

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक

नाम

131/2 335(QF)

2017

गणित

द्वितीय प्रश्नपत्र

(कलन, रैखिक प्रोग्रामन, सदिश तथा त्रिविमीय ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Instruction : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- नोट :
- i) इस प्रश्नपत्र में कुल आठ प्रश्न हैं ।
 - ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
 - iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं ।

748539

[Turn over

- iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।
- v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए ।
- vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

- Note :*
- i) There are in all *eight* questions in this question paper.
 - ii) *All* questions are compulsory.
 - iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted is clearly mentioned.
 - iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.
 - v) Start from the first question and proceed to the last.
 - vi) Do not waste time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) सदिशों $2\hat{i} - \hat{j}$ तथा $2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए । 1

ख) यदि $y = \sin (xe^x)$ तो $\left(\frac{dy}{dx} \right)$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

ग) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

घ) सदिश विधि से उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु $(1, -1, 1)$ से होकर जाती है तथा रेखा सदिश $2\hat{i} + \hat{j}$ के समांतर है । 1

ङ) यदि एक रेखा x, y तथा z -अक्षों की धनात्मक दिशा के साथ $90^\circ, 60^\circ$ तथा 30° का कोण बनाती है तो रेखा का दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिये । 1

1. Attempt any *four* parts of the following :

a) Find the angle between the vectors

$$2\hat{i} - \hat{j} \text{ and } 2\hat{j} + \hat{k} . \quad 1$$

b) If $y = \sin (x e^x)$ then find the value

$$\text{of } \left(\frac{dy}{dx} \right) . \quad 1$$

c) Evaluate : $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx . \quad 1$

d) By vector method find the equation of the line which passes through the point $(1, - 1, 1)$ and parallel to the line vector $2\hat{i} + \hat{j} . \quad 1$

e) If a line makes angles 90° , 60° and 30° with the positive directions of the x , y and z axes then find the direction cosines of the line. 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $y = x^{\sin x}$ तो $\left(\frac{dy}{dx} \right)$ का मान ज्ञात

कीजिये ।

2

ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{y} = 0$ को

हल कीजिये ।

2

ग) सदिश $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

के लम्बवत् सदिश ज्ञात कीजिए ।

2

घ) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

2

ङ) सदिश विधि द्वारा रेखाओं

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4} \text{ तथा}$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2} \text{ के बीच का}$$

कोण ज्ञात कीजिये ।

2

2. Attempt any *four* parts of the following :

a) If $y = x^{\sin x}$ then find the value of $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. 2

b) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{y} = 0. \quad 2$$

c) Find the vector perpendicular to the vectors

$$3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \text{ and } 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}. \quad 2$$

d) Evaluate : $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$. 2

e) Find the angle between the lines

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4} \text{ and}$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2} \text{ by vector}$$

method. 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) जिन वृत्तों का केन्द्र x -अक्ष पर हो तथा त्रिज्याएँ 'a' हों उनका अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

2

ख) $\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

2

ग) यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन सदिश राशियाँ इस प्रकार हों कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ तो सिद्ध कीजिये कि

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} .$$

2

घ) $e^{\sin x}$ का अवकल गुणांक $\sqrt{\sin x}$ के सापेक्ष ज्ञात कीजिए ।

2

ङ) उस समतल का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(5, 2, -4)$ से होकर जाता है तथा सरल रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$ पर लम्ब है ।

2

3. Attempt any *four* parts of the following :

a) Find the differential equation of the circles whose centre is on x -axis and the radii are a . 2

b) Evaluate $\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$. 2

c) If three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are such that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, then prove that

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} . \quad 2$$

d) Find the differential coefficient of $e^{\sin x}$ with respect to $\sqrt{\sin x}$. 2

e) Find the Cartesian equation of the plane which passes through the point $(5, 2, -4)$ and perpendicular to the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$. 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

क) फलन $z = 2x + 3y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये जबकि प्रतिबन्ध निम्न हैं :

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 10, 2x + y \leq 14.$$

3

ख) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिश हों तो सिद्ध कीजिये कि

$$\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a} \right] = 2 \left[\vec{a} \vec{b} \vec{c} \right].$$

3

ग) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = xy + y + x + 1 \text{ को हल कीजिए । } 3$$

घ) $\int \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) dx$ का मान ज्ञात

कीजिए ।

3

4. Attempt any *three* parts of the following :

- a) Find the maximum value of the function $z = 2x + 3y$ under the following conditions :

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 10, 2x + y \leq 14.$$

3

- b) If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are three vectors then prove that

$$\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a} \right] = 2 \left[\vec{a} \vec{b} \vec{c} \right].$$

3

- c) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = xy + y + x + 1.$$

3

- d) Evaluate : $\int \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) dx.$

3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए :

क) सदिश विधि द्वारा समतलों $2x + y - 2z = 5$
तथा $3x - 6y - 2z = 7$ के बीच का कोण ज्ञात
कीजिए । 3

ख) अवकल समीकरण

$(\tan y) \frac{dy}{dx} = \sin(x + y) + \sin(x - y)$
को हल कीजिए । 3

ग) सिद्ध कीजिए कि $x = \frac{1}{e}$ पर फलन

$f(x) = x^x$ का मान निम्निष्ठ है । 3

घ) $\int_0^{\pi/2} \log_e(\tan x) dx$ का मान ज्ञात
कीजिए । 3

5. Attempt any *three* parts of the following :

a) By vector method find the angle
between the planes $2x + y - 2z = 5$
and $3x - 6y - 2z = 7$. 3

b) Solve the differential equation

$$(\tan y) \frac{dy}{dx} = \sin(x + y) + \sin(x - y).$$

3

c) Prove that at $x = \frac{1}{e}$ the function

$$f(x) = x^x \text{ has minimum value.} \quad 3$$

d) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \log_e(\tan x) dx.$ 3

6. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ तथा

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{2} \text{ के बीच सदिश}$$

विधि द्वारा न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 4

ख) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत,

$$2x - y \geq -5$$

$$3x + y \geq 3$$

$$2x - 3y \leq 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

ग्राफीय विधि द्वारा $Z = -50x + 20y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए । 4

6. Attempt any *one* part of the following :

- a) By vector method find the shortest distance between the lines

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1} \text{ and}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{2}. \quad 4$$

- b) Find the minimum value of

$Z = -50x + 20y$ by graphical method under the following constraints (restrictions) :

$$2x - y \geq -5$$

$$3x + y \geq 3$$

$$2x - 3y \leq 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \quad 4$$

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

- क) परवलय $y^2 = 4x$ तथा सरल रेखा $y = 2x$ द्वारा घिरे हुये क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 4

- ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{\tan x}}} = \frac{\pi}{4}. \quad 4$$

7. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and the straight line $y = 2x$. 4

b) Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{\tan x}}} = \frac{\pi}{4}. \quad 4$$

8. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) i) उस रेखा का दिक्-कोज्या ज्ञात कीजिये जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती है ।

2

ii) दिखाइये कि रेखायें

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ तथा}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) + \mu (3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$$

समतलीय हैं ।

2

ख) यदि वक्र $ax^2 + by^2 = 1$ तथा

$a_1x^2 + b_1y^2 = 1$ एक दूसरे को समकोण पर

काटते हैं तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} . \quad 4$$

8. Attempt any *one* part of the following :

a) i) Find the direction cosine of the line which makes equal angles with the co-ordinate axes. 2

ii) Show that the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$$

are coplanar. 2

- b) If the curves $ax^2 + by^2 = 1$ and $a_1x^2 + b_1y^2 = 1$ cut each other at right angles then prove that

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} . \quad 4$$

335(QF) – 1,35,000