अध्याय 10

गुणनखण्ड

10.1 गुणनखण्ड

हमने पिछली कक्षाओं में प्राकृत संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड करना सीखा है।

जैसे–

$24 = \underline{2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$

$30 = \underline{2} \times \underline{3} \times 5$

इन अभाज्य गुणनखण्डों में हम देखते हैं कि 24 व 30 में अभाज्य संख्या 2 व 3 उभयनिष्ठ है इस प्रकार की अभाज्य संख्याओं के गुणनफल को उन संख्याओं का सार्व गुणनखण्ड कहते हैं।

उदाहरण 1 32, 56, 72 का सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल संख्या 32, 56, 72 के गुणनखण्ड

$32 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times 2$

$56 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7$

$72 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 3 \times 3$

सार्व गुणनखण्ड $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदाहरण 2 25, 27 का सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल संख्या 25, 27 के गुणनखण्ड

$25 = 5 \times 5$

$27 = 3 \times 3 \times 3$

इनमें कोई भी अभाज्य संख्या दोनों में नहीं आ रही है अतः इनका सार्व गुणनखण्ड 1 होगा।

इसी प्रकार, हम बीजीय व्यंजकों (Algebraic Expression) को भी उनके गुणनखण्डों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त कर सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते हैं।

10.2 बीजीय व्यजकों के गुणनखण्ड

कक्षा VII में बीजीय व्यंजकों के पदों को पेड़ आरेख की सहायता से गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप मे बताया।

उदाहरणार्थ, बीजीय व्यंजक $3xy + 5x$ में

$3xy$ गुणनखण्डों 3, x और y से बना है अर्थात्

$3xy = 3 \times x \times y$

$5x = 5 \times x$

इनके आगे और गुणनखण्ड नहीं किए जा सकते हैं, हम कह सकते हैं कि $3xy$ के अभाज्य गुणनखण्ड 3, x व y हैं बीजीय व्यंजक में हम 'अभाज्य' के स्थान पर शब्द 'अखण्डनीय' का प्रयोग करते हैं अतः $3xy$ के अखण्डनीय गुणनखण्ड 3, x व y हैं

इसी प्रकार–

$5x\ (x+3) = 5 \times x \times (x+3)$

$10xy\ (x+2)\ (x+9) = 2 \times 5 \times x \times y \times (x+2) \times (x+9)$

> $3xy$ का अखण्डनीय रूप $3 \times x \times y$ होता है।

10.2.1 गुणनखण्डन की विधियाँ

जब हम किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड करते हैं तो उसे गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं ये गुणनखण्ड संख्याएँ, बीजांक या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं। जैसे– $5xy$, $2x^2$, $2x^2y$, $2x(y+2)$, $6(y+1)$। हम इन व्यंजकों के गुणनखण्ड इन्हें देखकर बता सकते है। इसके अलावा $6x+3$, $2a+4b$, y^2+5y, $x^2+7x+12$ जैसे व्यंजकों पर विचार करते है, इनके गुणनखण्ड क्या है ? इन व्यंजकों के गुणनखण्ड करने के लिये दो विधियाँ हैं।

जो इस प्रकार है। (1) सार्व गुणनखण्ड विधि (2) समूहन विधि

10.2.1.1 सार्व गुणनखण्ड विधि

इसे हम एक सरल उदाहरण से अच्छी तरह समझ सकते हैं

आइए $6x+9$ के गुणनखण्ड करते हैं

$6x = 2 \times 3 \times x$

$9 = 3 \times 3$

$6x+9 = (2 \times 3 \times x) + (3 \times 3)$ दोनों मे सार्व गुणनखण्ड 3 हैं। अतः

$= 3[2 \times x + 3] = 3(2x+3)$, ये $6x + 9$ का अखण्डनीय गुणनखण्ड हैं।

<u>द्विपदीय के लिए</u> $ka + kb = k\ (a+b)$

<u>त्रिपदीय के लिए</u> $ka + kb + kc = k\ (a+b+c)$

10.2.1.2 समूहन द्वारा

$3ab + 3b + 2a + 2$ पूरे पद में एक सार्व गुणनखण्ड नहीं है। अतः हम व्यंजक के पदों के समूह बनाकर उसमें से उभयनिष्ठ निकालते हैं, जैसे $3ab + 3b + 2a + 2$ में एक समूह $3ab + 3b$ तथा दूसरा समूह $2a + 2$

$= \underline{3ab + 3b} + \underline{2a + 2}$

$= 3b(a+1) + 2(a+1)$

$= (a+1)(3b+2)$

यहाँ पुनः $a + 1$ दोनों में उभयनिष्ठ हैं। पुनः प्रक्रिया करते हैं

आओ हम इसी बीजीय व्यंजक पर विचार करते हैं यदि यह इस प्रकार से लिखा हुआ है तो

$3ab + 2 + 3b + 2a$

इसमे दो–दो पदों के समूह बनाने पर उभयनिष्ठ पद नही मिलते हैं

इस प्रकार के बीजीय व्यंजकों को हम पुनः व्यवस्थित करके इसके समूह बनाकर गुणनखण्ड कर सकते हैं।

$3ab + 2 + 3b + 2a = 3ab + 2a + 3b + 2$

$= a(3b+2) + 1(3b+2)$

$= (3b+2)(a+1)$

जब कोई उभयनिष्ठ गुणांक नहीं होता है 1 को उभयनिष्ठ लिया जाता है

$(3b+2)$ दोनों में उभयनिष्ठ है अतः पुनः प्रक्रिया करते हैं

<u>यहाँ ध्यान दें</u>– कि $(a+1)(3b+2) = (3b+2)(a+1)$

गुणन का क्रम विनिमेयता का नियम लगता है।

इसे हम इस रूप में लिख सकते हैं

$\underline{Ka} + \underline{Kb} + \underline{Pa} + \underline{Pb}$

$= K(a+b) + P(a+b)$

$= (a+b)(K+P)$

उदाहरण 3 व्यंजक $6xy - 4y + 6 - 9x$ के गुणनखण्ड कीजिए।

चरण 1. जाँच कीजिए कि क्या सभी पदों में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है यहाँ कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

चरण 2. दो समूह बनेंगे पहला समूह $6xy - 4y$ तथा दूसरा समूह $6 - 9x$

$6xy - 4y$	$6 - 9x$
$=2y(3x-2)$	$=3(2-3x)$

चरण 3. दोनों एक समान नहीं है अतः दूसरे समूह को व्यवस्थित करेंगे।

$6 - 9x = -9x + 6$

$= -3(3x - 2)$

एक साथ करने पर

$6xy - 4y + 6 - 9x$

$= \underline{6xy - 4y} - \underline{9x + 6}$ (व्यवस्थित करने पर)

$= 2y(3x-2) - 3(3x-2)$

$= (3x-2)(2y-3)$

प्रश्नावली 10.1

1. दिए हुए पदों मे सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए–

(i) $12x$, 36 (ii) $14pq$, $28p^2q^2$ (iii) 6abc, $24ab^2$, $12a^2b$

(iv) $16x^3$, $-4x^2$, $32x$ (v) $10pq$, $20qr$, $30rp$ (vi) $3x^2y^3$, $10x^3y^2$, $6x^2y^2z$

2. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए – (सार्व गुणनखण्ड द्वारा)

(i) $6p - 12q$ (ii) $7a^2 + 14a$ (iii) $10a^2 - 15b^2 + 20c^2$

(iv) $ax^2y + bxy^2 + cxyz$ (v) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$ (vi) $-16z + 20z^3$

3. गुणनखण्ड कीजिए (समूहन द्वारा)

(i) $2xy + 3 + 2y + 3x$ (ii) $z - 7 - 7xy + xyz$

(iii) $6xy - 4y + 6 - 9x$ (iv) $15pq + 15 + 9q + 25p$

10.3 समिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखण्ड

हम इन सर्वसमिकाओं को जानते हैं

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

इन सर्वसमिकाओं का उपयोग हम व्यंजकों के गुणनखण्ड करने के लिए भी करते हैं। इनकी सहायता से तीन पद वाले बहुत से व्यंजकों के गुणनखण्ड आसानी से कर सकते हैं।

उदाहरण 4 निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(1) $x^2 + 6x + 9$

$a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में बनाने पर

$= x^2 + 2 \times x \times 3 + (3)^2$

$= (a)^2 + 2\times(a)(b) + (b)^2$

$= (x+3)^2$

ध्यान दें

(i) तीन पद हैं

(ii) यह $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप का है जहाँ a^2 के स्थान पर x^2 तथा b^2 के स्थान पर 9 है

अतः $a = x$, $b = 3$

समूहन विधि

$x^2 + 6x + 9$

$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{3x + 9}$

$= x(x+3) + 3(x+3)$

$= (x+3)(x+3)$

$= (x+3)^2$

(2) $9a^2 - 30ab + 25b^2$

$= (3a)^2 - 2 \times 3a \times 5b + (5b)^2$

$= (a)^2 - 2 \times (a) \times (b) + (b)^2$

$= (3a-5b)^2$

ध्यान दें

(i) तीन पद हैं

(ii) यह $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप का हैं जहाँ a^2 के स्थान पर $9a^2$ तथा b^2 के स्थान पर $25b^2$ है। अतः $a = 3a$, $b = 5b$

समूहन विधि $9a^2 - 30ab + 25b^2$

$= 9a^2 - 15ab - 15ab + 25b^2$

$= 3a(3a-5b) - 5b(3a-5b)$

$= (3a-5b)(3a-5b)$

$= (3a-5b)^2$

(3) $4x^2 - 9a^2$
$= (2x)^2 - (3a)^2$
$= (2x+3a)(2x-3a)$

(i) इसमें सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ का प्रयोग होगा क्योंकि इसमे दोनों पद पूर्ण वर्ग है
यहाँ $a^2 = 4x^2$, $b^2 = 9a^2$
$a = 2x$, $b = 3a$

(4) $2x^2 + 16x + 32$
$= 2[x^2 + 8x + 16]$
$= 2[x^2 + 2x \times 4 + (4)^2]$
$= 2(x+4)^2$

(i) इसमें प्रथम व अन्तिम पद पूर्ण नहीं है
(ii) तीनो पदों मे 2 उभयनिष्ठ है
iii) यह $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप का है

10.3.1 $(x+a)(x+b)$ के रूप के गुणनखण्ड

हम एक चर वाले व्यंजकों, जैसे $x^2 + 8x + 12$, $y^2 - 5y + 6$, $z^2 - 4z - 12$, $x^2 + 2x - 15$ इत्यादि व्यंजकों के गुणनखण्ड किस प्रकार कर सकते हैं ?ये व्यंजक $(a+b)^2(a-b)^2$ के प्रकार के नहीं हैं अर्थात इनमें तीसरा पद पूर्ण वर्ग नहीं है और ये (a^2-b^2) के प्रकार के भी नहीं हैं।

परन्तु ये $x^2 + (a+b)x + ab$ प्रकार के हैं इस प्रकार के गुणखण्ड करने के लिए हम

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ सर्वसमिका का प्रयोग कर सकते हैं इसके लिए हमें x का गुणांक तथा अचर पद को देखते हैं। आइए उदाहरण द्वारा देखते हैं कि ऐसा किस प्रकार किया जाता है।

करो और सीखो

दो पूर्णांक a तथा b ऐसे ज्ञात कीजिए कि –

$a+b$	ab	a	b
8	15	5	3
13	12		
-1	-20	-5	4
-5	4		
10	21		
-1	-12		
-11	10		
-7	10		

तालिका–2

उदाहरण 5 निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $x^2 + 8x + 12$

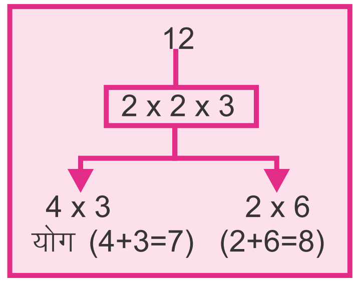
सर्वसमिका $x^2 + (a+b)x + ab$ से तुलना करने पर

$a+b=8$ $\quad ab = 12$

a और b को ज्ञात करने के लिए, $ab=12$, में 12 के ऐसे गुणनखण्डों का चयन करना होगा जिनका योग 8 होता है

अतः हम $a=2$ तथा $b=6$ लेंगे

अतः $x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$



(ii) $y^2 - 5y + 6$

तुलना करने पर

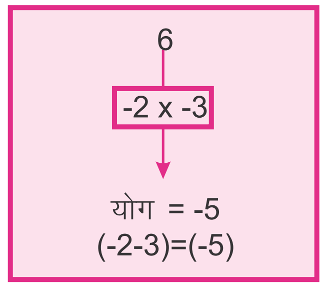
$a+b= -5$ $\quad ab = 6$

$y^2 - (2+3)y + 6$

$= \underline{y^2 - 2y - 3y + 6}$ समूहन करने पर

$= y(y-2) - 3(y-2)$

$= (y-2)(y-3)$



(iii) $z^2 - 4z - 12$

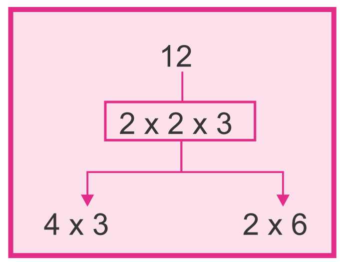
$a+b = -4$ $\quad ab= -12$

$ab= -12$ का अर्थ है a या b में दोनों में एक ऋणात्मक है, $a+b= -4$ का अर्थ है बड़ा संख्यात्मक मान ऋणात्मक है अतः $a= -6$ व $b=2$ लेने पर –

$z^2 - 4z - 12 = z^2 - 6z + 2z - 12$

$= z(z-6) + 2(z-6)$

$= (z-6)(z+2)$



उदाहरण 6 $x^2 + 2x - 15$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल $x^2 + 2x - 15$

$a + b = 2$ $\quad ab = -15$ (तुलना करने पर)

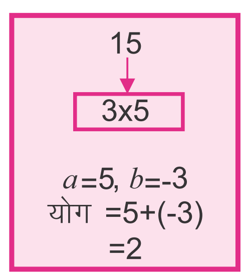
$ab = -15$ का अर्थ है a अथवा b में से एक ऋणात्मक है $a + b = 2$

a का मान धनात्मक होना चाहिए और b ऋणात्मक होना चाहिए

$x^2 + 2x - 15 = \underline{x^2 + 5x} - \underline{3x - 15}$

$= x(x+5) - 3(x+5)$

$= (x+5)(x-3)$



प्रश्नावली 10.2

(1) निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) a^2-4 (ii) a^2-49b^2 (iii) a^3-121p (iv) $(a-b)^2-c^2$
(v) a^4-b^4 (vi) $5x^3-125x$ (vii) $63a^2-112b^2$ (viii) $9x^2y^2-16$
(ix) $(l+m)^2-(l-m)^2$

(2) निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $lx^2 + mx$ (ii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$
(iii) $a(a+b) + 4(a+b)$ (iv) $(xy + y) + x + 1$
(v) $5a^2 - 15a - 6c + 2ac$ (vi) $am^2 + bm^2 + bn^2 + an^2$

(3) निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $q^2 + 11q + 24$
(iii) $m^2 - 10m + 21$ (iv) $x^2 + 6a - 16$
(v) $x^2 - 7x - 18$ (vi) $k^2 - 11k - 102$
(vii) $y^2 + 2y - 48$ (viii) $d^2 - 4d - 45$
(ix) $m^2 + 16m + 63$ (x) $n^2 - 19n - 92$
(xi) $p^2 - 10p + 16$ (xii) $x^2 + 4x - 45$

10.4 बीजीय व्यंजकों का विभाजन

हम बीजीय व्यंजकों को जोड़ना, घटाना तथा गुणा करना सीख चुके हैं परन्तु हम एक बीजीय व्यंजक से दूसरे का विभाजन करना अब सीखेंगे। विभाजन हमेशा गुणन की प्रतिलोम संक्रिया है।

जैसे – $5 \times 8 = 40$ से $40 \div 8 = 5$ या $40 \div 5 = 8$

इसी प्रकार $3x \times 5x^2 = 15x^3$

$15x^3 \div 5x^2 = 3x$

$15x^3 \div 3x = 5x^2$

इसी प्रकार $5x(x+3) = 5x^2 + 15x$

$(5x^2 + 15x) \div 5x = x + 3$

$(5x^2 + 15x) \div (x+3) = 5x$

10.4.1 एक पदी का एक अन्य एक पदी से विभाजन

$$8x^3 \div 2x = \frac{2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 2 \times 2 \times x \times x = 4x^2$$

उदाहरण 7

(i) $-20x^5 \div 5x^2$ हल कीजिए।

हल

$$= \frac{-2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x \times x}{5 \times x \times x} = -2 \times 2 \times x \times x \times x = -4x^3$$

(ii) $7a^2b^2c^2 \div 21abc$

हल

$$= \frac{7 \times a \times a \times b \times b \times c \times c}{3 \times 7 \times a \times b \times c}$$

$$= \frac{a \times b \times c}{3} = \frac{abc}{3}$$

(iii) $63p^2q^3r \div -3p^4q$

हल

$$= \frac{3 \times 3 \times 7 \times p \times p \times q \times q \times q \times r}{-3 \times p \times p \times p \times p \times q}$$

$$= \frac{3 \times 7 \times q \times q \times r}{-p \times p} = \frac{-21q^2r}{p^2}$$

10.4.2 एक बहुपद में एक पदीय व्यंजक से भाग

$8y^3 + 6y^2 + 12y$ को $2y$ से विभाजन पर विचार करते हैं

$$\frac{8y^3 + 6y^2 + 12y}{2y} \quad \frac{2y\,(4y^2 + 3y + 6)}{2y}$$

$$= 4y^2 + 3y + 6$$

इसे इस प्रकार भी कर सकते हैं

$$\frac{8y^3 + 6y^2 + 12y}{2y} = \frac{8y^3}{2y} + \frac{6y^2}{2y} + \frac{12y}{2y}$$

$$= 4y^2 + 3y + 6$$

अंश के प्रत्येक पद को हर में एक पदी से भाग देते हैं।

उदाहरण 8 $(18x + 12x^3 - 6x^2) \div (-3x)$ को हल कीजिए।

हल

$$\frac{18x + 12x^3 - 6x^2}{-3x} = \frac{6x\,(3 + 2x^2 - x)}{-3x}$$

$$= -2(3 + 2x^2 - x)$$

$$= -6 - 4x^2 + 2x$$

$$= -4x^2 + 2x - 6$$

10.4.3 बहुपद का बहुपद से विभाजन

$(7x^2+14x) \div (x+2)$ पर विचार करते हैं।

$$\frac{7x^2+14x}{x+2}$$

$$= \frac{7x\,(x+2)}{x+2} = 7x$$

उदाहरण 9 $(x^2 + 7x + 10) \div (x+2)$ को हल कीजिए।

हल

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} = \frac{x^2 + 5x + 2x + 10}{x + 2}$$

$$= \frac{x(x+5) + 2(x+5)}{x + 2} = \frac{(x+5)(x+2)}{x + 2} = x + 5$$

10
5 2
जोड़ने पर 5+2 = 7

उदाहरण 10 $p(5p^2 - 80)$ को $5p(p-4)$ से भाग दीजिए।

हल

$$\frac{p(5p^2 - 80)}{5p(p - 4)} = \frac{5p(p^2 - 16)}{5p(p - 4)}$$

$$\frac{5p[(p)^2 - (4)^2]}{5p(p - 4)} = \frac{5p(p - 4)(p + 4)}{5p(p - 4)} = p + 4$$

करो और सीखो

त्रुटियों को पहचानो

(1) $3x + x + 4x = 56$

$7x = 56$

$x = \frac{56}{7} = 8$

त्रुटि कहाँ है सही उत्तर ज्ञात कीजिए।

(2) $5x$ का मान $x = -2$ पर ज्ञात कीजिए।

$= 5 - 2 \quad = 3$

त्रुटि कहाँ है ? सही मान ज्ञात कीजिए।

(3) व्यंजकों के हल कॉलम A तथा कॉलम B में दिए गए हैं जाँच करके बताएँ कौनसा हल सही है ?

व्यंजक	A	B
$3(x-4)$	$3x - 4$	$3x - 12$
$(2x)^2$	$2x^2$	$4x^2$
$(x+4)^2$	$x^2 + 16$	$x^2 + 8x + 16$
$(x-3)^2$	$x^2 - 9$	$x^2 - 6x + 9$
$\frac{y+5}{5}$	$y + 1$	$\frac{y}{5} + 1$

किसी पद के गुणांक 1 को प्रायः दर्शाया नहीं जाता है परन्तु समान पदों को जोड़ते समय इसे योग में सम्मिलित करते है।

प्रश्नावली 10.3

1. निम्नलिखित विभाजन कीजिए।
   (i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$
   (iii) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (iv) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$

2. दिए हुए बहुपद को दिए हुए एक पदी से भाग दीजिए।
   (i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$
   (iii) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$ (iv) $(3x^8 - 4x^6 + 5x^4) \div x^4$

3. निम्नलिखित विभाजन कीजिए।
   (i) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (ii) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$
   (iii) $(10y + 14) \div 2$ (iv) $(6x - 15) \div (2x - 5)$

4. व्यंजक के गुणनखण्ड कीजिए और भाग दीजिए।
   (i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(5x^2 - 25x + 20) \div (x - 1)$
   (iii) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$ (iv) $4yz\,(z^2 + 6z - 16) \div 2y\,(z+8)$

हमने सीखा

1. गुणनखण्ड किसी व्यंजक को उसके गुणजों के गुणा के रूप में व्यक्त करने की प्रक्रिया है।
2. अभाज्य गुणनखण्ड वह होता है जिसे आगे और गुणनखण्डों में नहीं बाँटा जा सकता है।
3. निम्नांकित प्रकार के व्यंजकों को गुणनखंडों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है–
   (i) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
   (ii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
   (iii) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
   (iv) $x^2 + (a+b)x + ab = (x + a)(x + b)$
4. यदि व्यंजक $x^2 + (a+b)x + ab$ रूप में है तो इसका गुणनखंड $(x+a)(x+b)$ होगा।
5. गुणा, भाग का व्युत्क्रम होता है। यह संकल्पना बीजगणितीय व्यंजकों पर भी लागू होती है।
6. इस अध्याय में पढ़े बीजीय व्यंजकों के विभाजनों की स्थिति से हमें भाज्य = भाजक x भागफल प्राप्त होगा परन्तु व्यापक रूप में वह संबंध निम्नलिखित है–
   भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल