68	68–71	71–74	74–77	77–80	80–83	83–86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

हल– माना कल्पित माध्य $A = 75.5$ तथा $h = 3$

प्रति मिनट हृदय धड़कनों की संख्या	मध्यमान x	महिलाओं की संख्या f	$d = x - A$	$u = \frac{d}{h}$	$f \times u$
65–68	66.5	2	66.5 – 75.5 = –9	–3	–6
68–71	69.5	4	69.5 – 75.5 = –6	–2	–8
71–74	72.5	3	72.5 – 75.5 = –3	–1	–3
74–77	75.5 = (A)	8	75.5 – 75.5 = 0	0	0
77–80	78.5	7	78.5 – 75.5 = 3	1	7
80–83	81.5	4	81.5 – 75.5 = 6	2	8
83–86	84.5	2	84.5 – 75.5 = 9	3	6
योग		$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i u_i = 61$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = A + h\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$$

$$= 75.5 + 3 \times \frac{4}{30} = 75.5 + \frac{12}{30}$$

$$= 75.5 + \frac{4}{10} = 75.5 + 0.4 = \mathbf{75.9}$$ उत्तर

10. किसी बाजार में, एक फल विक्रेता कुछ बॉक्सों में आम बेच रहता था। इन बॉक्सों में आमों की संख्या अलग-अलग थी। बॉक्सों की संख्या के अनुसार आमों की संख्या का वितरण निम्नलिखित था—

आमों की संख्या	50–52	53–55	56–58	59–61	62–64
बॉक्सों की संख्या	15	110	135	115	25

बॉक्सों में आमों की संख्या का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल–

आमों की संख्या	मध्यमान (x)	बॉक्सों की संख्या (f)	$d = x - A$	$f \times d$
50–52	51	15	51 – 57 = –6	–90
53–55	54	110	54 – 57 = –3	–330
56–58	57 = (A)	135	57 – 57 = 0	0
59–61	60	115	60 – 57 = 3	345
62–64	63	25	63 – 57 = 6	150
योग		$\Sigma f = 400$		$\Sigma fd = 75$

सूत्र— $\text{समान्तर माध्य} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = 57 + \frac{75}{400}$

$= 57 + 0.19 = \mathbf{57.19}$ उत्तर

11. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी एक मोहल्ले के 68 बिजली उपभोक्ताओं का मासिक व्यय बताती है। माध्यिका व समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

मासिक व्यय (यूनिट में)	65–85	85–105	105–125	125–145	145–165	165–185	185–205
उपभोक्ताओं की संख्या	4	5	13	20	14	8	4

हल– माना कल्पित माध्य $A = 135$ तथा $h = 20$

मासिक व्यय (यूनिट में)	मध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c)	$u = \frac{x - A}{h}$	$f \times u$
65 – 85	75	4	4	$\frac{75-135}{20} = -3$	–12
85 – 105	95	5	9	$\frac{95-135}{20} = -2$	–10
105 – 125	115	13	$22 = c$	$\frac{115-135}{20} = -1$	–13
125 – 145	$135 = A$	$20 = f$	42	$\frac{135-135}{20} = 0$	0
145 – 165	155	14	56	$\frac{155-135}{20} = 1$	14
165 – 185	175	8	64	$\frac{175-135}{20} = 2$	16
185 – 205	195	4	68	$\frac{195-135}{20} = 3$	12
योग		$n = 68$			$\Sigma fiui = 17$

यहाँ $n = \Sigma fi = 68$ तब $\frac{n}{2} = \frac{68}{2} = 34$

∵ 34 संचयी बारम्बारता 42 के अन्तर्गत आती है। इसलिए 125–145 माध्यिका वर्ग है। अत:

$l_1 = 125,\ l_2 = 145,\ f = 20,\ c = 22$

सूत्र— $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$

$= 125 + \frac{145 - 125}{20}\left(\frac{68}{2} - 22\right)$

$= 125 + \frac{20}{20}(34 - 22) = 125 + 1 \times 12$

$= 125 + 12 = \mathbf{137}$ यूनिट उत्तर

तथा **सूत्र**— समान्तर माध्य $= A + h\dfrac{\Sigma fiui}{\Sigma fi} = 135 + 20 \times \dfrac{7}{68} = 135 + \dfrac{140}{68}$

$= 135 + 2.05 = \mathbf{137.05}$ **उत्तर**

12. यदि नीचे दी गई बारम्बारता सारणी की माध्यिका 28.5 है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए—

वर्ग अन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	योग
बारम्बारता	5	x	20	15	y	5	60

हल– दी गई बारम्बारता सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c)
0 – 10	5	5
10 – 20	x	$x + 5$
20 – 30	20	$x + 25$
30 – 40	15	$x + 40$
40 – 50	y	$x + y + 40$
50 – 60	5	$x + y + 45$
योग	$n = 60$	

सारणी से स्पष्ट है कि—

$$x + y + 45 = 60 \quad \text{या} \quad x + y = 60 - 45$$

या $$x + y = 15 \qquad \ldots(1)$$

यहाँ $n = 60$ अतः $\dfrac{n}{2} = \dfrac{60}{2} = 30$

∵ 30 संचयी बारम्बारता $x + 40$ के अन्तर्गत आती है। अतः वर्ग 20–30 माध्यिका वर्ग है।

∴ $l_1 = 20,\ l_2 = 30,\ f = 20,\ c = x + 5$

सूत्र— $$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$28.5 = 20 + \frac{30 - 20}{20}\{(30 - (x + 5)\}$$

या $$28.5 = 20 + \frac{10}{20}\{30 - x - 5\}$$

या $$28.5 = 20 + \frac{1}{2}(25 - x)$$

या $$57.0 = 40 + (25 - x)$$

$$57 = 40 + 25 - x$$

या $$57 = 65 - x$$

या $$x = 65 - 57$$

$$x = \mathbf{8}$$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$8 + y = 15 \Rightarrow y = 15 - 8 = \mathbf{7}$$ **उत्तर**

13. एक जीवन बीमा एजेंट ने 100 पॉलिसी धारकों की आयु के वितरण के लिए निम्नलिखित आँकड़ें प्राप्त किए। माध्यिका आयु की गणना कीजिए। यदि पॉलिसियाँ 18 वर्ष से अधिक परन्तु 60 वर्ष से कम वाले व्यक्तियों को दी गई हों—

आयु (वर्षों में)	20 से नीचे	25 से नीचे	30 से नीचे	35 से नीचे	40 से नीचे	45 से नीचे	50 से नीचे	55 से नीचे	60 से नीचे
पॉलिसी धारकों की संख्या	2	6	24	45	78	89	92	98	100

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

आयु (वर्षों में)	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
15 – 20	2	2
20 – 25	4	6
25 – 30	18	24
30 – 35	21	45
35 – 40	33	78
40 – 45	11	89
45 – 50	3	92
50 – 55	6	98
55 – 60	2	100
योग	$n = 100$	

यहाँ, $n = 100$ तब $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

∵ संख्या 50 संचयी बारम्बारता 78 के अन्तर्गत आती है। अतः वर्ग 35–40 माध्यिका वर्ग है।

∴ $l_1 = 35,\ l_2 = 40,\ f = 33,\ c = 45$

सूत्र : $$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$= 35 + \frac{40 - 35}{33}(50 - 45)$$

$$= 35 + \frac{5 \times 5}{33}$$

$$= 35 + 0.76 = \mathbf{35.76 \text{ वर्ष}}$$ उत्तर

14. एक पौधे की 40 पत्तियों की लम्बाइयाँ निकटतम मिलीमीटर में मापी गईं और निम्नलिखित सारणी में आँकड़ों को प्राप्त किया गया—

लम्बाई (मिमी में)	118–126	127–135	136–144	145–153	154–162	163–171	172–180
पत्तियों की संख्या	3	5	9	12	5	4	2

पत्तियों की लम्बाइयों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई सारणी को संचयी बारम्बारता सारणी—

लम्बाई (मिमी में)	पत्तियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
118 – 126	3	3
127 – 135	5	8
136 – 144	9	$17 = c$
145 – 153	$12 = f$	29
154 – 162	5	34
163 – 171	4	38
172 – 180	2	40
योग	$n = 40$	

यहाँ, $n = 40 \implies \frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$

∵ संख्या 20 संचयी बारम्बारता 29 के अन्तर्गत आती है। अतः माध्यिका वर्ग 145-153 है।

$\therefore \quad l_1 = 145,\ l_2 = 153,\ f = 12,\ c = 17$

सूत्र—

$$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$= 145 + \frac{153 - 145}{12}(20 - 17)$$

$$= 145 + \frac{8}{12} \times 3$$

$$= 145 + 2 = \mathbf{147 \text{ मिमी}}$$ **उत्तर**

15. निम्नलिखित सारणी में 400 निऑन लैंपों के जीवन-काल का विवरण दिया गया है—

जीवनकाल (घण्टों में)	लैंपों की संख्या
1500–2000	14
2000–2500	56
2500–3000	60
3000–3500	86
3500–4000	74
4000–4500	62
4500–5000	48

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

जीवनकाल (घण्टों में)	लैंपों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (c)
1500–2000	14	14
2000–2500	56	70
2500–3000	60	130
3000–3500	86	216
3500–4000	74	290
4000–4500	62	352
4500–5000	48	400
योग	$n = 400$	

यहाँ, $n = 400 \implies \frac{n}{2} = \frac{400}{2} = 200$

∵ संख्या 200 संचयी बारम्बारता 216 के अन्तर्गत आती है। अतः वर्ग 3000–3500 माध्यिका वर्ग है।

$\therefore \quad l_1 = 3000,\ l_2 = 3500,\ f = 86,\ c = 130$

सूत्र : $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 3000 + \frac{3500 - 3000}{86}(200 - 130)$

$$= 3000 + \frac{500}{86} \times 70 = 3000 + \frac{35000}{86}$$

$$= 3000 + 406.98 = \mathbf{3406.98}$$ **उत्तर**

16. निम्नलिखित सारणी में एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों का भार दिया गया है। विद्यार्थियों का माध्यिका भार ज्ञात कीजिए।

भार (किग्रा में)	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

भार (किग्रा में)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (c)
40–45	2	2
45–50	3	5
50–55	8	13
55–60	6	19
60–65	6	25
65–70	3	28
70–75	2	30
योग	$n = 30$	

यहाँ, $n = 30 \implies \frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$

∵ 15 संचयी बारम्बारता 19 के अन्तर्गत आती है। अतः वर्ग 55–60 माध्यिका वर्ग है।

$l_1 = 55,\ l_2 = 60,\ f = 6,\ c = 13$

सूत्र— $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$

$= 55 + \frac{60-55}{13}(15-13) = 55 + \frac{5}{13} \times 2 = 55 + \frac{10}{13}$

$= 55 + 0.76 = \mathbf{55.76}$ किग्रा **उत्तर**

17. निम्नलिखित सारणी का बहुलक एवं माध्यिका ज्ञात कीजिए।

पद	5	15	25	35	45
बारम्बारता	2	5	8	6	3

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

पद	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
5	2	2
15	5	7
25	8	15
35	6	21
45	3	24
योग	$n = 24$	

दी गई सारणी से स्पष्ट है कि पद 25 की बारम्बारता सबसे अधिक है। अत: सारणी का बहुलक $= \mathbf{25}$ **उत्तर**

यहाँ $n = 24$ (सम) अत: $\frac{n}{2} = \frac{24}{2} = 12$ तथा $\frac{n}{2} + 1 = 12 + 1 = 13$

अत: $\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{\frac{24}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{24}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2} = \frac{12\text{वाँ पद} + 13\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{25+25}{2} = \frac{50}{2} = \mathbf{25}$ **उत्तर**

18. निम्नलिखित सारणी का बहुलक ज्ञात कीजिए।

पद	10	20	30	40	50
बारम्बारता	5	8	20	6	3

हल– दी गई सारणी से स्पष्ट है कि पद 30 की बारम्बारता सबसे अधिक है। अत: सारणी का बहुलक $= 30$ है। **उत्तर**

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 112 व 113 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-4 त्रिकोणमिति (Trigonometry)

6

त्रिकोणमितीय अनुपात तथा सर्वसमिकाएँ
(Trigonometric Ratios and Identities)

अभ्यास 6.1

1. निम्नलिखित त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\sin(-1125^\circ)$

हल– $\sin(-1125^\circ) = -\sin 1125^\circ = -\sin(3\times 360^\circ + 45^\circ)$

$= -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ उत्तर

(ii) $\sin 1920^\circ$

हल– $\sin 1920^\circ = \sin(5\times 360^\circ + 120^\circ)$

$= \sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ)$

$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

(iii) $\cos 1950^\circ$

हल– $\cos 1950^\circ = \cos 1950^\circ$

$= \cos(5\times 360^\circ + 150^\circ)$

$= \cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ)$

$= -\sin 60^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

(iv) $\tan(-570^\circ)$

हल– $\tan(-570^\circ) = -\tan(570^\circ)$

$= -\tan(1\times 360^\circ + 210^\circ)$

$= -\tan 210^\circ = -\tan(180^\circ + 30^\circ)$

$= -\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

(v) $\tan 750^\circ$

हल– $\tan 750^\circ = \tan(2\times 360^\circ + 30^\circ)$

$$= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ उत्तर

(vi) $\tan 60^\circ$

हल– $\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ उत्तर

2. $\sin 382\frac{1}{2}^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\sin\left(382\frac{1}{2}^\circ\right) = \sin\frac{765^\circ}{2}$

$$= \sin\left(1\times 360^\circ + \frac{45^\circ}{2}\right) = \sin\frac{45^\circ}{2}$$

या $$= \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} \qquad \left[\because \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$ उत्तर

3. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$

हल– $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - 72^\circ)}{\cos 72^\circ} = \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1$ उत्तर

(ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$

हल– $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ} = \frac{\tan(90^\circ - 64^\circ)}{\cot 64^\circ} = \frac{\cot 64^\circ}{\cot 64^\circ} = 1$ उत्तर

(iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$

हल– $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ = \cos 48^\circ - \sin(90^\circ - 48^\circ)$

$$= \cos 48^\circ - \cos 48^\circ = 0$$ उत्तर

(iv) $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$

हल— $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ = \operatorname{cosec} 31^\circ - \sec(90^\circ - 31^\circ)$

$$= \operatorname{cosec} 31^\circ - \operatorname{cosec} 31^\circ = 0$$ उत्तर

4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\cos 1020^\circ$

हल– $\cos 1020^\circ = \cos(3\times 360^\circ - 60^\circ)$

$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ उत्तर

(ii) $\cot 1470^\circ$

हल– $\cot 1470^\circ = \cot(4\times 360^\circ + 30^\circ)$

$= \cot 30^\circ = \sqrt{3}$ उत्तर

(iii) $\tan\frac{5\pi}{3}$

हल– $\tan\frac{5\pi}{3} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{3} = -\tan\frac{180^\circ}{3}$

$= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ उत्तर

(iv) $\operatorname{cosec} 1350^\circ$

हल– $\operatorname{cosec} 1350^\circ = \operatorname{cosec}(4\times 360^\circ - 90^\circ)$

$= -\operatorname{cosec} 90^\circ = -1$ उत्तर

(v) $\tan\frac{11\pi}{3}$

हल– $\tan\frac{11\pi}{3} = \tan\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{3} = -\tan\frac{180^\circ}{3}$

$= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ उत्तर

(vi) $\sin 780^\circ$

हल– $\sin 780^\circ = \sin(2\times 360^\circ + 60^\circ)$

$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

5. निम्नलिखित को रेडियन में परिवर्तित कीजिए—

(i) 90° (ii) 45° (iii) 30°

(iv) 120° (v) 210° (vi) 135°

हल– (i) $90^\circ = \frac{90^\circ\times\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$ रेडियन उत्तर

(ii) $45^\circ = \frac{45^\circ\times\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$ रेडियन उत्तर

(iii) $30^\circ = \frac{30^\circ\times\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$ रेडियन उत्तर

(iv) $120^\circ = \frac{120^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$ रेडियन उत्तर

(v) $210^\circ = \frac{210^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}$ रेडियन उत्तर

(vi) $135^\circ = \frac{135^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$ रेडियन उत्तर

6. निम्नलिखित को अंशों में परिवर्तित कीजिए—

(i) $\frac{\pi}{3}$ रेडियन (ii) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन

(iii) $\frac{2\pi}{3}$ रेडियन (iv) $\frac{3\pi}{4}$ रेडियन

हल– (i) $\frac{\pi}{3}$ रेडियन $= \frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$ उत्तर

(ii) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन $= \frac{\pi \times 180^\circ}{6 \times \pi} = 30^\circ$ उत्तर

(iii) $\frac{2\pi}{3}$ रेडियन $= \frac{2\pi \times 180^\circ}{3 \times \pi} = 120^\circ$ उत्तर

(iv) $\frac{3\pi}{4}$ रेडियन $= \frac{3\pi \times 180^\circ}{4 \times \pi} = 135^\circ$ उत्तर

7. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

हल– $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$ उत्तर

(ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

हल– $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

$$= 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2 \times 1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$ उत्तर

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

हल– $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(2-2\sqrt{3})}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})(2-2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{2}\{(2)^2-2\sqrt{3})^2\}}=\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{2}(4-12)}=\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{2}\times(-8)}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3})}{-8\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{\mathbf{8}}$$ उत्तर

(iv) $\dfrac{\sin 30^\circ+\tan 45^\circ-\operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ+\cos 60^\circ+\cot 45^\circ}$

हल– $\dfrac{\sin 30^\circ+\tan 45^\circ-\operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ+\cos 60^\circ+\cot 45^\circ}=\dfrac{\frac{1}{2}+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+1}$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4}$$

$$=\frac{(3\sqrt{3}-4)^2}{(3\sqrt{3}+4)(3\sqrt{3}-4)}$$

$$=\frac{(3\sqrt{3})^2+4^2-2\times4\times3\sqrt{3}}{(3\sqrt{3})^2-4^2}$$

$$=\frac{27+16-24\sqrt{3}}{27-16}=\frac{\mathbf{43-24\sqrt{3}}}{\mathbf{11}}$$ उत्तर

(v) $\dfrac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}$

हल– $\dfrac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}=\dfrac{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$=\frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{1+3}{4}}$$

$$=\frac{\frac{79-12}{12}}{\frac{4}{4}}=\frac{\mathbf{67}}{\mathbf{12}}$$ उत्तर

8. यदि $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ और $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; जहाँ $0^\circ < A+B \le 90^\circ$, $A > B$, तो A व B का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

$$\tan(A+B)=\sqrt{3}$$

या $\tan(A+B)=\tan 60^\circ$

या $A+B=60^\circ$ ...(1)

तथा $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

या $\tan(A-B)=\tan 30^\circ$

या $A-B=30^\circ$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$2A=90^\circ$$

या $A=\frac{90^\circ}{2}=45^\circ$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$45^\circ+B=60^\circ$$

या $B=60^\circ-45^\circ=15^\circ$

अतः $A=45^\circ$ तथा $B=15^\circ$ **उत्तर**

9. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य और असत्य लिखिए। अपने उत्तर का सत्यापन भी कीजिए।

(i) $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$

हल– माना $A=30^\circ$ तथा $B=60^\circ$

तब L.H.S. $\sin(A+B)=\sin(30^\circ+60^\circ)=\sin 90^\circ=1$

R.H.S. $=\sin A+\sin B$

$=\sin 30^\circ+\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

अतः $A=30^\circ$ तथा $B=60^\circ$ के लिए

$\sin(A+B) \neq \sin A+\sin B$

इस प्रकार, दिया हुआ कथन $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$ **असत्य** है। **उत्तर**

(ii) $\sin\theta$ का मान, θ के मान के अनुसार बढ़ता है।

हल– माना $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

अतः $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90^\circ=1$

चूँकि $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$

अतः $\sin\theta$ का मान, θ के मान के अनुसार बढ़ता है। दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

(iii) $\cos\theta$ का मान, θ के मान के अनुसार बढ़ता है।

हल– माना $\theta = 30°, 45°, 60°, 90°$

तब $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 60° = \frac{1}{2}, \cos 90° = 0$

चूँकि, $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} > 0$

इस प्रकार, $\cos\theta$ का मान, θ के मान के अनुसार घटता है। अत: दिया हुआ कथन **असत्य** है। **उत्तर**

(iv) θ के सभी मानों के लिए, $\sin\theta = \cos\theta$

हल– माना $\theta = 30°, 45°, 60°, 90°$

अब $\sin 30° = \frac{1}{2}$ तथा $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अत: $\sin 30° \neq \cos 30°$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ तथा } \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अत: $\sin 45° = \cos 45°$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ तथा } \cos 60° = \frac{1}{2}$$

अत: $\sin 60° \neq \cos 60°$

$$\sin 90° = 1 \text{ तथा } \cos 90° = 0$$

अत: $\sin 90° \neq \cos 90°$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दिया गया कथन θ के सभी मानों के लिए, $\sin\theta = \cos\theta$ **असत्य** है। **उत्तर**

(v) $A = 0°$ तो $\cot A$ का मान परिभाषित नहीं है।

हल– यदि $A = 0°$

तो $\cot A = \infty$ (परिभाषित नहीं)

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दिया गया कथन $A = 0°$ के लिए $\cot A$ का मान परिभाषित नहीं है।

अत: यह कथन **सत्य** है। **उत्तर**

10. सिद्ध कीजिए—

(i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$

हल– L.H.S. $= \tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67°$

$= \tan(90° - 42°)\tan(90° - 67°)\tan 42° \tan 67°$

$= \cot 42° \cot 67° \tan 42° \tan 67°$

$= \cot 42° \times \tan 42° \cot 67° \tan 67°$

$= 1 \times 1$ [$\because \tan\theta.\cot\theta = 1$]

$= 1 =$ R.H.S.

(ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$

हल– L.H.S. $= \cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52°$

$= \cos(90° - 52°)\cos(90° - 38°) - \sin 38° \sin 52°$

$= \sin 52° \sin 38° - \sin 38° \sin 52°$

$$= \sin 38^\circ \sin 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$$
$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

11. यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

$$\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$$
या $$\cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$$
या $$90^\circ - 2A = A - 18^\circ$$
या $$90^\circ + 18^\circ = A + 2A$$
या $$108^\circ = 3A \Rightarrow A = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$$ उत्तर

12. यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि— $A + B = 90^\circ$

हल– दिया है—

$$\tan A = \cot B \quad \text{या} \quad \tan A = \tan(90^\circ - B)$$
या $$A = 90^\circ - B$$
या $$A + B = 90^\circ$$ इति सिद्धम्

13. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

$$\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$$
या $$\operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$$
या $$90^\circ - 4A = A - 20^\circ$$
या $$90^\circ + 20^\circ = A + 4A$$
या $$110^\circ = 5A$$
या $$A = \frac{110^\circ}{5} = 22^\circ$$ उत्तर

14. यदि A, B एवं C, त्रिभुज ABC के अन्तःकोण हैं, तो सिद्ध कीजिए—

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

हल– दिया है—

A, B और C त्रिभुज ABC के अन्तःकोण हैं।

अतः $$A + B + C = 180^\circ$$
या $$B + C = 180^\circ - A$$
या $$\frac{B+C}{2} = \frac{180^\circ - A}{2}$$
या $$\frac{B+C}{2} = \left(\frac{180^\circ}{2} - \frac{A}{2}\right)$$
या $$\frac{B+C}{2} = \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

दोनों पक्षों का sin लेने पर,

$$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)$$

या $$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$$ इति सिद्धम्

15. $\sin 67^\circ+\cos 75^\circ$ को 0° व 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल– $\sin 67^\circ+\cos 75^\circ=\sin(90^\circ-23^\circ)+\cos(90^\circ-15^\circ)$

$=\cos 23^\circ+\sin 15^\circ$ उत्तर

16. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\cos 510^\circ-\sin(-780^\circ)=0$

हल— L.H.S. $=\cos 510^\circ-\sin(-780^\circ)$

$=\cos 510^\circ+\sin 780^\circ$

$=\cos(360^\circ+150^\circ)+\sin(2\times 360^\circ+60^\circ)$

$=\cos 150^\circ+\sin 60^\circ$

$=\cos(90^\circ+60^\circ)+\sin 60^\circ$

$=-\sin 60^\circ+\sin 60^\circ$

$=0=$ R.H.S.

(ii) $\cot A+\tan(180^\circ-A)+\tan(90^\circ+A)+\tan(360^\circ+A)=0$

हल— L.H.S. $=\cot A+\tan(180^\circ-A)+\tan(90^\circ+A)+\tan(360^\circ+A)$

$=\cot A-\tan A-\cot A+\tan A$

$=0=$ R.H.S.

(iii) $\sin 150^\circ\cdot\cos 120^\circ+\cos 330^\circ\cdot\sin 660^\circ=-1$

हल— L.H.S. $=\sin 150^\circ\cos 120^\circ+\cos 330^\circ\cdot\sin 660^\circ$

$=\sin(90^\circ+60^\circ)\cdot\cos(90^\circ+30^\circ)$

$+\cos(360^\circ-30^\circ)\cdot\sin(2\times 360^\circ-60^\circ)$

$=\cos 60^\circ\cdot(-\sin 30^\circ)+\cos 30^\circ\cdot(-\sin 60^\circ)$

$=-\cos 60^\circ\cdot\sin 30^\circ-\cos 30^\circ\times\sin 60^\circ$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{-1-3}{4}=\frac{-4}{4}=-1=\text{R.H.S.}$$

(iv) $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$

हल– L.H.S. $=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}$

$$=\cos\left(\pi-\frac{7\pi}{8}\right)+\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{8}\right)+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}$$

$$=-\cos\frac{7\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}$$

$=0=$ R.H.S.

(v) $\sin 54^\circ \sec 54^\circ \cdot \cot 54^\circ = 1$

हल– L.H.S. $= \sin 54^\circ \sec 54^\circ \cot 54^\circ$

$$= \sin 54^\circ \times \frac{1}{\cos 54^\circ} \times \cot 54^\circ$$

$$= \frac{\sin 54^\circ}{\cos 54^\circ} \times \cot 54^\circ = \tan 54^\circ \times \cot 54^\circ$$

$$= 1 \qquad [\because \tan\theta \times \cot\theta = 1]$$

$$= \text{R.H.S}$$

17. सिद्ध कीजिए—

$\text{cosec}\,(270^\circ - A) \cdot \text{cosec}\,(270^\circ + A) + \cot(270^\circ - A) \times \cot(270^\circ + A) = 1$

हल—L.H.S. $= \text{cosec}\,(270^\circ - A) \cdot \text{cosec}\,(270^\circ + A) + \cot(270^\circ - A) \cdot \cot(270^\circ + A)$

$$= -\sec A \cdot (-\sec A) + \tan A \cdot (-\tan A)$$

$$= \sec^2 A - \tan^2 A$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

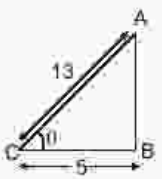
$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} \qquad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

18. यदि $\sec\theta = \frac{13}{5}$, तो $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल – दिया है—

$$\sec\theta = \frac{13}{5} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{BC}$$



अतः $\text{लम्ब} = \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{आधार}^2}$

या $AB = \sqrt{13^2 - 5^2}$

$$= \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

अतः $\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$

अतः $$\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \frac{2\times\frac{12}{13} - 3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13} - 9\times\frac{5}{13}} = \frac{\frac{24}{13} - \frac{15}{13}}{\frac{48}{13} - \frac{45}{13}}$$

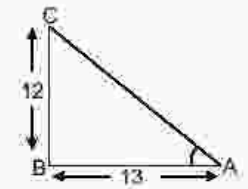
$$= \frac{\frac{24-15}{13}}{\frac{48-45}{13}} = \frac{\frac{9}{13}}{\frac{3}{13}}$$

$$= \frac{9\times 13}{3\times 13} = 3$$

उत्तर

19. यदि $\tan A = \frac{12}{13}$, तो $\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—



$$\tan A = \frac{12}{13} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{कर्ण } (AC) = \sqrt{\text{आधार}^2 + \text{लम्ब}^2}$$

$$= \sqrt{13^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{169 + 144} = \sqrt{313}$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{\sqrt{313}} \quad \text{तथा} \quad \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{\sqrt{313}}$$

अतः $$\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2\times\frac{12}{\sqrt{313}}\times\frac{13}{\sqrt{313}}}{\left(\frac{13}{\sqrt{313}}\right)^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{313}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{312}{313}}{\frac{169}{313} - \frac{144}{313}} = \frac{\frac{312}{313}}{\frac{169-144}{313}} = \frac{\frac{312}{313}}{\frac{25}{313}}$$

$$= \frac{312\times 313}{313\times 25} = \frac{312}{25}$$ उत्तर

20. $\frac{2\sin 81^\circ}{\cos 9^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $$\frac{2\sin 81^\circ}{\cos 9^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 81^\circ}{\cos(90^\circ - 81^\circ)} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot(90^\circ - 40^\circ)}$$

$$= \frac{2\sin 81^\circ}{\sin 81^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\tan 40^\circ} = 2 - 1 = 1$$ उत्तर

21. $\frac{5\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + \frac{2\cos 31^\circ}{\sin 59^\circ} - \frac{6\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $$\frac{5\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + \frac{2\cos 31^\circ}{\sin 59^\circ} - \frac{6\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{5\sin 17^\circ}{\cos(90^\circ - 17^\circ)} + \frac{2\cos 31^\circ}{\sin(90^\circ - 31^\circ)} - \frac{6\sin 80^\circ}{\cos(90^\circ - 80^\circ)}$$

$$= \frac{5\sin 17^\circ}{\sin 17^\circ} + \frac{2\cos 31^\circ}{\cos 31^\circ} - \frac{6\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= 5 + 2 - 6 = 7 - 6 = 1$$ उत्तर

22. $\tan 35^\circ \tan 40^\circ \tan 45^\circ \tan 50^\circ \tan 55^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\tan 35^\circ \tan 40^\circ \tan 45^\circ \tan 50^\circ \tan 55^\circ$

$$= \tan(90^\circ - 55^\circ)\tan(90^\circ - 50^\circ)\times 1\times \tan 50^\circ \tan 55^\circ$$

$= \cot 55^\circ \cdot \cot 50^\circ \cdot \tan 50^\circ \tan 55^\circ$
$= \cot 55^\circ \cdot \tan 55 \cot 50^\circ \tan 50^\circ \quad [\because \tan\theta.\cot\theta = 1]$
$= 1 \times 1 = 1$ उत्तर

अभ्यास 6.2

सिद्ध कीजिए—

1. $\dfrac{1}{\sec A + \tan A} = \sec A - \tan A$

हल— $\text{L.H.S.} = \dfrac{1}{\sec A + \tan A}$

$= \dfrac{1 \times (\sec A - \tan A)}{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)}$

$= \dfrac{\sec A - \tan A}{\sec^2 A - \tan^2 A}$

$= \dfrac{\sec A - \tan A}{1} \quad [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$

$= \sec A - \tan A = \text{R.H.S.}$

2. $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$

हल— $\text{L.H.S.} = \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta$

$= \dfrac{1}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta} = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \times \dfrac{1}{\sin^2\theta} = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$

$= \text{R.H.S.}$

3. $\dfrac{1 + \tan^2\theta}{\text{cosec}^2\theta} = \tan^2\theta$

हल— $\text{L.H.S.} = \dfrac{1 + \tan^2\theta}{\text{cosec}^2\theta}$

$= \dfrac{1 + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}} = \dfrac{\dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}} = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \tan^2\theta = \text{R.H.S.}$

4. $\frac{1}{\sec\theta-1}-\frac{1}{\sec\theta+1}=2\cot^2\theta$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{\sec\theta-1}-\frac{1}{\sec\theta+1}$$
$$=\frac{\sec\theta+1-(\sec\theta-1)}{(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)}=\frac{\sec\theta+1-\sec\theta+1}{\sec^2\theta-1}$$
$$=\frac{2}{\tan^2\theta} \qquad [\because \sec^2\theta-1=\tan^2\theta]$$
$$=2\cot^2\theta=\text{R.H.S.}$$

5. $(1-\cos^2\theta)\operatorname{cosec}^2\theta=1$

हल–

$$\text{L.H.S.}=(1-\cos^2\theta)\operatorname{cosec}^2\theta$$
$$=\sin^2\theta\cdot\operatorname{cosec}^2\theta$$
$$=1=\text{R.H.S.}$$

6. $\cos^2\theta\operatorname{cosec}\theta+\sin\theta=\operatorname{cosec}\theta$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\cos^2\theta.\operatorname{cosec}\theta+\sin\theta$$
$$=\cos^2\theta\times\frac{1}{\sin\theta}+\sin\theta$$
$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$$
$$=\operatorname{cosec}\theta=\text{R.H.S.}$$

7. निम्नलिखित को उपयुक्त त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए–

(i) $(1+\tan^2 A)\cos^2 A=1$

हल–

$$\text{L.H.S.}=(1+\tan^2 A)\cos^2 A$$
$$=\sec^2 A\cdot\cos^2 A \qquad [\because 1+\tan^2 A=\sec^2 A]$$
$$=\frac{1}{\cos^2 A}\times\cos^2 A$$
$$=1=\text{R.H.S.}$$

(ii) $\sin^2\theta+\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}+\frac{1}{1+\cot^2\theta}=1$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\sin^2\theta+\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$
$$=\sin^2\theta+\frac{1}{\sec^2 A} \qquad [\because \sec^2 A=1+\tan^2 A]$$
$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta$$
$$=1$$
$$=\text{R.H.S.}$$

तथा L.H.S. $\frac{1}{1+\tan^2\theta}+\frac{1}{1+\cot^2\theta}=\frac{1}{\sec^2\theta}+\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}$

$$\left[\because \begin{array}{l} 1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta \\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \end{array}\right]$$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=1=$R.H.S.

(iii) $(\operatorname{cosec}^2\theta-1)\tan^2\theta=1$

हल– L.H.S. $=(\operatorname{cosec}^2\theta-1)\tan^2\theta$

$=\cot^2\theta\times\tan^2\theta$ $[\because \operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta]$

$=1$ $[\because \tan\theta\times\cot\theta=1]$

$=$R.H.S.

(iv) $(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cos A$

हल– L.H.S. $=(\sin A-\cos A)^2$

$=\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A$

$=1-2\sin A\cos A$

$=$R.H.S.

(v) $\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A}+\frac{\cos A}{\sec A}=1$

हल– L.H.S. $=\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A}+\frac{\cos A}{\sec A}$

$=\sin A\times\frac{1}{\operatorname{cosec} A}+\cos A\times\frac{1}{\sec A}$

$=\sin A\times\sin A+\cos A\times\cos A$

$=\sin^2 A+\cos^2 A$

$=1=$R.H.S.

(vi) $\frac{1}{1-\cos A}+\frac{1}{1+\cos A}=2\operatorname{cosec}^2 A$

हल– L.H.S. $=\frac{1}{(1-\cos A)}+\frac{1}{(1+\cos A)}$

$=\frac{1+\cos A+1-\cos A}{(1-\cos A)(1+\cos A)}$

$=\frac{2}{1-\cos^2 A}=\frac{2}{\sin^2 A}$

$=2\operatorname{cosec}^2 A=$R.H.S.

(vii) $\cos^4 A+\sin^2 A\cos^2 A=\cos^2 A$

हल– L.H.S. $=\cos^4 A+\sin^2 A\cos^2 A$

$=\cos^2 A(\cos^2 A+\sin^2 A)=\cos^2 A\times 1$

$=\cos^2 A=$R.H.S.

(viii) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\text{R.H.S.}$$

(ix) $\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\operatorname{cosec} A$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{\sin^2 A+1+\cos^2 A+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{2}{\sin A}=2\operatorname{cosec} A=\text{R.H.S.}$$

(x) $\tan^2\phi-\sin^2\phi=\tan^2\phi\sin^2\phi$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\tan^2\phi-\sin^2\phi$$

$$=\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}-\sin^2\phi=\sin^2\phi\left(\frac{1}{\cos^2\phi}-1\right)$$

$$=\sin^2\phi\left[\frac{1-\cos^2\phi}{\cos^2\phi}\right]$$

$$=\sin^2\phi.\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}=\sin^2\phi\cdot\tan^2\phi$$

$$=\tan^2\phi\cdot\sin^2\phi=\text{R.H.S.}$$

(xi) $\tan^2\phi+\cot^2\phi+2=\sec^2\phi\operatorname{cosec}^2\phi$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\tan^2\phi+\cot^2\phi+2$$

$$=\tan^2\phi+\cot^2\phi+2\tan\phi\times\cot\phi \quad [\because \tan\phi\cot\phi=1]$$

$$= (\tan\phi + \cot\phi)^2 = \left(\frac{\sin\phi}{\cos\phi} + \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin^2\phi + \cos\phi}{\cos\phi \sin\phi}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\phi \sin\phi}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\phi} \times \frac{1}{\sin\phi}\right)^2 = (\sec\phi \cdot \operatorname{cosec}\phi)^2$$

$$= \sec^2\phi \operatorname{cosec}^2\phi = \text{R.H.S.}$$

(xii) $\sin\theta(1 + \tan\theta) + \cos\theta(1 + \cot\theta) = \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta$

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sin\theta(1 + \tan\theta) + \cos\theta(1 + \cot\theta)$$

$$= \sin\theta\left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) + \cos\theta\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \sin\theta\left[\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}\right] + \cos\theta\left[\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$$

$$= \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta = \text{R.H.S.}$$

(xiii) $\dfrac{1}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta} = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

हल–

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta \sin^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta = \text{R.H.S.}$$

(xiv) $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sec^4\theta - \sec^2\theta$$

$$= \sec^2\theta(\sec^2\theta - 1) = (1 + \tan^2\theta)\tan^2\theta$$

$$[\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta]$$

$$= \tan^2\theta + \tan^4\theta$$

$$= \tan^4\theta + \tan^2\theta = \text{R.H.S.}$$

(xv) $(\text{cosec}^2\theta-1)(\sec^2\theta-1)=1$

हल– L.H.S. $=(\text{cosec}^2\theta-1)(\sec^2\theta-1)$

$$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$$

$$=\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$=1=$ R.H.S.

8. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $(1+\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta)=2$

(ii) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=2\sec\theta$

(iii) $\dfrac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A}=1-2\sec A\tan A+2\tan^2 A$

(iv) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta-1}+\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta+1}=2\,\text{cosec}\,\theta$

(v) $\sin^2\theta+\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}=1$

(vi) $\dfrac{1}{\sec A+\tan A}=\sec A-\tan A$

(vii) $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta.\,\text{cosec}\,\theta$

(viii) $\cos^2\theta+\cos^2\theta\cot^2\theta=\cot^2\theta$

(ix) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

(x) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\sec^2\theta\,\text{cosec}^2-2$

हल– (i) $(1+\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta)=2$

L.H.S. $=(1+\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta)$

$$=\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$=\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1^2}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2=\text{R.H.S.}$$

(ii) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=2\sec\theta$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{1+\sin^2\theta - 2\sin\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{1+\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{1+1-2\sin\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)} = \frac{2-2\sin\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{2(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)} = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta = \text{R.H.S.}$$

(iii) $\dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} = 1 - 2\sec A\tan A + 2\tan^2 A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}$$

$$= \frac{(\sec A - \tan A)(\sec A - \tan A)}{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)}$$

$$= \frac{(\sec A - \tan A)^2}{\sec^2 A - \tan^2 A}$$

$$= \frac{\sec^2 A + \tan^2 A - 2\sec A\tan A}{1}$$

$$= 1 + \tan^2 A + \tan^2 A - 2\sec A\tan A$$

$$= 1 + 2\tan^2 A - 2\sec A\tan A$$

$$= 1 - 2\sec A\tan + 2\tan^2 A = \text{R.H.S.}$$

(iv) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} + \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} = 2\operatorname{cosec}\theta$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} + \frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta\left(\frac{1}{\sec\theta - 1} + \frac{1}{\sec\theta + 1}\right)$$

$$= \tan\theta\left[\frac{\sec\theta + 1 + \sec\theta - 1}{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}\right]$$

$$= \tan\theta\left[\frac{2\sec\theta}{\sec^2\theta - 1}\right] = \tan\theta \times \frac{2\sec\theta}{\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2\sec\theta}{\tan\theta} = \frac{2\sec\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{2\sec\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2}{\sin\theta} \qquad [\because \sec\theta \cdot \cos\theta = 1]$$

$$= 2\operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S.}$$

(v) $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} + \dfrac{1}{1+\cot^2\theta} = 1$

$$\text{L.H.S.} = \sin^2\theta + \frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \sin^2\theta + \frac{1}{\sec^2\theta} \qquad [\because 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta]$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

तथा $\dfrac{1}{1+\tan^2\theta} + \dfrac{1}{1+\cot^2\theta} = \dfrac{1}{\sec^2\theta} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

(vi) $\dfrac{1}{\sec A + \tan A} = \sec A - \tan A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{\sec A + \tan A}$$

$$= \frac{1 \times (\sec A - \tan A)}{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)}$$

$$= \frac{(\sec A - \tan A)}{\sec^2 A - \tan^2 A}$$

$$= \frac{(\sec A - \tan A)}{1} \qquad [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$$

$$= \frac{\sec A - \tan A}{1}$$

$$= \sec A - \tan A = \text{R.H.S.}$$

(vii) $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta$

$$\text{L.H.S.} = \tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta} = \sec\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta$$

$$= \text{R.H.S.}$$

(viii) $\cos^2\theta + \cos^2\theta \cot^2\theta = \cot^2\theta$

$$\text{L.H.S.} = \cos^2\theta + \cos^2\theta \cot^2\theta$$

$$=\cos^2\theta(1+\cot^2\theta)$$

$$=\cos^2\theta\cdot\operatorname{cosec}^2\theta=\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\cot^2\theta=\text{R.H.S.}$$

(ix) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

$$\text{L.H.S.}=\tan^2\theta-\sin^2\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$$

$$=\sin^2\theta\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)=\sin^2\theta\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\sin^2\theta$$

$$=\tan^2\theta\sin^2\theta=\text{R.H.S.}$$

(x) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta-2$

$$\text{L.H.S.}=\tan^2\theta+\cot^2\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(1)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}-\frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}\times\frac{1}{\cos^2\theta}-2$$

$$=\operatorname{cosec}^2\theta\cdot\sec^2\theta-2$$

$$=\sec^2\theta\cdot\operatorname{cosec}^2\theta-2=\text{R.H.S.}$$

9. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$ **(ii)** $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta$

(iii) $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A$

(iv) $\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}=2\sec\theta$

(v) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$

हल– (i) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$

$$\text{L.H.S.}=\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\sec\theta-\tan\theta=\text{R.H.S.}$$

(ii) $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta$

$$\text{L.H.S.}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta=\text{R.H.S.}$$

(iii) $\frac{1}{1-\sin A}+\frac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{1-\sin A}+\frac{1}{1+\sin A}$$

$$=\frac{1+\sin A+1-\sin A}{(1-\sin A)(1+\sin A)}=\frac{2}{1-\sin^2 A}$$

$$=\frac{2}{\cos^2 A}=2\sec^2 A=\text{R.H.S.}$$

(iv) $\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}=2\sec\theta$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{(\sec\theta-\tan\theta)}+\frac{1}{(\sec\theta+\tan\theta)}$$

$$=\frac{\sec\theta+\tan\theta+\sec\theta-\tan\theta}{(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}$$

$$=\frac{2\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\sec\theta}{1}=2\sec\theta=\text{R.H.S.}$$

(v) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$

$$\text{L.H.S.}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$$

$$=\text{R.H.S.}$$

10. यदि $\tan\theta+\sin\theta=p$ तथा $\tan\theta-\sin\theta=q$ तो सिद्ध कीजिए—

$$p^2-q^2=4\sqrt{pq}$$

हल– दिया है—

$$p=\tan\theta+\sin\theta$$

या $$p^2=(\tan\theta+\sin\theta)^2$$

$$=\tan^2\theta+\sin^2\theta+2\tan\theta\sin\theta$$

तथा $$q=\tan\theta-\sin\theta$$

या $$q^2=(\tan\theta-\sin\theta)^2$$

$$=\tan^2\theta+\sin^2\theta-2\tan\theta\sin\theta$$

$$\text{L.H.S.}=p^2-q^2$$

$$=\tan^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\tan\theta-$$
$$(\tan^2\theta+\sin^2\theta-2\tan\theta\sin\theta)$$

$$=\tan^2\theta+\sin^2\theta+2\tan\theta\sin\theta-\tan^2\theta$$
$$-\sin^2\theta+2\tan\theta\sin\theta$$

$$=4\tan\theta\sin\theta=4\sqrt{\tan^2\theta\sin^2\theta}$$

$$=4\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times(1-\cos^2\theta)}=4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)}$$

$$=4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta\right)}$$

$$=4\sqrt{\tan^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$=4\sqrt{(\tan\theta+\sin\theta)(\tan\theta-\sin\theta)}$$

$$=4\sqrt{pq}$$

$$=\text{R.H.S.}$$

11. यदि $\sec A+\tan A=a$ है तो सिद्ध कीजिए— $\frac{a^2-1}{a^2+1}=\sin A$

हल– दिया है—

$$\sec A+\tan A=a$$

या $(\sec A+\tan A)^2=a^2$

या $\sec^2 A+\tan^2 A+2\tan A\sec A=a^2$

अतः $a^2-1=\sec^2 A+\tan^2 A+2\tan A\sec A-1$

$=\sec^2 A-1+\tan^2 A+2\tan A\sec A$

$=\tan^2 A+\tan^2 A+2\tan A\sec A$

$[\sec^2 A-1=\tan^2 A]$

$=2\tan^2 A+2\tan A\sec A$

$=2\tan A(\tan A+\sec A)$

तथा $a^2+1=\sec^2 A+\tan^2 A+2\tan A\sec A+1$

$=\sec^2 A+1+\tan^2 A+2\tan A\sec A$

$=\sec^2 A+\sec^2 A+2\tan A\sec A$

$[\because \sec^2 A=1+\tan^2 A]$

$=2\sec^2 A+2\tan A\sec A$

$=2\sec A(\sec A+\tan A)$

$=2\sec A(\tan A+\sec A)$

L.H.S. $=\frac{a^2-1}{a^2+1}$

$=\frac{2\tan A(\tan A+\sec A)}{2\sec A(\tan A+\sec A)}$

$=\frac{\tan A}{\sec A}=\frac{1}{\sec A}\times\tan A=\cos A\times\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A$

$=$R.H.S.

12. यदि $x=a\cos\theta-b\sin\theta$ तथा $y=a\sin\theta+b\cos\theta$ तब सिद्ध कीजिए—

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

हल– दिया है—

$$x=a\cos\theta-b\sin\theta$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$x^2=(a\cos\theta-b\sin\theta)^2$$

या $x^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2ab\cos\theta\cdot\sin\theta$ ...(1)

तथा $y=a\sin\theta+b\cos\theta$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$y^2=(a\sin\theta+b\cos\theta)^2$$

या $y^2=a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$x^2+y^2 = a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2ab\cos\theta\sin\theta+$$
$$a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta$$

या $x^2+y^2 = a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta$

या $x^2+y^2 = a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

या $x^2+y^2 = a^2\times1+b^2\times1$

या $x^2+y^2 = a^2+b^2$ **इति सिद्धम**

13. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=3$ **(ii)** $\dfrac{\cos\theta}{\text{cosec}\,\theta+1}+\dfrac{\cos\theta}{\text{cosec}\,\theta-1}=2$

(iii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=4$

हल– (i) दी गई समीकरण,

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=3$$

या $\sin^2\theta = 3-3\sin^2\theta$

या $\sin^2\theta+3\sin^2\theta = 3$

या $4\sin^2\theta = 3$

या $\sin^2\theta = \dfrac{3}{4}$

या $\sin\theta = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

अब, यदि $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

या $\sin\theta = \sin 60^\circ$ तथा $\sin\theta = \sin 120^\circ$

या $\theta = \mathbf{60^\circ}$ या $\theta = \mathbf{120^\circ}$ **उत्तर**

(ii) दी गई समीकरण,

$$\frac{\cos\theta}{\text{cosec}\,\theta+1}+\frac{\cos\theta}{\text{cosec}\,\theta-1}=2$$

या $\cos\theta\left(\dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta+1}+\dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta-1}\right)=2$

या $\cos\theta\left\{\dfrac{\text{cosec}\,\theta-1+\text{cosec}\,\theta+1}{(\text{cosec}\,\theta+1)(\text{cosec}\,\theta-1)}\right\}=2$

या $\cos\theta\left\{\dfrac{2\text{cosec}\,\theta}{\text{cosec}^2\theta-1^2}\right\}=2$

या $\cos\theta\left(\dfrac{2\text{cosec}\,\theta}{\text{cosec}^2\theta-1}\right)=2$

या $\cos\theta\left(\frac{2\operatorname{cosec}\theta}{\cot^2\theta}\right)=2$ $(\because \cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1)$

या $\frac{2\cos\theta\times\operatorname{cosec}\theta}{\cot^2\theta}=2$

या $\frac{\cos\theta\times\frac{1}{\sin\theta}}{\cot^2\theta}=1$ या $\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cot^2\theta}=1$

या $\frac{\cot\theta}{\cot^2\theta}=1$ या $\frac{1}{\cot\theta}=1$

या $\cot\theta=1$

या $\cot\theta=\cot 45^\circ$

या $\theta=\mathbf{45^\circ}$ **उत्तर**

(iii) दी गई समीकरण,

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=4$

या $\sin\theta\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}\right)=4$

या $\sin\theta\left\{\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\right\}=4$

या $\sin\theta\left\{\frac{2}{1^2-\cos^2\theta}\right\}=4$

या $\sin\theta\left(\frac{2}{1-\cos^2\theta}\right)=4$

या $\frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=4$ या $\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=4$

या $\frac{2}{\sin\theta}=4$ या $\frac{\sin\theta}{2}=\frac{1}{4}$

या $\sin\theta=\frac{2}{4}$ या $\sin\theta=\frac{1}{2}$

या $\sin\theta=\sin 30^\circ$

या $\theta=\mathbf{30^\circ}$ **उत्तर**

14. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

(v) $\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}=\operatorname{cosec}A+\cot A$ ($\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$ सर्वसमिका का प्रयोग कीजिए।)

(vi) $\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}=\tan\theta$

(vii) $(\sin A+\operatorname{cosec}A)^2+(\cos A+\sec A)^2=7+\tan^2 A+\cot^2 A$

(viii) $(\operatorname{cosec}A-\sin A)(\sec A-\cos A)=\frac{1}{\tan A+\cot A}$

(ix) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2=\tan^2 A$

हल– (i) सिद्ध करना है—

$$(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\text{L.H.S.}=(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है—

$$\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}=\frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{2}{\cos A}=2\sec A=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है—

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\frac{1}{\cot\theta}}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\frac{1}{\cot\theta}}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta(1-\cot\theta)} + \frac{\cot\theta}{\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta}}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta(1-\cot\theta)} + \frac{\cot^2\theta}{(\cot\theta-1)}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta(1-\cot\theta)} - \frac{\cot^2\theta}{(1-\cot\theta)}$$

$$= \frac{1-\cot^3\theta}{\cot\theta(1-\cot\theta)} = \frac{1^3-\cot^3\theta}{\cot\theta(1-\cot\theta)}$$

$$= \frac{(1-\cot\theta)(1+\cot^2\theta+\cot\theta)}{\cot\theta(1-\cot\theta)}$$

$$= \frac{1+\cot^2\theta+\cot\theta}{\cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta} + \frac{\cot^2\theta}{\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{\cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta} + \cot\theta + 1 = \tan\theta + \cot\theta + 1$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1 = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta} + 1$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\cdot\sin\theta} + 1 = 1 + \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= 1 + \sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है—

$$\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \frac{\cos A(1+\cos A)}{\cos A}$$

$$= (1+\cos A)$$

या $$= \frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{(1-\cos A)}$$

$$= \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = \text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है—

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \frac{\cos A - (\sin A - 1)}{\cos A + (\sin A - 1)}$$

$$= \frac{\{\cos A - (\sin A - 1)\}\{\cos A - (\sin A - 1)\}}{\{\cos A + (\sin A - 1)\}\{\cos A - (\sin A - 1)\}}$$

$$= \frac{\{\cos A - (\sin A - 1)\}^2}{\{\cos^2 A - (\sin A - 1)^2\}}$$

$$= \frac{\cos^2 A + (\sin A - 1)^2 - 2\cos A(\sin A - 1)}{\{\cos^2 A - (\sin^2 A + 1 - 2\sin A)\}}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A + 1 - 2\sin A - 2\sin A \cos A + 2\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A - 1 + 2\sin A}$$

$$= \frac{1+1-2\sin A - 2\sin A\cos A + 2\cos A}{1-\sin^2 A - \sin^2 A - 1 + 2\sin A}$$

$$= \frac{2 - 2\sin A - 2\sin A\cos A + 2\cos A}{-2\sin^2 A + 2\sin A}$$

$$= \frac{2 - 2\sin A + 2\cos A - 2\sin A\cos A}{2\sin A - 2\sin^2 A}$$

$$= \frac{2(1-\sin A) + 2\cos A(1-\sin A)}{2\sin A(1-\sin A)}$$

$$= \frac{2(1-\sin A)(1+\cos A)}{2\sin A(1-\sin A)} = \frac{1+\cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \operatorname{cosec} A + \cot A = \text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{\{1 - 2(1-\cos^2\theta)\}}{(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \tan\theta \cdot \frac{\{1-2+2\cos^2\theta\}}{(2\cos^2\theta-1)} = \tan\theta \cdot \frac{(2\cos^2\theta-1)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$= \tan\theta = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है—

$$(\sin A+\operatorname{cosec} A)^2+(\cos A+\sec A)^2 = 7 + \tan^2 A+\cot^2 A$$

$$\text{L.H.S.} = (\sin A+\operatorname{cosec} A)^2+(\cos A+\sec A)^2$$

$$= \sin^2 A+\operatorname{cosec}^2 A+2\sin A.\operatorname{cosec} A+\cos^2 A + \sec^2 A+2\cos A.\sec A$$

$$= \sin^2 A+\cos^2 A+\operatorname{cosec}^2 A+\sec^2 A+2+2 \quad [\because \cos A \sec A = 1 = \sin A \operatorname{cosec} A]$$

$$= 1+1+\cot^2 A+1+\tan^2 A+4$$

$$= 7+\tan^2 A+\cot^2 A = \text{R.H.S.}$$

(viii) $(\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A) = \dfrac{1}{\tan A+\cot A}$

$$\text{L.H.S.} = (\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A}-\sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A}-\cos A\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 A.\sin^2 A}{\sin A\cos A} = \frac{\cos A.\sin A}{1}$$

$$= \frac{\cos A.\sin A}{\sin^2 A+\cos^2 A} = \frac{1}{\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}} = \frac{1}{\tan A+\cot A} = \text{R.H.S.}$$

(ix) सिद्ध करना है—

$$\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \frac{1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{\sin^2 A(\cos^2 A + \sin^2 A)}{\cos^2 A(\sin^2 A + \cos^2 A)} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \tan^2 A = \text{R.H.S.}$$

पुनः मध्य पद $\left[\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2 = \tan^2 A$ सिद्ध करना है—

$$\text{L.H.S.} = \left[\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}\right]^2 = \left[\frac{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos A - \sin A)\times \sin A}{\sin A - \cos A)\times \cos A}\right]^2$$

$$= \frac{(\cos A - \sin A)^2 \times \sin^2 A}{(\sin A - \cos A)^2 \times \cos^2 A}$$

$$= \frac{(\sin A - \cos A)^2 \times \sin^2 A}{(\sin A - \cos A)^2 \times \cos^2 A} \quad [\because (a-b)^2 = (b-a)^2]$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \tan^2 A = \text{R.H.S.}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 131,132 व 133 का अवलोकन कीजिए।

■ □ ■

7

दो कोणों के योग तथा अन्तर के त्रिकोणमितीय अनुपात
(Trigonometric Ratios of Sum and Difference of Two Angles)

अभ्यास 7.1

1. सिद्ध कीजिए— $\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$

हल– सिद्ध करना है— $\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$

$$\text{L.H.S.} = \cot 75^\circ$$
$$= \cot(30^\circ + 45^\circ)$$
$$= \frac{\cot 30^\circ \cot 45^\circ - 1}{\cot 45^\circ + \cot 30^\circ} \quad \left[\because \cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3} \times 1 - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$
$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{2}$$
$$= 2 - \sqrt{3} = \text{R.H.S.}$$

2. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\tan(A+B) - \tan B}{1 + \tan(A+B)\tan B} = \tan A$

हल– सिद्ध करना है— $\dfrac{\tan(A+B) - \tan B}{1 + \tan(A+B)\tan B} = \tan A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan(A+B) - \tan B}{1 + \tan(A+B)\tan B} = \tan[(A+B) - B]$$
$$\left[\because \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\right]$$
$$= \tan[A + B - B] = \tan A = \text{R.H.S.}$$

3. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right)\tan\left(\dfrac{3\pi}{4} + \theta\right)$ **(ii)** $\dfrac{\tan 30^\circ + \tan 15^\circ}{\tan 30^\circ \tan 15^\circ - 1}$

(iii) $\dfrac{\tan 69^\circ + \tan 66^\circ}{1 - \tan 69^\circ \tan 66^\circ} + 1$ **(iv)** $\tan 75^\circ$

(v) $\tan 15^\circ + \tan 30^\circ + \tan 15^\circ \tan 30^\circ$

हल– (i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\times\frac{\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{3\pi}{4}\tan\theta}$

$=\frac{1+\tan\theta}{1-1\times\tan\theta}\times\frac{-1+\tan\theta}{1-(-1)\tan\theta}$

$=\frac{(1+\tan\theta)}{(1-\tan\theta)}\times\frac{(\tan\theta-1)}{(1+\tan\theta)}=\frac{(\tan\theta-1)}{(1-\tan\theta)}=-\frac{(1-\tan\theta)}{(1-\tan\theta)}$

$=-1$ **उत्तर**

(ii) $\frac{\tan 30^\circ+\tan 15^\circ}{\tan 30^\circ\tan 15^\circ-1}=-\frac{\tan 30^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 15^\circ}$

$=-\tan(30^\circ+15^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$ **उत्तर**

(iii) $\frac{\tan 69^\circ+\tan 66^\circ}{1-\tan 69^\circ\tan 66^\circ}+1=\tan(69^\circ+66^\circ)+1=\tan 135^\circ+1=-1+1=0$ **उत्तर**

(iv) $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}}{\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}}=\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{2}$

$=2+\sqrt{3}$ **उत्तर**

(v) $\tan 15^\circ+\tan 30^\circ+\tan 15^\circ\tan 30^\circ$

$=\tan 15^\circ+\frac{1}{\sqrt{3}}+\tan 15^\circ\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\tan 15^\circ+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan 15^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\tan 15^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\tan(45^\circ-30^\circ)$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\right]$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$$ उत्तर

4. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\cos(60°+A)+\cos(60°-A)=\cos A$

(ii) $\cot\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=1$

(iii) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

(iv) $\sin(45°+A)-\cos(45°-A)=0$

(v) $\cos A+\cos(120°-A)+\cos(120°+A)=0$

(vi) $\tan(45°+A)=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}$

(vii) $\sin(A-30°)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin A-\cos A)$

(viii) $\cot(45°-A)=\frac{\cot A+1}{\cot A-1}$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\cos(60°+A)+\cos(60°-A)=\cos A$

$$\text{L.H.S.}=\cos(60°+A)+\cos(60°-A)$$

$$=\cos 60°\cos A-\sin 60°\sin A+\cos 60°\cos A+\sin 60°\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\times\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin A+\frac{1}{2}\times\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}\cos A=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos A=\left(\frac{1+1}{2}\right)\cos A$$

$$=\frac{2}{2}\cos A=\cos A=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\cot\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=1$

$$\text{L.H.S.}=\cot\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$$

$$=\frac{\cot\frac{\pi}{4}\cot A-1}{\cot A+\cot\frac{\pi}{4}}\times\frac{\cot A\cot\frac{\pi}{4}+1}{\cot A-\cot\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1\times\cot A-1}{\cot A+1}\times\frac{\cot A\times 1+1}{\cot A-1}$$

$$=\frac{(\cot A-1)}{(\cot A+1)}\times\frac{(\cot A+1)}{(\cot A-1)}$$
$$=1=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

$$\text{L.H.S.}=\sin(A+B)\sin(A-B)$$
$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$
$$=(\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2$$
$$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 B=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\sin(45^\circ+A)-\cos(45^\circ-A)=0$

$$\text{L.H.S.}=\sin(45^\circ+A)-\cos(45^\circ-A)$$
$$=\sin 45^\circ\cos A+\cos 45^\circ\sin A-(\cos 45^\circ\cos A+\sin 45^\circ\sin A)$$
$$=\sin 45^\circ\cos A+\cos 45^\circ\sin A-\cos 45^\circ\cos A-\sin 45^\circ\sin A$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A=0=\text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)=0$

$$\text{L.H.S.}=\cos A+\cos 120^\circ\cos A+\sin 120^\circ\sin A$$
$$+\cos 120^\circ\cos A-\sin 120^\circ\sin A$$
$$=\cos A+\left(-\frac{1}{2}\right)\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\left(-\frac{1}{2}\right)\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$$
$$=\cos A-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$$
$$=\cos A-\frac{1}{2}\cos A-\frac{1}{2}\cos A=\cos A-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos A$$
$$=\cos A-\frac{2}{2}\cos A=\cos A-\cos A=0=\text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\tan(45^\circ+A)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

$$\text{L.H.S.}=\tan(45^\circ+A)=\frac{\tan 45^\circ+\tan A}{1-\tan 45^\circ\tan A}=\frac{1+\tan A}{1-1\times\tan A}$$
$$=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}=\text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\sin(A-30^\circ)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\sin A-\cos A)$

$$\text{L.H.S.}=\sin(A-30^\circ)=\sin A\cos 30^\circ-\cos A\sin 30^\circ$$
$$=\sin A\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos A\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{1}{2}\cos A$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin A-\cos A)=\text{R.H.S.}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\cot(45^\circ - A) = \dfrac{\cot A + 1}{\cot A - 1}$

$$\text{L.H.S.} = \cot(45^\circ - A) = \frac{\cot A \cot 45^\circ + 1}{\cot A - \cot 45^\circ} = \frac{\cot A \times 1 + 1}{\cot A - 1}$$

$$= \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1} = \text{R.H.S.}$$

5. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = \sin x - \cos x$

(ii) $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = \sin x - \cos x$

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = \sqrt{2}(\sin x \cos 45^\circ - \cos x \sin 45^\circ)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)$$

$$= \sin x - \cos x = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)$$

$$= \cos x - \sin x = \text{R.H.S.}$$

6. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\sin(A + B)$, यदि $\sin A = \dfrac{3}{5}$ व $\cos B = \dfrac{5}{13}$

(ii) $\sin(A - B)$, यदि $\cos A = \dfrac{12}{13}$ व $\cos B = \dfrac{8}{17}$

(iii) $\tan(A + B)$, यदि $\tan A = \dfrac{1}{2}$ व $\tan B = \dfrac{1}{3}$

हल– (i) दिया है— $\sin A = \dfrac{3}{5}$

अतः $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \sqrt{\dfrac{25 - 9}{25}}$

$$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

तथा $\cos B = \dfrac{5}{13}$ अतः $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{25}{169}}$

$$= \sqrt{\frac{169 - 25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

अब, $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}$

$=\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{15+48}{65}=\frac{\mathbf{63}}{\mathbf{65}}$ उत्तर

(ii) दिया है— $\cos A=\frac{12}{13}$

अतः $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}$

$=\sqrt{\frac{169-144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}$

तथा $\cos B=\frac{8}{17}$ अतः $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\sqrt{\frac{289-64}{289}}$

$=\sqrt{\frac{225}{289}}=\frac{15}{17}$

अब, $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{5}{13}\times\frac{8}{17}-\frac{12}{13}\times\frac{15}{17}$

$=\frac{40}{221}-\frac{180}{221}=\frac{40-180}{221}=\frac{\mathbf{-140}}{\mathbf{221}}$ उत्तर

(iii) दिया है— $\tan A=\frac{1}{2}$ तथा $\tan B=\frac{1}{3}$

अतः $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3+2}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{6-1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$

$=\mathbf{1}$ उत्तर

7. सिद्ध कीजिए— $\tan A+\tan B+\tan A.\tan B=1$, यदि $A+B=45°$

हल– दिया है— $A+B=45°$

दोनों पक्षों का tan लेने पर $\tan(A+B)=\tan 45°$

या $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$

या $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$

या $\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$ इति सिद्धम्

8. सिद्ध कीजिए— $\cos A(120°+A)+\cos(120°-A)=-\cos A$

हल– सिद्ध करना है— $\cos A(120°+A)+\cos(120°-A)=-\cos A$

L.H.S. $=\cos(120°+A)+\cos(120°-A)$

$=\cos 120°\cos A-\sin 120°\sin A+\cos 120°\cos A+\sin 120°\sin A$

$=2\cos 120°\cos A=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cos A$

$=-\cos A=$ R.H.S.

9. सिद्ध कीजिए— $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

हल– सिद्ध करना है— $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \cos(A+B)\cos(A-B)\\
&= (\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)\\
&= \cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B\\
&= \cos^2 A\cos^2 B-(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)\\
&= \cos^2 A\cos^2 B-(1-\cos^2 B-\cos^2 A+\cos^2 A\cos^2 B)\\
&= \cos^2 A\cos^2 B-1+\cos^2 B+\cos^2 A-\cos^2 A\cos^2 B\\
&= \cos^2 A-1+\cos^2 B=\cos^2 A-(1-\cos^2 B)\\
&= \cos^2 A-\sin^2 B=\text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

10. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin(A-B)+\sin A+\sin(A+B)}{\cos(A-B)+\cos A+\cos(A+B)}=\tan A$

हल– सिद्ध करना है— $\dfrac{\sin(A-B)+\sin A+\sin(A+B)}{\cos(A-B)+\cos A+\cos(A+B)}=\tan A$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \frac{\sin(A-B)+\sin A+\sin(A+B)}{\cos(A-B)+\cos A+\cos(A+B)}\\
&= \frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B+\sin A+\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B+\cos A+\cos A\cos B-\sin A\sin B}\\
&= \frac{\sin A+2\sin A\cos B}{\cos A+2\cos A\cos B}=\frac{\sin A(1+2\cos B)}{\cos A(1+2\cos B)}=\frac{\sin A}{\cos A}\\
&= \tan A=\text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

11. $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A$ को सिद्ध कीजिए—

हल– हम जानते हैं कि—

$$\tan 3A=\tan(2A+A)$$

या $$\tan 3A=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}$$

या $\tan 3A-\tan 3A\tan 2A\tan A=\tan 2A+\tan A$

या $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A$

12. ΔABC में सिद्ध कीजिए कि— $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

हल– हम जानते हैं कि— ΔABC में,

$$A+B+C=180^\circ$$

या $$A+B=180^\circ-C$$

दोनों पक्षों का tan लेने पर,

$$\tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)$$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

या $$\tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$$

या $$\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$$

या $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ इति सिद्धम्

13. यदि $A+B=225°$, तो सिद्ध कीजिए कि— $\dfrac{\cot A}{1+\cot A}\cdot\dfrac{\cot B}{1+\cot B}=\dfrac{1}{2}$

हल– दिया है— $A+B=225° \Rightarrow B=225°-A=180°+(45°-A)$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\cot B}{1+\cot B}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\cot[180°+(45°-A)]}{1+\cot[180°+(45°-A)]}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\cot(45°-A)}{1+\cot(45°-A)}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{\cot 45°\cot A+1}{\cot A-\cot 45°}}{1+\dfrac{\cot 45°\cot A+1}{\cot A-\cot 45°}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{1\times\cot A+1}{\cot A-1}}{1+\dfrac{1\times\cot A+1}{\cot A-1}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{(\cot A+1)}{(\cot A-1)}}{1+\dfrac{\cot A+1}{\cot A-1}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{(\cot A+1)}{(\cot A-1)}}{\dfrac{\cot A-1+\cot A+1}{(\cot A-1)}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{(\cot A+1)}{(\cot A-1)}}{\dfrac{2\cot A}{(\cot A-1)}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{(\cot A-1)(\cot A+1)}{2\cot A(\cot A-1)}=\frac{1}{2}=\text{R.H.S.}$$

14. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\tan 75°+\cot 75°=4$

(ii) $\cos(45°+A)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$

(iii) $\cos(30°-A)-\cos(30°+A)=\sin A$

(iv) $\sqrt{2}(\cos 105°+\sin 105°)=1$

(v) $\dfrac{1-\tan A\tan B}{1+\tan A\tan B}=\dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$

(vi) $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$

(vii) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+60^\circ)$

हल– (i) सिद्ध करना है– $\tan 75^\circ+\cot 75^\circ=4$

$$\text{L.H.S.}=\tan 75^\circ+\cot 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)+\cot(45^\circ+30^\circ)$$

$$=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}+\frac{\cot 45^\circ\cot 30^\circ-1}{\cot 30^\circ+\cot 45^\circ}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1\times\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}+\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{3-1}$$

$$=\frac{8}{2}=4=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\cos(45^\circ+A)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$

$$\text{L.H.S.}=\cos(45^\circ+A)=\cos 45^\circ\cos A-\sin 45^\circ\sin A$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\cos(30^\circ-A)-\cos(30^\circ+A)=\sin A$

$$\text{L.H.S.}=\cos(30^\circ-A)-\cos(30^\circ+A)$$

$$=\cos 30^\circ\cos A+\sin 30^\circ\sin A-(\cos 30^\circ\cos A-\sin 30^\circ\sin A)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\sin A+\frac{1}{2}\sin A=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin A=\frac{2}{2}\sin A=\sin A=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\sqrt{2}(\cos 105^\circ+\sin 105^\circ)=1$

$$\text{L.H.S.}=\sqrt{2}(\cos 105^\circ+\sin 105^\circ)$$

$$=\sqrt{2}[\cos(60^\circ+45^\circ)+\sin(60^\circ+45^\circ)]$$

$$=\sqrt{2}[\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ+\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ]$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1+1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\times 2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 = \textbf{R. H. S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\dfrac{1-\tan A \tan B}{1+\tan A \tan B} = \dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\tan A \tan B}{1+\tan A \tan B} = \frac{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1+\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos A\cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B + \sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\dfrac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos(A-B)}{\cos A\cos B}}$$

$$= \frac{\cos(A+B)\cos A\cos B}{\cos(A-B)\cos A\cos B} = \frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)} = \textbf{R. H. S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} + \dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} = 0$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}$$

$$= \frac{\sin A\cos B - \cos A\sin B}{\cos A\cos B} + \frac{\sin B\cos C - \cos B\sin C}{\cos B\cos C} + \frac{\sin C\cos A - \cos C\sin A}{\cos C\cos A}$$

$$= \frac{\sin A\cos B\cos C - \cos A\sin B\cos C + \cos A\sin B\cos C - \cos A\cos B\sin C + \cos B\sin C\cos A - \cos B\cos C\sin A}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$= \frac{0}{\cos A\cos B\cos C} = 0 = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x+60^\circ)$

$$\text{R.H.S.} = 2\sin(x+60^\circ) = 2(\sin x\cos 60^\circ + \cos x\sin 60^\circ)$$

$$= 2\left(\sin x\times\frac{1}{2} + \cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{2}(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$$= \sin x + \sqrt{3}\cos x = \text{L.H.S.}$$

15. ΔABC में सिद्ध कीजिए— $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

हल– हम जानते हैं कि ΔABC में,

$$A + B + C = 180^\circ$$

या $$(A+B) = (180^\circ - C)$$

दोनों पक्षों का cot लेने पर

$$\cot(A+B) = \cot(180^\circ - C)$$

या $\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}=-\cot C$

या $\cot A\cot B-1=-\cot B\cot C-\cot C\cot A$

या $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ इति सिद्धम्

16. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\tan\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cot\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

(ii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right).\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}+\theta\right)=-1$

(iii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)=2\sec 2A$

(iv) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{1}{2}-\sin^2 x$

(v) $\sin(A-B)\sin(A+B)+\sin(B-C)\sin(B+C)+\sin(C-A)\sin(C+A)=0$

(vi) $\tan(A-B)=0.375$, यदि $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ व $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\tan\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cot\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$$\text{L.H.S.}=\tan\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\tan A-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan A\times\tan\frac{\pi}{4}}+\frac{\cot A\cot\frac{\pi}{4}-1}{\cot\frac{\pi}{4}+\cot A}$$

$$=\frac{\tan A-1}{1+\tan A\times 1}+\frac{\cot A\times 1-1}{1+\cot A}$$

$$=\frac{\tan A-1}{1+\tan A}+\frac{\cot A-1}{1+\cot A}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-1}{1+\frac{\sin A}{\cos A}}+\frac{\frac{\cos A}{\sin A}-1}{1+\frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{\frac{\sin A-\cos A}{\cos A}}{\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}}+\frac{\frac{\cos A-\sin A}{\sin A}}{\frac{\sin A+\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{(\sin A-\cos A)\cos A}{(\sin A+\cos A)\cos A}+\frac{(\cos A-\sin A)\sin A}{(\sin A+\cos A)\sin A}$$

$$=\frac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}+\frac{\cos A-\sin A}{\sin A+\cos A}$$

$$=\frac{\sin A-\cos A+\cos A-\sin A}{\sin A+\cos A}$$

$$= \frac{0}{\sin A + \cos A} = 0 = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right) = -1$

$$\text{L.H.S.} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} \cdot \frac{\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{3\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \frac{1+\tan\theta}{1-1\times\tan\theta} \cdot \frac{-1+\tan\theta}{1-(-1)\tan\theta} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} \times \frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}$$

$$= \frac{-(1-\tan\theta)}{(1-\tan\theta)} \times \frac{(1+\tan\theta)}{(1+\tan\theta)} = -1 = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right) = 2\sec 2A$

$$\text{L.H.S.} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan A}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan A} + \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan A}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan A}$$

$$= \frac{1+\tan A}{1-1\times\tan A} + \frac{1-\tan A}{1+1\times\tan A} = \frac{1+\tan A}{1-\tan A} + \frac{1-\tan A}{1+\tan A}$$

$$= \frac{1+\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}} + \frac{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A} + \frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}$$

$$= \frac{(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin A)^2}{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A+\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$= \frac{2\sin^2 A+2\cos^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A} = \frac{2(\sin^2 A+\cos^2 A)}{\cos 2A}$$

$$=\frac{2\times 1}{\cos 2A}=2\sec 2A=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{2}-\sin^2 x$

$$\text{L.H.S.}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{2}(1-\sin^2 x-\sin^2 x)$$

$$=\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)=\frac{1}{2}-\sin^2 x=\text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\sin(A-B)\sin(A+B)+\sin(B-C)\sin(B+C)+\sin(C-A)\sin(C+A)=0$

$$\text{L.H.S.}=\sin(A-B)\sin(A+B)+\sin(B-C)\sin(B+C)+\sin(C-A)\sin(C+A)$$

$$=\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 B-\sin^2 C+\sin^2 C-\sin^2 A$$

$$[\because \sin(A-B)\sin(A+B)=\sin^2 A-\sin^2 B]$$

$$=0=\text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\tan(A-B)=0.375$, यदि $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ व $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

$$\text{L.H.S.}=\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}}{1+\frac{\sqrt{3}}{(4-\sqrt{3})}\times\frac{\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{3})-\sqrt{3}(4-\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})}}{1+\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\frac{4\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}+3}{4^2-(\sqrt{3})^2}}{1+\frac{\sqrt{3}^2}{4^2-(\sqrt{3})^2}}=\frac{\frac{3+3}{16-3}}{1+\frac{3}{16-3}}=\frac{\frac{6}{13}}{1+\frac{3}{13}}$$

$$= \frac{\frac{6}{13}}{\frac{16}{13}} = \frac{6 \times 13}{16 \times 13} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = \text{R.H.S.}$$

अभ्यास 7.2

1. $\sin A = \frac{3}{5}$ तो $\tan 2A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\sin A = \frac{3}{5} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

अतः आधार $= \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{लम्ब}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

अतः $\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{3}{4}$

अब $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$

$= \frac{3 \times 16}{7 \times 2} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ उत्तर

2. यदि $\cos 2A = \frac{13}{36}$ हो तो $\cos A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\cos 2A = \frac{13}{36}$

या $2\cos^2 A - 1 = \frac{13}{36}$ $[\because 2\cos^2 A - 1 = \cos 2A]$

या $2\cos^2 A = \frac{13}{36} + 1 = \frac{13+36}{36} = \frac{49}{36}$

या $\cos^2 A = \frac{49}{2 \times 36}$

या $\cos A = \sqrt{\frac{49}{2 \times 36}} = \frac{7}{6\sqrt{2}}$ उत्तर

3. यदि $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ हो, तो $\sin 22\frac{1}{2}°$ का मान बताइए।

हल– दिया है— $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

या $1 - 2\sin^2 \frac{45°}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\because 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} = \cos A\right]$

या $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sin^2 \frac{45°}{2}$

या $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 2\sin^2 \frac{45°}{2}$

या $2\sin^2\frac{45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

या $\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

या $\sin 22\frac{1}{2}^\circ=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ उत्तर

4. यदि $\cos A=\frac{3}{5}$ तथा $\cos B=\frac{4}{5}$ हो, तो $\cos\frac{1}{2}(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि A और B दोनों धनात्मक न्यून कोण हैं।

हल– दिया है— $\cos A=\frac{3}{5}$

अत: $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ से

$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

तथा $\cos B=\frac{4}{5}$

अत: $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}$ से

$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

अब $\cos(A-B)=2\cos^2\frac{A-B}{2}-1$ से

$\cos A\cos B+\sin A\sin B=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)-1$

या $\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)-1$

या $\frac{12}{25}+\frac{12}{25}=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)-1$

या $\frac{12+12}{25}=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)-1$

या $\frac{24}{25}+1=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)$

या $\frac{24+25}{25}=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)$

या $\frac{49}{50}=\cos^2\frac{1}{2}(A-B)$

या $\cos\frac{1}{2}(A-B)=\sqrt{\frac{49}{50}}$

या $\cos\frac{1}{2}(A-B)=\frac{7}{5\sqrt{2}}$ उत्तर

5. $\sin 2A$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि—

(i) $\cos A = \frac{12}{13}$, (ii) $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (iii) $\cos A = \frac{5}{13}$, (iv) $\tan A = \frac{5}{12}$

हल– (i) दिया है— $\cos A = \frac{12}{13}$

अत: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}}$

$= \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}}$

$\sin A = \frac{5}{13}$

अब $\sin 2A = 2\sin A \cos A = 2\times\frac{5}{13}\times\frac{12}{13} = \mathbf{\frac{120}{169}}$ उत्तर

(ii) दिया है— $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अत: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$ से

$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

या $\sin A = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4-3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

अब $\sin 2A = 2\sin A \cos A$ से

$= 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ उत्तर

(iii) दिया है— $\cos A = \frac{5}{13}$

अत: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$ से

$\sin A = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

अब $\sin 2A = 2\sin A \cos A = 2\times\frac{12}{13}\times\frac{5}{13} = \mathbf{\frac{120}{169}}$ उत्तर

(iv) दिया है— $\tan A = \frac{5}{12}$

अत: $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ से

या $\sin 2A = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{\frac{5}{6}}{1+\frac{25}{144}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{144+25}{144}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{169}{144}}$

$$= \frac{144 \times 5}{6 \times 169} = \frac{120}{169}$$ उत्तर

6. यदि $\cos A = \frac{1}{2}$ हो, तो $\tan 2A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\cos A = \frac{1}{2}$

अतः $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ से

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अतः $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

अब, $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$ उत्तर

7. यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो $\tan 2A$ का मान निकालिए।

हल– दिया है— $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

हम जानते हैं कि— $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \times 3}{2 \times \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$ उत्तर

8. यदि $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\cos 3A$, (ii) $\sin 3A$, (iii) $\tan 3A$, (iv) $\sin 2A$

हल– दिया है— $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अतः $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

तथा $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(i) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$ उत्तर

(ii) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A = 3\times\frac{1}{2} - 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} - 4\times\frac{1}{8}$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ उत्तर

(iii) $\tan 3A = \frac{\sin 3A}{\cos 3A} = \frac{1}{0} = \infty$ उत्तर

(iv) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

9. यदि $2\cos^2 A = \cos^2 45° + \sin 60°$, तो $\cos 2A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

$$2\cos^2 A = \cos^2 45° + \sin 60°$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

अब $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{3}-2}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ उत्तर

10. $\frac{\sin^3 15° - \cos^3 15°}{\sin 15° - \cos 15°}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल–

$$\frac{\sin^3 15° - \cos^3 15°}{\sin 15° - \cos 15°} = \frac{(\sin 15° - \cos 15°)(\sin^2 15° + \cos^2 15° + \sin 15°\cos 15°)}{(\sin 15° - \cos 15°)}$$

$$= 1 + \sin 15°\cos 15° = 1 + \frac{2\sin 15°\cos 15°}{2} = 1 + \frac{\sin 30°}{2}$$

$$= 1 + \frac{1/2}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$ उत्तर

11. यदि $\tan A = 1$ तो $(\sin A + \cos A)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\tan A = 1$

$$(\sin A + \cos A)^2 = \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A\cos A$$

$$= 1 + \sin 2A = 1 + \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = 1 + \frac{2\times 1}{1+1^2}$$

$$= 1 + \frac{2}{1+1} = 1 + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$$ उत्तर

12. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + \sin 2A$ (ii) $(\sin A - \cos A)^2 = 1 - \sin 2A$

(iii) $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A$ (iv) $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$

(v) $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \cot A$ (vi) $\cot A + \tan A = 2\operatorname{cosec} 2A$

(vii) $1 + \tan 2A.\tan A = \sec 2A$ (viii) $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \sqrt{\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}}$

(ix) $\frac{\cos 2A}{1-\sin 2A}=\cot(45°-A)$ (x) $\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)$

(xi) $\frac{2\tan 15°}{1-\tan^2 15°}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (xii) $\sec^2 A(1+\sec 2A)=2\sec 2A$

(xiii) $\text{cosec}2A+\cot 2A=\cot A$

हल-- (i) सिद्ध करना है— $(\sin A+\cos A)^2=1+\sin 2A$

$$\text{L.H.S.}=(\sin A+\cos A)^2=\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A$$
$$=1+\sin 2A=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $(\sin A-\cos A)^2=1-\sin 2A$

$$\text{L.H.S.}=(\sin A-\cos A)^2=\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A$$
$$=1-\sin 2A=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\cos^4 A-\sin^4 A=\cos 2A$

$$\text{L.H.S.}=\cos^4 A-\sin^4 A$$
$$=(\cos^2 A+\sin^2 A)(\cos^2 A-\sin^2 A)$$
$$=1\times\cos 2A=\cos 2A=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\cot A-\tan A=2\cot 2A$

$$\text{L.H.S.}=\cot A-\tan A=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{\cos 2A}{\sin A\cos A}=\frac{2\cos 2A}{2\sin A\cos A}=\frac{2\cos 2A}{\sin 2A}$$
$$=2\cot 2A=\text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\cot A$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\frac{2\sin A\cos A}{1-(1-2\sin^2 A)}=\frac{2\sin A\cos A}{1-1+2\sin^2 A}$$
$$=\frac{2\sin A\cos A}{2\sin^2 A}=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A=\text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\cot A+\tan A=2\text{cosec}2A$

$$\text{L.H.S.}=\cot A+\tan A=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{1}{\sin A\cos A}=\frac{2}{2\sin A\cos A}=\frac{2}{\sin 2A}$$
$$=2\text{cosec}2A=\text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $1+\tan 2A.\tan A=\sec 2A$

$$\text{L.H.S.}=1+\tan 2A.\tan A=1+\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\tan A$$
$$=1+\frac{2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}=\frac{1-\tan^2+2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}=\frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}$$

$$= \frac{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{\cos 2A} = \sec 2A = \text{R.H.S.}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\frac{\sin A+\cos A}{\sin A-\cos A} = \sqrt{\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin A+\cos A}{\sin A-\cos A} \text{ या } = \sqrt{\frac{(\sin A+\cos A)^2}{(\sin A-\cos A)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}} = \text{R.H.S.}$$

(ix) सिद्ध करना है— $\frac{\cos 2A}{1-\sin 2A} = \cot(45°-A)$

$$\text{R.H.S.} = \cot(45°-A) = \frac{\cot 45°\cot A+1}{\cot A-\cot 45°} = \frac{1\times\cot A+1}{\cot A-1}$$

$$= \frac{\cot A+1}{\cot A-1} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A}+1}{\frac{\cos A}{\sin A}-1} = \frac{\frac{\cos A+\sin A}{\sin A}}{\frac{\cos A-\sin A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A} = \frac{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}{(\cos A-\sin A)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A}$$

$$= \frac{\cos 2A}{1-\sin 2A} = \text{L.H.S.}$$

(x) सिद्ध करना है— $\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)$

$$\text{R.H.S.} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right) = \left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\right]^2$$

$$= \left[\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan A}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan A}\right]^2 = \left[\frac{1+\frac{\sin A}{\cos A}}{1-1\times\frac{\sin A}{\cos A}}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}\right]^2=\left[\frac{(\sin A+\cos A)\cos A}{(\cos A-\sin A)\cos A}\right]^2$$

$$=\left[\frac{(\sin A+\cos A)}{(\cos A-\sin A)}\right]^2=\frac{(\sin A+\cos A)^2}{(\cos A-\sin A)^2}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A}{\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}=\text{L.H.S.}$$

(xi) सिद्ध करना है— $\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\tan 2\times 15^\circ=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\text{R.H.S.}$$

(xii) सिद्ध करना है— $\sec^2 A(1+\sec 2A)=2\sec 2A$

$$\text{L.H.S.}=\sec^2 A(1+\sec 2A)=\frac{1}{\cos^2 A}\left(1+\frac{1}{\cos 2A}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos^2 A}\left(\frac{\cos 2A+1}{\cos 2A}\right)=\frac{1}{\cos^2 A}\left(\frac{2\cos^2 A-1+1}{\cos 2A}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos^2 A}\times\frac{2\cos^2 A}{\cos 2A}=\frac{2}{\cos 2A}=2\sec 2A=\text{R.H.S.}$$

(xiii) सिद्ध करना है— $\operatorname{cosec}2A+\cot 2A=\cot A$

$$\text{L.H.S.}=\operatorname{cosec}2A+\cot 2A=\frac{1}{\sin 2A}+\frac{\cos 2A}{\sin 2A}=\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}$$

$$=\frac{1+2\cos^2 A-1}{2\sin A\cos A}=\frac{2\cos^2 A}{2\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A=\text{R.H.S.}$$

13. सिद्ध कीजिए—

(i) $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}=\sin 2A$ **(ii)** $\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\tan 2A$

(iii) $2\cos(45^\circ+x).\cos(45^\circ-x)=\cos 2x$

(iv) $\tan 75^\circ+\cot 75^\circ=4$ **(v)** $\tan A+\cot A=2\operatorname{cosec}2A$

(vi) $\frac{\cot A-\tan A}{\cot A+\tan A}=\cos 2A$

(vii) $\frac{\sin 8A}{\sin A}=8\operatorname{cosec}A.\cos 2A.\cos 4A$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}=\sin 2A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{2\frac{\sin A}{\cos A}}{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\frac{2\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{2\sin A\cos^2 A}{\cos A(\sin^2 A+\cos^2 A)} = \frac{2\sin A\cos A}{1}$$

$$= 2\sin A\cos A = \sin 2A = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \tan 2A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{2\sin A\cos^2 A}{\cos A(\cos^2 A-\sin^2 A)} = \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \tan 2A = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $2\cos(45^\circ+x)\cdot\cos(45^\circ-x) = \cos 2x$

$$\text{L.H.S.} = 2\cos(45^\circ+x)\cdot\cos(45^\circ-x)$$

$$= 2(\cos 45^\circ\cos x-\sin 45^\circ\sin x)(\cos 45^\circ\cos x+\sin 45^\circ\sin x)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$$

$$= 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

$$= \frac{2}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x) = \cos 2x = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\tan 75^\circ+\cot 75^\circ = 4$

$$\text{L.H.S.} = \tan 75^\circ+\cot 75^\circ = \tan(45^\circ+30^\circ)+\cot(45^\circ+30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}+\frac{\cot 45^\circ\cot 30^\circ-1}{\cot 30^\circ+\cot 45^\circ}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1\times\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{8}{2} = 4 = \text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\tan A+\cot A = 2\operatorname{cosec} 2A$

$$\text{L.H.S.} = \tan A + \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A} = \frac{2 \times 1}{2 \times \sin A \cos A} = \frac{2}{\sin 2A}$$

$$= 2\operatorname{cosec} 2A = \text{R. H. S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cot A - \tan A}{\cot A + \tan A} = \cos 2A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cot A - \tan A}{\cot A + \tan A} = \frac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \dfrac{\sin A}{\cos A}} = \frac{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A \cos A}}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}}$$

$$= \frac{(\cos^2 A - \sin^2 A)\sin A \cos A}{(\cos^2 A + \sin^2 A)\sin A \cos A} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos 2A}{1} = \cos 2A = \text{R. H. S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\dfrac{\sin 8A}{\sin A} = 8 \operatorname{cosec} A \cdot \cos 2A \cdot \cos 4A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 8A}{\sin A} = \frac{\sin 2(4A)}{\sin A} = \frac{2\sin 4A \cos 4A}{\sin A}$$

$$= \frac{2 \cdot 2\sin 2A \cos 2A \cos 4A}{\sin A}$$

$$= \frac{4 \cdot 2\sin A \cos A \cos 2A \cos 4A}{\sin A}$$

$$= 8 \cdot \cos A \cos 2A \cos 4A = \text{R. H. S.}$$

14. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\dfrac{\dfrac{1}{\tan A} - \tan A}{\cot A + \dfrac{1}{\cot A}} = 2\cos^2 A - 1$ **(ii)** $\dfrac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$

(iii) $\dfrac{1 - \sin 2A}{1 - \cos 2A} = \dfrac{1}{2}(\cot A - 1)^2$ **(iv)** $\dfrac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

(v) $\dfrac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$ **(vi)** $\dfrac{1 - \cos 2A + \sin 2A}{1 + \cos 2A + \sin 2A} = \tan A$

(vii) $\cos A \cos(60° + A) \cos(60° - A) = \dfrac{1}{4}\cos 3A$

(viii) $\sin^2(A + B) - \sin^2(A - B) = 2 \sin 2A \sin 2B$

(ix) $\dfrac{1 - \sin 2A}{\cos 2A} = \dfrac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$

(x) $1 + \cos^2 2\theta = 2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\dfrac{\dfrac{1}{\tan A} - \tan A}{\cot A + \dfrac{1}{\cot A}} = 2\cos^2 A - 1$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\frac{1}{\tan A} - \tan A}{\cot A + \frac{1}{\cot A}} = \frac{\cot A - \tan A}{\cot A + \tan A}$$

$$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A \cos A}}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A} = \frac{\cos^2 A - (1 - \cos^2 A)}{1}$$

$$= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A = 2\cos^2 A - 1 = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 A)}{1 + 2\cos^2 A - 1} = \frac{1 - 1 + 2\sin^2 A}{2\cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = \tan^2 A = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\frac{1 - \sin 2A}{1 - \cos 2A} = \frac{1}{2}(\cot A - 1)^2$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1 - \sin 2A}{1 - \cos 2A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A - 2\sin A \cos A}{1 - (1 - 2\sin^2 A)}$$

$$\left[\because 1 = \sin^2 A + \cos^2 A,\ \sin 2A = 2\sin A \cos A,\ \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A\right]$$

$$= \frac{(\cos A - \sin A)^2}{1 - 1 + 2\sin^2 A} = \frac{(\cos A - \sin A)^2}{2\sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos A - \sin A}{\sin A}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\sin A}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(\cot A - 1)^2 = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{2\sin A \cos A}{1 + 2\cos^2 A - 1}$$

$$= \frac{2\sin A \cos A}{2\cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A = \text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \frac{2\sin A\cos A}{1-(1-2\sin^2 A)} = \frac{2\sin A\cos A}{1-1+2\sin^2 A}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{2\sin^2 A} = \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A = \text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\dfrac{1-\cos 2A+\sin 2A}{1+\cos 2A+\sin 2A} = \tan A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\cos 2A+\sin 2A}{1+\cos 2A+\sin 2A}$$

$$= \frac{1-(1-2\sin^2 A)+2\sin A\cos A}{1+2\cos^2 A-1+2\sin A\cos A}$$

$$= \frac{1-1+2\sin^2 A+2\sin A\cos A}{2\cos^2 A+2\sin A\cos A}$$

$$= \frac{2\sin^2 A+2\sin A\cos A}{2\cos^2 A+2\sin A\cos A} = \frac{2\sin A(\sin A+\cos A)}{2\cos A(\cos A+\sin A)}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A) = \dfrac{1}{4}\cos 3A$

$$\text{L.H.S.} = \cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A)$$

$$= \cos A(\cos 60°\cos A-\sin 60°\sin A)(\cos 60°\cos A+\sin 60°\sin A)$$

$$= \cos A\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)\left(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cos A(\cos A-\sqrt{3}\sin A)(\cos A+\sqrt{3}\sin A)$$

$$= \frac{1}{4}\cos A(\cos^2 A-3\sin^2 A)$$

$$= \frac{1}{4}\cos A[(\cos^2 A-3(1-\cos^2 A)]$$

$$= \frac{1}{4}\cos A(\cos^2 A-3+3\cos^2 A)$$

$$= \frac{1}{4}\cos A(4\cos^2 A-3) = \frac{1}{4}(4\cos^3 A-3\cos A)$$

$$[\because \cos 3A = 4\cos^3 A-3\cos A]$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3A = \text{R.H.S.}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\sin^2(A+B)-\sin^2(A-B) = 2\sin 2A\sin 2B$

$$\text{L.H.S.} = \sin^2(A+B)-\sin^2(A-B)$$

$$= \{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$$

$$= \{\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A\cos B-\cos A\sin B\}$$

$$\{\sin A\cos B+\cos A\sin B-(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\}$$

$$= \{(2\sin A\cos B)(\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin A\cos B+\cos A\sin B)\}$$
$$= (2\sin A\cos B)(2\cos A\sin B)=2\sin A\cos B\cdot 2\cos A\sin B$$
$$= 2\sin A\cos A\cdot 2\sin B\cos B=\sin 2A\sin 2B=\text{R.H.S.}$$

(ix) सिद्ध करना है— $\dfrac{1-\sin 2A}{\cos 2A}=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1-\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$
$$=\frac{(\cos A-\sin A)^2}{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}=\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}$$
$$=\frac{\cos A\left(1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\right)}{\cos A\left(1+\dfrac{\sin A}{\cos A}\right)}=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}=\text{R.H.S.}$$

(x) सिद्ध करना है— $1+\cos^2 2\theta=2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$

$$\text{L.H.S.}=1+\cos^2 2\theta=1+(\cos 2\theta)^2$$
$$=1+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2\quad[\because\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta]$$
$$=1+\cos^4\theta+\sin^4\theta-2\cos^2\theta\sin^2\theta$$
$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$[\because 1=\sin^2\theta+\cos^2\theta]$$
$$=\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta$$
$$=\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)+\cos^4\theta+\sin^4\theta$$
$$=\sin^2\theta\times\sin^2\theta+\cos^2\theta\times\cos^2\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta$$
$$=\sin^4\theta+\cos^4\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta$$
$$=2\sin^4\theta+2\cos^4\theta=2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)=\text{R.H.S.}$$

15. यदि $2\tan A=3\tan B$, तो सिद्ध कीजिए कि— $\tan(A-B)=\dfrac{\sin 2B}{5-\cos 2B}$

हल– दिया है— $2\tan A=3\tan B$ या $\tan A=\dfrac{3}{2}\tan B$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\frac{\frac{3}{2}\tan B-\tan B}{1+\frac{3}{2}\tan B\cdot\tan B}=\frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)\tan B}{1+\frac{3}{2}\tan^2 B}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\tan B}{\frac{1}{2}(2+3\tan^2 B)}=\frac{\tan B}{2+3\tan^2 B}=\frac{\frac{\sin B}{\cos B}}{2+3\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}}$$

$$= \frac{\frac{\sin B}{\cos B}}{2\cos^2 B + 3\sin^2 B} = \frac{\sin B \cos^2 B}{\cos B(2\cos^2 B + 3\sin^2 B)}$$

$$= \frac{\sin B \cos B}{2\cos^2 B + 3\sin^2 B} = \frac{2\sin B \cos B}{4\cos^2 B + 6\sin^2 B}$$

$$= \frac{\sin 2B}{4\cos^2 B + 4\sin^2 B + 2\sin^2 B}$$

$$= \frac{\sin 2B}{4(\cos^2 B + \sin^2 B) + 2\sin^2 B}$$

$$= \frac{\sin 2B}{4 \times 1 + 2\sin^2 B} = \frac{\sin 2B}{4 + 2\sin^2 B}$$

$$= \frac{\sin 2B}{4 + (1 - \cos 2B)} \qquad [\because 1 - 2\sin^2 A = \cos 2A]$$

$$= \frac{\sin 2B}{4 + 1 - \cos 2B} = \frac{\sin 2B}{5 - \cos 2B} = \text{R.H.S.}$$

16. सिद्ध कीजिए कि— $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A$

हल– L.H.S. $= \cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A$

$= \cos^3 A(4\cos^3 A - 3\cos A) + \sin^3 A(3\sin A - 4\sin^3 A)$

$= 4\cos^6 A - 3\cos^4 A + 3\sin^4 A - 4\sin^6 A$

$= 4\cos^6 A - 4\sin^6 A + 3\sin^4 A - 3\cos^4 A$

$= 4(\cos^6 A - \sin^6 A) + 3(\sin^4 A - \cos^4 A)$

$= 4[(\cos^2 A)^3 - (\sin^2 A)^3] + 3[(\sin^2 A)^2 - (\cos^2 A)^2]$

$= 4(\cos^2 A - \sin^2 A)[(\cos^2 A)^2 + (\sin^2 A)^2 + \cos^2 A \sin^2 A] + 3(\sin^2 A + \cos^2 A)(\sin^2 A - \cos^2 A)$

$= 4\cos 2A(\cos^4 A + \sin^4 A + \cos^2 A \sin^2 A) + 3 \times 1 (\sin^2 A - \cos^2 A)$

$= 4\cos 2A(\cos^4 A + \sin^4 A - 2\cos^2 A \sin^2 A + 3\cos^2 A \sin^2 A) - 3(\cos^2 A - \sin^2 A)$

$= 4\cos 2A[(\cos^2 A - \sin^2 A)^2 + 3\cos^2 A \sin^2 A] - 3\cos 2A$

$= 4\cos 2A[(\cos 2A)^2 + 3\cos^2 A \sin^2 A] - 3\cos 2A$

$= 4\cos 2A(\cos^2 2A + 3\cos^2 A \sin^2 A) - 3\cos 2A$

$= 4\cos^3 2A + 12\cos 2A.\cos^2 A \sin^2 A - 3\cos 2A$

$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A + 12\cos 2A \cos^2 A \sin^2 A$

$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A(1 - 4\sin^2 A \cos^2 A)$

$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A[1 - (2\sin A \cos A)^2]$

$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A[1 - (\sin 2A)^2]$

$$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A(1-\sin^2 2A)$$
$$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A.\cos^2 2A$$
$$= 4\cos^3 2A - 3\cos^3 2A$$
$$= \cos^3 2A = \text{R.H.S.}$$

17. यदि $\tan A = 1$ तो $(\cos A + \sin A)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\tan A = 1$

अत: $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$$\sec A = \sqrt{1+\tan^2 A}$$
$$= \sqrt{1+(1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

या $$\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

इसी प्रकार $$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अत: $$(\sin A + \cos A)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

18. $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} = 2$ सिद्ध कीजिए।

हल– L.H.S. $= \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

$$= \cos^2\left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= \left[\cos\left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{8}\right)\right]^2 + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= \left(-\cos \frac{7\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos \frac{5\pi}{8}\right)^2 + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= \cos^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= 2\cos^2 \frac{7\pi}{8} + 2\cos^2 \frac{5\pi}{8}$$

$$= 2\cos^2 \frac{7\pi}{8} + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) \qquad \left[\because \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta\right]$$

$$= 2\cos^2 \frac{7\pi}{8} + 2\sin^2\left(\frac{4\pi - 5\pi}{8}\right)$$

$$= 2\cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2\left\{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\right\}^2 + 2\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2$$

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + 2\left(-\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$= 2\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\sin^2\frac{\pi}{8} \qquad \left[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta \right.$$
$$\left. \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta\right]$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) = 2 \times 1 = 2$$

19. सिद्ध कीजिए— $\cos 4A - \cos 2A = 8\sin^4 A - 6\sin^2 A$

हल– L.H.S. $= \cos 4A - \cos 2A$

$= 2\cos^2 2A - 1 - (1 - 2\sin^2 A) \qquad [\because \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A]$

$= 2(\cos 2A)^2 - 1 - 1 + 2\sin^2 A$

$= 2(1 - 2\sin^2 A)^2 - 2 + 2\sin^2 A$

$= 2(1 + 4\sin^4 A - 4\sin^2 A) - 2 + 2\sin^2 A$

$= 2 + 8\sin^4 A - 8\sin^2 A - 2 + 2\sin^2 A$

$= 8\sin^4 A - 6\sin^2 A =$ R.H.S.

20. सिद्ध कीजिए कि— $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \sin 2\alpha$

हल– $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} - \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$

$$= \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} - \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{(1+\tan\alpha)^2 - (1-\tan\alpha)^2}{(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)}$$

$$= \frac{1 + \tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 1 - \tan^2\alpha + 2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{4\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

इसी प्रकार $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 2\sec 2\alpha$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$$

$$= \frac{\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{2\sec 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha . \sec 2\alpha}$$

$$= \sin 2\alpha = \text{R.H.S.} \qquad [\because \cos\theta \sec\theta = 1]$$

21. $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A$ सिद्ध कीजिए।

हल– L.H.S. $= \cos^4 A - \sin^4 A = (\cos^2 A)^2 - (\sin^2 A)^2$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A) = 1 \times \cos 2A$

$= \cos 2A = \text{R.H.S.}$

22. $\frac{1+\cot^2 A}{\cot A} = 2\text{cosec}2A$ सिद्ध कीजिए।

हल– L.H.S. $= \frac{1+\cot^2 A}{\cot A} = \frac{1+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}{\frac{\cos A}{\sin A}} = \frac{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A}}{\frac{\cos A}{\sin A}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 A}}{\frac{\cos A}{\sin A}}$

$= \frac{\sin A}{\sin^2 A \cos A} = \frac{1}{\sin A \cos A} = \frac{2}{2\sin A \cos A}$

$= \frac{2}{\sin 2A} = 2\text{cosec}2A = \text{R.H.S.}$

23. $\frac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)} = \sin 2A$

हल– L.H.S. $= \frac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)} = \cos 2(45°-A)$ $\left[\because \cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}\right]$

$= \cos(90°-2A) = \sin 2A = \text{R.H.S.}$

24. $\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta = \sin\theta \sec\theta$ सिद्ध कीजिए।

हल– L.H.S. $= \frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+2\cos^2\theta-1}$

$= \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + 2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta.\sec\theta = \text{R.H.S.}$

$= \tan\theta = \text{R.H.S.}$

अभ्यास 7.3

1. $\frac{\sin^2 22\frac{1}{2}° - \cos^2 22\frac{1}{2}°}{\sin^2 22\frac{1}{2}° + \cos^2 22\frac{1}{2}°}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल–

$$\frac{\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ - \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ}{\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ + \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ} = \frac{\left(\sin 22\frac{1}{2}^\circ\right)^2 - \left(\cos 22\frac{1}{2}^\circ\right)^2}{1} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \left(\sin 22\frac{1}{2}^\circ\right)^2 - \left(\cos 22\frac{1}{2}^\circ\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 \qquad \left[\because \sin 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \cos 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right]$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$ उत्तर

2. यदि $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तो $\sin 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

हम जानते हैं कि $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

अतः $\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$

या $\sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2}$

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$ उत्तर

3. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2} - \tan\frac{A}{2}\right) = \cot A$ (ii) $\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \tan^2\frac{A}{2}$

(iii) $\frac{\sin A}{1-\cos A} = \cot\frac{A}{2}$ (iv) $\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)^2 = 1 + \sin A$

(v) $\frac{1+\sin A - \cos A}{1+\sin A + \cos A} = \tan\frac{A}{2}$ (vi) $\tan\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \sec A + \tan A$

(vii) $\tan\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sec A - \tan A = \frac{\cos A}{1+\sin A}$

(viii) $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \times \frac{\cos A}{1+\cos A} = \tan\frac{A}{2}$ (ix) $\frac{2\sin\theta + \sin 2\theta}{2\sin\theta - \sin 2\theta} = \cot^2\frac{\theta}{2}$

(x) $(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2 = 4\cos^2\frac{A+B}{2}$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)=\cot A$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\right)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A} \qquad \left[\because \cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2},\ \sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right]$$

$$=\cot A=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\tan^2\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{1+2\cos^2\frac{A}{2}-1}=\frac{1-1+2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\tan^2\frac{A}{2}=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\frac{\sin A}{1-\cos A}=\cot\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1-1+2\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\cot\frac{A}{2}=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$

$$\text{L.H.S.}=\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2$$

$$=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=1+\sin A=\text{R.H.S.} \qquad \left[\because \sin^2 A+\cos^2 A=1,\ 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A\right]$$

(v) सिद्ध करना है— $\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}=\tan\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}$$

$$=\frac{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}-1}$$

$$=\frac{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-1+2\sin^2\frac{A}{2}}{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}-1}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}=\text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)=\sec A+\tan A$

$$\text{L.H.S.}=\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)=\frac{\tan 45^\circ+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan 45^\circ\tan\frac{A}{2}}=\frac{1+\tan\frac{A}{2}}{1-1\times\tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1+\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{\frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{\frac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}{\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos A}$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A} = \sec A + \tan A = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\tan\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right) = \sec A - \tan A = \frac{\cos A}{1+\sin A}$

$$\text{L.H.S.} = \tan\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right) = \frac{\tan 45^\circ - \tan\frac{A}{2}}{1+\tan 45^\circ \tan\frac{A}{2}} = \frac{1-\tan\frac{A}{2}}{1+1\times\tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1-\tan\frac{A}{2}}{1+\tan\frac{A}{2}} = \frac{1-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1+\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{\frac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{\frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos A}{1+\sin A} = \text{R. H. S.}$$

पुनः $\sec A - \tan A = \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1-\sin A}{\cos A} = \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$

$$= \frac{1-\sin^2 A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{\cos^2 A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{\cos A}{1+\sin A}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \times \frac{\cos A}{1+\cos A} = \tan\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \times \frac{\cos A}{1+\cos A}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1+2\cos^2 A - 1} \times \frac{\cos A}{1+\cos A}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A \times \cos A}{2\cos^2 A \times (1+\cos A)} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1+2\cos^2\frac{A}{2}-1} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \tan\frac{A}{2} = \text{R. H. S.}$$

(ix) सिद्ध करना है— $\frac{2\sin\theta + \sin 2\theta}{2\sin\theta - \sin 2\theta} = \cot^2\frac{\theta}{2}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2\sin\theta + \sin 2\theta}{2\sin\theta - \sin 2\theta} = \frac{2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta(1+\cos\theta)}{2\sin\theta(1-\cos\theta)} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}{1-\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{1-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cot^2\frac{\theta}{2} = \text{R. H. S.}$$

(x) सिद्ध करना है— $(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2 = 4\cos^2\frac{A+B}{2}$

$$\text{L.H.S.} = (\cos A + \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$
$$= \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A \cos B + \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B$$
$$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + (\sin^2 B + \cos^2 B) + 2(\cos A \cos B - \sin A \sin B)$$
$$= 1 + 1 + 2\cos(A + B) = 2 + 2\cos(A + B)$$
$$= 2 + 2\left[2\cos^2 \frac{A+B}{2} - 1\right] \quad \left[\because \cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1\right]$$
$$= 2 + 4\cos^2 \frac{A+B}{2} - 2 = 4\cos^2 \frac{A+B}{2} = \text{R.H.S.}$$

4. सिद्ध कीजिए—

(i) $\tan \frac{A}{2} + \cot \frac{A}{2} = 2\operatorname{cosec} A$ **(ii)** $\frac{\sin A}{1 - \cos A} = \cot \frac{A}{2}$

(iii) $\frac{1}{2}\left[\cot \frac{A}{2} - \tan \frac{A}{2}\right] = \cot A$ **(iv)** $\left[\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}\right]^2 = 1 - \sin A$

(v) $\frac{\sin A}{1 + \cos A} = \tan \frac{A}{2}$ **(vi)** $\cos A = \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}$

(vii) $\tan A . \cot \frac{A}{2} - 1 = \sec A$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\tan \frac{A}{2} + \cot \frac{A}{2} = 2\operatorname{cosec} A$

$$\text{L.H.S.} = \tan \frac{A}{2} + \cot \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$
$$= \frac{\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}} = \frac{2}{2\cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}}$$
$$= \frac{2}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\frac{\sin A}{1 - \cos A} = \cot \frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}\right)} = \frac{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{1 - 1 + 2\sin^2 \frac{A}{2}}$$
$$= \frac{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \cot \frac{A}{2} = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\frac{1}{2}\left[\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\right]=\cot A$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{2}\left[\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{\cos A}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos A}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\left[\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right]^2=1-\sin A$

$$\text{L.H.S.}=\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)^2$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=1-\sin A \qquad \left[\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1,\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta\right]$$

$$=\text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\frac{\sin A}{1+\cos A}=\tan\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1+2\cos^2\frac{A}{2}-1}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}=\text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\cos A=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

$$\text{L.H.S.}=\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{1}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} - \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}} = \frac{1 - \tan^2\frac{A}{2}}{1 + \tan^2\frac{A}{2}} = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\tan A . \cot\frac{A}{2} - 1 = \sec A$

$$\text{L.H.S.} = \tan A . \cot\frac{A}{2} - 1 = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} . \cot\frac{A}{2} - 1$$

$$= \frac{2\tan\frac{A}{2} . \cot\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} - 1 = \frac{2}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} - 1$$

$$= \frac{2 - 1 + \tan^2\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} = \frac{1 + \tan^2\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} = \frac{1 + \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{1 - \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}} = \frac{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos A} = \sec A = \text{R.H.S.}$$

5. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\sin\frac{\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}.\sin\frac{3\pi}{5}.\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{5}{16}$

(ii) $\cos^2 48^\circ-\sin^2 12^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{8}$

(iii) $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

(iv) $\sin\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}$

(v) $\cos 2A\cos 2B+\sin^2(A-B)-\sin^2(A+B)=\cos(2A+2B)$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\sin\frac{\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}.\sin\frac{3\pi}{5}.\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{5}{16}$

$$\text{L.H.S.}=\sin\frac{\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}.\sin\frac{3\pi}{5}.\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$=\sin\frac{\pi}{5}.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}=\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$=\sin^2\frac{180^\circ}{5}\cos^2\frac{180^\circ}{10}=\sin^2 36^\circ\cos^2 18^\circ$$

$$=\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2\times\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

$$\left[\because \sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\ \cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right]$$

$$=\frac{(10-2\sqrt{5})}{16}\times\frac{(10+2\sqrt{5})}{16}=\frac{10^2-(2\sqrt{5})^2}{16\times16}$$

$$=\frac{100-20}{16\times16}=\frac{80}{16\times16}=\frac{5}{16}=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\cos^2 48^\circ-\sin^2 12^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{8}$

$$\text{L.H.S.}=\cos^2 48^\circ-\sin^2 12^\circ=\cos(48^\circ+12^\circ)\cos(48^\circ-12^\circ)$$

$$[\because \cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B]$$

$$=\cos 60^\circ.\cos 36^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}\quad\left[\because \cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{8}=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

$$\text{L.H.S.} = \sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ = \sin(24^\circ+6^\circ)\sin(24^\circ-6^\circ)$$

$$[\because \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B]$$

$$= \sin 30^\circ . \sin 18^\circ \qquad \left[\because \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{8} = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\sin\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}$

$$\text{L.H.S.} = \sin\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{180^\circ}{10}\cos\frac{180^\circ}{5} = \sin 18^\circ . \cos 36^\circ$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)}{4} \qquad \left[\because \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right]$$

$$= \frac{5-1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है—

$$\cos 2A \cos 2B + \sin^2(A-B) - \sin^2(A+B) = \cos(2A+2B)$$

$$\text{L.H.S.} = \cos 2A \cos 2B + \sin^2(A-B) - \sin^2(A+B)$$

$$= \cos 2A \cos 2B + \sin(A-B+A+B)\sin(A-B-A-B)$$

$$[\because \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B]$$

$$= \cos 2A \cos 2B + \sin 2A \sin(-2B)$$

$$= \cos 2A \cos 2B - \sin 2A \sin 2B$$

$$[\because \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B]$$

$$= \cos(2A+2B) = \text{R.H.S.}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 149 एवं 150 का अवलोकन कीजिए।

■ □ ■

8

कोणों की ज्या एवं कोज्या के गुणनफल
(Products of Sine and Cosine of Angles)

अभ्यास 8.1

1. $\sin 52\frac{1}{2}^\circ . \sin 7\frac{1}{2}^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\sin 52\frac{1}{2}^\circ . \sin 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2} 2\sin 52\frac{1}{2}^\circ \sin 7\frac{1}{2}^\circ$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(52\frac{1}{2}^\circ - 7\frac{1}{2}^\circ\right) - \cos\left(52\frac{1}{2}^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ\right)\right]$$

$$[\because 2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 45^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$ उत्तर

2. $\cos 315^\circ \cos 75^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\cos 315^\circ \cos 75^\circ = \frac{1}{2} \times 2\cos 315^\circ \cos 75^\circ$

$$= \frac{1}{2}[\cos(315^\circ + 75^\circ) + \cos(315^\circ - 75^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 390^\circ + \cos 240^\circ]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(360^\circ + 30^\circ) + \cos(180^\circ + 60^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 30^\circ - \cos 60^\circ]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$ उत्तर

3. $\sin 105^\circ . \sin 75^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\sin 105^\circ . \sin 75^\circ = \frac{1}{2}(2\sin 105^\circ \sin 75^\circ)$

$$=\frac{1}{2}[\cos(105°-75°)-\cos(105°+75°)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 30°-\cos 180°]=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right]=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$$ उत्तर

4. $2\sin 9A.\cos A$ को योग व अन्तर के रूप में लिखिए।

हल– $2\sin 9A.\cos A=\sin(9A+A)+\sin(9A-A)$

$=\sin 10A+\sin 8A$ उत्तर

5. $\sin 75°\sin 15°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\sin 75°\sin 15°=\frac{1}{2}2\sin 75°\sin 15°$

$$=\frac{1}{2}[\cos(75°-15°)-\cos(75°+15)]$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 60°-\cos 90°)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$$ उत्तर

6. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\sin 7A\cos 3A=\frac{1}{2}(\sin 10A+\sin 4A)$

(ii) $\sin 8A+\sin 2A=2\sin 5A\cos 3A$

(iii) $\cos 7A\cos 3A-\cos 11A\cos A=\sin 8A\sin 4A$

(iv) $\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\sin 7A\cos 3A=\frac{1}{2}(\sin 10A+\sin 4A)$

$$\text{L.H.S.}=\sin 7A\cos 3A=\frac{1}{2}(2\sin 7A\cos 3A)$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(7A+3A)+\sin(7A-3A)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin 10A+\sin 4A]$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 10A+\sin 4A)=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\sin 8A+\sin 2A=2\sin 5A\cos 3A$

$$\text{R.H.S.}=2\sin 5A\cos 3A=\sin(5A+3A)+\sin(5A-3A)$$

$$=\sin 8A+\sin 2A=\text{L.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\cos 7A\cos 3A-\cos 11A\cos A=\sin 8A\sin 4A$

$$\text{L.H.S.}=\cos 7A\cos 3A-\cos 11A\cos A$$

$$=\frac{1}{2}[2\cos 7A\cos 3A]-\frac{1}{2}[2\cos 11A\cos 7A]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(7A+3A)+\cos(7A-3A)]-\frac{1}{2}[\cos(11A+A)-\cos(11A-A)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 10A+\cos 4A]-\frac{1}{2}[\cos 12A+\cos 10A]$$

$$=\frac{1}{2}\cos 10A+\frac{1}{2}\cos 4A-\frac{1}{2}\cos 12A-\frac{1}{2}\cos 10A$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 4A-\cos 12A)$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(8A-4A)-\cos(8A+4A)]$$

$$=\frac{1}{2}2\sin 8A\sin 4A=\sin 8A\sin 4A=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

$$\text{L.H.S.}=\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A)$$

$$=\cos A\frac{1}{2}[2\cos(60°+A)\cos(60°-A)]$$

$$=\cos A\cdot\frac{1}{2}[\cos(60+A+60-A)+\cos(60°+A-60°+A)]$$

$$=\cos A\cdot\frac{1}{2}[\cos 120°+\cos 2A]=\frac{1}{2}\cos A\left[-\frac{1}{2}+\cos 2A\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{2}\cos 2A\cos A$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}[2\cos 2A\cos A]$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{4}[\cos(2A+A)+\cos(2A-A)]$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{4}[\cos 3A+\cos A]$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{4}\cos 3A+\frac{1}{4}\cos A=\frac{1}{4}\cos 3A=\text{R.H.S.}$$

7. $\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)=\frac{1}{4}\sin 3A$ सिद्ध कीजिए।

हल– $\text{L.H.S.}=\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)$

$$=\sin A\frac{1}{2}[2\sin(60°+A)\sin(60°-A)]$$

$$=\sin A\cdot\frac{1}{2}[\cos(60°+A-60°+A)-\cos(60°+A+60°-A)]$$

$$=\sin A\cdot\frac{1}{2}[\cos 2A-\cos 120°]=\frac{1}{2}\sin A\left[\cos 2A-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sin A\left[\cos 2A+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\sin A\cos 2A+\frac{1}{4}\sin A$$

$$=\frac{1}{4}[2\cos 2A\sin A]+\frac{1}{4}\sin A$$

$$= \frac{1}{4}[\sin(2A + A) - \sin(2A - A)] + \frac{1}{4}\sin A$$

$$= \frac{1}{4}[\sin 3A - \sin A] + \frac{1}{4}\sin A = \frac{1}{4}\sin 3A - \frac{1}{4}\sin A + \frac{1}{4}\sin A$$

$$= \frac{1}{4}\sin 3A = \text{R.H.S.}$$

8. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\sin 60^\circ \sin 20^\circ (2\sin 80^\circ \sin 40^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 20^\circ [\cos(80^\circ - 40^\circ) - \cos(80^\circ + 40^\circ)]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin 20^\circ [\cos 40^\circ - \cos 120^\circ]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ \left[\cos 40^\circ - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ \left[\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\cos 40^\circ \sin 20^\circ + \frac{1}{2}\sin 20^\circ\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 40^\circ \sin 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(2\cos 40^\circ \sin 20^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin(40^\circ + 20^\circ) - \sin(40^\circ - 20^\circ)] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin 60^\circ - \sin 20^\circ] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 20^\circ\right] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ = \frac{3}{16} = \text{R.H.S.}$$

9. $\sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A - \sin 4A \sin 5A = 0$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A - \sin 4A \sin 5A$$

$$= \frac{1}{2}[2\sin 2A \sin A + 2\sin 6A \sin 3A - 2\sin 5A \sin 4A]$$

$$= \frac{1}{2}[\{\cos(2A - A) - \cos(2A + A)\} + \{\cos(6A - 3A) - \cos(6A + 3A)\} - \{\cos(5A - 4A) - \cos(5A + 4A)\}]$$

$$=\frac{1}{2}[(\cos A-\cos 3A)+(\cos 3A-\cos 9A)-\{\cos A-\cos 9A\}]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos A-\cos 3A+\cos 3A-\cos 9A-\cos A+\cos 9A]$$

$$=\frac{1}{2}\times 0=0=\text{R.H.S.}$$

10. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ=\frac{1}{16}$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.}=\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$$

$$=\sin 10^\circ \frac{1}{2}\sin 50^\circ \sin 70^\circ=\frac{1}{2}\sin 10^\circ(\sin 70^\circ \sin 50^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\sin 10^\circ(2\sin 70^\circ \sin 50^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\sin 10^\circ\{\cos(70^\circ-50^\circ)-\cos(70^\circ+50^\circ)\}$$

$$=\frac{1}{4}\sin 10^\circ\{\cos 20^\circ-\cos 120^\circ\}$$

$$=\frac{1}{4}\sin 10^\circ\left\{\cos 20^\circ-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{4}\sin 10^\circ\left\{\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\cos 20^\circ \sin 10^\circ+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{8}2\cos 20^\circ \sin 10^\circ+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{8}\{\sin(20^\circ+10^\circ)-\sin(20^\circ-10^\circ)\}+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{8}\{\sin 30^\circ-\sin 10^\circ\}+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}-\sin 10^\circ\right\}+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\sin 10^\circ+\frac{1}{8}\sin 10^\circ=\frac{1}{16}=\text{R.H.S.}$$

11. $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ=\frac{1}{16}$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.}=\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\{2\sin 66^\circ \sin 6^\circ\}\{2\sin 78^\circ \sin 42^\circ\}$$

$$=\frac{1}{4}[\{\cos(66^\circ-6^\circ)-\cos(66^\circ+6^\circ)\}\{\cos(78^\circ-42^\circ)-\cos(78^\circ+42^\circ)\}]$$

$$=\frac{1}{4}\{\cos 60^\circ-\cos 72^\circ\}\{\cos 36^\circ-\cos 120^\circ\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}-\cos(90^\circ-18^\circ)\right\}\left\{\cos 36^\circ-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}-\sin 18^\circ\right\}\left\{\cos 36^\circ+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{5-1}{16}-\frac{\sqrt{5}-1}{8}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{8}-\frac{\sqrt{5}-1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{4}{16}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{16}=\text{R.H.S.}$$

12. सिद्ध कीजिए—

$$\cos(36^\circ-A)\cos(36^\circ+A)+\cos(54^\circ+A)\cos(54^\circ-A)=\cos 2A$$

हल– L.H.S. $=\cos(36^\circ-A)\cos(36^\circ+A)+\cos(54^\circ+A)\cos(54^\circ-A)$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos(36^\circ+A)\cos(36^\circ-A)+\frac{1}{2}\cdot 2\cos(54^\circ+A)(54^\circ-A)$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos(36^\circ+A+36^\circ-A)+\cos(36^\circ+A-36^\circ+A)\}+$$

$$\frac{1}{2}\{\cos(54^\circ+A+54^\circ-A)+\cos(54^\circ+A-54^\circ+A)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos 72^\circ+\cos 2A\}+\frac{1}{2}\{\cos 108^\circ+\cos 2A\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 72^\circ+\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{2}\cos 108^\circ+\frac{1}{2}\cos 2A$$

$$=\frac{1}{2}\cos 72^\circ+\frac{1}{2}\cos(180^\circ-72^\circ)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos 2A$$

$$=\frac{1}{2}\cos 72^\circ-\frac{1}{2}\cos 72^\circ+\frac{1+1}{2}\cos 2A$$

$$=\frac{2}{2}\cos 2A=\cos 2A=\text{R.H.S.}$$

13. सिद्ध कीजिए—

$$\cos 2A.\cos 2B+\sin^2(A-B)-\sin^2(A+B)=\cos(2A+2B)$$

हल– L.H.S. $=\cos 2A.\cos 2B+\sin^2(A-B)-\sin^2(A+B)$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2A\cos 2B+\sin(A-B+A+B).\sin(A-B-A-B)$$

$$\{\because \sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B).\sin(A-B)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(2A+2B)+\cos(2A-2B)\}+\sin 2A\sin(-2B)$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(2A+2B)+\cos(2A-2B)\}-\sin 2A\sin 2B$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(2A+2B)+\cos(2A-2B)\}-\frac{1}{2}2\sin 2A\sin 2B$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2A+2B)+\frac{1}{2}\cos(2A-2B)-\frac{1}{2}\{\cos(2A-2B)-\cos(2A+2B)\}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2A+2B)+\frac{1}{2}\cos(2A-2B)-\frac{1}{2}\cos(2A-2B)+\frac{1}{2}\cos(2A+2B)$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos(2A+2B)=\frac{2}{2}\cos(2A+2B)$$

$$= \cos(2A+2B) = \text{R.H.S.}$$

14. $\tan 70^\circ = 2\tan 50^\circ + \tan 20^\circ$ सत्यापित कीजिए।

हल– सिद्ध करना है— $\tan 70^\circ = 2\tan 50^\circ + \tan 20^\circ$

या $\tan 70^\circ - \tan 20^\circ = 2\tan 50^\circ$

$$\text{L.H.S.} = \tan 70^\circ - \tan 20^\circ = \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} - \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 70^\circ\cos 20^\circ - \cos 70^\circ\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ\cos 20^\circ} = \frac{\sin(70^\circ-20^\circ)}{\cos 70^\circ\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 50^\circ}{\cos 70^\circ\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ}{2\cos 70^\circ\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 50^\circ}{\cos(70^\circ+20^\circ)+\cos(70^\circ-20^\circ)} = \frac{2\sin 50^\circ}{\cos 90^\circ+\cos 50^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 50^\circ}{0+\cos 50^\circ} = 2\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} = 2\tan 50^\circ = \text{R.H.S.}$$

15. $\sin(A+B).\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sin(A+B).\sin(A-B)$$

$$= (\sin A\cos B+\cos A\sin B).(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$

$$= (\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2$$

$$= \sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-(\sin^2 B-\sin^2 A\sin^2 B)$$

$$= \sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B^2+\sin^2 A\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A-\sin^2 B = \text{R.H.S.}$$

16. $\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{8\pi}{15}.\cos\frac{14\pi}{15} = \frac{1}{16}$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.} = \cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{8\pi}{15}.\cos\frac{14\pi}{15}$$

$$= \cos\frac{2\times 180^\circ}{15}.\cos\frac{4\times 180^\circ}{15}.\cos\frac{8\times 180^\circ}{15}.\cos\frac{14\times 180^\circ}{15}$$

$$= \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ \cos 168^\circ$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos 96^\circ \cos 24^\circ).\frac{1}{2}(2\cos 168^\circ \cos 48^\circ)$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos(96^\circ+24^\circ)+\cos(96^\circ-24^\circ)\}\{\cos(168^\circ+48^\circ)+\cos(168^\circ-48^\circ)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos 120^\circ+\cos 72^\circ\}\{\cos 216^\circ+\cos 120^\circ\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos(90^\circ+30^\circ)+\cos(90^\circ-18^\circ)\}\{\cos(180^\circ+36^\circ)+\cos(90^\circ+30^\circ)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{-\sin 30^\circ+\sin 18^\circ\}\{-\cos 36^\circ-\sin 30^\circ\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}\left\{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{2}\right\} \qquad \left\{\because \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{-2+\sqrt{5}-1}{4}\right\}\left\{\frac{-\sqrt{5}-1-2}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{(\sqrt{5}-3)}{4}.\frac{(-\sqrt{5}-3)}{4} = \frac{1}{64}\{-(\sqrt{5}+3)\times(\sqrt{5}-3)\}$$

$$= \frac{1}{64}[-\{(\sqrt{5})^2-3^2\}] = \frac{1}{64}[-\{5-9\}] = \frac{1}{64}(-5+9)$$

$$= \frac{1}{64}\times 4 = \frac{1}{16} = \text{R.H.S.}$$

17. $\sin A.\sin(B-C)+\sin B.\sin(C-A)+\sin C.\sin(A-B)=0$

हल– L.H.S. $= \sin A.\sin(B-C)+\sin B.\sin(C-A)+\sin C.\sin(A-B)$

$$= \frac{1}{2}\{2\sin A\sin(B-C)\}+\frac{1}{2}\{2\sin B\sin(C-A)\}$$

$$+\frac{1}{2}\{2\sin C\sin(A-B)\}$$

$$= \frac{1}{2}[\cos\{A-(B-C)\}-\cos(A+B-C)\}+\frac{1}{2}[\cos\{B-(C-A)\}$$

$$-\cos(B+C-A)\}]+\frac{1}{2}\{\cos\{C-(A-B)\}-\cos(C+A-B)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A-B+C)-\cos(A+B-C)\}]+\frac{1}{2}[\cos(B-C+A)$$

$$-\cos(B+C-A)\}]+\frac{1}{2}[\cos(C-A+B)-\cos(C+A-B)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A+C-B)-\cos(A+B-C)+\cos(A+B-C)$$

$$-\cos(B+C-A)+\cos(B+C-A)-\cos(A+C-B)\}]$$

$$= \frac{1}{2}\times 0 = 0 = \text{R.H.S.}$$

अभ्यास 8.2

1. दिखाइए कि— $\cos(60°+A)+\cos(60°-A)=\cos A$

हल– $$\text{L.H.S.} = \cos(60°+A)+\cos(60°-A)$$
$$= 2\cos\left(\frac{60°+A+60°-A}{2}\right)\cos\frac{\{60°+A-(60°-A)\}}{2}$$
$$= 2\cos\frac{120°}{2}\cos\left(\frac{60°+A-60°+A}{2}\right)$$
$$= 2\cos 60°\times\cos\frac{2A}{2} = 2\times\frac{1}{2}\times\cos A$$
$$= \cos A = \text{R.H.S.}$$

2. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\dfrac{\cos 2B+\cos 2A}{\cos 2B-\cos 2A}=\cot(A+B).\cot(A-B)$

(ii) $\dfrac{\cos 10°+\sin 10°}{\cos 10°-\sin 10°}=\cot 35°$

(iii) $\sin 8A+\sin 2A=2\sin 5A\cos 3A$

(iv) $2\cos\dfrac{\pi}{13}.\cos\dfrac{9\pi}{13}+\cos\dfrac{3\pi}{13}+\cos\dfrac{5\pi}{13}=0$

(v) $\sin(60°+A)+\sin(60°-A)=\sqrt{3}\cos A$

(vi) $\dfrac{\cos 15°+\sin 15°}{\cos 15°-\sin 15°}=\sqrt{3}$

(vii) $\dfrac{\cos 20°+\sin 20°}{\cos 20°-\sin 20°}=\tan 65°$

(viii) $\dfrac{\sin 75°-\sin 15°}{\cos 75°+\cos 15°}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(ix) $\dfrac{\cos 10°-\sin 10°}{\cos 10°+\sin 10°}=\tan 35°$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 2B+\cos 2A}{\cos 2B-\cos 2A}=\cot(A+B).\cot(A-B)$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 2A+\cos 2B}{\cos 2B-\cos 2A} = \frac{2\cos\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}}{2\sin\frac{2B+2A}{2}\sin\frac{2A-2B}{2}}$$
$$= \frac{\cos\frac{2(A+B)}{2}\cos\frac{2(A-B)}{2}}{\sin\frac{2(B+A)}{2}\sin\frac{2(A-B)}{2}}$$
$$= \frac{\cos(A+B)\cos(A-B)}{\sin(A+B)\sin(A-B)} = \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}\cdot\frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}$$
$$= \cot(A+B)\cot(A-B) = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 10°+\sin 10°}{\cos 10°-\sin 10°}=\cot 35°$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 80^\circ) + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin(90^\circ - 80^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 80^\circ} = \frac{2\sin\left(\frac{80^\circ + 10^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{80^\circ - 10^\circ}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{10^\circ + 80^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{80^\circ - 10^\circ}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{70^\circ}{2}}{2\sin\frac{90^\circ}{2}\sin\frac{70^\circ}{2}} = \frac{\cos\frac{70^\circ}{2}}{\sin\frac{70^\circ}{2}} = \frac{\cos 35^\circ}{\sin 35^\circ}$$

$$= \cot 35^\circ = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\sin 8A + \sin 2A = 2\sin 5A \cos 3A$

$$\text{L.H.S.} = \sin 8A + \sin 2A = 2\sin\frac{8A + 2A}{2}\cdot\cos\frac{8A - 2A}{2}$$

$$= 2\sin\frac{10A}{2}\cos\frac{6A}{2} = 2\sin 5A\cos 3A = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $2\cos\frac{\pi}{13}\cdot\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$

$$\text{L.H.S.} = 2\cos\frac{\pi}{13}\cdot\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}$$

$$= \cos\left(\frac{9\pi}{13} + \frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{13} - \frac{\pi}{13}\right) + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}$$

$$= \cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}$$

$$= \left\{\cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13}\right\} + \left\{\cos\frac{8\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}\right\}$$

$$= 2\cos\frac{\frac{10\pi}{13} + \frac{3\pi}{13}}{2}\cos\frac{\frac{10\pi}{13} - \frac{3\pi}{13}}{2} + 2\cos\frac{\frac{8\pi}{13} + \frac{5\pi}{13}}{2}\cos\frac{\frac{8\pi}{13} - \frac{5\pi}{13}}{2}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{13\pi}{13}}{2}\right)\cos\left(\frac{10\pi - 3\pi}{\frac{13}{2}}\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi + 5\pi}{\frac{13}{2}}\right)\cos\left(\frac{\frac{8\pi - 5\pi}{13}}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{13\pi}{13\times 2}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{13\times 2}\right) + 2\cos\left(\frac{13\pi}{13\times 2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{13\times 2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{7\pi}{26} + 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{26}$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{2}\left[\cos\frac{7\pi}{26} + \cos\frac{3\pi}{26}\right]$$
$$= 2\times 0\left[\cos\frac{7\pi}{26} + \cos\frac{3\pi}{26}\right] = 0 = \text{R. H. S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\sin(60^\circ + A) + \sin(60^\circ - A) = \sqrt{3}\cos A$

$$\text{L.H.S.} = \sin(60^\circ + A) + \sin(60^\circ - A)$$
$$= 2\sin\frac{(60^\circ + A + 60^\circ - A)}{2}\cos\frac{\{60^\circ + A - (60^\circ - A)\}}{2}$$
$$= 2\sin\frac{120^\circ}{2}\cos\left(\frac{60^\circ + A - 60^\circ + A}{2}\right)$$
$$= 2\sin 60^\circ\cos\frac{2A}{2} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$$
$$= \sqrt{3}\cos A = \text{R. H. S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 75^\circ) + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin(90^\circ - 75^\circ)}$$
$$= \frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \cos 75^\circ} = \frac{2\sin\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}{2\sin\frac{15^\circ + 75^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}}$$
$$= \frac{2\sin\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{60^\circ}{2}}{2\sin\frac{90^\circ}{2}\sin\frac{60^\circ}{2}} = \frac{\sin 45^\circ\cos 30^\circ}{\sin 45^\circ\sin 30^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \text{R. H. S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ} = \tan 65^\circ$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 70^\circ) + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin(90^\circ - 70^\circ)}$$
$$= \frac{\sin 70^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \cos 70^\circ} = \frac{2\sin\frac{70^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{70^\circ - 20^\circ}{2}}{2\sin\frac{20^\circ + 70^\circ}{2}\sin\frac{70^\circ - 20^\circ}{2}}$$
$$= \frac{2\sin\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ}{2}}{2\sin\frac{90^\circ}{2}\sin\frac{50^\circ}{2}} = \frac{\cos\frac{50^\circ}{2}}{\sin\frac{50^\circ}{2}} = \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}$$
$$= \cot 25^\circ = \cot(90^\circ - 65^\circ) = \tan 65^\circ = \text{R.H.S.}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\dfrac{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ+\cos 15^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ+\cos 15^\circ}=\frac{2\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}}{2\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\dfrac{90^\circ}{2}\sin\dfrac{60^\circ}{2}}{2\cos\dfrac{90^\circ}{2}\cos\dfrac{60^\circ}{2}}=\frac{\sin\dfrac{60^\circ}{2}}{\cos\dfrac{60^\circ}{2}}=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\text{R.H.S.}$$

(ix) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}=\tan 35^\circ$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sin(90^\circ-80^\circ)}{\cos(90^\circ-80^\circ)+\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{\cos 10^\circ-\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ+\sin 10^\circ}=\frac{2\sin\dfrac{10^\circ+80^\circ}{2}\sin\dfrac{80^\circ-10^\circ}{2}}{2\sin\dfrac{80^\circ+10^\circ}{2}\cos\dfrac{80^\circ-10^\circ}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\dfrac{90^\circ}{2}\sin\dfrac{70^\circ}{2}}{2\sin\dfrac{90^\circ}{2}\cos\dfrac{70^\circ}{2}}=\frac{\sin\dfrac{70^\circ}{2}}{\cos\dfrac{70^\circ}{2}}$$

$$=\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}=\tan 35^\circ=\text{R.H.S.}$$

3. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin(30^\circ+A)+\sin(30^\circ-A)}{\cos(30^\circ-A)-\cos(30^\circ+A)}=\cot A$

हल—

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin(30^\circ+A)+\sin(30^\circ-A)}{\cos(30^\circ-A)-\cos(30^\circ+A)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\dfrac{30^\circ+A+30^\circ-A}{2}\right)\cos\left\{\dfrac{30^\circ+A-(30-A)}{2}\right\}}{2\sin\left(\dfrac{30^\circ-A+30^\circ+A}{2}\right)\sin\left\{\dfrac{30^\circ+A-(30^\circ-A)}{2}\right\}}$$

$$=\frac{2\sin\dfrac{60^\circ}{2}\cos\left(\dfrac{30^\circ+A-30^\circ+A}{2}\right)}{2\sin\dfrac{60^\circ}{2}\sin\left(\dfrac{30^\circ+A-30^\circ+A}{2}\right)}=\frac{\cos\dfrac{2A}{2}}{\sin\dfrac{2A}{2}}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A=\text{R.H.S.}$$

4. सिद्ध कीजिए— $\sec(45°+A)\sec(45°-A) = 2\sec 2A$

हल– $$\text{L.H.S.} = \sec(45°+A)\sec(45°-A)$$
$$= \frac{1}{\cos(45°+A)\cos(45°-A)}$$
$$= \frac{2}{2\cos(45°+A)\cos(45°-A)}$$
$$= \frac{2}{\cos(45°+A+45°-A)+\cos\{45°+A-(45°-A)\}}$$
$$= \frac{2}{\cos 90°+\cos 2A} = \frac{2}{0+\cos 2A}$$
$$= \frac{2}{\cos 2A} = 2\sec 2A = \text{R.H.S.}$$

5. सिद्ध कीजिए— $2\cos A + \cos 3A + \cos 5A = 4\cos A\cos^2 2A$

हल– $$\text{L.H.S.} = 2\cos A + \cos 5A + \cos 3A$$
$$= 2\cos A + 2\cos\frac{5A+3A}{2}\cos\frac{5A-3A}{2}$$
$$= 2\cos A + 2\cos\frac{8A}{2}\cos\frac{2A}{2}$$
$$= 2\cos A + 2\cos 4A\cos A = 2\cos A(1+\cos 4A)$$
$$= 2\cos A(1+2\cos^2 2A-1) = 2\cos A\times 2\cos^2 2A$$
$$= 4\cos A\cos^2 2A = \text{R.H.S.}$$

6. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin(A+3B)+\sin(3A+B)}{\sin 2A+\sin 2B} = 2\cos(A+B)$

हल– $$\text{L.H.S.} = \frac{\sin(A+3B)+\sin(3A+B)}{\sin 2A+\sin 2B}$$
$$= \frac{2\sin\frac{A+3B+3A+B}{2}\cos\frac{A+3B-3A-B}{2}}{2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{4A+4B}{2}\cos\frac{2B-2A}{2}}{\sin\frac{2(A+B)}{2}\cos\frac{2(A-B)}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{4(A+B)}{2}\cos\frac{2(B-A)}{2}}{\sin(A+B)\cos(A-B)}$$
$$= \frac{\sin 2(A+B)\cos(B-A)}{\sin(A+B)\cos(A-B)}$$
$$= \frac{2\sin(A+B)\cos(A+B)\cos(A-B)}{\sin(A+B)\cos(A-B)} \qquad [\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$$
$$= 2\cos(A+B) = \text{R.H.S.}$$

7. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}$

हल— $\text{L.H.S.}=\dfrac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}$

$=\dfrac{(\sin 5A+\sin A)+2\sin 3A}{(\sin 7A+\sin 3A)+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin\dfrac{5A+A}{2}\cos\left(\dfrac{5A-A}{2}\right)+2\sin 3A}{2\sin\dfrac{7A+3A}{2}\cos\dfrac{7A-3A}{2}+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin\dfrac{6A}{2}\cos\dfrac{4A}{2}+2\sin 3A}{2\sin\dfrac{10A}{2}\cos\dfrac{4A}{2}+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin 3A\cos 2A+2\sin 3A}{2\sin 5A\cos 2A+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin 3A(\cos 2A+1)}{2\sin 5A(\cos 2A+1)}=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}=\text{R.H.S.}$

8. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\tan(60°+A)-\tan(60°-A)}{\tan(60°+A)+\tan(60°-A)}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin A$

हल— $\text{L.H.S.}=\dfrac{\tan(60°+A)-\tan(60°-A)}{\tan(60°+A)+\tan(60°-A)}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin(60°+A)}{\cos(60°+A)}-\dfrac{\sin(60°-A)}{\cos(60°-A)}}{\dfrac{\sin(60°+A)}{\cos(60°+A)}+\dfrac{\sin(60°-A)}{\cos(60°-A)}}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin(60°+A)\cos(60°-A)-\cos(60°+A)\sin(60°-A)}{\cos(60°+A)\cos(60°-A)}}{\dfrac{\sin(60°+A)\cos(60°-A)+\cos(60°+A)\sin(60°-A)}{\cos(60°+A)\cos(60°-A)}}$

$=\dfrac{\sin(60°+A)\cos(60°-A)-\cos(60°+A)\sin(60°-A)}{\sin(60°+A)\cos(60°-A)+\cos(60°+A)\sin(60°-A)}$

$=\dfrac{\sin\{60°+A-(60°-A)\}}{\sin\{60°+A+(60°-A)\}}=\dfrac{\sin\{60°+A-60°+A\}}{\sin\{60°+A+60°-A\}}$

$=\dfrac{\sin 2A}{\sin 120°}=\dfrac{\sin 2A}{\sin(90°+30°)}=\dfrac{\sin 2A}{\cos 30°}$

$=\dfrac{\sin 2A}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin 2A=\text{R.H.S.}$

9. $A+B+C=180°$ हो, तो सिद्ध कीजिए—

(i) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(ii) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(iii) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

जबकि $A + B + C = 180°$

$$\text{L.H.S.} = \cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) + \cos C$$

$$= 2\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$= 2\cos \frac{180° - C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C \qquad \left[\because A + B + C = 180° \right. \\ \left. A + B = 180° - C\right]$$

$$= 2\cos \left(90° - \frac{C}{2}\right) \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$= 2\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= 1 + \left\{2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2\sin^2 \frac{C}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{180° - (A+B)}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{\cos \frac{A-B}{2} - \sin \left(90° - \frac{A+B}{2}\right)\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{2\sin \frac{\frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}}{2} \sin \frac{\frac{A+B}{2} - \frac{(A-B)}{2}}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{2\sin \left(\frac{A-B+A+B}{4}\right) \sin \left(\frac{A+B-A+B}{4}\right)\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{2\sin \frac{2A}{4} \sin \frac{2B}{4}\right\} = 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}\right\}$$

$$= 1 + 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

जबकि $A + B + C = 180°$

$$\text{L.H.S.} = \sin A + \sin B - \sin C = (\sin A + \sin B) - \sin C$$
$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\sin\frac{180^\circ - C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{180^\circ - (A+B)}{2}\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \sin\left(90^\circ - \frac{A+B}{2}\right)\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{2\sin\left(\frac{\frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}}{2}\right)\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{2\sin\left(\frac{\frac{A-B+A-B}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{A+B-A+B}{2}}{2}\right)\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{2B}{4}\right\} = 2\cos\frac{C}{2}\left\{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

जबकि $A + B + C = 180^\circ$

$$\text{L.H.S.} = \sin A + \sin B + \sin C = (\sin A + \sin B) + \sin C$$
$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$
$$= 2\sin\left(\frac{180^\circ - C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$
$$= 2\sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{180^\circ-(A+B)}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{A+B+A-B}{4}.\cos\frac{A+B-A+B}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{2A}{4}\cos\frac{2B}{4}\right\}=2\cos\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\text{R.H.S.}$$

10. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}$$

$$=\frac{\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}}{\frac{1}{2}.2\sin A\cos A-\frac{1}{2}.2\sin B\cos B}$$

$$[\because 1-2\sin^2 A=\cos 2A]$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\{1-\cos 2A-1+\cos 2B\}}{\frac{1}{2}\sin 2A-\frac{1}{2}\sin 2B}=\frac{\frac{1}{2}\{-\cos 2A+\cos 2B\}}{\frac{1}{2}\{\sin 2A-\sin 2B\}}$$

$$=\frac{(\cos 2B-\cos 2A)}{(\sin 2A-\sin 2B)}=\frac{2\sin\frac{2B+2A}{2}.\sin\frac{2A-2B}{2}}{2\cos\frac{2A+2B}{2}.\sin\frac{2A-2B}{2}}$$

$$=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\sin(A-B)}=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$=\tan(A+B)=\text{R.H.S.}$$

11. सिद्ध कीजिए— $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$

हल– हम जानते हैं कि— $\tan 3A = \tan(2A + A)$

या $\tan 3A = \dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$

या $\tan 3A - \tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 2A + \tan A$

या $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A$

या $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$ इति सिद्धम्

12. यदि $\cos A = \dfrac{1}{7}$ तथा $\cos B = \dfrac{13}{14}$ तो सिद्ध कीजिए— $\cos(A - B) = \dfrac{1}{2}$

हल– दिया है— $\cos A = \dfrac{1}{7}$

अतः $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ सूत्र से,

$= \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{49}} = \sqrt{\dfrac{49 - 1}{49}} = \sqrt{\dfrac{48}{49}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

तथा $\cos B = \dfrac{13}{14}$

अतः $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$ सूत्र से,

$= \sqrt{1 - \left(\dfrac{13}{14}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{169}{196}} = \sqrt{\dfrac{196 - 169}{196}} = \sqrt{\dfrac{27}{196}}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

अब L.H.S. $= \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$= \dfrac{1}{7} \times \dfrac{13}{14} + \dfrac{4\sqrt{3}}{7} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{14} = \dfrac{13}{98} + \dfrac{36}{98} = \dfrac{49}{98} = \dfrac{1}{2}$ = R.H.S.

13. सिद्ध कीजिए कि— $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{2}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{\sin A}{\sqrt{2}}$

हल– L.H.S. $= \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{2}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{A}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left[2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{2}\right) - 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{A}{2}\right)\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[\left\{1 + \cos 2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{2}\right)\right\} - \left\{1 + \cos 2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{A}{2}\right)\right\}\right]$

$[\because \cos 2A = 2\cos^2 A - 1]$

$= \dfrac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) - 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - A\right)\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - A\right)\right]$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sin \frac{\left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{2} \sin \frac{\left(\frac{\pi}{4}-A\right)-\left(\frac{\pi}{4}+A\right)}{2}$$

$$\left[\because \cos A - \cos B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]$$

$$= \sin \frac{\frac{\pi}{4}+A+\frac{\pi}{4}-A}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4}-A-\frac{\pi}{4}-A}{2}$$

$$= \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{-2A}{2}\right) = \sin\frac{2\pi}{8}\sin(-A)$$

$$= -\sin A \times \sin\frac{\pi}{4} = -\sin A \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A = -\frac{\sin A}{\sqrt{2}} = \text{R.H.S.}$$

14. सिद्ध कीजिए कि— $\sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A = \sin 4A \sin 5A$

हल-- $\text{L.H.S.} = \sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sin 2A \sin A + \frac{1}{2} \cdot 2\sin 6A \sin 3A$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(2A-A) - \cos(2A+A)\} + \frac{1}{2}\{\cos(6A-3A) - \cos(6A+3A)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos A - \cos 3A\} + \frac{1}{2}\{\cos 3A - \cos 9A\}$$

$$= \frac{1}{2}\cos A - \frac{1}{2}\cos 3A + \frac{1}{2}\cos 3A - \frac{1}{2}\cos 9A$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos A - \cos 9A\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sin\frac{A+9A}{2}\sin\frac{9A-A}{2}$$

$$= \sin\frac{10A}{5}\sin\frac{8A}{2} = \sin 5A \sin 4A$$

$$= \sin 4A \sin 5A = \text{R.H.S.}$$

15. यदि $A+B+C = 180°$ तो सिद्ध कीजिए—

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1$$

हल– दिया है— $A+B+C = 180°$

सिद्ध करना है— $\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1$

$$\text{L.H.S.} = \cos A + \cos B - \cos C = (\cos A + \cos B) - \cos C$$

$$= 2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2} - \cos C$$

$$[\because A+B=180°-C]$$

$$=2\cos\frac{180°-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos C$$

$$=2\cos\left(90°-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\left[\because \cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-1+2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\sin\frac{180°-(A+B)}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right\}-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left[\sin\left\{90°-\frac{(A+B)}{2}\right\}+\cos\frac{(A-B)}{2}\right]-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{(A+B)}{2}+\cos\frac{(A-B)}{2}\right\}-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right\}-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{A+B+A-B}{4}\cos\frac{A+B-A+B}{4}\right\}-1$$

$$=4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{2A}{4}\cos\frac{2B}{4}-1=4\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-1$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1=\text{R.H.S.}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 158 व 159 का अवलोकन कीजिए।

9

त्रिकोणमितीय सारणियाँ
(Trigonometrical Tables)

अभ्यास 9

1. त्रिकोणमितीय सारणी की सहायता से निम्नलिखित त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए—

(i) cot 53°24′ **(ii) sin 68°20′**
(iii) cos 23°10′ **(iv) cosec 18°30′**
(v) tan 37°42′ **(vi) sec 84°50′ + cosec 18°36′**
(vii) cos 42°20′ − sin 64°42′ **(viii) sec 51°24′ + cosec 68°20′**

हल– (i) cot 53°24′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी II** की **अन्तिम पंक्ति** में cot तथा **अन्तिम स्तम्भ** में 53·4 अथवा अन्तिम से पहले स्तम्भ में 53°24′ को देखिए। 53°24′ वाली पंक्ति में cot का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·7427 लिखी है।

अतः cot 53°24′ = **0.7427** **उत्तर**

(ii) sin 68°20′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी I** की **अन्तिम पंक्ति** में sin तथा **अन्तिम स्तम्भ** में 68°20′ को देखिए। 68°20′ वाली पंक्ति में sin का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·9293 लिखी है।

अतः sin 68°20′ = **0·9293** **उत्तर**

(iii) cos 23°10′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी I** की **प्रथम पंक्ति** में cos तथा **प्रथम स्तम्भ** में 23°10′ देखिए। 23°10′ वाली पंक्ति में cos का स्तम्भ देखिए, इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·9194 लिखी है।

अतः cos 23°10′ = **0·9194** **उत्तर**

(iv) cosec 18°30′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी I** की **प्रथम पंक्ति** में cosec तथा **प्रथम स्तम्भ** में 18°30′ देखिए 18°30′ वाली पंक्ति में cosec का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 3·152 लिखी है।

अतः cosec 18°30′ = **3·152** **उत्तर**

(v) tan 37°42′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी II** की **प्रथम पंक्ति** में tan तथा **प्रथम स्तम्भ** में 37·7 अथवा द्वितीय स्तम्भ में 37 तथा तृतीय स्तम्भ में 42 देखिए। 37·7 अथवा 37°42′ वाली पंक्ति में tan का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·7729 लिखी है। अतः

tan 37°42′ = **0·7729** **उत्तर**

(vi) sec 84°50′ + cosec 18°36′ का मान ज्ञात करने के लिए त्रिकोणमितीय सारणियों से sec 84°50′ तथा cosec 18°36′ के मान ज्ञात करते हैं। sec 84°50′ के मान के लिए **सारणी I की अन्तिम पंक्ति** में sec तथा **अन्तिम स्तम्भ** में 84°50′ देखते है। 84°50′ वाली पंक्ति में sec का स्तम्भ देखते हैं। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 11·10 लिखी है।

अत: sec 84°50′ = **11·10** **उत्तर**

अब cosec 18°36′ के मान के लिए **सारणी II** की **प्रथम पंक्ति** में cosec तथा द्वितीय स्तम्भ में 18 व 36 देखिए। 18°36′ वाली पंक्ति में cosec का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 3·1352 लिखी है।

अत: cosec 18°36′ = 3·1352

अब sec 84°50′ + cosec 18°36′

= 11·10 + 3·1352 = **14·2352** **उत्तर**

(vii) cos 42°20′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी I** की **प्रथम पंक्ति** में cos तथा **प्रथम स्तम्भ** में 42°20′ देखते हैं। 42°20′ वाली पंक्ति में cos का स्तम्भ देखते हैं। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·7392 लिखी है।

अत: cos 42°20′ = 0·7392

अब sin 64°42′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी II** की **अन्तिम पंक्ति** में sin तथा **अन्तिम से पहले स्तम्भ** में 64 व 42 देखते हैं। 64 व 42 वाली पंक्ति में sin का स्तम्भ देखते हैं। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·9041 लिखी है।

अत: sin 64°42′ = 0·9041

अब, cos 42°20′ − sin 64°42′ = 0·7392 − 0·9041 = **−0·1649** **उत्तर**

(viii) सारणी II से उपर्युक्त विधि द्वारा,

sec 51°24′ = 1·6029

तथा सारणी I से,

cosec 68°20′ = 1·0760

अत: sec 51°24′ + cosec 68°20′

= 1·6029 + 1·0760 = **2·6789** **उत्तर**

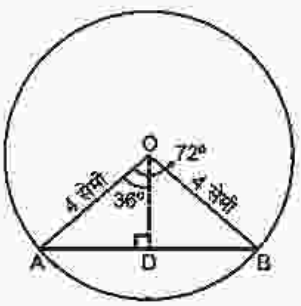
2. 4 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो वृत्त के केन्द्र पर 72° माप का कोण अन्तरित करती है।

हल– माना केन्द्र O तथा 4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की जीवा AB है जो केन्द्र पर 72° माप का कोण अन्तरित करती है।

तब $OA = OB = 4$ सेमी

तथा $\angle AOB = 72°$

वृत्त के केन्द्र O से जीवा AB पर लम्ब OD डाला।



अत: $AD = \frac{AB}{2}$

$\angle AOD = \angle BOD = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{72°}{2} = 36°$

$\therefore$ समकोण ΔODA में,

$\sin 36° = \frac{AD}{OA}$

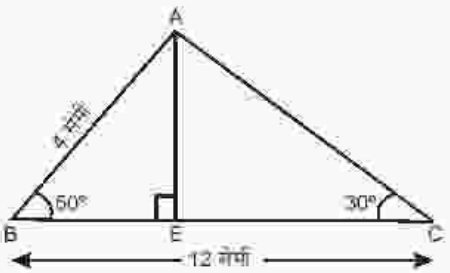
या $AD = QA \sin 36^\circ$

या $\frac{AB}{2} = 4 \times \sin 36^\circ$

या $AB = 8 \times \sin 36^\circ$

$= 8 \times 0{\cdot}5878$ सेमी (सारणी I से) $= 4{\cdot}7024$ सेमी $= \mathbf{4{\cdot}7}$ **सेमी** **उत्तर**

3. चित्र में $BC = 12$ सेमी, $AB = 4$ सेमी, $\angle AEB = 90^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ तथा $C = 30^\circ$, BE तथा AC का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में,

AEB समकोण Δ है।

अतः $\angle BAE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

समकोण $\Delta\, AEB$ में,

$\sin 40^\circ = \frac{BE}{AB}$

या $BE = AB \sin 40^\circ = 4 \times \sin 40^\circ = 4 \times 0{\cdot}6428$ सेमी (सारणी I से) $= 2{\cdot}5712$ सेमी

$BE = \mathbf{2{\cdot}57}$ **सेमी** **उत्तर**

समकोण $\Delta\, AEC$ में,

$\cos 30^\circ = \frac{EC}{AC}$

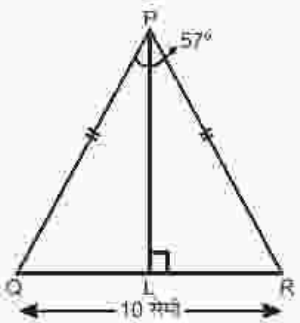
या $AC = \frac{EC}{\cos 30^\circ} = \frac{BC - BE}{\cos 30^\circ} = \frac{12 - 2{\cdot}57}{\cos 30^\circ} = \frac{9{\cdot}43}{0{\cdot}8660} = 10{\cdot}8891$ (सारणी I से)

$= \mathbf{10{\cdot}89}$ **सेमी** **उत्तर**

4. उस समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 10 सेमी तथा शीर्ष कोण 57° का हो।

हल– माना समद्विबाहु $\Delta\, PQR$ में $PQ = PR$

आधार $QR = 10$ सेमी तथा शीर्ष कोण $QPR = 57^\circ$ शीर्ष P से आधार QR पर लम्ब PL डाला।



तब, $QL = LR = \frac{QR}{2} = \frac{10}{2} = 5$ सेमी

$\angle QPL = \angle RPL = \frac{\angle QPR}{2} = \frac{57^\circ}{2} = (28{\cdot}5)^\circ$

समकोण $\Delta\, PLQ$ में,

$\cot (28{\cdot}5)^\circ = \frac{PL}{QL}$

या $PL = QL \cot (28{\cdot}5)^\circ$

$= 5 \times \cot (28{\cdot}5)^\circ = 5 \times 1{\cdot}8418$ सेमी (सारणी II से) $= 9{\cdot}21$ सेमी

अतः समद्विबाहु $\Delta\, PQR$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 9{\cdot}21 = 5 \times 9{\cdot}21$ वर्ग सेमी $= \mathbf{46{\cdot}05}$ **वर्ग सेमी** **उत्तर**

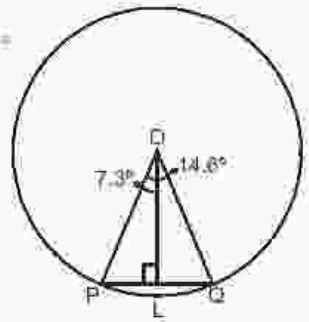
5. 1 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो वृत्त के केन्द्र पर 14·6° माप का कोण अन्तरित करती है।

हल– माना केन्द्र O तथा 1 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा PQ है जो केन्द्र O पर $14\cdot6^\circ$ माप का कोण अन्तरित करती है।

अतः $OP = OQ = 1$ मीटर तथा $\angle POQ = 14\cdot6^\circ$ वृत्त के केन्द्र O से जीवा PQ पर लम्ब OL डाला।

तब, $PL = \frac{PQ}{2}$

तथा $\angle POL = \angle QOL = \frac{\angle POQ}{2} = \frac{14\cdot6^\circ}{2} = 7\cdot3^\circ$



समकोण ΔOLP में,

$\sin 7\cdot3^\circ = \frac{PL}{OP}$

या $PL = OP \sin 7\cdot3^\circ$

या $\frac{PQ}{2} = 1 \times \sin 7\cdot3^\circ$

या $PQ = 2 \times \sin 7\cdot3^\circ$

$= 2 \times 0\cdot1271$ (सारणी II से) $= 0\cdot2542$ मीटर $= 25\cdot42$ सेमी $=$ **25·4 सेमी** **उत्तर**

6. 80 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के अन्तर्गत खींचे गए 25 भुजाओं वाले समबहुभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– 25 भुजाओं वाले समबहुभुज की एक भुजा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण,

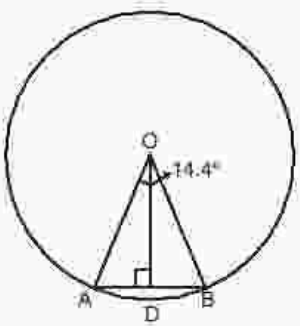
$= \frac{360^\circ}{25} = (14\cdot4)^\circ$

माना समबहुभुज की एक भुजा AB है।

$AO = BO = 80$ सेमी (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)

OD, भुजा AB पर लम्ब है। अतः $AD = \frac{AB}{2}$

अतः $\angle AOD = \angle BOD = \frac{14\cdot4}{2} = 7\cdot2^\circ$



समकोण ΔODA में,

$\sin \angle AOD = \frac{AD}{AO}$

या $\sin 7\cdot2^\circ = \frac{AD}{80}$

या $AD = 80 \sin 7\cdot2^\circ$

$\frac{AB}{2} = 80 \times 0\cdot1253$ [सारणी II से]

या $\frac{AB}{2} = 10\cdot024$ सेमी

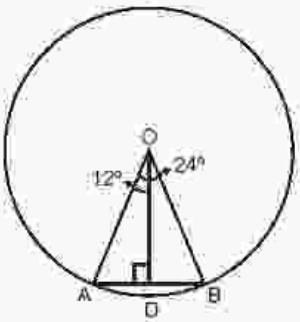
या $AB = 2 \times 10\cdot024 = 20\cdot048$ सेमी $=$ **20·05 सेमी** **उत्तर**

7. 500 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के अन्तर्गत खींचे गए 15 भुजाओं वाले समबहुभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– 15 भुजाओं वाले समबहुभुज की एक भुजा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण = $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$

माना समबहुभुज की एक भुजा AB है। तब। $AO = BO = 500$ सेमी (वृत्त की त्रिज्याएँ)

OD, भुजा AB पर लम्ब है। अत: $AD = \frac{AB}{2}$



अत: $\angle AOD = \angle BOD = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{24^\circ}{2} = 12^\circ$

समकोण ΔODA में,

$\sin \angle AOD = \frac{AD}{AO}$

या $AD = AO \sin \angle AOD$

या $\frac{AB}{2} = AO \sin \angle AOD$

या $AB = 2\,AO \sin 12^\circ = 2 \times 500 \times 0{\cdot}2079$ (सारणी 1 से) = **207 ·9 सेमी** **उत्तर**

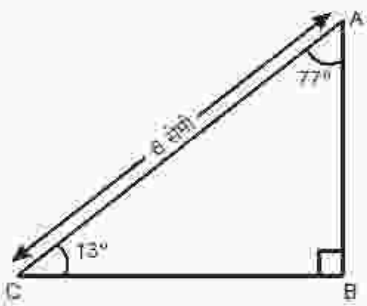
8. उस समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कर्ण 6 सेमी, तथा एक न्यून कोण 77° माप का है।

हल– माना ABC एक समकोण Δ है। जिसका कोण $A = 77^\circ$ है। तथा कर्ण $AC = 6$ सेमी।

अत: $\sin 77^\circ = \frac{BC}{AC}$

या $0{\cdot}9744 = \frac{BC}{6}$ (सारणी 1 से)

या $BC = 6 \times 0{\cdot}9744 = 5{\cdot}85$ सेमी



ΔABC में,

$\angle C = 90^\circ - 77^\circ = 13^\circ$

$\sin C = \frac{AB}{AC}$

$\sin 13^\circ = \frac{AB}{6}$

या $AB = 6 \times \sin 13^\circ = 6 \times 0{\cdot}2250$ (सारणी 1 से) $= 1{\cdot}35$ सेमी

समकोण ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times AB = \frac{1}{2} \times 5{\cdot}85 \times 1{\cdot}35$

$= 3{\cdot}95$ **वर्ग सेमी** **उत्तर**

9. समकोण त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जबकि $\angle P = 30^\circ$, $\angle Q = 90^\circ$ तथा $PR = 4$ सेमी है।

हल– दिया है—

समकोण त्रिभुज PQR जिसमें $\angle P = 30^\circ$, $\angle Q = 90^\circ$ तथा भुजा $PR = 4$ सेमी

अत: समकोण ΔPQR में,

$\sin 30° = \frac{QR}{PR}$

या $0{\cdot}5 = \frac{QR}{4}$ (सारणी 1 से)

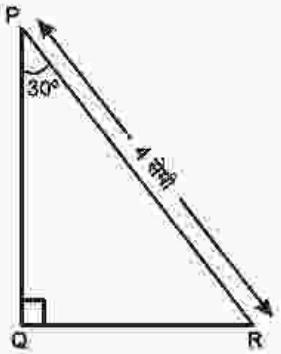
या $QR = 4 \times 0{\cdot}5 = 2{\cdot}0$ सेमी

$\angle R = 90° - 30° = 60°$

अतः $\sin 60° = \frac{PQ}{PR}$

$0{\cdot}8660 = \frac{PQ}{4}$ (सारणी 1 से)

या $PQ = 4 \times 0{\cdot}8660 = 3{\cdot}464$ सेमी



अतः समकोण ΔPQR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} QR \times PQ = \frac{1}{2} \times 2 \times 3{\cdot}464 = 3{\cdot}464$ वर्ग सेमी उत्तर

10. 2 मीटर त्रिज्या वाले एक वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो वृत्त के केन्द्र पर 45° माप का कोण अन्तरित करती है।

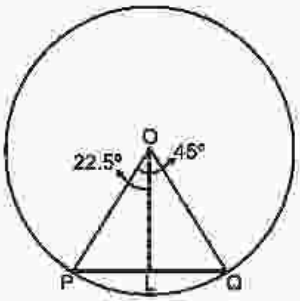
हल– माना केन्द्र O तथा 2 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा PQ है, जो केन्द्र O पर 45° का कोण अन्तरित करती है।

तब $OP = OQ = 2$ मीटर

वृत्त के केन्द्र O से जीवा PQ पर लम्ब OL डाला।

तब $PL = LQ = \frac{PQ}{2}$

अतः $\angle POL = \angle QOL = \frac{\angle POQ}{2} = \frac{45°}{2} = 22{\cdot}5°$



समकोण ΔOLP में,

$\sin 22{\cdot}5° = \frac{PL}{OP}$

या $PL = OP \sin 22{\cdot}5°$

या $\frac{PQ}{2} = OP \times \sin 22{\cdot}5°$

या $PQ = 2 \times OP \times \sin 22{\cdot}5° = 2 \times 2 \times \sin 22{\cdot}5° = 4 \times 0{\cdot}3825$

$= 1{\cdot}5308$ सेमी $= 1{\cdot}53$ सेमी उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट– बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 163 का अवलोकन कीजिए।

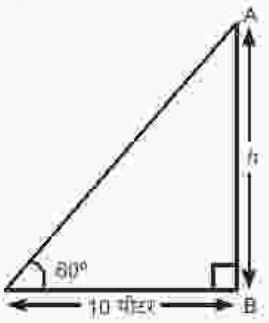
10

ऊँचाई एवं दूरी
(Height and Distance)

अभ्यास 10

1. एक मीनार के क्षैतिज आधार से 10 मीटर दूरी पर स्थित एक बिन्दु पर मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 60° है, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– चित्रानुसार, AB एक h मीटर ऊँची मीनार है। मीनार के क्षैतिज आधार B से 10 मीटर दूरी पर बिन्दु P स्थित है, जिस पर मीनार की चोटी A का उन्नयन कोण 60° है।



अत: समकोण ΔABP में,

$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BP}$

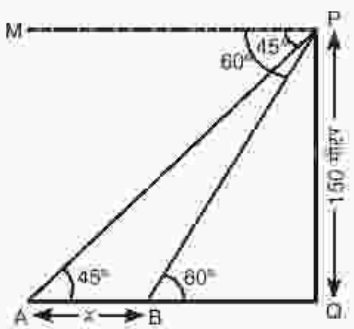
या $\sqrt{3} = \frac{h}{10}$

या $h = 10\sqrt{3}$ मीटर

अत: मीनार की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मीटर होगी। **उत्तर**

2. एक मीनार के एक ही ओर उसके पाद से जाने वाली क्षैतिज रेखा पर दो बिन्दु स्थित हैं। मीनार की चोटी से उनके अवनमन कोण क्रमश: 45° व 60° हैं। यदि मीनार की ऊँचाई 150 मीटर हो, तो दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– चित्रानुसार, माना PQ 150 मीटर ऊँची एक मीनार है जिसके पाद Q से होकर जाने वाली क्षैतिज रेखा पर दो बिन्दु A व B स्थित हैं। बिन्दु A व B के मीनार की चोटी से अवनमन कोण क्रमश: 45° व 60° हैं।



तब $\angle MPA = \angle QAP = 45^\circ$

तथा $\angle MPB = \angle QBP = 60^\circ$

माना A व B के बीच की दूरी $= x$ मीटर

अत: समकोण ΔPQB में,

$\tan 60^\circ = \frac{PQ}{BQ}$

$\sqrt{3} = \frac{150}{BQ}$

या $BQ = \frac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$ मीटर

तथा समकोण ΔPQA में,

$\tan 45^\circ = \frac{PQ}{AQ}$

$1 = \frac{150}{AB + BQ}$

या $AB + BQ = 150$

या $x + 50\sqrt{3} = 150$

या $x = 150 - 50\sqrt{3}$

$= 50(3 - \sqrt{3})$ मीटर

अतः दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी **$50(3 - \sqrt{3})$ मीटर** है। **उत्तर**

3. एक नाव जो पुल की ओर आ रही है, उस पुल का उन्नयन कोण 30° देखा गया। नाव का उसी चाल से 6 मिनट चलने के पश्चात् उन्नयन कोण 60° हो जाता है। ज्ञात कीजिए कि नाव को उस पुल तक उसी चाल से पहुँचने में कितना समय और लगेगा।

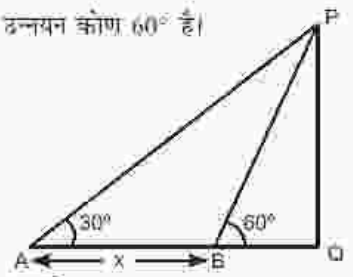
हल– माना बिन्दु P पुल पर स्थित है, जिसके ठीक नीचे बिन्दु Q है।

माना नाव की प्रथम स्थिति A से पुल पर स्थित बिन्दु P का उन्नयन कोण 30° है।

अतः $\angle PAQ = 30^\circ$

6 मिनट बाद नाव की द्वितीय स्थिति B से पुल का उन्नयन कोण 60° है।

अतः $\angle PBQ = 60^\circ$



चित्रानुसार, ΔPAB में $\angle PBQ$ बहिष्कोण है।

अतः $\angle PAB + \angle BPA = \angle PBQ$

या $30^\circ + \angle BPA = 60^\circ$

या $\angle BPA = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

ΔPAB में $\angle PAB = \angle BPA = 30^\circ$

अतः $PB = AB = x$ (बराबर कोणों के सामने की भुजाएँ)

समकोण ΔPQB में,

$\cos 60^\circ = \frac{BQ}{PB}$

$\frac{1}{2} = \frac{BQ}{x} \Rightarrow BQ = \frac{x}{2}$

इससे ज्ञात होता है कि नाव को पुल तक पहुँचने में BQ अर्थात् $\frac{x}{2}$ दूरी और तय करनी होगी यदि $AB = x$ है।

AB अर्थात् x दूरी तय करने में नाव को लगा समय $= 6$ मिनट

BQ अर्थात् $\frac{x}{2}$ दूरी तय करने में नाव को लगा समय $= \frac{6}{2} = 3$ मिनट

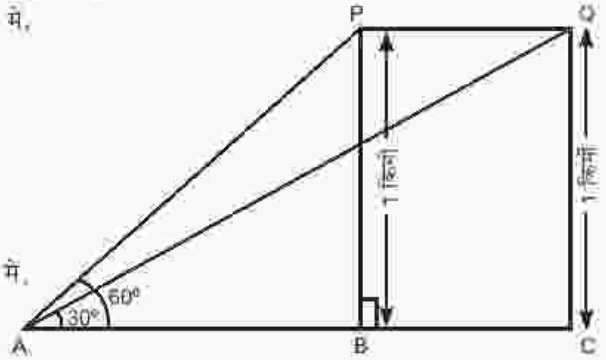
अतः नाव को पुल तक पहुँचने में **3 मिनट** और लगेंगे। **उत्तर**

4. एक वायुयान भूमि से 1 किमी की ऊँचाई पर क्षैतिज दिशा में उड़ रहा है। किसी बिन्दु से वायुयान का उन्नयन कोण 60° है। 15 सेकण्ड पश्चात् उसी स्थान पर वायुयान का उन्नयन कोण 30° हो जाता है। वायुयान की चाल किमी/घण्टा में ज्ञात कीजिए।

हल– माना वायुयान की प्रथम स्थिति P तथा 15 सेकण्ड पश्चात् द्वितीय स्थिति Q है। क्षैतिज पर स्थित बिन्दु A पर स्थितियों P व Q से वायुयान के उन्नयन कोण क्रमशः $60°$ व $30°$ हैं।

वायुयान की ऊँचाई $PB = QC = 1$ किमी

माना वायुयान की चाल $= x$ किमी/घण्टा



अतः समकोण ΔPBA में,

$$\tan 60° = \frac{PB}{AB}$$

या $$\sqrt{3} = \frac{1}{AB}$$

या $$AB = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ किमी}$$

तथा समकोण ΔQCA में,

$$\tan 30° = \frac{QC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{AB + BC} \quad [\because AC = AB + BC]$$

या $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + BC}$$

या $$\frac{1}{\sqrt{3}} + BC = \sqrt{3}$$

या $$BC = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ किमी} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 1000 \text{ मीटर} = PQ$$

वायुयान को स्थिति P से Q तक जाने में लगा समय $= 15$ सेकण्ड

वायुयान की चाल $=$ दूरी/समय

$$= \frac{2 \times 1000}{\sqrt{3} \times 15} \text{ मीटर/सेकण्ड} = \frac{2000}{1{\cdot}732 \times 15} \text{ मीटर/सेकण्ड} = 76{\cdot}98 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

$$= 76{\cdot}98 \times \frac{18}{5} \text{ किमी/घण्टा} = \frac{1385{\cdot}64}{5} \text{ किमी/घण्टा} = 277{\cdot}12 \text{ किमी/घण्टा}$$

अतः वायुयान की चाल **277.12 किमी/घण्टा** है। **उत्तर**

5. एक नाव से नदी के किनारे की किसी इमारत के एक प्रकाश स्रोत का कोण $30°$ देखा गया। 4 मिनट पश्चात् उसी नाव से प्रकाश स्रोत का उन्नयन कोण $60°$ हो गया। ज्ञात कीजिए कि नाव को इमारत के पास किनारे तक पहुँचने में कितना समय लगेगा?

हल– माना PQ नदी किनारे की इमारत है तथा P प्रकाश स्रोत है बिन्दु A किसी क्षण नाव की स्थिति है। 4 मिनट पश्चात् नाव बिन्दु B पर पहुँच जाती है। बिन्दु A व B पर नाव के प्रकाश स्रोत P से उन्नयन कोण क्रमशः $30°$ व $60°$ हैं।

ΔPAB में $\angle PBQ$ बहिष्कोण है

$\angle PAB + \angle APB = \angle PBQ$

$30° + \angle APB = 60°$

या $\angle APB = 60° - 30° = 30°$