गणित

कक्षा – 9

सत्र 2019–20

DIKSHA एप कैसे डाउनलोड करें?

विकल्प 1 : अपने मोबाइल ब्राउज़र पर diksha.gov.in/app टाइप करें।

विकल्प 2 : Google Play Store में DIKSHA NCTE ढूंढ़े एवं डाउनलोड बटन पर tap करें।

DIKSHA

मोबाइल पर QR कोड का उपयोग कर डिजिटल विषय वस्तु कैसे प्राप्त करें ?

DIKSHA App को लॉच करे → App की समस्त अनुमति को स्वीकार करें → उपयोगकर्ता Profile का चयन करें।

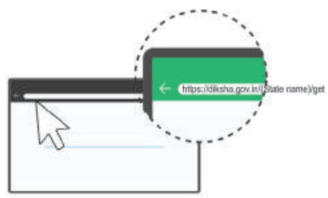
1 पाठ्यपुस्तक में QR Code को Scan करने के लिए मोबाइल में QR Code tap करें।

2 मोबाईल को QR Code पर केन्द्रित करें।

3 सफल Scan के पश्चात् QR Code से लिंक की गई सूची उपलब्ध होगी।

डेस्कटॉप पर QR Code का उपयोग कर डिजिटल विषय–वस्तु तक कैसे पहुँचे ?

1 QR Code के नीचे 6 अंक का Alpha Numeric Code दिया गया है।



2 ब्राउज़र में diksha. gov.in/cg टाईप करें।

3 सर्च बार पर 6 डिजिट का QR CODE टाईप करें।

4 प्राप्त विषय–वस्तु की सूची से चाही गई विषय–वस्तु पर क्लिक करें।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् छत्तीसगढ़, रायपुर

निःशुल्क वितरण हेतु

प्रकाशन वर्ष : 2019

© संचालक, एस.सी.ई.आर.टी. छत्तीसगढ़, रायपुर

मार्गदर्शन : प्रो. हृदयकांत दीवान, विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर

सहयोग : विद्या भवन सोसायटी उदयपुर, सरस्वती शिक्षा संस्थान छत्तीसगढ़, अजीम प्रेमजी फाउण्डेशन

कार्यक्रम समन्वयक : डॉ. विद्यावती चन्द्राकर

विषय–समन्वयक : डॉ. सुधीर श्रीवास्तव

लेखन समूह : डॉ. सुधीर श्रीवास्तव, टी.के.गजपाल, नंदलाल शाह, डॉ. राघवेन्द्र कुमार गौराहा, चमन लाल चन्द्राकर, हारेन्द्र सिंह भुवाल, सिरीश कुमार नन्दे, खान वकारूज्जमां खां, आरती माने, नीतू साहू, सुरेखा गौतम, देवेन्द्र राव देशमुख, गोविन्द राम चौधरी, डॉ. पुष्पा कौशिक, संजय कुमार साहू, मनोज कुमार झा, कृष्ण कुमार यदु, रामकुमार साहू, तान्या सक्सेना, स्नेहबाला जोशी, आशीष चोर्डिया, अखिलेश त्रिपाठी, संजय बोल्या, नेहा कश्यप

CFGQSU

आवरण पृष्ठ : रेखराज चौरागड़े

ले–आउट : एस.एम. इकराम, विद्या भवन शिक्षा संदर्भ केन्द्र, उदयपुर

टंकण : भवानी शंकर कुमावत, शाकिर अहमद

चित्रांकन : प्रशान्त सोनी, विद्या भवन शिक्षा संदर्भ केन्द्र, उदयपुर

प्रकाशक

छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक निगम, रायपुर

मुद्रक

मुद्रित पुस्तकों की संख्या – ....

आमुख

इस पाठ्यपुस्तक पर जब काम की शुरुआत हुई तो हमारे सामने कुछ प्रश्न थे जैसे – ऐसा क्या किया जाय कि पुस्तक ज्यादा रुचिकर, पठनीय और उपयोगी बन सके? किसी अवधारणा या इकाई को पुस्तक में क्यों सम्मिलित किया जाए ? इस पुस्तक के माध्यम से हम अपने विद्‌यार्थियों में किन कौशलों का विकास करना चाहते हैं ? क्या पुस्तक का स्वरूप ऐसा हो सकता है जिससे कक्षा में गणित पर काम करने की प्रक्रिया में बच्चों की सहभागिता बढ़ सके ? .... आदि–आदि।

इन सवालों से जूझते हुए कई विचार सामने आए, उन्हें ध्यान में रखते हुए इकाइयों का चयन किया गया। पाठों की रचना हुई। बार–बार इनकी समीक्षा हुई। लगभग हर बार कोई न कोई कमी सामने आती रही और हर बार पाठ को नए सिरे से लिखा गया। अभी पाठ जिस रूप में हैं उसमें आप देख पाएँगे कि पाठ की भाषा सहज बोलचाल की भाषा है। जहाँ–जहाँ तकनीकी शब्दावलियों की जरूरत पड़ी है वहाँ वाक्य रचना इतनी सरल है कि इन नए शब्दों के अर्थ आसानी से समझ में आने लगते हैं। दूसरी बात यह है कि कोई नियम या सिद्धांत सीधे–सीधे ही प्रस्तुत नहीं कर दिए गए हैं। वहाँ ऐसे प्रयास किए गए हैं कि पाठ को पढ़ते समय सोचना भी जारी रहे, जरूरत पड़े तो विद्‌यार्थी अपने सहपाठियों या शिक्षकों से बातें करें, अपने तर्क रखें, उनके विचार सुनें और तब कहीं आगे बढ़ें। लगभग हर इकाई में हमने उस इकाई से संबंधित इतिहास से जुड़ी कुछ बातें रखी हैं ताकि विद्‌यार्थी गणित की उस पृष्ठभूमि को भी देख सकें जहाँ उसका जन्म और विकास हुआ। वे उसके सन्दर्भों को समझते हुए आज उसकी उपयोगिता को देख सकें। इससे उनमें गणित के प्रति एक अलग दृष्टिकोण बनेगा ऐसी हमारी आशा है।

लगभग सभी पाठ जीवन से जुड़े रोचक उदाहरणों से शुरू हुए हैं। बातचीत की शैली में अवधारणाएँ धीरे–धीरे विकसित की गई हैं। इन अवधारणाओं पर आधारित सरल प्रश्न हल करके समझाए गए हैं जो नई परिस्थितियों को जोड़ते हुए क्रमशः जटिल होते गए हैं। इतना करते हुए हर विद्‌यार्थी अवधारणा को समझ कर उसका अनुप्रयोग करने में सक्षम होने लगता है। इस पूरी प्रक्रिया से उसमें अनेक गणितीय कौशल जैसे – अमूर्त विचारों को समझना, गणितीय संकेतों में इसे व्यक्त करना, तर्क करना, प्रमाण देना, निष्कर्ष निकालना, पारिभाषिक शब्दावली को समझना, इनका उचित उपयोग करना आदि विकसित होने लगते हैं।

इनके अलावा और भी कई बातें हैं जो किसी पाठ्यपुस्तक को उपयोगी बनाने के लिए जरूरी हैं, उन्हें इस पुस्तक में शामिल करने की कोशिश की गई है। आप पढ़ें, इन्हें पहचानें। जहाँ आपको लगता है कुछ सुधारना जरूरी है, उसे हमें बताएँ। आपके सुझाव हमारे लिए मार्गदर्शक सिद्ध होंगे और पुस्तक को अधिक उपयोगी बनाने में हमारी सहायता करेंगे।

स्कूल शिक्षा विभाग एवं राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, छ.ग. द्वारा शिक्षकों एवं विद्यार्थियों में दक्षता संवर्धन हेतु अतिरिक्त पाठ्य संसाधन उपलब्ध कराने की दृष्टि से Energized Text Books एक अभिनव प्रयास है, जिसे ऑन लाईन एवं ऑफ लाईन (डाउनलोड करने के उपरांत) उपयोग किया जा सकता है। ETBs का प्रमुख उद्‌देश्य पाठ्यवस्तु के अतिरिक्त ऑडियो–वीडियो, एनीमेशन फॉरमेट में अधिगम सामग्री, संबंधित अभ्यास, प्रश्न एवं शिक्षकों के लिए संदर्भ सामग्री प्रदान करना है।

इस पुस्तक को तैयार करने में विद्याभवन सोसायटी उदयपुर, सरस्वती शिक्षा संस्थान छत्तीसगढ़, अजीम प्रेमजी फाउण्डेशन का हमें भरपूर सहयोग और मार्गदर्शन मिला है। परिषद् उनका आभारी है।

संचालक
राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
छत्तीसगढ़, रायपुर

शिक्षक के लिए दो शब्द...

माध्यमिक स्तर तक गणित को भी अन्य विषयों की तरह अनिवार्य रूप से पढ़ाया जाता है। इसलिए इस स्तर पर इसे इस प्रकार समेकित करने की कोशिश की जाती है कि हर नागरिक में अपेक्षित गणितीय क्षमताओं एवं समझ का विकास हो सके। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा गणित को पाठ्यपुस्तक में दी गई समस्याओं के हल तक सीमित न रखकर, गणितीकरण की क्षमता के विकास को शामिल कर इस दायरे को और आगे बढ़ाती है। इसके लिए रोजमर्रा के काम में आने वाले गणित के उपयोग से आगे, छात्रों की गणितीय चिंतन और दृश्यीकरण की क्षमता को बढ़ावा दिया जाना आवश्यक है।

माध्यमिक स्तर पर गणित में एक ओर जहां कक्षा–6 से 8 तक में शुरू की गई गणितीय अवधारणाओं को पुख्ता करने की जरूरत होती है वहीं दूसरी ओर बच्चों को इन अवधारणाओं के व्यापक संबंधों को समझने और इस ढाँचे की गहरी समझ विकसित करने पर जोर देना भी जरूरी हो जाता है।

तर्कों को गढ़ना, प्रत्येक चरण को तार्किक एवं संक्षिप्त रूप में दर्शा पाना ऐसी क्षमताएं हैं जो हमें दुनिया के संबंधों एवं उसकी समझ को बेहतर रूप से देखने में मदद करती है। वृहद् रूप में माध्यमिक स्तर के गणित का उद्देश्य अवधारणात्मक ढाँचे को समझना, अपनी बात का तार्किक आधार दे पाने की योग्यता हासिल करना, सटीक एवं संक्षिप्त रूप से अपने विचारों को व्यक्त कर पाना एवं सिद्ध करने व सामान्यीकरण की गणितीय प्रक्रिया व नियमों को समझ पाना है।

बच्चे यह समझना शुरू करें कि गणित में सिद्ध करने का क्या अर्थ है और इसके लिए क्रमबद्ध तर्कों की आवश्यकता क्यों पड़ती है। स्थानिक समझ एवं स्थानिक परिवर्तन की समझ एवं विश्लेषण कर सकने की क्षमता को बढ़ाना भी यहां उतना ही आवश्यक हो जाता है। संख्याकों से आगे संख्या पद्धति को अमूर्त रूप में समझना, संख्याओं के सामान्य नियम खुद से निकाल पाना, समता, चर एवं समीकरण के हल से क्या अर्थ है ऐसे कुछ उदाहरण हैं जिन्हें इस स्तर पर पाठ्यक्रम में शामिल किया गया है।

यदि हम एन.सी.एफ. 2005 के गणित वाले हिस्से पर बात करें, तो हम पाएंगे कि यह गणित की समझ के विकास के साथ इसके विभिन्न परिस्थितियों में उपयोग पर बल देता है। अतः यह पढ़ने वाले के जीवन से जुड़े व्यापक क्षेत्र पर उसकी क्षमताओं के विकास पर बल देता है। बच्चे को जटिल गणनाओं में दक्षता हासिल करने के बजाय, गणितीय तरीके से सोचने, तर्क करने के लिए प्रेरित करना आवश्यक है ताकि बच्चे यह समझें कि गणित कैसे काम करता है न कि निपुण गणक की तरह सिर्फ जल्दी से जटिल गुणा/भाग कर हल निकाल पाये।

बच्चों को गणित की समस्या हल करते समय अवधारणा को समझने के साथ ही साथ मजा भी आना चाहिए। बच्चे अवधारणाओं को समझने में ही व्यस्त न रहें अपितु इनका उपयोग कर समस्याओं को हल करने में आनंद का अनुभव कर इतनी क्षमता अर्जित कर लें कि समस्याओं को समझकर हल करने के तरीके स्वयं ढूंढ़ सकें। इससे बच्चों में किसी नई समस्या को समझने और उसे हल करने का आत्मविश्वास उत्पन्न होगा। इसका अर्थ यह नहीं है कि पुस्तक में दिए गए या कक्षा में हल कराए जाने वाले अभ्यास के प्रश्न घिसे–पिटे तरीके के हैं और यांत्रिक जटिलता से परिपूर्ण हैं बल्कि ये बच्चे को अवधारणाओं की खोज करने और स्वयं के लिए ढांचा (framework) विकसित करने में मददगार हैं।

माध्यमिक स्तर पर समस्या समाधान की क्षमता महत्त्वपूर्ण हो जाती है। पहले ही इस पर चर्चा की जा चुकी है कि बच्चे समस्या हल करने में आनंद का अनुभव करें। इस पर अधिक जोर देने की आवश्यकता है कि

समस्या समाधान का उद्देश्य एक विशिष्ट विधि का प्रयोग कर एक विशिष्ट उत्तर प्राप्त करना नहीं है। यह भी महत्त्वपूर्ण है कि समस्या समाधान के कई तरीके तलाशने में शिक्षक, बच्चे की मदद कर सके। बच्चे यह भी महसूस कर सकें कि कई समस्याओं के विविध हल हो सकते हैं। कक्षा में ऐसी परिस्थितियाँ बनें कि बच्चे स्वयं सवाल बना सकें और परिभाषाएँ बनाने के बारे में सोच सकें ताकि बच्चे समस्या या सवाल को अच्छे से समझकर उपयुक्त अवधारणा और एल्गोरिद्म का चयन करने में सक्षम हो जाएँ।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा में उल्लेखित कई बिंदुओं में से यह एक महत्वपूर्ण बिन्दु है कि गणित की कक्षा कैसी होनी चाहिए। साथ ही यह भी उल्लेख करना आवश्यक है कि कक्षा में बच्चों को समूह में चर्चा करने, विचार–विमर्श करने और विचारों को विकसित करने के अवसर उपलब्ध कराए जाएं। माध्यमिक स्तर की कक्षाएं इसके लिए विशेष रूप से महत्वपूर्ण है क्योंकि इस स्तर पर बच्चे समूह में रहना पसंद करते हैं। यदि गणित के मुद्दे इन्हें समूह में चर्चा, विचार–विमर्श के अवसर उपलब्ध करा सकें तो बच्चे शाला में सीखे गए ज्ञान का रोजमर्रा के जीवन के साथ सार्थक संबंध बना पाएंगे।

माध्यमिक स्तर में गणित शिक्षण के दौरान यह भी ध्यान रखना चाहिए कि इस स्तर तक पहुंचने वाले बच्चे क्रमबद्ध तार्किक विचार बना सकते हैं। इसलिए बच्चों को ऐसे सवाल या समस्याएं देनी चाहिए जिससे कथनों को सिद्ध करने की समझ बन सके, सिद्ध करने के लिए आवश्यक विचारों का निर्माण करने में मदद मिल सके, गणित की मूल अवधारणाओं को आत्मसात कर सकें और इनके अंदर इतना आत्मविश्वास उत्पन्न हो जाए कि ये गणितीय विचारों को सीख सकें और उनको प्रयोग भी कर सकें।

नीचे कुछ मुख्य विचारों को संक्षिप्त रूप से प्रस्तुत किया जा रहा है, जिन्हें गणित की कक्षा में जाने से पहले आपको ध्यान रखना चाहिए–

गणित विषय के अध्यापन के दौरान शिक्षक एवं छात्र दोनों की सहभागिता एवं सक्रियता आवश्यक है। छात्रों को ऐसा वातावरण उपलब्ध कराना चाहिए कि वे आपस में बातचीत कर सकें, विचारों का आदान–प्रदान कर सकें और ज्ञान का सृजन कर सकें।

बच्चों को बातचीत करने के अवसर देना भाषा की दृष्टि से भी अत्यंत महत्वपूर्ण है। छात्र न केवल अपने गणितीय विचारों को अपने शब्दों और अपनी भाषा में व्यक्त कर पाएं बल्कि गणितीय प्रतीकों, ग्राफ आदि का प्रयोग कर औपचारिक गणितीय भाषा का इस्तेमाल करने की दिशा में भी आगे बढ़ सकें।

माध्यमिक स्तर पर गणित में अमूर्तता बढ़ जाती है। छात्र अवधारणाओं को समझ सकें और उनमें संबंध बना सकें। साथ ही विषय के साथ अमूर्तता को भी संबंधित कर सकें।

शिक्षकों के लिए यह पाठ्यपुस्तक एक ऐसा साधन है, जिसका वे उपयुक्त संदर्भ के साथ उपयोग कर सकते हैं, वे इसे ही सम्पूर्ण अधिगम प्रक्रिया के मार्गदर्शक साधन के रूप में न समझें। इस पाठ्यपुस्तक का कैसे बेहतर उपयोग किया जा सकता है, यह शिक्षक स्वयं तय करें।

लेखक समूह

विषय–सूची

इकाई–1		**गणित का इतिहास**	**01–28**
	अध्याय–1	गणित का इतिहास	02–28
इकाई–2		**बीजगणित**	**29–124**
	अध्याय–2	वास्तविक संख्याएँ	31–62
	अध्याय–3	घातांक	63–82
	अध्याय–4	बहुपद	83–99
	अध्याय–5	एक चर का रैखिक समीकरण	100–111
	अध्याय–6	संख्याओं में भी है खेल	112–124
इकाई–3		**वाणिज्य गणित**	**125–152**
	अध्याय–7	राशियों की तुलना	126–152
इकाई–4		**त्रिकोणमिति**	**153–173**
	अध्याय–8	त्रिकोणमितीय अनुपात और सर्वसमिकाएँ	154–173
इकाई–5		**ज्यामिति**	**174–272**
	अध्याय–9	सरल रेखा और कोण	175–202
	अध्याय–10	त्रिभुजों की सर्वांगसमता	203–228
	अध्याय–11	चतुर्भुज	229–245
	अध्याय–12	ज्यामितीय आकृतियों में परिवर्तन एवं सममिति	246–258
	अध्याय–13	ज्यामितीय रचनाएँ	259–272
इकाई–6		**क्षेत्रमिति**	**273–289**
	अध्याय–14	वृत्त का त्रिज्याखण्ड और चाप की लंबाई	274–281
	अध्याय–15	घन और घनाभ	282–289
इकाई–7		**सांख्यिकी**	**290–308**
	अध्याय–16	आँकड़ा प्रबंधन एवं विश्लेषण	291–308
		उत्तरमाला	**309–322**

APKNHL

गणित का इतिहास

HISTORY OF MATHEMATICS

इकाई – 1

गणित का आरंभ कहाँ और किस रूप में हुआ यह ठीक–ठीक बता पाना कठिन है। जिन्हें हम सबसे पुराना लिखित दस्तावेज मानते हैं इनसे भी बहुत पहले के कुछ ऐसे चित्र या संकेत मिलते हैं जो मूल गणित के कुछ ज्ञान की ओर संकेत करते हैं। उदाहरण के लिए जीवाश्म विज्ञानियों ने दक्षिण अफ्रीका की गुफाओं में 'ओकरे' (ochre) चट्टानों की खोज की जिसमें खुरच कर बनाए हए ज्यामितीय पैटर्न दिखाई पड़ते हैं। कांगो में नील नदी के पास मिली 'इशांगो अस्थि' (Ishango bone) के बारे में धारणा है कि यह अभाज्य संख्याओं की श्रृंखला का सबसे पुराना ज्ञात प्रदर्शन है। यह मान्यता है कि यह 20,000 वर्ष पुराना हो सकता है।

लगभग 5000 ई.पू. पहले इजिप्ट के लोगों ने ज्यामितिक स्थानिक आकृतियों (Spatial design) का प्रदर्शन किया। प्राचीन भारत का सबसे प्राचीन ज्ञात गणित 3000–2600 ई.पू. का माना जाता है। उत्तर भारत की सिंधु घाटी (हड़प्पा) सभ्यता ने समान वजन और मापन की प्रणाली का विकास किया। एक आश्चर्यजनक रूप से उन्नत ईंट तकनीक जिसमें अनुपात का प्रयोग किया गया, का प्रमाण यहाँ मिलता है। यहाँ समकोण पर बनाई गई गलियाँ, कई ज्यामितीय आकारों जैसे घनाभ, शंकु, बेलन, वृत्त, त्रिभुज का मिलना यह संकेत देता है कि उस समय के लोगों का गणित बहुत विकसित था।

सिंधु घाटी (हड़प्पा) सभ्यता के अवशेष

चीनी गणित का सबसे पुराना उदाहरण 'शांग राजवंश' (1600–1046 ई.पू.) से मिलता है जिसमें कछुए के कवच पर खरोंच कर बनाए गए अंक शामिल हैं। लिखित गणित का प्रमाण 'सुमेरियन सभ्यता' में भी मिलता है। जिन्होंने मेसोपोटामिया में सबसे पुरानी सभ्यता का निर्माण किया, ऐसा माना जाता है। उन्होंने 2500–3000 ई.पू. में मापन विज्ञान की एक जटिल प्रणाली का विकास किया।

प्राचीन सभ्यताओं में इजिप्ट, ग्रीक, बेबीलोन और अरब के लोगों ने भी गणित के क्षेत्र में अपना महत्वपूर्ण योगदान दिया। ईसा के बाद के काल में भी दुनिया के अलग–अलग हिस्सों में गणित का निरंतर विकास होता रहा। क्रमशः यह ज्ञान एक दूसरे तक पहुँचकर और भी समृद्ध हुआ।

गणित के विकास की यह कथा आप अलग–अलग स्रोतों से प्राप्त कर सकते हैं। इनका अध्ययन आपको एक अलग आनंददायक अनुभूति दे सकता है। नवीं कक्षा में हम भारतीय गणित के विकास क्रम का एक अंश सम्मिलित कर रहे हैं। आशा है यह आपको प्रेरित करेगा कि आप दुनिया में गणित की विकासयात्रा को देखना समझना चाहें।

गणित का इतिहास

[HISTORY OF MATHEMATICS]

APUJJ9

01

गणित का इतिहास

गणित, विज्ञान एवं तकनीकी का मेरुदण्ड है। अतः वेदांग ज्योतिष में ऋषि लगध ने लिखा है :–

यथा शिखा मयूराणाम् नागानाम् मणयो यथा।

तद्वद् वेदांगशास्त्राणाम् गणितम् मूर्धनिस्थितम् ।।

अर्थात सभी वेदांग शास्त्रों के शीर्ष पर गणित उसी प्रकार सुशोभित है जैसे मोर के सिर पर शिखा तथा सर्प के फन पर मणि सुशोभित है।

गणित के इतिहास पर दृष्टि डालने पर हम देखते हैं कि गणित में भारत का योगदान अत्यंत विशिष्ट एवं विश्वप्रसिद्ध है। प्राचीन काल से ही भारत में गणित की विभिन्न शाखाओं पर कार्य किया गया है। कुछ की संक्षिप्त चर्चा यहाँ करेंगे।

अंक गणितः–अंक गणित, गणित की प्रमुख शाखा है। दैनिक व्यवहार में इसका सर्वाधिक उपयोग है। अंक गणित का आधार अंक प्रणाली है जिसमें शून्य का महत्वपूर्ण स्थान है।

शून्य का आविष्कारः– शून्य की संकल्पना वेदों में निहित है। ''ऊँ खं ब्रह्म'' यजुर्वेद अध्याय 40/ मंत्र 17 इस ऋचा में ''खं'' शब्द का प्रयोग हुआ है। ''खं'' शब्द का तात्पर्य आकाश और शून्य भी होता है। ज्योतिषादि ग्रन्थों में ''खं'' को शून्य के अर्थ में प्रयुक्त किया गया है।

लीलावती में भास्कराचार्य ने शून्य परिकर्माष्टक में शून्य के लिए ''खं'' का प्रयोग किया है।

योगेखंक्षेपसमं, वर्गादौखं, खभाजितो राशिः।

खहरः स्यात्, खगुणः खं, खगुणश्चिन्त्यश्च शेष विधौ।।

शून्य में किसी संख्या को जोड़ने पर योगफल उस संख्या के तुल्य ही होता है। शून्य के वर्गादि शून्य ही होते हैं। किसी राशि को शून्य से भाग देने से उस राशि की संज्ञा खहर (जिसका हर ख हो) होती है। शून्य से किसी राशि को गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है।

संकेत–श्लोक, सूक्त संदर्भ हेतु दिये गये हैं इनका सीधे–सीधे परीक्षा में पूछा जाना वांछित नहीं है।

शून्य की संकल्पना का श्रेय महान संस्कृत व्याकरणाचार्य पाणिनी (500ई.पू.) तथा पिंगल (200ई.पू.) को दिया जाता है शून्य का आविष्कार वैदिक ऋषि गृत्समद ने किया था इस प्रकार का भी उल्लेख मिलता है।

शून्य के लिए एक चिह्न निश्चित करने का सर्वप्रथम साक्ष्य बक्शाली पांडुलिपि (300–400ई) में पाया जाता है। प्राचीन भारत की अंकीय पद्धति में शून्य तथा इसके चिह्न का योगदान सर्वाधिक महत्वपूर्ण है।

प्रोफेसर जी.बी. हालस्टेड ने कहा है –

''बुद्धि और शक्ति के विकास के लिए गणित की कोई भी संकल्पना शून्य से महत्वपूर्ण सिद्ध नहीं हुई है।''

अंक पद्धति : विश्व के विभिन्न देशों में प्राचीन काल से संख्या लेखन की अलग–अलग पद्धतियाँ प्रचलित रही हैं। देवनागरी, रोमन तथा हिन्दू–अरेबिक संख्या प्रणाली का अध्ययन हमने पूर्व कक्षाओं में किया है। अब हम इसकी ऐतिहासिक पृष्ठभूमि की जानकारी प्राप्त करेंगे।

प्रो. गिन्सबर्ग कहते हैं : लगभग 770 ई. में उज्जैन के एक हिन्दू विद्वान कंक को बगदाद के प्रसिद्ध दरबार में अब्बासईद खलीफा अलमन्सूर ने आमंत्रित किया। इस प्रकार हिन्दू अंकन पद्धति अरब पहुँची। कंक ने हिन्दू ज्योतिष विज्ञान तथा गणित अरब के विद्वानों को पढ़ाया। कंक की सहायता से उन्होंने ब्रम्हगुप्त के ''ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त'' का अरबी में अनुवाद किया।

फ्रांसीसी विद्वान एम.एफ.नाउ की खोज यह प्रमाणित करती है कि सीरिया में मध्य सातवीं सदी में हिन्दू अंक अच्छी तरह ज्ञात थे तथा उसकी सराहना की जाती थी।

बी.बी.दत्त कहते हैं –

''अरब से मिश्र तथा उत्तरी अरब होते हुए भारतीय अंक प्रणाली ग्यारहवीं सदी तक पूर्ण रूप से यूरोप पहुँच गयी। यूरोपवासियों ने उन्हें अरबी अंक कहा क्योंकि वे उन्हे अरबों से मिले किन्तु, स्वयं अरबों ने एकमत से उन्हें हिन्दू अंक (अल–अरकान अल–हिन्दू) कहा इन दस अंकों को अरबवासी "हिन्दसा" कहते हैं।''

स्थानीयमान : किसी भी संख्या को शून्य सहित दस अंकों में व्यक्त करना और प्रत्येक अंक को एक निरपेक्षमान और एक स्थानीयमान देने के कारण यह अंक पद्धति वैज्ञानिक अंक पद्धति है। स्थानीय मान आधुनिक संख्या प्रणाली (हिन्दू–अरेबिक प्रणाली) की विशेषता है।

फ्रांस के महान गणितज्ञ पीयरे लाप्लास ने लिखा है: भारत ने ही हमें प्रत्येक संख्या को दस अंकों द्वारा व्यक्त करने (जिसमें प्रत्येक अंक का एक निरपेक्ष और एक स्थानीय मान है) की अत्यंत उत्तम प्रणाली दी है। दशमलव पद्धति का आधार दस है। इसी कारण से इसे दाशमिक या दशमलव प्रणाली कहते हैं।

भारतीय अंकों का इतिहास एवं बड़ी संख्याएँ: भारतीय अंकों का विकास क्रम निम्नानुसार है–

- खरोश्थी प्रणाली (चौथी शताब्दी ई.पू.)
- ब्राह्मी प्रणाली (तीसरी शताब्दी ई.पू.)
- ग्वालियर प्रणाली (9वीं शताब्दी)
- देवनागरी प्रणाली (11वीं शताब्दी)

- आधुनिक प्रणाली :

ई.पू. चौथी शताब्दी से लेकर ईसा पश्चात् दूसरी शताब्दी तक के अभिलेखों में खरोश्थी अंक पाए जाते हैं। ब्राह्मी अंकों में दस के अतिरिक्त, सौ तक इसके गुणक तथा नौ सौ तक सौ के गुणक पाए गए हैं।

यजुर्वेद संहिता, रामायण तथा उसके बाद के धार्मिक ग्रंथों में 1 से लेकर 10^{53} तक की संख्याओं को अलग–अलग नाम दिये गये हैं :

- नियुतम 10^{11}
- उत्संग 10^{21}
- हेतुहीलम 10^{31}
- नित्रवाद्यम् 10^{41}
- तल्लक्षणा 10^{53}

कूटांक परिचय: किसी संख्या को जब अक्षर के रुप में व्यक्त किया जाता है उसे "कूटांक" कहते हैं। प्राचीन गणितज्ञों ने इस संकल्पना का प्रयोग संख्याओं को अभिव्यक्त करने में किया था। प्राचीनकाल में कूटांक पद्धतियाँ प्रचलित थीं जिनका प्रयोग ज्योतिषादि ग्रंथों में किया गया है।

- वर्णांक प्रणाली
- शब्दांक प्रणाली
- व्यंजनांक प्रणाली

बीजगणित :– बीजगणित तथा अंक गणित में संरचना और सिद्धान्त के विचार से अनेक समानताएँ हैं।

इन दोनों में मुख्य अंतर यह है कि अंक गणित में व्यक्त (ज्ञात) राशि की बात की जाती है जबकि बीजगणित में अव्यक्त (अज्ञात) राशि की बात की जाती है। अव्यक्त राशि से तात्पर्य उस राशि से है जिसका मान प्रारंभ में ज्ञात न हो। इसे बीज राशि भी कहते हैं, इसलिए अव्यक्त गणित को बीजगणित कहते हैं।

बीजगणित का उपयोग शुल्वसूत्रों के काल से ही प्रारंभ हुआ प्रतीत होता हैं विभिन्न प्रकार की यज्ञवेदियों के निर्माण में ऐसी समस्याएँ उत्पन्न हुईं जिसके लिए रेखीय (Linear) और अपरिमित समीकरणों का समाधान ढूँढना पड़ा। आर्यभट का अंकगणित के साथ–साथ बीजगणित में भी उल्लेखनीय योगदान है। बीजगणित ब्रह्मगुप्त के काल से ही गणित की एक अलग शाखा के रूप में विकसित हुआ। इसे कुट्टक गणित तथा अव्यक्त गणित भी कहा जाता था।

गणितज्ञ पृथूदक स्वामी (860ई.) ने इसका नाम बीजगणित रखा।

रेखागणित (ज्यामिति):– भारतीय गणित के इतिहास पर दृष्टि डालने पर यह ज्ञात होता है कि अपने देश में वैदिक काल में ही रेखागणित की नींव पड़ गई थी। वैदिक काल में गणित की जानकारी ''कल्प'' नामक वेदांग में शुल्व सूत्रों के रूप में मिलती है। वेदी के मापन में प्रयुक्त रस्सी को शुल्व कहा जाता है। सूत्र का अर्थ है–जानकारी को संक्षिप्ततम रूप में प्रस्तुत करना।

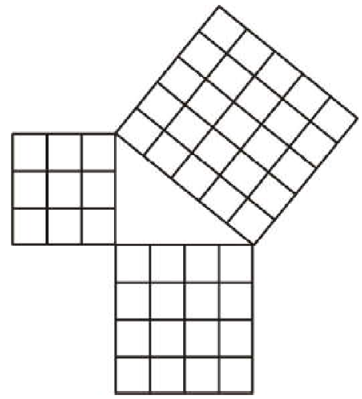
शुल्व सूत्र उनके रचयिताओं–बौधायन, आपस्तंभ, कात्यायन, मानव, मैत्रायण आदि के नाम से जाने जाते हैं। शुल्व सूत्रों में विभिन्न ज्यामिति आकारों की वेदियाँ बनाने का वर्णन हैः–

- गरुण वेदी
- कूर्म वेदी
- श्री यंत्र

शुल्व सूत्र ज्यामिति के कुछ **उदाहरण** निम्नलिखित हैं –

त्रिभुजों, वर्गों, आयतों तथा अन्य जटिल ज्यामितीय आकारों की रचना, ऐसी ज्यामितीय आकारों की रचना जिनका क्षेत्रफल दिये गये आकारों के क्षेत्रफल के जोड़ या अन्तर के बराबर हो।

ज्यामिति के क्षेत्र में आर्यभट (476–550ई.) ब्रह्मगुप्त (600ई.), भास्कर प्रथम (629ई.), महावीर (850ई.) का उल्लेखनीय योगदान है।



बौधायन प्रमेय

दीर्घ चतुरस्त्रस्य अक्षण्या रज्जुः पार्श्वमानी तिर्यक् मानी च।
यत पृथग्भूते कुरूतः तत् उभयं करोति (इति क्षेत्र ज्ञानम्)।।

।। 48 (1) बौधायन शुल्व सूत्र।।

इसका आशय हैः– एक आयत के विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल आयत की दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है हम जानते हैं कि आयत का विकर्ण आयत को दो समकोण त्रिभुजों में विभाजित करता है तथा समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

समकोण त्रिभुज की भुजाओं की बीच यह संबंध पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है। किन्तु डॉ. ब्रजमोहन की पुस्तक–गणित का इतिहास (पृष्ठ 243) पर उल्लेख है कि यह बात अब अधिकांश इतिहासज्ञ मानने लगे हैं कि पाइथागोरस का प्रमेय शुल्व सूत्रों के लेखकों को पाइथागोरस के जन्म से सैकड़ों वर्ष पहले ज्ञात हो चुका था। यूनानी दार्शनिक पाइथागोरस का जीवन काल 572 ई.पू. से 501 ई.पू. तक माना जाता है। जबकि भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने इस प्रमेय को पाइथागोरस से सैकड़ों वर्ष पूर्व सोदाहरण सर्वाधिक व्यापक रूप में व्यक्त किया है।

अतः यह प्रमेय वास्तव में बौधायन प्रमेय है। इसे शुल्व प्रमेय भी कहते हैं।

पाई (π) का भारतीय इतिहास :–

(1) आर्यभट (476 ई.–550 ई.) पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने परिधि और व्यास के अनुपात अर्थात पाई (π) का लगभग परिमित मान निकाला था।

चतुरधिकम् शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्त्राणाम्।
अयुतद्वय विष्कम्भस्य आसन्नो वृत्त परिपाहः ।।

सौ में चार जोड़कर उसे 8 से गुणा करें और उसमें 62000 जोड़ें। यह योगफल 20,000 व्यास के वृत्त की परिधि का लगभग माप होगा अर्थात् 20,000 व्यास के वृत्त की परिधि 62832 होगी।

$$\text{पाई}(\pi) = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{62832}{20000}$$

इस प्रकार उनके अनुसार पाई =3.1416 जो दशमलव के 4 स्थानों तक आज भी सही है।

(2) भास्कराचार्य (1114–1193ई.) ने अपने ग्रंथ लीलावती में पाई (π) का मान दिया है।

व्यासे भनन्दाग्नि हते विभक्ते खबाण सूर्यैः परिधिः स सूक्ष्मः।

द्वाविंशतिघ्ने विहृतेऽथशैलैः स्थूलोऽथवास्याद् व्यवहार् योग्यः।।

व्यास को 3927 से गुणा कर 1250 से भाग देने पर सूक्ष्म परिधि होती है। अथवा व्यास को 22 से गुणा कर 7 से भाग देने पर व्यवहार के योग्य परिधि का स्थूल मान प्राप्त होता है।

(3) स्वामीभारती कृष्णतीर्थ (1884–1960) ने पाई/10 का मान सुविदित अनुष्टुप छंद में तथा वर्णमाला की कूट भाषा में दिया हैः–

गोपी भाग्यमधुव्रात–श्रृंगिशोदधिसंधिग।

खलजीवित खाताव गलहाला रसंधर ।।

स्वामी जी के अनुसार, इस छंद के तीन उपयुक्त अर्थ निकाले जा सकते हैं। पहले अर्थ में तो यह भगवान कृष्ण जी की स्तुति है। दूसरे अर्थ में भगवान शंकर की स्तुति है तथा तीसरे अर्थ में $\pi/10$ का मान दशमलव के बत्तीस स्थान तक है।

$\pi/10=$ 0.3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 2

इन्होंने वैदिक गणित नामक ग्रंथ की रचना की। इसमें 16 सूत्र तथा 13 उपसूत्र हैं

(4) श्रीनिवास रामानुजन (1887–1920 ई.)– रामानुजन का यूरोप में जो पहला शोध निबंध प्रकाशित हुआ उसका शीर्षक था प्रतिरूपक समीकरण और π के सन्निकट मान (मोड्यूलर इक्वेशन एंड एप्रोक्सिमेशन टू π) उन्होंने π के सन्निकट मान के लिए कई सूत्रों की खोज की।

त्रिकोणमितिः– त्रिकोणमिति गणित की वह शाखा है जिसमें त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है।

यह गणित की प्राचीन एवं महत्वपूर्ण शाखा है। भारतीय ज्योतिषशास्त्र एवं खगोल शास्त्र में इसका उपयोग ग्रहों के स्थान की गणना में होता था।

प्राचीन भारतीय गणितज्ञों आर्यभट, वराहमिहिर तथा ब्रह्मगुप्त आदि का त्रिकोणमिति के क्षेत्र में महत्वपूर्ण योगदान है।

त्रिकोणमिति की संकल्पनाओं, सूत्रों तथा सारणियों का वर्णन ''सूर्य सिद्धान्त''(400ई), वराहमिहिर के पंच सिद्धांत तथा ब्रह्मगुप्त के ब्रह्मस्फुट सिद्धांत (630 ई.) में मिलता है।

डा.ब्रजमोहन द्वारा लिखित पुस्तक ''गणित का इतिहास'' (पृष्ठ 314) में उल्लेख है कि इसमें संदेह नहीं है कि त्रिकोणमितीय फलनों में से तीन की स्पष्ट रूप से परिभाषा सबसे पहले हिन्दुओं ने ही दी थी।

सबसे पहले ज्या का प्रयोग आर्यभट ने (लगभग 510 ई.) किया था। आर्यभट ने ज्या और उत्क्रम ज्या (उज्ज्या) की सारणियाँ भी दी हैं।

भारत से ''ज्या'' शब्द अरब गया जहाँ ''जीबा'' के रूप में प्रचलित हो गया। कुछ समय पश्चात् जीबा का ''जैब'' हो गया। अरबी में ''जैब'' का अर्थ ''वक्ष'' है लगभग 1150 ई. में अरबी की पुस्तकों का लेटिन में अनुवाद किया गया, तो जैब के स्थान पर साइनस (Sinus) का प्रयोग किया गया है जिसका लेटिन मे एक अर्थ ''वक्ष'' भी है।

ब्रह्मगुप्त ने ज्या के अर्थ में ही ''क्रमज्या'' का प्रयोग किया है। इसका यह नाम इसलिए रखा कि ''उत्क्रम ज्या'' से इसका अंतर स्पष्ट दिखाई पड़े। अरबी में यही शब्द ''करज'' के रूप में प्रचलित हो गया। अलख्वारिजमी ने भी ''करज'' का ही प्रयोग किया है। भारतीय ज्या और कोटिज्या ही यूरोपीयन भाषाओं में साइन (sine) और को साइन (co-sine) बन गए।

त्रिकोणमिति का ज्योतिष, खगोलशास्त्र, अभियांत्रिकी एवं नौ–परिवहन (Navigation) तथा ऊँचाई, दूरी आदि के अध्ययन में उपयोग है।

प्रश्नावली – 1.1

प्र.1 सही जोड़ी बनाइए–

भारती कृष्णतीर्थ	ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त
वराह मिहिर	सिद्धान्त शिरोमणी
ब्रह्मगुप्त	आर्यभटीय
भास्कराचार्य	पंच सिद्धान्त
आर्यभट	वैदिक गणित

प्र.2 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

1. आकाश तथा शून्य के लिए........................शब्द का प्रयोग होता था।
2. तल्लक्षणा शब्द.....................संख्या हेतु होता था।
3. वर्णांक पद्धति का प्रयोग................गणितज्ञ ने अपने..............ग्रंथ में किया है।
4. ....को ही अव्यक्त गणित कहा जाता था।
5. वैदिक गणित में.................. सूत्र हैं।

प्र.3 आधुनिक संख्या प्रणाली की विशेषताएँ लिखिए ?

प्र.4. शून्य के आविष्कार पर प्रकाश डालिए।

प्र.5 वर्णांक पद्धति का संक्षिप्त परिचय दीजिए ?

प्र.6 बौधायन प्रमेय क्या है ?

प्र.7 π के मान के संबंध में आर्यभट के योगदान को लिखिए ?

प्र.8 वैदिक गणित ग्रंथ के रचयिता का नाम लिखिए एवं ग्रंथ का संक्षिप्त परिचय दीजिए ?

प्रायोगिक गतिविधि

(1) अपने विद्यालय में गणित परिषद का गठन कीजिए।

(2) अपने विद्यालय में गणित के ग्रंथों को संकलित कीजिए।

(3) अपने विद्यालय में गणित की प्रयोगशाला विकसित कीजिए।

गणन संक्रिया की सरल विधियाँ : हम यहाँ गणना की जिन सरल विधियों का अध्ययन करने जा रहे हैं उन विधियों के शोधकर्ता गणितज्ञ एवं उनके ग्रंथ का संक्षिप्त परिचय प्राप्त करेंगे।

अनुपम गणितज्ञ स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ शंकराचार्य गोवर्धनमठ जगन्नाथपुरी (1884–1960 ई.) ने ''वैदिक गणित'' नामक ग्रंथ की रचना कर एक अभिनव कार्य किया। इस ग्रंथ में उन्होंने असाधारण 16 सूत्रों और 13 उपसूत्रों का विवरण उनके गुणधर्म तथा प्रयोगों के साथ दिया है। इस ग्रंथ में चालीस अध्याय हैं। इसे नितान्त नवीन दृष्टिकोण के साथ प्रस्तुत किया गया है।

बीजांकः– किसी संख्या के अंकों का जोड़ एक अंक प्राप्त होने तक करते हैं यही अंक उसका बीजांक कहलाता है।

उदाहरण–1. 10, 11, 321, 78 के बीजांक ज्ञात कीजिए ?

हल : 10 का बीजांक → 1 + 0 → 1

11 का बीजांक → 1 + 1 → 2

321 का बीजांक → 3 + 2 + 1 → 6

78 का बीजांक → 7 + 8 → 15 यहाँ 15 प्राप्त हुआ है यह बीजांक नहीं है अतः इसके अंकों को पुनः जोड़ेंगे 1 + 5 → 6 अतः 78 का बीजांक 6 है।

उदाहरण–2. 8756904 का बीजांक ज्ञात कीजिए ?

हल : 8756904 का बीजांक हम निम्नलिखित तीन प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं : –

प्रकार–1. संख्या 8756904 के सभी अंकों का योगफल ज्ञात करेंगे।

8+7+5+6+9+0+4 = 39, इसके अंकों को पुनः जोड़ने पर 3+9=12, इसके अंकों को पुनः जोड़ेंगे 1+2=3 बीजांक है।

प्रकार–2. संख्या 8756904 के अंकों को क्रमशःजोड़ते चले। जैसे ही योगफल दो अंकों की संख्या प्राप्त हो तुरंत योगकर एक अंक प्राप्त कर लेंगे।

8+7 →15 → 1+5 → 6+5 → 11 → 1+1→ 2+6 → 8+9→ 17
1+7 → 8+0 → 8+4 → 12 → 1+2 → 3 बीजांक है।

प्रकार–3. संख्या 8756904 के अंकों को ध्यान से देखिए शून्य, नौ तथा जिन दो अंको को जोड़ने पर नौ आता है उन्हें छोड़कर शेष अंकों के योगफल से बीजांक ज्ञात करेंगे। संख्या 8756904 में 0, 9 तथा 4+5=9 छोड़ने पर बचे अंक 8, 7 एवं 6 का योग 8+7+6 → 21 का बीजांक 2+1→ 3, अतः 3 बीजांक है।

बीजांक ज्ञात करने में ध्यान देने योग्य बातें

(1) बीजांक ज्ञात करते समय जैसे ही योग दो अंक की संख्या प्राप्त हो वहां तुरंत जोड़कर एक अंक प्राप्त कर लेना चाहिए।

(2) शून्य और नौ जोड़ने या छोड़ने से बीजांक में कोई अंतर नहीं आता।

(3) किसी संख्या का बीजांक उस संख्या में 9 से भाग देने पर बचने वाले शेषफल के बराबर होता है, अर्थात् बीजांक ज्ञात करने का अर्थ है उस संख्या मे 9 से भाग देने पर बचने वाला शेषफल ज्ञात करना।

(4) किसी संख्या का बीजांक 9 है अतः वह संख्या 9 से पूरी–पूरी विभाजित होगी। ऐसी परिस्थिति में उसका बीजांक शून्य न होकर 9 ही होगा।

(5) 3 की विभाज्यता की जाँच बीजांक से भी की जा सकती है – जिस संख्या का बीजांक 3, 6 या 9 हो वह संख्या 3 से पूरी–पूरी विभाजित होगी।

(6) बीजांक से उत्तर की जाँच की जा सकती है अतः इसका पर्याप्त अभ्यास करना चाहिए जिससे बीजांक मुखाग्र ज्ञात किया जा सके।

प्रश्नावली – 1.2

प्रश्न 1. बीजांक किसे कहते हैं ?

प्रश्न 2. निम्नलिखित संख्याओं के बीजांक ज्ञात कीजिए।

15, 38, 88, 99, 412, 867, 4852, 9875, 24601, 48956701.

प्रश्न 3. निम्नलिखित संख्याओं में क्या जोड़ दिया जाए की संख्या 9 से विभाजित हो जाए :–

241, 861, 4441, 83504 .

प्रश्न 4. बीजांकों की उपयोगिता लिखिए।

बीजांक से उत्तर की जाँच : – वैदिक गणित में उत्तर की जाँच की अनेक विधियाँ है, यहाँ हम बीजांक से उत्तर की जाँच करना सीखेंगे।

जोड़ना :–

जोड़ की जाँचः– संख्याओं के बीजांकों के योगफल का बीजांक =उत्तर का बीजांक होने पर उत्तर सही होगा।

उदाहरण–3. 3469, 2220 एवं 1239 का योगफल ज्ञात कर उत्तर की जाँच बीजांक से कीजिएः–

हल : जाँच

	3469	4
	2220	6
+	1239	6
	6928	7

(1) संख्याओं के बीजांक क्रमशः 4, 6 एवं 6 है।

(2) संख्याओं के बीजांको के योगफल का बीजांक 4+6+6 → 16 का बीजांक 7 है।

(3) उत्तर 6928 का बीजांक 7 है।

(4) क्रमांक (2) एवं (3) से दोनों बीजांक 7 है। अतः उत्तर सही है।

घटानाः–

घटाने की जाँच :– इसमें घटने वाली (नीचे) की संख्या का बीजांक +उत्तर के बीजांक के योगफल का बीजांक = ऊपर की संख्या का बीजांक

उदाहरण–4. 7816–3054 हल कर उत्तर की जाँच बीजांक से करें।

हल : जाँच

	7816	4
–	3054	3
	4762	1

(1) घटने वाली (नीचे)की संख्या बीजांक 3 है।
उत्तर 4762 का बीजांक 1 है।

(2) दोनों बीजांकों का योग 3+1=4 है।

(3) ऊपर की संख्या 7816 का बीजांक = 4 है।

(4) क्रमांक (2) एवं (3) से बीजांक 4 है। अतः उत्तर सही है।

गुणा :–

गुणा की जाँच :–

उदाहरण–5. 456 X 814 हल कर उत्तर की जाँच बीजांक से कीजिए?

हल :

```
  456 X 814
 ----------
      1824
      4560
    364800
 ----------
    371184
```

जाँच (प्रथम संख्या का बीजांक X द्वितीय संख्या का बीजांक)
प्राप्त गुणनफल का बीजांक = उत्तर का बीजांक

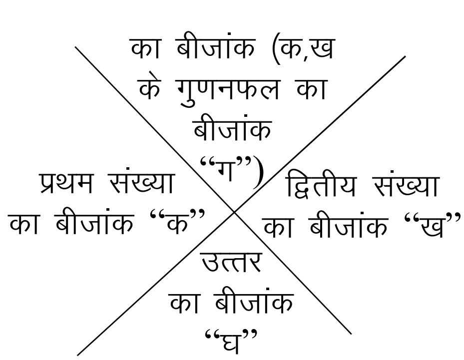
(1) 6×4=24 का बीजांक→ 6

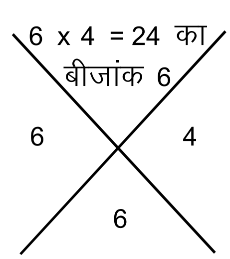
(2) उत्तर 371184 का बीजांक → 6

(3) क्रमांक (1) एवं (2) से दोनों बीजांक 6 है। अतः उत्तर सही है।

गुणा की जाँच हेतु

दोनों बीजांकों के गुणनफल





यदि “ग” एवं “घ” असमान हैं तो उत्तर निश्चित गलत है। यदि वे समान है तो उत्तर ठीक है।

भाग

उदाहरण–6. 7481÷ 31 हल कर उत्तर की जाँच बीजांक से कीजिए ?

हल :

भाजक भाज्य भागफल

```
31) 7481 (241
   -62
   ----
    128
   -124
   ----
    0041
     -31
     ---
      10
```

जाँच :

भाज्य का बीजांक = (भागफल का बीजांक x भाजक का बीजांक)+शेषफल का बीजांक

2 → (7 X 4) + 1

→ 28 + 1 = 29 का बीजांक 2

2 = 2 अर्थात उत्तर सही है।

गुणा की वैदिक गणित विधियाँ

(1) **ऊर्ध्व तिर्यक विधि** – इस विधि में सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् का प्रयोग होता है।

सूत्र का अर्थ ऊर्ध्व = (खड़ा) लम्बवत ↑

तिर्यक = तिरछा ↖ ↗ = ✕

उदाहरण–7. 41 X38 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कीजिए।

हल :

```
  41
X 38
-----
15 5 | 8
3    |
```

1558 उत्तर

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

(1) प्रथम स्तंभ(इकाई में इकाई का गुणा)

```
  1
X 8
---
  8
```

↑ ऊर्ध्वगुणा

(नीचे इकाई स्थान में लिखेंगे)

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ (इकाई एवं दहाई स्थान)

41 तिर्यकगुणा कर जोड़िए

X 38

(4X8)+(1X3)

32 + 3 = 35 (35 के 5 तथा हासिल 3)

(3) द्वितीय स्तंभ (दहाई स्थान)

4 ↑ऊर्ध्वगुणा

X 3

12

12 + 3 (हासिल) = 15 (पूरा 15 बाएँ लिखेंगे)

उदाहरण–8. 56 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कीजिए।

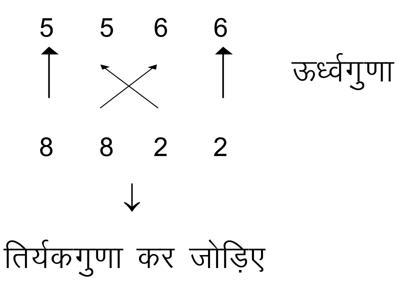
X 82

हल : 56 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् (देखिए और समझिए)

X 82

45	9	2
5	1	

ऊर्ध्वगुणा



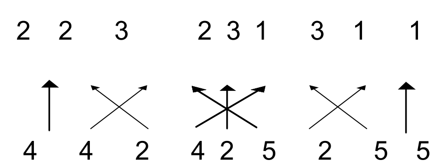
उदाहरण–9. 231 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कीजिए।

X 425

हल : 231 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

X 425

9	8	1	7	5
1	2	1		



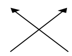
(1) प्रथम स्तंभ (इकाई में इकाई का गुणा)

1

X 5 ↑ऊर्ध्वगुणा

5

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ (इकाई एवं दहाई स्थान)

31  तिर्यक गुणा करने पर

X 25

(3X5)+(1X2)

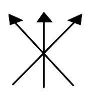
15+2=17 (17 के 7 को दहाई के स्थान पर रखें तथा हासिल 1 रखें।)

(3) प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय स्तंभ (इकाई, दहाई एवं सैकड़ा का स्थान)

231 संकेत के अनुसार प्रथम एवं तृतीय स्थान का तिर्यक गुणा

X 425 तथा द्वितीय स्तंभ का ऊर्ध्व गुणा कर गुणनफलों को जोड़िए

(2x5)+(1x4)+(3x2)

10 + 4 + 6 =20 

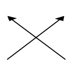
20 +1 हासिल = 21 (1 को सैकड़े के स्थान पर रखें तथा 2 हासिल रखें।)

(4) द्वितीय एवं तृतीय स्तंभ (प्रथम स्तंभ छोड़िए)

23

X 42

(2X2) + (3X4)

4 + 12 =16 

16 + 2 (हासिल) = 18 (8 को हजार के स्थान पर रखें तथा 1 हासिल रखें।)

(5) तृतीय स्तंभ(प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ छोड़िए)

2 ऊर्ध्वगुणा

X 4

8

8 + 1 = 9 (9 को दस हजार के स्थान पर रखें।)

प्रश्नावली – 1.3

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से गुणा कर उत्तर की जाँच कीजिए –

(1) 23 X 32	(2) 44 X 52	(3) 92 X 37	(4) 55 X 55
(5) 123 X 321	(6) 414 X 232	(7) 504 X 618	(8) 812 X 453

(2) **एकन्यूनेन पूर्वेण विधिः–** (सूत्र का अर्थ है पहले से एक कम के द्वारा) इस सूत्र का उपयोग तब करते है जब एक संख्या अंक नौ की बनी हो। इसमें तीन स्थितियाँ है जब गुणक और गुण्य मेंः–

1. अंकों की संख्या बराबर हो
2. गुणक में अंकों की संख्या गुण्य के अंकों की संख्या से अधिक हो (अर्थात नौ अधिक हो)
3. गुणक में अंकों की संख्या गुण्य के अंकों की संख्या से कम हो (अर्थात नौ कम हो)

स्थिति–1

उदाहरण–10. 63 X 99 सूत्र एक न्यूनेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 63 X 99

62 | 37

(1) दोनों ओर दो–दो अंक हैं।

(2) उत्तर का बायाँ भागः 63 एक न्यूनेन 62

(3) उत्तर का दायाँ भाग : 99 – 62 = 37

उदाहरण–11. 3452 X 9999 सूत्र एक न्यूनेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 3452 X 9999 सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण से

3451 | 6548

(1) उत्तर का बायाँ भाग 3452 का एक न्यूनेन 3451

(2) उत्तर का दायाँ भाग 9999 – 3451 = 6548

स्थिति–2

उदाहरण–12. 43 X 999 सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 043 X 999

042 | 957

(1) 43 के बायें एक शून्य रखकर दोनों संख्याओं में अंक बराबर करते हैं।

(2) उत्तर का बायाँ भाग : 043 का एकन्यूनेन 042

42957 उत्तर

(3) उत्तर का दायाँ भाग 999 – 042 = 957

उदाहरण–13. 347 X 99999 सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 00347 X 99999

00346	99653

34699653 उत्तर

(1) 347 के बायें दो शून्य लगाकर दोनों संख्याओं में अंक बराबर करते हैं।

(2) उत्तर का बायाँ भाग : 00347 का एकन्यूनेन 00346

(3) उत्तर का दायाँ भाग 99999
– 00346
99653

स्थिति–3

उदाहरण–14. 438 X 99 सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण से हल कीजिए।

हल : 438 X 99
43799
– 437
43362

(1) इसमें 438 का एक न्यूनेन 437 किया तथा 437 के बाद 99 यथावत लिख दें। प्राप्त हुआ 43799 इसमें से 437 घटा दें। अर्थात 43362 उत्तर

प्रश्नावली – 1.4

सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण के प्रयोग से हल करें : (जाँच भी कीजिए)

(1) 57 X 99 (2) 4378 X 9999 (3) 87 X 999

(4) 345 X 99999 (5) 48 X 9 (6) 9457 X 999

(3) **एकाधिकेन पूर्वेण विधिः–** इसमें सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण तथा अन्त्ययोर्दशकेऽपि का प्रयोग होता है।

इस विधि का प्रयोग तब करते है जब गुण्य और गुणक की इकाइयों का योग (10) हो तथा शेष समूह समान हो।

उदाहरण–15. 12 X 18 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 12 X 18

2	16

सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि

(1) उत्तर का बायाँ भाग(दहाई का एकाधिक X दहाई)
= (2 X 1) = 2

(2) उत्तर का दायाँ भाग = इकाइयों का गुणनफल = 2 X 8 = 16

$\therefore 12 \times 18 = 216$ उत्तर

उदाहरण–16. 21 X 29 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 21 X 29 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि

6 | 09

(1) उत्तर का बायाँ भाग (दहाई का एकाधिक X दहाई)

= (3 X 2) = 6

(2) उत्तर का दायाँ भाग = इकाइयों का गुणनफल = 1 X 9 = 9

$\therefore 21 \times 29 = 609$ उत्तर

टीप:– (1) इकाइयों का योग 10 है। दस (10) में एक शून्य है अतः उत्तर के दायें भाग में दो अंक रखना होगा अतः 9 के पहले 0 शून्य रखा जाना अनिवार्य है।

उदाहरण–17. 102 X 108 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 102 X 108 सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि

110 | 16

(1) उत्तर का बायाँ भाग (दस का एकाधिक X दस)

= (11 X 10) = 110

(2) उत्तर का दायाँ भाग = इकाइयों का गुणनफल

= 2 X 8 = 16

$\therefore 102 \times 108 = 11016$ उत्तर

उदाहरण–18. 194 X 196 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 194 X 196 सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि

380 | 24

(1) उत्तर का बायाँ भाग (उन्नीस का एकाधिक X उन्नीस)

= (20 X 19) = 380

(2) उत्तर का दायाँ भाग = इकाइयों का गुणनफल

= 4 X 6 = 24

$\therefore 194 \times 380 = 38024$ उत्तर

प्रश्नावली – 1.5

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि के प्रयोग से हल कीजिए तथा बीजांक से जाँच कीजिए।

(1) 13 X 17 (2) 22 X 28 (3) 34 X 36 (4) 91 X 99

(5) 35 X 35 (6) 42 X 48 (7) 72 X 78 (8) 93 X 97

(9) 104 X 106	(10) 105 X 105	(11) 203 X 207	(12) 405 X 405
(13) 502 X 508	(14) 603 X 607	(15) 704 X 706	(16) 905 X 905
(17) 193 X 197	(18) 292 X 298	(19) 392 X 398	(20) 495 X 495

निखिलम् विधि :– इस विधि से तब गुणा करते हैं जब संख्याएं आधार या उपाधार के निकट होती हैं।

आधार : 10, 100, 1000,............आदि को आधार कहते हैं।

उपाधार 20, 30,...............200,300,......आदि उपाधार कहलाती हैं।

आधार से विचलन :–

(1) सर्वप्रथम 10 की घात के रूप में आधार ज्ञात करना चाहिए जो दी हुई संख्या के निकट हो।

(2) यदि दी गई संख्या आधार से बड़ी है तब उस संख्या में से आधार को घटाकर विचलन धनात्मक चिन्ह के साथ लिखते हैं।

(3) यदि दी हुई संख्या आधार से छोटी है तब उस संख्या को आधार में से घटाकर विचलन ऋणात्मक चिह्न के साथ लिखते हैं।

संख्या	आधार	विचलन
12	10	+2
9	10	–1
104	100	+04
98	100	–02
1002	1000	+002
992	1000	–008

....आदि।

गुणा निखिलम् : (आधार)

उदाहरण–19. 12 X 14 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

संख्या	विचलन
12	+ 2
X 14	+ 4
16	8

(1) दोनों संख्याओं का आधार 10 है।

(2) 12 का आधार 10 से विचलन = + 2

(3) 14 का आधार 10 से विचलन =+4

उत्तर– 168

(4) उत्तर का दायाँ भाग =विचलनों का गुणा

= 2 X 4 = 8

(5) उत्तर का बायाँ भाग =(प्रथम संख्या+दूसरी का विचलन)

या (द्वितीय संख्या+ प्रथम का विचलन)

= 12 + (+4) = 16

या = 14 + (+2) = 16

टीपः– इस विधि में उत्तर के दायें भाग में उतने ही अंक रखते हैं जितने आधार में शून्य होते हैं।

उदाहरण–20. 16 X 15 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

संख्या	विचलन
16	+ 6
X15	+ 5
24	0

(1) दोनों संख्याओं का आधार 10 है।

(2) 16 का आधार 10 से विचलन = + 6

15 का आधार 10 से विचलन = + 5

(3) उत्तर का दायाँ भाग =विचलनों का गुणनफल

= 6 X 5 = 30

(4) उत्तर का बायाँ भाग = 16 + 5 + 3.(हासिल)= 24

या = 15 + 6 + 3. (हासिल)= 24

उत्तर – 240

उदाहरण–21. 8 X 13 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

8	– 2
X 13	+ 3
11	$\bar{6}$

(1) आधार 10 है।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

= –2 X (+3) = –6

(4) उत्तर का बायाँ भाग = 8 + (+ 3) = 11

या = 13 + (–2) = 11

उत्तर :– 116 या 110–6 = 104

उदाहरण–22. 104 X 108 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

104	+04
X108	+ 08
112	32

(1) आधार 100 है। आधार में दो शून्य हैं अतः उत्तर के दायें भाग में दो अंक रखेंगे।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

= 04 X 08 = 32

(4) उत्तर का बायाँ भाग =एक संख्या + दूसरी का विचलन

या = 104 + 08 = 112

या = 108 + 04 = 112

उत्तर :– 11232

उदाहरण–23. 103 X 101 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

```
 103   +03
X101  + 01
----------
 104 | 03
```

(1) आधार 100 है।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

= 3 X 1 = 3

(3) दायें भाग में दो अंक रखना होगा क्योंकि आधार में दो शून्य हैं अतः 3 के सामने शून्य रखा गया है।

(4) उत्तर का बायाँ भाग =एक संख्या + दूसरी का विचलन

या = 103 + 01 = 104

या = 101 + 03 = 104

उत्तर :– 10403

उदाहरण–24. 92 X 107 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

```
  92   – 08
X107  + 07
----------
  99 | 56
```

(1) आधार 100 है। तथा विचलन क्रमशः –08, +07 हैं।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

=(–08) X (+07) = $\overline{56}$

(3) उत्तर का बायाँ भाग =एक संख्या + दूसरी का विचलन

या = 92 + 7 = 99

या = 107 + (–08) = 99

उत्तर :– 9956 = 9900–56

= 9844

उदाहरण–25. 1014 X 994 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

```
 1014 +014
X 994 – 006
-----------
 1008 | 084
```

(1) आधार 1000 है। तथा विचलन क्रमशः +014, –006 हैं।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

= 14 X (–006) = –84 = $\overline{84}$

(3) उत्तर का बायाँ भाग =एक संख्या + दूसरी का विचलन

या = 1014 + (–6) = 1008

या = 994 + (014) = 1008

(4) आधार में तीन शून्य हैं, अतः दाएँ भाग में तीन अंक होने चाहिए। इसलिए 84 के पहले शून्य लगाया गया है।

उत्तर :– 1008000 – 084 = 1007916

प्रश्नावली – 1.6

निखिलम् विधि से प्रश्नों को हल कर उत्तर की जाँच बीजांक से कीजिए :–

(1) 13 X 13	(2) 104 X 102	(3) 105 X 106	(4) 98 X 94	
(5) 122 X 102	(6) 96 X 107	(7) 1012 X 1004	(8) 998 X 974	(9) 1016 X 998

किसी संख्या का वर्ग ज्ञात करना

गुणा की हमने चार विधियों का अभ्यास किया हैः–

(1) ऊर्ध्वतिर्यक विधि (2) एकन्यूनेन पूर्वेण विधि (3) एकाधिकेन पूर्वेण विधि (4) निखिलम्_विधि इन विधियों से हम सरलता पूर्वक वर्ग ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ एकाधिकेन पूर्वेण विधि तथा अन्य कुछ विशिष्ट विधियों द्वारा वर्ग करने का अभ्यास करेंगे।

(1) एकाधिकेन पूर्वेण तथा अन्त्ययोर्दशकेऽपि : जिन संख्याओं की इकाई 5 हो तो इस विधि से उन संख्याओं का वर्ग मुखाग्र ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण–26. 65^2 को हल कीजिए।

हल : $65^2 = 65 \times 65$ सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण से

42 | 25

(1) उत्तर का बायाँ भाग = दहाई X दहाई का एकाधिकेन

$= 6 \times 7 = 42$

(1) उत्तर का दायाँ भाग = $5 \times 5 = 25$

4225 उत्तर

प्रश्नावली – 1.7

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण के प्रयोग से मुखाग्र उत्तर दीजिए :–

15^2, 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 75^2, 85^2, 95^2, 105^2, 115^2.

(2) आनुरूप्येण विधि :— इस विधि का प्रयोग साधारणतः दो अंकों की संख्या के वर्ग के लिए किया जाता है। हम जानते हैं कि $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ इसे निम्नलिखित प्रकार से लिखेंगे $(a \mid b)^2 = a^2 \mid 2ab \mid b^2$ तथा इसके अनुप्रयोग से दो अंकों की संख्या का वर्ग इकाई की ओर से करेंगे प्रत्येक खण्ड में दाएँ तथा मध्य में एक—एक अंक शेष अंक बायें खण्ड में रखेंगे।

उदाहरण—27. 64^2 हल कीजिए।

हल : 64^2 को सूत्र $(a \mid b)^2 = a^2 \mid 2ab \mid b^2$ से हल करेंगे

(1) $b^2 = 4^2 = 16$

4 1

(2) $2ab = 2 \times 6 \times 4 = 48$

(48 + 1 हासिल) = 49

(3) $a^2 = 6^2 = 36$

36 + 4 (हासिल) = 40

अतः 64^2 = 40 9 6

4 1

उदाहरण—28. 48^2 हल कीजिए।

हल : 48^2 को $a^2 \mid 2ab \mid b^2$ के अनुसार हल करेंगे (देखिए और समझिए)

48^2 = 23 0 4 = 2304

प्रश्नावली – 1.8

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का प्रयोग कर हल कीजिए

(1) 34^2 (2) 19^2 (3) 54^2 (4) 64^2 (5) 92^2

---

(3) **यावत् ऊनम् तावत् ऊनी कृत्य वर्गम् च योजयेत सूत्र से** —इस विधि में जिस संख्या का वर्ग करना हो उसका आधार से विचलन ज्ञात कर लेते हैं (1) विचलन कम हो तो उतना संख्या में घटा देने पर तथा अधिक हो तो संख्या में उतना जोड़ देने पर उत्तर का बायाँ भाग प्राप्त होता है। विचलन का वर्ग दाएँ तरफ रख देने पर हल पूर्ण हो जाता है।

प्रश्न हल करने में निम्नलिखित सूत्र की सहायता ले सकते हैं।

संख्या^{2} = संख्या ± विचलन | (± विचलन)^2

उदाहरण 13^2 = 13 + 3 | 3^2 (आधार 10से 13, तीन अधिक है)

= 169 | उत्तर

उदाहरण 7^2 = 7– 3 | 3^2 (आधार 10 से 7 तीन कम है)

= 49 | उत्तर

उदाहरण 98^2 = 98 –2 | $(02)^2$

= 96 04 | उत्तर

उदाहरण 106^2 = 106 + 6 6^2

= 112 36 उत्तर

प्रश्नावली – 1.9

सूत्र– यावत ऊनं तावत् ऊनी कृत्य वर्गं च योजयेत के प्रयोग से हल कीजिए।

12^2, 14^2, 102^2, 105^2, 108^2, 94^2, 996^2,

वर्गमूल

वर्ग मूल ज्ञात करने की गुणनखण्ड एवं भाग विधि हम जानते हैं अब हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के लिए विलोकनम् सूत्र से वर्गमूल ज्ञात करने का अभ्यास करेंगे।

विधि–विलोकनम : चार, पाँच, अंकों तक की पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल हम अवलोकन से ही ज्ञात कर सकते हैं। तालिका का अवलोकन कीजिएः–

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
संख्या^{2}	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
बीजांक	1	4	9	7	7	9	4	1	9	1

मुखाग्र याद कीजिए

वर्ग संख्या की इकाई	–	1	4	5	6	9	0
वर्गमूल संख्या की इकाई	–	1 या 9	2 या 8	5	4 या 6	3 या 7	0

टीप (1) जिन संख्याओं की इकाई 2, 3, 7, 8 हो तो वे पूर्ण वर्ग संख्याएँ नही होंगी।

(2) वर्ग संख्या के अंकों के जितने जोड़े बनेंगे वर्गमूल की संख्या में उतने अंक होंगे।

(3) जिन संख्याओं का बीजांक 2, 3, 5, 6, या 8 हो तो वह संख्या पूर्णवर्ग नहीं है।

उदाहरण–29. 6889 पूर्णवर्ग संख्या का वर्गमूल विलोकनम् से ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{6889}$ सूत्र विलोकनम्

$\sqrt{6889}$ = 83 या 87

(1) दो जोड़े बन रहे हैं अतः वर्गमूल में दो अंक होंगे।

(2) दाएँ जोड़े (89) से इकाई निश्चित करेंगे तथा बायें से (68) से दहाई निश्चित करेंगे।

(3) वर्ग संख्या की इकाई 9 अतः वर्गमूल की इकाई 3 या 7 होगी।

(4) बायें जोड़े 68 से दहाई निश्चित करेंगे।

68 का निकटतम वर्गमूल 8 है। अतः $8^2=64$ तथा $9^2=81$, 9^2 यह 68 से अधिक है अतः हम दहाई में 8 रखेंगे।

(5) 83 या 87 में से कोई एक संख्या हमारा उत्तर है।

(6) 83 और 87 के बीच ऐसी संख्या जिसकी इकाई 5 हो 85 है। 85^2 सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण से $85^2 = 7225$

(7) 7225 से 6889 संख्या छोटी है अतः 85 से छोटी संख्या अर्थात 83 उत्तर है अतः $\sqrt{6889} = 83$

प्रश्नावली – 1.10

वर्गमूल सूत्र विलोकनम् से ज्ञात कीजिए।

(1) 9409 (2) 7569 (3) 8281 (4) 3249.

बीजगणित

गुणा (ऊर्ध्वतिर्यक विधि) से – इस सूत्र के प्रयोग से अंक गणित गुणा के साथ–साथ बीजगणित गुणा के प्रश्न भी सरलता से हल किए जा सकते हैं।

उदाहरण–30. $3x+1$ को $2x+4$ से गुणा कर उत्तर की जाँच कीजिए।

हल : ऊर्ध्व तिर्यक विधि

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ \times\ 2x+4 \\ \hline 6x^2+14x+4 \end{array}$$

(1) प्रथम स्तंभ

$$\begin{array}{r} +1 \\ \times\ +4 \\ \hline +4 \end{array}$$

↑ ऊर्ध्वगुणा

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ \times\ 2x+4 \\ \hline \end{array}$$

╳ तिर्यक गुणा कर जोड़िए

$$(3x \times 4) + (2x \times 1)$$

$$= 12x + 2x = 14x$$

(3) तृतीय स्तंभ

$$\begin{array}{r} 3x \\ \times 2x \\ \hline 6x^2 \end{array}$$

↑ ऊर्ध्वगुणा

उत्तर की जाँच

[(प्रथम व्यंजक के गुणांकों का बीजांक) X (द्वितीय व्यंजक के गुणांकों का बीजांक)] का बीजांक = उत्तर के गुणांकों का बीजांक

(1) 4X6 = 24 का बीजांक → 6

(2) 6 + 4 + 14 = 24 का बीजांक 6

क्रमांक (1) और (2) में बीजांक 6 है। अतः उत्तर सही है।

उदाहरण–31. $2x + y$ x $3x - 5y$ संकेतों की सहायता लेकर हल कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r} 2x + y \\ \times\ 3x - 5y \\ \hline +6x^2 - 7xy - 5y^2 \end{array}$$

$2x$	$2x$	$+y$	$+y$
↑	╳		↑
$3x$	$3x$	$-5y$	$-5y$

उदाहरण–32. बहुपदों $x^2 + 3x + 2$ और $5x^2 + x + 1$ का गुणनफल ऊर्ध्वतिर्यक विधि से ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 2 \\ \times\ 5x^2 + x + 1 \\ \hline 5x^4 + 16x^3 + 14x^2 + 5x + 2 \end{array}$$

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

(1) प्रथम स्तंभ

$$\begin{array}{r} +2 \\ +1 \\ \hline +2 \end{array}$$

↑ ऊर्ध्वगुणा

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ

$$\begin{array}{r} +3x + 2 \\ \times\ \ +x + 1 \\ \hline (3x \times 1) + (x \times 2) \end{array}$$

╳ तिर्यक गुणा कर जोड़िए

$3x + 2x = 5x$

(3) प्रथम,द्वितीय एवं तृतीय स्तंभ

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 2 \\ 5x^2 + x + 1 \\ \hline (x^2 \times 1) + (5x^2 \times 2) + (3x \times x) \end{array}$$

$= x^2 + 10x^2 + 3x^2 = 14x^2$

संकेत के अनुसार प्रथम एवं तृतीय स्तंभ का तिर्यक गुणा तथा द्वितीय स्तंभ का ऊर्ध्वगुणा

(4) तृतीय एवं द्वितीय स्तंभ

$x^2 + 3x$

X $5x^2+x$ ⤫ तिर्यक गुणा कर जोड़िए

$(x^2 \text{ X } x) + (5x^2 \text{ X } 3x)$

$x^3 + 15x^3 = 16x^3$

(5) तृतीय स्तंभ

x^2 ↑ ऊर्ध्वगुणा

$\times\ 5x^2$

$5x^4$

प्रश्नावली – 1.11

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि से हलकर उत्तर की जाँच कीजिए।

(1) $4x+1$ X $x+5$

(2) $4x+2y$ X $3x+3y$

(3) $x - 3y$ X $x+3y$

(4) $x+4$ X $x+4$

(5) x^2+2x+1 X x^2+3x+4

(6) $2x^2+3y-4$ X $3x^2+4y+5$

भाग

परावर्त्य विधिः अंक गणित तथा बीजगणित भाग हेतु परावर्त्य विधि उपयोगी है।

उदाहरण–33. $7x^2$-$5x$+3 को x+1 से भाग दीजिए।

हल : भाजक x+1

संशोधित भाजक -1

	$7x^2$	$-5x$	+ 3
	+ 7	- 5	+ 3
		-7	+ 12
	+ 7	-12	+15

(1) भाजक एवं भाज्य को यथा स्थान लिखेंगे। भाजक x + 1 का विचलन + 1 है इसका परावर्त्य –1 यह संशोधित भाजक है।

(2) भाज्य में चरों के गुणांक चिह्न सहित लिखेंगे।

(3) संशोधित भाजक में एक अंक है अतः भाज्य का इकाई की ओर से एक अंक छोड़कर विभाजन रेखा खीचेंगे।

(4) भाज्य का प्रथम अंक 7 ही उत्तर का प्रथम अंक हैं। नीचे लिखेंगे।

(5) (उत्तर का प्रथम अंक X संशोधित भाजक) इस गुणनफल को अगले अंक–5 के नीचे लिखेंगे।

+7 X (–1) = –7

(6) (–5) + (–7)= –12 उत्तर का द्वितीय अंक है।

(7) उत्तर का द्वितीय अंक X संशोधित भाजक, इस गुणनफल को भाज्य में अगले अंक +3 के नीचे लिखेंगे।

–12 X (–1) = +12

(8) अब विभाजन रेखा पार कर चुके अतः +3 +12 = +15

(9) 7x–12 भागफल एवं +15 शेषफल है।

उदाहरण–34. $x^3 + 2x + 12$ को $x + 2$ से भाग दीजिए।

हल :

भाजक $x + 2$	$x^3 + 0x^2$		$+ 2x$	$+ 12$
संशोधित भाजक –2	+1	+0	+ 2	+ 12
		–2		
			+ 4	– 12
	+1	–2	+ 6	0

(1) भाजक $x + 2$ है। विचलन +2 है विचलन का परावर्त्य –2 यही संशोधित भाजक है।

(2) भाज्य को घटती घात के रूप में लिखेंगे। x^2 भाज्य में नहीं है। अतः इसका गुणांक 0 शून्य लिखेंगे।

(3) संशोधित भाजक में (–2) एक अंक है अतः भाज्य का एक अंक इकाई की ओर से छोड़कर विभाजन रेखा खीचेंगे।

(4) भाज्य का प्रथम अंक +1 उत्तर का प्रथम अंक है।

(5) उत्तर का प्रथम अंक X संशोधित भाजक

+1 × – 2 =–2 अगले अंक 0 के नीचे लिखेंगे।

(6) +0 + –2 =–2 उत्तर का द्वितीय अंक है।

(7) उत्तर का द्वितीय अंक X संशोधित भाजक

–2 X –2 =4 अगले अंक +2 के नीचे लिखेंगे।

(8) +2 + (+4) = +6 उत्तर का तृतीय अंक है।

(9) उत्तर का तृतीय अंक X संशोधित भाजक

+6 X (–2) =–12 विभाजन रेखा के बाद +12 के नीचे लिखेंगे। विभाजन रेखा के बाद +12–12=0 शेषफल है।

(10) अतः भागफल +1 −2 + 6 को x की इकाई की ओर से बढ़ती घात में लिखेंगे

भागफल $x^2 - 2x + 6$

शेष = 0

उदाहरण–35. $4x^3-5x-9$ को $2x+1$ से भाग दीजिए।

हल :

भाजक	भाज्य	भाज्य को घात के घटते क्रम में
$2x + 1$	$4x^3-5x-9$	$4x^3+0x^2-5x-9$

(1) भाजक $2x + 1$ में 2 का भाग देकर x का गुणांक 1 कर लेंगे क्योंकि इस विधि में भाजक में चर की अधिकतम घात वाले पद का गुणांक 1 (एक) होना चाहिए।

अतः $\frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2}$

भाज्य के गुणांक चिह्न सहित घात के घटते क्रम में

नया भाजक $x + \frac{1}{2}$	+4	+0	−5	−9
संशोधित भाजक $-\frac{1}{2}$		−2		+2
			+1	
	+4	−2	−4	−7

(1) उत्तर का प्रथम अंक +4

(2) संशोधित भाजक × उत्तर का प्रथम अंक

$-\frac{1}{2} \times 4 = -2$ को शून्य के नीचे लिखेंगे।

(3) +0 −2 = −2 उत्तर का द्वितीय अंक है।

(4) संशोधित भाजक × उत्तर का द्वितीय अंक

$-\frac{1}{2} \times -2 = 1$ अगले अंक −5 के नीचे लिखेंगे।

(5) −5 + 1 = −4 उत्तर का तृतीय अंक है।

(6) संशोधित भाजक x उत्तर का तृतीय अंक

$-\frac{1}{2} \times -4 = 2$ विभाजन रेखा के बाद −9 के नीचे लिखेंगे।

(7) −9 + 2 = −7 शेषफल है।

(8) +4 −2−4 भागफल में 2 का भाग देंगे क्योंकि भाजक में 2 का भाग दिया है।

अतः +2 −1 −2 इसमें x सहित लिखने पर

$2x^2 - x - 2$ भागफल है तथा शेषफल −7

उदाहरण–36. p(x) को g(x) से भाग दीजिए जबकि

$p(x) = x^4 + 1$ और $g(x) = x+1$

हल : भाजक भाज्य

$x+1$ x^4+1

(1) भाज्य x^4+1 को घात के घटते क्रम में लिखेंगे जो घात इसमें नहीं है उनके गुणांक शून्य (0) लिखेंगे। भाग देने की प्रक्रिया पूर्ववत है। देखिए और समझिए –

भाजक भाज्य

$x+1$ $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$

भाज्य के गुणांक चिह्न सहित

भाजक $x+1$	+1	+0	+0	+0	+1
संशोधित भाजक −1		−1	+1	−1	
					+1
	+1	−1	+1	−1	+2

भागफल x^3-x^2+x-1 (भागफल के इकाई में x^0, दहाई में x^1......इस क्रम में बढ़ते हुए लिखते हैं)

शेषफल = 2

<u>उत्तर की जाँच</u>

भाज्य के गुणांकों का बीजांक =

(भाजक के गुणांकों का बीजांक × भागफल के गुणांक का बीजांक) + शेषफल का बीजांक

2 = (2 X 0) + 2

2 = 2 दोनों बीजांक बराबर हैं अतः उत्तर सही है।

AQ4FKH

बीजगणित
ALGEBRA

इकाई – 2

आओ अंकगणित एवं बीजगणित का इतिहास जानें...

यदि आप अपने आस–पास होने वाले क्रियाकलापों, घटनाओं और चीजों को ध्यान से देखें और उन पर विचार करें तो पाएँगे कि वे सभी किसी न किसी तरह गणित से जुड़े हुए हैं। खरीद–फरोख्त करना हो या कोई चीज बनानी हो, अपनी दिनचर्या तय करनी हो या कोई बड़ी योजना बनानी हो तो हर जगह हम गणित का उपयोग करते ही हैं।

गणित का जीवन से यह जुड़ाव आज की बात नहीं है। इंसानी सभ्यता के विकास के साथ–साथ ही गणित की विकास यात्रा भी लगातार जारी है। इस विकास यात्रा में मनुष्य ने संख्याओ के साथ–साथ व्यापक संकेतों का इस्तेमाल करके समस्याओं का हल ढूंढ़ने की कोशिश की। ऐसी कोशिशों से ही गणित की उस शाखा का जन्म हुआ जिसे आज हम बीजगणित कहते हैं।

बीजगणित, गणित की वह शाखा है जिसमें संख्याओं को अक्षरों द्वारा निरूपित किया जाता है। परन्तु संक्रिया के चिह्न वही रहते हैं जिनका प्रयोग अंक गणित में होता है।

बीजगणित के आधुनिक संकेतवाद का विकास कुछ शताब्दी पूर्व ही प्रारंभ हुआ है, परन्तु समीकरण को हल करने की समस्या बहुत पुरानी है। ईसा से 2000 वर्ष पूर्व लोग अटकल लगाकर समीकरणों को हल करते थे।

बीजगणित को संकेतों के रूप में व्यक्त करने की परम्परा क्रमशः विकसित हुई। अनुमान है कि ईसा पूर्व 300 से 250 ईसवी के आसपास बीजगणित आम बोलचाल की भाषा में वर्णित किया जाता था। जैसे $x+1=2$ को कहना "किसी संख्या में एक जोड़ने पर दो प्राप्त होता है।" लगभग 250 ईसवी में डायोफेन्टस की "अरिथमेटिका" में कुछ आशुलिपिक संकेतों का प्रयोग दिखाई पड़ता है। ऐसी ही बातें ब्रह्मगुप्त ने ब्रह्मस्फुट सिद्धांत में लिखी हैं। उक्त उदाहरण को उस समय ऐसा लिखा जाता था– "x में जब 1 जोड़ते हैं तब 2 प्राप्त होता है।"

1600 ईसवी के बाद चरों और स्थिर संख्याओं को संकेतों के रूप में लिखा जाने लगा। जैसे $x+1=2$ को व्यापक रूप में इस तरह लिखा जा सकता है– $ax+b=c$ जहाँ x चर और a, b, c स्थिर संख्याएँ हैं।

यह कैसे हुआ होगा इसे समझने के लिए आइए कोई ऐसी पहेली हल करने की कोशिश करें जो गाँव–देहात के बड़े–बूढ़े अक्सर पूछा करते हैं। उदाहरण के लिए एक पहेली देखें–

सौ गोड़ अउ बहत्तर आँखी
कतका हाथी, कतका पाँखी

इसका आशय है– "हाथियों और पक्षियों के एक समूह के कुल सौ पैर और बहत्तर आँखें हैं, बताओ हाथी कितने हैं और कितने पक्षी हैं?"

इसे कैसे हल करेंगे? इसे हम अटकलें लगाकर हल कर सकते हैं, जैसे बीस हाथी हैं तो अस्सी पैर, बचे बीस पैर तो दस पक्षी होंगे। कुल 30 प्राणी हुए। इनकी 60 आँखें होंगी। लेकिन आँखें तो बहत्तर है...। तो कोई और जोड़ी सोचें।

स्पष्ट है हाथी कम करने पड़ेंगे। सोचिए क्यों?

हम ऐसे भी हल शुरू कर सकते हैं– आँखें बहत्तर हैं तो प्राणी छत्तीस। हाथियों की संख्या 'ह' हो तो पक्षियों की संख्या 36 से 'ह' कम होगी। अब 'ह' हाथियों और (36–ह) पक्षियों के पैर गिन लें तो सौ होंगे। याने ह×4+(36–ह)×2=100 यह हमारा सरल समीकरण बन गया जिससे 'ह' मालूम कर सकते हैं।

हमें जो प्रमाण मिलते हैं उनके अनुसार लगभग 800–500 ईसा पूर्व भारत में शुल्व सूत्रों की रचनाएँ हुई। ये शुल्व सूत्र यज्ञ के लिए विभिन्न प्रकार की वेदियों की रचना करने से संबंधित थे। वेदियाँ यदि निश्चित क्षेत्रफल की किंतु अलग–अलग आकृतियों की बनानी हो तो यह कैसे किया जाए, ऐसी समस्याओं का हल इन सूत्रों में है। एक उदाहरण देखें– यदि किसी वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर आयत की रचना करनी हो तो कैसे करें? यद्यपि यह समस्या ज्यामिति से जुड़ी है किंतु इसे हल करने के लिए बीजगणितीय समीकरणों की मदद भी ली जा सकती है। जैसे किसी वर्ग की भुजा 'व' हो और इसके बराबर क्षेत्रफल वाले ऐसे आयत की रचना करनी हो जिसकी लम्बाई 'ल' निश्चित हो तो इसकी चौड़ाई क्या होनी चाहिए। इसके हल करने के लिए व × व = ल × च जैसा समीकरण बनता है। ऐसा नहीं है कि केवल भारत में ही ऐसी सोच विकसित हुई। दुनिया के अलग–अलग हिस्सों में भी ऐसे लोग हुए जिन्होंने गणित की इस नई दिशा में काम किया। 500–300 ई.पू. में आर्कमिडीज ने प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग प्राप्त करने का तरीका ढूँढ़ लिया था।

अंकगणित व संख्या समूहों को व्यापक रूप में लिखने का बहुत सारा काम भारत में छठवीं शताब्दी ईसापूर्व के आसपास हुआ। इसी तरह से पाँचवीं व छठी शताब्दी में आर्यभट्ट व ब्रह्मगुप्त ने संख्या श्रेणियों के कई तरह के व्यापक जोड़ भी पता किए। इन्होंने अलग–अलग तरह की कई व्यापक द्विघाती व सरल समीकरणों के हल भी पता किए। भारत में अंकों से खेलकर कई तरह की व्यापक व विशिष्ट बातें पता करने के कई उदाहरण हैं। भारतीय गणित, यूनानी व अरबी गणित में कई तरह का आदान–प्रदान भी हुआ।

भारत में बारहवीं शताब्दी में अवकलजों, अतिसूक्ष्मों, मध्यमान प्रमेय आदि पर बहुत काम हुआ। चौदहवीं शताब्दी में sine (ज्या), cosine (कोज्या) के लिए अनन्त श्रेणी आदि पर काम किया गया। किन्तु यह काम व्यवस्थित रूप से प्रस्तुत नहीं हो पाया और बाहर के लोगों को ठीक से इसका महत्व ज्ञात नहीं हो पाया।

आज का 'एलजेब्रा' या 'बीजगणित' अलग–अलग जगह हुए प्रयासों की मिली–जुली समझ है।

यह अंकगणित एवं बीजगणित का सम्पूर्ण इतिहास नहीं है। अलग–अलग ग्रंथों से कुछ जानकारियाँ संकलित कर प्रस्तुत की गई हैं। शिक्षक एवं विद्यार्थी अन्य स्रोतों से बीजगणित के संबंध में और भी जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं।

वास्तविक संख्याएँ
(परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ)
[REAL NUMBERS]
(Rational and Irrational Numbers)

AQDBHJ

02

किसी कक्षा में सभी प्रकार की संख्याएँ सोचने के लिए कहे जाने पर छात्रों ने ये संख्याएँ बताईं।

8,	−108,	12	205
0.15,	−0.37,	0	$\frac{22}{7}$,
$\frac{3}{7}$, 1,	$\frac{10}{9}$,	$\frac{17}{19}$,	−55
−3	105	−7.5	3.2323

क्या इनमें सभी प्रकार की संख्याएँ आ गई हैं?

क्या आप कुछ और संख्याओं के उदाहरण दे सकते हैं? आपस में चर्चा करें व उदाहरण दें।

इन संख्याओं को गुणों के आधार पर बाँटना हो तो, कैसे बाँटें? कौन से गुण लें? क्या इन्हें सम–विषम संख्याओं में बांट सकते हैं? क्या इन्हें बांटने का कोई और तरीका हो सकता है? कितने अलग–अलग तरीकों से इन्हें बाँट सकते हैं?

प्राकृत से परिमेय तक (Natural to Rational)

मनीषा और सलमा ने इन्हें N (प्राकृत संख्या– Natural Numbers), W (पूर्ण संख्या– Whole Numbers), Z (पूर्णांक संख्या–Integers) और Q (परिमेय संख्या– Rational Numbers) में नीचे दिए तरीके से बाँटा–

N	W	Z	Q
8, 105, 12, 205, 1	0, 8, 105, 12, 205, 1	0, 8, 105, 12, 205, 1, −108, −55 −3	0, 8, 105, 12, 205, 1, −3, −108, −55, $\frac{22}{7}, \frac{3}{7}$, −0.37, 3.2323, −7.5, $\frac{10}{9}, \frac{17}{19}$ 0.15

आप सभी डिब्बों में 3 नई संख्याएँ और लिखें।

क्या कुछ ऐसी संख्याएँ हैं जो सभी डिब्बों में हैं?

करके देखें

1. वे संख्याएँ लिखिए जो Q में है परंतु N में नही।
2. वे संख्याएँ लिखिए जो Z में है परंतु N में नही
3. वे संख्याएँ लिखिए जो W में है परंतु N में नही।

Q बॉक्स में सभी संख्याएँ आ जाएंगी, इन सबको $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसमें p तथा q पूर्णांक संख्याएँ हैं तथा $q \neq 0$ याने p कोई भी पूर्णांक संख्या और q शून्य को छोड़कर कोई भी पूर्णांक संख्या हो सकती है। ये सब परिमेय संख्याएँ हैं।

रश्मि बोली कि प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक संख्याएँ भी परिमेय संख्याओं में आती हैं क्योंकि इन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है

क्या आप इससे सहमत हैं? रेशमा ने कुछ उदाहरण ऐसे दिये–

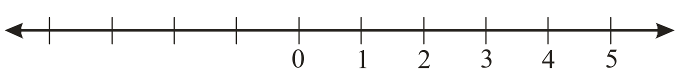
$$8=\frac{8}{1}, \qquad -3=\frac{-3}{1}, \qquad 0=\frac{0}{1}$$

क्या आप कोई ऐसी पूर्णांक संख्या ढूंढ सकते हैं जो इस तरह परिमेय रूप में न लिखी जा सके?

अतः हम कह सकते हैं कि प्राकृत संख्या का समूह पूर्णांकों में और पूर्णांक संख्या का समूह परिमेय संख्या में सम्मिलित है।

प्राकृत संख्याएँ (N) और पूर्णांक संख्याएँ (Z) एक नियम का पालन करती हैं। प्रत्येक संख्या पिछली अथवा अपने बायीं ओर की संख्या से एक अधिक और बाद की अथवा दायें वाली संख्या से एक कम है। अर्थात दो क्रमवार संख्याएँ आपस में एक इकाई की समान दूरी पर हैं।

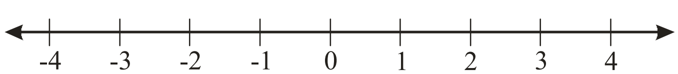
संख्या रेखा



चित्र–1

पूर्ण संख्या को संख्या रेखा पर दिखाने के लिए एक रेखा खींचकर, उस पर समान दूरी पर कई चिह्न लगाइए। किसी एक बिंदु को 0 मान लें, समान दूरी पर दाईं ओर 1, 2, 3,...... संख्याएँ लिखें।

पूर्णांक संख्याओं के लिए संख्या रेखा



चित्र–2

पूर्णांक संख्या को संख्या रेखा पर दिखाने के लिए चित्र–1 की संख्या रेखा पर बायीं ओर –1, –2, –3, ... लिखें (चित्र–2)।

हम देख सकते हैं कि दाईं ओर एक आगे बढ़ने पर संख्या एक अधिक हो जाती है और बाईं और बढ़ने पर एक कम हो जाती है।

करके देखें

1. संख्या रेखा पर दिखाएँ −2, +3, +4   2. −3 से +2 कितने आगे है?

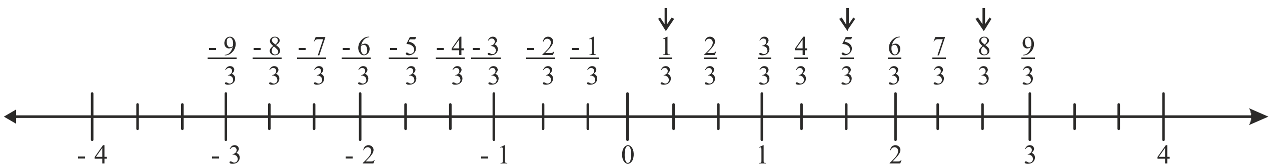
परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना

AQH7P7

क्या आप परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं?

क्या आप $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$ आदि को संख्या रेखा पर दिखा सकते हैं?

रश्मि ने इनको संख्या रेखा पर ऐसे दर्शाया।



चित्र–3

इसमें उसने प्रत्येक इकाई को तीन बराबर भागों में बाँटा है और फिर संख्याओं को दर्शाया है।

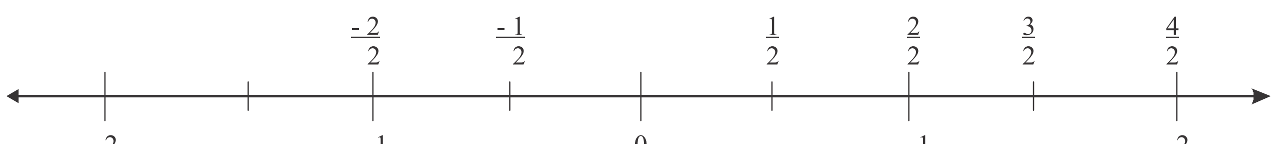
इसी तरह आप भी $\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{2}{3}$ अंकित करें।

सोचें एवं चर्चा करें

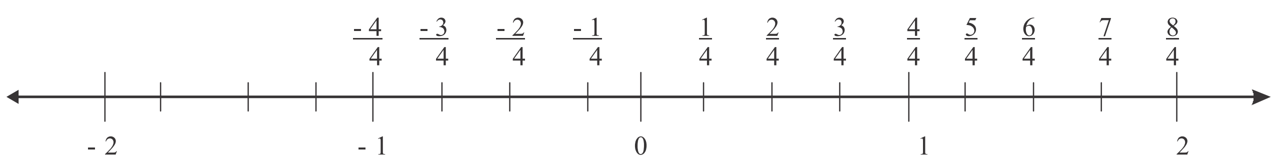
$\frac{-3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{12}{5}$...... आदि को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए क्या करना होगा?

तुल्य परिमेय संख्या व संख्या रेखा

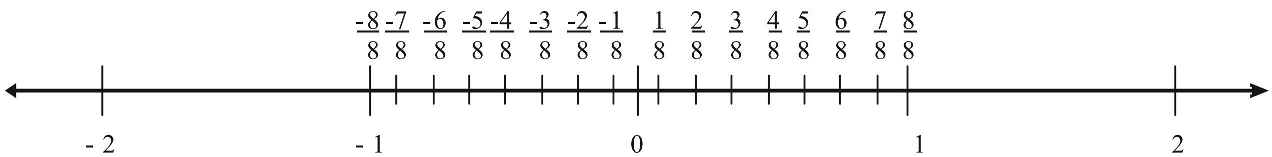
जिस प्रकार $\frac{1}{2}$ परिमेय संख्या है उसी प्रकार $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}$, ... भी परिमेय संख्याएँ हैं। इन्हें संख्या रेखा पर कैसे प्रदर्शित करें? आइए, करके देखते हैं।



चित्र–4 (i)



चित्र–4 (ii)



चित्र–4 (iii)

संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ का जो स्थान है वही संख्या $\frac{2}{4}$ तथा $\frac{4}{8}$ का भी है। अतः $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ जो तुल्य परिमेय संख्याएँ हैं, एक ही जगह पर आती हैं।

दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ– हमें कोई भी दो पूर्णांक मिलें तो हम पता लगा सकते हैं कि उनके बीच कितनी पूर्णांक संख्याएँ हैं।

करके देखें

1. 5 व 15 के बीच कितनी पूर्णांक संख्याएँ हैं?
2. –3 व 8 के बीच कितनी पूर्णांक संख्याएँ हैं?

क्या यह गणना हम परिमेय संख्याओं के लिए भी कर सकते हैं?

$\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ हैं? आपस में चर्चा करो।

रेशमा बोली– संख्या रेखा पर देखे तो $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के ठीक बीच $\frac{3}{8}$ है।

$\frac{3}{8}$ याने $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ का आधा

सलमा बोली फिर $\frac{3}{8}$ और $\frac{1}{2}$ के ठीक बीच परिमेय संख्या, $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)$ का आधा याने $\frac{7}{16}$ और फिर $\frac{7}{16}$ और $\frac{1}{2}$ के ठीक बीच है $\frac{15}{32}$

ये सभी परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच हैं। इसी प्रकार हम और भी परिमेय संख्याएँ इन दोनों के बीच ढूंढ सकते हैं।

क्या आप सोच सकते हैं कि कितनी और परिमेय संख्याएँ इन दोनों के बीच हैं?

आपस में चर्चा करो और कुछ और परिमेय संख्याएँ ढूंढो।

हम देखते हैं कि जितनी बार चाहें, हम इन परिमेय संख्याओं के बीच नई परिमेय संख्याएँ ढूंढ सकते हैं।

अब हम यह कह सकते हैं कि $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच इतनी अधिक परिमेय संख्याएँ हैं कि हम इनको गिन कर बता नहीं सकते।

यह बात किन्हीं भी दो परिमेय संख्याओं के लिए सही है।

परिमेय संख्याओं के बीच असंख्य संख्याएँ

a, b कोई भी दो परिमेय संख्याएँ है जिनमें $a < b$

तब $a + a < b + a$

$2a < b+a$

या $a < \frac{b+a}{2}$ ....(i)

पुनः $a < b$

$a + b < b + b$

$a + b < 2b$

$\frac{a+b}{2} < b$ ....(ii)

इस प्रकार $\frac{a+b}{2}$, a और b के बीच में है। याने $a < \frac{a+b}{2} < b$

हम कोई भी दो परिमेय संख्याएँ a और b लें तो उनके बीच एक परिमेय $\frac{a+b}{2}$ है और इस प्रकार $\frac{a+b}{2}$ और a के बीच भी परिमेय संख्याएँ होती हैं। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दो परिमेय संख्याओं के बीच असंख्य परिमेय संख्याएँ हैं।

दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ ढूंढना

हम दो परिमेय संख्याएँ $a = \frac{5}{1}$ व $b = \frac{6}{1}$ लेते हैं।

हालाँकि इनके बीच असंख्य परिमेय संख्याएँ हैं, हम उनमें से कुछ संख्याएँ पता करना चाहें तो यह तरीका उपयोग कर सकते हैं।

$\frac{5}{1}$ व $\frac{6}{1}$ के बीच एक परिमेय संख्या $= \frac{a+b}{2} = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$ है।

इसे हम तुल्य परिमेय संख्याओं का उपयोग करके भी देख सकते हैं।

$$\frac{5}{1}=\frac{5\times2}{1\times2}=\frac{10}{2},\ \text{(तुल्य परिमेय संख्या)}$$

$$\frac{6}{1}=\frac{6\times2}{1\times2}=\frac{12}{2},$$

$$\frac{10}{2}<\frac{11}{2}<\frac{12}{2}$$

$\frac{10}{2}$ और $\frac{12}{2}$ के बीच एक परिमेय संख्या $\frac{11}{2}$ होगी।

इसी प्रकार

$$\frac{5}{1}=\frac{5\times3}{1\times3}=\frac{15}{3},$$

$$\frac{6}{1}=\frac{6\times3}{1\times3}=\frac{18}{3},$$

यानी $\frac{15}{3}$ और $\frac{18}{3}$ के बीच परिमेय संख्या $\frac{16}{3},\frac{17}{3}$ होंगी।

तुल्य परिमेय संख्या का उपयोग करके इन सब के अलावा और भी बहुत सी संख्या ढूँढ सकते हैं। उदाहरण के लिए $\frac{5}{1}$ और $\frac{6}{1}$ को 11 से गुणा व भाग करने पर हमें इन दोनों के बीच 10 नई परिमेय संख्याएँ मिल जाएँगी।

अगर हमें $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{5}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात करनी हैं तो हम तीन से 1 अधिक अर्थात् 3 +1 = 4 का गुणा दोनों परिमेय संख्या के अंश और हर में करेंगे।

$$\frac{1}{5}=\frac{1\times4}{5\times4}=\frac{4}{20}\ \text{(तुल्य परिमेय संख्या)}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times4}{5\times4}=\frac{8}{20}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{4}{20}<\frac{5}{20}<\frac{6}{20}<\frac{7}{20}<\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

अतः $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{5}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{5}{20}, \frac{6}{20}, \frac{7}{20}$ होंगी।

करके देखें

1. $\frac{2}{7}$ और $\frac{4}{7}$ के बीच कोई 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
2. $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{7}$ के बीच 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. $\frac{-1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच 11 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें।

परिमेय संख्याओं के गुणधर्म (Properties of Rational Numbers)

(i) पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक (Whole Numbers and Integers)

एक बार पुनः संक्षेप में संख्याओं के गुणधर्म पर चर्चा करें। शुरूआत संवृतता (Clousure) से करते हैं।

नीचे दी गई तालिका को पूर्ण कीजिए जो चर्चा के लिए आवश्यक है। इस तालिका में संबंधित उदाहरण भी दें।

संख्याएँ	संक्रियाएँ			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
पूर्ण संख्याएँ	किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a और b के लिए a + b पूर्ण संख्या है, इसलिए यह संवृत है। उदा.	संवृत नहीं है क्योंकि 5 − 7 = −2 पूर्ण संख्या नहीं है।	संवृत है ------- -------	संवृत नहीं हैं क्योंकि 5÷8 $= \frac{5}{8}$ पूर्ण संख्या नहीं है।
पूर्णांक	−6+4= −2 एक पूर्णांक है। पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत है। उदा. ------	संवृत है क्योंकि किन्हीं a और b दो पूर्णांकों के लिए a-b पूर्णांक है उदा. ------	5 x 9 = 45 −5 x 9 = −45 और −5 x(- 9)=45 सभी पूर्णांक हैं। व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांक a तथा b के लिए a x b एक पूर्णांक है। उदा.	संवृत नहीं है क्योंकि ------- ------- -------

(ii) परिमेय संख्याएँ – संवृत गुणधर्म **(Closure Property)**

(a) **योग**

मान लीजिए दो परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}$ हैं।

$$\frac{2}{7}+\frac{5}{8} = \frac{16+35}{56} = \frac{51}{56}$$

परिणाम $\frac{51}{56}$ पुनः परिमेय संख्या प्राप्त हुआ।

$8+\left(\frac{-19}{2}\right) =$ ____________ क्या यह परिमेय संख्या है?

$\frac{2}{7} + \frac{-2}{7} =$ ____________ क्या परिणाम परिमेय संख्या होगी?

इस गुणधर्म को कुछ और संख्याओं के साथ भी जाँचिए।

$3+\frac{5}{7}, \quad 0+\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2}+\frac{2}{7}$

हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का योग भी एक परिमेय संख्या है। यदि a, b परिमेय संख्या है, तो $a+b$ भी एक परिमेय संख्या होगी। अतः योग के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत रहती हैं।

(b) **व्यवकलन**

मान लीजिए दो परिमेय संख्याएँ हैं $\frac{5}{9}$ और $\frac{3}{4}$

तो $\frac{5}{9}-\frac{3}{4} = \frac{5\times4-3\times9}{36} = \frac{20-27}{36} = \frac{-7}{36}$

$\frac{-7}{36}$ एक परिमेय संख्या है। (क्योंकि –7, 36 पूर्णांक है और 36 शून्येतर है, अतः $\frac{-7}{36}$ भी एक परिमेय संख्या है।)

इसकी जाँच निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के संदर्भ में भी कीजिए।

(i) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14-9}{21} =$ ____________ क्या यह एक परिमेय संख्या है?

(ii) $\left(\frac{48}{9}\right)-\frac{11}{18}$ = ______________ क्या यह एक परिमेय संख्या है?

हमने पाया कि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के लिए, उनका अंतर भी परिमेय संख्या है। अतः व्यवकलन के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत रहती हैं।

किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b, के लिए, a–b भी परिमेय संख्या होगी।

(c) गुणन

निम्नलिखित पर ध्यान दीजिए।

(i) $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(ii) $\frac{6}{5}\times\frac{-11}{2}=\frac{-66}{10}=\frac{-33}{5}$

(iii) $\frac{3}{7}\times\frac{5}{2}$ = ____________

(iv) $\frac{2}{1}\times\frac{19}{13}$ = ____________

सभी उदाहरणों में हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या होती है। कुछ और परिमेय संख्याओं के युग्मों को गुणा कीजिए। जाँच कीजिए कि गुणनफल परिमेय संख्या है या नहीं। क्या आप ऐसी परिमेय संख्या बता सकते हैं जिसका गुणनफल एक परिमेय संख्या नहीं है? अतः हमें पता चलता है कि गुणा के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत हैं।

किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b, के लिए a×b भी एक परिमेय संख्या होगी।

(d) भाग

दो परिमेय संख्याएँ लीजिए $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{8}$

तो $\frac{2}{3}\div\frac{7}{8}=\frac{2}{3}\times\frac{8}{7}=\frac{16}{21}$ जो कि एक परिमेय संख्या है?

इसे कुछ अन्य उदाहरणों से जाँचिए।

(i) $\frac{5}{7}\div 2=\frac{5}{7}\div\frac{2}{1}=\frac{5}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{14}$

(ii) $-\frac{2}{3}\div\frac{6}{11}$ = ___________ = ___________ = ___________

(iii) $3 \div \frac{17}{13} = \frac{3}{1} \div \frac{17}{13} = ______ = ______ = ______$

ऊपर के सभी उदाहरणों में हम देखते हैं कि जब हम दो परिमेय संख्याओं का भाग करते हैं तो हमें परिमेय संख्या ही प्राप्त होती है। अब क्या हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के भाग के लिए संवृत गुण सही है?

आइए, इनकी जाँच करें : 0, 5 परिमेय संख्याएँ है और $\frac{5}{0}$ अपरिभाषित है। अतः परिमेय संख्याओं का समूह 'Q' भाग के सापेक्ष संवृत नहीं है।

यदि Q में से हम शून्य निकाल दें तो यह समूह भाग के सापेक्ष संवृत हो जाएगा।

करके देखें

यदि हम पूर्णांकों के समूह से शून्य निकाल दें तो क्या यह भाग के सापेक्ष संवृत है? इसी तरह पूर्ण संख्याओं के समूह के लिए भी जाँच कीजिए।

तालिका के खाली स्थानों को भरिए।

संख्याएँ	अंतर्गत संवृत है			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृत संख्या	हाँ	....	....	....
पूर्ण संख्याएँ	....	....	....	नहीं
पूर्णांक संख्याएँ	....	हाँ	....	....
परिमेय संख्याएँ	....	....	हाँ	....

क्रमविनिमेय गुण (Commutative Property)

आइए, पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों दोनों के लिए हम अलग–अलग संक्रियाओं के साथ क्रमविनिमेय गुण को हम पुनः स्मरण करते हैं।

निम्नलिखित तालिका पूर्ण कीजिए।

(i) पूर्ण संख्याएँ

संक्रियाएँ	उदाहरण	टिप्पणी
योग	2, 3 पूर्ण संख्याएँ है। $2+3 = 5$ और $3 + 2 = 5$	पूर्ण संख्याएँ योग में क्रमविनिमेय गुण का पालन करता है $\therefore 2 + 3 = 3 + 2$

व्यवकलन	क्या $3-2$ और $2-3$ समान है?	क्रमविनिमेय गुण का पालन नहीं करता।
गुणन	------	------
भाग	$4 \div 2 = ?$ $2 \div 4 = ?$ क्या $4 \div 2 = 2 \div 4$?	-------

(ii) पूर्णांक

संक्रियाएँ	उदाहरण	टिप्पणी
योग	---	पूर्णांकों में योग क्रमविनिमेय है।
व्यवकलन	2, 3 पूर्णांक हैं $2-(3) = ?$ $(3)-2 = ?$ क्या $2-(3) = (3)-2 = ?$	....
गुणन	....	....
भाग	....	पूर्णांकों में भाग क्रमविनिमेय नहीं है।

(iii) परिमेय संख्याएँ

(a) योग

दो परिमेय संख्याएँ $\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}$ लीजिए। इन्हें जोड़ दीजिए।

$$\frac{5}{2}+\frac{(-3)}{4} = \frac{2\times5+1\times(-3)}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

और $$\frac{(-3)}{4}+\frac{5}{2} = \frac{1\times(-3)+2\times5}{4} = \frac{-3+10}{4} = \frac{7}{4}$$

तो $$\frac{5}{2}+\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{4}+\frac{5}{2}$$

अब इस गुण को परिमेय संख्याओं के कुछ और युग्मों के लिए जाँच कीजिए।

मान लीजिए $\frac{1}{2}+\frac{5}{7}$ और $\frac{5}{7}+\frac{1}{2}$. क्या $\frac{1}{2}+\frac{5}{7} = \frac{5}{7}+\frac{1}{2}$?

क्या $\frac{-2}{3}+\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{(-4)}{5}+\left(\frac{-2}{3}\right)$?

क्या आप परिमेय संख्याओं के कोई ऐसे युग्म बता सकते हैं जिन पर यह नियम लागू नहीं हो?

हम कह सकते हैं कि किन्हीं a और b परिमेय संख्याओं के लिए a + b = b + a इस प्रकार परिमेय संख्याओं में योग क्रमविनिमेय रहता है।

(b) **व्यवकलन :** दो परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{8}$ लीजिए।

$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16-21}{24} = \frac{-5}{24}$ और $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$

इसलिए $\frac{2}{3} - \frac{7}{8} \neq \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

इनकी जाँच कीजिए।

क्या $2 - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - 2$?

क्या $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$?

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं में घटाना क्रमविनिमेय नहीं है।

अतः किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए $a - b \neq b - a$ होगा।

(c) **गुणन :** दो परिमेय संख्याएँ 2 और $-\frac{5}{7}$ लीजिए।

$2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-10}{7}$; $\frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-10}{7}$ अतः $2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times 2$

क्या $\frac{-1}{2} \times \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)$?

इन्हें कुछ और परिमेय संख्याओं के लिए जाँच कीजिए।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि परिमेय संख्याओं के अंतर्गत गुणन क्रमविनिमेय है।

अर्थात् $a \times b = b \times a$ किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए।

(d) भाग

क्या $\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$?

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{14}}} = \frac{3}{2}$ और $\frac{14}{9} \div \frac{7}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{2}{3}$

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} \neq \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं में भाग क्रमविनिमेय नहीं है।

करके देखें

यह तालिका पूर्ण कीजिए।

संख्याएँ	क्रमविनिमेयता के अंतर्गत			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृत संख्याएँ	हाँ	नहीं	हाँ	----
पूर्ण संख्याएँ	----	----	----	नहीं
पूर्णांक	----	----	----	----
परिमेय संख्याएँ	----	----	----	नहीं

साहचर्य गुण (Associative Property)

चार संक्रियाएँ अर्थात् योग, घटाना, गुणा और भाग के सापेक्ष पूर्ण संख्याओं की साहचर्यता को स्मरण कीजिए।

(i) पूर्ण संख्याएँ

आवश्यक उदाहरण और टिप्पणियों द्वारा तालिका पूर्ण कीजिए।

संक्रिया	पूर्ण संख्याओं के उदाहरण	टिप्पणी
योग	क्या $2 + (3 + 0) = 2 + 3 = 5$ $(2 + 3) + 0 = 5 + 0 = 5$ $\Rightarrow 2 + (3 + 0) = (2 + 3) + 0$ $a + (b + c) = (a + b) + c$ किन्हीं a, b, c पूर्ण संख्याओं के लिए	 ------- -------

व्यवकलन	(4–3) – 2 = ? 4–(3–2) = ? क्या (4–3) –2 = 4–(3–2) ?	व्यवकलन साहचर्य नहीं है।
गुणन	----------------------------	गुणन साहचर्य है।
भाग	$2 \div (3 \div 5) = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ $(2 \div 3) \div 5 = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ $2 \div (3 \div 5) \neq (2 \div 3) \div 5$	भाग साहचर्य नहीं है।

(ii) पूर्णांक

चार संक्रियाओं के सापेक्ष पूर्णांकों की साहचर्यता को स्मरण कीजिए।

निम्नलिखित तालिका आवश्यक टिप्पणियों के साथ पूर्ण कीजिए।

संक्रिया	पूर्णांक उदाहरण के साथ	टिप्पणी
योग	$2 + [(-3) + 5] = 2 + [-3 + 5] = 2 + 2 = 4$ $[2 + (-3)] + 5 = [2 - 3] + 5 = -1 + 5 = 4$ किन्हीं a, b और c तीन पूर्णांकों के लिए a + (b + c) = (a + b) + c	
व्यवकलन	क्या 6 – (9 – 5) = (6 – 9) – 5?	
गुणन	क्या $2 \times [7 \times (-3)] = (2 \times 7) \times (-3)$?	
भाग	$10 \div [2 \div (-5)] = 10 \div \frac{-2}{5} = 10 \times \frac{-5}{2} = -25$ अब $(10 \div 2) \div (-5) = \frac{10}{2} \div (-5) = 5 \div (-5) = \frac{5}{-5} = -1$ इस प्रकार $10 \div [2 \div (-5)] \neq (10 \div 2) \div (-5)$	

(iii) परिमेय संख्याएँ – साहचर्यता

(a) योग

मान लीजिए तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{7}$, 5, $\frac{1}{2}$ हैं। इनकी जाँच कीजिए कि

$$\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\frac{2}{7}+5\right]+\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{L.H.S.}=\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{2}{7}+\left[5+\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{7}+\left[\frac{10+1}{2}\right]=\frac{4+77}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{R.H.S.}=\left[\frac{2}{7}+5\right]+\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\left(\frac{2+35}{7}\right)\right]+\frac{1}{2}=\frac{37}{7}+\frac{1}{2}=\frac{74+7}{14}=\frac{81}{14}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

ज्ञात कीजिए $\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{4}{3}\right)\right]$ और $\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{4}{3}\right)$

क्या दोनों योग समान हैं?

कुछ अन्य परिमेय संख्याओं को लेकर इनकी साहचर्यता की जाँच कीजिए।

हमें प्राप्त हुआ कि परिमेय संख्याएँ योग के अंतर्गत साहचर्य नियम का पालन करती हैं।

अतः किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b और c के लिए $a+(b+c) = (a+b)+c$ होगा।

(b) व्यवकलन

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ और $\frac{-5}{4}$ लीजिए।

जाँच कीजिए $\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right]=\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right]-\left(\frac{-5}{4}\right)$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{8}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}-2=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$$

$$\text{R.H.S.}=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right) = \left(\frac{1\times 2-3}{4}\right)+\frac{5}{4}=\left(\frac{-1}{4}\right)+\frac{5}{4}$$

$$= \frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\therefore \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] \neq \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right)$$

L.H.S. ≠ R.H.S.

हमने ज्ञात किया कि परिमेय संख्याओं में व्यवकलन साहचर्य नियम का पालन नहीं करता है। अतः किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए $a-(b-c) \neq (a-b)-c$ होगा।

(c) गुणन

तीन परिमेय संख्याएँ लीजिए $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{-5}{7}$

क्या $\frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right)$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{-20}{49}\right] = \frac{-40}{147}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{8}{21}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-40}{147}$$

L.H.S. = R.H.S.

इनकी जाँच कीजिए।

ज्ञात कीजिए। $2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right)$ और $\left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$

क्या $2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right) = \left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$

ज्ञात कीजिए $\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right)$ और $\left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$

क्या $\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$

हम ऊपर की सभी स्थितियों में पाते हैं कि L.H.S. = R.H.S.

इस प्रकार परिमेय संख्याओं में गुणा साहचर्य नियम का पालन करता है।

अतः किन्हीं a, b, c परिमेय संख्याओं के लिए $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ होगा।

(d) भाग

कोई तीन परिमेय संख्याएँ लीजिए, जैसे– $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ और $\frac{1}{7}$

क्या $\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$ है?

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{7}{1}\right) = \frac{2}{3} \div \frac{21}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{8}{63}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{8}{9}\right) \div \frac{1}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{1} = \frac{56}{9}$$

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) \neq \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$$

$\therefore$ L.H.S. $\neq$ R.H.S.

अतः किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ होता है।

इसलिए, परिमेय संख्याओं में भाग साहचर्य नियम का पालन नहीं करता।

करके देखें

इस तालिका को पूर्ण कीजिए।

संख्याएँ	साहचर्य के अंतर्गत			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृत संख्याएँ	हाँ	नहीं	....	....
पूर्ण संख्याएँ	....	....	....	नहीं
पूर्णांक	....	नहीं	हाँ	....
परिमेय संख्याएँ	....	....	....	....

शून्य की भूमिका

क्या आप कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं, जिसे किसी संख्या में जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है? जब '0' किसी भी परिमेय संख्या में जोड़ा जाता है तो पुनः वही परिमेय संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण के लिए–

$1 + 0 = 1$ और $0 + 1 = 1$

$-2 + 0 = -2$ और $0 + (-2) = -2$

$$\frac{11}{3} + 0 = \frac{11}{3} \text{ और } 0 + \frac{11}{3} = \frac{11}{3}$$

इस कारण हम '0' को योज्य तत्समक कहते हैं। इस गुण का सार नीचे प्रस्तुत किया गया है।

; fn **a** कोई परिमेय संख्या का प्रतिनिधित्व करता है तो $a + 0 = a$ और $0 + a = a$

क्या प्राकृतिक संख्याओं में योज्य तत्समक है?

एक (1) की भूमिका

नीचे दिए गए खाली डिब्बे भरिए।

$\square \times 3 = 3$ और $3 \times \square = 3$

$-2 \times \square = -2$ और $\square \times -2 = -2$

$\frac{7}{8} \times \square = \frac{7}{8}$ और $\square \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

आपने ऊपर के गुणनफलों में क्या कुछ विशेष देखा?

हम देख सकते हैं कि किसी भी परिमेय संख्या को '1' से गुणा किया जाये तो गुणनफल पुनः वही परिमेय संख्या प्राप्त होती है।

हम कह सकते हैं कि '1' परिमेय संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक है।

उदाहरण के लिए जब $\frac{15}{50}$ को सरल रूप में लिखने के लिए हम निम्न प्रकार से करते हैं।

$$\frac{15}{50} = \frac{3 \times 5}{10 \times 5} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{5} = \frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$$

जहाँ हम लिखते हैं कि $\frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$, वहाँ हम गुणनफल के तत्समक गुण का उपयोग करते हैं।

प्रतिलोम का अस्तित्व

(i) योगात्मक प्रतिलोम

$3 + (-3) = 0$ और $-3 + 3 = 0$

$-5 + 5 = 0$ और $5 + (-5) =$ ______

$\frac{2}{3} + ? = 0$ और $? + \frac{2}{3} = 0$

$\left(-\frac{1}{2}\right) + ? = 0$ और $? + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

पहले उदाहरण में –3 और 3 एक दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम हैं, क्योंकि इनको जोड़ने पर हमें योग '0' प्राप्त होता है। कोई दो संख्याएँ जिनका योग '0' हो, एक दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम कहलाती हैं। सामान्यतः यदि **a** कोई परिमेय संख्या है तो **a + (–a) = 0** और **(–a) + a = 0**.

तो **'a', '-a'** एक दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम हैं।

0 का योगात्मक प्रतिलोम 0 ही रहता है क्योंकि 0 + 0 = 0

(ii) गुणात्मक प्रतिलोम

परिमेय संख्या $\frac{2}{7}$ का किस संख्या से गुणा किया जाए कि गुणनफल 1 प्राप्त हो?

हम देखते हैं $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1$ और $\frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = 1$

नीचे दिए खाली डिब्बे भरिए।

$2 \times \square = 1$ और $\square \times 2 = 1$

$-5 \times \square = 1$ और $\square \times -5 = 1$

$\frac{-17}{19} \times \square = 1$ और $\square \times \frac{-17}{19} = 1$

$1 \times ? = 1$

$-1 \times ? = 1$

कोई दो संख्याएँ जिनका गुणनफल '1' हो, वे एक दूसरे के गुणात्मक प्रतिलोम कहलाते हैं।

उदाहरणतया, $4 \times \frac{1}{4} = 1$ और $\frac{1}{4} \times 4 = 1$, अतः संख्या 4 और $\frac{1}{4}$ एक दूसरे के गुणात्मक प्रतिलोम हैं।

हम कह सकते हैं कि एक परिमेय संख्या $\frac{c}{d}$ दूसरी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम कहलाती है यदि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ और $\frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = 1$

परिमेय संख्या व उनका दशमलव स्वरूप

अगर हमें $\frac{7}{4}, \frac{9}{11}, \frac{7}{6}$ आदि का दशमलव स्वरूप लिखना है तो हम 7 को 4, 9 को 11, 7 को 6 से भाग करेंगे।

$$\begin{array}{r|l} & 1.75 \\ \hline 4 & 7 \\ & 4 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & \;\;20 \\ & \;\;20 \\ \hline & \;\;\;0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.8181 \\ \hline 11 & 9.0 \\ & 88 \\ \hline & \;\;20 \\ & \;\;11 \\ \hline & \;\;\;90 \\ & \;\;\;88 \\ \hline & \;\;\;\;20 \\ & \;\;\;\;11 \\ \hline & \;\;\;\;\;9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 1.1666 \\ \hline 6 & 7 \\ & 6 \\ \hline & 10 \\ & \;\;6 \\ \hline & \;\;40 \\ & \;\;36 \\ \hline & \;\;\;40 \\ & \;\;\;36 \\ \hline & \;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;36 \\ \hline & \;\;\;\;\;4 \end{array}$$

आप भी करें तथा आगे दी गई सारणी से मिलान करें।

1. शेषफल = 3, 2, 0 — भाजक 4
2. शेषफल = 2, 9, 2, 9, 2, 9, ... — भाजक 11
3. शेषफल = 1,4,4,4,4....... — भाजक 6

इन तीनों शेषफलों को देखें। क्या आप इनकी कोई विशेषता दिखा पा रहे हैं?

1. 4 से भाग करने पर शेषफल एक सीमा के पश्चात शून्य हो जाता है।
2. 11 से भाग करने पर बारी–बारी से 2 व 9 शेषफल में आ रहे हैं।
3. 6 से भाग करने पर पहले स्थान के बाद 4 का दोहराव हो रहा है।
4. जब शेषफल का दोहराव हो रहा है तो भागफल में भी दोहराव दिखता है।

   इसे और समझने के लिए हम तालिका बनाते हैं।

संख्या	भागफल	विश्लेषण	निष्कर्ष
$\frac{7}{4}$	1.75	यहाँ दशमलव के दो स्थानों के बाद शेषफल शून्य हो जाता है।	सांत, दशमलव
$\frac{9}{11}$	0.8181.....	यहाँ दशमलव के दो स्थानों के बाद पहले वाले दो स्थानों के अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है।	असांत आवर्ती दशमलव
$\frac{7}{6}$	1.166.........	यहाँ दशमलव के एक स्थान के बाद आने वाली संख्या की पुनरावृत्ति हो रही है।	असांत आवर्ती दशमलव

इस तालिका से हम पाते हैं कि–

संख्या $\frac{7}{4}$ में शेषफल कुछ पदों के बाद शून्य हो जाता है। इसके अन्य उदाहरण $\frac{1}{2}=0.5, \frac{7}{8}=0.875$ आदि हैं। ऐसे दशमलव को सांत दशमलव कहते हैं, जिनमें दशमलव के पश्चात् की संख्याएँ सीमित हैं।

संख्या $\frac{9}{11}, \frac{7}{6}$ में भागफल में एक निश्चित स्थान के बाद पुनरावृत्ति हो रही है। हम $\frac{7}{6}=1.1666...$ को $1.1\overline{6}$ भी लिखते हैं। ऐसे ही $\frac{9}{11}=0.8181...$ को $0.\overline{81}$ लिखेंगे। यह असांत आवर्ती है याने असीमित किंतु दशमलव के कुछ स्थानों के बाद वही टुकड़े दोहराए जा रहे हैं।

करके देखें

1. ऐसी दो परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनका दशमलव रूप असांत आवर्ती हो।
2. ऐसी दो परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनका दशमलव रूप सांत हो।

दशमलव को परिमेय संख्या के सामान्य रूप में लिखना

जब हम दशमलव संख्या को उसके $\frac{p}{q}$ रूप में लिखते हैं तो हम संख्या को बेहतर समझ पाते हैं। हम पहले कुछ आवर्त दशमलव संख्याएँ लेते हैं–

उदाहरण–1. 1.555.......... = $1.\overline{5}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : माना $\frac{p}{q}$ = 1.55555................. (i)

दोनो पक्षों को 10 का गुणा करने पर

$10\frac{p}{q}$ = 15.5555 .... (ii)

समी (ii) से (i) को घटाने पर

$10\frac{p}{q}-\frac{p}{q}$ = (15.55555 .....) – (1.555 ......)

$9\frac{p}{q}=14$

$$\frac{p}{q} = \frac{14}{9}$$

उदाहरण–2. $7.3\overline{456}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : माना $\frac{p}{q} = 7.3\overline{456} = 7.3456456$ ....

दोनों पक्षों को 10 का गुणा करने पर

$$10\frac{p}{q} = 73.456456................ \quad .....(i)$$

दोनों पक्षों को 10000 का गुणा करने पर

$$10000\frac{p}{q} = 73456.456456 \;................. \quad .....(ii)$$

समी. (ii) से (i) को घटाने पर

$$9990\frac{p}{q} = 73383$$

$$\frac{p}{q} = \frac{73383}{9990}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{24461}{3330}$$

करके देखें

निम्नलिखित दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में परिवर्तित कीजिए।

(i) 1.2333....., (ii) 3.88...... (iii) 3.204343........

प्रश्नावली – 2.1

1. निम्नलिखित कथनों के लिए उदाहरण दीजिए।
   (i) एक संख्या जो प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या और पूर्णांक संख्या है।
   (ii) एक संख्या जो पूर्ण संख्या हो परंतु प्राकृत संख्या न हो।
   (iii) एक संख्या जो परिमेय संख्या हो परंतु प्राकृत संख्या न हो।

2. 6 व 7 के बीच 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें।

3. $\frac{4}{7}$ व $\frac{5}{7}$ के बीच 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें।

4. $\frac{2}{3}$ व $\frac{3}{4}$ के बीच 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें।

5. −1 और 2 के बीच किन्हीं 4 परिमेय संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

6. $\frac{5}{10}$ और $\frac{9}{10}$ के बीच की कोई तीन परिमेय संख्या लिखिए।

7. $\frac{7}{3}$ और $-\frac{7}{3}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

8. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में परिवर्तित कीजिए और पता कीजिए कि ये किस तरह के दशमलव रूप में हैं?

   (i) $\frac{126}{5}$ (ii) $\frac{335}{16}$ (iii) $\frac{22}{7}$ (iv) $-\frac{118}{3}$

9. निम्नलिखित दशमलव रूप को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) 0.53 (ii) 16.8 (iii) 105.25 (iv) 7.36

10. निम्नलिखित दशमलव को $\frac{p}{q}$ रूप में परिवर्तित कीजिए।

   (i) $0.\overline{70}$ (ii) $8.\overline{39}$ (iii) $3.12\overline{7}$ (iv) $5.\overline{125}$

अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)

अभी तक हमने परिमेय संख्याओं का दाशमिक रूपांतरण करके देखा जैसे $\frac{9}{18} = 0.5$, $\frac{7}{6} = 1.166......= 1.1\overline{6}$। इन उदाहरणों से यह बात स्पष्ट होती है कि इनका दशमलव प्रसार सांत होता है या असांत आवर्ती होता है। क्या कुछ ऐसी संख्याएँ सोच सकते हैं जो असांत हों पर आवर्ती नहीं?

1.414213 ....

1.7320508 ....

2.2360679774 ....

AQH3QU

जैसा कि आप देख सकते हैं कि उपर्युक्त संख्याओं में दशमलव प्रसार का अंत नही होता तथा पुनरावृति खंड भी नहीं हैं। इन्हें असांत अनावर्ती कहते हैं। ऐसी कुछ संख्याएँ और देखें। इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार $\sqrt{3} = 1.7320508075\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{5} = 2.2360679\ldots\ldots\ldots\ldots$

इन्हें भी $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है। अर्थात् वे संख्याएँ जो पूर्ण वर्ग नहीं होती हैं उनका वर्गमूल अपरिमेय संख्या होती है। याने $\sqrt{4}, \sqrt{36}$ परिमेय संख्या है क्योंकि $\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$ तथा $\sqrt{36} = 6 = \frac{6}{1}$ परन्तु $\sqrt{3}$ व $\sqrt{7}$ परिमेय संख्या नहीं है।

करके देखें

निम्नलिखित संख्याओं में परिमेय संख्या, अपरिमेय संख्या की पहचान कीजिए–

(i) $\sqrt{6}$ (ii) $\sqrt{7}$ (iii) $-\sqrt{25}$ (iv) $-\sqrt{8}$ (v) $\sqrt{9}$ (vi) $\sqrt{\frac{9}{16}}$

π (पाई)

$\pi = 3.14159265389\ldots\ldots\ldots\ldots$

π (पाई) एक अपरिमेय संख्या है जो वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात है।

$$\pi = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{c}{d}$$

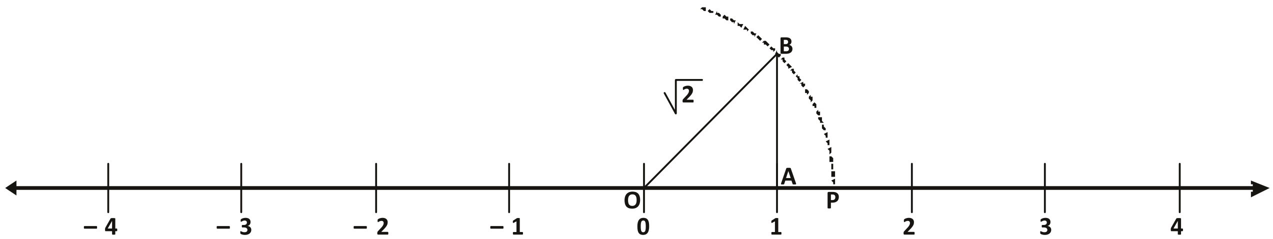
क्या इसका अर्थ यह है कि परिधि या व्यास दोनों में से कम से कम एक संख्या अपरिमेय है या ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसे व्यास में गुणा करने पर परिधि प्राप्त हो। हम प्रायः π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं लेकिन यह π का लगभग मान है।

अपरिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण

हमने देखा कि दो परिमेय संख्याओं के बीच अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। क्या संख्या रेखा पर इन अनेक परिमेय संख्याओं के बाद कोई जगह खाली रह जाती है। अगर अपरिमेय संख्याएँ भी संख्या रेखा पर अंकित हो सकती हैं तो यह मानना पड़ेगा कि परिमेय संख्याएँ पूरी संख्या रेखा को नहीं ढकतीं। हम देखते हैं कि $\sqrt{2}$ का संख्या रेखा पर कैसे स्थान निर्धारित किया जा सकता है।

उदाहरण–3. संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ का स्थान निर्धारण कीजिए।

बिंदु A पर एक लम्ब AB खींचा (चित्र–6)। AB = 1 इकाई लिया व परकार की सहायता से O को केंद्र मानकर OB त्रिज्या लेकर एक चाप खींचा। यह संख्या रेखा को बिंदु P पर काटता है। चूंकि OB मान $\sqrt{2}$ है अतः OP भी $\sqrt{2}$ है। याने संख्या रेखा पर P ऐसा बिंदु है जहाँ $\sqrt{2}$ आएगा। अतः यहाँ कोई भी परिमेय संख्या नहीं आ सकती।



चित्र–6

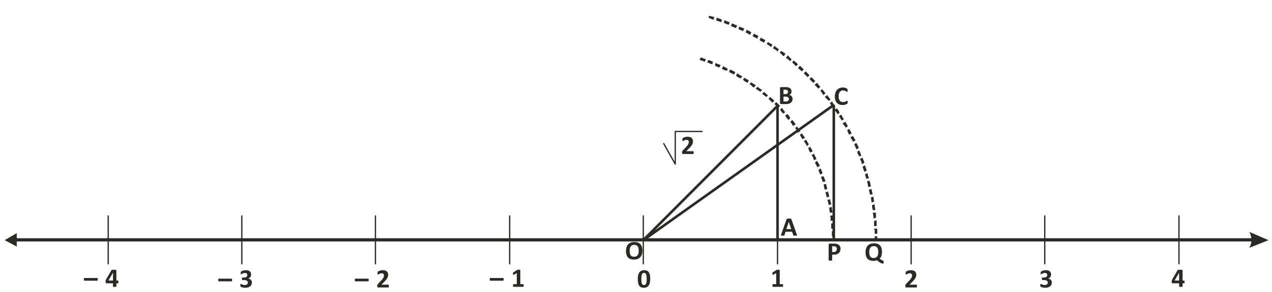
इसी तरह हम संख्या रेखा पर $\sqrt{3}$ का स्थान निर्धारित करते हैं।

संख्या रेखा पर बिंदु A पर एक लंब AB खींचा (चित्र–7), जहां AB = 1 इकाई लिया। O और B को जोड़ा यहाँ $OB = \sqrt{2}$

'O' को केंद्र मानकर OB त्रिज्या का चाप काटा।

यह चाप संख्या रेखा को बिंदु P पर मिलती है। P पर एक लंब CP खींचा जिसमें CP = 1 इकाई। O को C से जोड़ा। O को केंद्र मानकर OC त्रिज्या का चाप काटा जो संख्या रेखा को बिंदु Q पर मिलता है। OQ दूरी, $\sqrt{3}$ को प्रदर्शित करती है।

$\sqrt{3}$ बिंदु Q के संगत है।



चित्र–7

करके देखें

1. निम्नलिखित संख्याएँ परिमेय हैं या अपरिमेय

(i) $\sqrt{81}$ (ii) $-\sqrt{625}$ (iii) $\sqrt{11}$

(iv) $-\sqrt{\frac{81}{25}}$ (v) $3.232323..........$ (vi) $5.7070070007...$

2. $\sqrt{5}, \sqrt{7}$ का संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण कीजिए।

3. संख्या रेखा पर $-\sqrt{2}, -\sqrt{5}$ का स्थान निर्धारित कीजिए।

वास्तविक संख्याएँ

यदि हम सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाते हैं तो क्या संख्या रेखा पर कोई संख्या बची रहेगी? नहीं। परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को मिलाकर जो नया संग्रह प्राप्त होता है वे संख्या रेखा की सभी बिंदुओं को ढँक लेगा। यह बड़ा संग्रह वास्तविक संख्याओं का है।

वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

परिमेय संख्याओं का योग, व्यवकलन, गुणा, भाग की संक्रिया हम करते रहे हैं। हम देख चुके हैं कि परिमेय संख्याओं के योग व गुणा, सदैव परिमेय संख्या होती है। क्या अपरिमेय संख्याओं के बीच भी संक्रिया करने पर सदैव अपरिमेय संख्या प्राप्त होती है?

निम्नलिखित उदाहरण देखिए–

$$\sqrt{5} + \left(-\sqrt{5}\right) = 0$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

इन सब में संक्रिया के बाद प्राप्त हुई संख्या अपरिमेय नहीं है। यानि अपरिमेय संख्याओं का योग, गुणा व भाग सदैव अपरिमेय संख्या नही होती है।

करके देखें

1. आप भी कुछ अपरिमेय संख्याएँ लें और संक्रिया करके जाँचें।

2. कम से कम 5–5 उदाहरण खोजें जहाँ संक्रिया के बाद अपरिमेय संख्याएँ न मिलें। ऐसे भी उदाहरण सोचें जिनमें संक्रिया के बाद अपरिमेय संख्याएँ ही मिलती हैं।

अपरिमेय संख्या पहचानना

हम जानते हैं कि $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ आदि अपरिमेय संख्याएँ हैं। किंतु $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$ परिमेय संख्याएँ हैं, परंतु क्या $5+\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-1$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ और ऐसी अन्य संख्याएँ भी अपरिमेय संख्याएँ हैं? आइए देखें–

हम जानते हैं $\sqrt{2} = 1.41421....$

$\sqrt{3} = 1.73205$

$\sqrt{5} = 2.23606....$

(i) अतः $5+\sqrt{2}=6.41421......$ यह निरूपण असांत है व अनावर्ती है। अतः $\left(5+\sqrt{2}\right)$ परिमेय संख्या नहीं है।

(ii) $\sqrt{3}-1=(1.73205.........)-1$

= 0.73205................ असांत और अनावर्ती दशमलव संख्या है

अतः $\sqrt{3}-1$ अपरिमेय संख्या है।

(iii) $3\sqrt{2} = 3\times(1.41421 \ldots \ldots \ldots \ldots)$

= 4.24263 .... असांत और अनावर्ती दशमलव संख्या है

अतः $3\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

(iv) $\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2.23606.....}{2}$

= 1.11803.............. असांत और अनावर्ती दशमलव संख्या है।

अतः $\frac{\sqrt{5}}{2}$ अपरिमेय संख्या है।

इनसे क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है?

निम्नलिखित उदाहरणों से हम कह सकते हैं कि एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या के बीच योग, अंतर, गुणा और भाग सदैव अपरिमेय संख्या होती है।

माना a तथा b दो धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं। तो

(i) $a\sqrt{b}+c\sqrt{b}=(a+c)\sqrt{b}$

(ii) $a\sqrt{b} - c\sqrt{b} = (a-c)\sqrt{b}$

(iii) $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(iv) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(जहाँ c और d वे धनात्मक वास्तविक संख्या है।)

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(vii) $\left(a+\sqrt{b}\right)\ \left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

करके देखें

1. निम्नलिखित को हल कीजिए।

   (i) $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ (ii) $3\sqrt{6}.2\sqrt{3}$

2. $5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ को $3\sqrt{5}+7\sqrt{3}$ में से घटाओ।

3. $6\sqrt{3}$ को $13\sqrt{3}$ से गुणा करो।

4. निम्नलिखित को हल कीजिए।

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $3\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

कुछ और संक्रियाएँ

जब वास्तविक संख्या में कई हिस्से हों तो उनका जोड़ कैसे होगा।

$a\sqrt{b}+c\sqrt{b}+e\sqrt{b}$ का जोड़ कैसे होगा? यह जोड़ = $(a+c+e)\sqrt{b}$

ऐसे ही और वास्तविक संख्याओं का जोड़ भी कर सकते हैं।

उदाहरण–4. $9\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ में $7\sqrt{3}-5\sqrt{5}$ का योग करो।

हल : $9\sqrt{3}+7\sqrt{5}+7\sqrt{3}-5\sqrt{5}$

$= 9\sqrt{3}+7\sqrt{3}+7\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

$= (9+7)\sqrt{3}+(7-5)\sqrt{5}$

$= 16\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

उदाहरण–5. $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ को $3\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ में से घटाओ।

हल : $3\sqrt{3}-2\sqrt{5}-\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$

$=3\sqrt{3}-2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$

$=(3+2)\sqrt{3}-2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$

$=5\sqrt{3}-2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$

उदाहरण–6. निम्नलिखित को हल कीजिए।

(i) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$ (ii) $2\sqrt{3}\times 7\sqrt{2}$ (iii) $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)$

(iv) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

हल : (i) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{3\times5}=\sqrt{15}$

(ii) $2\sqrt{3}\times7\sqrt{2}=2\times7\sqrt{3\times2}=14\sqrt{6}$

(iii) $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)=4-5=-1$

(iv) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\sqrt{14}+\sqrt{35}+\sqrt{6}+\sqrt{15}$

हर को परिमेय बनाओ

हम $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर दिखा सकते हैं, तब क्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को भी संख्या रेखा पर दिखा सकते हैं?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मान क्या होगा?

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{1.414213}....$

> हर को परिमेय बनाने का अर्थ है 'rationalisation' या परिमेयीकरण

क्या 1 को $\sqrt{2}=1.414213...$ से भाग दे सकते हैं? यह आसान नहीं होगा। क्योंकि $\sqrt{2}$ एक असांत और अनावर्ती दशमलव संख्या है। ऐसी स्थिति में हमें हर के परिमेयीकरण की आवश्यकता होती है।

हर के परिमेयीकरण के लिए $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के अंश और हर में $\sqrt{2}$ का गुणा करेंगे।

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ याने यह $\sqrt{2}$ का आधा है।

क्या हम $\frac{\sqrt{2}}{2}$ को भी संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं?

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ क्योंकि $\sqrt{2}$ का आधा है अतः 0 और 1 के बीच होगा।

उदाहरण–7. $\frac{1}{4-\sqrt{7}}$ के हर का परिमेयीकरण कीजिए।

हल : $\frac{1}{4-\sqrt{7}} = \frac{1}{4-\sqrt{7}} \times \frac{4+\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$ [$(a-\sqrt{b})$ का परिमेयकारी गुणक $(a+\sqrt{b})$]

$$= \frac{4+\sqrt{7}}{(4)^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{4+\sqrt{7}}{16-7}$$

$$= \frac{4+\sqrt{7}}{9}$$

उदाहरण–8. $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयीकरण कीजिए।

हल : $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \times \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ [$(a-\sqrt{b})$ का परिमेयकारी गुणक $(a+\sqrt{b})$]

$$= \frac{3\times3-3\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\times3+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{(3)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{9-6\sqrt{2}+2}{9-2}$$

$$= \frac{11-6\sqrt{2}}{7}$$

करके देखें

1. हर को परिमेय बनाइए

(i) $\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$

प्रश्नावली – 2.2

AR5YSH

1. सरल कीजिए –

(i) $7\sqrt{3}+11\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{7}-2\sqrt{7}$

2. $2\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ और $5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ का योग कीजिए।

3. $3\sqrt{5}+5\sqrt{7}$ को $8\sqrt{7}-5\sqrt{5}$ से घटाओ।

4. सरल कीजिए।

(i) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ (ii) $(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})$

(iii) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{8})$ (vi) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$

5. हरों का परिमेयीकरण कीजिए।

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$

6. यदि a व b दो परिमेय संख्याएँ हैं तो निम्नलिखित समीकरण में a और b का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{6+\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$ (ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=a+b\sqrt{15}$

7. सरल कीजिए–

(i) $\frac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

8. यदि $x=3-2\sqrt{2}$ तो $x+\frac{1}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. कोई संख्या परिमेय संख्या कहलाती है यदि इसे $\frac{p}{q}, (q \neq 0)$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ p और q पूर्णांक हैं।
2. कोई संख्या अपरिमेय संख्या (s) कहलाती है, यदि इसे $\frac{p}{q}, (q \neq 0)$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं।
3. दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए दोनो परिमेय संख्याओं का औसत (माध्य) लेते हैं।
4. दो परिमेय संख्याओं के बीच इतनी अधिक परिमेय संख्याएँ होती हैं कि हम उन्हें गिन कर नहीं बता सकते हैं।
5. एक परिमेय सख्ंया का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या असांत आवर्ती होता है।
6. एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती होता है।
7. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$ संख्या अपरिमेय संख्याएँ हैं।
8. सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर वास्तविक संख्याओं का संग्रह प्राप्त होता है।
9. संख्या रेखा के प्रत्येक बिंदु के संगत एक अद्वितीय वास्तविक संख्या होती है साथ ही प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत संख्या रेखा पर एक बिंदु होता है।
10. एक परिमेय व एक अपरिमेय संख्या को आपस में जोड़ा जाएँ, घटाया जाए, गुणा किया जाए व भाग किया जाए तो मान अपरिमेय संख्या प्राप्त होता है।
11 $\frac{1}{\sqrt{a}-b}$ के हर का परिमेयीकरण करने के लिए इसे हम $\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}+b}$ से गुणा करते हैं, जहां a और b पूर्णांक हैं।

घातांक

[EXPONENT]

03

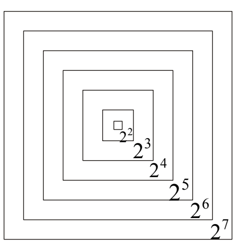
निधि, मयंक और रेशमी संख्याओं से जुड़ी पहेलियाँ पूछ रहे थे–

निधि– दस हजार को एक लाख से गुणा करें तो कौन सी संख्या मिलेगी?

रेशमी– सौ करोड़ याने 1 अरब। इस संख्या में कितने शून्य होंगे?

मयंक– 9 शून्य होंगे। क्योंकि दस हजार याने 10^4 और 1 लाख याने 10^5 या $(10^4 \times 10^5 = 10^9)$

मयंक– अब मेरी बारी, 7 बॉक्स का एक डिब्बा है। हर छोटा बॉक्स दूसरे के अंदर है। पहले छोटे वाले में 2 मोती हैं और हर अगले बॉक्स में उससे दुगुने मोती हैं, तो 7वें बॉक्स में कितने होंगे? ये बहुत कठिन है इसमें तुम्हें बहुत समय लगेगा।



निधि– क्यों? 7 बॉक्स है और संख्या दुगुनी हो रही है इसका मतलब की $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$ याने $2^7 = 128$ होगी।

रेशमी– पर यह भी पता करो कि कुल कितने मोती हैं?

आपस में चर्चा कीजिए व कुल मोती कितने हैं, लिखिए।

करके देखें

1. शतरंज के एक खाने में चावल के चार दाने हैं, दूसरे में उसके चार गुने, तीसरे में दूसरे के चार गुने चावल हो जाते हैं तो बताओ चौथे में कितने दाने हैं? इसे घातांक रूप में लिखिए।
2. हल कीजिए–

   (i) $3^5 \times 3^7$ (ii) $17\times17\times17\times17$ (iii) $5\times3\times3\times3\times3$

   (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$ (v) $\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$
3. सूर्य से पृथ्वी की दूरी लगभग 150000000 किलोमीटर है इसे 10 के घातांक के रूप में लिखिए?

   आप भी ऐसे तीन सवाल बनाइए व दूसरों को हल करने के लिए दीजिए।

घातांक के नियम (Laws of Exponent)

यदि a एक वास्तविक संख्या व m, n पूर्णांक संख्या है तो

1. गुणा का नियम $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2. भाग का नियम $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

3. घातों की घात का नियम $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(ab)^m = a^m \times b^m$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

6. a^0 का अर्थ

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ जहाँ $a \neq 0$

यदि $m = n$ हो, तो

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$

$1 = a^0$

अतः $a^0 = 1$

7. $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$ या $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

उदाहरण–1. सरल कीजिए–

(i) $3^5 \times 9^4$ (ii) $(4\times3)^4 \times \left(\frac{2}{4}\right)^6$ (iii) $\frac{(6^2)^4 \times 6^5}{6^4}$

हल : (i) $3^5 \times 9^4$

$= 3^5 \times (3^2)^4 = 3^5 \times 3^{2\times4}$ $[(a^m)^n = a^{m\times n}]$

$= 3^5 \times 3^8 = 3^{(5+8)}$ $[a^m \times a^n = a^{m+n}]$

$= 3^{13}$

(ii) $(4 \times 3)^4 \times \left(\frac{2}{4}\right)^6$

$$= \left(4^4 \times 3^4\right) \times \frac{2^6}{4^6} \qquad \because \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right] \text{ और } \left[(ab)^m = a^m \times b^m\right]$$

$$= \left((2^2)^4 \times 3^4\right) \times \frac{2^6}{(2^2)^6}$$

$$= (2^{2\times4} \times 3^4) \times \frac{2^6}{2^{2\times6}} \qquad \left[(a^m)^n = a^{m\times n}\right]$$

$$= 2^8 \times 3^4 \times \frac{2^6}{2^{12}} = 2^8 \times 3^4 \times 2^{6-12} \qquad \left[\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$$

$$= 2^8 \times 3^4 \times 2^{-6}$$

$$= 2^{8-6} \times 3^4 = 2^2 \times 3^4 \qquad \left[a^m \times a^n = a^{m+n}\right]$$

(iii) $\frac{\left(6^2\right)^4 \times 6^5}{6^4} = \frac{6^{2\times4} \times 6^5}{6^4} \qquad \left[(a^m)^n = a^{m\times n}\right]$

$$= \frac{6^8 \times 6^5}{6^4} = \frac{6^{8+5}}{6^4} = \frac{6^{13}}{6^4} \qquad \left[a^m \times a^n = a^{m+n}\right]$$

$$= 6^{13-4} = 6^9 \qquad \left[\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$$

करके देखें

निम्नलिखित को सरल कीजिए—

(i) $\frac{5^4 \times 5^6}{5^3}$ (ii) $\frac{(2^2)^3 \times 8^7}{4^4}$

(iii) $\frac{(9 \times 3)^8}{(3)^5}$ (iv) $(3 \times 2)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6$

ऋणात्मक घातांकों की घात

हम जानते हैं कि घातांक में संख्याओं को घात के रूप में लिखते हैं–

जैसे–

1 किलोमीटर	= 1000 मी.	= 10^3 मी.
1 हेक्टोमीटर	= 100 मी.	= 10^2 मी.
1 डेकामीटर	= 10 मी.	= 10^1 मी.
1 मीटर	= 1 मी.	= ?

यहाँ हम संख्या को 10 की घात के मानक रूप में व्यक्त कर रहे हैं।

यदि हमारे पास इकाई से छोटी संख्याएँ है तो उन्हें हम किस रूप में लिखेंगे–

इससे पहले निम्नलिखित पैटर्न को देखें–

1 डेसीमीटर $= \frac{1}{10}$ मीटर $= 10^{-1}$ मीटर

1 सेंटीमीटर $= \frac{1}{100}$ मीटर $= 10^{-2}$ मीटर

1 मिलीमीटर $= \frac{1}{1000}$ मीटर $= 10^{-3}$ मीटर

ऊपर दिखाए अनुसार हम लिख सकते हैं कि $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10\times10} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{10\times10\times10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

याने $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$

तब क्या $\frac{1}{10^{-n}} = 10^n$ होगा? चर्चा करो।

4^{-3} को हम $\frac{1}{4^3}$ लिखते हैं। इसी तरह से हम लिख सकते हैं–

$$5^{-6} = \frac{1}{5^6}$$

कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं–

$$\frac{1}{6^{-3}} = 6^3$$

$$\frac{1}{9^2} = 9^{-2}$$

$$3^3 = \frac{1}{3^{-3}}$$

ऊपर के उदाहरणों से हम यह परिणाम प्राप्त कर सकते हैं–

$$1 = 6^3 \times 6^{-3}$$

$$1 = 9^2 \times 9^{-2}$$

$$3^3 \times 3^{-3} = 1$$

इन उदाहरणों से हम कह सकते हैं कि शून्येतर परिमेय संख्या 'a' के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ है जो कि a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

क्योंकि $a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$, जहाँ '$m$' पूर्णांक संख्याएँ है।

करके देखें

1. निम्नलिखित संख्याओं को घातांक रूप में लिखें–

   (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{243}$ (iii) $\frac{1}{196}$

2. निम्नलिखित के गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए–

   (i) 10^{-5} (ii) $\frac{1}{2^3}$ (iii) P^{-n} (iv) 5^{-7}

3. सरल कीजिए और कारण बताइए–

   (i) $\left((5^2)^3 \times 5^4\right) \div 5^6$ (ii) $2^2 \times \frac{3^2}{2^{-2}} \times 3^{-1}$ (iii) $(14^{-2} \times 13^{-2}) \div 6^{-1}$

उदाहरण–2. निम्नलिखित को सरल कीजिए–

(i) $3^4 \times 3^{-8}$ (ii) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$

हल : (i) हम जानते हैं– $3^{-8} = \frac{1}{3^8}$ $\left[a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right]$

अतः $3^4 \times 3^{-8} = 3^4 \times \frac{1}{3^8} = \frac{3^4}{3^8}$

$= 3^{4-8} = 3^{-4}$

(ii) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^3} \times \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2)^{3+4}}$

$= \frac{1}{(-2)^7} = (-2)^{-7}$

उदाहरण–3. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) 5^{-2} (ii) $\frac{1}{2^{-5}}$ (iii) $\frac{4^7}{4^4}$

हल : (i) $5^{-2} = \frac{1}{(5)^2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$

(ii) $\frac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

(iii) $\frac{4^7}{4^4} = 4^{7-4} = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

उदाहरण–4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ (ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

हल : (i) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{(4)^{-3}}{(7)^{-3}} = 4^{-3} \times \frac{1}{7^{-3}}$ $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right]$

$$= \frac{7^3}{4^3} \quad \left[a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ or } a^m = \frac{1}{a^{-m}}\right]$$

$$= \frac{7 \times 7 \times 7}{4 \times 4 \times 4} = \frac{343}{64}$$

(ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

$$= \frac{4^4 \times 4^0}{16^2} \qquad \left[a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right]$$

$$= \frac{4^4 \times 4^0}{(4^2)^2}$$

$$= \frac{4^4 \times 4^0}{4^4} \qquad \left[(a^m)^n = a^{m \times n}\right]$$

$$= 4^{4+0-4} = 4^0$$

$$= 1$$

उदाहरण–5. सरल कीजिए– $\left[\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$

हल : $\left[\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$ $\left[\text{हम जानते है } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right]$

$$= \left[\left(\frac{1^{-3}}{3^{-3}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right) \div \frac{1^{-2}}{5^{-2}}\right] \qquad \left[\text{हम जानते है } a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ और } a^m = \frac{1}{a^{-m}}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{3^3}{1^3} - \frac{2^3}{1^3}\right) \div \frac{5^2}{1^2}\right] = \left(\frac{27}{1} - \frac{8}{1}\right) \div 25$$

$$= (27 - 8) \div 25 = \frac{19}{25}$$

उदाहरण–6. सरल कीजिए– $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$

हल : $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{-2} \quad \left\{\because \frac{25}{4} = \frac{5\times5}{2\times2} = \frac{5^2}{2^2}\right\} \quad \left[\because (a^m)^n = a^{mn}\right]$$

$$= \frac{5^3}{2^3} \times \frac{2^4}{5^4} = 5^{3-4} \times 2^{4-3} \qquad \left[\text{जैसे } \frac{1}{a^m} = a^{-m} \text{ और } \frac{1}{a^{-m}} = a^m\right]$$

$$= 5^{-1} \times 2^1 = \frac{2}{5}$$

उदाहरण–7. यदि $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ तो x^{-2} का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{2^{-4}}{3^{-4}} \quad \left[\text{हम जानते है } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right]$$

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^{2+4}}{2^{2+4}} = \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x^{-2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-12}$$

$$x^{-2} = \frac{3^{-12}}{2^{-12}} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

उदाहरण–8. सरल कीजिए–

(i) $\dfrac{3^{2m+1} \times 9^{3m}}{3^{4m+1}}$ (ii) $\dfrac{x^{a+b} y^{a-b}}{x^{a+2b} y^{a-2b}}$

हल : (i) $\frac{3^{2m+1} \times 9^{3m}}{3^{4m+1}}$

$= \frac{3^{2m+1} \times (3^2)^{3m}}{3^{4m+1}}$

$= \frac{3^{2m+1} \times 3^{6m}}{3^{4m+1}} = \frac{3^{2m+1+6m}}{3^{4m+1}}$

$= \frac{3^{8m+1}}{3^{4m+1}} = 3^{8m+1-4m-1}$

$= 3^{4m}$

(ii) $\frac{x^{a+b} y^{a-b}}{x^{a+2b} y^{a-2b}}$

$= x^{a+b} \times y^{a-b} \times x^{-(a+2b)} \times y^{-(a-2b)}$

$= x^{a+b-a-2b} \times y^{a-b-a+2b}$

$= x^{-b} \times y^{b}$

$= \frac{1}{x^b} \times y^b = \left(\frac{y}{x}\right)^b$

दशमलव संख्या का विस्तारित रूप

संख्या 328 का विस्तारित रूप निम्नलिखित होगा–

$328 = 300 + 20 + 8$

$= 3 \times 100 + 2 \times 10 + 8 \times 1$

$= 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

इसी तरह $4158 = 4 \times 1000 + 1 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1$

$= 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

इस तरह हम संख्या 132.28 को घातांक के विस्तारित रूप में लिखें तो–

$$132.28 = 1 \times 100 + 3 \times 10 + 2 \times 10^0 + 2 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{100}$$

$$= 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$$ होगा।

करके देखें

निम्नलिखित संख्याओं को घातांक के विस्तारित रूप में लिखिए।

(i) 15.1 (ii) 512.23

(iii) 537.204 (iv) 205.003

बहुत बड़ी संख्याओं और बहुत छोटी संख्याओं का मानक निरूपण

बड़ी संख्या जैसे– सूर्य का व्यास लगभग 14000000000 मी. है जिसे मानक रूप में 1.4×10^{10} मी. लिखते हैं। यहाँ संख्या 10 की घात में आएगी। इसी प्रकार 6.2×10^5 मी. को सामान्य रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करेंगे– 6.2×100000 मी. = 620000 मी.

इसी प्रकार बहुत छोटी संख्याओं जैसे– एक इलेक्ट्रॉन का आवेश 0.00000000000000000016 कूलॉम होता है तो हम इलेक्ट्रोन के आवेश को घातांक के रूप में 1.6×10^{-19} कूलॉम लिखते हैं।

यहाँ हम संख्याओं को 10 के घात के रूप में लिखते हैं और इस तरह बड़ी और छोटी संख्याओं, दोनों का मानक निरूपण करते हैं।

बहुत बड़ी व बहुत छोटी संख्याओं के बीच तुलना

सूर्य व पृथ्वी के बीच की दूरी 1.496×10^{11}m है और पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 3.84×10^8m है। जब सूर्यग्रहण के दौरान चंद्रमा, पृथ्वी और सूर्य के बीच आ जाता है तो इस समय चंद्रमा और सूर्य के बीच की दूरी कितनी होगी?

$$= 1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^8$$

$$= 1.496 \times 1000 \times 10^8 - 3.84 \times 10^8$$

$$= (1496 - 3.84) \times 10^8 \text{ m}$$

$$= 1492.16 \times 10^8 \text{ m}$$

उदाहरण–9. निम्नलिखित को मानक रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) 40600000000 (ii) 2150000000000

हल : (i) 4.06×10^{10}

(ii) 2.15×10^{12}

उदाहरण–10. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) 3×10^{-8} (ii) 4.37×10^{-5}

हल : (i) 3×10^{-8}

$$=\frac{3}{10^8}=\frac{3}{100000000}=0.00000003$$

(ii) 4.37×10^{-5}

$$=\frac{4.37}{10^5}=\frac{4.37}{100000}=0.0000437$$

प्रश्नावली – 3.1

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ (ii) $\frac{1}{3^{-4}}$ (iii) $\frac{6^7}{2^3\times3^7}$

2. निम्नलिखित को सरल कीजिए–

(i) $(-4)^3\times(-2)^{-3}$ (ii) $(-3)^4\times\left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iii) $(-5)^3\div(5)^{-7}$

3. सरल कीजिए–

(i) $\frac{16\times t^{-3}}{4^{-3}\times8\times t^{-6}}$ $(t\neq0)$ (ii) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$

4. सिद्ध कीजिए–

(i) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}\times\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c}\times\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}=1$

(ii) $\frac{1}{1+x^{m-n}}+\frac{1}{1+x^{n-m}}=1$

5. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।
   (i) 0.00000000000852 (ii) 8020000000000000
   (iii) 41960000000
6. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए।
   (i) 5.02×10^{-6} (ii) 7×10^{-8}
   (iii) 1.00001×10^{9}
7. निम्नलिखित कथनों में संख्या को मानक रूप में लिखिए–
   (i) लाल रक्त कोशिकाओं का आकार 0.000007m होता है।
   (ii) पृथ्वी का व्यास 12756000m है।
   (iii) कागज़ की मोटाई 0.08m है।

धनात्मक परिमेय घातांक

हम जानते हैं कि $2^3 = 8$ है।

इसे हम ऐसे भी लिखते हैं– $8^{\frac{1}{3}} = 2$

इसी प्रकार $5^3 = 125$ को हम $(125)^{\frac{1}{3}} = 5$ भी लिख सकते हैं।

व्यापक रूप में यदि x व y दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं और किसी धनात्मक पूर्णांक m के लिए $x^m = y$ है तो $x = y^{\frac{1}{m}}$ भी लिख सकते हैं। $y^{\frac{1}{m}}$ को $\sqrt[m]{y}$ भी लिख सकते हैं।

$\sqrt[m]{y}$ को हम y का m वाँ मूल कहते हैं।

जैसे 9 का दूसरा मूल = $\sqrt{9} = \sqrt[2]{9} = 3$

अन्य उदाहरण देखें तो यदि किसी घन का आयतन 64 घन इकाई है तो उसकी भुजा $64^{\frac{1}{3}}$ इकाई होगी याने

64 का तीसरा मूल = $\sqrt[3]{64} = 4$ इकाई,

अर्थात् घन की भुजा 4 इकाई होगी।

625 का चौथा मूल = $\sqrt[4]{625} = 5$

इस प्रकार हम x^m को किसी धनात्मक परिमेय घातांक m के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

'दूसरे मूल' को 'वर्गमूल' और 'तीसरे मूल' को 'घनमूल' भी कहते हैं।

यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा $m = \frac{P}{q}$ एक धनात्मक परिमेय घातांक हैं, तो $x^{\frac{p}{q}}$ को हम x^p के q वें मूल के रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

जैसे– यदि किसी गोले का आयतन $\frac{4}{3}\pi \times (125)$ है याने $r^3 = 125$ है तो उसकी त्रिज्या होगी–

$$r = \sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}}$$

त्रिज्या $r = 5^{3/3} = 5^1 = 5$

अर्थात् $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$

उदाहरण के लिए हम $(8)^{\frac{5}{3}}$ को विभिन्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं।

$(8)^{\frac{5}{3}}$ या $(8^5)^{\frac{1}{3}}$ या $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5$ या $\left(2^{3\times\frac{1}{3}}\right)^5$

या 2^5 या 32

अर्थात् यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है तो किसी भी धनात्मक परिमेय घातांक $\frac{p}{q}$ के लिए $\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

उदाहरण–11. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $(27)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}}$

हल : (i) $(27)^{\frac{2}{3}} = \left(27^2\right)^{\frac{1}{3}} = (729)^{\frac{1}{3}}$

$= (3\times3\times3\times3\times3\times3)^{\frac{1}{3}}$

$= 3^{6\times\frac{1}{3}} = 3^2 = 9$

या $\quad (27)^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2$

$$= \left(3^{3\times\frac{1}{3}}\right)^2 = (3)^2 = 9$$

(ii) $\quad \left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left\{\left(\frac{2\times2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3\times3}\right)^{\frac{1}{5}}\right\}^4$

$$= \left\{\left(\frac{2^5}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}\right\}^4 = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{5\times\frac{1}{5}}\right\}^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \frac{16}{81}$$

या $\quad \left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{32}{243}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}}$

$$= \left[\left(\frac{2^5}{3^5}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}} = \left[\frac{2^{5\times4}}{3^{5\times4}}\right]^{\frac{1}{5}}$$

$$= \left(\frac{2^{20}}{3^{20}}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{2^4}{3^4}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

दोनों उदाहरणों को हमने दोनों रूपों में हल किया। आपके अनुसार जो रूप अधिक सुविधाजनक है उसे तय कीजिए।

घातांक के नियम परिमेय घातांकों के लिए भी लागू होते हैं। आइए, इसे देखते हैं–

प्रथम विधि $\quad \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

या $$\left\{\frac{2}{5}\right\}^{2\times\frac{1}{2}} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\not{2}\times\frac{3}{\not{2}}}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5} = \frac{16}{625}$$

द्वितीय विधि $$\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1+3}{2}} = \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{\not{4}^{2}}{\not{2}}} = \left(\frac{4}{25}\right)^2$$

$$= \frac{4\times4}{25\times25} = \frac{16}{625}$$

दोनों विधियों से हमें मान समान प्राप्त होता है, अतः $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$ है।

परिमेय घातांक, घातांकों के नियम $x^m \times x^n = x^{m+n}$ का पालन करता है।

क्या $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$ होता है, आइए जाँच करें–

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{5}{4}} \div \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{3}{4}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\not{4}\times\frac{5}{\not{4}}} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{\not{4}\times\frac{3}{\not{4}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\not{4}\times\frac{2}{\not{4}}}$$

$$\left(\frac{2^5}{3^5}\right) \div \left(\frac{2^3}{3^3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{2^5}{3^5}\times\frac{3^3}{2^3}\right)=\left(\frac{2^2}{3^2}\right)$$

$$\left(\frac{2^{5-3}}{3^{5-3}}\right)=\left(\frac{2^2}{3^2}\right)$$

$$\left(\frac{2^2}{3^2}\right)=\left(\frac{2^2}{3^2}\right) \qquad \text{R.H.S.} = \text{L.H.S.}$$

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}}\div\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$$

अतः यह घातांकों के नियम $x^m \div x^n = x^{m-n}$ का पालन करता है।

उदाहरण–12. निम्न के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}}\times\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{7}{3}}\div\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{5}{3}}$

हल : (i) परिमेय संख्याओं के नियम $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$$=\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{\not{6}\,2}{\not{3}}}=\left(\frac{8}{125}\right)^{2}$$

$$=\frac{8}{125}\times\frac{8}{125}=\frac{64}{15625}$$

(ii) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{7}{3}}\div\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{5}{3}}$

$$=\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{7-5}{3}}=\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{3\times\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\frac{3\times3}{4\times4}=\frac{9}{16}$$

करके देखें

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}}$ (ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$ (iii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$ (iv) $8^{\frac{2}{3}}$

कौनसी संख्या बड़ी है?

27 और 16 में 27 बड़ी है, परन्तु $\sqrt{16}$ और $\sqrt[3]{27}$ में कौनसी संख्या बड़ी है?

$\sqrt{16} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}}$

याने $\sqrt{16} = 2 \times 2$

$= 4$

और $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\underline{3\times3\times3}}$

याने $\sqrt[3]{27} = 3$

अतः $\sqrt{16} > \sqrt[3]{27}$

इसी तरह,

$\sqrt[6]{64}$ बड़ी है अथवा $\sqrt[3]{125}$

$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{\underline{2\times2\times2\times2\times2\times2}}$

$= 2$

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5\times5\times5}$

$= 5$

करके देखें

इनमें से कौनसी संख्या बड़ी है?

(i) $\sqrt[3]{125}, \sqrt{36}$

(ii) $\sqrt{121}, \sqrt[3]{729}$

(iii) $\sqrt[4]{625}, \sqrt[5]{1024}$

(iv) $\sqrt[3]{125}, \sqrt[3]{729}, \sqrt[5]{1024}, \sqrt{36}$ को अवरोही क्रम लिखिए।

ARXLXF

करणी (Surds)

एक अपरिमेय संख्या $\sqrt[p]{a}$ करणी कहलाती है, जहाँ a एक धनात्मक परिमेय संख्या है। $\sqrt{\ }$ चिह्न को करणी चिह्न कहते हैं। p को करणी का घातांक और a को करणीगत राशि कहते हैं।

$\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं, जबकि $\sqrt[3]{8}$ एक परिमेय संख्या है क्योंकि $\sqrt[3]{8} = 2$ । $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ में करणीगत राशि क्रमशः 5, 3, 2 धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं। इसलिए $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ करणी हैं। $\sqrt[3]{8}$ में करणीगत राशि धनात्मक परिमेय संख्या है परंतु $\sqrt[3]{8}$ अपरिमेय नहीं है इसलिए $\sqrt[3]{8}$ करणी नहीं है।

क्या $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ करणी है?

चूंकि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है और 2 परिमेय संख्या है। चूंकि अपरिमेय संख्या और परिमेय संख्या का जोड़ अपरिमेय संख्या होती है। इसलिए $2+\sqrt{3}$ भी एक अपरिमेय संख्या है। $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ में करणीगत राशि अपरिमेय है अतः यह करणी नहीं है।

उदाहरण–13. इनमें से कौनसी करणी है?

(i) $\sqrt[3]{5+\sqrt{9}}$ (ii) $\sqrt{\sqrt{3}}$

हल : (i) $\sqrt[3]{5+\sqrt{9}}$

$= \sqrt[3]{5+3}$

$= \sqrt[3]{8}$

$= \sqrt[3]{2^3}$

$= 2^{3\times\frac{1}{3}}$ $\left[\sqrt[m]{y} = y^{\frac{1}{m}}\right]$

$= 2$

चूंकि $\sqrt[3]{5+\sqrt{9}} = 2$ परिमेय संख्या है अतः यह करणी नहीं है।

(ii) $\sqrt{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3^{\frac{1}{2}}}$

$$= \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt[4]{3}$$

चूंकि $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$

अतः यह करणी है।

करके देखें

1. $\sqrt{3+\sqrt{16}}, \sqrt{\sqrt{16}}, \sqrt{3+\sqrt{2}}$ में करणी पहचानें व अपने चुनाव का कारण लिखें।
2. 3 ऐसी संख्याएँ लिखें जो अपरिमेय है किन्तु करणी नहीं है।

प्रश्नावली – 3.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $(16)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(243)^{\frac{1}{5}}$ (iii) $(15625)^{\frac{1}{6}}$

2. निम्नलिखित को सरल कीजिए–

   (i) $23^{\frac{1}{2}} \times 23^{\frac{3}{2}}$ (ii) $11^{\frac{4}{3}} \times 11^{\frac{5}{3}}$

   (iii) $21^{\frac{7}{3}} \div 21^{\frac{1}{3}}$ (iv) $15^{\frac{3}{2}} \div 15^{\frac{5}{2}}$

AS7HZ3

3. मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $\left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{4}{3}} \div \left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{4}{3}} \div \left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{5}{3}}$

   (iii) $3 \times 9^{\frac{1}{2}} \div 9^{\frac{3}{2}}$ (iv) $27^{\frac{2}{3}} \div 27^{\frac{1}{3}} \times 27^{\frac{4}{3}}$

4. निम्नलिखित करणियों को आरोही क्रम में लिखिए–

(i) $\sqrt{81}, \sqrt[3]{64}, \sqrt[9]{512}$ (ii) $\sqrt[4]{625}, \sqrt{100}, \sqrt[3]{343}$

(iii) $\sqrt[3]{216}, \sqrt[5]{243}, \sqrt{64}$ (iv) $\sqrt[4]{256}, \sqrt[7]{128}, \sqrt[3]{1000}$

5. निम्नलिखित में से कौनसी करणी है और कौनसी नहीं।

(i) $\sqrt{8}$ (ii) $\sqrt[3]{64}$ (iii) $\sqrt{90}$

(iv) $\sqrt{5+\sqrt{2}}$ (v) $\sqrt[5]{2+\sqrt{4}}$

हमने सीखा

1. एक ही संख्या को जितनी बार गुणा करते हैं, उसे घात के रूप में लिखते हैं एवं वह संख्या आधार कहलाती है, जैसे– 3^6 में 6 घात एवं 3 आधार है।
2. घातांक, बड़ी संख्याएं या छोटी संख्याओं को संक्षिप्त या मानक रूप में लिखने की विधि है।
3. गुणात्मक प्रतिलोम– 2^3 का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{2^3}$ या 2^{-3} होता है।
4. घातांक के नियम–

   $x^m \times x^n = x^{m+n}$ $x^m \div x^n = x^{m-n}$

   $(x^m)^n = x^{mn}$ $x^m \times y^m = (xy)^m$

   यहाँ x व y शून्येतर परिमेय संख्याएं है तथा m व n परिमेय घातांक है।
5. परिमेय घातांक के नियम पूर्णांक घातांक के नियम की तरह ही लागू होते हैं।

बहुपद

[POLYNOMIALS]

ASGE1Q

04

अंक व संख्याएँ (Digit and Numbers)

आप अध्याय–4 पढ़ रहे हैं। गोमती की उम्र 14 वर्ष है। पिछले दिनों रात का तापमान 10° सेल्सियस था। आमगांव की आबादी 6000 है। एक बोरी में 30 किलोग्राम चावल है। पृथ्वी से मंगल ग्रह की दूरी 54.6 मिलियन किलोमीटर है। प्रकाश की गति 186000 मील प्रति सेकण्ड है, ऐसी अनेक बातें बातचीत का हिस्सा होती हैं।

इन सभी कथनों में 4, 14, 10, 6000, ... आदि संख्याएँ हैं जो 0, 1,2, ..., 5, ...9 अंकों की मदद से लिखी गई हैं। इन्हें अन्य प्रकार के संख्या संकेतों (I, II, ... IX, X, ...) की मदद से या किसी और संख्या पद्धति में भी लिखा जा सकता है। क्या आप किसी और तरह से भी संख्याओं को व्यक्त करने के उदाहरण दे सकते हैं?

कुछ और गणितीय कथन (Some More Mathematical Statements)

ऊपर के सभी कथनों में हमने दूरी, धारिता, आयु, ताप, आबादी, गति आदि को अंकों व अंक पद्धति का उपयोग कर संख्या को व्यक्त किया।

हम कुछ और तरह के कथनों का भी उपयोग करते हैं, जैसे–

- किसी वर्ग की भुजा a है तो उसका परिमाप $4a$ होगा।
- एक आयत की लंबाई l और चौड़ाई b है, इसका क्षेत्रफल व परिमाप पता करो।
- "पिता की आयु पुत्र की आयु के दुगने से 6 वर्ष अधिक है" इस कथन को $x = 2y + 6$ लिखते हैं।
- मूलधन, ब्याज आदि के बीच संबंध साधारण ब्याज $= \dfrac{\text{मू.} \times \text{द.} \times \text{स.}}{100}$
- दो रेखाएँ एक–दूसरे से θ कोण बनाती हैं।

इन सभी उदाहरणों में $a, l, b, x, y,$ मू., द., स., θ आदि भी किसी न किसी संख्या को प्रदर्शित करते हैं। इन्हें 'अक्षर संख्याएँ' कहते हैं।

क्या ऊपर बताई गई दोनों प्रकार की संख्याओं, अंकों में लिखी व अक्षर संख्याओं में व्यक्त संख्याओं में कोई फर्क दिखाई पड़ता है?

क्या कुछ ऐसी अक्षर संख्याएं भी हैं जिनके संख्यात्मक मान निश्चित हैं?

एक ऐसी संख्या π है;

यदि किसी वृत्त का व्यास D है तो उसकी परिधि P को हम $P = \pi D$ लिखते हैं। यहाँ अलग–अलग वृत्तों के लिए D के मान अलग–अलग होंगे और इसलिए P के मान भी। लेकिन π का मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 ही होता है।

क्या कोई ऐसी और भी अक्षर संख्या आप जानते हैं?

एक फर्क तो यह है कि 5, 14, 10 आदि को अंकों में लिखा गया है जबकि a, l, b, x, y, द, स, θ आदि को वर्णमाला के अक्षरों से व्यक्त किया गया है।

दूसरा अंतर यह है कि पहले प्रकार की प्रत्येक संख्या का एक निश्चित मान है जबकि अक्षर संख्या के मान अलग–अलग संदर्भों में अलग–अलग हो सकते हैं।

क्या कोई बात इनमें समान भी है?

सोचिए, आप कहाँ–कहाँ अक्षर संख्याओं का उपयोग करते हैं?

क्या अक्षर संख्याओं में भी जोड़ने, घटाने, गुणा–भाग की संक्रियाएं हो सकती हैं?

इन सवालों पर अपने साथियों से चर्चा कर सकते हैं।

बीजीय व्यंजक और उनके पद (Algebraic Expression and their terms)

पिछली कक्षाओं में संख्याओं के कई उदाहरण आपने देखे होंगे जिनमें अक्षर संख्याएँ उपयोग में आईं–

जैसे, $4a,\ \frac{\sqrt{3}a^2}{4},\ a+b+c,\ \frac{4}{3}\pi r^3,\ x^2+2x+3, (x+3), \sqrt{\frac{x}{y}},\ m-9,\ 2p+q$

इनमें से प्रत्येक को हम **बीजीय व्यंजक** के रूप में पहचानते हैं।

इनमें कुछ एक पद वाले, कुछ दो पद वाले, कुछ तीन पद वाले बीजीय व्यंजक हैं,

जैसे– $4a,\ \frac{\sqrt{3}a^2}{4},\quad \frac{4}{3}\pi r^3,\ 5ax^2yz$ आदि

एक पद वाले बीजीय व्यंजक हैं।

$(x+3), m-9,\ 2p+q$ दो पद वाले बीजीय व्यंजक हैं।

$m-9$ में m और -9 दो पद हैं तथा $2p+q$ में दो पद $2p$ और q है इसी प्रकार $a+b+c, x^2+2x+3$ तीन पद वाले बीजीय व्यंजक हैं। यहाँ $a+b+c$ में a पहला, b दूसरा और c तीसरा पद है। दूसरे उदाहरण में x^2 पहला पद, $2x$ दूसरा पद है 3 तीसरा पद है।

क्या आप सोच सकते हैं कि ये दो पद वाले या तीन पद वाले क्यों हैं जबकि इनसे बड़े–बड़े व्यंजक केवल एक–पदीय हैं।

किसी व्यंजक का पद केवल संख्या, केवल अक्षर संख्या या संख्या व अक्षर संख्या का गुणनफल होता है। कोई व्यंजक एक या एक से अधिक पदों से बना होता है। किसी व्यंजक में '+' या '–' चिह्न से पद निर्धारित किया जाता है '×' या '÷' चिह्न से नहीं।

उदाहरण देखें–

1. $3x$ — एक पद
2. $2x + 3y$ — दो पद
3. $-xy - 4x + 35$ — तीन पद
4. $\frac{x}{yz}$ — एक पद
5. xy — एक पद

व्यंजक $2P + P$, $(x + 3)^2$, $(x-y)^2$ में कितने पद होंगे? क्या आप बता सकते हैं?

इन तीनों व्यंजकों को देखने से ऐसा लगता है कि इनमें प्रत्येक में दो–दो पद हैं क्योंकि ये पद '+' व '–' चिह्न से अलग हो रहे हैं किंतु ऐसा नहीं है। यहाँ $2P + P = 3P$ लिखा जा सकता है, स्पष्ट है कि 3P एक पद है। इसी प्रकार देखें–

$(x+3)^2$ को हम $x^2 + 6x + 9$ लिख सकते हैं, इसमें तीन पद दिख रहे हैं।

$(x-y)^2$ को हम $x^2 - 2xy + y^2$ लिख सकते हैं, इसमें भी तीन पद हैं।

आपने देखा कि व्यंजकों में हम जो पद बता रहे थे, उन व्यंजकों को सरलीकृत करने पर पदों की संख्या बदल गई।

अतः हम कह सकते हैं कि यदि किसी व्यंजक को उसके सरल रूप में लिखना संभव हो तो उसे सरल रूप में लिखकर उसके पदों की संख्या गिनते हैं।

बहुपद (विशेष प्रकार का बीजीय व्यंजक)
Polynomials (Special Kinds of Algebraic Expression)

नीचे कुछ बीजीय व्यंजक दिए जा रहे हैं–

$x^2 + 5x$ $\quad$ $p - 1$ $\quad$ $x^3 - 2x^2 + 3x - 7$

ये सभी व्यंजक 'बहुपद' कहे जाते हैं। क्या कोई ऐसी विशेष बात है जो इन सभी में दिखाई पड़ती है?

कुछ और बीजीय व्यंजक देखिए जो 'बहुपद' नहीं है–

$x + \frac{1}{x}$, $\quad$ $y^2 + y^{\frac{1}{2}} + 3$, $\quad$ $p^3 - 2p + \sqrt[3]{p}$, $\quad$ $3x^{-1}$

क्या इन चारों उदाहरणों में कोई ऐसी बात दिखाई पड़ती है जो पहले उदाहरणों से अलग है? इनके बहुपद नहीं होने का क्या कारण समझा जा सकता है?

सभी व्यंजकों, जो बहुपद हैं और जो बहुपद नहीं है की तुलना कीजिए। अपने साथियों और शिक्षक से चर्चा कीजिए कि कब एक व्यंजक बहुपद होता है और कब नहीं?

> 0, 1, 2, 3, 4, ... पूर्ण संख्याएँ हैं।

आप संभवतः इस निष्कर्ष पर पहुंच गए होंगे कि जिस बीजीय व्यंजक में अक्षर संख्याओं की घातें पूर्ण संख्या है वही बहुपद है।

करके देखें

1. इनमें से कौन से बहुपद हैं?

   (i) S-3 (ii) $5y^{-3}$ (iii) $p+\frac{1}{p}$

   (iv) ax^2+b (v) $x^{\frac{1}{2}}+1$ (vi) $5p^2+2p+1$

2. 5 नये बहुपद बनाएँ।

बहुपद के पद (Terms of Polynomials)

हमें बहुपद के पद गिनना, बहुपद के गुणांक पता करना, बहुपद की घात पता करना आदि सीखना होगा। इनकी हमें आगे आवश्यकता होगी। बहुपद x^2+3x में दो पद हैं, पहला पद x^2 और दूसरा $3x$। इसी तरह m^3-2m^2+9m+1 में चार पद हैं, $m^3, -2m^2, 9m$ और 1। बहुपद $3y$ में केवल एक पद है $3y$।

पदों की संख्या के आधार पर बहुपद का नाम निर्धारित होता है। चूंकि बहुपद एक बीजीय व्यंजक है अतः इसके पदों को बीजीय व्यंजकों की तरह ही गिनते हैं। ऊपर दिए गए उदाहरणों में–

$3y$ एकपदी बहुपद है,

x^2+3x द्विपदी बहुपद है,

m^3-2m^2+9m+1 चारपदीय बहुपद है।

सोचें एवं चर्चा करें

1. किसी बहुपद में पदों की संख्या कितनी हो सकती है, अनंत या परिमित (finite)?
2. $2p+p$ एक पदीय है या दो पदीय है?
3. $(x+2)^2$ कितने पद का व्यंजक है?

करके देखें

निम्नलिखित व्यंजकों को पदों के आधार पर छाँटिए–

(i) 9C (ii) $\frac{1}{2}t+\frac{a}{2}$ (iii) $a^2+2ab+b^2$ (iv) $\frac{p}{q}$

(v) $4x-y$ (vi) $2m+c$ (vii) x^4+3x^2+1

बहुपद की घात (Degree of Polynomials)

किसी बहुपद में कुछ और संख्याएँ होती हैं जो बहुपद के पदों में अक्षर संख्या में लिखी होती हैं, जैसे–

$3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 9$

इस चारपदी बहुपद में अक्षर संख्या x की घातें क्रमशः 5, 4 और 3 हैं। इनमें सबसे बड़ी घात 5 है। इस स्थिति में "बहुपद $3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 9$ की घात (Degree of Polynomial) 5 है" या $3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 9$, 5 घात का बहुपद है।

> एक घात वाले बहुपदों को रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) भी कहा जाता है।

कुछ और उदाहरण देखें–

$x^2 + 3$ में बहुपद की घात 2 है।

$x^2 - 2x^7 + 3x - 1$ बहुपद की घात 7 है।

$5y$ में बहुपद की घात 1 है।

बहुपद $x^2y + xy$ में बहुपद की घात क्या होगी?

बहुपद $x^2y + xy$ में पहले पद में x की घात 2 है और y की घात 1 है। अतः x^2y की घात 3 है इसी तरह xy की घात 2 है। इस प्रकार $x^2y + xy$ की घात 3 होगी।

> बहुपद xy में बहुपद की घात क्या होगी? बहुपद xy में दो चर हैं x और y, दोनों की ही घात 1 है। बहुपद 'xy' की घात इन घातों के योग के बराबर यानी 2 है।

> कभी–कभी संख्या को अक्षरों द्वारा भी दर्शाया जाता है, ऐसी स्थिति में अक्षर संख्या नियतांक या अचर होती है। उदाहरण के लिए $ax+b$ में अगर a और b नियतांक है तब, अक्षर संख्या x चर होगा तथा a, b अचर होंगे।

करके देखें

1. निम्नलिखित बहुपदों में बहुपद की घात ज्ञात कीजिए–
   (i) 8 (ii) xyz (iii) $uv + uv^2 + v^3$
2. कुछ बहुपद आप भी लिखिए फिर अपने साथियों से चर्चा कर उनकी घात भी लिखिए।

अचर बहुपद (Constant Polynomials)

अब इस प्रश्न पर विचार कीजिए–

क्या 6 भी एक बीजीय व्यंजक है?

क्या 6 एक बहुपद भी है?

ऐसा लगता है कि 6 के साथ कोई अक्षर संख्या नहीं है और व्यंजकों के सामान्य उदाहरण में अक्षर संख्या तो होती ही है, तो क्या 6 बीजीय व्यंजक नहीं है? लेकिन क्या 6 को $6x°$ के रूप में लिखा जा सकता है? $(x° = 1)$

इसमें अक्षर संख्या x की घात **शून्य** है। शून्य एक पूर्ण संख्या है। इसलिए $6x^0$ या 6 भी एक बीजीय व्यंजक है और एक पदी बहुपद भी।

तो ऐसे पद भी, जिसमें केवल कोई संख्या हो, बीजीय व्यंजक होते हैं, और बहुपद भी। ऐसे बहुपद को 'अचर बहुपद' (Constant Polynomials) कहा जाता है। याने 2, 7, –6, $\frac{3}{2}$, 122 आदि अचर बहुपद हैं। क्या आप अचर बहुपद के कुछ और उदाहरण बना सकेंगे?

बहुपदों का निरूपण (Representation of Polynomials)

कभी–कभी बहुपद को बार–बार लिखने की आवश्यकता पड़ती है। ऐसे में एक बड़े व लम्बे बहुपद को बार–बार लिखना होगा। बहुपद को व्यक्त करने का एक और रूप है। इस रूप में सिर्फ यह पता चलता है कि वह बहुपद किस अक्षर संख्या में है। उसके बारे में और कुछ पता नहीं चलता। सवाल के संदर्भ में, किंतु यह समझा जा सकता है कि यह किस बहुपद के बारे में है।

यदि किसी बहुपद की अक्षर संख्या x है तो उसे हम $p(x), q(x), r(x)$ आदि किसी से भी व्यक्त कर सकते हैं। यदि अक्षर संख्या y हो तो ऐसे बहुपद को $p(y), q(y), s(y), t(y)$ आदि से प्रदर्शित कर सकते हैं। कुछ उदाहरण देखें–

$p(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 9$ $\qquad$ $t(x) = x^6 - 2x^7 + 3x - 1$

$q(y) = 5y$ $\qquad$ $s(u) = u^2 + 3u^3$ $\qquad$ $r(b) = b^4 - b^2 + 6$

इसमें p, t, q आदि के चुनाव का कोई आधार नहीं है। किंतु एक बार इन्हें चुन लिया तो उस सवाल के लिए इसी अक्षर संख्या का उपयोग करेंगे।

बहुपदों के व्यापक रूप (General form of Polynomials)

नीचे एक घात वाले कुछ बहुपद दिए जा रहे हैं, इन्हें ध्यानपूर्वक देखिए–

$p(x) = 2x + 3$ $\qquad$ $q(x) = \sqrt{2} - x$ $\qquad$ $s(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$r(x) = x + 2$ $\qquad$ $p(x) = \sqrt{7}x - 4$ $\qquad$ $p(x) = 2(3x + 8)$

इन सभी में अधिकतम दो पद हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

क्या आप एक घात वाला कोई ऐसा बहुपद बना सकते हैं जिसमें दो से अधिक पद हों? ध्यान रहे बहुपद बनाते समय समान पदों को इकट्ठा करके लिखें।

ऊपर के उदाहरणों के सभी बहुपदों में एक अक्षर संख्या आवश्यक रूप से उपस्थित है। दूसरे शब्दों में इसे ऐसा भी कह सकते हैं कि इन बहुपदों में अक्षर संख्या का गुणांक शून्य नहीं है। इसके अतिरिक्त इनमें वास्तविक संख्या ($+3, -4, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0$ आदि) भी सम्मिलित है।

क्या हम इन्हें $ax + b$ के रूप में दर्शा सकते हैं जहाँ a और b कोई वास्तविक नियत संख्याएँ और $a \neq 0$ हैं?

दूसरे उदाहरण की $ax + b$ से तुलना करे तो–

$$\sqrt{2} - x = -x + \sqrt{2}$$
$$= (-1)\,x + \sqrt{2}$$
$$= a\,x + b \quad \text{(तुलना करें।)}$$

यहाँ $a = (-1)$ जहाँ a शून्य नहीं है।

$b = \sqrt{2}$ जहाँ $\sqrt{2}$ एक वास्तविक संख्या है।

आप देख रहे हैं बहुपद $\sqrt{2} - x$ $ax + b$ के जैसा ही है।

एक और बहुपद को देखें–

$$x = 1 \times x$$
$$= 1 \times x + 0$$
$$= ax + b$$
$$a = 1, b = 0$$

अक्षर संख्या के साथ जो संख्या गुणा में लिखी गई होती है उसे गुणांक कहते हैं, जैसे– बहुपद $m^3 - 3m^2 + 1$ में m^3 का गुणांक 1 है, m^2 का गुणांक –3 है।

सोचें: $m^2 + 1$ में 1 का गुणांक क्या होगा?

वास्तविक संख्या में सभी पूर्णांक, परिमेय और अपरिमेय संख्याएं आती हैं।

$-2, -1, 0, 1, 2, \ldots, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{7}, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \ldots$

इसलिए बहुपद x भी $ax + b$ के रूप में लिखा जा सकता है। अब आप शेष चार बहुपदों को भी $ax + b$ के रूप में लिखें।

$ax + b$ को x के पदों में एक घात का बहुपद (रेखीय बहुपद) कहा जाता है। जहाँ a और b वास्तविक नियत संख्याएँ है और $a \neq 0$

अब इन बहुपदों पर विचार कीजिए–

$$4x^2 + 3x, \qquad -y^2 + 2, \qquad x^2 - 4x - 9, \qquad \sqrt{2}\,m^2 - \frac{3}{2}m - 9$$

ये बहुपद एक अक्षर संख्या वाले द्विघात बहुपद हैं। इन्हें वर्ग बहुपद (Quadratic Polynomials) कहा जाता है। इन्हें हम $ax^2 + bx + c$ के रूप में लिखते हैं जहाँ a, b और c वास्तविक नियत संख्याएँ तथा $a \neq 0$ है।

करके देखें

1. पाँच कोई वर्ग बहुपद बनाइए।
2. वर्ग बहुपद में अधिकतम कितने पद हो सकते हैं?
3. वर्ग बहुपद में न्यूनतम कितने पद हो सकते हैं?

अधिक घात वाले बहुपदों के व्यापक रूप

$4x^3+2x^2+5x-7,\quad y^4+3y^3-5y^2+7y,\quad m^5-3m^2+2,\quad z^6-5z^5-3z^2+2z$

आदि सभी बहुपद हैं। हम देख सकते हैं कि इनमें बहुपद की घात बढ़ती जा रही है साथ–साथ अधिकतम संभव पदों की संख्या भी बढ़ रही है। इन सब में x, y, m, z आदि कि विभिन्न घातों के अलावा संख्याएँ हैं। ये सभी वास्तविक संख्याएँ हैं बहुपद की घात उसमें उपस्थित अक्षर संख्या (x, y, m, z) आदि की अधिकतम घात से तय होती है। अतः अधिकतम घात का गुणांक शून्य नहीं हो सकता। इसलिए हमने दो घात वाले बहुपद में $a \neq 0$ की शर्त रखी।

बहुपदों के बारे में हम आगे और पढ़ेंगे साथ ही अक्षर के अलग–अलग तरह के प्रयोग के बारे में भी जानेंगे। सभी घातों के लिए बहुपद के और भी व्यापक रूप को देखेंगे। यह सब आगे की कक्षाओं में होगा। क्या आप दिए गए अधिक घात वाले बहुपदों को भी ऊपर लिखे गए $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ की तरह लिख सकते हैं?

शून्य बहुपद

यदि किसी बहुपद के सभी गुणांक 0 हो जाएं जैसे– $ax^2 + bx + c$ में $a = b = c = 0$ हो तो हमें 0 मिलेगा। इसे शून्य बहुपद कहते हैं। इसकी घात अपरिभाषित है। अर्थात् इसको प्रत्येक घात के बहुपद के रूप में लिखा जा सकता है।

प्रश्नावली – 4.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौनसा बहुपद है और कौनसा नहीं? अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।

   (i) $4x^2 - 3x + 5$ (ii) $z + \frac{3}{z}$ (iii) $\sqrt{y} + 2y + 3$

   (iv) $x^2 + \frac{3}{2}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. निम्नलिखित में x^2 का गुणांक लिखिए–

   (i) $3x^2 + 2x^2 + 3x + 2$ (ii) $3x^2 + 1$ (iii) $2 - 5x^2 + \frac{1}{2}x^3$

   (iv) $\frac{x^2}{2} + 1$ (v) $x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2$

3. निम्न बहुपद में x का गुणांक एवं अचर पद लिखिए।

(i) $x^2 + \frac{1}{5}x + 5$ (ii) $\sqrt{2}\,x + 7$ (iii) $x^2 + 2$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक का एक उदाहरण लिखिए–

(i) घात 4 का द्विपदी बहुपद (ii) घात 6 का त्रिपदी बहुपद

(iii) घात 5 का एकपदी बहुपद

5. निम्नलिखित बहुपदों में प्रत्येक की घात लिखिए–

(i) $x^3 - 6x^2 + x + 1$ (ii) $y^9 - 3y^7 + \frac{3}{2}y^2 + 4$ (iii) $3 - y^3z$

(iv) $x^2y - 2x + 1$ (v) $5t - \sqrt{11}$ (vi) 7

6. निम्नलिखित बहुपदों में से अचर, रैखिक, द्विघातीय एवं त्रिघातीय बहुपदों को छाँटिए–

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $9x^3$ (iii) $y + y^2 + \frac{3}{4}$

(iv) $t + 3$ (v) $y - y^3$ (vi) 8

(vii) $2x^2 + 3$ (viii) $P^2 - P + 5$ (ix) $x + \frac{2}{3}$

(x) 4 (xi) $-\frac{u}{4} + \frac{3}{2}$ (xii) $-\frac{3}{7}$

बहुपद के शून्यक (Zeroes of a Polynomial)

बहुपद $p(x) = x^2 + x - 6$ में $x = 1, 2, 0$ आदि मान रखने पर हम देखते हैं कि

$x = 1$ पर, $p(1) = 1 + 1 - 6 = -4$

$p(1) = -4$

हम कहेंगे $x = 1$ के लिए $p(x)$ का मान -4 है।

$x = 2$ पर

$p(2) = 4 + 2 - 6$

$p(2) = 0$

$x = 2$ के लिए $p(x)$ का मान 0 हो जाता है। हम कहेंगे कि 2 बहुपद $p(x)$ का शून्यक है।

हम कह सकते हैं कि जब किसी बहुपद का मान चर के किसी मान के लिए शून्य हो जाता है तो चर का वह मान बहुपद का शून्यक होता है।

उदाहरण–1. बहुपद $p(x) = 2x + 1$ का शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : किसी बहुपद का शून्यक ज्ञात करना किसी समीकरण का हल ज्ञात करने के समान है,

$p(x) = 0$ होने के लिए हमें x का वह मान चाहिए जो इसे संतुष्ट करे।

अर्थात् x का वह मान होगा जब $2x + 1 = 0$

$$2x = -1 \qquad \text{या} \qquad x = \frac{-1}{2}$$

स्पष्टतः $p(x)$ में $x = \frac{-1}{2}$ रखने पर शून्य प्राप्त होगा अतः $\frac{-1}{2}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

उदाहरण–2. पता कीजिए कि क्या 0 और 2, बहुपद x^2-$2x$ के शून्यक हैं?

हल : माना $p(x) = x^2 - 2x$

तब $x = 0$ रखने पर

$$p(0) = (0) - 2 \times 0 = 0$$

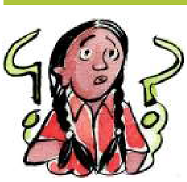
याने 0, $p(x)$ का एक शून्यक है।

अब x=2 रखने पर

$$p(2) = 2^2 - 2 \times 2$$
$$= 4 - 4 = 0$$

याने $p(x)$ का एक और शून्यक 2 है।

प्रश्नावली – 4.2



1 बहुपद $5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $x = 0$ (ii) $x = 1$ (iii) $x = -2$

2 निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद के लिए $P(0), p(-1), p(2), p(3)$ का मान ज्ञात कीजिए–

(i) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ (ii) $p(r) = (r - 1)(r + 1)$

(iii) $p(t) = \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$ (iv) $p(y) = (y^2 - y + 1)(y + 1)$

(v) $p(x) = x + 2$

3 पता कीजिए कि दिए गए बहुपदों के सामने लिखे मान क्या उनके शून्यक हैं?

(i) $p(x) = 3x + 1 \; ; \; x = \frac{-1}{3}$ (ii) $p(x) = x + 2 \; ; \; x = -2$

(iii) $p(x) = 5x - 4 \; ; \; x = \frac{5}{4}$ (iv) $p(y) = y^2 - 1 \; ; \; y = 1, -1$

(v) $p(t) = (t + 1)(t - 2) \; ; \; t = +1, -2$ (vi) $p(x) = lx + m \; ; \; x = \frac{-m}{l}$

(vii) $p(r) = 3r^2 - 1 \; ; \; r = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

4 निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए–

(i) $p(x) = x + 6$ (ii) $p(x) = x - 6$ (iii) $p(y) = 5y$

(iv) $p(t) = at, \; a \neq 0, \; a$ एक वास्तविक नियत संख्या है।

(v) $p(r)=cr+d, \; c\neq 0, \; c, d$ वास्तविक नियत संख्याएं हैं।

(vi) $p(u) = 3u - 6$ (vii) $r(s) = 2s + 3$

(viii) $p(x) = \sqrt{5} - x$ (ix) $q(t) = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$

बहुपदों को जोड़ना और घटाना (Addition and Subtraction of Polynomials)

ASQA3D

हमने बीजीय व्यंजकों को जोड़ने और घटाने का अभ्यास किया है। यह भी जाना है कि सभी बहुपद बीजीय व्यंजक ही हैं। इसलिए बहुपदों का जोड़ना–घटाना बीजीय व्यंजकों के जोड़ने–घटाने जैसा ही है।

सभी पदों को देखकर समान पदों को इकट्ठा करके उनके गुणांकों में जोड़ना/घटाना कर सकते हैं।

नीचे के उदाहरणों को देखो और यह बताओ कि इन्हें हल करने में क्या–क्या बातें ध्यान में रखनी होती हैं।

उदाहरण–3. बहुपद $3x^3 - x^2 + 5x - 4$ तथा $3x^2 - 7x + 8$ को जोड़िए।

हल : $3x^3 - x^2 + 5x - 4$ (यहाँ पर समान घात के पदों को एक साथ लिखेंगे)

$+ \quad 3x^2 - 7x + 8$

$$3x^3 + (-1+3)x^2 + (5-7)x + (-4+8) = 3x^3 + 2x^2 - 2x + 4$$

उदाहरण–4. बहुपद $\frac{3}{2}y^3 + y^2 + y + 1$ तथा $y^4 - \frac{1}{2}y^3 - 3y + 1$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{3}{2}y^3 + y^2 + y + 1$$

$$+y^4 - \frac{1}{2}y^3 \quad -3y + 1$$

$$y^4 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)y^3 + y^2 + (1-3)y + (1+1) = y^4 + y^3 + y^2 - 2y + 2$$

उदाहरण–5. बहुपद $9x^2 - 3x - 7$ में से $4x^2 + 3x - 2$ को घटाइए।

हल :

$$9x^2 - 3x - 7$$

$$4x^2 + 3x - 2$$

$-\quad -\quad +$ (घटाने पर चिह्न परिवर्तित होते हैं)

$$(9-4)x^2 + (-3-3)x + (-7+2) = 5x^2 - 6x - 5$$

उदाहरण–6. $x(z) = 2z^2 - 5 + 11z - z^3$ में से $s(z) = 3z - 5z^2 + 7 + 3z^3$ को घटाइए।

हल : सर्वप्रथम दोनों बहुपदों को अक्षर संख्याओं की घातों के घटते क्रम में लिखिए।

$$x(z) = 2z^2 - 5 + 11z - z^3 = -z^3 + 2z^2 + 11z - 5$$

तथा $s(z) = 3z - 5z^2 + 7 + 3z^3 = 3z^3 - 5z^2 + 3z + 7$

अब $x(z) - s(z) = \quad -z^3 + 2z^2 + 11z - 5$

$$3z^3 - 5z^2 + 3z + 7$$

$-\quad +\quad -\quad -$

$$(-1-3)z^3 + (2+5)z^2 + (11-3)z + (-5-7)$$

$$= -4z^3 + 7z^2 + 8z - 12$$

उदाहरण–7. बहुपदों $3x + 4 - 5x^2$, $5 + 9x$ तथा $4x - 17 - 5x^2$ का योगफल ज्ञात कीजिए एवं योगफल से प्राप्त बहुपद की घात बताइए।

हल : $-5x^2+3x+4$ (x को घटती घातों के रूप में लिखने पर)

$+9x+5$

$-5x^2+4x-17$

$(-5-5)x^2+(3+9+4)x+(4+5-17) = -10x^2+16x-8$

अतः बहुपद $-10x^2+16x-8$ की घात = 2

उदाहरण–8. $p(x) = 3x^2 - 8x + 11$ तथा $q(x) = -4x^2 + 15$ के योगफल में से $r(x) = 2x^2 - 3x - 1$ को घटाइए एवं प्राप्त हुए बहुपद की घात बताइए।

हल : पहले हम $p(x)$ तथा $q(x)$ का योग करते हैं–

$p(x) + q(x) = 3x^2 - 8x + 11$

$-4x^2 \quad + 15$

$(3-4)x^2 - 8x + (11+15) = -x^2 - 8x + 26$

अब इस योग में से $r(x)$ को घटाते हैं–

$p(x) + q(x) - r(x) = -x^2 - 8x + 26$

$2x^2 - 3x - 1$

$- \quad + \quad +$ (चिह्न परिवर्तित करने पर)

$(-1-2)x^2+(-8+3)x+(26+1) = -3x^2-5x+27$

$p(x) + q(x) - r(x) = -3x^2 - 5x + 27$

अतः बहुपद $-3x^2 - 5x + 27$ की घात = 2

उदाहरण–9. $p(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$; $q(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x + 5$ का योगफल एवं अंतर ज्ञात कीजिए।

हल : $p(x) + q(x) = (4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) + (4x^3 + 2x^2 - 2x + 5)$

$= (4 + 4)x^3 + (3 + 2)x^2 + (2 - 2)x + (-1 + 5)$

$= 8x^3 + 5x^2 + 0x + 4$

$= 8x^3 + 5x^2 + 4$

इसी प्रकार अंतर

$p(x) - q(x) = (4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) - (4x^3 + 2x^2 - 2x + 5)$

$= (4 - 4)x^3 + (3 - 2)x^2 + (2 + 2)x + (-1 - 5)$

$= x^2 + 4x - 6$

करके देखें

निम्नलिखित के योगफल व अन्तर पता करें और प्राप्त बहुपद की घात भी बताइए।

(i) $p(y) = y^2 + 5y,\ q(y) = 3y - 5$

(ii) $p(r) = 5r^2 - 9,\ s(r) = 9r^2 - 4$

(iii) $p(y) = 15y^4 - 5y^2 + 27,\ \ s(y) = 15y^4 - 9$

कई बार हमें बहुपदों का योग अथवा अंतर पता होता है। यदि ऐसे में हमें एक बहुपद पता हो तो दूसरा बहुपद भी पता कर सकते हैं।

उदाहरण–10. : $2u^2 - 4u + 3$ में क्या जोड़ें कि योगफल $4u^3 - 5u^2 + 1$ प्राप्त हो?

हल : माना $p(u) = 2u^2 - 4u + 3$ में $q(u)$ को जोड़ने पर $r(u) = 4u^3 - 5u^2 + 1$ प्राप्त होगा।

अर्थात् $p(u) + q(u) = r(u)$

$$q(u) = r(u) - p(u)$$

$$\begin{aligned} q(u) &= (4u^3 - 5u^2 + 1) - (2u^2 - 4u + 3) \\ &= 4u^3 - 5u^2 + 1 - 2u^2 + 4u - 3 \\ &= 4u^3 + (-5 - 2)\ u^2 + 4u + (1 - 3) \\ &= 4u^3 - 7u^2 + 4u - 2 \end{aligned}$$

उदाहरण–11. $2y^3 - 3y^2 + 4$ में क्या घटाएं कि अंतर $y^3 - 1$ प्राप्त हो?

हल : माना $p\ (y) = 2y^3 - 3y^2 + 4$ में से $q\ (y)$ घटाने पर अंतर $r(y) = y^3 - 1$ प्राप्त होगा।

अर्थात् $p\ (y) - q\ (y) = r\ (y)$

या $q\ (y) = p\ (y) - r\ (y)$

$$\begin{aligned} q\ (y) &= (2y^3 - 3y^2 + 4) - (y^3 - 1) \\ &= 2y^3 - 3y^2 + 4 - y^3 + 1 \\ &= (2 - 1)\ y^3 - 3y^2 + (4 + 1) \\ &= y^3 - 3y^2 + 5 \end{aligned}$$

करके देखें

1. $5t^2 - 3t + 4$ में से क्या घटाएँ कि $2t^3 - 4$ प्राप्त हो।
2. $6r^2 + 4r - 2$ में क्या जोड़ें कि $15r^2 + 4$ प्राप्त हो।
3. ऐसे 5 और सवाल बनाएँ और हल करें।

बहुपदों का गुणा (Multiplication of Polynomials)

बहुपदों को जोड़ने–घटाने की तरह ही उनका गुणा भी बीजीय व्यंजकों जैसा ही होता है।

उदाहरण–12. बहुपद $p(x) = 2x^2 + 3x + 4$ को 3 से गुणा करें।

हल : $3\,p(x) = 3 \times (2x^2 + 3x + 4)$

$= 6x^2 + 9x + 12$

उदाहरण–13. $(2x + 5) \times (4x + 3)$

हल : $= 2x(4x + 3) + 5(4x + 3)$

$= [(2x \times 4x) + (2x \times 3)] + [(5 \times 4x) + (5 \times 3)]$

$= 8x^2 + 6x + 20x + 15$

$= 8x^2 + 26x + 15$

उदाहरण–14. $(2x + 5) \times (3x^2 + 4x + 6)$, गुणनफल की घात बताइए।

हल : $= [2x \times (3x^2 + 4x + 6)] + [5 \times (3x^2 + 4x + 6)]$

$= 2x \times 3x^2 + 2x \times 4x + 2x \times 6 + 5 \times 3x^2 + 5 \times 4x + 5 \times 6$

$= 6x^3 + 8x^2 + 12x + 15x^2 + 20x + 30$

$= 6x^3 + (8 + 15)\,x^2 + (12 + 20)\,x + 30$

$= 6x^3 + 23x^2 + 32x + 30$

यहाँ बहुपद की घात 3 है।

उदाहरण–15. यदि $p(x) = 2x + 3$ तब $p(x) \,.\, q(x)$ ज्ञात कीजिए।

$q(x) = x^2 + x - 2$

हल : तब $p(x) \,.\, q(x) = (2x + 3)(x^2 + x - 2)$

$= 2x(x^2 + x - 2) + 3(x^2 + x - 2)$

$= 2x \times x^2 + 2x \times x + 2x \times (-2) + 3 \times x^2 + 3x + 3 \times (-2)$

$= 2x^3 + 2x^2 - 4x + 3x^2 + 3x - 6$

$= 2x^3 + (2 + 3)\,x^2 + (-4 + 3)\,x - 6$

$= 2x^3 + 5x^2 - x - 6$

करके देखें

निम्नलिखित बहुपदों का गुणा करके, गुणनफल की घात बताइए–

(i) $p(x) = x^2 + 3x + 2$; $q(x) = x^2 + 3x + 1$

(ii) $p(v) = v^2 - 3v + 2$; $q(v) = v + 1$

(iii) $p(x) = 2x^2 + 7x + 3$; $q(x) = 5x^2 - 3x$

(iv) $p(y) = y^3 - y^2 + y - 1$; $q(y) = y + 1$

(v) $p(u) = 3u^2 - 12u + 4$; $q(u) = u^2 - 2u + 1$

प्रश्नावली – 4.3

1. निम्नलिखित बहुपदों को जोड़िए–

(i) $2x^2 + x + 1$ एवं $3x^2 + 4x + 5$ (ii) $8p^2 - 3p + 4$ एवं $3p^3 - 4p + 7$

(iii) $-5x^3 + 9x^2 - 5x + 7$ एवं $-2x^2 + 7x^3 - 3x - 8$

2. निम्नलिखित बहुपदों को जोड़िए। जोड़ से प्राप्त बहुपद की घात बताइए।

(i) $3y^2 + 2y - 5$; $2y^2 + 5 + 8y$ तथा $-y^2 - y$

(ii) $5 + 7r - 3r^2$; $r^2 + 7$ तथा $r^2 - 3r + 5$

(iii) $4x + 7 - 3x^2 + 5x^3$; $7x^2 - 2x + 1$ तथा $-2x^3 - 2x$

3. घटाइए–

(i) $7t^3 - 3t^2 + 2$ में से $t^2 - 5t + 2$

(ii) $2p^2 - 5 + 11p - p^3$ में से $3p - 5p^2 + 7 + 3p^3$

(iii) $-3z^2 + 11z + 12z^3 + 13$ में से $5z^3 + 7z^2 + 2z - 4$

4. $x^4 + 3x^3 + 2x + 6$ और $x^4 - 3x^2 + 6x + 2$ के योगफल में से $x^3 - 3x + 4$ को घटाइए।

5. यदि $p(u) = u^7 - u^5 + 2u^2 + 1$ और $q(u) = -u^7 + u - 2$ हो तो $p(u) + q(u)$ की घात बताइए।

6. $x^3 - 3x^2 + 6$ में क्या जोड़ें कि योगफल $x^2 - x + 4$ प्राप्त हो?

7. $u^7 - 3u^6 + 4u^2 + 2$ में क्या जोड़ें कि योगफल $u^6 - u - 4$ प्राप्त हो?

8. $y^3 - 3y^2 + y + 2$ में क्या घटाएं कि अंतर $y^3 + 2y + 1$ प्राप्त हो?

9. $t^2 + t - 7$ में क्या घटाएं कि अंतर $t^3 + t^2 + 3t + 4$ प्राप्त हो?

10. निम्नलिखित का गुणा कीजिए–

(i) $3x + 4$ का $7x^2 + 2x + 1$ से (ii) $5x^3 + 2x$ का $3x^2 - 9x + 6$ से

(iii) $p^4 - 5p^2 + 3$ का $p^3 + 1$ से

11. यदि $p(x) = x^3 + 7x + 3$ तथा $q(x) = 2x^3 - 3$ हो तो $p(x)\,q(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $p(u) = u^2 + 3u + 4$, $q(u) = u^2 + u - 12$ तथा $r(u) = u - 2$ हो तब $p(u)q(u)r(u)$ की घात बताइए।

हमने सीखा

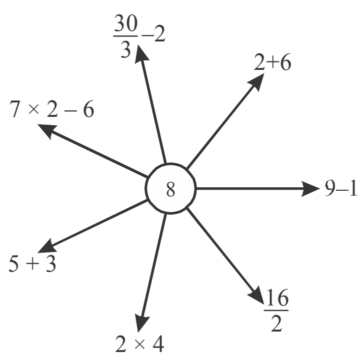
1. एक विशेष प्रकार का बीजीय व्यंजक, जिसमें अक्षर संख्या (चर) की घात पूर्ण संख्या हो तब वह बहुपद कहलाता है।
2. बहुपद के पद '+' व '–' चिह्न द्वारा निर्धारित होते हैं।
3. बहुपद के गुणांक एक संख्या होती है जो अक्षर संख्या के साथ गुणा में लिखी गई होती है। कभी–कभी संख्या को अक्षरों द्वारा दर्शाते हैं तब गुणांक संख्या न होकर अक्षर होते हैं। उदाहरण $ax + b$ में x का गुणांक a है।
4. किसी बहुपद में उपस्थित सभी अक्षर संख्या का गुणांक शून्य होने पर वह शून्य बहुपद कहलाता है।
5. किसी भी संख्या को बीजीय व्यंजक व बहुपद कह सकते हैं। 3, 5, 6 .... इत्यादि बीजीय व्यंजक व बहुपद दोनों हैं।
6. केवल संख्या वाले बहुपद (जहाँ बहुपद में केवल संख्या हो या अक्षर संख्या जो नियतांक हो) को अचर बहुपद कहते हैं।
7. किसी बहुपद में चर (अक्षर संख्या) की अधिकतम घात को बहुपद की घात कहते हैं। उदाहरण– बहुपद $x^5 + 3x^3 + 2x$ की घात 5 है।
8. बहुपदों को $p(x), q(x), r(x)$ आदि से व्यक्त किया जा सकता है। जिसमें कोष्ठक के भीतर लिखी अक्षर संख्या बहुपद की अक्षर संख्या को दर्शाती है।
9. $ax + b$ एक घात व एक चर का बहुपद है जहाँ a, b वास्तविक नियत संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।
10. घात 2 के एक चर के बहुपद को वर्ग बहुपद कहते हैं।
11. जब किसी बहुपद का मान चर के किसी मान के लिए शून्य हो जाता है तो चर के उस मान बहुपद का शून्यक होता है।
12. रैखिक बहुपद का व्यापक रूप $ax + b$ जहाँ a, b वास्तविक नियत सख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।
13. वर्ग बहुपद का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c$ जहाँ a, b, c वास्तविक नियत सख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।
14. त्रिघात बहुपद का व्यापक रूप $ax^3 + bx^2 + cx + d$ जहाँ a, b, c, d वास्तविक नियत सख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।

B54IIX

एक चर का रैखिक समीकरण

B5DEKK

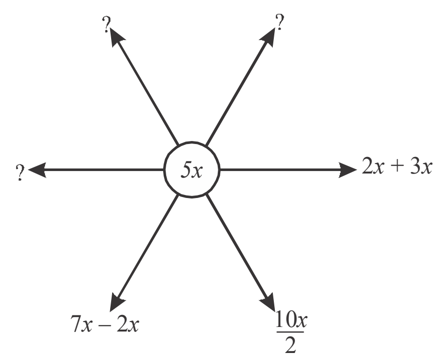
[LINEAR EQUATION IN ONE VARIABLE] 05



चित्र–1

किसी भी संख्या व्यंजक को कई तरीकों से व्यक्त कर सकते हैं। (चित्र–1)

क्या इसी तरह से $5x$ को भी अलग–अलग ढंग से व्यक्त कर सकते हैं? (चित्र–2)



चित्र–2

$5x$ के कुछ और भी रूप सोच कर लिखें।

क्या आपके हल आपके साथियों से अलग हैं?

नेहा, मैंने $5x$ के कई नए रूप बनाए।
$3x \times 2x$
$4x \times x$

राजू, यह सब तो ठीक नहीं है। $3x \times 2x = 6x^2$
$4x \times x = 4x^2$

आपको क्या लगता है? कौन सही है? आपस में चर्चा करें।

अतः हम संख्याओं की तरह बीजीय व्यंजकों को अलग–अलग संक्रियाओं द्वारा विभिन्न तरीकों से दर्शा सकते हैं।

इसमें हमें व्यंजकों की संक्रियाओं के नियमों का ध्यान रखना होगा।

करके देखें

अब आप भी अन्य बीजीय व्यंजक लेकर उन्हें अलग–अलग तरीकों द्वारा दर्शाइए।

एक चर का समीकरण (Equation in One Variable)

रिंकू : जीतू मेरी जेब में पाँच एक जैसे सिक्के हैं, क्या तुम बता सकते हो, मेरे पास कितने पैसे हैं?

जीतू : कैसे बताऊँ? सिक्के निकालो तो बता सकता हूँ।

रेशमा : अगर तुम्हारे पास 1 रु. के सिक्के हैं तो, तुम्हारी जेब में 5 रु. होंगे और अगर 2 रु. के सिक्के हैं तो 10 रु. होंगे। याने तुम्हारी जेब में $5x$ रु. हैं।

रिंकू : मेरी जेब में 25 रुपये हैं, तो कौन से सिक्के हैं?

जीतू : अब यह आसान है। चूंकि $5x$ रुपये हैं अतः $5x = 25$
$x = 1, 2, 5, 10$ रखकर देखूँगा जहाँ "=" के दोनों ओर मान समान आएँगे वही तुम्हारे सिक्के की कीमत बताएगा।

कोई दो संख्याएँ सोचिए। जैसे 9 व 21, कोई भी और 10 से छोटी दो संख्याएँ लीजिए और चारों संक्रियाओं का उपयोग कर इनमें संबंध बनाइए–

(i) 9 के दुगुने में 3 जोड़ने पर 21 मिलता है – $(9 \times 2) + 3 = 21$

(ii) 9 के तिगुने में से 6 घटाने पर 21 मिलता है – $(\quad \times \quad) - \quad = \quad$

(iii) 21 में 7 का भाग देकर 6 जोड़ने पर 9 मिलता है – $\frac{21}{7} + 6 = 9$

(iv) 21 में से 3 घटाकर, 2 का भाग देने पर 9 मिलता है – ....

इस प्रकार आप भी 9 व 21 में विभिन्न संक्रियाओं व संख्याओं को काम में लेकर समीकरण संबंध बनाने के लिए 5 और कथन लिखिए।

स्पष्ट है कि यह किन्हीं भी दो संख्याओं के साथ किया जा सकता है।

करके देखें

इनमें से प्रत्येक के लिए 3–3 संबंध बनाइए–

(i) 2 व 5 (ii) 11 व 25 (iii) 40 व 123

नीचे दिए गए कथनों को देखें–

(i) राजू की आयु 9 वर्ष एवं उसकी माँ की आयु 35 वर्ष है।

(ii) कक्षा–4 में 25 बच्चे एवं कक्षा–9 में 45 बच्चे हैं।

(iii) रीमा के पास 10 रुपये एवं मीरा के पास 7 रुपये हैं।

इनमें से प्रत्येक में हम कुछ संबंध ढूंढ सकते हैं।

जैसे– राजू की माँ और उसकी आयु का योग 44 वर्ष है।

राजू की आयु + माँ की आयु = 44 वर्ष।

कक्षा–9 में बच्चे – कक्षा–4 में बच्चे = 20

ऐसी सभी परिस्थितियों के लिए कई संबंध बन सकते हैं।

प्रत्येक के लिए 3–3 ऐसे संबंध बनाएँ।

चलो अब एक चर के समीकरण को हल करना सीखते हैं

रमोला : मैने मन में एक संख्या सोची है, वह संख्या 25 के दुगुने से 5 कम है, वह संख्या क्या है?

मालिनी : संख्या $= (25 \times 2) - 5$

$= 50 - 5 = 45$

अतः संख्या 45 है।

आइए एक उदाहरण देखें– 5 किसी संख्या से 10 कम है।

तब उसका समीकरण $x - 10 = 5$ होगा (माना वह संख्या x है।)

करके देखें

1. 4 किसी संख्या से 2 कम है।
2. 8 और किसी संख्या का योग 12 है।

समीकरण बनाना

समीकरण दोनों पक्षों की बराबरी दिखाता है। यह कैसे बनता है, इसे समझने के लिए नीचे के उदाहरण देखें–

उदाहरण–1. किसी संख्या के तीन गुने से 4 अधिक 13 के बराबर है।

हल : $3x + 4 = 13$

उदाहरण–2. एक लड़के की वर्तमान आयु उसके 4 वर्ष पूर्व की आयु की दुगुनी है।

हल : माना कि लड़के की वर्तमान आयु = b वर्ष

4 वर्ष पूर्व की आयु $= (b - 4)$

तब $b = 2\,(b - 4)$

आपने पिछले अध्याय में देखा कि $ax + b$ का रूप एक घात का एक चर का बहुपद है। अब एक चर के समीकरण के उदाहरणों में आप देखते हैं कि इन्हें $ax + b = c$ के रूप में लिखा गया है जहाँ a, b, c वास्तविक नियत संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है। इसी प्रकार $ax^2 + bx + c$ बहुपद से समीकरण बना सकते हैं। स्पष्ट है कि यहाँ $ax + b = c, ax^2 + bx + c = d$ क्रमशः एक चर का एक घात का समीकरण, एक चर का द्विघात समीकरण है तथा a, b, c, d वास्तविक नियत संख्याएँ है जिसमें $a \neq 0$ है।

करके देखें

(i)

5	5	5	5
5 जोड़ें	वर्ग करें	2 से गुणा करें	4 घटाएँ
वर्ग करें	5 जोड़ें	4 घटाएँ	2 से गुणा करें
$(5+5)^2 = 100$			

(ii)

x	x	x	x
5 जोड़ें	वर्ग करें	2 से गुणा करें	4 घटाएँ
वर्ग करें	5 जोड़ें	4 घटाएँ	2 से गुणा करें
$(x+5)^2$			

(iii)

x	x	x	x
3 से गुणा करें	6 घटाएँ	6 जोड़ें	3 से भाग करें
6 जोड़ें	3 से गुणा करें	3 से भाग करें	6 घटाएँ
			$\frac{x}{3} - 6 = 18$

दिये गये बीजीय समीकरण से कथन बनाना

एक बीजीय समीकरण $5x$-2=10 पर विचार करें। इसका संभावित कथन निम्नलिखित हो सकता है–

किसी संख्या की पांच गुने और 2 का अंतर 10 है।

उदाहरण–3. $\frac{x}{4} + x = 10$ को गणितीय कथन के रूप में लिखिए।

हल : किसी संख्या में उसका एक चौथाई जोड़ने पर जोड़ 10 होता है।

करके देखें

निम्नलिखित बीजीय समीकरण के लिए कथन बनाइए।

(i) $2x-3=42$ (ii) $12x-3 = 105$ (iii) $\frac{x}{x+4} = 28$

(iv) $x+6=28$ (v) $3x+3=15$

समीकरण का हल (Solution of Equation)

समीकरण का हल क्या है इसे समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण को देखें।

$x+2=7$ में

$x=3$ रखने पर

$3+2\neq 7$ समीकरण सत्य नहीं है।

$x=4$ रखने पर

$4+2\neq 7$ समीकरण सत्य नहीं है।

$x=5$ रखने पर

$5+2=7$ समीकरण सत्य है क्योंकि दोनों पक्ष बराबर हैं।

अतः $x=5$ को समीकरण का एक हल कहेंगे क्योंकि इस मान के लिए समीकरण सत्य है।

हम कह सकते हैं कि किसी समीकरण में चर के स्थान पर जो संख्या रखने पर समीकरण सत्य रहता है, वह मान समीकरण का हल होता है।

समीकरण के गुणधर्म (Properties of Equation)

1. समीकरण में '=' चिह्न के दोनों ओर दो पक्ष होते हैं।

   बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

2. समानता के चार नियम – a, b, c वास्तविक संख्याओं के लिए

   (i) यदि $a=b$ तब $a+c=b+c$
   अर्थात् यदि दो व्यंजक बराबर हैं तब दोनों पक्षों में समान जोड़ने पर योगफल बराबर रहता है।

   (ii) यदि $a=b$ तब $a-c=b-c$
   अर्थात् यदि दो व्यंजक बराबर हैं तब दोनों पक्षों में समान घटाने पर अंतर बराबर रहता है।

   (iii) यदि $a=b$ तब $ac=bc$
   अर्थात् यदि दो व्यंजक बराबर हैं तब दोनों पक्षों में समान का गुणा करने पर भी गुणनफल बराबर रहता है।

   (iv) यदि $a=b$ तब $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ जहाँ $c\neq 0$
   अर्थात् यदि दो व्यंजक बराबर हैं तब दोनों पक्षों में समान का भाग करने पर भी भागफल बराबर रहता है।

उदाहरण–4. समीकरण $x-7=3$ को हल कीजिए।

हल : $x-7=3$

$x - 7 + 7 = 3 + 7$

$x = 10$ (समानता के नियम (i) से दोनों पक्षों में 7 जोड़ने पर –7 निरस्त हो जाता है।)

उदाहरण–5. समीकरण $3x + 5 = 14$ को हल कीजिए।

हल : $3x + 5 = 14$

$3x + 5 - 5 = 14 - 5$ (समानता के नियम (ii) से दोनों पक्षों में 5 घटाने पर 5 निरस्त हो जाता है।)

$3x = 9$

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ (समानता के नियम (iv) से 3 का भाग करने पर 3 निरस्त हो जाता है।)

$x = 3$

उदाहरण–6. समीकरण $\frac{4x+5}{3} = 15$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{4x+5}{3} = 15$

$\frac{(4x+5)}{3} \times 3 = 15 \times 3$ (समानता के नियम (iii) से)

$4x + 5 = 45$

$4x + 5 - 5 = 45 - 5$ (समानता के नियम (ii) से)

$4x = 40$

$\frac{4x}{4} = \frac{40}{4}$ (समानता के नियम (iv) से)

$x = 10$

उदाहरण–7. समीकरण $4x - 2x - 5 = 4 + 6x + 3$ को हल कीजिए।

हल : $4x - 2x - 5 = 4 + 6x + 3$

$2x - 5 = 7 + 6x$ (समान पदों को जोड़ने पर)

$2x - 5 - 6x = 7 + 6x - 6x$ (समानता नियम (ii) से)

$-4x - 5 = 7$

$-4x - 5 + 5 = 7 + 5$ (समानता नियम (i) से)

$-4x = 12$

$\frac{-4x}{-4} = \frac{12}{-4}$ (समानता नियम (iv) से)

$x = -3$

प्रश्नावली – 5.1

1. नीचे दिए निम्न कथनों से समीकरण बनाइए।
   (i) दो क्रमागत संख्याओं का योग 11 है।
   (ii) टिकेंद्र व तेजराम की आयु का योग 30 है जबकि टिकेंद्र की आयु तेजराम की आयु की दुगुनी है।
   (iii) एक त्रिभुज की एक भुजा, दूसरी भुजा की दुगुनी और तीसरी भुजा के बराबर है। भुजाओं का योग 40 है।
   (iv) एक आयत की लंबाई, उसकी चौड़ाई से 3 अधिक है। उस आयत का परिमाप 15 है।
   (v) रमेश, दिनेश व सतीश के पास 2:3:4 के अनुपात में पेंसिल है। यदि पेंसिलों की कुल संख्या 18 है। तब समीकरण बनाइए।

2. नीचे दिए गए समीकरणों को हल कीजिए–
   (i) $5x + 2 = 17$ (ii) $5p + 1 = 24$
   (iii) $4x + 8x = 17x - 9 - 1$ (iv) $-7 + 3t - 9t = 12t - 5$
   (v) $3(z-2) + 5z = 2$ (vi) $-2 + (x + 4) = 8x$

3. निम्नलिखित समीकरणों के लिए कथन बनाइए–
   (i) $x+3 = 27$ (ii) $\frac{x}{2} + x = 18$ (iii) $\frac{x}{x+2} = 30$

4. समीकरणों को हल कीजिए–
   (i) $6 + (4 - m) = 8(3m + 5)$ (ii) $2(k - 5) + 3k = k + 6$
   (iii) $5p + 4(3 - 2p) = 2 + p - 10$ (iv) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{7}{75}$
   (v) $m - \frac{m-1}{2} = 1 - \frac{m-2}{3}$ (vi) $\frac{3t-2}{4} - \frac{2t+3}{3} = \frac{2}{3} - t$
   (vii) $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ (viii) $\frac{9x}{7-6x} = 15$
   (ix) $\frac{3y+4}{2-6y} = \frac{-2}{5}$

समीकरण के अनुप्रयोग (Application of Equation)

किसी समीकरण का उपयोग हम गणित के कई प्रश्नों को हल करने में करते हैं जैसे– एक आयत की लम्बाई, उसकी चौड़ाई से 11 अधिक है। यदि आयत का परिमाप 110 सेमी. है तब आयत की लंबाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए। इसमें हमें परिमाप तो दिया गया है किंतु आयत

की लंबाई एवं चौड़ाई निकालने के लिए हमें दी गई जानकारी से संबंध जोड़ना होगा। इस प्रकार के प्रश्नों का हल हम समीकरण की सहायता से ज्ञात करना सीखेंगे।

उदाहरण–8. एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई की दोगुनी से 1 सेमी. अधिक है। यदि आयत का परिमाप 110 सेमी. है। तब आयत की लंबाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि आयत की चौड़ाई w सेमी. है

तब प्रश्नानुसार आयत की लंबाई = (2W + 1) सेमी.

दिया है आयत का परिमाप = 2 (लं. + चौ.)

मान रखने पर $110 = 2(2w + 1 + w)$

$110 = 4w + 2 + 2w$

$110 = 6w + 2$

$110 - 2 = 6w + 2 - 2$

$108 = 6w$

$w = \frac{108}{6} =$ 18 सेमी.

आयत की लंबाई $(L) = 2w + 1$

$L = 2 \times 18 + 1 = 37$ सेमी.

उदाहरण–9. चार क्रमागत समपूर्णांक संख्याएँ ज्ञात कीजिए, यदि प्रथम तीन संख्याओं का योग, चौथी संख्या से 8 अधिक है।

हल : माना $2x$ एक समपूर्णांक संख्या है तब चार क्रमागत संख्याएँ

$2x,\ 2x + 2,\ 2x + 4,\ 2x + 6$

प्रश्नानुसार–

प्रथम तीन संख्याओं का योग = चौथी संख्या + 8

$2x + (2x + 2) + (2x + 4) = (2x + 6) + 8$

$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 2x + 6 + 8$

$6x + 6 = 2x + 14$

$6x + 6 - 2x = 2x + 14 - 2x$

$4x + 6 = 14$

$4x + 6 - 6 = 14 - 6$

$4x = 8$

$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$ $\qquad x = 2$

अतः वे संख्याएँ 4, 6, 8 तथा 10 होंगी।

उदाहरण–10. परिमेय संख्या $-\frac{7}{3}$ के दुगुने में क्या जोड़ें जिससे $\frac{3}{7}$ प्राप्त हो?

हल : परिमेय संख्या $-\frac{7}{3}$ का दुगुना है $2 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{14}{3}$

माना $-\frac{14}{3}$ में x जोड़ने पर $\frac{3}{7}$ प्राप्त होता है। तब–

$$-\frac{14}{3} + x = \frac{3}{7}$$

$$\frac{-14+3x}{3} = \frac{3}{7}$$

$$7\ (-14 + 3x) = 3 \times 3$$

$$[7 \times (-14)] + (7 \times 3x) = 9$$

$$(-98) + 21x = 9$$

$$-98 + 21x = 9$$

$$21x = 9 + 98$$

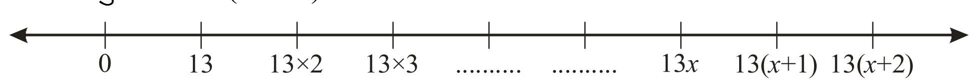
$$21x = 107$$

$$x = \frac{107}{21}$$

इस तरह, परिमेय संख्या $-\frac{7}{3}$ के दुगुने में $\frac{107}{21}$ जोड़ने पर $\frac{3}{7}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण–11. यदि 13 के तीन लगातार गुणजों का योग 390 है, तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : माना 13 का एक गुणज $13x$ है, तब अगला गुणज होगा $13(x + 1)$ और इससे अगला गुणज $13\ (x + 2)$ होगा।



13 के तीन लगातार गुणजों का योग 390 है, इसलिए–

$$13x + 13(x + 1) + 13(x + 2) = 390$$

$$13x + 13x + 13 + 13x + 26 = 390$$

$$39x + 39 = 390$$

$$39x = 390 - 39$$

$$39x = 351$$

$$x = \frac{351}{39}$$

$$x = 9$$

अतः 13 का एक गुणज $13 \times 9 = 117$ है, अगला गुणज $13 \times (9+1) = 130$ है और उससे अगला गुणज $13 \times (9+2) = 143$ है।

उदाहरण–12. दो अंकों वाली किसी संख्या में दोनों अंकों का अंतर 3 है। इस संख्या में, इसके अंकों को बदलने से प्राप्त संख्या को जोड़ने पर 143 प्राप्त होता है। दहाई का अंक बड़ा है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि दो अंकों की संख्या में इकाई का अंक x है। इकाई और दहाई के अंकों का अंतर 3 है, इसलिए दहाई का अंक $= x + 3$

इसलिए दो अंकों वाली संख्या–

$$= 10(x + 3) + x$$

$$= 10x + 30 + x$$

$$= 11x + 30$$

> दो अंकों वाली एक संख्या 43 है तो इसे हम लिख सकते हैं–
>
> $43 = (10 \times 4) + 3$

अब, इस संख्या के अंकों को आपस में बदल देते हैं, अर्थात् इकाई के अंक को दहाई के अंक की जगह और दहाई के अंक को इकाई के अंक की जगह पर लिखें, तो प्राप्त संख्या $= 10x + (x + 3)$

$$= 10x + x + 3$$

$$= 11x + 3$$

इन दोनों संख्याओं को जोड़ने पर 143 प्राप्त होता है, इसलिए–

> 43 के अंक बदलने पर प्राप्त संख्या 34 को इस तरह से लिख सकते हैं–
>
> $34 = (10 \times 3) + 4$

$$(11x + 30) + (11x + 3) = 143$$

$$11x + 30 + 11x + 3 = 143$$

$$22x + 33 = 143$$

$$22x = 143 - 33$$

$$x = \frac{110}{22}$$

$$x = 5$$

इसलिए इकाई का अंक $= 5$

तब दहाई का अंक $= 5 + 3$

$= 8$

इसलिए संख्या $= 85$

उत्तर की जाँचः– संख्या 85 के अंक बदलने पर संख्या 58 मिलती है। संख्या 85 और संख्या 58 को जोड़ने पर संख्या 143 मिलती है।

उदाहरण—13. इंद्रमणि और सोहन की वर्तमान आयु का अनुपात 4 : 5 है। 8 वर्ष के बाद इनकी आयु का अनुपात 5 : 6 होगा। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि इंद्रमणि की वर्तमान आयु $4x$ वर्ष और सोहन की वर्तमान आयु $5x$ वर्ष है।

8 वर्ष के बाद इंद्रमणि की आयु $= (4x + 8)$ वर्ष

8 वर्ष के बाद सोहन की आयु $= (5x + 8)$ वर्ष

प्रश्नानुसार, 8 वर्ष के बाद इनकी आयु का अनुपात 5 : 6 है, इसलिए—

$$\frac{4x+8}{5x+8} = \frac{5}{6}$$

$$6\ (4x + 8) = 5\ (5x + 8)$$

$$(6\times4x) + (6\times8) = (5\times5x) + (5\times8)$$

$$24x + 48 = 25x + 40$$

$$24x + 48 - 40 = 25x$$

$$24x + 8 = 25x$$

$$8 = 25x - 24x$$

$$8 = x$$

इसलिए इंद्रमणि की वर्तमान आयु $= 4x$

$= 4 \times 8$

$= 32$ वर्ष

और, सोहन की वर्तमान आयु $= 5x$

$= 5 \times 8$

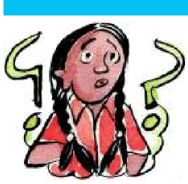
$= 40$ वर्ष

उत्तर की जाँच— 8 वर्ष के बाद इंद्रमणि की आयु $= 32 + 8 = 40$ वर्ष

और सोहन की वर्तमान आयु $= 40 + 8 = 48$ वर्ष।

दोनों की आयु का अनुपात $= \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$

प्रश्नावली – 5.2



1. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 36 वर्गमीटर है और उसके आधार की माप 12 मीटर है तब उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

2. एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई से 5 सेमी अधिक है। उसका परिमाप चौड़ाई का पांच गुना है। आयत की लंबाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

3. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण, दूसरे कोण से 15° अधिक है। तीसरा कोण, दूसरे कोण के दुगुने से 25° अधिक है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

4. तीन क्रमागत विषम पूर्णांक संख्याएँ ज्ञात कीजिए यदि उनके योग का तीन गुना मध्यसंख्या के 8 गुने से 5 अधिक है।

5. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा उसके परिमाप का $\frac{1}{4}$, दूसरी भुजा 7 सेमी तथा तीसरी भुजा परिमाप का $\frac{2}{5}$ है तब त्रिभुज का परिमाप कितना है?

6. दो अंकों वाली संख्या के अंकों का योग 8 है। अंकों का परस्पर क्रम बदलने पर प्राप्त संख्या दी गई संख्या से 18 अधिक है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

7. विमला और सरिता की आयु में 7:5 का अनुपात है। 4 वर्ष पश्चात् उनकी आयु का अनुपात 4:3 हो जायेगा। उनकी आयु ज्ञात कीजिए।

8. अलका एक संख्या सोचती है, वह उसमें 5 जोड़ती है। इसमें सोची गई संख्या के दुगुने को पुनः जोड़कर 10 घटाती है। घटाने पर 40 प्राप्त होता है, तो वह संख्या बताइए।

9. दो धनात्मक पूर्णांकों का अंतर 40 है। इन पूर्णांकों में 2:3 का अनुपात है। ये पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

10. 5 के तीन क्रमागत गुणजों का योगफल 555 है। तो ये गुणज ज्ञात कीजिए।

11. रोहित की आयु, प्रदीप की आयु के दुगुने से 5 वर्ष अधिक है। 6 वर्ष पूर्व प्रदीप की आयु, रोहित की आयु की 1/3 थी। तब दोनों की आयु ज्ञात कीजिए।

12. नदी के बहाव की दिशा में जाती हुई एक मोटर बोट दो तटीय नगरों के बीच की दूरी पांच घंटे में तय करती है। बहाव के विपरीत मोटरबोट इसी दूरी को छः घंटे में तय करती है। यदि जलधारा की चाल 2 किमी/घंटा हो, तो स्थिर जल में बोट की चाल ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. एक चर के रैखिक समीकरणों में एक ही चर का प्रयोग होता है। प्रयोग किए गए चर की अधिकतम घात 1 होती है।
2. समीकरण के दोनों पक्षों में रैखिक व्यंजक हो सकते हैं।
3. एक चर एक घात का समीकरण है– $ax + b = c$ (a, b, c वास्तविक नियत संख्याएँ हैं व $a \neq 0$ है)
4. एक चर का द्विघाती समीकरण है– $ax^2 + bx + c = d$ (a, b, c, d वास्तविक नियत संख्याएँ हैं व $a \neq 0$ है)
5. किसी भी समीकरण को हल करने से पहले व्यंजकों को सरल करते हैं।
6. समीकरणों को हम समानता के नियमों के आधार पर सरल कर सकते हैं।

संख्याओं में भी है खेल

[PLAYING WITH NUMBERS]

B662QI

06

संख्याएँ बूझना

अक्सर जब हम संख्याओं पर संक्रिया जैसे जोड़, गुणा आदि करते हैं तो हमें संख्या तथा उसके अंकों के मान पता होते हैं। क्या होगा अगर हमें संख्याओं तथा उनके अंकों के मान पता न हों?

चित्र–1

यदि हमारे पास A, M, P, N, PQ, MN, ABC जैसी संख्याएँ हों जिनका प्रत्येक अक्षर किसी एक अंक को प्रदर्शित करता हो तो हम इन अंकों के मान पता करने की संभावनाएँ कैसे सोच सकते हैं?

यदि हम ऊपर दी गई एक अंक की संख्या A, M, P, N के बारे में सोचें तो हम जानते हैं कि ये अंक 0 से लेकर 9 तक हो सकते हैं।

यदि हम दो अंकों की संख्या PQ तथा MN के बारे में सोचें तो P, Q, M तथा N भी 0 से 9 के बीच होंगे। PQ में Q इकाई के स्थान का अंक तथा P दहाई के स्थान का अंक होगा। अतः यह संख्या वास्तव में $10\,P + Q$ होगी। इसी प्रकार MN संख्या, $10\,M + N$ से व्यक्त होगी।

तीन अंकों की संख्या जैसे ABC का मान $100\,A + 10\,B + C$ होगा।

अब आप सब भी ऐसी ही कुछ संख्याओं जैसे– ML, XY, AB, PQM, XYZ को उनके स्थानीय मान के अनुसार प्रदर्शित कीजिए। कुछ चार अंकों की संख्याओं के बारे में भी सोचिए।

करके देखें

1. यदि $A = 3, B = 4, C = 5, D = 0$ हो और किसी अंक का उपयोग एक बार ही करें तो इनसे बनने वाली
   (i) सबसे बड़ी संख्या कौनसी होगी?
   (ii) ABCD व ADBC में से कौन सी संख्या बड़ी होगी?
   (iii) सबसे छोटी संख्या कौन सी होगी? क्या वह तीन अंकीय होगी या चार अंकीय?
   (iv) DBAC का मान कितना होगा? ये कितने अंकों की संख्या होगी?
2. यदि $A = 1, B = 2, C = 3, D = 4$ हो तो
   (i) $AB \times CD$ का मान ज्ञात कीजिए? (ii) $AB + CD$ कितना होगा?

संक्रिया के साथ संख्या बूझना

इस जोड़ को देखें–

$$\begin{array}{r} P \\ P \\ +P \\ \hline QP \end{array}$$

क्या आप इसमें P और Q का मान ज्ञात कर सकते हैं?

हम जानते हैं कि P और Q के मान 0 से 9 तक हो सकते हैं।

अब $P + P + P = QP$

$3P = 10Q + P$ (संख्या के विस्तारित रूप के अनुसार)

$2P = 10Q$

$\frac{P}{5} = Q$

इसका अर्थ है P ऐसा अंक है जो 5 से विभाजित है।

याने P सिर्फ 5 हो सकता है।

यदि $P = 5$ तो $\frac{5}{5} = Q$ या $Q = 1$

अब जाँचने पर $P + P + P = QP$ तो $5 + 5 + 5 = 15$

उदाहरण–1. $PQ - QP = 27$ हो तो P व Q क्या होंगे?

हल : $(10P + Q) - (10Q + P) = 27$

$10P + Q - 10Q - P = 27$

$9P - 9Q = 27$

$9(P - Q) = 27$

$P - Q = 3$

अतः P और Q के संभावित उत्तर निम्नलिखित हो सकते हैं–

यदि (i) $P = 9$ तो $Q = 6$ (ii) $P = 8$ तो $Q = 5$

(iii) $P = 7$ तो $Q = 4$ (iv) $P = 6$ तो $Q = 3$ ...... आदि

इस प्रकार हमें P व Q के 7 विभिन्न मान प्राप्त हो रहे हैं।

करके देखें

1. $\begin{array}{r} AB \\ +BA \\ \hline 77 \end{array}$ हो तो A, B के मान क्या हैं?

2. इस प्रकार कुछ और सवाल बनाइए जिनके एक से अधिक उत्तर हों।

तीन अंकों वाली संख्या बूझना

5Y1 – 23Y = 325 में 'Y' का मान क्या होगा?

बाएँ पक्ष की संख्याओं को स्थानीय मान के रूप में लिखें।

$(500 + 10Y + 1) – (200 + 30 + Y) = 325$

$501 – 230 + 10Y – Y = 325$

$271 + 9Y = 325$

$9Y = 54$ अतः $Y = 6$

गुणा व भाग वाली संक्रियाएँ बूझना

उदाहरण–2.

$$\begin{array}{r} AB \\ \times AB \\ \hline ACC \end{array}$$

हल : $(10A + B)(10A+B) = 100A^2 + 20AB + B^2$.... (1)

गुणनफल $ACC = 100A + 10C + C$.... (2)

प्रत्येक इकाई की तुलना करने पर

(i) $100A^2 = 100A$ इसलिए $A = 1$

(ii) $20AB = 10C$ इसलिए $2AB = C$

(iii) $B^2 = C$

(i), (ii) और (iii) से मिलेगा –

$A = 1$, $B = 2$, $C=4$, अतः हमारा हल होगा

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

उदाहरण–3.

$$\begin{array}{r} MN \\ \times \ 3 \\ \hline LMN \end{array}$$

(जहाँ LMN एक तीन अंकों की संख्या है)

हल : 3 और N के गुणा $(3 \times N)$ करने से इकाई के स्थान पर N मिलता है यह सिर्फ तभी संभव है जब $N = 0$ या 5 हो। MN का विस्तारित रूप $(10M + N)$ होगा।

$(10M + N)$ को 3 से गुणा करने पर– $(10M + N) \times 3$

$30M + 3N = 100L + 10M + N$ .....(i)

यदि $N = 5$ हो तो

$20M + 15 = 100L + 5$

$$20M = 100L - 10$$

$$2M = 10L - 1$$

$$M = \frac{10L - 1}{2}$$

हमें पता है कि अंक L, M और N, 0 से 9 तक की पूर्ण संख्या ही हो सकती है।

0 से 9 तक L के किसी भी मान के लिए M का उचित मान संभव नहीं है अतः N=5 संभव नहीं है। यानी N = 0 होगा। अतः समीकरण–(i) में N = 0 रखने पर

$$30M = 100\,L + 10\,M$$

$$20M = 100\,L$$

$$M = 5L$$

चूंकि M, L के मान 0 से 9 तक ही हो सकते हैं। इसलिए L के केवल दो मान संभव हैं, 0 और 1 (क्यों?)

L का मान 0 रखने पर M का मान भी 0 होगा। इससे LMN के तीनों अंक 0 हो जाएँगे। यह संभव नहीं है। इसलिए L = 1 होगा और M = 5

अतः हमारा मूल प्रश्न होगा $\begin{array}{r} 50 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 150 \end{array}$

करके देखें

1. $1B \times B = 96$ हो तो 'B' का मान ज्ञात कीजिए।
2. $73M \div 8 = 9\,N$ में 'M' तथा 'N' का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली – 6.1

निम्नलिखित सवालों में प्रयुक्त अक्षरों A, B, X, Y, Z, L, M, N के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} BA \\ +33 \\ \hline 12B \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 3XY \\ +YY2 \\ \hline 1018 \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} MN \\ \times 6 \\ \hline MLN \end{array}$ (iv) $\begin{array}{r} 1Z \\ \times Z \\ \hline 7Z \end{array}$

(v) $\begin{array}{r} XX \\ 6 \\ +YYY \\ \hline 461 \end{array}$ (vi) $\begin{array}{r} 2PQ \\ +PQ1 \\ \hline Q18 \end{array}$ (vii) $\begin{array}{r} ML \\ \times 6 \\ \hline LLL \end{array}$

संख्याओं की पहेली

आलोक और नेहा संख्याओं की पहेली बनाकर एक–दूसरे से पूछ रहे थे–

चित्र–2

नेहा : कोई भी तीन अंक सोचो और लिखो। मुझे मत दिखाना और शून्य न लेना।

आलोक : लिख लिए (कॉपी पर 3, 2 और 7 लिखता है।)

नेहा : अब इन तीनों अंकों से बनने वाली सभी दो अंकों की संख्याएँ लिखो।

आलोक : ठीक है। 32, 27, 23, 72, 37 और 73

नेहा : अब दो अंकों वाली इन सभी संख्याओं का जोड़ कर लो।

आलोक : 32 + 27 + 23 + 72 + 37 + 73 = ...

(कॉपी पर लिखकर जोड़ करता है।)

नेहा : इस जोड़ को अगर तुम 22 से भाग करो तो वह पूर्णतः विभाजित होगा और भागफल तुम्हारे द्वारा चुने गए अंकों का जोड़ होगा।

आलोक : 264 ÷ 22 = 12 हाँ, भाग तो पूरा चला गया।
अब 3, 2 और 7 का जोड़ हुआ (3 + 2 + 7) = 12
अरे हाँ! यह तुमने कैसे पता लगाया? कहीं तुमने देख तो नहीं लिया कि मैंने क्या लिखा?

नेहा : नहीं, यह तो कोई भी 3 अंक ले लो तो होगा। मुझे तुम्हारे अंक पता करने की कोई जरूरत नहीं है।

करके देखें

कोई भी एक अंक की 3 संख्याएँ चुनकर नेहा द्वारा बताई गई क्रिया करें।
क्या आपको भी आलोक की तरह ही अंकों का जोड़ मिला?

आइए समझें ऐसा क्यों है

चुने हुए तीन अंकों को हम a, b और c कहें तो इनसे बनने वाली 2 अंकों की संख्याएँ होंगी ab, bc, ac, cb, ca और ba

इनके विस्तारित रुप होंगे–

$ab = 10a + b$	$bc = 10b + c$	$ac = 10a + c$
$cb = 10c + b$	$ca = 10c + a$	$ba = 10b + a$

इन सभी का जोड़ करने पर

$= 10a + b + 10b + c + 10a + c + 10c + b + 10c + a + 10b + a$

$= 22a + 22b + 22c = 22 (a + b + c)$

याने यह जोड़ 22 का गुणज है और जोड़ में 22 का भाग देने पर उत्तर अंकों का जोड़ याने a+b+c ही आता है।

सोचें एवं चर्चा करें

1. कोई भी दो अंकों की संख्या लीजिए। अब इसके अंकों का स्थान पलटकर एक नई संख्या प्राप्त कीजिए। दोनों संख्याओं को आपस में जोड़िए। अब इसका योग 11 से पूर्णतः विभाजित होगा। क्या आप पता लगा सकते हैं यह कैसे हुआ?
2. एक तीन अंकों की संख्या सोचिए। अब इन अंकों को उल्टे क्रम में रखते हुए नई संख्या प्राप्त कीजिए। इनमें से प्राप्त छोटी संख्या को बड़ी संख्या में से घटाइए। क्या यह संख्या 99 का गुणज है? क्यों?

कौन होता किससे विभाजित

B6EXS6

विभाज्यता की जाँच–

क्या आपको पता है कि भाजकों 10, 5, 2, 3, 9 आदि से विभाज्यता की जाँच किस प्रकार की जाती है? और ये किस प्रकार कार्य करते हैं? आइए देखते हैं–

10 से विभाज्यता–

10 से विभाज्यता की जाँच करना अन्य संख्याओं की तुलना में सरल है। 10 के कुछ गुणजों को देखिए–

10, 20, 30, 40, 50, ...

तुलना के लिए कुछ ऐसी संख्याएँ लीजिए जो 10 की गुणज नहीं हैं। जैसे – 12, 25, 33, 46, 57, 64, 77, 89, ... इन संख्याओं में हम यह देख पाते हैं कि संख्याएँ जिनकी इकाई में '0' है वे 10 की गुणज हैं तथा जिन संख्याओं की इकाई में '0' नहीं हैं वे 10 की गुणज नहीं हैं। इस विश्लेषण से हमें 10 से विभाज्यता की जाँच का नियम प्राप्त होता है।

अब हम यह जानेंगे कि जाँच का यह नियम किस तरह कार्य करता है? इसके लिए हमें स्थानीय मान के नियमों का उपयोग करना होगा।

कोई संख्या ..... cba लीजिए। इसे विस्तारित रुप में लिखने पर

$.......... + 100c + 10b + a$

यहाँ a इकाई का अंक, b दहाई का अंक और c सैकड़े का अंक है। यहाँ '...' बिंदु यह दर्शाते हैं कि c के बायीं ओर और भी अंक हो सकते हैं।

यहाँ 10, 100, 1000 आदि 10 से विभाज्य हैं अतः 10b, 100c ..... भी 10 से विभाज्य होंगे। दी हुई संख्या 10 से विभाज्य होगी, जब a = 0 होगा।

स्पष्टतः कोई संख्या 10 से तभी विभाज्य होगी जब उसके इकाई का अंक 0 हो।

अब आप कुछ संख्याओं के उदाहरण दीजिए जो 10 से विभाज्य हैं।

5 से विभाज्यता : 5 के कुछ गुणजों को देखिए–

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.......

हम देखते हैं कि इनमें इकाई के अंक केवल 5 व 0 हैं जो एकांतर क्रम में हैं।

इससे हमें 5 से विभाज्यता का यह नियम प्राप्त होता है कि– यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 5 या 0 हो, तो वह संख्या 5 से विभाज्य होती है। अब इस नियम को स्पष्ट रूप से समझने के लिए आप कोई संख्या .... cba लीजिए।

इसे विस्तारित रुप में लिखिए। .... 100c + 10b + a

यहाँ a इकाई का अंक है, b दहाई का अंक है व c सैकड़े का अंक है तथा c के बायीं ओर और भी अंक हो सकते हैं। चूंकि 10, 100 ..... 10 से विभाज्य है। अतः 10b, 100c........ भी 10 से विभाज्य होंगे। ये संख्याएँ 5 से भी विभाज्य होंगी। $(10 = 5 \times 2)$ अब हम कह सकते हैं कि पूरी संख्या 5 से विभाज्य होगी जब a , 5 से विभाज्य हो या 0 हो।

करके देखें

क्या 5 से विभाजित सभी संख्याएँ 10 से भी विभाज्य हैं? कारण स्पष्ट कीजिए।

2 से विभाज्यताः 2 का गुणज निम्नलिखित है–

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ... जो कि सम संख्याएँ हैं।

इनके इकाई के अंक 2, 4, 6, 8, 0 हैं।

अतः हम कह सकते हैं कि यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0, 2, 4, 6, 8 हो तो वह संख्या 2 से विभाज्य होगी।

अब हम इस नियम की जाँच करेंगे इसके लिए कोई संख्या ....cba लीजिए।

इसका विस्तारित रुप निम्नलिखित है– .... +100c+10b+a

यहाँ इकाई का अंक a, दहाई का अंक b तथा सैकड़े का अंक c है। 10, 100 ...... 10 से विभाज्य है जो 2 से भी विभाज्य है अतः 10b, 100c...... भी 2 से विभाज्य होंगे। अब यदि दी हुई संख्या 2 से विभाज्य है तो a को भी 2 से विभाज्य होना चाहिए। लेकिन यह तभी संभव है जब a = 0,2, 4, 6, 8 हो।

9 और 3 से विभाज्यता

आपने 10, 5, व 2 की विभाज्यता की जाँच के नियमों को देखा। क्या इनके नियमों में आपने कोई विशेष बात देखी? इनमें दी हुई संख्या के इकाई के अंकों के आधार पर ही उनकी विभाज्यता का निर्णय हो जाता है।

9 और 3 की विभाज्यता के नियम इनसे भिन्न हैं। कोई संख्या 3429 लीजिए। इसका विस्तारित रुप निम्नलिखित हैः–

$$3\times1000 + 4\times100 + 2\times10 + 9\times1$$

इसे निम्नलिखित रुप में लिख सकते हैं–

$$3\times(999 + 1) + 4\times(99 + 1) + 2\times(9+1) + 9\times1$$

$$= 3\times999 + 4\times99 + 2\times9 + (3 + 4 + 2 + 9)$$

$$= 9\,(3 \times 111 + 4 \times 11 + 2 \times 1) + (3 + 4 + 2 + 9)$$

हम देखते हैं कि दी गई संख्या 9 या 3 से तभी विभाज्य होगी जब (3+4+2+9) संख्या क्रमशः 9 या 3 से विभाज्य हो।

यहाँ 3 + 4 + 2 + 9 = 18 जो कि 9 व 3 दोनों से विभाज्य है।

अब एक अन्य उदाहरण पर विचार कीजिए–

संख्या 3579 लीजिए इसका विस्तारित रुप निम्नलिखित है–

$$3\times1000+5\times100+7\times10+9\times1$$

इसे निम्नलिखित रुप में लिख सकते हैं–

$$3\times(999+1)+5\times(99+1)+7\times(9+1)+9\times1$$

$$=3\times999+5\times99+7\times9+(3+5+7+9)$$

इसमें 3+5+7+9 = 24 है जो 9 से विभाज्य नहीं है किंतु 3 से विभाज्य है। यदि कोई संख्या abcd है, तो उसका विस्तारित रूप होगा–

$$1000a + 100b + 10\,c + d = 999a + 99b + 9c + (a + b + c + d)$$
$$= 9\,(111a + 11b + c\,) + (a + b + c + d)$$

9 और 3 से विभाज्य

अतः 9 या 3 की विभाज्यता तभी संभव है, जब उस 4 अंक की संख्या के सभी अंकों का योग $(a + b + c + d)$ क्रमशः 9 या 3 से विभाज्य हो।

(i) एक संख्या 9 से विभाज्य होती है यदि इसके अंकों का योग 9 से विभाज्य हो।

(ii) एक संख्या 3 से विभाज्य होती है यदि उसके अंकों का योग 3 से विभाज्य हो।

6 से विभाज्यता की जाँच–

हम जानते हैं कि कोई भी संख्या यदि 6 से विभाज्य होगी तो वह 6 के अभाज्य गुणनखण्ड (Prime Factors) यानी 2 और 3 से भी विभाज्य होगी।

इसलिए 6 से विभाज्यता की जाँच करने के लिए उस संख्या की विभाज्यता 2 और 3 से जाँचनी पड़ेगी।

2 और 3 से विभाज्यता के नियम याद करें–

2 से विभाज्य होने के लिए संख्या का इकाई का अंक सम संख्या होनी चाहिए।

3 से विभाज्य होने के लिए संख्या के सभी अंकों का जोड़ 3 से विभाज्य होना चाहिए।

जैसे–'1248 संख्या लें।

1248 का इकाई अंक 8 है, यानि 1248, 2 से विभाज्य है और 1248 के चारों अंकों का जोड़ $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ है जो 3 से विभाज्य है।

अतः 1248, 6 से विभाज्य होगी।

7 और 11 से विभाज्यता

7 से विभाज्यता की जाँच–

91 को 7 से भाग करें। क्या 91 में 7 का पूरा भाग चला जाता है? क्या भाग करने पर शेषफल शून्य है? यदि हाँ तो क्या 91, 7 से विभाज्य है?

हाँ, 91, 7 से विभाज्य है। हमने यह कैसे जाना? यदि हमें किसी संख्या की 7 से विभाज्यता की जाँच करनी है तब हम संख्या को 7 से भाग करते हैं। यदि शेषफल शून्य हो जाए तो वह संख्या 7 से विभाज्य होती है। दो अंकों वाली संख्याओं की विभाज्यता की जाँच भाग से ही करते हैं। परंतु क्या तीन या उससे अधिक अंकों वाली संख्याओं की भी विभाज्यता की जाँच उसी प्रक्रिया से करते हैं? या कोई और भी तरीका है?

7 से विभाज्यता की जाँच के कई तरीके हैं। हम उनमें से कुछ तरीकों की मदद से विभाज्यता जाँचेंगे।

एक 3 अंकों की संख्या abc लें।

उसका विस्तारित रूप होगा– $100a + 10b + c$

$$100a + 10b + c = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$$

इसे ऐसे लिखते हैं ताकि 7 गुणनखण्ड (Common Factor) दिखें–

$$7\,(14a + b) + (2a + 3b + c)$$

यहाँ $7\,(14a + b)$ तो 7 से विभाज्य है ही। अब यदि $(2a + 3b + c)$, 7 से विभाज्य हो, तो ही संख्या abc, 7 से विभाज्य होगी।

करके देखें

ऊपर बताए गए तरीके से निम्नलिखित संख्याओं की 7 से विभाज्यता जाँचे–

373, 644, 343, 861

अब कुछ और 3 अंकों की संख्याएँ सोचिए और 7 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

तीन अंकों से बड़ी संख्या की 7 से विभाज्यता जाँचने के लिए कुछ और भी तरीके हैं। आइए, एक तरीका और देखें–

364847 को 7 से भाग दें

36484 | 7

36484
– 14 ← (7×2)
36470

3647 | 0

3647
– 0 ← (0×2)
3647

364 | 7

364
–14 ← (7×2)
350

इस पूरी प्रक्रिया को देखने में यह बात सामने आती है कि संख्या के इकाई अंक का दुगुना किया गया है और उस अंक को छोड़कर बची संख्या में अंक के दुगुने को घटाया गया है।

$35 \,|\, 0$

35

$-0 \quad \leftarrow (0 \times 2)$

35

$\because$ 35, 7 से विभाज्य है, अतः 364847 भी 7 से विभाज्य है।

11 से विभाज्यता की जाँच–

कोई संख्या $abcd$ लें। इसका विस्तारित रूप है– $(1000\,a + 100\,b + 10c + d)$

इसको ऐसे भी लिख सकते हैं–

$(1001 - 1)\,a + (99 + 1)\,b + (11 - 1)\,c + d$

इसे इस तरह लिखते हैं ताकि 11 एक गुणनखण्ड की तरह दिखाई दे–

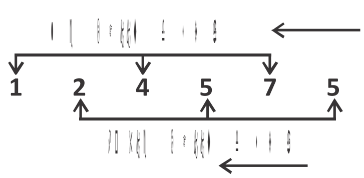
$11\,(91a + 9b + c\,) - (a - b + c - d)$

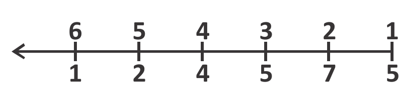
$11\,(91\,a + 9b + c)$ तो 11 से विभाज्य है ही।

यदि $a - b + c - d, 0$ हो या 11 से विभाज्य हो, तो पूरी संख्या $abcd$ भी 11 से विभाजित होगी।

अतः नियम है कि 4 अंकों की संख्या के सम स्थान पर स्थित अंकों के जोड़ व विषम स्थान पर स्थित अंकों के जोड़ में अंतर यदि 11 से विभाज्य है अथवा 0 है तो संख्या 11 से विभाज्य है।

संख्या 124575 के लिए जाँच करते हैं–





अंतर = (विषम स्थान के अंकों का योग) – (सम स्थान के अंकों का योग)

= (5 + 5 + 2) – (7 + 4 + 1)

= 12 – 12

= 0

अंतर शून्य है, अतः संख्या 11 से विभाज्य है।

यहाँ अंतर लेने का अर्थ बड़े योग में से छोटे योग को घटाना है।

करके देखें

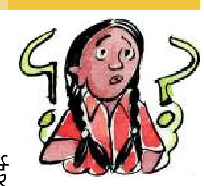
संख्या 19151 की 11 से विभाज्यता जाँचें।

इसी तरह 13 की विभाज्यता पता करने के रोचक नियम है। सोचें और दोस्तों से चर्चा करके खोजने की कोशिश करें।

करके देखें

1. क्या 3 से विभाजित होने वाली सभी संख्याएँ 9 से विभाज्य हैं? क्यों अथवा क्यों नहीं?
2. कोई भी एक ऐसी संख्या चुनो जो 6 से पूर्णतः विभाजित हो। इसी संख्या को 2 तथा 3 से विभाजित करके देखो। क्या यह संख्या 2 तथा 3 दोनों संख्याओं से विभाजित है? 6 से विभाज्यता नियम के बारे में आप क्या कह सकते हैं?
3. चार अंकों 2, 5, 4 और 7 से बनने वाली वे संख्याएँ बताओ जो 15 से पूर्णतः विभाजित हैं। 15 से भाग दिए बिना आप यह कैसे पता करेंगे की इनमे से कौन–सी संख्याएँ 15 से विभाजित होंगी। (विभाज्यता नियमों का प्रयोग कीजिए।)
4. ऐसी सबसे छोटी संख्या खोजें जो 7 और 11, दोनों से विभाजित हो।

प्रश्नावली – 6.2



1. निम्नलिखित में से कौन–सी संख्याएँ 5 और 10 की गुणज हैं?

   316, 9560, 205, 311, 800, 7936
2. दो अंकों वाली एक ऐसी संख्या जो 3 से विभाज्य है उसका इकाई का अंक 8 है तो दहाई के अंक क्या–क्या हो सकते हैं?
3. संख्या 35P, 5 का एक गुणज है तो P का मान बताइए।
4. 6A 3B, 9 से विभाजित एक संख्या है। A तथा B के मान ज्ञात कीजिए।
5. निम्नलिखित संख्याओं में 7 से विभाज्यता की जाँच करें–

   (i) 672 (ii) 905 (iii) 2205 (iv) 9751
6. निम्नलिखित संख्याओं में 11 से विभाज्यता की जाँच करें–

   (i) 913 (ii) 987 (iii) 3729 (iv) 198
7. निम्नलिखित संख्याओं में 13 से विभाज्यता की जाँच करें–

   (i) 169 (ii) 2197 (iii) 3146 (iv) 5280

B6NTTT

हमने सीखा

1. हम संख्याओं को व्यापक रूप में लिख सकते हैं, जैसे दो अंक की संख्या ab को $10a+b$, 3 अंक की संख्या abc को $100a + 10b + c$ आदि।
2. हम पहेलियों या संख्या खेलों को हल करने में, संख्याओं के व्यापक रूप की सहायता लेते हैं।
3. किसी संख्या की 2, 3, 5, 6, 7, 9 व 11 से विभाज्यता का नियम जाना।

वाणिज्य गणित
COMMERCIAL MATHEMATICS

इकाई – 3

आओ वाणिज्य गणित का इतिहास जानें.....

अध्ययन की सुविधा की दृष्टि से गणित के जिस हिस्से को हम वाणिज्य गणित के शीर्षक के अंतर्गत इस पुस्तक में शामिल कर रहे हैं वह इसी नाम से जाना जाता रहा हो यह जरूरी नहीं है। हम जब दुनिया के इतिहास के पन्ने पलटते हैं तो यह पता चलता है कि गणित किसी न किसी रूप में समय के हर खंड में उपस्थित रहा है। चाहे वह रहने के लिए घर बनाने, चाहे खेती के लिए जमीन तैयार करने, चाहे जीवन निर्वाह के लिए चीजों के आदान–प्रदान करने से संबंधित रहा हो, गणित लोक जीवन में हमेशा उपस्थित रहा है।

मनुष्य अपनी जरूरत की हर चीज न ही खुद बना सकता, न ही पैदा कर सकता है, उसे अपनी जरूरतों के लिए दूसरों पर निर्भर रहना ही पड़ता है। पुराने समय में भी श्रम या वस्तु के बदले श्रम या वस्तु का आदान–प्रदान हुआ करता था। इसका उदाहरण आज भी दूर–दराज के गावों में देखने को मिल जाएगा जहाँ कई छोटे–छोटे किसान मिलकर बारी–बारी से एक दूसरे के खेत जोतते हैं। श्रम के बदले अनाज का प्रचलन तो अभी भी जारी है। अरब की कहानियों में सौदागरों का जिक्र बार–बार आता है, भारत में व्यापार करने पुर्तगालियों और अंग्रजों का आना तो अभी चार–पाँच सदियों पुरानी बात है।

गणित के इतिहास पर दृष्टि डालें तो ऐसे कई प्रमाण मिलते हैं जिनमें लेन–देन के लिए गणित का उपयोग दिखाई पड़ता है। यहाँ आपके लिए दो उदाहरण दिए जा रहे हैं।

सन् 1881 में पेशावर जिले के भक्षाली गाँव में खुदाई से कुछ हस्त लिपियाँ प्राप्त हुईं। ये प्राचीन शारदा लिपि में लिखी गई हैं। इन हस्तलिपियों के तीन भाग क्रमशः सन् 1927 और 1933 में कलकत्ते के भारतीय पुरातत्व विभाग से प्रकाशित हुए। डॉ. होर्नल (Hoernel) ने इन हस्तलिपियों पर तीन लेख लिखे हैं।

इन हस्तलिपियों की विषय वस्तुओं में सुवर्ण गणित, आय–व्यय तथा हानि–लाभ पर भी सामग्री लिखी गई है। विद्वानों का अनुमान है कि ये हस्तलिपियां तीसरी या चौथी शताब्दी ई. की हैं। डॉ. होर्नल के लेख में ब्याज पर कुछ प्रश्नों का उल्लेख है। उनमें से एक प्रश्न है–

''तीन व्यापारियों में से एक के पास 7 घोड़े हैं, दूसरे के पास 9 खच्चर और तीसरे के पास 10 ऊँट हैं। उनमें से प्रत्येक इस शर्त पर तीन पशु दे देता है कि इन पशुओं को तीनों में इस प्रकार बराबर–बराबर बाँटा जाए कि अंत में तीनों की संपत्ति समान हो जाए। प्रत्येक व्यापारी की मौलिक संपत्ति कितनी थी और प्रत्येक पशु का क्या मूल्य था?''

12 वीं शताब्दी के पूर्वार्द्ध में भास्कर को गणित के विशेष व्यक्ति के रुप में जाना जाता है। इनका जन्म सन् 1114 ई.को हुआ था। ये उज्जैन वेधशाला के निदेशक थे। इनका ग्रंथ "लीलावती" विश्व प्रसिद्ध है। इस ग्रंथ का फारसी अनुवाद 1587 में अब्दुल फैजी ने किया था तथा अंग्रेजी अनुवाद सन् 1816 में टेलर (Taylor) ने किया था। यह अनुवाद 1827 में कलकत्ते में छपा। गणित के इस ग्रंथ लीलावती में गणित की विभिन्न इकाईयों पर बात की गई है, जिनमें मुख्य रुप से पूर्णांक और भिन्न, ब्याज, श्रेणियाँ और श्रेणियाँ क्रमचय आदि के साथ व्यापार गणित का उल्लेख भी मिलता है।

ये जानकारियाँ अलग–अलग ग्रंथों से संकलित कर प्रस्तुत की गई हैं। शिक्षक एवं विद्यार्थी अन्य स्रोतों से वाणिज्य गणित के संबंध में और भी जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं।

राशियों की तुलना

[COMPARING QUANTITY]

07

जब हम एक जैसी दो राशियों की तुलना के बारे में बात करते हैं तो हमारे सामने सबसे पहले अनुपात और समानुपात के उदाहरण आते हैं। अनुपात क्या है? क्या समानुपात, अनुपात से अलग है? इन्हें समझने के लिए आइए कुछ उदाहरण देखते हैं।

कक्षा के सभी बच्चे अपने बालिश्त (बित्ता) से अपनी एड़ी से घुटने तक की लम्बाई नाप रहे थे।

नीलम – मेरी एड़ी से घुटने तक की लम्बाई तो 2 बालिश्त 4 अंगुल है।

किरण – मेरी भी यह लम्बाई 2 बालिश्त 4 अंगुल है।

फिर एक–एक करके सभी बच्चे कहने लगे हमारी भी एड़ी से घुटने तक की लम्बाई 2 बालिश्त 4 अंगुल है।

आप भी अपनी बालिश्त से अपनी एड़ी से घुटने तक की लम्बाई नापिए।

क्या हम कह सकते हैं कि बालिश्त की लम्बाई और एड़ी से घुटने तक की लम्बाई का अनुपात निश्चित है?

एक और नपाई

फिर माही ने कहा अब हम हाथ की लम्बाई (कंधे से कलाई तक) बालिश्त से नाप कर देखते हैं।

सौरभ – यह लम्बाई भी तो 2 बालिश्त 4 अंगुल है।

माही – मेरी भी यही आई।

सभी बच्चों की कंधे से कलाई तक की नाप 2 बालिश्त 4 अंगुल आई।

आप भी नाप कर देखें। हम कह सकते हैं कि बालिश्त की लम्बाई और हाथ की लम्बाई का अनुपात भी निश्चित है।

हम यह भी देखते हैं कि बालिश्त व एड़ी से घुटने तक की लम्बाई का अनुपात और बालिश्त व कलाई से कंधे तक की लम्बाई का अनुपात समान है, हम इन्हें समानुपाती कहेंगे।

यह भी देखें

इसी प्रकार यदि एक बैग में 3 काली व 9 सफेद गेंदें हैं तो हम कह सकते हैं कि–

1. काली गेंदों की संख्या, सफेद गेंदों की संख्या की एक तिहाई $\left(\frac{1}{3}\right)$ है।

2. सफेद गेंदों की संख्या काली गेंदों की संख्या की तिगुनी हैं।

काली गेंदें	:	सफेद गेंदें
3	:	9
1	:	3

इसी प्रकार यदि केले के पौधे की ऊँचाई 20 सेमी. व आम के पौधे की ऊँचाई 60 सेमी. हो तो उनका अनुपात होगा–

केले के पौधे की ऊँचाई	:	आम के पौधे की ऊँचाई
20	:	60
1	:	3

यह वही अनुपात है जो काली गेंदों व सफेद गेंदों के बीच का था। अतः यह **समानुपाती** है।

सोचें एवं चर्चा करें

अपने आस–पास से कोई 5 उदाहरण बताइए जहाँ वस्तुओं की संख्याओं के निश्चित अनुपात या समानुपात मिलते हों।

रेहाना कक्षा आठवीं और फरीदा कक्षा नवीं में पढ़ती हैं। दोनों को आज अपनी–अपनी कक्षा में गणित विषय का परिणाम बताया गया है। रेहाना और फरीदा ने घर जाकर अपनी मम्मी को अपना–अपना परिणाम बताया।

रेहाना : मम्मी मुझे गणित में 100 में से 80 अंक प्राप्त हुए हैं।

मम्मी : अच्छा! और फरीदा तुम्हें?

फरीदा : मुझे 150 में से 110 अंक प्राप्त हुए हैं।

रेहाना : अरे! दीदी का परिणाम तो मुझसे भी अच्छा है।

मम्मी : कैसे?

रेहाना : दीदी को मुझसे ज्यादा अंक प्राप्त हुए हैं, इसलिए दीदी का परिणाम मुझसे अच्छा है।

फरीदा : अरे हाँ! मुझे तो 110 अंक प्राप्त हुए हैं और रेहाना को तो 80 अंक ही मिले हैं।

मम्मी : लेकिन फरीदा, रेहाना को तो 100 में से 80 अंक मिले हैं और तुम्हें तो 150 में से 110 अंक मिले हैं, तो तुमने यह कैसे पता लगाया कि तुम्हारा परिणाम रेहाना से ज्यादा अच्छा है?

फरीदा : मम्मी, मैंने ऐसे किया।

रेहाना को मिले – 80 अंक

और मुझे मिले – 110 अंक

फिर मैंने 110 में से 80 को घटाया।

110 – 80 = 30

तो मुझे रेहाना से 30 अंक अधिक मिले हैं, इसलिए मेरा परिणाम रेहाना से अच्छा है।

मम्मी : लेकिन तुम दोनों के पूर्णांक तो अलग–अलग हैं, इसलिए हम यह नहीं कह सकते कि किसका परिणाम अच्छा है। जो–जो अंक मिले हैं उन्हें हम कुल अंकों के अनुपात में देखें तो कह सकते हैं–

रेहाना को अंक मिले– $\frac{80}{100}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ और

फरीदा को अंक मिले– $\frac{110}{150}=\frac{11}{15}$

अब हम दोनों की तुलना करने के लिए हर को समान करेंगे तो

रेहाना के अंक– $\frac{4}{5}\times\frac{3}{3}=\frac{12}{15}$ यानी 15 में से 12

फरीदा के अंक– $\frac{11}{15}$ यानी 15 में से 11

चूंकि $\frac{12}{15}>\frac{11}{15}$ तो रेहाना का परिणाम ज्यादा अच्छा है।

फरीदा : क्या इसे किसी और तरीके से भी कर सकते हैं?

मम्मी : हाँ! इसे हम प्रतिशत के द्वारा भी कर सकते हैं।

प्रतिशत क्या है?

प्रतिशत राशियों की तुलना का एक अलग तरीका है। जब हम प्रतिशत (%) के आधार पर तुलना करते हैं तो कुल राशि को सौ मान लेते हैं।

जैसे एक बैग में 12 गेंद में से 3 काली व 9 सफेद है तो काली गेंद का प्रतिशत

$$\frac{3}{12}\times100=25\%$$

सफेद गेंद का प्रतिशत $\frac{9}{12} \times 100 = 75\%$

तो हम कह सकते हैं कि बैग में 25% काली व 75% सफेद गेंदें हैं।

प्रतिशत का अर्थ प्रति सौ से है, इसे '%' चिह्न से प्रदर्शित करते हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

निम्नलिखित उदाहरणों को ध्यान से देखिए और चर्चा कीजिए कि प्रत्येक के लिए अनुपात एवं प्रतिशत में कौन–सी विधि अधिक उपयुक्त है?

1. इडली के मिश्रण में होता है–

$\frac{1}{3}$ उड़द की दाल	33.3% उड़द की दाल
$\frac{2}{3}$ चावल	66.6% चावल

2. कक्षा में बच्चों की संख्या है–

लड़कियाँ : लड़के	60% लड़कियाँ
3 : 2	40% लड़के

प्रतिशत का अनुप्रयोग (Application of Percentage)

बट्टा

दीपक को अपने स्कूल के लिए कुछ सामान खरीदना हैं।

वह बाजार गया। उसने देखा कि स्टेशनरी की दुकान के बाहर लिखा हुआ था, प्रत्येक वस्तु की खरीद पर 6 प्रतिशत की छूट।

दीपक ने उस दुकान से एक पैकेट पैंसिल का खरीदा और दुकानदार से पूछा कि इस एक पैकेट के कितने रुपये हुए?

दुकानदार : यह 50 रुपये का है लेकिन 6% की छूट होने के कारण तुम्हें 47 रुपये देने होंगे।

दीपक : अच्छा! यह कैसे पता लगाया?

दुकानदार : छूट या बट्टा वस्तु के निर्धारित मूल्य (अंकित मूल्य) पर होता है इसलिए छूट की राशि को उससे घटाकर वस्तु बेचते हैं जिससे वस्तु के बेचने का मूल्य उसके निर्धारित या अंकित मूल्य से कम हो जाता है।

बट्टा अथवा छूट = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

बट्टे की दर प्रतिशत में व्यक्त की जाती है और सदैव अंकित मूल्य पर ही ज्ञात की जाती है।

उदाहरण–1. एक शर्ट की कीमत 300 रु. है और दुकानदार उसे 20% छूट पर बेचता है तो शर्ट पर बट्टा व विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए?

हल : अंकित मूल्य = 300 रु., छूट (बट्टे) की दर = 20%

100 रु. अंकित मूल्य पर 20 रु. बट्टा है,

तो 1 रु. अंकित मूल्य पर बट्टा होगा $\frac{20}{100}$ रु.

300 रु. पर बट्टा $= \frac{20}{100} \times 300$ रु. = 60 रु.

विक्रय मूल्य = 300 – 60 = 240 रुपये

उदाहरण–2. एक किताब 10% की छूट पर 45 रुपये में बेची गई। किताब पर कितना मूल्य छपा होगा?

हल : 10 रु. की छूट 100 रु. अंकित मूल्य पर

उसका विक्रय मूल्य 100 – 10 = 90 रु.

तुलना करने पर–	विक्रय मूल्य	–	अंकित मूल्य
	90	–	100
	45	–	?

जब किताब 90 रु. में बेची जाती तो उसका अंकित मूल्य 100 रु. होता

तो, 1 रु. में बेचे जाने पर अंकित मूल्य $\frac{100}{90}$ रु. होता।

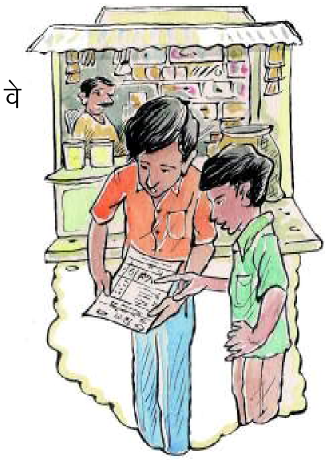
यदि 45 रु. में बेची गई तब अंकित मूल्य होगा– $\frac{100}{90} \times 45 = 50$ रु.

अतः किताब पर छपा मूल्य 50 रु. होगा।

करके देखें

1. 800 रु. मूल्य की एक साड़ी 15% बट्टे पर बेची जाती है। साड़ी का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए?
2. सेल के दौरान एक दुकान सभी वस्तुओं के अंकित मूल्य पर 15% बट्टा देती है। 1,750 रुपये अंकित मूल्य वाले एक जींस और 650 रुपये अंकित मूल्य वाले एक कमीज को खरीदने के लिए किसी ग्राहक को कितना भुगतान करना पड़ेगा?
3. माही एक जोड़ी जूते किसी सेल से खरीदकर लाया जिस पर दिए गए बट्टे की दर 20% थी। यदि उसके द्वारा भुगतान की गई राशि 1,200 रुपये है तो जूते का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

बिक्री कर (Sales Tax)



मनीष व साहिल ने दुकान से कुछ सामान खरीदा। दुकानदार ने उन्हें बिल दिया। वे दोनों उस बिल को ध्यान से देखने लगे।

बिल

बिल संख्या : 27 दिनांक : 13.02.95

नाम – मनीष

क्र.सं.	वस्तु	मात्रा	दर	राशि
1.	साबुन	10	19	190
2.	टूथपेस्ट	1	40	40
3.	ukfj;y rsy (200 ml.)	2	85	170
	कुल योग	–	–	400
	बिक्री कर 5%			20
	कुल			420

साहिल : ये बिक्री कर (Sales Tax) क्या होता है?

मनीष : किसी वस्तु के विक्रय मूल्य पर सरकार द्वारा लिए जाने वाले कर को बिक्री कर कहते हैं।

उदाहरण–3. राजन ने एक कूलर 8% बिक्री कर सहित 2,700 रुपये में खरीदा। बिक्री कर के जुड़ने से पहले का कूलर का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : 8% बिक्री कर का अर्थ है कि यदि बिक्री कर रहित मूल्य 100 रुपये है तो बिक्री कर सहित मूल्य 108 रुपये है।

अब यदि बिक्री कर सहित मूल्य 108 रु. है तो वास्तविक मूल्य 100 रुपये है।

अतः जब बिक्री कर सहित मूल्य 2,700 रु. है तो वास्तविक मूल्य

$$= \frac{100}{108} \times 2,700$$

= 2,500 रुपये

करके देखें

1. जब भी आप अपने परिवार के साथ खरीदारी के लिए बाजार जाते हैं, तो बिल लेते समय दुकानदार आपसे किन–किन वस्तुओं की खरीदारी पर बिक्री कर लेता है उसकी सूची बनाएँ। बाद में अपनी कक्षा में साथियों से चर्चा करें।

2. आप बाजार में कोई सामान खरीदने जाते हैं। यदि उस सामान पर 10% की छूट हो तथा 5% बिक्री कर देना हो तो उस सामान को खरीदने में आपको निम्नलिखित में से किस स्थिति में फायदा होगा–

(i) 10% की छूट लेकर 5% बिक्री कर देने में

(ii) 5% बिक्री कर देने के पश्चात् 10% की छूट लेने में।

B77KX4

प्रश्नावली – 7.1

1. मोहन अपनी मासिक आय का 75% खर्च करने के बाद 3,950 रुपये बचाता है। उसकी मासिक आय कितनी है?

2. कक्षा 10 में 60% लड़कियाँ हैं और उनकी संख्या 18 है तो कक्षा में लड़के व लड़कियों की संख्या में अनुपात क्या होगा? कक्षा में कुल कितने छात्र–छात्राएँ हैं?

3. 950 रुपये अंकित मूल्य वाली वस्तु 760 रुपये में बेची जाती है। बट्टा और बट्टा प्रतिशत कितना है?

4. ललिता ने एक माइक्रोवेव ओवन 12% बिक्री कर सहित 9,016 रुपये में खरीदा। बिक्री कर को जोड़ने से पहले का मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. एक आटा चक्की का मूल्य 1,30,000 रुपये है। इस पर 7% की दर से बिक्री कर वसूला जाता है। यदि श्वेता इस आटा चक्की को खरीदती है तो उसके द्वारा भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

6. एक मशीन 8% बट्टे पर 1,748 रुपये में बेची जाती है। मशीन का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

7. दो टोकरियाँ हैं। पहली टोकरी में 8 आम व 4 तरबूज हैं, दूसरी टोकरी में 14 आम व 7 तरबूज हैं। पता करें कि दोनों टोकरियों में फलों का अनुपात समान है या असमान?

8. निम्नलिखित वस्तुओं को खरीदने पर यदि 5% बिक्रीकर जुड़ता है तो प्रत्येक का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए?

(i) 200 रुपये वाली शर्ट

(ii) 30 रुपये प्रति किलोग्राम की दर से 5 किग्रा. शक्कर

9. सरिता ने एक कूलर 15% कर सहित 5,750 रुपये में खरीदा। कर के जुड़ने से पहले कूलर का मूल्य ज्ञात कीजिए।

10. सूरज ने एक टेलीविजन 8% बिक्री कर सहित 10,260 रुपये में खरीदा। बिक्री कर को जोड़ने से पहले का उसका मूल्य ज्ञात कीजिए।

ब्याज (Interest)

किसी धन के उपयोग के बदले दिए या लिए गए अतिरिक्त धन को ब्याज कहते हैं।
ब्याज की गणना दो प्रकार से की जाती है।

1. साधारण ब्याज   2. चक्रवृद्धि ब्याज

साधारण ब्याज (Simple Interest)

साधारण ब्याज की गणना विधि से आप परिचित हैं, आइए इसे एक उदाहरण से समझें।

उदाहरण–4. 10,000 रुपये का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन = 10,000 रुपये   दर = 10% वार्षिक   समय = 3 वर्ष

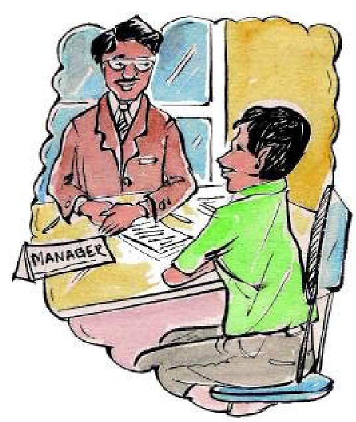
हम जानते हैं, साधारण ब्याज $= \dfrac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

$= \dfrac{10,000 \times 10 \times 3}{100}$

= 3,000 रुपये

ब्याज व चक्रवृद्धि ब्याज (Interest and Compound Interest)

सुधीर ने कार खरीदने के लिए अजय से 2,00,000 रुपये 8% वार्षिक दर से 4 वर्ष के लिए उधार लिए। शर्त यह थी कि प्रत्येक वर्ष के अंत में उस वर्ष का ब्याज जमा करना होगा। पहले वर्ष उसे ब्याज के 16,000 रुपये जमा कराने थे। लेकिन किसी कारण से वह यह राशि नहीं जमा करा पाया। अगले वर्ष वह बकाया राशि व इस वर्ष का ब्याज जमा करने के लिए अजय के पास गया। अजय ने सुधीर से कहा– तुम्हें दोनों वर्षों का ब्याज मिलाकर 33,280 रुपये देने होंगे।



सुधीर ने कहा कि दो वर्षों का ब्याज मिलाकर (16,000 + 16,000) 32,000 रुपये होते हैं।

अजय ने कहा– हम आपसे कोई अतिरिक्त रुपये नहीं ले रहे हैं। यह तो पिछले साल नहीं चुकाए गए ब्याज पर ब्याज है। यह चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।

उदाहरण–5. साधना बैंक से 10,000 रुपये 10% की वार्षिक दर से 3 वर्ष के लिए उधार लेती है। उसे उक्त राशि को अतिरिक्त राशि (ब्याज) के साथ वापस करना पड़ता है। 3 वर्ष के अंत में चक्रवृद्धि ब्याज और लौटाई जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

1. पहले वर्ष का मूलधन $P_1 = 10,000$ रुपये

पहले वर्ष का ब्याज रुपये $10,000 \times \frac{10}{100} = 1,000$

$SI_1 = 1,000$ रुपये

2. दूसरे वर्ष का मूलधन $P_2 = P_1 + SI_1$

$= 10,000 + 1,000 = 11,000$ रुपये

अतः दूसरे वर्ष का ब्याज $SI_2 = 11,000 \times \frac{10}{100}$

$= 1,100$ रुपये

3. तीसरे वर्ष का मूलधन $P_3 = P_2 + SI_2$

$= 11,000 + 1,100$

$= 12,100$ रुपये

इसी प्रकार तीसरे वर्ष का ब्याज $SI_3 = 12,100 \times \frac{10}{100}$

$= 1,210$ रुपये

4. अतः भुगतान की जाने वाली राशि $= P_3 + SI_3$

$= 12,100 + 1,210$

$= 13,310$ रुपये

कुल ब्याज $= SI_1 + SI_2 + SI_3$

$= 1,000 + 1,100 + 1,210$

$= 3,310$ रुपये

क्या चक्रवृद्धि ब्याज की राशि साधारण ब्याज से भिन्न होगी?

चलो पता करते हैं–

तीन वर्ष का साधारण ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$

$= \frac{10,000 \times 3 \times 10}{100}$

$= 3,000$ रुपये

यहाँ हम देखते हैं कि चक्रवृद्धि ब्याज के कारण 310 रुपये का अधिक भुगतान करना पड़ेगा। साधारण ब्याज के संदर्भ में प्रत्येक वर्ष मूलधन समान रहता है जबकि चक्रवृद्धि ब्याज में यह प्रत्येक वर्ष के बाद बदल जाता है।

आइए चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की संक्षिप्त विधि (सूत्र) ज्ञात करने का प्रयास करें।

माना मूलधन = P दर = R%

समय = n मिश्रधन = A

तब प्रथम वर्ष का ब्याज $I_1 = \frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

इस अध्याय में n वार्षिक, छःमाही या तिमाही गणना में क्रमशः वर्षों, छःमाहियों या तिमाहियों की संख्या को व्यक्त करता है।

प्रथम वर्ष के बाद मिश्रधन $A_1 = P_1 + \frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

$$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

$= P_2$ (दूसरे वर्ष के लिए मूलधन)

द्वितीय वर्ष का ब्याज $I_2 = \frac{P_2 \times R \times 1}{100} \qquad = P_2\left(\frac{R}{100}\right)$

$$= P_1 \times \left(1 + \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$$

∴ दो वर्ष बाद मिश्रधन

$$A_2 = P_2 + I_2$$

$$A_2 = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) + P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$$

$$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

$$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2$$

$= P_3$ (तीसरे वर्ष के लिए मूलधन)

तृतीय वर्ष का ब्याज $I_3 = \frac{P_3 \times R \times 1}{100} \qquad = P_3\left(\frac{R}{100}\right)$

$$I_3 = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 \times \frac{R}{100}$$

∴ तीन वर्ष बाद मिश्रधन $A_3 = P_3 + I_3$

$$A_3 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 + P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 \times \frac{R}{100}$$

$$A_3 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 \times \left(1+\frac{R}{100}\right)$$

$$A_3 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

इस प्रकार n वर्ष के अंत में कुल राशि (मिश्रधन)

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

मानक रूप में– $$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

$$C.I. = A - P$$

$$C.I. = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

$$C.I. = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$$

अतः इस सूत्र का उपयोग करके चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करते हैं।

उदाहरण–6. 5,600 रुपये का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

यहाँ मूलधन (P) = 5,600 रुपये; दर (R) = 5% वार्षिक; समय (n) = 2 वर्ष

अतः $A = 5,600 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$

$A = 5,600 \times \left(1 + \frac{1}{20}\right)^2$

$A = 5,600 \times \left(\frac{21}{20}\right)^2 = 5,600 \times \left(\frac{21}{20}\right) \times \left(\frac{21}{20}\right)$

$A = 6,174$ रुपये

$\therefore$ चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन − मूलधन

= 6,174 − 5,600 = 574 रुपये

उदाहरण–7. श्याम ने राष्ट्रीय बैंक में 64,000 रुपये जमा किये। यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर $2\frac{1}{2}\%$ वार्षिक हो तो 3 वर्ष पश्चात् उसे कुल कितनी राशि प्राप्त होगी? ब्याज की राशि भी बताएँ?

हल : हम जानते हैं कि $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$

यहाँ मूलधन (P) = 64,000 रुपये

दर (R) $2\frac{1}{2}\% = \frac{5}{2}\%$ वार्षिक ; समय (n) = 3 वर्ष

अतः $A = 64,000 \times \left(1 + \frac{5/2}{100}\right)^3$

$A = 64,000 \times \left(1 + \frac{5}{2 \times 100}\right)^3$

$A = 64,000 \times \left(1 + \frac{1}{40}\right)^3$

$A = 64,000 \times \left(\frac{41}{40}\right)^3$

$A = 64,000 \times \left(\frac{41}{40}\right) \times \left(\frac{41}{40}\right) \times \left(\frac{41}{40}\right)$

$A = 41 \times 41 \times 41$ = 68,921 रुपये

बैंक से प्राप्त ब्याज की राशि = मिश्रधन – मूलधन

= 68,921 – 64,000 = 4,921 रुपये

करके देखें

1. 15,000 रुपये का 2 वर्ष के लिए 6% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. 8,000 रुपये का 3 वर्ष के लिए $5\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
3. निम्नलिखित के लिए कुल राशि एवं चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

   (i) 10,700 रुपये पर 3 वर्ष के लिए $14\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर से।

   (ii) 18,000 रुपये पर $2\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से।

अर्द्धवार्षिक एवं तिमाही संयोजन पर चक्रवृद्धि ब्याज की गणना

वर्तमान में कई कार्यों एवं बैंकों में ब्याज की गणना वार्षिक न करके अर्द्धवार्षिक या त्रैमासिक की जाती है अर्थात हर छः माह अथवा तीन माह में मूलधन बदल जाता है।

जब ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित किया जाता है, तो एक वर्ष में दो छः माही (अर्द्धवार्षिक) होता है और ब्याज की दर आधी हो जाती है तथा यदि ब्याज तिमाही संयोजित किया जाए, तो इस स्थिति में एक वर्ष में 4 तिमाही होती है और ब्याज की दर एक चौथाई हो जाती है।

इनकी गणना निम्नानुसार की जाती है–

1. अर्द्धवार्षिक संयोजन होने पर–

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(1 + \frac{\text{अर्द्धवार्षिक ब्याज दर}}{100}\right)^{\text{अर्द्धवार्षिक की संख्या}}$$

2. तिमाही संयोजन होने पर–

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(1 + \frac{\text{तिमाही ब्याज दर}}{100}\right)^{\text{तिमाही की संख्या}}$$

करके देखें

1. डेढ़ वर्ष के लिए 5% वार्षिक दर से 4,000 रुपये का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

2. यदि ब्याज का संयोजन अर्द्धवार्षिक हो तो 1,500 रुपये पर 10% वार्षिक दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज की गणना कीजिए।

3. दीपक ने एक बैंक से 80,000 रुपये कर्ज लिया। यदि ब्याज की दर 10% प्रति वर्ष और समय 2 वर्ष हो तो उसके द्वारा कुल देय राशि में अंतर ज्ञात कीजिए जब–

   (i) वार्षिक संयोजन हो (ii) अर्द्धवार्षिक संयोजन हो

उदाहरण–8. रुपये 15,625 का 8% वार्षिक ब्याज की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए। यदि ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक हो।

हल : यहाँ ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक है–

अतः समय $(n) = 1\frac{1}{2}$ वर्ष = 3 अर्द्धवार्षिक

दर $(R) =$ 8% वार्षिक $= \frac{8}{2}\%$ अर्द्धवार्षिक = 4% अर्द्धवार्षिक

मूलधन $(P) =$ 15,625 रुपये

$$\therefore \text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(1 + \frac{\text{अर्द्धवार्षिक ब्याज दर}}{100}\right)^{\text{अर्द्धवार्षिक की संख्या}}$$

$$\text{मिश्रधन} = 15,625 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right)^3 = 15,625 \times \left(1 + \frac{1}{25}\right)^3$$

$$\text{मिश्रधन} = 15,625 \times \left(\frac{26}{25}\right)^3 = 15,625 \times \left(\frac{26}{25}\right) \times \left(\frac{26}{25}\right) \times \left(\frac{26}{25}\right)$$

$$\text{मिश्रधन} = 26 \times 26 \times 26 = 17,576 \text{ रुपये}$$

$\therefore$ चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

= 17,576 – 15,625 = 1,951 रुपये

उदाहरण–9. 1,000 रुपये का 9 माह का 8% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए? यदि ब्याज की गणना तिमाही की जाए।

हल : यहाँ ब्याज की गणना तिमाही है–

अतः समय (n) = 9 माह = 3 तिमाही

दर (R) = 8% वार्षिक = $\frac{8}{4}$% तिमाही = 2% तिमाही

मूलधन (P) = 1,000 रुपये

$$\therefore \text{ मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(1+\frac{\text{तिमाही ब्याज दर}}{100}\right)^{\text{तिमाही की संख्या}}$$

$$\text{मिश्रधन} = 1,000\times\left(1+\frac{2}{100}\right)^3 = 1,000\times\left(1+\frac{1}{50}\right)^3$$

$$\text{मिश्रधन} = 1,000\times\left(\frac{51}{50}\right)^3 = 1,000\times\left(\frac{51}{50}\right)\times\left(\frac{51}{50}\right)\times\left(\frac{51}{50}\right)$$

$$\text{मिश्रधन} = \frac{1,32,651}{125} = 1,061.20 \text{ रुपये}$$

$\therefore$ चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

= 1,061.20 – 1,000 = 61.20 रुपये

उदाहरण–10. कौन–सा धन 6% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्ष बाद 2,809 रुपये हो जाएगा ?

हल : यहाँ मिश्रधन (A) = 2,809 रुपये मूलधन (P) = ?

दर (R) = 6% वार्षिक समय (n) = 2 वर्ष

$$\therefore A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$2,809 = P\left(1+\frac{6}{100}\right)^2 = P\left(1+\frac{3}{50}\right)^2$$

$$2,809 = P\left(\frac{53}{50}\right)^2 = P\times\frac{53\times53}{50\times50}$$

$$2,809 = P\times\frac{2,809}{2,500}$$

$$\therefore P = \frac{2,809}{1}\times\frac{2,500}{2,809} = 2,500 \text{ रुपये}$$

उदाहरण–11. कितने प्रतिशत वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 1,000 रुपये का मिश्रधन $1\frac{1}{2}$ वर्ष में 1,331 रुपये हो जाएगा? यदि ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक की जाए।

हल : यहाँ मिश्रधन (A) = 1,331 रुपये मूलधन (P) = 1,000 रुपये

दर (R) = ? समय (n) = 1½ वर्ष = 3 छमाही

$$\therefore A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$1,331 = 1,000\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

$$\frac{1,331}{1,000} = \left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^3 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

दोनों पक्षों में घात समान होने पर आधार बराबर होगा।

अतः $$\frac{11}{10} = 1+\frac{R}{100}$$

$$\frac{11}{10} - 1 = \frac{R}{100}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{R}{100}$$

$R = \frac{100}{10}$ = 10% (अर्द्धवार्षिक)

चूँकि ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक की गई है।

अतः $R = 10 \times 2 = 20\%$ वार्षिक

उदाहरण–12. मोहन ने छत्तीसगढ़ राज्य ग्रामीण बैंक से 8% वार्षिक ब्याज की दर से 31,250 रुपये उधार लिया। कितने समय बाद उसे बैंक को 39,366 रुपये लौटाने होंगे?

हल : यहाँ मिश्रधन (A) = 39,366 रुपये मूलधन (P) = 31,250 रुपये

दर (R) = 8% समय (n) = ?

$$\therefore A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$39,366 = 31,250\left(1+\frac{8}{100}\right)^n$$

$$\frac{39,366}{31,250} = \left(1+\frac{2}{25}\right)^n$$

$$\frac{19,683}{15,625} = \left(\frac{27}{25}\right)^n$$

$$\frac{27\times27\times27}{25\times25\times25} = \left(\frac{27}{25}\right)^n$$

$$\left(\frac{27}{25}\right)^3 = \left(\frac{27}{25}\right)^n$$

दोनों पक्षों में आधार बराबर होने पर घात समान होगा।

अतः $n = 3$ वर्ष

प्रश्नावली – 7.2

1. निम्नलिखित स्थितियों में चक्रवृद्धि ब्याज एवं मिश्रधन ज्ञात कीजिए–

(i)	मूलधन = 7,000 रुपये	दर = 10% वार्षिक	समय = 4 वर्ष
(ii)	मूलधन = 6,250 रुपये	दर = 12% वार्षिक	समय = 2 वर्ष
(iii)	मूलधन = 16,000 रुपये	दर = 5% वार्षिक	समय = 3 वर्ष

2. राहुल ने कार खरीदने के लिए बैंक से 1,25,000 रुपये की राशि 12% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से उधार ली, तो 3 वर्ष बाद देय राशि एवं ब्याज की राशि बताइए?
3. बैंक में जमा धनराशि रुपये 50,000 पर 15% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्ष के ब्याज की गणना कीजिए?
4. 1,260 रुपये का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज का अंतर ज्ञात कीजिए।
5. 8,000 रुपये का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज का अंतर ज्ञात कीजिए।
6. 3,000 रुपये का 8% वार्षिक ब्याज की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज की गणना कीजिए जब ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित हो।

7. 9,000 रुपये पर किसी बैंक से 1 वर्ष में कितना ब्याज प्राप्त होगा, यदि ब्याज की दर 8% वार्षिक हो और गणना तिमाही की जाए?
8. 3,500 रुपये का 15% वार्षिक ब्याज की दर से 1 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए यदि ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक हो।
9. एक व्यक्ति ने 25,000 रुपये उधार लिये। यदि ब्याज की दर 20% वार्षिक हो और ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक की जाए तो 1 वर्ष बाद कितनी राशि चुकाई जाएगी?
10. 10,000 रुपये का 12% वार्षिक ब्याज की दर से 6 माह का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए यदि ब्याज की गणना तिमाही की जाए।
11. सुरजीत पंजाब नेशनल बैंक में कितना धन जमा करे कि 5% वार्षिक ब्याज की दर से उसे 2 वर्ष में 6,615 रुपये प्राप्त हो?
12. कौन सा धन $1\frac{1}{2}$ वर्ष में 10% की वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 18,522 रुपये हो जाएगा यदि ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक की जाए?
13. कबीर ने मोटर साइकिल खरीदने हेतु इंडियन बैंक से 15,625 रुपये उधार लिए। 3 वर्ष बाद उसने बैंक को 17,576 रुपये लौटाए, तो बैंक द्वारा निर्धारित ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।
14. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 6,000 रुपये की राशि 2 वर्ष में 6,615 रुपये हो जाती है?
15. कितने समय में 8,000 रुपये का मिश्रधन 9,261 रुपये हो जाएगा जबकि ब्याज की गणना 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर की जाए?
16. भारतीय स्टेट बैंक से अहमद को उसके जमा धन 46,875 रुपये पर 8% वार्षिक ब्याज की दर से 5,853 रुपये ब्याज प्राप्त हुआ। यदि बैंक द्वारा ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक की गई हो तो समय बताइए?
17. कौनसी राशि का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष में साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अंतर 40 रुपए है?

चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र का अनुप्रयोग

B7QD1E

चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के सूत्र का उपयोग कुछ परिस्थितियों में किया जाता है।

(i) जनसंख्या वृद्धि या ह्रास (कमी) में

(ii) किसी वस्तु की कीमत वृद्धि अथवा अवमूल्यन में

(iii) जब ब्याज की दर लगातार वर्षों में अलग–अलग हो तो मिश्रधन ज्ञात करना।

(a) यदि किसी शहर की जनसंख्या में वृद्धि हो तो

$$\text{अभीष्ट जनसंख्या} = \text{वर्तमान जनसंख्या} \left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

(b) यदि किसी शहर की जनसंख्या में कमी हो तो

$$\text{अभीष्ट जनसंख्या} = \text{वर्तमान जनसंख्या}\left(1-\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

(c) किसी वस्तु की कीमत में वृद्धि हो तो

$$\text{अभीष्ट मूल्य} = \text{वर्तमान मूल्य}\left(1+\frac{\text{वृद्धिदर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

(d) किसी वस्तु की कीमत का अवमूल्यन हो तो

$$\text{अभीष्ट मूल्य} = \text{वर्तमान मूल्य}\left(1-\frac{\text{अवमूल्यन}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

(e) यदि ब्याज की दर लगातार वर्षों में $R_1\%, R_2\%, R_3\%$ ...... हो तो

$$A = P\left(1+\frac{R_1}{100}\right)\left(1+\frac{R_2}{100}\right)\left(1+\frac{R_3}{100}\right)\text{...........}$$

उदाहरण–13. एक शहर की वर्तमान जनसंख्या 1,28,000 है, यदि जनसंख्या वृद्धि दर 5 प्रतिशत वार्षिक है, तो 3 वर्ष पश्चात् उस शहर की जनसंख्या क्या होगी?

हल : यहाँ वर्तमान जनसंख्या = 1,28,000 वृद्धि दर = 5% वार्षिक

समय = 3 वर्ष अभीष्ट जनसंख्या = ?

$$\because \text{ अभीष्ट जनसंख्या} = \text{वर्तमान मूल्य}\left(1+\frac{\text{वृद्धिदर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

$$\text{अभीष्ट जनसंख्या} = 1{,}28{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 = 1{,}28{,}000\left(1+\frac{1}{20}\right)^3$$

$$\text{अभीष्ट जनसंख्या} = 1{,}28{,}000\left(\frac{21}{20}\right)^3 = 1{,}28{,}000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$$

$$\text{अभीष्ट जनसंख्या} = 16\times21\times21\times21 = 1{,}48{,}176$$

उदाहरण–14. किशोर ने 55,000 रुपये में बाइक खरीदी। यदि बाइक का अवमूल्यन 8% वार्षिक दर से होता है तो 2 वर्ष पश्चात् बाइक का मूल्य क्या होगा?

हल : यहाँ, बाइक का मूल्य = 55,000 रुपये अवमूल्यन दर = 8% वार्षिक

समय = 2 वर्ष अभीष्ट मूल्य = ?

$$\because \text{ अभीष्ट मूल्य} = \text{वस्तु का मूल्य}\left(1-\frac{\text{अवमूल्यन दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

$= 55,000\left(1-\frac{8}{100}\right)^2 \quad = 55,000\left(1-\frac{2}{25}\right)^2$

$= 55,000\times\left(\frac{23}{25}\right)^2 \quad = 55,000\times\frac{23}{25}\times\frac{23}{25}$

$= 88\times 23\times 23 \quad = 46,552$ रुपये

उदाहरण–15. एक कार का मूल्य 4,50,000 रुपये है। पहले 2 वर्षों में कार का अवमूल्यन 4% वार्षिक दर से एवं उसके पश्चात के 2 वर्षों में अवमूल्यन 10% वार्षिक की दर से होता है, तो 4 वर्ष पश्चात कार का मूल्य बताइए।

हल : यहाँ कार का मूल्य = 4,50,000 रुपये

अवमूल्यन दर (R_1) = 4% वार्षिक

समय (n_1) = 2 वर्ष

अवमूल्यन दर (R_2) = 10% वार्षिक

समय (n_2) = 2 वर्ष

अभीष्ट मूल्य = ?

∵ अभीष्ट मूल्य = वस्तु का मूल्य $\times\left(1-\frac{R_1}{100}\right)^{n_1}\times\left(1-\frac{R_2}{100}\right)^{n_2}$

$= 4,50,000\times\left(1-\frac{4}{100}\right)^2\times\left(1-\frac{10}{100}\right)^2$

$= 4,50,000\times\left(\frac{24}{25}\right)^2\times\left(\frac{9}{10}\right)^2$

$= 4,50,000\times\frac{24}{25}\times\frac{24}{25}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}$

$= 7.2\times 24\times 24\times 9\times 9$

$= 3,35,923$ रुपये

करके देखें

1. एक गाँव की जनसंख्या 8,000 है। यदि जनसंख्या 5% वार्षिक की दर से कम हो रही है तो 3 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या कितनी रह जाएगी?
2. एक नगर की जनसंख्या 9,600 है। यदि जनसंख्या वृद्धि दर 15% वार्षिक हो तो 2 वर्ष पश्चात् उस नगर की जनसंख्या क्या होगी?

किश्त योजना (किश्तों में खरीददारी)

आजकल प्रायः इस प्रकार के विज्ञापन आप देखते होंगे–

''आपके सपनों का घर न्यूनतम ब्याज दर में आसान किश्तों पर'' या ''अपनी मनपसंद कार घर ले जाइए मात्र 30,000 रुपये देकर, शेष आसान किश्तों में या टी.वी./फ्रिज खरीदें मात्र 1,000 रुपये में तथा बाकी भुगतान आसान मासिक/अर्द्धवार्षिक/वार्षिक किश्तों में''।

ऐसी योजनाओं से व्यक्ति महंगी वस्तुओं की खरीदी बिना पूर्ण भुगतान के करता है। ये योजनाएँ एक व्यक्ति को सुविधापूर्वक भुगतान द्वारा महंगी वस्तुएँ खरीदने के योग्य बना देती हैं।

किश्त योजना में, वस्तु को खरीदते समय ग्राहक वस्तु के नकद मूल्य का कुछ हिस्सा आंशिक भुगतान के रूप में देता है जिसे तत्काल नकद भुगतान कहते हैं। तत्पश्चात् अनुबंध पर हस्ताक्षर कर वस्तु को उपयोग के लिए ले जाता है तथा शेष राशि को किश्तों में चुकाता है जिसे किश्त राशि कहते हैं। ये किश्तें मासिक, त्रैमासिक, अर्द्धवार्षिक या वार्षिक अथवा बेचने और खरीदने वाले दोनों की सहमति से निश्चित की जाती है।

आइए किश्त योजना को उदाहरणों से समझें–

किश्त योजना में ब्याज की दर ज्ञात करना

किश्त योजना में पूरे मूल्य का एक भाग ही ग्राहक द्वारा खरीदते समय दिया जाता है। शेष मूल्य का भुगतान किश्तों में किया जाता है इसलिए विक्रेता अतिरिक्त राशि ग्राहक से लेता है यह अतिरिक्त राशि ही ब्याज है।

उदाहरण–16. एक टेबल का नकद मूल्य 1,000 रुपये है जिसे रमेश 400 रुपये तत्काल नकद भुगतान तथा 310 रुपये की दो समान मासिक किश्तों पर खरीदता है। किश्त योजना में दिए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

हल : टेबल का नकद मूल्य = 1,000 रुपये

तत्काल नकद भुगतान = 400 रुपये

किश्तों में देय शेष राशि = 1,000 − 400 रुपये

= 600 रुपये

माना कि किश्त योजना में दी गई ब्याज की दर r% वार्षिक है, तो 2 माह बाद 600 रुपये का मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

$$= 600 + \frac{600 \times r \times 2}{100 \times 12}$$

$$= 600 + r \qquad ..... (1)$$

एक माह बाद दिए गए 310 रुपये (मासिक किश्त) का दूसरे माह के अंत में मिश्रधन

$$= 310 + \frac{310 \times r \times 1}{100 \times 12}$$

$$= 310 + \frac{31r}{120} \qquad \text{..... (2)}$$

दो माह बाद दी गई दूसरी किश्त = 310 रुपये

अतः दोनों मासिक किश्तों को मिलाकर 2 माह के अंत में

$$\text{मिश्रधन} = 310 + \frac{31r}{120} + 310 = 620 + \frac{31r}{120}$$

समीकरण (1) व (2) से

$$600 + r = 620 + \frac{31r}{120}$$

$$r - \frac{31r}{120} = 620 - 600$$

$$\frac{120r - 31r}{120} = 20$$

$$89r = 20 \times 120$$

$$r = \frac{2,400}{89} = 26.97\% \text{ (लगभग)}$$

अतः किश्त योजना में ब्याज की वार्षिक दर = 26.97%

अन्य विधि से :

टेबल का नकद मूल्य = 1,000 रुपये

तत्काल नकद भुगतान = 400 रुपये

किश्तों में देय शेष राशि = 1,000 – 400 रुपये

= 600 रुपये

समान किश्तों की संख्या = 2

किश्त योजना में किया गया कुल भुगतान = 2 × 310 = 620 रुपये

दिया गया कुल ब्याज = 620 – 600 रुपये = 20 रुपये

पहले माह के लिए मूलधन = 1,000 – 400 = 600 रुपये

दूसरे माह के लिए मूलधन = 600 – 310 = 290 रुपये

कुल मूलधन (1 माह का) = 600 + 290 = 890 रुपये

माना कि ब्याज की दर r% वार्षिक है।

$$\text{कुल ब्याज} = \frac{890 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

या $r = \dfrac{20 \times 100 \times 12}{890}$

$r = \dfrac{2,400}{89} = 26.97\%$ (लगभग)

किश्त की राशि ज्ञात करना

आइए, किश्त योजना में विक्रेता किश्त कैसे निर्धारित करता है समझने का प्रयास करें। एक दुकानदार एक वस्तु किसी मूल्य पर खरीदता है। वह जानता है कि किश्त योजना से अधिक वस्तुएँ बेची जा सकती हैं। अतः वह एक निश्चित ब्याज दर प्राप्त करने के लिए तत्काल नकद भुगतान, किश्त की राशि तथा किश्तों की संख्या निर्धारित करना चाहता है।

उदाहरण–17. एक टेलीविजन का मूल्य 12,000 रुपये है तथा यह 3,000 रुपये तत्काल नकद भुगतान तथा दो समान प्रतिमाह की किश्त में बेचा जाता है। यदि 18% वार्षिक ब्याज की दर हो तो प्रत्येक किश्त की राशि ज्ञात कीजिए।

हल : टेलीविजन का नकद मूल्य = 12,000 रुपये

तत्काल नकद भुगतान = 3,000 रुपये

किश्तों में देय शेष राशि = (12000 − 3000) रुपये = 9000 रुपये

ब्याज दर = 18% वार्षिक

माना प्रत्येक किश्त की राशि x रुपये है।

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

9000 रुपये का 1 माह का ब्याज $= \dfrac{9000 \times 18 \times \frac{1}{12}}{100} = 135$ रुपये

1 माह बाद मिश्रधन = 9000 + 135 = 9135 रुपये

1 किश्त चुकाने के बाद शेष रकम = $(9135 - x)$ रुपये

इस रकम का 1 माह बाद मिश्रधन, किश्त के बराबर हो जायेगा।

अतः $(9135 - x)$ रुपये का 1 माह का ब्याज $= \dfrac{(9135 - x) \times 18 \times \frac{1}{12}}{100}$

$= \dfrac{3(9135 - x)}{200}$ रुपये

1 माह बाद मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

$= (9135 - x) + \dfrac{3(9135 - x)}{200}$

$$= \frac{200(9135-x)+3(9135-x)}{200}$$

$$= \frac{1827000-200x+27405-3x}{200}$$

अतः उपरोक्तानुसार $= \frac{1827000-200x+27405-3x}{200} = x$

$1854405 - 203x = 200x$

या $1854405 = 200x + 203x$

$403x = 1854405$

अतः $x = \frac{1854405}{403} = 4601.50$ रुपये

प्रत्येक किश्त की राशि 4601.50 रुपये होगी।

नकद मूल्य ज्ञात करना

किश्त योजना में प्रत्येक समान किश्त की राशि, किश्तों की संख्या, ब्याज की दर तथा तत्काल नकद भुगतान की राशि दी गई हो तो वस्तु का नकद मूल्य ज्ञात किया जा सकता है। आइए एक उदाहरण से समझे।

उदाहरण–18. एक साइकिल 500 रुपये तत्काल नकद भुगतान तथा 1210 रुपये की दो समान वार्षिक किश्तों पर उपलब्ध है। यदि ब्याज की दर 10% वार्षिक हो तो साइकिल का नकद मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि साइकिल का नकद मूल्य x रुपये है।

तत्काल नकद भुगतान = 500 रुपये

प्रथम किश्त = 1210 रुपये, ब्याज = 10% वार्षिक

नकद भुगतान के बाद शेष राशि = $(x - 500)$ रुपये

$(x - 500)$ रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

$$= \frac{(x-500)\times 10\times 1}{100} = \frac{(x-500)}{10} \text{ रुपये}$$

1 वर्ष बाद मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

$$= (x - 500) + \frac{x-500}{10}$$

$$= (x - 500)\left(1 + \frac{1}{10}\right) = (x - 500)\frac{11}{10}$$

प्रथम किश्त के भुगतान बाद शेष रकम (दूसरे वर्ष का मूलधन)

$$= [(x - 500)\frac{11}{10} - 1210]$$

दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन $= \text{मूलधन} \left\{1 + \frac{\text{दर}}{100}\right\}^{\text{समय}}$

$$= [(x - 500)\frac{11}{10} - 1210]\,[1 + \frac{10}{100}]^1$$

$$= [(x - 500)\frac{11}{10} - 1210]\frac{11}{10}$$

अतः दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन दूसरे वर्ष की देय किश्त के बराबर होगा।

$$[(x - 500)\frac{11}{10} - 1210]\frac{11}{10} = 1210$$

$$[(x - 500)\frac{11}{10} - 1210]\,11 = 12100$$

या $[(x - 500)\frac{11}{10} - 1210] = 1100$

या $(x - 500)\frac{11}{10} = 1100 + 1210$

या $(x - 500) = 2310 \times \frac{10}{11}$

या $x - 500 = 2100$

$x = 2600$ रुपये

अतः साइकिल का नकद मूल्य 2600 रुपये होगा।

चक्रवृद्धि ब्याज युक्त समस्याएँ

किश्त योजना में जहाँ किश्त प्रतिमाह दी जाती है तथा कुल समय 1 वर्ष से कम है ऐसे उदाहरणों में साधारण ब्याज का प्रयोग हुआ है। कई बार एक वर्ष से कम समय में भी विक्रेता चक्रवृद्धि ब्याज लेता है। ऐसे में ब्याज अर्द्धवार्षिक या तिमाही संयोजित होता है।

कभी–कभी किश्तें एक वर्ष से अधिक समय तक दी जाती हैं तब भी इसकी गणना चक्रवद्धि ब्याज से की जाती है।

उदाहरण–19. एक फ्रिज, जिसका नकद मूल्य 15,000 रुपये है, किश्त योजना में यह 2,250 रुपये तत्काल नकद भुगतान के पश्चात दो अर्द्धवार्षिक समान किश्तों में 8% वार्षिक ब्याज की दर पर उपलब्ध है। यदि ब्याज प्रति छः माही संयोजित किया जाय तो प्रत्येक किश्त की राशि ज्ञात कीजिए।

हल : फ्रिज का नकद मूल्य = 15,000 रुपये

तत्काल नकद भुगतान = 2,250 रुपये

शेष देय राशि = (15,000 – 2,250) रुपये

= 12,750 रुपये

ब्याज की दर = 8% वार्षिक = 4% प्रति छः माही

ekuk izR;sd ¼fr N%ekgh½ fd'r dh jkf'k x रुपये है, तथा P_1, P_2 क्रमशः पहली और दूसरी राशि के मूलधन है।

$$\therefore \quad x = P_1\left(1+\frac{4}{100}\right)^1 \text{ और } x = P_2\left(1+\frac{4}{100}\right)^2$$

$$x = P_1\left(\frac{26}{25}\right) \text{ और } x = P_2\left(\frac{26}{25}\right)^2$$

$$P_1 = \left(\frac{25}{26}\right)x \text{ और } P_2 = \left(\frac{25}{26}\right)^2 x$$

अतः

$$12,750 = \left(\frac{25}{26}\right)x + \left(\frac{25}{26}\right)^2 x$$

$$12,750 = \left(\frac{25}{26}\right)x\left[1+\frac{25}{26}\right]$$

$$12,750 = \left(\frac{25}{26}\right)x\left(\frac{51}{26}\right)$$

$$x = \frac{12,750\times 26\times 26}{25\times 51} \quad = \quad x = 6,760 \text{ रुपये}$$

प्रत्येक किश्त की राशि = 6,760 रुपये

प्रश्नावली – 7.3

B7Z932

1. एक कुर्सी को 450 रुपये नकद अथवा 210 रुपये तत्काल नकद भुगतान एवं 125 रुपये की दो समान मासिक किश्तों में बेचा जाता है। किश्त योजना में लिए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

2. एक टी.वी. स्टैण्ड 3,000 रुपये नकद पर बेचा जाता है अथवा 600 रुपये तत्काल नकद भुगतान तथा 1,250 रुपये प्रति माह की 2 किश्तों पर उपलब्ध है। किश्त योजना में लिए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

3. एक पंखे का नकद मूल्य 1,940 रुपये है। किश्त योजना में यह 620 रुपये तत्काल नकद

भुगतान तथा दो समान प्रतिमाह के किश्तों में उपलब्ध है। यदि किश्त योजना में 16% वार्षिक की दर से ब्याज लिया जाए, तो प्रत्येक किश्त की राशि ज्ञात कीजिए।

4. एक माइक्रोवेव ओवन का नकद मूल्य 20,100 रुपये है। यदि यह 3,700 रुपये तत्काल नकद भुगतान तथा दो समान मासिक किश्तों पर 10% वार्षिक ब्याज की दर में उपलब्ध है, तो प्रत्येक किश्त की राशि ज्ञात कीजिए।

5. एक आयरन (इस्तिरी) 210 रुपये तत्काल नकद भुगतान तथा 220 रुपये प्रतिमाह की दो समान किश्तों पर खरीदा गया। यदि किश्त योजना में ब्याज की दर 20% वार्षिक है, तो आयरन का नकद मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. एक शो रूम में एक स्कूटर का नकद मूल्य 20,000 रुपये है। किश्त योजना से यह 11,000 रुपये तत्काल नकद भुगतान के पश्चात् समान वार्षिक किश्तों में 25% वार्षिक ब्याज की दर पर उपलब्ध है। यदि ब्याज प्रतिवर्ष संयोजित किया जाय तो प्रत्येक किश्त की राशि ज्ञात कीजिए।

7. एक वाशिंग मशीन 12,000 रुपये नकद अथवा 3,600 रुपये के तत्काल नकद भुगतान तथा 2 समान प्रति छः माही किश्तों पर उपलब्ध है। यदि ब्याज की दर 20% वार्षिक, जो प्रति छः माही संयोजित होता है, तो प्रत्येक किश्त की राशि ज्ञात कीजिए।

8. एक सिलाई मशीन 3,000 रुपये नकद अथवा 450 रुपये तत्काल नकद भुगतान तथा दो समान अर्द्धवार्षिक किश्तों पर उपलब्ध है। प्रत्येक किश्त का मान क्या होगा यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर 4% वार्षिक हो।

हमने सीखा

1. हम राशियों की तुलना अनुपात, प्रतिशत आदि के आधार पर करते हैं।
2. प्रतिशत का उपयोग बट्टा, बिक्री कर व ब्याज ज्ञात करने में किया जाता है।
3. अंकित मूल्य पर दी गई छूट बट्टा कहलाती है।
4. किसी वस्तु को बेचने पर सरकार द्वारा बिक्री कर लिया जाता है। विक्रेता द्वारा बिक्री कर को बिल की राशि में जोड़ दिया जाता है।
5. ब्याज दो प्रकार के होते हैं, साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज
6. (i) जब ब्याज वार्षिक हो तो $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

   (ii) जब ब्याज की दर अर्द्धवार्षिक(छःमाही) हो तो कुल राशि $A = P\left(1+\frac{R}{200}\right)^n$

   याने ब्याज की दर आधी व समय छःमाहियों में गिना जाता है।

त्रिकोणमिति
TRIGONOMETRY

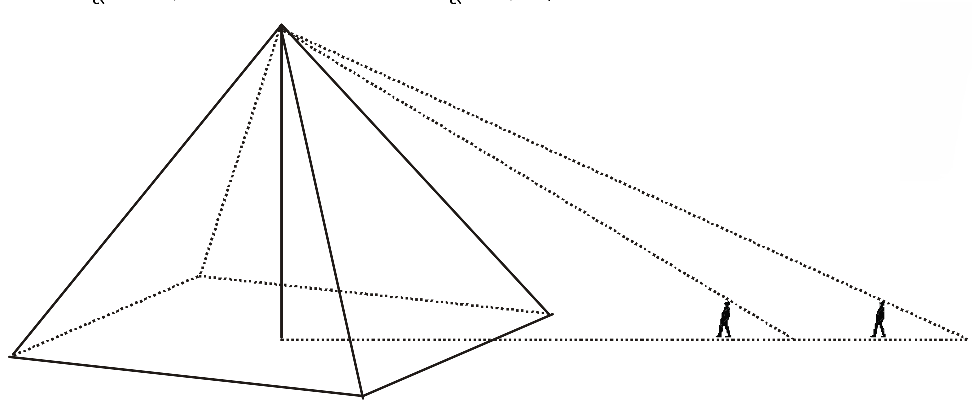
इकाई – 4

आओ त्रिकोणमिति का इतिहास जानें.....

त्रिकोणमिति का विकास अलग–अलग संदर्भों में व्यवहारिक आवश्यकताएँ पूरी करने के लिए हुआ, जैसे– भारत में खगोल व ज्योतिषशास्त्र के अंतर्गत आकाशीय पिंडों की गति व स्थिति का अध्ययन करने के लिए, यूनान में भी खगोल शास्त्र के लिए वृत्त व जीवा के संबंधों का अध्ययन करने हेतु और यूनान में पिरामिड की ऊँचाई पता करने के लिए। इन सब विचारों के मिलने–जुलने से त्रिकोणमिति का विकास हुआ। हालांकि त्रिकोणमिति का अर्थ त्रिभुजों का मापन है फिर भी इसका उपयोग कोणों के संदर्भ में अनेक रूपों में होता है। इन सब में कोण को शामिल करते हुए एक काल्पनिक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों का उपयोग कर ऊँचाई, दूरी, गति, स्थिति आदि की गणना की जाती है।

माना जाता है कि त्रिकोणमिति अनुपातों की पहली तालिका हिपार्कस ने दूसरी शताब्दी ईसा पूर्व में बनायी। भारत में खगोल के क्षेत्र में उपयोग से कोणों व जीवा के संबंध में पाँच सिद्धांत निरूपित हुए। इनमें से महत्वपूर्ण सूर्य सिद्धांत आज की 'sine' की परिभाषा थी। आर्यभट्ट ने पाँचवी शताब्दी में इसे आगे बढ़ाया और ज्या (sine) व कोज्या (Co-Sine) का उपयोग किया। सातवीं शताब्दी में भास्कराचार्य I ने $\text{Sin}\,x$ की गणना के लिए एक सूत्र दिया, जिससे x के प्रत्येक मान के लिए $\text{Sin}\,x$ को दो प्रतिशत से कम त्रुटि तक पता किया जा सकता था। बाद में ब्रह्मपुत्र ने सातवीं शताब्दी में ही $(\pi - x)$, $(\pi/2 - x)$ जैसे कोण मानों का उपयोग कर $\text{Sin}\,x$ और cosine $(\pi/2 - x)$ के बीच संबंध भी बताया। इन्होंने दो कोणों के योग करने पर प्राप्त कोण के sine व cosine का संबंध प्रत्येक कोण के sine व cosine से भी पता किया, याने ऐसे संबंध $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ आदि। भारत में इन दोनों के साथ–साथ स्पर्शज्या याने (tangent) का समग्र उपयोग भास्कराचार्य II की बारहवीं शताब्दी की पुस्तक गोलाध्याय में मिलता है।

चौदहवीं शताब्दी में महादेव ने त्रिकोणमितीय फलनों व उनकी अनन्त श्रेणियों के रूप में विस्तार का विश्लेषण कर कई महत्वपूर्ण विस्तार सूत्र बनाए जो कि पश्चिम में बाद में ढूँढे गए। इनका आज भी उपयोग होता है

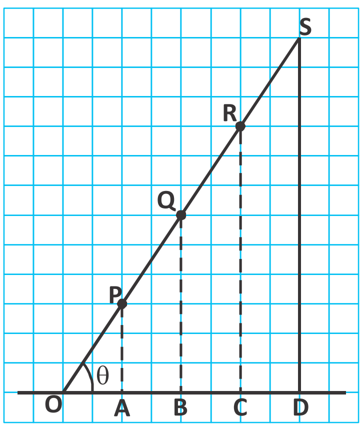


यह जानकारियाँ अलग–अलग ग्रंथों से संकलित कर प्रस्तुत की गई हैं। शिक्षक एवं विद्यार्थी अन्य स्रोतों से त्रिकोणमिति के संबंध में और भी जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं।

त्रिकोणमितीय अनुपात एवं सर्वसमिकाएँ

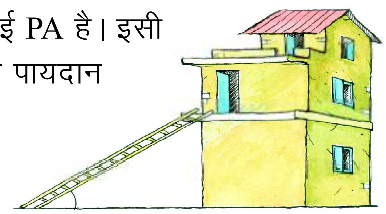
B8954P

[TRIGONOMETRICAL RATIO AND IDENTITIES] 08



चित्र–1

छत पर जाने की सीढ़ी का हर पायदान चढ़ने पर जमीन से हमारी ऊंचाई बढ़ती जाती है। (चित्र–1)



सीढ़ी के पहले पायदान P पर जमीन से ऊंचाई PA है। इसी तरह दूसरे पायदान Q पर ऊंचाई QB, तीसरे पायदान R पर RC तथा चौथे पायदान S पर SD है।

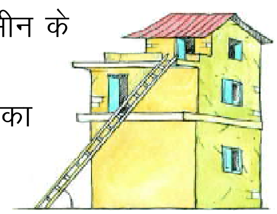
हर पायदान पर हम न सिर्फ ऊपर चढ़ते हैं बल्कि दीवार की तरफ आगे भी बढ़ते हैं।

क्या हम जितना ऊपर चढ़ते हैं उतना ही आगे बढ़ते हैं? क्या इन दोनों के बीच कोई संबंध है? आइये देखते हैं–

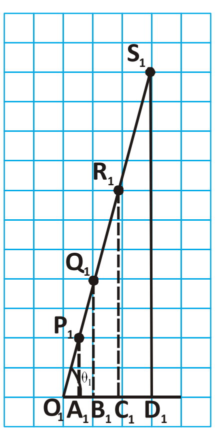
यहाँ $$\frac{PA}{OA} = \frac{QB}{OB} = \frac{RC}{OC} = \frac{SD}{OD}$$

हम जितना ऊपर चढ़ते हैं और जितना आगे बढ़ते हैं, उनका अनुपात नहीं बदलता।

अगर जहाँ चढ़ना है उसकी ऊंचाई थोड़ी ज्यादा हो तो क्या करना होगा? सीढ़ी को कुछ आगे दीवार की ओर खिसकाना होगा (चित्र 2)। सीढ़ी का जमीन के तल के साथ बनने वाला कोण बढ़ जाएगा।



अब खाने गिनकर बताएँ कि क्या ऊपर की तरह दोनों दूरियों का अनुपात स्थिर है?

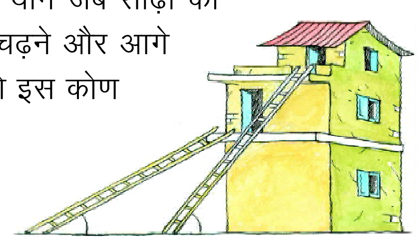


चित्र–2

$$\frac{P_1A_1}{O_1A_1} = \frac{Q_1B_1}{O_1B_1} = \frac{R_1C_1}{O_1C_1} = \frac{S_1D_1}{O_1D_1}$$

हम पाते हैं कि इस में भी अनुपात स्थिर है।

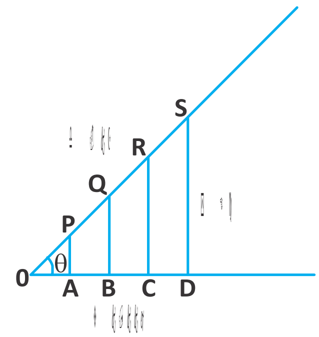
किंतु दूसरी स्थिति में अनुपात पहले से अधिक है। याने जब सीढ़ी का जमीन के साथ बनने वाला कोण (θ) बढ़ा तो ऊपर चढ़ने और आगे बढ़ने वाली दूरियों में अनुपात भी बढ़ा। इस अनुपात को इस कोण का tangent कहा जाता है।



याने tangent $\theta = \dfrac{PA}{OA} = \dfrac{QB}{OB}$

और tangent $\theta_1 = \dfrac{P_1A_1}{O_1A_1} = \dfrac{Q_1B_1}{O_1B_1}$

अन्य अनुपात : इन चित्रों में जमीन से ऊपर उठने, दीवार की ओर बढ़ने और इनसे संबंधित सीढ़ी के हिस्से को रेखाखण्डों के रूप में देखें तो सीढ़ी के हर पायदान को शीर्ष बनाते हुए कई समकोण त्रिभुज दिखाई पड़ेंगे।



चित्र–3

इन त्रिभुजों में यदि सीढ़ी द्वारा जमीन की रेखा से बनाए गए कोण को θ से व्यक्त करें तो हर त्रिभुज में इस कोण के लिए ऊपर उठने की दूरी–**लंब**, दीवार की ओर बढ़ी गई दूरी–**आधार** तथा सीढ़ी का हिस्सा–**कर्ण** होगा।

ऊपर हमने $\dfrac{PA}{OA}$ को tangent θ कहा है।

'लंब' और 'आधार' के रूप में tangent $\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{आधार}}$ । इसका मान चित्र–3 के सभी त्रिभुजों में बराबर है। जब तक 'θ' नहीं बदलता, आधार व लम्ब का अनुपात भी नहीं बदलता।

इस अनुपात tangent θ को संक्षेप में tan θ कहते हैं।

$$\tan\theta = \frac{PA}{OA} = \frac{QB}{OB} = \frac{RC}{OC}$$

क्या इन रेखाखण्डों से कोई और भी अनुपात बनेंगे?

इन तीन दूरियों से कोई और स्थिर अनुपात भी बनेंगे? आइए लंब और कर्ण का अनुपात देखें।

अनुपात $= \dfrac{PA}{OP}, \dfrac{QB}{OQ}, \dfrac{RC}{OR}$

इसी तरह आधार और कर्ण का अनुपात

$$\frac{OA}{OP}, \frac{OB}{OQ}, \frac{OC}{OR}$$

क्या ये अनुपात भी स्थिर हैं? जाँच कीजिए।

कोण θ के लिए लंब व कर्ण के अनुपात को sineθ (संक्षेप में sinθ) कहते हैं।

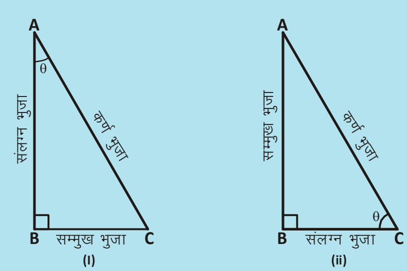
$$\sin\theta = \frac{PA}{OP} = \frac{QB}{OQ} = \frac{RC}{OR} \text{ आदि}$$

यहाँ समकोण ΔABC में ∠B = 90° तथा ∠A = θ (चित्र (i) में) तब कोण θ के सामने की भुजा BC सम्मुख भुजा व AB संलग्न भुजा एवं AC कर्ण भुजा होती है।

इसी प्रकार समकोण ΔABC में (चित्र (ii)) ∠B = 90°, ∠C = θ तब कोण θ के सामने की भुजा AB सम्मुख भुजा व BC संलग्न भुजा एवं AC कर्ण भुजा होगी।

चित्र (i) में $\sin\theta = \dfrac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण भुजा}} = \dfrac{BC}{AC}$, $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$, $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB}$

इसी प्रकार चित्र (ii) के लिए करके देखो।



इसी तरह आधार और कर्ण के अनुपात को cosine θ (संक्षेप में cosθ) कहते हैं।

$$\cos\theta = \frac{OA}{OP} = \frac{OB}{OQ} = \frac{OC}{OR} \text{ आदि}$$

(sinθ, cosθ, tanθ आदि अनुपातों को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं।)

प्रश्नावली - 8.1

यदि समकोण त्रिभुज ABC में ∠B समकोण है तो निम्नलिखित में $\sin A$, $\cos C$, $\tan A$ का मान ज्ञात कीजिए–

जबकि

(i)	AC=5	AB = 3	BC = 4
(ii)	AB = 12	BC = 5	AC = 13
(iii)	AB = 5	AC = 13	BC = 12
(iv)	BC = 12	AB = 9	AC = 15

अनुपातों में संबंध

sinθ, cosθ और tanθ में संबंध : समकोण त्रिभुज ABC में ∠B समकोण है यदि ∠C = θ है तो

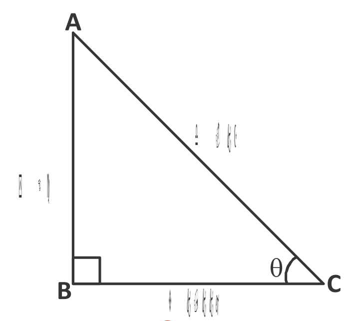
$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$= \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC}$$

$$= \frac{AB}{AC} \div \frac{BC}{AC}$$

$$= \sin\theta \div \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



चित्र-4

कुछ और त्रिकोणमितीय अनुपात

हमने देखा समकोण त्रिभुज ABC जिसमें ∠B समकोण है के ∠C = θ के लिए:–

$$\frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \sin\theta, \qquad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \cos\theta, \qquad \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \tan\theta$$

इन अनुपातों के व्युत्क्रम तीन और अनुपात हैं। त्रिकोणमिति में इन तीनों अनुपातों के नाम हैं–

$\frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}}$ = cosecantθ (या cosecθ) = $\frac{1}{\sin\theta}$

$\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$ = secantθ (या secθ) = $\frac{1}{\cos\theta}$

$\frac{\text{आधार}}{\text{लंब}}$ = cotangetθ (या cotθ) = $\frac{1}{\tan\theta}$

करके देखें

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ हो तो $\cot\theta$ को भी $\sin\theta$ व $\cos\theta$ के रूप में लिखें?

त्रिकोणमितीय अनुपात और पाइथागोरस प्रमेय (Trigonometric Ratio and Pythagoras Theorem)

$a^2 = a \times a$
$b^2 = b \times b$

सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों की अवधारणा समकोण त्रिभुजों से समझी जा सकती है। समकोण त्रिभुज की भुजाओं के बीच पाइथागोरस प्रमेय एक संबंध देता है। इसका उपयोग करके हम त्रिकोणमितीय अनुपातों में कुछ संबंध ढूंढ़ सकते हैं।

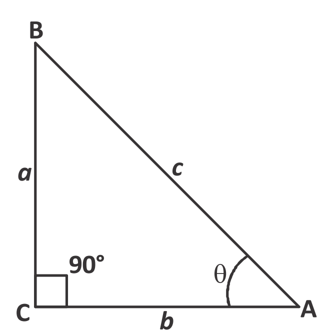
एक समकोण त्रिभुज ABC की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लंबाई a और b है और इसका विकर्ण c है, तो पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार a, b और c के बीच संबंध होगाः

$\sin^2\theta = \sin\theta \times \sin\theta$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{लंब}^2 + \text{आधार}^2 = \text{कर्ण}^2) \quad ...(1)$$

अब यदि विकर्ण c, आधार b पर θ कोण बनाता हो तो

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \text{ और } \cos\theta = \frac{b}{c}$$



चित्र–5

दोनों पक्षों का वर्ग करें और जोड़ें

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{c^2}{c^2} \quad [\because a^2+b^2=c^2 \text{ संबंध (1) से}]$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

इसे आप ऐसे भी लिख सकते हैं:–

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ या $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta$ और $\cos^2\theta$ के संबंध के उपर्युक्त तीनों कथन समीकरण के रूप में हैं। ये समीकरण हमने कोण θ के उन सभी मानों के लिए दिखाए हैं जो 0° से 90° तक है। समकोण त्रिभुज में $(0 \le \theta \le 90)$ के लिए इन्हें **त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ** (Trigonometric identities) कहते हैं।

कुछ अन्य सर्वसमिकाएँ हैं जो $\tan^2\theta$ और $\sec^2\theta$ तथा $\cot^2\theta$ और $\text{cosec}^2\theta$ में संबंध बताती हैं। इन्हें निम्नलिखित तरह से ज्ञात कर सकते हैं। देखें और समझें:–

सर्वसमिका–1 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta$ से भाग करने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$ (सर्वसमिका–2) $\left(\because \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\right)$

पुनः यदि सर्वसमिका–1 के दोनों पक्षों में $\cos^2\theta$ से भाग करने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ या $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (सर्वसमिका–3)

करके देखें

सर्वसमिका 1 की तरह सर्वसमिका 2 और सर्वसमिका 3 को भी उनके अलग रूपों में लिखिए।

त्रिकोणमितीय अनुपात पता करना

हमने देखा कि सभी छह त्रिकोणमितीय अनुपात एक दूसरे से संबंधित हैं। हम यह भी देख सकते हैं कि यदि कोई एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो तो हमें उस कोण से बने किसी भी समकोण त्रिभुज की हर दो भुजाओं के अनुपात की जानकारी प्राप्त हो जाती है।

ऐसा हम पाइथागोरस प्रमेय के उपयोग से कर सकते हैं। एक त्रिकोणमितीय अनुपात से सभी, शेष अनुपात मालूम कर सकते हैं।

उदाहरण–1. ΔPQR एक समकोण त्रिभुज है। जिसमें $\angle Q$ समकोण है तथा $\angle R = \theta$

हमें $\sin\theta = \frac{3}{5}$ दिया है। क्या इससे हम बाकी अनुपात पता कर सकते हैं?

$\because \sin\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{3}{5}$

इसे लिख सकते हैं, $\sin\theta = \frac{3x}{5x}$ (चूँकि $3x$ व $5x$ का अनुपात वही है जो 3 और 5 में है)

हम कहेंगे $PQ = 3x$, $PR = 5x$

समकोण त्रिभुज PQR में, कर्ण² = लंब² + आधार²

$(5x)^2 = (3x)^2$ + आधार²

$25x^2 - 9x^2$ = आधार²

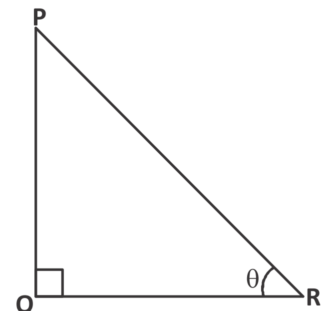
$16x^2$ = आधार²

$(4x)^2$ = आधार²

या $(4x)^2 = (QR)^2$

या $QR = \sqrt{(4x)^2}$

$QR = 4x$



चित्र–6

अब $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$

इसी प्रकार शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किए जा सकते हैं।

उदाहरण–2. यदि $\sin\theta = \frac{5}{13}$ हो तो शेष सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया गया है:– $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ...(1)

$\sin\theta$ का मान ज्ञात होने पर $\cos\theta$ का मान कैसे निकालें।

हमें मालूम है–

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$\cos\theta$ पता करने के लिए इसे ऐसे लिखेंगे–

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 \qquad [\text{दिया है } \sin\theta = \frac{5}{13}]$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\cos^2\theta = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$\therefore \quad \cos\theta = \dfrac{12}{13}$ ...(2)

अब हमें sinθ और cosθ के मान मालूम हैं। आइए अब tanθ का मान पता करते हैं।

आप जानते हैं कि– $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ या $\sin\theta \div \cos\theta$

$$\therefore \tan\theta = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13}$$

$$= \frac{5}{13} \times \frac{13}{12}$$

$$\tan\theta = \frac{5}{12}$$

अब शेष अनुपात secθ, cosecθ और cotθ के मान ज्ञात करते हैं।

हम जानते हैं कि– $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

अब $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{12/13} = \dfrac{13}{12}$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{5/13} = \frac{13}{5}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{5/12} = \frac{12}{5}$$

उदाहरण–3. यदि $\sec A = \dfrac{5}{3}$, तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए–

हल : हमें दिया है $\sec A = \dfrac{5}{3}$ .... (1)

(i) चूँकि $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ (secA का व्युत्क्रम cosA है)

$\therefore \cos A = \dfrac{1}{5/3} = \dfrac{3}{5}$ होगा।

(ii) सर्वसमिका 1 का उपयोग करके sinA का मान ज्ञात करेंगे।

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad = 1 - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 \mathrm{A} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\sin A = \frac{4}{5}$$

(iii) चूँकि $\tan \mathrm{A} = \dfrac{\sin \mathrm{A}}{\cos \mathrm{A}}$ या $\sin \mathrm{A} \div \cos \mathrm{A}$

अब $\tan \mathrm{A} = \dfrac{4}{5} \div \dfrac{3}{5}$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$\therefore \quad \tan A = \dfrac{4}{3}$ होगा।

(iv) tanA का व्युत्क्रम cotA होता है

अतः $\cot\mathrm{A} = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{1}{4/3} = \dfrac{3}{4}$ होगा

(v) $\because \ \mathrm{cosecA} = \dfrac{1}{\mathrm{sinA}} = \dfrac{1}{4/5} = \dfrac{5}{4}$

अतः $\mathrm{cosecA} = \dfrac{5}{4}$ होगा।

उदाहरण–4. यदि 5 tanθ = 4 हो तो $\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : 5tanθ = 4

तो $\tan\theta = \frac{4}{5}$

अब $\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta}$

$$= \frac{5\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{3\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 2\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}$$ (cosθ से अंश एवं हर में भाग देने पर)

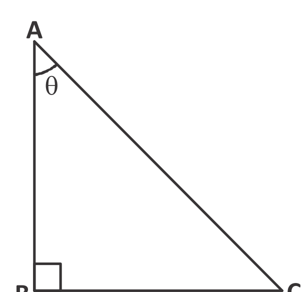
$$= \frac{5\tan\theta - 3}{\tan\theta + 2} \qquad (\because \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta)$$

$$= \frac{5\left(\frac{4}{5}\right) - 3}{\left(\frac{4}{5}\right) + 2} \qquad (\because \tan\theta = \frac{4}{5})$$

$$= \frac{4-3}{(4+10)/5} = \frac{1}{14/5}$$

$$= \frac{5}{14}$$

उदाहरण–5. किसी समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें ∠B समकोण है।
यदि $\tan\theta = 1$ हो तो सिद्ध कीजिए
कि $2\sin\theta\cos\theta = 1$



चित्र–7

हल : ΔABC में $\tan\theta = \frac{BC}{AB} = 1$

या BC = AB

माना AB = BC = k जहां k कोई धनात्मक संख्या है

अब $AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = k\sqrt{2}$

इसलिए $\sin\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ और $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

तो $2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \quad \left(\because \sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2\right)$

या $2\sin\theta\cos\theta = 1$ यही सिद्ध करना था।

प्रश्नावली - 8.2

1. निम्नलिखित में कोई एक त्रिकोणमितीय अनुपात दिया गया है। शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करें:–

   (i) $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ (ii) $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ (iii) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$

   (iv) $\cot\theta = 1$ (v) $\operatorname{cosec}A = \dfrac{5}{4}$ (vi) $\sec\beta = 2$

   (vii) $\operatorname{cosec}A = \sqrt{10}$

2. यदि $\cot\theta = \dfrac{21}{20}$ हो, तो $\sin\theta \times \cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\cos A = \dfrac{4}{5}$ हो, तो $\dfrac{\cot A - \sin A}{2\tan A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\sec\theta = \dfrac{5}{3}$ हो, तो $\dfrac{\tan\theta - \sin\theta}{1 + \tan\theta.\sin\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\sin A = \dfrac{1}{3}$ हो, तो $\cos A$, $\operatorname{cosec}A + \tan A$, $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. किसी समकोण ΔABC में $\angle C$ समकोण हो तथा $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो $\sin A\cos B + \cos A\sin B$ का मान ज्ञात कीजिए।

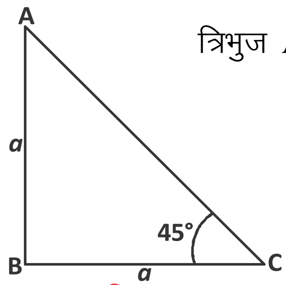
7. यदि $\cot A = \dfrac{3}{4}$ हो, तो $\dfrac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए

8. यदि $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ हो, तो $\dfrac{4\tan\theta - 5\cos\theta}{\sec\theta + 4\cot\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

कुछ विशेष कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण त्रिभुज में $\theta = 0°, 30°, 45°, 60°$ अथवा $90°$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्यामिति का उपयोग कर पता कर सकते हैं। आइए देखें:–

45° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात



चित्र–8

त्रिभुज ABC समकोण त्रिभुज है। जिसमें $\angle B$ समकोण है तथा $\angle C = 45°$ है।

स्पष्ट है कि $\angle A$ भी $45°$ का होगा।

यदि $BC = a$ हो तो

$AB = a$ (क्यों)

(किसी त्रिभुज में बराबर कोणों के सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं।)

अब $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$= a^2 + a^2 = 2a^2$

$AC = a\sqrt{2}$

$\because$ $\angle C = 45°$ के लिए BC आधार, AB लंब और AC कर्ण है।

$$\therefore \quad \sin C = \sin 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{cosec } 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

30° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

ΔABD एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा $2a$ व प्रत्येक कोण $60°$ है।

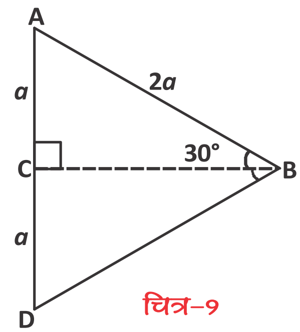
B से AD पर लंब डालें।

यह AD को C पर मिलेगा।

$\therefore$ $AC = CD = a$ (क्यों?)

$\angle ABC = \angle DBC = 30°$ (क्यों?)

(समबाहु त्रिभुज के किसी शीर्ष से सामने वाली भुजा पर डाला गया लंब उस भुजा को दो बराबर भागों में बांटता है एवं शीर्ष के कोण को समद्विभाजित भी करता है।)



चित्र–9

अब समकोण त्रिभुज ACB में $\angle C$ समकोण है।

$\angle ABC = 30°$ तथा इस कोण के लिए BC आधार, AC लंब और AB कर्ण है।

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 \qquad (BC^2 + AC^2 = AB^2 \text{ से})$$
$$= (2a)^2 - (a)^2 = 4a^2 - a^2$$
$$= 3a^2 = a^2.3$$
$$BC = a.\sqrt{3}$$

अब हमारे पास AB, BC और AC के मान हैं।

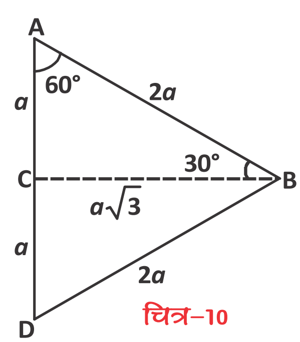
आप इनकी सहायता से 30° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान अपनी कॉपी में लिखिए। आपके साथियों ने जो मान निकाले हैं उनसे मिलाइए।

60° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

त्रिभुज ABC में $\angle A = 60°$ है।

इस कोण के लिए लंब BC $\left(= a\sqrt{3}\right)$ है।

आधार AC $(= a)$ तथा कर्ण AB $(= 2a)$ है।



चित्र–10

$$\sin 60° = \frac{BC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

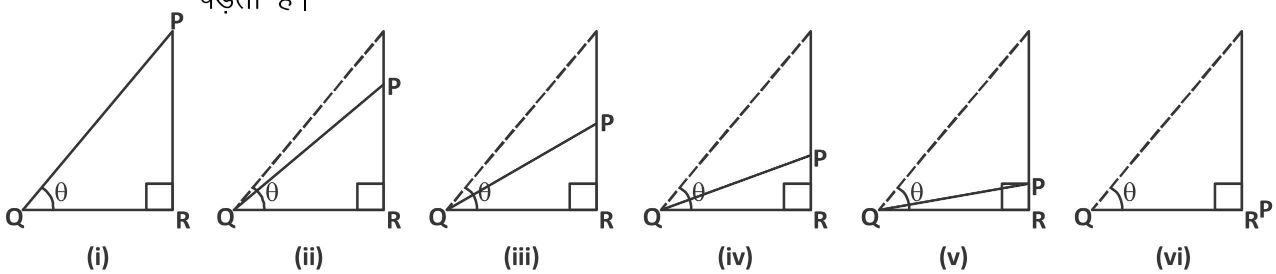
$$\tan 60° = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

शेष अनुपात साथियों के साथ मिलकर प्राप्त कीजिए।

0° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

0° के कोण के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए हमें समकोण त्रिभुज के बारे में सोचना होगा जिसका एक कोण 0° का हो। क्या ऐसा त्रिभुज संभव है? (इस सवाल पर अपने साथियों से चर्चा कीजिए।)

यहाँ हम इस बात पर विचार करेंगे कि किसी समकोण त्रिभुज का कोई न्यून कोण लगातार छोटा और छोटा होता जाए तो उसकी भुजाओं की लंबाइयों में कैसा बदलाव दिखाई पड़ता है।



चित्र-11

त्रिभुज PQR एक समकोण त्रिभुज है। $\angle PQR$ वह कोण है जिसे 0° तक छोटा करना है। चित्र (i) से (vi) में क्रमशः कोण θ को छोटा होता हुआ दिखाया गया है।

कोण को छोटा करते जाने पर लंब PR में क्या कोई बदलाव आ रहा है?

क्या कर्ण QP में भी कोई बदलाव दिखाई पड़ रहा है?

आप देख रहे हैं जैसे–जैसे θ कम हो रहा है PR भी छोटा होता जा रहा है।

जब θ लगभग शून्य के बराबर हो जाएगा तब PR भी लगभग शून्य के बराबर होगा।

अतः जब $\theta = 0$ होगा तब लंब $PR = 0$

इसके साथ ही QP भी छोटा हो रहा है और लगभग आधार QR के बराबर होता जा रहा है।

अतः $\theta = 0$ पर आधार QR = कर्ण QP

अतः $\quad \sin 0^\circ = \dfrac{PR}{QP} = \dfrac{0}{QP} = 0$

$\cos 0^\circ = \dfrac{QR}{QP} = 1 \quad (\because QR = QP$ दिया है)

$\tan 0^\circ = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{0}{QR} = 0$

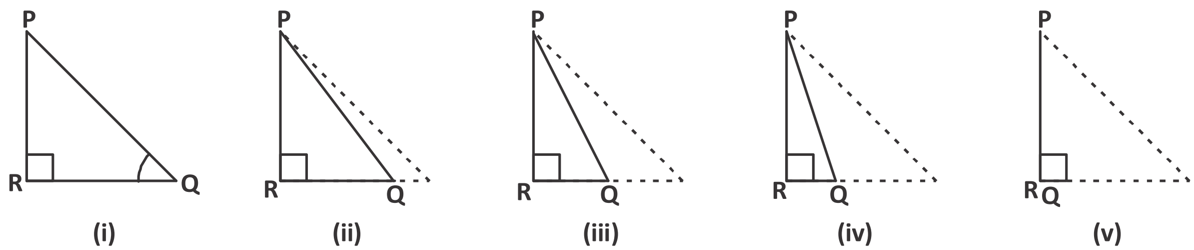
$\cot 0^\circ = \dfrac{QR}{PR} = \dfrac{QR}{0} =$ अनिर्धारित (किसी परिमेय संख्या के हर में शून्य हो तो वह अनिर्धारित है)

$\sec 0^\circ = \dfrac{QP}{QR} = 1$

$$\text{cosec } 0° = \frac{QP}{PR} = \frac{QP}{0} = \text{अनिर्धारित}$$

90° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

90° कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए ऐसा समकोण त्रिभुज लेना होगा जिसका एक न्यूनकोण बढ़ते–बढ़ते 90° ही हो जाए, उस त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों में क्या परिवर्तन दिखाई पड़ता है?



चित्र–12

त्रिभुज PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसके $\angle PQR$ को लगातार 90° तक बढ़ाना है। चित्र–12 में (i) से (v) तक $\angle Q$ को क्रमशः बढ़ता हुआ दिखाया गया है।

कोण Q को बढ़ाने पर आधार QR में क्या कोई बदलाव आ रहा है?

क्या कर्ण PQ में भी कोई परिवर्तन दिख रहा है?

आप देख रहे हैं कि Q का मान बढ़ाते जाने पर आधार QR छोटा होता जा रहा है तथा जब $Q = 90°$ होगा तब $QR = 0$ हो जाएगा। इसके साथ ही PQ भी छोटा होता जा रहा है और लगभग लंब PR के बराबर होता जा रहा है।

अतः $\angle Q = 90°$ पर कर्ण PQ = लंब PR और आधार $QR = 0$

अब
$$\text{Sin } 90° = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{PR}{PQ} = 1$$

$$\text{Cos } 90° = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 90° = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \frac{PR}{QR} = \frac{PR}{0} = \text{अनिर्धारित}$$

इसी प्रकार अन्य अनुपातों के लिए मान लिखिए।

कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

BJDHIL

सारणी–1

कोण अनुपात	0°	30°	45°	60°	90°
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tanθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अनिर्धारित
cotθ	अनिर्धारित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secθ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अनिर्धारित
cosecθ	अनिर्धारित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

उदाहरण–6. मान ज्ञात कीजिए–

$$\cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30°$$

हल : $\cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30°$ में मान रखने पर

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

उदाहरण–7. मान ज्ञात कीजिए–

$$\frac{5\sin^2 30° + \cos^2 45° - 4\tan^2 30°}{2\sin 30° \cos 30° + \tan 45°}$$

> tan 90°, sec 90°, cot 0°, cosec 0° अनिर्धारित हैं। 90° से थोड़े से कम मान पर गणना करें तो tanθ और secθ का मान बहुत ही अधिक होगा। 90° की तरफ आते जाते यह मान अनंत होता जाता है।
>
> इसी तरह cotθ और cosecθ भी θ के 0° तक पहुंचते–पहुंचते अनंत होते जाते हैं और इनके मान निर्धारित नहीं किए जा सकते।

हल : $\dfrac{5\sin^2 30° + \cos^2 45° - 4\tan^2 30°}{2\sin 30° \cos 30° + \tan 45°}$ में मान रखने पर

$$= \frac{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1}$$

$$= \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{15 + 6 - 16}{12}}{\frac{\sqrt{3} + 2}{2}} = \frac{\frac{21 - 16}{12}}{\frac{\sqrt{3} + 2}{2}}$$

$$= \frac{5}{12} \times \frac{2}{\sqrt{3}+2} = \frac{5}{6\left(\sqrt{3}+2\right)}$$

$$= \frac{5}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} \times \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)}$$ (परिमेयीकरण करने याने हर को परिमेय संख्या बनाने पर)

$$= \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{6\left(4-3\right)} = \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{6} \qquad \left((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = (2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right)$$

उदाहरण–8. सत्यापन कीजिए–

$$\cos^2 30° - \sin^2 30° = \cos 60°$$

हल : $\cos^2 30° - \sin^2 30°$

$$= (\cos 30°)^2 - (\sin 30°)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} = \cos 60°$$

प्रश्नावली – 8.3

1. निम्नलिखित में से सही विकल्प चुनिए–

(i) $\dfrac{1 - \tan^2 45°}{1 + \tan^2 45°} =$

(a) 1 (b) tan90° (c) 0 (d) sin45°

(ii) $\dfrac{2\tan 30°}{1 - \tan^2 30°} =$

(a) sin 60° (b) sin 30° (c) tan 60° (d) cos 60°

2. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°$ (ii) $\tan 30° \sec 45° + \tan 60° \sec 30°$

(iii) $\operatorname{cosec} 30° + \cot 45°$ (iv) $\dfrac{\cot 60°}{\sec 30° - \tan 45°}$

(v) $\tan^2 60° + \tan^2 45°$ (vi) $\dfrac{\cos 30° + \sin 60°}{1 + \cos 60° + \sin 30°}$

(vii) $\dfrac{\sin^2 45° + \cos^2 45°}{\tan^2 60°}$ (viii) $\dfrac{\sin 30° - \sin 90° + 2\cos 0°}{\tan 30° \tan 60°}$

3. जाँचिए सत्य या असत्य–

(i) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \tan 90°$

(ii) $1 - 2\sin^2 30° = \cos^2 60°$ (iii) $2\cos^2 45° - 1 = \cos 90°$

(iv) $\sin^2 45° = 1 - \cos^2 45°$ (v) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

BJHDK9

त्रिकोणमितीय समीकरण

जिस प्रकार एक चर राशि वाले बीजीय समीकरणों को हल कर अज्ञात राशि x, y, z, ... आदि राशि का मान ज्ञात करते हैं, उसी प्रकार त्रिकोणमितीय समीकरण को हल कर अज्ञात कोण θ का मान ज्ञात किया जाता है। इस भाग में हम उन त्रिकोणमितीय समीकरणों का अध्ययन करेंगे जिनमें चर (अज्ञात) कोण θ का मान 0° और 90° के मध्य हो।

उदाहरण–8. समीकरण $2\sin\theta - 1 = 0$ को हल कीजिए, यदि $0° \le \theta° \le 90°$

हल : $2\sin\theta - 1 = 0$

$2\sin\theta = 1$ या $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

$\sin\theta = \sin 30^\circ \qquad \left(\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\right)$

$\therefore \theta = 30^\circ$

उदाहरण–9. समीकरण $\sqrt{3}\tan\theta = 1$ को हल कीजिए यदि $0^\circ \le \theta^\circ \le 90^\circ$

हल : $\sqrt{3}\tan\theta = 1$ या $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \tan 30^\circ \qquad \left(\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore \theta = 30^\circ$

प्रश्नावली – 8.4

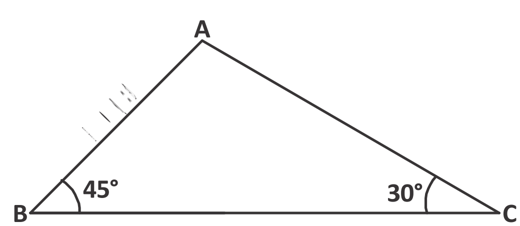
निम्नलिखित त्रिकोणमितीय समीकरण को θ के मान के लिए हल कीजिए, जबकि $0^\circ \le \theta^\circ \le 90^\circ$

1. $\sin\theta = \cos\theta$
2. $2\cos\theta = 1$
3. $2\sin^2\theta = \frac{1}{2}$
4. $3\tan^2\theta - 1 = 0$
5. $2\sin\theta = \sqrt{3}$
6. $\tan\theta = 0$
7. $3\operatorname{cosec}^2\theta = 4$
8. $2\cos^2\theta = \frac{1}{2}$
9. $4\sin^2\theta - 3 = 0$
10. $4\sec^2\theta - 1 = 3$
11. $\cot^2\theta = 3$

त्रिकोणमितीय अनुपात के अनुप्रयोग

अभी तक हमने जितने कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के बारे में पढ़ा है वे कोण किसी समकोण त्रिभुज के ही कोण थे। समकोण त्रिभुज के अतिरिक्त अन्य त्रिभुजों, चतुर्भुजों, पंचभुजों, बहुभुजों में भी ये त्रिकोणमितीय अनुपात होते हैं और इनके मान निश्चित होते हैं। ये इन कोणों के विशिष्ट गुण होते हैं। अर्थात् किसी भी आकृति में कोणों के मान ज्ञात होने पर त्रिकोणमितीय अनुपात की सहायता से भुजाओं की माप ज्ञात कर सकते हैं। इसे हम निम्नलिखित उदाहरण से समझेंगे–

उदाहरण–10. एक त्रिभुज लेते हैं ABC जिस में $\angle B = 45^\circ$ और $\angle C = 30^\circ$ $AB = 5$ सेमी. त्रिभुज में कोई भी कोण 90° अंश का नहीं है।

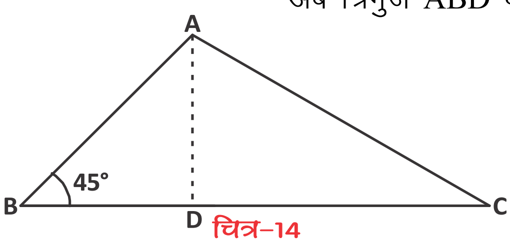


चित्र–13

क्या हम इस जानकारी से AC व BC पता कर सकते हैं?

शीर्ष A से भुजा BC पर एक लंब खींचें जो उसे D पर काटे।

अब त्रिभुज ABD को लें तो



चित्र-14

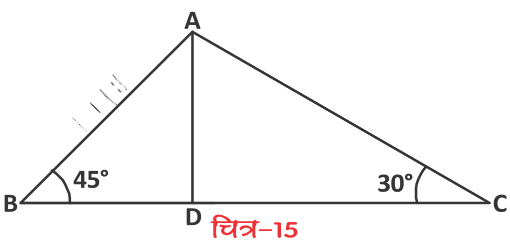
$$\sin 45° = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{5}$$

यानें $AD = 5 \sin 45° = \frac{5}{\sqrt{2}}$

हम BD पता कर सकते हैं। रेहाना ने कहा इस त्रिभुज में $AD = BD$

क्या आपको यह ठीक लगता है?

ये दोनों बराबर क्यों हैं?



चित्र-15

अब त्रिभुज ADC को देखें

$$\sin 30° = \frac{AD}{AC}$$

$$AC = \frac{AD}{\sin 30°}$$

यानें $AC = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sin 30°}$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}} \times 2 = 5\sqrt{2}$$

और $DC = AC \cos 30° = 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

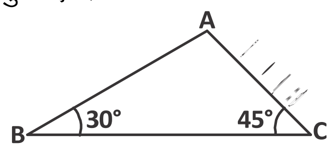
BD और DC दोनों को जोड़ कर BC प्राप्त करते हैं।

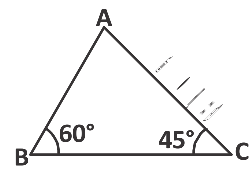
$$BC = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$$

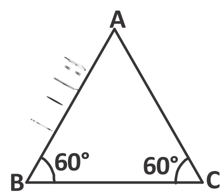
अतः $AB = 5, AC = 5\sqrt{2}$ और $BC = \frac{5\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$

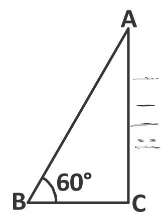
करके देखें

सभी भुजाएं ज्ञात करें

1. 

2. 

3. 

4. 

हमने सीखा

1. त्रिकोणमितीय अनुपातों को निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात करते हैं–

$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ $\quad \cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ $\quad \tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$ $\quad \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$ $\quad \cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

2. त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंध होता है जैसे– $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$,

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

3. यदि न्यूनकोण त्रिभुज का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात है तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात आसानी से ज्ञात कर सकते हैं?

4. हम विभिन्न कोण जैसे $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कर सकते हैं।

5. sinA या cosA का मान 1 से ज्यादा नहीं हो सकता जबकि secA या cosecA का मान हमेशा 1 से ज्यादा या 1 होगा।

6. 3 सर्वसमिकाएँ हैं:–

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$ जहाँ $\theta \neq 0$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ जहाँ $\theta \neq 90^\circ$

ज्यामिति
GEOMETRY

इकाई – 5

आओ ज्यामिति का इतिहास जानें.....

जब से मनुष्य ने अपने आस–पास की आकृतियों में विभेद करना प्रारंभ किया तभी से रेखागणित का उद्भव हुआ। तभी से बहुत सी वस्तुओं का नामकरण उनकी रेखागणितीय आकृतियों से बनी पहचान पर आधारित भी है। मनुष्य ने इन विविध आकृतियों को समझने व अलग–अलग ढंग से चित्रित करने के प्रयास में भिन्न–भिन्न प्रकार की रेखाओं व आकृतियों की रचना करना प्रारंभ किया।

इस प्रक्रिया में उन्होंने स्थानिक संबंधों का अध्ययन किया। आकृतियों की रचना, कोण की समझ विकसित की। भारत में ज्यामिति का उपयोग प्रमुख रूप से स्मारकों को बनाने व नक्षत्रों की स्थिति पता करने व उसका पूर्वानुमान लगाने आदि के लिए होता था। इसके लिए कई सूत्र बने हुए थे। शुरूआती ज्यामिति, अनुभवों व उदाहरणों से नियमों को प्राप्त करने के प्रयासों पर आधारित थी। ये नियम लंबाई, चौड़ाई, ऊँचाई, कोण, क्षेत्रफल, आयतन आदि की गणना करने में सरलता लाने के प्रयास में बने थे। इनका लक्ष्य रोजमर्रा की जरूरतों यथा जमीन के सर्वे, इमारतों, पुलों आदि के निर्माण तथा खगोलीय व अन्य तकनीकी उपयोग पूरा करना था। परंतु जैसा अक्सर होता है ज्यामिति करने का दायरा उसे आगे खोजने का भी था और धीरे–धीरे यह और व्यापक होती गई।

ज्यामिति याने भूमि मापन इसके उद्भव के कारणों को इंगित करता है। उस समय प्राप्त कई नियम आधुनिक गणित जैसे गहरे थे जिन्हें प्राप्त करना आज भी आसान नहीं है। यह ही औपचारिक ज्यामिति की शुरूआत थी। हड़प्पा सभ्यता के लोग मापन के साथ–साथ ज्यामितीय आकृतियों की रचना में प्रवीण थे। इसी तरह शुल्व सूत्र में भी त्रिभुजों, वर्गो, आयतों तथा अन्य जटिल ज्यामितीय आकृतियों की रचना एवं इन आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्रों का उल्लेख हैं। इन सब सूत्रों का भी व्यापक संदर्भों में उपयोग संभव है और त्रिभुजों, चतुर्भुजों आदि से संबंधित सूत्र हर प्रकार के त्रिभुजों, चतुर्भुजों पर उपयोग हो सकते हैं।

शुल्ब सूत्र ज्यामिति के कुछ उदाहरण हैं–

1. दो दिए गए वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर क्षेत्रफल का वर्ग बनाना।
2. ऐसा वर्ग बनाना जिसका क्षेत्रफल दिए गए वर्ग से दोगुना हो।

दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल से दोगुने क्षेत्रफल वाले वर्ग की रचना करने के लिए वर्ग की भुजा ज्ञात करने हेतु अपस्तंभ तथा कात्यायन ने निम्नलिखित शुल्ब सूत्र दिए –

$$\text{नयी भुजा} = \text{पुरानी भुजा}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{3\times4\times34}\right)=1.4142156\times\text{पुरानी भुजा}$$

यह मान $\sqrt{2}$ के वर्गमूल के मान से दशमलव के बाद के पांच स्थानों तक मिलता है।

इस तरह के सूत्रों व नियमों के कई और उदाहरण यूनानी, भारतीय (सिंधु घाटी व हड़प्पा) बेबिलोनियन, अरबी ज्यामिति में मिलते हैं।

ये जानकारियाँ अलग–अलग ग्रंथों से संकलित कर प्रस्तुत की गई हैं। शिक्षक एवं विद्यार्थी अन्य स्रोतों से ज्यामिति के संबंध में और भी जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं।

सरल रेखा और कोण

[Straight Line & Angle]

09

हमारे इर्द–गिर्द बहुत–सी आकृतियाँ छिपी हुई हैं। नीचे दिए गए चित्र में दरवाजे के पल्ले, खिड़की की चौखट, किताब की ऊपरी सतह, छत आदि सभी आयताकार हैं।

चित्र–1

कुछ और चीज़ों की सतहें त्रिभुजाकार, पंचभुजाकार व अन्य आकार की भी होती हैं। आयताकार आकृतियों की सम्मुख भुजाएं बराबर व सभी कोण 90° के होते हैं। बाकी आकृतियों में भी कुछ रेखाखण्ड व उनके बीच के कोण आपस में बराबर हो सकते हैं।

चित्र में खिड़की के ग्रिल को देखें। इस ग्रिल के डिजाइन का चित्र बहुत से रेखाखण्ड दिखाता है। इसमें कई रेखाखण्ड एक–दूसरे को प्रतिच्छेद भी कर रहे हैं। इस ग्रिल में व घर में लगे अन्य ग्रिडनुमा ग्रिल में कई प्रतिच्छेद के बिंदु मिलते हैं। क्या ऐसे प्रतिच्छेदी बिंदुओं पर बनने वाले कोणों में आपस में कोई संबंध होता है? इस अध्याय में हम प्रतिच्छेदी बिंदुओं पर बने कोणों का अध्ययन करेंगे।

रेखाखण्ड और अंत बिंदु (Line Segment and End Points)

अपनी कापी पर एक रेखा खींचिए। इसे व्यक्त करने के लिए किन संकेतों का उपयोग होता है?

अब एक किरण खींचिए। इसके लिए कौन–से संकेत लेते हैं?

क्या रेखा में कोई अंत बिंदु हैं? और किरण में? आपस में चर्चा करें।

नीचे दिए गए चित्र को ध्यान से देखें:–

इसमें कितने अंत बिंदु हैं? यह चित्र न तो रेखा को निरूपित करता है और न ही किरण को। यह एक रेखाखण्ड है।

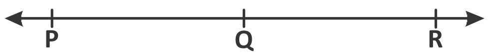
चित्र–2

यह एक रेखा पर भी चिह्नित किया जा सकता है।

एक रेखा पर कितने रेखाखण्ड हो सकते हैं?

आपस में चर्चा कीजिये।

रेखाखण्ड पहचानें



चित्र–3

1. इस रेखा में कितने बिंदु अंकित है?
2. इसमें कौन–कौन से रेखाखण्ड हैं व कितने रेखाखण्ड हैं?

उपर्युक्त तीनों बातें नीचे के चित्र 4, 5, 6 और 7 में भी देखें–

चित्र–4

चित्र–5

चित्र–6

चित्र–7

अंकित बिंदुओं की संख्या	अंकित बिंदुओं के नाम	रेखा खण्डों के नाम	रेखा खण्डों की संख्या
3	P, Q, R	PQ, PR, QR	3
4	P, Q, R, S		
5			
6			
7			

यहाँ PQ अथवा QP एक ही रेखाखण्ड के दो नाम हैं।

यदि किसी रेखा पर दो ही बिंदु अंकित हों तो कितने रेखाखण्ड होंगे?

इस तालिका के आधार पर बिंदु की संख्या और रेखाखण्ड की संख्या में क्या कोई संबंध दिखता है?

इसी प्रकार यदि किसी रेखा पर 8 बिंदु अंकित हों तो रेखाखण्ड की संख्या $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ होगी।

यदि किसी रेखा पर n बिंदु अंकित हों तो रेखाखण्ड की संख्या $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ________ + n - 1$ होगी।

क्या आप इससे सहमत हैं? आपस में चर्चा करें।

संरेख बिंदु (Collinear Points)

ऊपर की तालिका में बिंदु P, Q, R, S आदि एक ही रेखा पर हैं। ये संरेख बिंदु हैं अर्थात् ऐसे सभी बिंदु जो एक ही रेखा पर स्थित हो संरेख बिंदु (collinear points) होंगे।

यहां बिंदु A, B व C संरेख हैं (चित्र–8)।

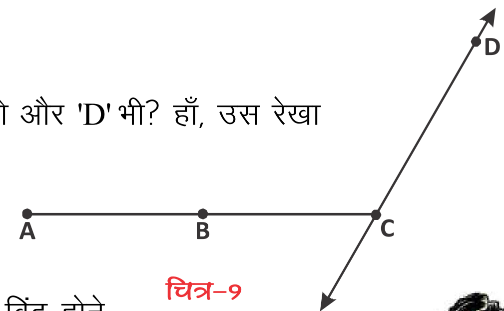
चित्र–8

क्या चित्र 9 में बिंदु A, B, C और D संरेख हैं? क्या हम यह भी कह सकते हैं कि बिंदु B, C और D संरेख नहीं हैं?

और क्या बिंदु C व D भी संरेख नहीं हैं?

क्या हम एक ऐसी रेखा खींच सकते हैं जिस पर 'C' भी हो और 'D' भी? हाँ, उस रेखा पर CD रेखा खण्ड है।

स्पष्टतः कोई भी दो बिंदु हों, किसी न किसी एक रेखा पर तो वे अवश्य होंगे और उस रेखा पर वे संरेख होंगे।



चित्र–9

अर्थात् बिंदु संरेख है या नहीं, यह प्रश्न कम से कम तीन बिंदु होने पर ही सार्थक होता है। तभी यह पूछा जा सकता है कि दिए गए बिंदु संरेख हैं या नहीं?

सोचें एवं चर्चा करें

क्या 3 संरेख बिंदुओं से त्रिभुज बन सकता है?

रेखा और कोण (Line and Angle)

चित्र–9 में बिंदु 'C' पर कोण $\angle DCA$, 90° से अधिक है अतः अधिक कोण है।

हम कई अन्य प्रकार के कोण जानते हैं, जैसे– न्यूनकोण (acute angle), समकोण (right angle), अधिक कोण (obtuse angle), सरल या ऋृजुकोण (straight angle) तथा प्रतिवर्ती या वृहत्त कोण (reflex angle)।

करके देखें

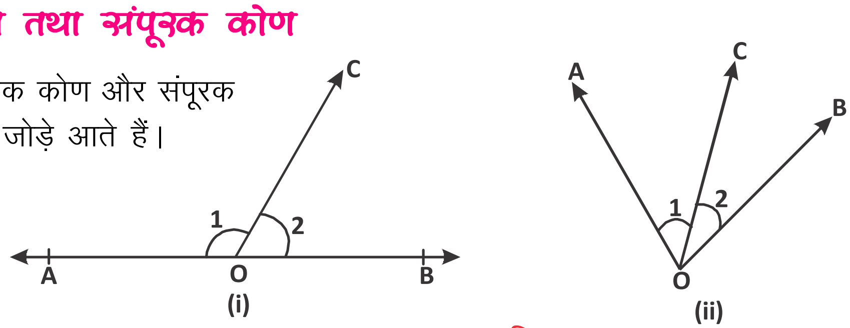
इनमें से प्रत्येक कोण का चित्र बनाइए व कोणों के नाम लिखिए।

आसन्न कोण, पूरक कोण तथा संपूरक कोण

यहाँ हम देखेंगे कि आसन्न कोण, पूरक कोण और संपूरक कोण की श्रेणी में कौन से कोण के जोड़े आते हैं।

आसन्न कोण (Adjacant angles)

दिए गए चित्र 10 (i) व (ii) को देखें।

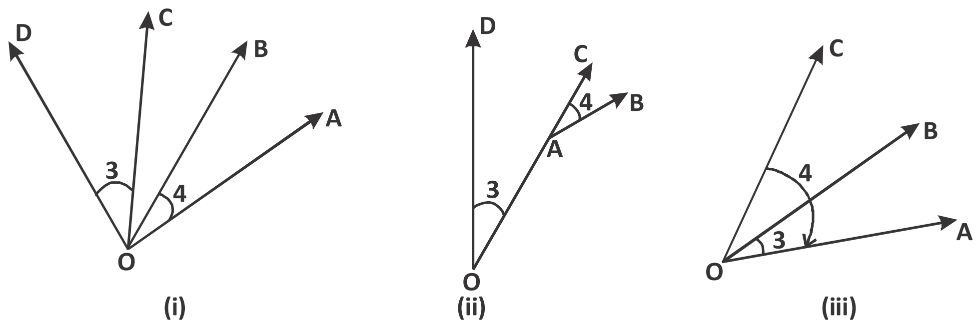


चित्र–10

चित्र 10 (i) व (ii) में दो कोण 1 व 2 है। जिनमें शीर्ष O और एक भुजा OC उभयनिष्ठ(common) व मध्य में है।

अतः चित्र 10 में कोण 1 व 2 आसन्न कोण हैं।

अब चित्र 11 (i), (ii) व (iii) को देखिए–



चित्र–11

चित्र–11 के (i), में कोण 3, 4 के लिए शीर्ष समान है लेकिन कोई एक भुजा दोनों में उभयनिष्ठ (common) नहीं है।

चित्र (ii) में कोण 3, 4 के लिए शीर्ष अलग–अलग हैं अर्थात् कोण 3 के लिए O व कोण 4 के लिए A

चित्र (iii) में कोण 3, कोण 4 में एक भुजा OA उभयनिष्ठ है किंतु कोण 4 का ही एक भाग कोण 3 है।

इसलिए चित्र 11 के सभी भागों में कोण 3 व 4 आसन्न कोण नहीं हैं।

अर्थात् जब दो कोण एक ही शीर्ष पर हों व उनकी कोई भुजा दोनों में ही उभयनिष्ठ (common) हो (चित्र–10 की तरह) तथा एक कोण दूसरे में समाहित न हो (चित्र–11(iii) की तरह) तब कोणों के ऐसे जोड़ों को आसन्न कोण कहेंगे।

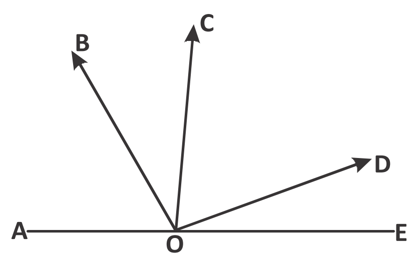
करके देखें

1. 2 ऐसे कोण बनाएँ जो आसन्न कोण न हों।
2. चित्र देखकर बताइए कि निम्नलिखित कोण आसन्न है या नहीं?

   (i) $\angle AOB$ और $\angle BOC$

   (ii) $\angle BOC$ और $\angle DOE$

   (iii) $\angle EOD$ और $\angle DOC$



सोचें एवं चर्चा करें

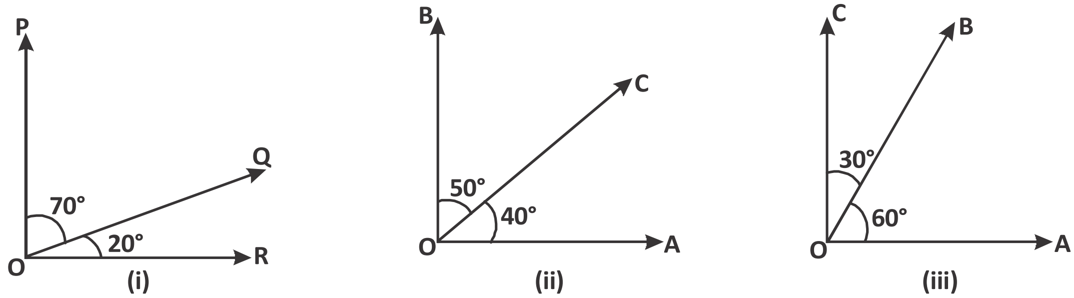
दो कोण कब आसन्न कोण होंगे?

(i) जब दोनों अधिक कोण हो (ii) दोनों न्यूनकोण हों

(iii) एक अधिक कोण व एक न्यून कोण हो।

पूरक कोण (Complementary angles)

नीचे दिए गए इन चित्रों को ध्यान से देखें। यहाँ प्रत्येक में दो कोण बने हैं। इन कोणों के प्रत्येक जोड़े का योग कितना होगा?



चित्र–12

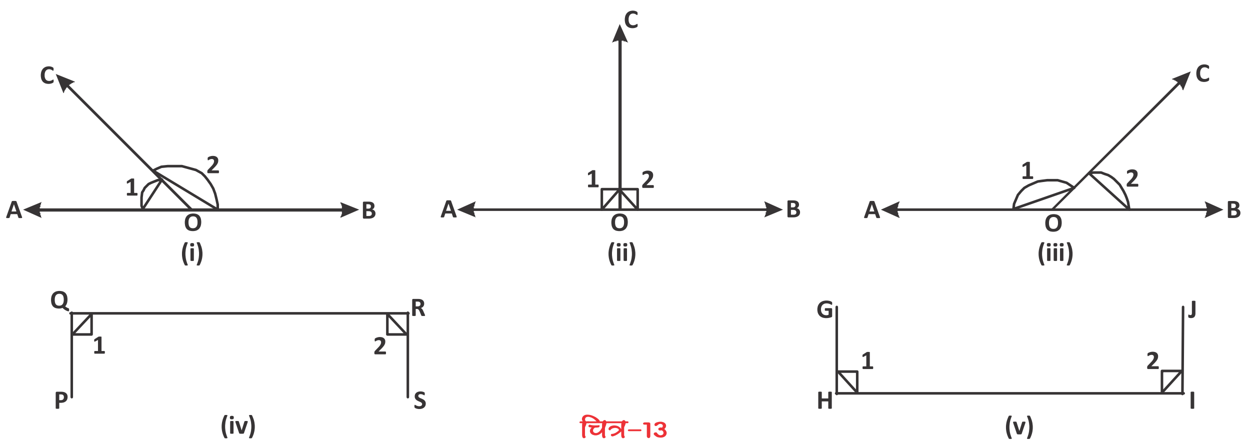
जब दो कोणों का योग 90^o हो तब प्रत्येक कोण एक–दूसरे के पूरक कोण होंगे।

क्या ये पूरक कोण आसन्न कोण भी हैं?

आप भी चित्र–12 की तरह कुछ और आसन्न पूरक कोणों के चित्र बनाइए।

संपूरक कोण (Supplementary angle)

नीचे बने चित्रों में $\angle 1$ व $\angle 2$ का योग कितना होगा?



चित्र–13

इन सभी कोणों के जोड़ों का योग 180^o है अर्थात् प्रत्येक कोण, एक–दूसरे का संपूरक कोण है।

क्या चित्र 13 में (i), (ii) व (iii) आसन्न कोण हैं? क्या (iv) और (v) में भी आसन्न कोण हैं?

यहाँ (i), (ii) व (iii) में दो कोणों के मिलने से एक सरल रेखा बन रही है और एक ऋृजुकोण (सरल कोण) बन रहा है। ऐसे कोणों के जोड़ों (युग्म) को रैखिक युग्म भी कहते हैं।

याने हम प्रत्येक रैखिक युग्म को संपूरक कोण कह सकते हैं।

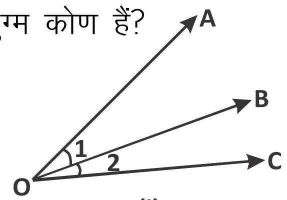
क्या चित्र (iv) व (v) के जोड़े भी रैखिक युग्म हैं?

सोचें एवं चर्चा करें

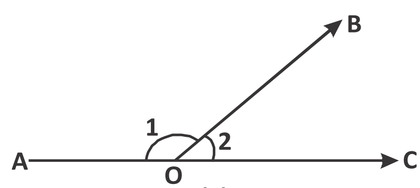
1. क्या दो समकोण एक–दूसरे के पूरक हो सकते हैं?
2. क्या प्रत्येक रेखीय युग्म संपूरक कोण होगा?

करके देखें

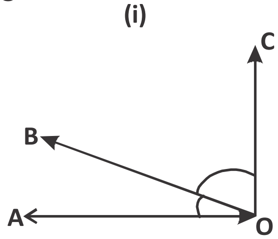
1. निम्नलिखित में से कौन से कोण पूरक अथवा संपूरक हैं? कौन से आसन्न व रेखीय युग्म कोण हैं?



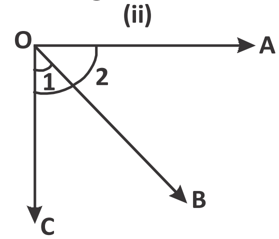
(i)



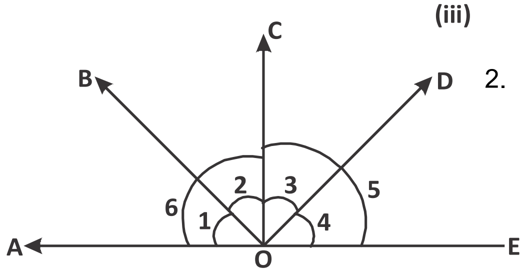
(ii)



(iii)



(iv)



2. निम्नलिखित चित्र में निम्न कोण कौनसे युग्म बना रहे हैं।

(i) $\angle 1$ व $\angle 2$ (ii) $\angle 5$ व $\angle 6$

(iii) $\angle 6$ व $\angle 3$ (iv) $\angle 5$ व $\angle 2$

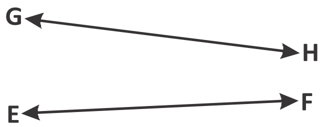
(v) $\angle 3$ व $\angle 4$

प्रतिच्छेदी एवं समांतर रेखाएँ (Intersecting and Parallel Lines)

चित्र–14(i) व (ii) में यदि रेखाओं को आगे बढ़ाया जाए तो कौन–सी रेखाएँ एक–दूसरे को काटेंगी?

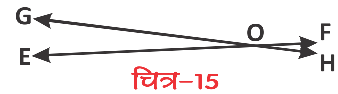
चित्र–14 (i)

यहाँ रेखा AB व CD एक–दूसरे को नहीं काटती हैं जबकि रेखाओं GH व EF



चित्र–14 (ii)

को H व F की दिशा में आगे बढ़ाने पर एक–दूसरे को O बिंदु पर काटती हैं। (चित्र–15)



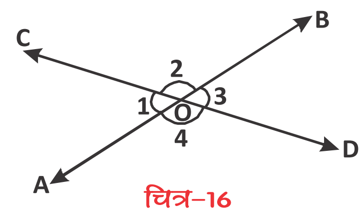
चित्र–15

अर्थात् AB व CD रेखाएँ समांतर रेखाएँ हैं और EF व GH प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं।

दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से बने कोण

जब दो रेखाएँ एक–दूसरे को किसी बिंदु पर काटती हैं तो कटान बिंदु पर कुछ कोण बनते हैं।

चित्र–16 को देखें। रेखा AB व CD बिंदु O पर एक–दूसरे को काटती gaर c $\angle 1,$, $\angle 2$, $\angle 3,$ व $\angle 4$ बनते हैं। क्या $\angle 1$ व $\angle 3$ तथा $\angle 2$ व $\angle 4$ में कुछ समानता है?



चित्र–16

यहाँ हम देखते हैं कि $\angle 1$ व $\angle 3$ बिंदु O (जो कि कोणों का शीर्ष है) पर एक–दूसरे के सामने के कोण हैं इसी प्रकार $\angle 2$ व $\angle 4$ भी।

ये कोण शीर्षाभिमुख कोण हैं।

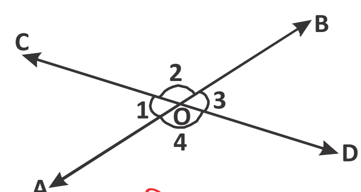
शीर्षाभिमुख कोणों के गुण (Vertically Opposite Angles)

यहाँ $\angle 1$ व $\angle 3$ तथा $\angle 2$ व $\angle 4$ शीर्षाभिमुख कोण हैं।

अब रेखा CD के ऊपरी भाग में $\angle COB + \angle BOD = \angle COD$

यहाँ $\angle COD$ कौन–सा कोण है?

यह सरल कोण है।



चित्र–17

अर्थात् $\angle COB + \angle BOD = 180^\circ$

या $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ .....(i)

क्या AB रेखा के ऊपरी भाग में भी इसी प्रकार का संबंध ज्ञात कर सकते हैं? हाँ, करके देखते हैं।

$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$

या $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ...(ii)

यहाँ $\angle AOB$ एक सरल कोण है।

अब (i) व (ii) से

$\angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 2$

या $\angle 3 = \angle 1$

अर्थात् $\angle 1 = \angle 3$ ...(iii)

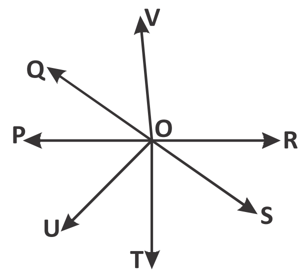
इसी प्रकार आप रेखा CD के ऊपर के कोणों का योग तथा रेखा AB के नीचे के कोणों का योग प्राप्त कर निम्नलिखित संबंध प्राप्त कर सकते हैं।

$$\angle 2 = \angle 4 \quad \text{...(iv)}$$

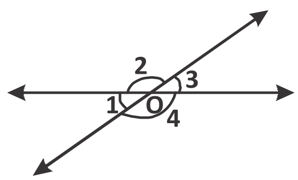
यहाँ $\angle 1$ व $\angle 3$ तथा $\angle 2$ व $\angle 4$ शीर्षाभिमुख कोण है तथा प्राप्त संबंध (iii) व (iv) से देख सकते हैं कि ये कोण बराबर हैं अर्थात् शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

करके देखें

1. चित्र में शीर्षाभिमुख कोण बताइए।

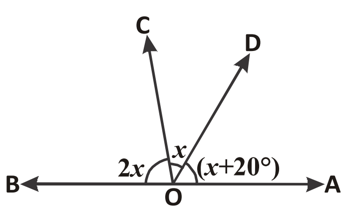


2. चित्र में $\angle 2 = 110^\circ$ तो $\angle 1$ व $\angle 4$ का मान बताइए।



उदाहरण–1. चित्र–18 में $\overrightarrow{OA}$ व $\overrightarrow{OB}$ विपरीत किरणें हैं। $\angle AOC$ व $\angle BOC$ के माप क्या होंगे?

हल : $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ विपरीत किरणें हैं।



चित्र–18

चूंकि $\angle AOC$ व $\angle BOC$ रेखीय युग्म बनाते हैं।

अतः $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$

$(2x + 20^\circ) + 2x = 180^\circ$

$4x + 20^\circ = 180^\circ$

$x = 40^\circ$

अतः $\angle AOC = 2x + 20^\circ$

$= 2(40^\circ) + 20^\circ$

$= 100^\circ$

$$\left\{\begin{aligned} \angle AOC &= \angle COD + \angle DOA \\ &= x + (x + 20^\circ) \\ &= 2x + 20^\circ \end{aligned}\right\}$$

और $\angle BOC = 2x$

$= 2(40^\circ)$

$= 80^\circ$

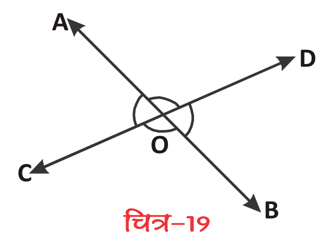
अतः $\angle AOC = 100^\circ$ व $\angle BOC = 80^\circ$ होगा।

उदाहरण–2. दिए गए चित्र में रेखाएँ AB और CD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle AOC : \angle COB = 7:8$ है, तो सभी कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार $\angle AOC : \angle COB = 7:8$

अतः माना $\angle AOC = 7x$ .....(i)

$\angle COB = 8x$ .....(ii)



चित्र–19

रेखा AB पर किरण OC खड़ी है (रेखीय युग्म)

$\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$

$7x + 8x = 180^\circ$

$15x = 180^\circ$

$x = 12^\circ$ .....(iii)

अतः $\angle AOC = 7x$

$= 7(12^\circ)$

$= 84^\circ$

एवं $\angle COB = 8x$

$= 8(12^\circ)$

$= 96^\circ$

और $\angle BOD = \angle AOC = 84^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

पुनः $\angle AOD = \angle COB = 96^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

उदाहरण–3. दिए गए चित्र में $\angle COD = 90^\circ$, $\angle BOE = 72^\circ$ और AOB सरल रेखा होने पर $\angle AOC$, $\angle BOD$ और $\angle AOE$ ज्ञात कीजिए।

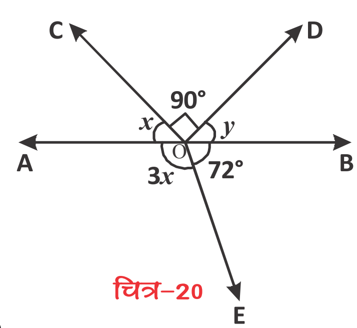
हल : AOB एक सरल रेखा है

$\angle AOE + \angle BOE = 180^\circ$ (रेखीय युग्म)

$\Rightarrow 3x + 72^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 3x = 108^\circ$

$\Rightarrow x = 36^\circ$ .....(i)



चित्र–20

इसी तरह से,

$\angle AOC + \angle COD + \angle DOB = 180^\circ$ (सरल कोण)

$\Rightarrow x + 90^\circ + y = 180^\circ$

$\Rightarrow 36^\circ + 90^\circ + y = 180^\circ$

$\Rightarrow 126^\circ + y = 180^\circ$

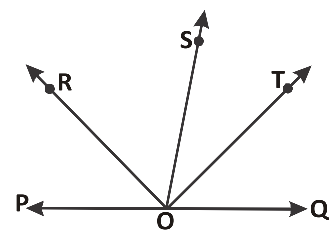
$\therefore y = 54^\circ$ .....(ii)

अतः $\angle AOC = x = 36^\circ$

$\angle BOD = y = 54^\circ$

और $\angle AOE = 3x = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$

उदाहरण–4. दिए गए चित्र–21 में PQ रेखा पर किरण OS है व अन्य किरणें OR और OT हैं जो क्रमशः $\angle POS$ और $\angle SOQ$ के समद्विभाजक हैं। $\angle ROT$ ज्ञात कीजिए।



चित्र–21

हल : किरण OS, रेखा PQ पर है, अतः रैखिक युग्म

$$\angle POS + \angle SOQ = 180^o$$

माना $\angle POS = x$

तो $x + \angle SOQ = 180^o$

$$\angle SOQ = 180^o - x \qquad .....(i)$$

किरण OR, $\angle POS$ को समद्विभाजित करती है,

अतः $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2} \qquad .....(ii)$$

इसी तरह किरण OT, $\angle SOQ$ को समद्विभाजित करती है,

अतः $\angle SOT = \frac{1}{2}\angle SOQ$

$$= \frac{1}{2}(180^o - x) \quad \text{(समी. 1 से)}$$

$$= 90^0 - \frac{x}{2} \qquad .....(iii)$$

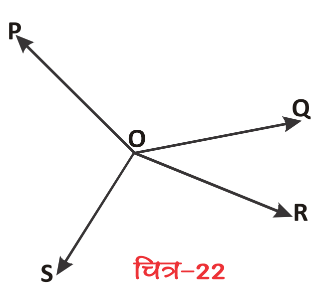
चित्र से स्पष्ट है कि

$$\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$$

$$= \frac{x}{2} + \left(90^o - \frac{x}{2}\right) \qquad = \frac{x}{2} + 90^o - \frac{x}{2}$$

अतः $\angle ROT = 90^o$

उदाहरण–5. संलग्न चित्र में चार किरणें OP, OQ, OR और OS हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^o$ है।



चित्र–22

हल : दिए गए चित्र–22 में किरण OP, OQ, OR और OS में से किसी भी एक को पीछे एक बिंदु तक बढ़ाने की आवश्यकता है। (क्यों?)

किरण OQ को एक बिंदु T तक बढ़ा दें, (चित्र–23) ताकि TOQ एक रेखा हो जाय। अब चित्र से स्पष्ट है कि

किरण OP, रेखा TQ पर है, अतः रैखिक युग्म

$\angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ .....(i)

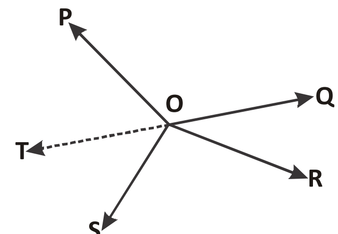
इसी प्रकार किरण OS भी रेखा TQ पर है, अतः रैखिक युग्म

$\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ .....(ii)

समी. (1) और (2) को जोड़ने पर

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOQ = 360^\circ$ .....(iii)

चित्र से स्पष्ट है कि



चित्र–23

$\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

$\angle TOP = \angle POS - \angle TOS$ .....(iv)

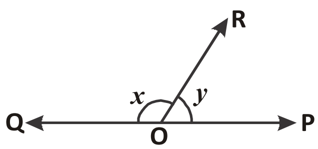
और $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$ .....(v)

समीकरण (iii) में समी. (iv) और समी. (v) से मान रखने पर

$$\angle POS - \angle TOS + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ$$

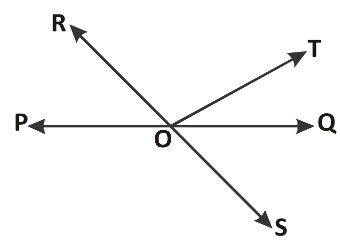
अतः $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$ यही सिद्ध करना था।

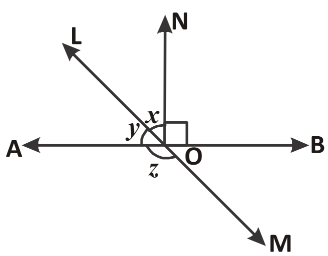
प्रश्नावली – 9.1



1. चित्र में $\angle POR$ तथा $\angle QOR$ रेखीय युग्म निर्मित करते हैं। यदि $x - y = 80^\circ$ हो तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

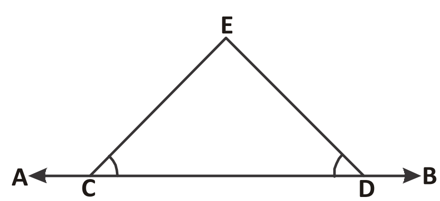
2. दिए गए चित्र में रेखाएँ PQ और RS बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POR + \angle QOT = 70^\circ$ और $\angle QOS = 40^\circ$ है तो $\angle QOT$ तथा प्रतिवर्ती $\angle ROT$ का मान ज्ञात कीजिए।

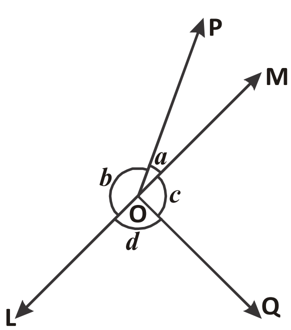




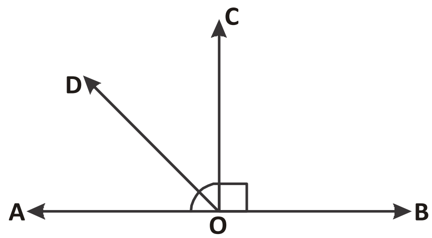
3. दिए गए चित्र में, रेखाएँ AB और LM बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle NOB = 90^\circ$ और $x : y = 2 : 3$ है, तो z का मान ज्ञात कीजिए।

4. दी गई आकृति में $\angle ECD = \angle EDC$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle ECA = \angle EDB$





5. दिए गए चित्र में यदि $a + b = c + d$ है, तो सिद्ध कीजिए कि LOM एक रेखा है।

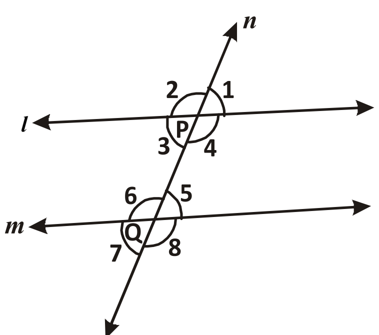


6. दिए गए चित्र में AOB एक रेखा है। किरण OC, रेखा AB पर लंब है। किरण OA और OC के बीच में एक अन्य किरण OD है। सिद्ध कीजिए कि

$$\angle COD = \frac{1}{2}(\angle BOD - \angle AOD)$$

7. यदि $\angle ABC = 64^o$ और AB को बिंदु X तक बढ़ाया गया है। इस दी गई जानकारी से आकृति खींचिए। यदि किरण BY, $\angle CBX$ को समद्विभाजित करती है, तो कोण $\angle ABY$ और प्रतिवर्ती $\angle YBX$ के मान ज्ञात कीजिए।

समांतर रेखा और तिर्यक रेखाएँ (Parallel and Transversal Lines)



चित्र–24

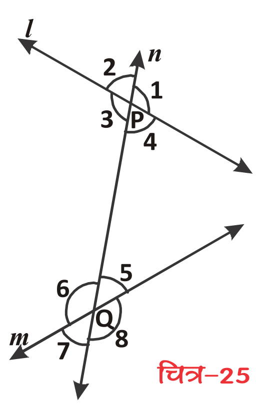
चित्र–24 व 25 में ℓ, m किस प्रकार की रेखाएँ हैं?

चित्र–24 में रेखाएँ ℓ, m एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती तथा चित्र–25 में रेखाएँ ℓ, m प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। रेखा n दोनों चित्रों में ℓ, m रेखाओं को दो बिंदुओं P व Q पर काटती है। यह रेखा n तिर्यक रेखा है।

चित्र–24 व चित्र–25 को देखिए। इन दोनों में से किस चित्र में *l* व *m* रेखाओं के बीच की दूरियाँ समान है?

यहाँ चित्र–25 में रेखाएँ ℓ, m प्रतिच्छेदी हैं और इनके बीच की दूरियाँ असमान हैं जबकि चित्र–24 में रेखाएँ ℓ, m बीच की दूरियाँ समान हैं। चित्र–24 की रेखाएँ ℓ, m समांतर रेखाएँ हैं।

जब दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है तो निम्नलिखित कोण बनते हैं जिन्हें चित्र–24 व 25 में देख सकते हैं–



चित्र–25

(i) संगत कोण (Corresponding angle)
   (a) $\angle 1$ और $\angle 5$ (b) $\angle 2$ और $\angle 6$
   (c) $\angle 3$ और $\angle 7$ (d) $\angle 4$ और $\angle 8$

(ii) एकांतर अंतःकोण (Alternative interior angle)
   (a) $\angle 4$ और $\angle 6$ (b) $\angle 3$ और $\angle 5$

(iii) एकांतर बाह्य कोण (Alternate exterior angle)
   (a) $\angle 1$ और $\angle 7$ (b) $\angle 2$ और $\angle 8$

(iv) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोण
   (a) $\angle 4$ और $\angle 5$ (b) $\angle 3$ और $\angle 6$

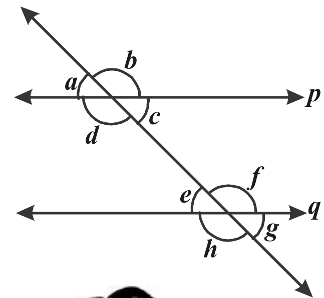
तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोणों को क्रमागत (consecutive) अंतः कोण या संबंधित (allied) अंतःकोण या सहअंतःकोण (cointerior angles) भी कहते हैं। कई बार हम एकांतर अंतः कोणों के स्थान पर शब्द एकांतर कोण का प्रयोग करते हैं।

(v) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के बाह्य कोण हैं।
(क्रमागत बाह्य कोण या संबंधित बाह्य कोण या सहबाह्य कोण)

(a) $\angle 1$ और $\angle 8$ (b) $\angle 2$ और $\angle 7$

करके देखें

आप निम्नलिखित चित्र का अवलोकन कर तालिका पूर्ण कीजिए।



क्रं सं.	कोणों का युग्म	कोण	कोणों के युग्म की संख्या
1	एकांतर अंतः कोण		2
2	तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण		
3		$\angle a$ और $\angle g$, $\angle b$ और $\angle h$	
4		$\angle a$ और $\angle h$ $\angle b$ और $\angle g$	
5	संगत कोण		4

संगत कोण व एकांतर कोण के गुण (Properties of Corresponding angle and Alternative Angle)

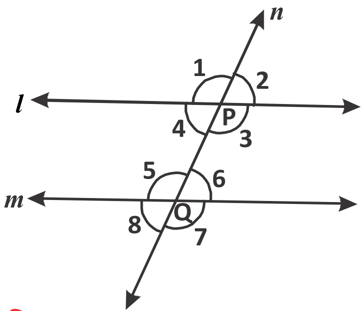
दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा के काटने पर संगत कोणों, एकांतर कोणों के जोड़े बनते हैं। क्या इन कोणों के जोड़ों (युग्म) में कुछ संबंध होते हैं?

जब प्रतिच्छेदी रेखाओं को तिर्यक रेखा काटती है तो संगत कोणों व एकांतर कोणों के युग्म बराबर नहीं होते हैं, किंतु समांतर रेखाओं को तिर्यक रेखा काटती है तो संगत कोणों व एकांतर कोणों के युग्म बराबर होते हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे और उनके संगत कोण बराबर हों तब क्या दोनों रेखाएँ समांतर होंगी?

अब प्रश्न यह है कि क्या संगत कोणों के इस गुण के आधार पर समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा के काटने पर बनने वाले अन्य कोणों जैसे एकांतर अन्तःकोण, एकांतर बाह्यकोण के गुण जान सकते हैं? हाँ, इस संबंध को जानने के लिए हम दो समांतर रेखाएँ ℓ, m बनाते हैं, जिन्हें तिर्यक रेखा n बिन्दु P व Q पर काटती है। चित्र–26 देखें।



चित्र–26

यहाँ $\angle 1 = \angle 5$ (संगतकोण) – (i)

$\angle 1 = \angle 3$ (शीर्षाभिमुख कोण) – (ii)

(i) व (ii) से

$\angle 5 = \angle 3$ ये कौन–से कोण हैं? ये एकांतर अन्तःकोण हैं।

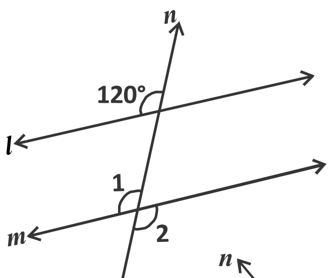
अब हम कह सकते है कि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे तो उनके एकांतर अन्तःकोण बराबर होते हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

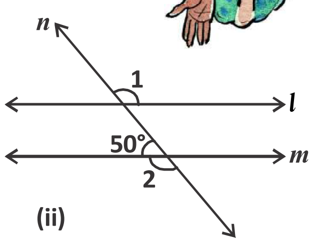
यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे तथा उनके एकांतर अन्तःकोण बराबर हों तब क्या दोनों रेखाएँ समांतर होगी?

करके देखें

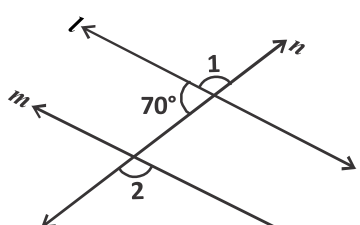
दिए गए चित्रों में $\angle 1$ और $\angle 2$ के मान ज्ञात कीजिए, यदि दो समांतर रेखाओं l और m को तिर्यक रेखा n प्रतिच्छेद करती हैं। उत्तर के कारण भी बताइए।



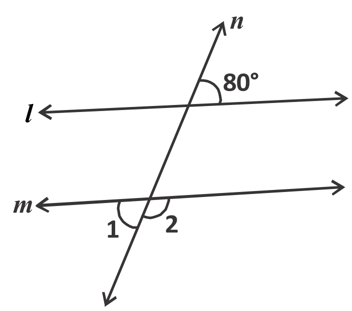
(i)



(ii)



(iii)

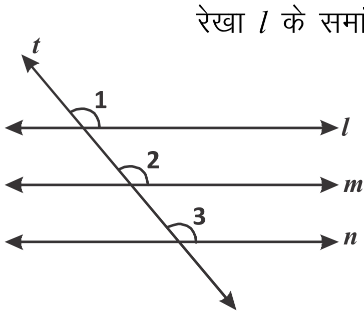


(iv)

एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (Lines Parallel to the Same Line)

जब दो रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर हों, तो क्या वे परस्पर समांतर होंगी?

इसकी जांच के लिए संलग्न चित्रानुसार तीन रेखाएँ l, m, n खींचिए, जिनमें रेखा m रेखा l के समांतर है और रेखा n रेखा l के समांतर है।



चित्र–27

रेखा l, m, n पर तिर्यक रेखा t खींची।

संगत कोण अभिगृहित से

$\angle 1 = \angle 2$ ....(1)

$\angle 1 = \angle 3$ ....(2)

(1) और (2) से हम निष्कर्ष प्राप्त करते हैं ।

$\angle 2 = \angle 3$

परंतु $\angle 2$ और $\angle 3$ रेखा m तथा रेखा n के लिए संगत कोण बनाते हैं, इसलिए आप कह सकते हैं कि रेखा m, रेखा n के समांतर है।

इस परिणाम को एक प्रमेय के रूप में निम्नलिखित तरह से लिख सकते हैं–

प्रमेय

वे कथन जिन्हें तर्कों व ज्ञात जानकारियों की सहायता से प्रमाणित किया जाता है।

प्रमेय–1 : **वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर हों, परस्पर समांतर होती हैं।**

उदाहरण–6. दिए गए चित्र–28 में x, y, z और a, b, c के मान ज्ञात कीजिए।

हल : चित्र में स्पष्ट है कि–

$y = 110^\circ$ ($\because$ संगत कोण)

और $x + y = 180^\circ$ (रैखिक युग्म कोण)

$\Rightarrow$ $x + 110^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $x = 70^\circ$

$z = x = 70^\circ$ ($\because$ संगत कोण)

पुनः $c = 65^\circ$ ($\because$ एकांतर कोण)

और $a + c = 180^\circ$ ($\because$ रैखिक युग्म कोण)

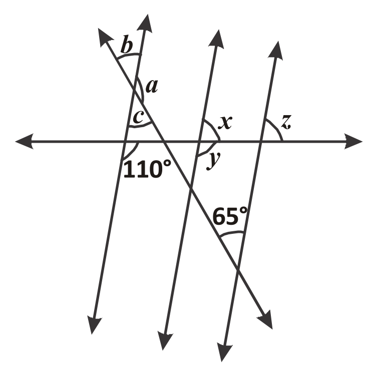
$\Rightarrow$ $a + 65^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $a = 115^\circ$

तथा $b = c = 65^\circ$ ($\because$ शीर्षाभिमुख कोण)

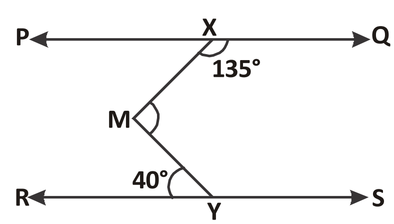
अतः $a = 115^\circ, b = 65^\circ, c = 65^\circ$

$x = 70^\circ, y = 110^\circ, z = 70^\circ$



चित्र–28

उदाहरण–7. दिए गए चित्र–29 में यदि $PQ \parallel RS, \angle MXQ = 135^\circ$ और $\angle MYR = 40^\circ$ है, तो $\angle XMY$ ज्ञात कीजिए।



चित्र–29

हल : दिए गए चित्र में M से गुजरने वाली और PQ के समांतर रेखा AB खींची। अब $AB \parallel RS$ और $PQ \parallel RS$ हैं।

अब, $\angle QXM + \angle XMB = 180^\circ$ .....(1)

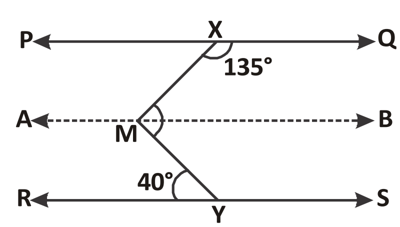
($\because$ $AB \parallel PQ$, तिर्यक रेखा XM के एक ही ओर के अंतः कोण) चित्र–30

प्रश्नानुसार, $\angle QXM = 135^\circ$, समीकरण (1) से

$135^\circ + \angle XMB = 180^\circ$

$\angle XMB = 180^\circ - 135^\circ$

अतः $\angle XMB = 45^\circ$ .....(2)



चित्र–30

पुनः $\angle BMY = \angle MYR$ .....(3) $(\because AB \parallel RS,$ एकांतर कोण)

प्रश्नानुसार, $\angle MYR = 40^o$, समीकरण (2) से

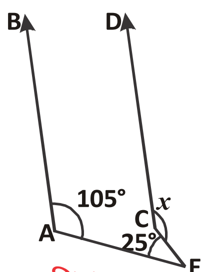
$\angle BMY = 40^o$ .....(4)

समीकरण (2) और (4) को जोड़ने पर,

$\angle XMB + \angle BMY = 45^o + 40^o$

अर्थात् $\angle XMY = 85^o$

उदाहरण–8. दिए गए चित्र–31 में $AB \parallel CD$ तब x का मान ज्ञात कीजिए।



चित्र–31

हल : दिए गए चित्र–32 में बिंदु E से $EF \parallel AB$ खींचिए। तब $EF \parallel CD$

चूंकि $EF \parallel CD$ और CE तिर्यक रेखा है , अतः

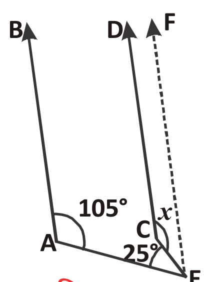
$\angle DCE + \angle CEF = 180^o$

$\Rightarrow$ $x + \angle CEF = 180^o$ $(\because \angle DCE = x)$

$\angle CEF = 180^o - x$ .....(1)

$EF \parallel AB$ और AE तिर्यक रेखा है। अतः

$\angle BAE + \angle AEF = 180^o$ ($\because$ सह अंतः कोण)



चित्र–32

$\Rightarrow$ $105^o + (\angle AEC + \angle CEF) = 180^o$

$(\because \angle BAE = 105^o)$

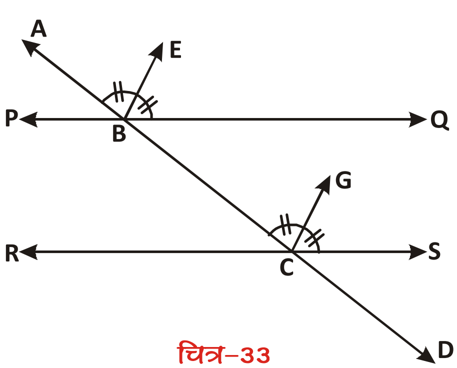
$\Rightarrow$ $105^o + 25^o + (180^o - x) = 180^o$

$(\because \angle AEC = 25^o$ और समी. 1 से)

$\Rightarrow$ $310^o - x = 180^o$

अतः $x = 130^o$

उदाहरण–9. यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि संगत कोणों के एक युग्म के समद्विभाजक परस्पर समांतर हों, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों रेखाएं भी परस्पर समांतर होती हैं।



चित्र–33

हल : चित्रानुसार एक तिर्यक रेखा AD खींची जो दो रेखाओं PQ और RS को क्रमशः बिंदुओं B और C पर प्रतिच्छेद करती हैं। $\angle ABQ$ की समद्विभाजक, किरण BE है, $\angle BCS$ की समद्विभाजक किरण CG है तथा $BE \parallel CG$ है।

सिद्ध करना है– $PQ \parallel RS$

यहाँ दिया गया है कि किरण $BE, \angle ABQ$ की समद्विभाजक है,

अतः $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ .....(1)

इस प्रकार, किरण CG, $\angle BCS$ की समद्विभाजक है ,

अतः $\angle BCG = \frac{1}{2}\angle BCS$ .....(2)

परंतु, $BE \parallel CG$ और AD एक तिर्यक रेखा है, अतः

$\angle ABE = \angle BCG$ .....(3)

समी. (1), (2) और (3) से (संगत कोण)

$$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$$

अर्थात् $\angle ABQ = \angle BCS$

परंतु $\angle ABQ$ और $\angle BCS$ तिर्यक रेखा AD द्वारा रेखाओं PQ और RS के साथ बनाए गए संगत कोण हैं और बराबर हैं।

$PQ \parallel RS$ यही सिद्ध करना था।

उदाहरण–10. दिए गए चित्र में, $AB \parallel CD$ और $CD \parallel EF$ हैं। साथ ही, $EA \perp AB$ है। यदि $\angle BEF = 55^o$ हैं, तो x, y और z के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है कि $AB \parallel CD$ तथा $CD \parallel EF$ अत : $AB \parallel EF$, दिए गए चित्र में BE को G तक बढ़ाया

अब $\angle DEF + \angle FEG = 180^o$ (रैखिक, युग्मकोण)

$55^o + \angle FEG = 180^o$ $(\because \angle DEF = 55^o)$

$\angle FEG = 125^o$

अतः $\angle FEG = y = x = 125^o$

(संगत कोण)

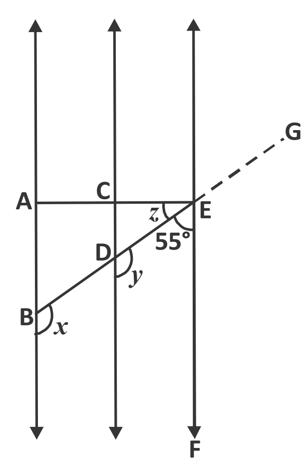
पुनः $\angle CED + \angle DEF = 90^o$

$(\because EA \perp AB$ तथा $AB \parallel EF)$

$z + 55^o = 90^o$

$z = 35^o$

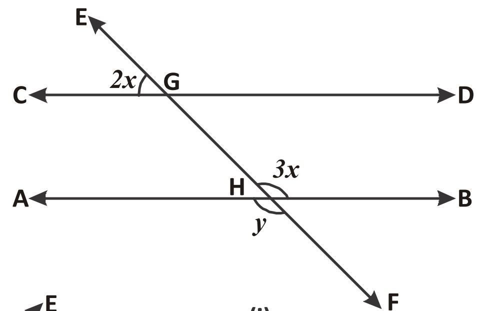
अतः $x = 125^o$, $y = 125^o$, $z = 35^o$



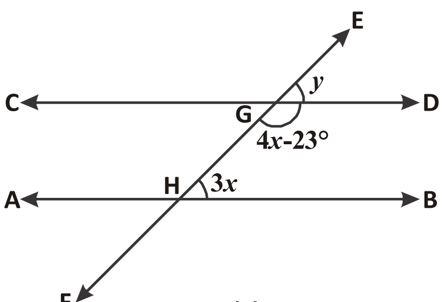
चित्र–34

प्रश्नावली – 9.2

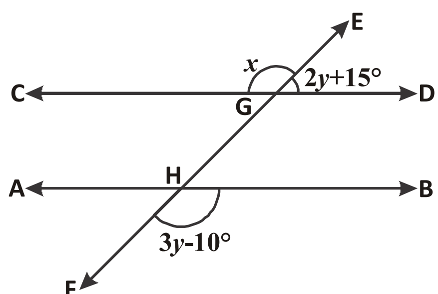
1. दिए गए चित्रों में $AB \parallel CD$ तथा EF एक तिर्यक रेखा है जो AB और CD को H और G पर प्रतिच्छेदित करती है। तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।



(i)

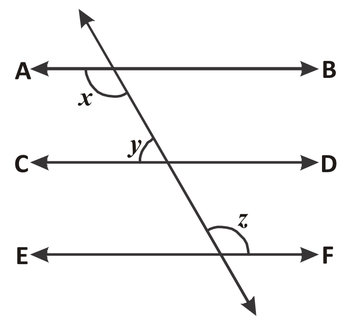


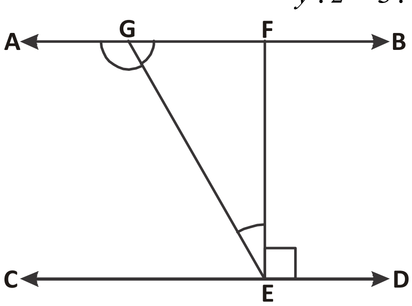
(ii)



(iii)

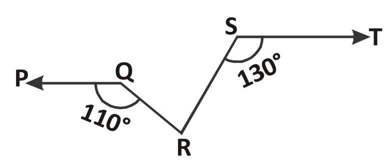
2. दिए गए चित्र में यदि $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$ और $y : z = 3 : 7$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



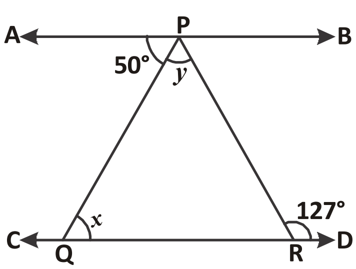


3. दिए गए चित्र में यदि $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ और $\angle GED = 126°$ है, तो $\angle AGE, \angle GEF$ तथा $\angle FGE$ के मान ज्ञात कीजिए।

4. दिए गए चित्र में यदि $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110°$ और $\angle RST = 130°$ है तो $\angle QRS$ का मान ज्ञात कीजिए।

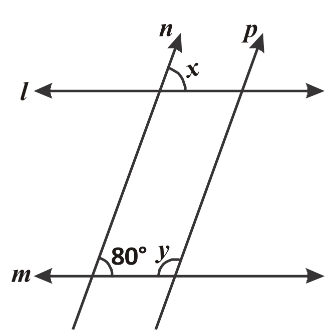


(**संकेत**– बिन्दु R से गुजरने वाली ST के समांतर एक रेखा खींचिए।)

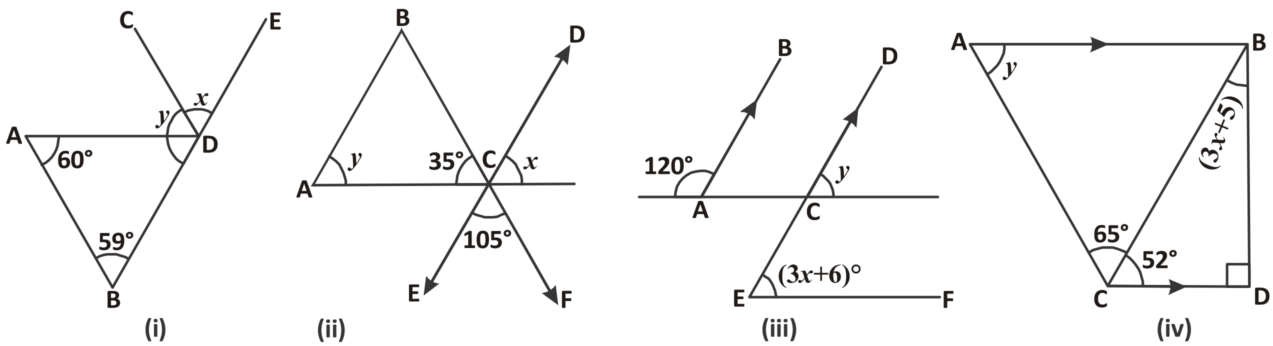


5. दिए गए चित्र में यदि $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50°$ और $\angle PRD = 127°$ हैं, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

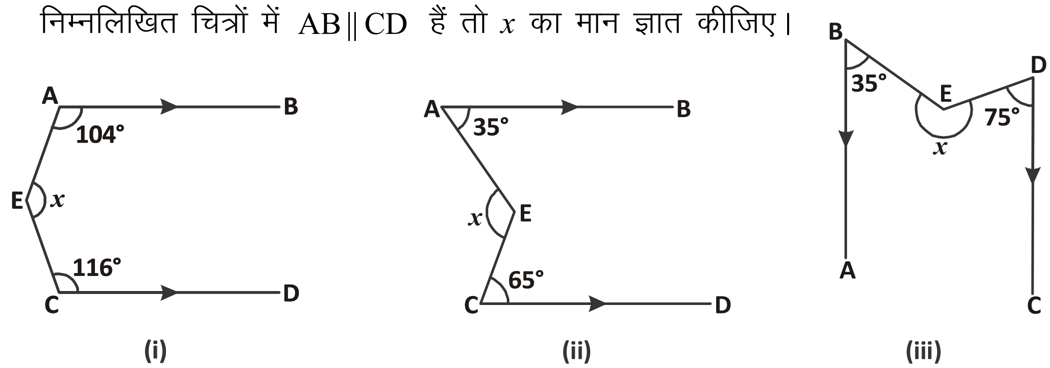
6. दिए गए चित्र में x और y के मान ज्ञात कीजिए।
(संकेत $\ell \parallel m, n \parallel p$)



7. दिए गए चित्रों में x व y का मान ज्ञात कीजिए? यहाँ $AB \| CD$ है।



8. निम्नलिखित चित्रों में $AB \| CD$ हैं तो x का मान ज्ञात कीजिए।

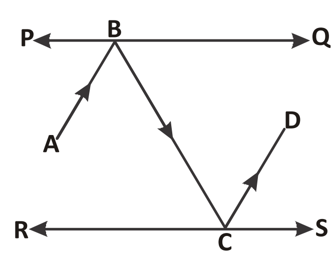


9. नीचे दी गई सारणी को पूरा कीजिए–

क्र.	त्रिभुज का नाम	कोणों का माप	विशेषता व अन्य गुण
1.	न्यूनकोण त्रिभुज		
2.		एक कोण 90° का	
3.	अधिक कोण त्रिभुज		
4.		प्रत्येक कोण 60°	
5.			दो भुजाओं का माप समान
6.	विषमबाहु त्रिभुज		

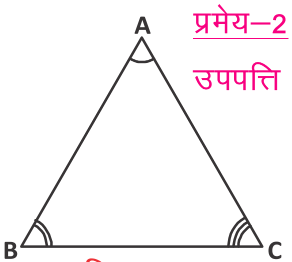
10. दिए गए चित्र में PQ और RS दो दर्पण हैं, जो एक दूसरे के समांतर रखे गए हैं। आपतित किरण AB, दर्पण PQ से B पर टकराती है और परावर्तित किरण पथ BC से गुजरते हुए दर्पण RS के बिंदु C पर टकराती है और CD की दिशा में परावर्तित हो जाती है। सिद्ध कीजिए कि $AB \| CD$ है।

(संकेत : समांतर रेखाओं के लंबवत् रेखाएँ भी समांतर होती हैं।)



गणित में कथनों को सिद्ध करना

हमने चांदे की सहायता से व पेपर काट कर इस बात की पुष्टि की है कि त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180° होता है। अब हम इस कथन को समांतर रेखाओं से संबंधित अभिगृहीतों और प्रमेयों का उपयोग करके सिद्ध करेंगे।



चित्र–35(i)

प्रमेय–2 : किसी त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180° होता है।

उपपत्ति : दिया गया है कि त्रिभुज ABC के कोण क्रमशः $\angle 1, \angle 2$ और $\angle 3$ हैं।

हमें सिद्ध करना है कि $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ।

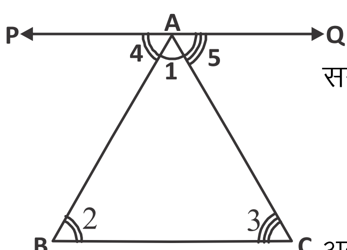
सिद्ध करने के लिए भुजा BC के समांतर और शीर्ष A से गुजरने वाली रेखा PQ खींचिए (चित्र–35(ii))

अब रेखा BC और PQ परस्पर समांतर रेखाएँ हैं और AB तथा AC तिर्यक रेखाएँ हैं। चित्र से स्पष्ट है कि $\angle 4$ और $\angle 2$, $\angle 5$ और $\angle 3$ एकांतर कोणों के युग्म हैं।

अतः $\angle 4 = \angle 2$ .....(1)

$\angle 5 = \angle 3$ .....(2)

परंतु, PAQ एक रेखा है, अतः



चित्र–35(ii)

$\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180^\circ$ .....(3)

समीकरण (3) में, समीकरण (1) और (2) से क्रमशः $\angle 4$ और $\angle 5$ का मान रखने पर,

$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$

अर्थात् $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

अतः हम कह सकते हैं कि त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग 180° होता है।

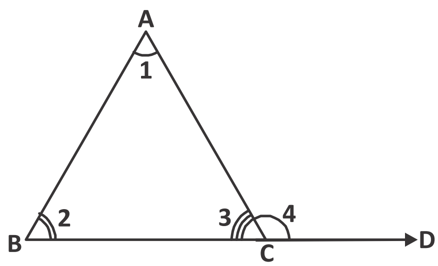
सोचें और चर्चा करें

निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर कारण सहित बताइए।

क्र.सं.	कथन	सत्य / असत्य	कारण
1.	किसी त्रिभुज में दो कोण समकोण हो सकते हैं।		
2.	किसी त्रिभुज में दो कोण अधिक कोण हो सकते हैं।		
3.	किसी त्रिभुज में दो कोण न्यूनकोण हो सकते हैं।		
4.	किसी त्रिभुज में सभी कोण 60° से कम के हो सकते हैं।		
5.	किसी त्रिभुज में सभी कोण 60° से अधिक के हो सकते हैं।		
6.	किसी त्रिभुज में सभी कोण 60° के बराबर हो सकते हैं।		

त्रिभुज का बाह्यकोण (बहिष्कोण) (Exterior angles of Triangle)

दिए गए चित्र में त्रिभुज ABC की भुजा BC को बिंदु D तक बढ़ाने पर त्रिभुज ABC का बाह्यकोण $\angle ACD$ प्राप्त होता है।



चित्र–36

रैखिक युग्म अभिगृहीत से हम लिख सकते हैं कि

$\angle 3 + \angle 4 = 180^o$ .....(1)

त्रिभुज ABC के तीनों अन्तःकोणों का योग 180^0 होता है, अतः

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$ .....(2)

समी. (1) और (2) से,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4$

या $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$

हम इस परिणाम को इस प्रमेय के रूप में लिख सकते हैं–

प्रमेय–3 : **यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाए, तो इस प्रकार बना बाह्यकोण दोनों अंतः अभिमुख (विपरीत) कोणों के योग के बराबर होता है।**

उपर्युक्त प्रमेय को बाह्यकोण प्रमेय भी कहते हैं। इस प्रमेय से यह स्पष्ट है कि किसी त्रिभुज का बाह्यकोण अपने दोनों अंतः अभिमुख कोणों में से प्रत्येक से बड़ा होता है।

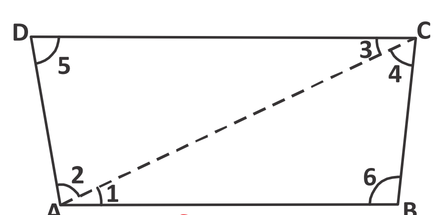
कथन–1 : सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज के चारों अन्तःकोणों का योग 360^0 होता है।

हल : दिया गया है कि चतुर्भुज ABCD के कोण $\angle A, \angle B, \angle C$ और $\angle D$ है।

हमें सिद्ध करना है कि,

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$

चित्रानुसार चतुर्भुज ABCD के कोण A को कोण C से मिलाते हुए रेखाखण्ड AC खींचा। इस तरह चतुर्भुज, दो त्रिभुजों, ΔADC और ΔABC में बंट जाता है।



चित्र–37

ΔABC में, त्रिभुज के कोण योग गुण से,

$\angle 1 + \angle 6 + \angle 4 = 180^o$ .....(1)

इसी तरह, ΔADC में, त्रिभुज के कोण योग गुण से,

$\angle 2 + \angle 5 + \angle 3 = 180^o$ .....(2)

समीकरण (1) और समीकरण (2) को जोड़ने पर

$\angle 1 + \angle 6 + \angle 4 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 3 = 360^o$

या $(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) + \angle 5 + \angle 6 = 360^o$

या $\angle A + \angle C + \angle D + \angle B = 360^o$

अर्थात $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि आप किसी भी बहुभुज के अंतः कोणों का योग, उस बहुभुज को त्रिभुजों में विभक्त करके ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

बहुभुज का नाम	त्रिभुजों की संख्या	अंतः कोणों का योग
चतुर्भुज	2	$2 \times 180 = 360$
पंचभुज	3	$3 \times 180 = 540$
षटभुज	4	....
अष्टभुज	....	....

अब हम कह सकते हैं कि n भुजा वाले बहुभुज को एक उभयनिष्ठ शीर्ष वाले (n-2) त्रिभुजों में विभक्त किया जा सकता है। इसलिए n भुजा वाले बहुभुज के सभी अंतः कोणों का योग $= (n - 2) \times 180^o$ होगा।

उदाहरण–11. त्रिभुज के तीनों कोण क्रमशः $(2x+1)°$, $(3x+6)°$ और $(4x-16)°$ हों तो त्रिभुज के प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है, अतः

$$(2x+1)°+(3x+6)°+(4x-16)°=180^0$$
$$\Rightarrow 9x-9=180^o$$
$$\Rightarrow 9x=189^o$$
$$\Rightarrow x=21^o$$

अतः $(2x+1)=(2\times 21^o+1)=43^o$

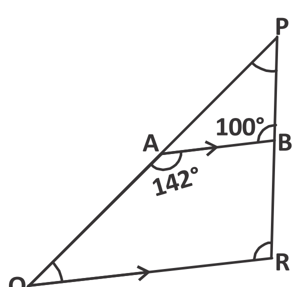
$(3x+6)=(3\times 21^o+6)=69^o$

$(4x-16)=(4\times 21^o-16)=68^o$

अब त्रिभुज के कोण क्रमशः 43^o, 69^o और 68^o हैं।

उदाहरण–12. दिए गए चित्र में $AB \| QR$, $\angle BAQ=142^o$ और $\angle ABP=100^o$ निम्न कोणों के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\angle APB$ (ii) $\angle AQR$ (iii) $\angle QRP$



चित्र–38

हल : (i) त्रिभुज APB की भुजा PA, Q तक बढ़ाई गई है,

अतः बाह्य कोण प्रमेय से

$$\angle BAQ=\angle ABP+\angle APB$$
$$\Rightarrow 142^o=100^o+\angle APB$$
$$\Rightarrow \angle APB=142^o-100^o$$
$$\Rightarrow \angle APB=42^o$$

(ii) $\angle BAQ + \angle AQR = 180^o$

(सह अंतःकोणों का योग 180^oहोता है।)

$\Rightarrow 142^o + \angle AQR = 180^o$

$\Rightarrow \angle AQR = 180^o - 142^o$

$\Rightarrow \angle AQR = 38^o$

(iii) चूंकि $AB \parallel QR$ और PR तिर्यक रेखा है, अतः

$\angle QRP = \angle ABP$ (संगत कोण)

$\therefore \angle QRP = 100^o$

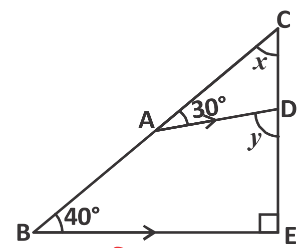
उदाहरण–13. दिए गए चित्र में यदि $BE \perp EC$, $\angle EBC = 40^o$, $\angle DAC = 30^o$ है, तो x और y ज्ञात कीजिए।

हल : ΔEBC में,

$90^o + 40^o + x = 180^o$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

$\Rightarrow 130^o + x = 180^o$

$\Rightarrow x = 50^o$ .....(1)



चित्र–39

अब ΔADC में

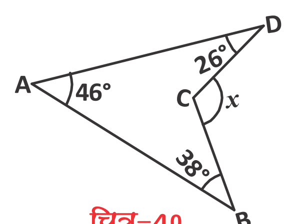
$\angle ADE = \angle DAC + \angle ACD$ (बाह्य कोण प्रमेय से)

$\Rightarrow y = 30^o + x$

$\Rightarrow y = 30^o + 50^o$ (समी. (1) से)

$\therefore y = 80^o$

उदाहरण–14. दिए गए चित्र–40 में x का मान ज्ञात कीजिए।



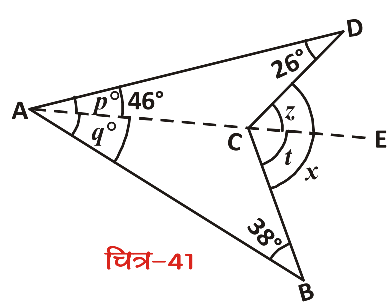
चित्र–40

हल : दिए गए चित्र में ABCD चतुर्भुज है। A और C को मिलाते हुए रेखाखण्ड खींचिए तथा इसे E तक बढ़ाइए। चित्र–41 की तरह

मान लीजिए $\angle DAE = p^o$

$\angle BAE = q^o, \angle DCE = z^o$

$\angle ECB = t^o$



चित्र–41

अतः ΔACD में बाह्य कोण प्रमेय से,

$$\angle DCE = \angle CAD + \angle ADC$$

$$z^o = p^o + 26^o \qquad .....(1)$$

पुनः ΔABC में

$$\angle BCE = \angle BAC + \angle ABC$$

$$t^o = q^o + 38^o \qquad .....(2)$$

समी. (1) और समी. (2) को जोड़ने पर

$$z^o + t^o = p^o + 26^o + q^o + 38^o$$

$$x = p + q + 64^\circ \qquad \left[\begin{array}{l}\because z^\circ + t^\circ = x \\ \;\; p + q = 46^\circ\end{array}\right]$$

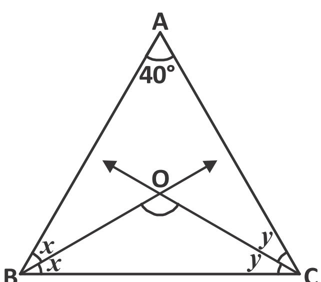
$$x = 46^\circ + 64^\circ$$

$$x = 110^\circ$$

उदाहरण–15. दिए गए चित्र में $\angle A = 40^o$ है। यदि BO और CO क्रमशः $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं, तो $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $\angle CBO = \angle ABO = x$ और $\angle BCO = \angle ACO = y$

($\because BO, \angle B$ की समद्विभाजक और $CO, \angle C$ की समद्विभाजक है।)



चित्र–42

तब , $\angle B = 2x, \angle C = 2y$

अतः त्रिभुज के कोण योग गुण से,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$$

$$\Rightarrow 40^o + 2x + 2y = 180^o$$

$$[\because \angle A = 40^o]$$

$$\Rightarrow 2(x + y) = 180^o - 40^o$$

$$\Rightarrow x + y = 70^o \qquad .....(1)$$

पुनः ΔBOC में त्रिभुज के कोण योग गुण से

$$x + \angle BOC + y = 180^o$$

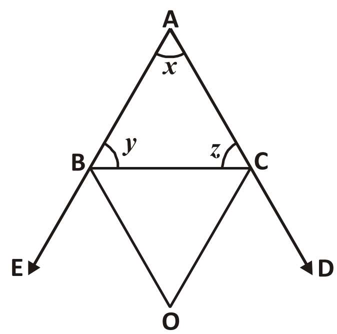
$$\Rightarrow \angle BOC = 180^o - (x + y)$$

$$\Rightarrow \angle BOC = 180^o - 70^o \qquad \text{(समी. (1) से)}$$

$$\therefore \angle BOC = 110^o$$

उदाहरण–16. दिए गए चित्र में ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः E और D तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle CBE$ और $\angle BCD$ के समद्विभाजक क्रमशः BO और CO बिंदु O पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$ है।

हल : किरण $BO, \angle CBE$ की समद्विभाजक है। अतः



चित्र–43

$$\angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$$

$$= \frac{1}{2}(180° - y)$$

$$= 90° - \frac{y}{2} \quad .....(1)$$

इसी तरह, किरण $CO, \angle BCD$ की समद्विभाजक है।

अतः $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$$= \frac{1}{2}(180° - z) \quad = 90° - \frac{z}{2} \quad .....(2)$$

अब, त्रिभुज के कोण योग गुण से ΔBOC में

$$\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180° \quad .....(3)$$

समी. (1) और (2) से समी. (3) में मान रखने पर

$$\angle BOC + 90° - \frac{z}{2} + 90° - \frac{y}{2} = 180°$$

$$\Rightarrow \angle BOC + 180° = 180° + \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$$

$$\therefore \angle BOC = \frac{1}{2}(z + y) \quad .....(4)$$

पुनः ΔABC में, त्रिभुज के कोण योग गुण से

$$x + y + z = 180°$$

$$y + z = 180° - x \quad .....(5)$$

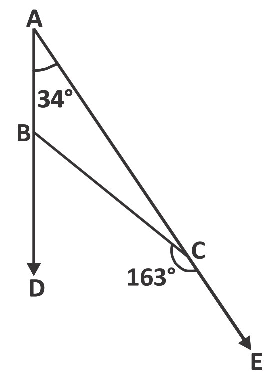
समी. (5) से समी. (4) में मान रखने पर

$$\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - x)$$

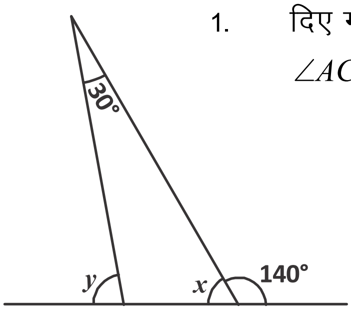
$$= 90^{\circ} - \frac{x}{2}$$

$$\angle BOC = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\angle BAC$$

प्रश्नावली – 9.3

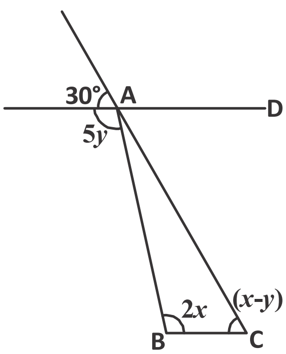


1. दिए गए चित्र में यदि $\angle BAC = 34^{\circ}$, $\angle BCE = 163^{\circ}$ हो तो $\angle ACB$, $\angle ABC$ और $\angle DBC$ ज्ञात कीजिए।



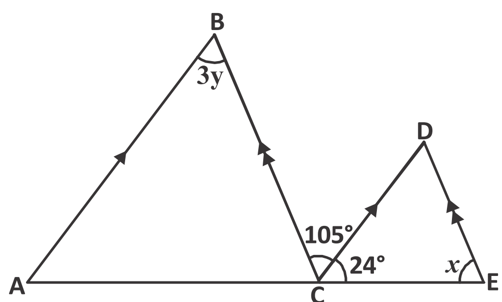
(i)

2. दी गई आकृतियों में x और y के मान ज्ञात कीजिए।



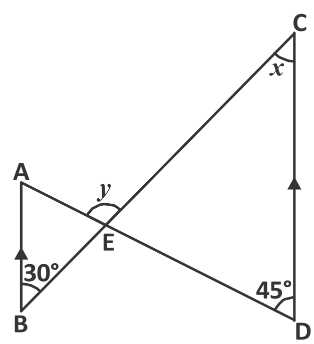
(ii)

(संकेत AD || BC)



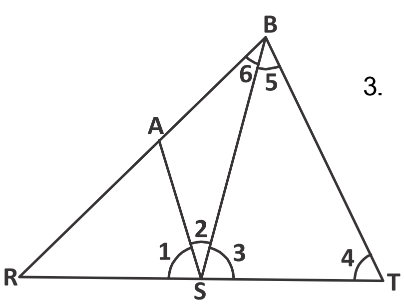
(iii)

(संकेत AB || CD, BC || DE)



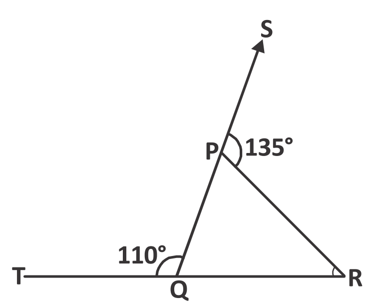
(iv)

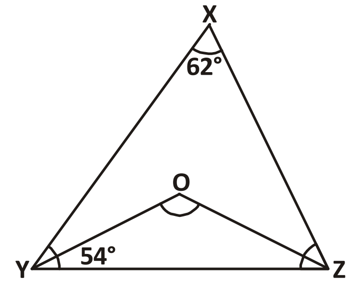
(संकेत AB || CD)



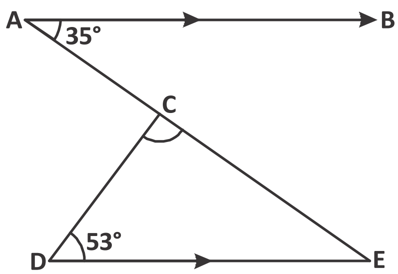
3. दिए गए चित्र में $AS \parallel BT$, $\angle 4 = \angle 5$ और SB, $\angle AST$ की समद्विभाजक है, तो $\angle 1$ की माप ज्ञात कीजिए।

4. दी गई आकृति में त्रिभुज PQR की भुजाओं QP और RQ को क्रमश: बिंदुओं S और T तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle SPR = 135^{\circ}$, $\angle PQT = 110^{\circ}$ है, तो $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए।

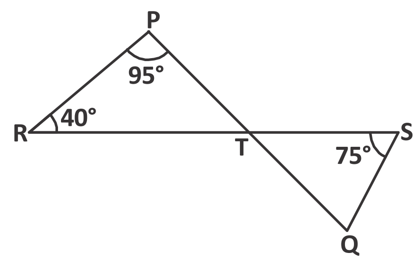




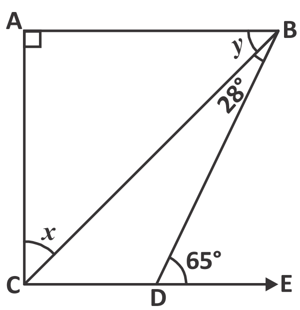
5. दी गई आकृति में $\angle ZXY = 62^\circ$ और $\angle XYZ = 54^\circ$ हैं। यदि YO और ZO क्रमशः ΔXYZ के $\angle XYZ$ और $\angle XZY$ के समद्विभाजक हैं, तो $\angle OZY$ और $\angle YOZ$ ज्ञात कीजिए।



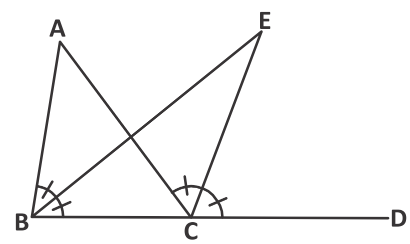
6. दी गई आकृति में यदि $AB \parallel DE$, $\angle BAC = 35^\circ$ और $\angle CDE = 53^\circ$ है, तो $\angle DCE$ ज्ञात कीजिए।



7. दिए गए चित्र में यदि रेखाएँ PQ और RS बिंदु T पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि $\angle PRT = 40^\circ$, $\angle RPT = 95^\circ$ और $\angle TSQ = 75^\circ$ है तो $\angle SQT$ ज्ञात कीजिए।



8. दी गई आकृति में यदि $AB \perp AC$, $AB \parallel CD$, $\angle CBD = 28^\circ$, $\angle BDE = 65^\circ$ है, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।



9. दी गई आकृति में ΔABC की भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle ABC$ और $\angle ACD$ के समद्विभाजक बिंदु E पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\angle BEC = \frac{1}{2}\angle BAC$$

(संकेत– ΔABC के कोणों का योग = $\angle BEC$ के कोणों का योग एवं $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$)

हमने सीखा

1. यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

2. यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है, तो उनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं है वे एक रेखा बनाती हैं।

(उपर्युक्त दोनों अभिगृहीतों को मिलाकर रैखिक युग्म अभिगृहीत कहते हैं)

3. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

4. जब एक तिर्यक रेखा, दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है तब–
   (i) संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
   (ii) एकांतर अंतः कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

5. दो रेखाएँ समांतर होती हैं, यदि एक तिर्यक रेखा इन रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि
   (i) संगत कोणों को कोई एक युग्म बराबर हो या
   (ii) एकांतर अंतः कोणों का कोई एक युग्म बराबर हो या
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का कोई एक युग्म संपूरक हो।

6. वे रेखाएँ, जो एक ही रेखा के समांतर होती है, परस्पर समांतर होती हैं।

7. एक त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180^{o} होता है।

8. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाए, तो इस तरह बना बाह्य कोण, अपने दोनों अंतःअभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।

BK65NJ

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

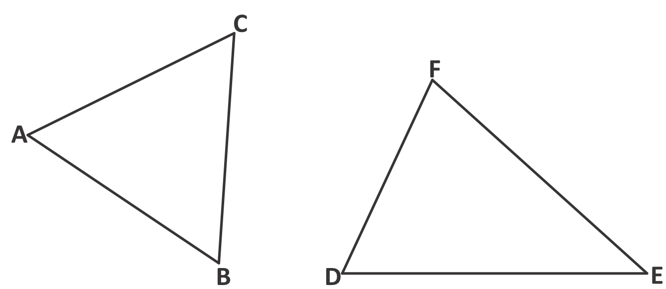
[CONGRUENCY OF TRIANGLES]

10

BKF1Q7

सर्वांगसमता क्या है?

चित्र–1 में त्रिभुजों को देखें। क्या ये एक जैसे हैं? एक त्रिभुज पर दूसरा त्रिभुज रखें तो क्या वे एक दूसरे को ढँक लेंगे? यहाँ तो हम देख सकते हैं कि ये एक जैसे नहीं है क्योंकि इनकी भुजाएँ एक बराबर नहीं हैं।



चित्र–1

कैसे पता लगेगा कि कोई दो आकृतियाँ एक–दूसरे को ढँक लेंगी अथवा नहीं? दिए गए दोनों त्रिभुजों के लिए ऐसा तभी होगा जब बिंदु A, बिंदु D पर, बिंदु B , बिंदु E पर तथा बिंदु C , बिंदु F पर पड़े और ऐसा तभी होगा जब त्रिभुजों की सभी भुजाएँ व सभी कोण बराबर हों। याने जब दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों।

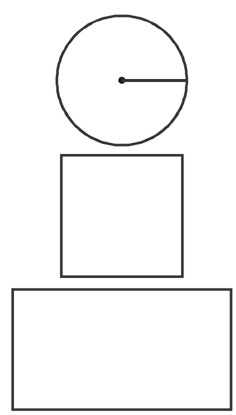
सर्वांगसम होने का अर्थ है सभी अंगों का समान होना। ऐसी आकृतियाँ जिनके सभी अंग समान होते हैं, एक–दूसरे को पूरी तरह से ढँक लेती हैं।

त्रिभुजों के संदर्भ में सभी अंग समान होने का अर्थ है सभी भुजाओं एवं कोणों का दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं एवं कोणों के समान होना। इसी तरह हम चतुर्भुज, पंचभुज आदि में सर्वांगसमता की बात कर सकते हैं। परन्तु क्या दो आकृतियों की सर्वांगसमता के लिए उनके सभी अंगों की समानता की जाँच करना आवश्यक है? अथवा किन्हीं विशेष परिस्थितियों में कुछ अंगों को देखकर भी उन्हें सर्वांगसम कह सकते हैं?

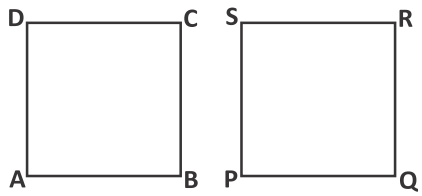
वृत्त, वर्ग और आयत

जैसे वर्ग में चार भुजाएँ व चार कोण होते हैं, प्रत्येक भुजा बराबर एवं प्रत्येक कोण 90° का होता है। दो वर्गों की एक भुजा ही समान हो तब हम कह देंगे कि दोनों वर्ग सर्वांगसम हैं और दोनों एक–दूसरे को पूरी तरह से ढँक लेंगे।

लेकिन एक आयत की एक भुजा दूसरे आयत की संगत भुजा के समान हो तो क्या वे भी सर्वांगसम होंगे? जाहिर है ऐसा नहीं होगा। जब दोनों आसन्न भुजाएँ दूसरे आयत की संगतभुजाओं के समान हों तभी दोनों आयत सर्वांगसम होंगे। वृत्तों में तो सिर्फ त्रिज्या समान होने पर ही वे एक–दूसरे को ढँक लेंगे।



चित्र–2

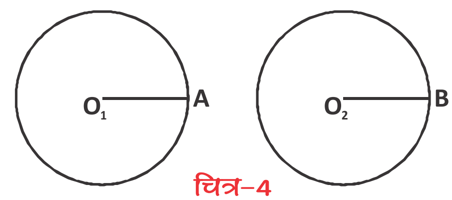


चित्र-3

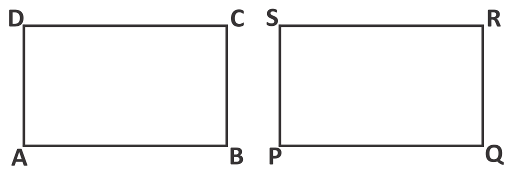
संक्षेप में–

1. दो वर्ग ABCD और PQRS सर्वांगसम होते हैं यदि AB = PQ.

2. दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी त्रिज्या समान हों। याने $O_1A = O_2B$



चित्र-4



चित्र-5

3. इसी प्रकार दो आयत सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी संगत आसन्न भुजाओं के माप बराबर हों। याने AB = PQ, AD = PS.

क्या हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ शर्तें ढूँढ सकते हैं? इस अध्याय में हम इसी बात की पड़ताल करेंगे।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruency of Triangle)

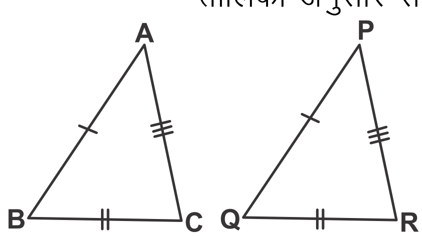
ज्यामिति में त्रिभुज सबसे कम रेखाखण्डों से बनी बंद आकृति है।

सभी बहुभुज त्रिभुजों से ही बने होते हैं, इसलिए त्रिभुजों की सर्वांगसमता पहचानना बहुभुजों की सर्वांगसमता जाँचने के लिए उपयोगी है।

हम जानते हैं कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यदि उनकी संगत भुजाओं व संगत कोणों के माप बराबर हों।

त्रिभुजों के अवयवों में संगतता (Corresponding Part of Congruent Triangle)

दो त्रिभुज ABC और PQR देखें, इसमें यदि AB को PQ के संगत माने तो बाकि अंग नीचे तालिका अनुसार संगत हैं।



चित्र-6

संगत भुजाएं	संगत कोण	शीर्ष
$AB \leftrightarrow PQ$	$\angle A \leftrightarrow \angle P$	$A \leftrightarrow P$
$BC \leftrightarrow QR$	$\angle B \leftrightarrow \angle Q$	$B \leftrightarrow Q$
$AC \leftrightarrow PR$	$\angle C \leftrightarrow \angle R$	$C \leftrightarrow R$

$\leftrightarrow$ चिह्न संगतता को प्रदर्शित करता है व $\cong$ चिह्न सर्वांगसमता का संबंध बताता है।

यदि दो त्रिभुज ΔABC तथा ΔPQR सर्वांगसम हैं याने $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, तो $AB = PQ, BC = QR, AC = PR, \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$

$\Delta BCA \cong \Delta QRP$ या इसे $\Delta CAB \cong \Delta RPQ$ भी लिख सकते हैं।

हम जानते हैं कि ΔABC और ΔBCA अथवा ΔCAB एक ही हैं। ΔBCA को ΔQRP के सर्वांगसम लिख सकते हैं। परन्तु हम इसे इस प्रकार नहीं लिख सकते–

$\Delta ABC \cong \Delta RQP$ या $\Delta BCA \cong \Delta RPQ$ (क्यों?)

त्रिभुजों की सर्वांगसमता में शीर्षों व कोणों के क्रम को सही प्रकार से लिखना आवश्यक है।

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भागों के लिए संक्षेप में स.त्रि.स.भ. लिखा जाता है जिसे CPCT $\rightarrow$ (Corresponding Part of Congruent Triangle) कहते हैं।

कैसे जाँचें त्रिभुजों की सर्वांगसमता

क्या सर्वांगसमता पहचानने के लिए त्रिभुजों के सभी अंगों की बराबरी दिखाना जरूरी है? हम आगे त्रिभुज की सर्वांगसमता की कसौटियों को गणितीय तरीके से पता करने का प्रयत्न करते हैं–

(i) **भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता (SAS Congruence)**– "दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों।"

(ii) **कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता (ASA Congruence)** : दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण व उनके बीच की भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों व उनके बीच की भुजा के बराबर हो।

(iii) **भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता (SSS Congruence)** : दो त्रिभुज में यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इन तीन स्वयं सिद्ध अभिधारणाओं की कसौटियों का उपयोग करते हुए हम त्रिभुजों में सर्वांगसमता पहचान सकते हैं और इनके आधार पर कुछ और नई कसौटियाँ पता कर सकते हैं। लेकिन पहचान तभी होगी जब इन्हें प्रमेय की तरह सिद्ध कर सकेंगे।

अभिगृहीत, अभिधारणा व प्रमेय (Axiom, Postulate and Theorem)

गणित सीखते समय हम अक्सर कुछ शब्द पढ़ते हैं। जैसे अभिगृहीत, अभिधारणा, प्रमेय, उपपत्ति। इन शब्दों को संक्षेप में समझते हैं–

अभिगृहीत और अभिधारणा : दोनों स्वयं सिद्ध होते हैं, इन्हें सत्य मानकर आगे बढ़ा जाता है और नये कथनों को रचा व सिद्ध किया जाता है। आमतौर पर तार्किक स्वयं सिद्ध कथन सभी विषयों में इस्तेमाल किए जाते हैं, इन्हें हम अभिगृहीत कहते हैं। जैसे– ज्यामिति में यूक्लिड के अभिगृहीत इस प्रकार के हैं– (1) यदि a, b के बराबर है, और a, c के भी बराबर है तो b भी c के बराबर होगा। (2) पूर्ण उसके किसी हिस्से से बड़ा होता है। ऐसे ही कुछ और अभिगृहीत लिए जाते हैं।

अभिधारणा : कुछ ऐसे स्वयं सिद्ध कथन जो किसी विशेष विषय से संबंधित हैं सामान्यतः अभिधारणा कहलाते हैं, हालांकि अभिधारणा व अभिगृहीत को अक्सर पर्यायवाची भी मान लिया जाता है। ज्यामिति से संबंधित कुछ

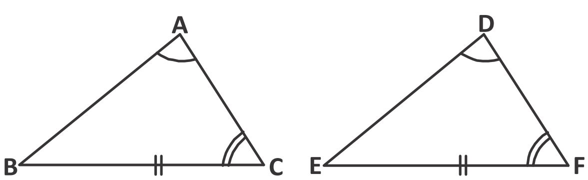
अभिधारणाएँ यह हैः दिए गए किन्हीं दो बिन्दुओं से एक रेखा खींची जा सकती है जिस पर वे दोनों बिन्दु होंगे या किसी भी रेखाखण्ड को अनन्त तक बढ़ाया जा सकता है।

प्रमेय और उपप्रमेय : वे ऐसे सभी गणितीय कथन जो इन सभी अभिगृहीतों, अभिधारणाओं और परिभाषाओं का उपयोग करते हुए तार्किक रूप से सिद्ध किए जाते हैं, प्रमेय कहलाते हैं। जैसे किसी त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180^o होता है।

इस प्रकार अभिगृहीत, अभिधारणा और प्रमेयों का उपयोग करके कुछ और प्रमेय सिद्ध किए जाते हैं, इन्हें उपप्रमेय कहा जाता है। ज्यामिति में उपप्रमेय और प्रमेय में इतना स्पष्ट विभाजन नहीं है। यह भी कई बार एक–दूसरे के बदले उपयोग कर लिए जाते हैं।

(iv) कोण–कोण–भुजा सर्वांगसमता प्रमेय (AAS Congruence Theorem):

प्रमेय–10.1 : दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण तथा एक भुजा, दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों तथा भुजा के बराबर हों।



चित्र–7

दिया है $\angle A \cong \angle D, \angle C \cong \angle F$

और $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

ΔABC और ΔDEF के दो कोण आपस में बराबर हैं तो तीसरा कोण भी बराबर होगा।

$\because \angle A = \angle D$ और $\angle C = \angle F$ (दिया है)

$\therefore \angle B = \angle E$ (त्रिभुज के अंतःकोणों का योग $180°$ होता है।)

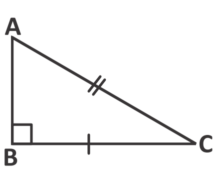
क्योंकि $\overline{BC}$ भुजा, कोण $\angle B$ और $\angle C$ के बीच है। हम यहाँ ASA सर्वांगसमता कसौटी का उपयोग करके ΔABC और ΔDEF के सर्वांगसम सिद्ध कर सकते हैं।

अतः $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ASA सर्वांगसमता)

(v) समकोण–कर्ण–भुजा सर्वांगसमता प्रमेय (Right Angle Hypotenuse Side Theorem):

प्रमेय–10.2 : दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण व संगत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

उपपत्ति : दिया है ΔABC और ΔDEF में $\angle B = \angle E = 90°$ $AC = DF$ तथा $BC = EF$ सिद्ध करना है कि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ इसके लिए हमने DE को P तक इस प्रकार बढ़ाया कि $EP = AB$, PF को मिलाया।



चित्र–8

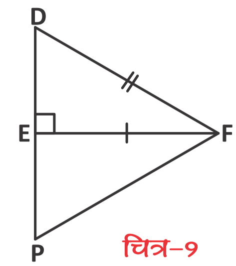
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PEF$

$\therefore \angle A = \angle P$ ... (1) C.P.C.T.

$AC = PF$ ...(2) C.P.C.T.

परंतु $AC = DF$ दिया है

$\therefore$ DF = PF तथा $\angle D = \angle P$ ... (3) (ΔDPF समान भुजाओं के सम्मुखकोण)



चित्र–9

समी. (1) और (3) से

$\angle A = \angle D$

पुनः ΔABC तथा ΔDEF में

BC = EF, AC = DF (ज्ञात है)

$\angle ACB = \angle DFE$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$

प्रमेय और स्वयं सिद्ध

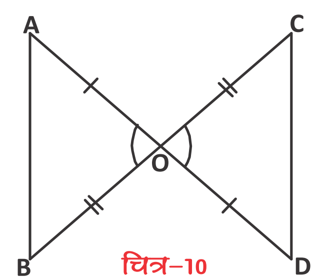
ज्यामिति में कुछ कथन ऐसे हैं जिन्हें प्रमेय या स्वयं सिद्ध माना जाए, निश्चित नहीं है। प्रमेय को सरल रूप से सिद्ध करने और ज्यामिति में तार्किक संबंधों को सरलता से समझने के लिए अभिगृहीतों का चयन अलग–अलग तरीके से किया जा सकता है। जैसे कुछ किताबों में AAS और ASA अभिगृहीत मानकर SSS प्रमेय सिद्ध किया गया है जबकि कुछ जगह AAS को अभिगृहीत मानकर ASA प्रमेय सिद्ध किया है।

इस पाठ्यपुस्तक में हम ASA, SAS और SSS को अभिधारणा (स्वयं सिद्ध) मानकर, AAS और RHS को प्रमेय के रूप में लेंगे।

सवालों को हल करने के तरीके को अलग–अलग ढंग से प्रदर्शित किया जा सकता है। कुछ इसी तरह के तरीकों का उपयोग आगे के उदाहरणों को हल करने में किया गया है।

उदाहरण–1. इस उदाहरण में हम SAS कसौटी का उपयोग करेंगे व उससे आकृति के बारे में पता करेंगे। आकृति में OA = OD और OB = OC है। सिद्ध कीजिए कि–

1. $\Delta AOB \cong \Delta DOC$
2. AB || CD



चित्र–10

हल : 1. त्रिभुज ΔAOB और ΔDOC से–

OA = OD दिया हुआ है ..... (1)

$\angle AOB = \angle DOC$ (शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं) ..... (2)

OB = OC दिया हुआ है ..... (3)

समीकरण (1), (2) और (3) से सर्वांगसमता की तीनों शर्तें पूरी होती है।

अतः सर्वांगसमता नियम से

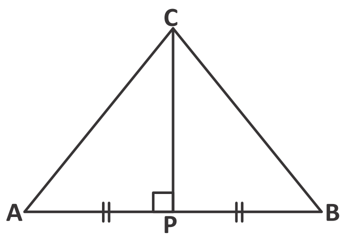
$\Delta AOB \cong \Delta DOC$ सिद्ध हुआ

2. सर्वांगसम त्रिभुजों ΔAOB और ΔDOC में अन्य संगत भाग भी बराबर होंगे।

अतः $\angle OBA = \angle OCD$ है। चूंकि ये रेखा खण्डों AB और CD के लिए एकांतर कोणों का एक युग्म बनाते हैं। अतः इस उदाहरण में हम देख सकते हैं कि AB || CD

उदाहरण–2. यदि ΔABC में $AP = PB$ और $CP \perp AB$ है तो सिद्ध कीजिए कि–

1. $\Delta CPA \cong \Delta CPB$ और
2. $AC = BC$



चित्र–11

हल : 1. ΔCPA और ΔCPB से

$AP = PB$ (दिया गया है) .....(1)

$\angle APC = \angle BPC = 90°$ (दिया गया है) .....(2)

$CP = CP$ (उभयनिष्ठ भुजा).....(3)

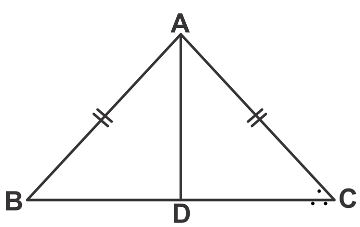
अतः SAS सर्वांगसमता से $\Delta CPA \cong \Delta CPB$

2. $\Delta CPA \cong \Delta CPB$ है तो $AC = BC$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भागों CPCT-Corresponding Part of Congruent Triangle)

उदाहरण–3. दिए गए त्रिभुज ABC में $AB = AC$ तथा AD, $\angle A$ का कोणार्द्धक है तो सिद्ध कीजिए कि–

$\angle B = \angle C$

हल : ΔABD तथा ΔACD में



चित्र–12

$AB = AC$ (दिया है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (SAS सर्वांगसमता से)

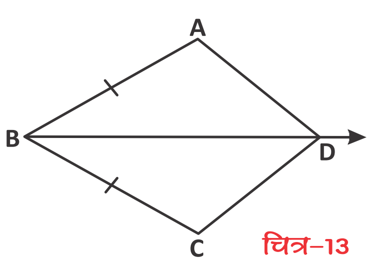
$\angle B = \angle C$ C.P.C.T. (स.त्रि.स.भ.)

उदाहरण–4. यदि $\overrightarrow{BD}$, $\angle ABC$ का समद्विभाजक है तथा $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ है तो भुजा कोण भुजा (SAS) सर्वांगसमता की सहायता से सिद्ध करें $\Delta ABD \cong \Delta CBD$

नीचे दिये गए चित्र से–

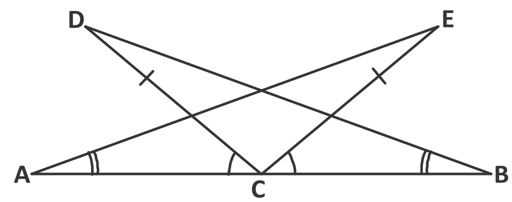
हल :

कथन	कारण
$AB = BC$	$\because \overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{BD}$, $\angle ABC$ का समद्विभाजक है	दिया है
$\angle ABD = \angle CBD$	कोण समद्विभाजक की परिभाषा से
$BD = BD$	उभयनिष्ठ भुजा
$\Delta ABD \cong \Delta CBD$	सर्वांगसमता से



चित्र–13

उदाहरण–5. चित्र में $AC = BC$, $\angle DCA = \angle ECB$ तथा $\angle DBC = \angle EAC$ सिद्ध कीजिए–
$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ जिसमें $DC = EC$



चित्र–14

हल : $\because$ $AC = BC$ (दिया है)

$\therefore$ C, AB का मध्य बिंदु है

$\angle DCA = \angle ECB$ (दिया है)

दोनों पक्षों में $\angle DCE$ जोड़ने पर

$\angle DCA + \angle DCE = \angle ECB + \angle DCE$

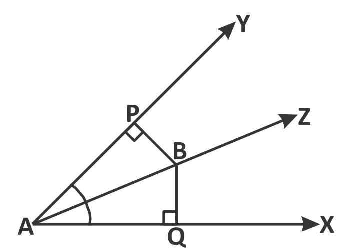
$\Rightarrow$ $\angle ACE = \angle BCD$

$\angle DBC = \angle EAC$ (दिया है)

$\therefore$ $\Delta DBC \cong \Delta EAC$ (ASA सर्वांगसमता से)

उदाहरण–6. किरण $\overrightarrow{AZ}$ कोण A को समद्विभाजित करती है और B किरण $\overrightarrow{AZ}$ पर स्थित कोई बिंदु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लंब है दर्शाइये कि–

1. $\Delta APB \cong \Delta AQB$
2. $BP = BQ$ अर्थात् बिंदु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है



चित्र–15

हल : दिया है $\overrightarrow{AZ}$, $\angle QAP$ का अर्द्धक है

$\therefore$ $\angle QAB = \angle PAB$

$\angle Q = \angle P = 90°$

$\Rightarrow$ $\angle ABQ = \angle ABP$

1. अब ΔAPB और ΔAQB में

$AB = AB$ उभयनिष्ठ

$\angle APB = \angle AQB = 90°$ प्रत्येक दिया है

$\angle PAB = \angle QAB$

$\therefore$ $\Delta APB \cong \Delta AQB$ (AAS सर्वांगसमता से)

2. $\because$ $\Delta APB \cong \Delta AQB$

$\therefore$ $BP = BQ$ ($\because$ संगत भाग बराबर होते हैं)

अर्थात् B की AP से लंबवत् दूरी = B की AQ से लंबवत् दूरी।

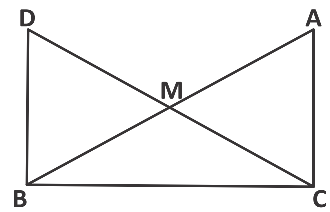
अतः बिंदु B, $\angle A$ की भुजाओं से समदूरस्थ है।

करके देखें

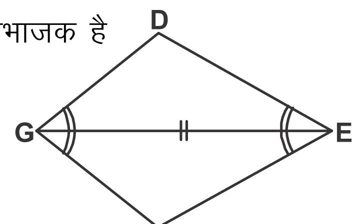
एक समकोण ΔABC में, कोण C समकोण है M कर्ण AB का मध्य बिंदु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया कि $DM = CM$ है बिंदु D को B से मिला दिया दर्शाइये कि–

1. $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ 2. $CM = \frac{1}{2} AB$

3. $\Delta DBC \cong \Delta ACB$ 4. $\angle DBC = 90°$ एक समकोण है



उदाहरण–7. दिया है GE, $\angle DGF$ तथा $\angle DEF$ का समद्विभाजक है सिद्ध करना है– $\Delta GDE \cong \Delta GFE$



चित्र–16

हल :

[GE समद्विभाजक है $\angle DGF$ का] (दिया है) → [$\angle DGE = \angle FGE$] (कोण समद्विभाजक की परिभाषा से)

[GE समद्विभाजक है $\angle DEF$ का] (दिया है) → [$\angle DEG = \angle FEG$] (कोण समद्विभाजक की परिभाषा से)

[$GE = GE$] (उभयनिष्ठ भुजा)

→ [$\Delta GDE \cong \Delta GFE$] (ASA सर्वांगसमता से)

उदाहरण–8. त्रिभुज XYZ में यदि $\angle Y = \angle Z$ तथा $\angle X$ की अर्धक XP हो तो सिद्ध कीजिये कि भुजा YZ का मध्य बिंदु P है तथा $XP \perp YZ$

हल : ΔXYP और ΔXZP में

$\angle Y = \angle Z$ दिया है

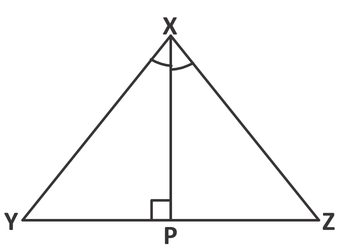
$\angle YXP = \angle ZXP$ (XP कोणार्धक दिया है)

$XP = XP$ उभयनिष्ठ भुजा

$\Delta XPY \cong \Delta XZP$ (AAS सर्वांगसमता)

$\therefore YP = PZ$ (CPCT से)

अतः P मध्य बिंदु है YZ का



चित्र–17

$\angle YPX = \angle ZPX$ (CPCT से)

$\therefore$ $\angle YPX + \angle ZPX = 180°$ (रेखीय युग्म)

$\angle YPX + \angle YPX = 180°$ $(\because \angle YPX = \angle ZPX)$

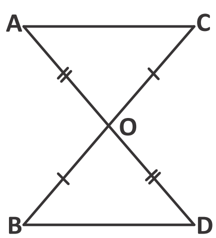
$\angle YPX = 90 = \angle ZPX$

$\therefore$ $XP \perp YZ$

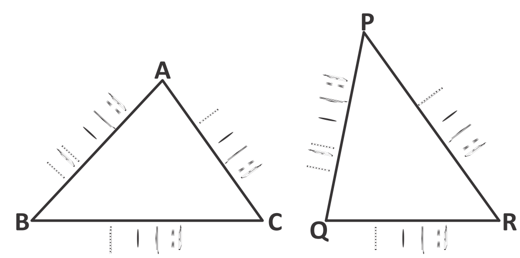
करके देखें

सिद्ध कीजिये कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण से बने दो त्रिभुज सदैव सर्वांगसम होते हैं।

प्रश्नावली – 10.1



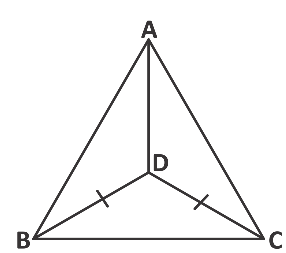
1. चित्र में यदि OA = OD तथा OB = OC हो तो इनमें से कौनसा कथन सत्य है–
   a) $\Delta AOC \cong \Delta BDO$
   b) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$
   c) $\Delta CAO \cong \Delta BOD$



2. दिये गये चित्र में ΔABC तथा ΔPQR को देखकर बताइये कि कौनसा कथन सत्य है–
   a) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
   b) $\Delta ABC \cong \Delta QPR$
   c) $\Delta ABC \cong \Delta PRQ$

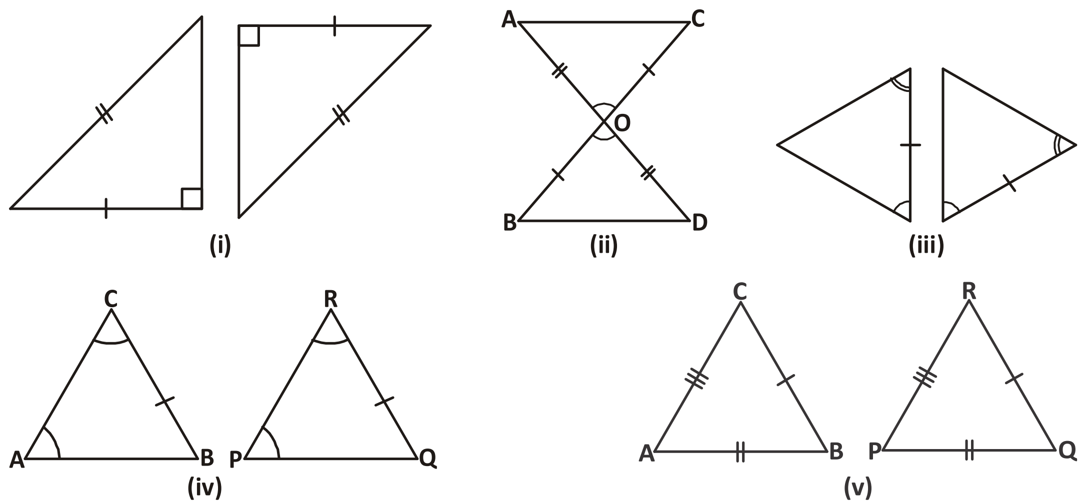
3. निम्नलिखित में कौनसी सर्वांगसमता की कसौटी नहीं है–
   a) SSS b) SAS c) AAA

4. दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने के लिये दो संगत कोणों के समान होने के अतिरिक्त कम से कम संगत अवयवों का समान होना आवश्यक है?
   a) कोई संगत भुजा बराबर न हो
   b) कम से कम एक संगत भुजा बराबर हो
   c) तीसरे संगत कोण बराबर हो।

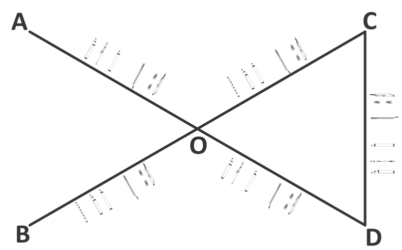


5. चित्र में $\angle B = \angle C$ तथा BD और CD क्रमशः इनके समद्विभाजक है तो AB : AC होगा।
   a) 2 : 1
   b) 3 : 2
   c) 1 : 1

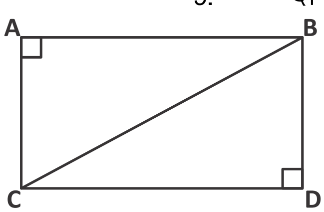
6. निम्न त्रिभुज के युग्मों को देखकर बताइये कि प्रत्येक चित्र में कौनसी सर्वांगसमता की कसौटी लागू होती है–



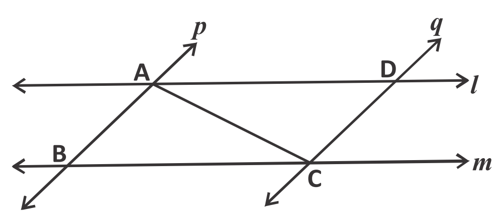
7. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, $AC = 3x + 2$, $PR = 6x - 13$ तथा $BC = 5x$ तो QR का मान ज्ञात कीजिए।



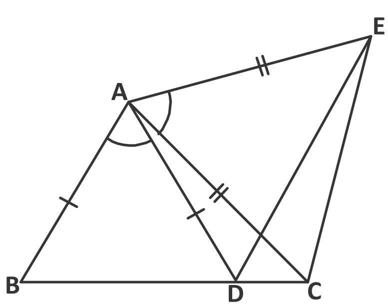
8. चित्र में दिये गये बिंदुओं की सहायता से कथनों को कारण सहित समझाते हुए AB के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।



9. दो टीमों के दौड़ने के लिए विशेष व्यवस्था की गई है जिसमें एक टीम A से B तथा B से C तक दौड़ती है और C से पुनः A पर वापस आती है। इसी प्रकार दूसरी टीम C से दौड़ शुरू करती है तथा D से होते हुए B पर तथा B से पुनः C पर वापस आती है यदि $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ तथा $\angle A = \angle D = 90°$ है तो बताइये क्या दोनों टीमों द्वारा तय की गई मैदान की लंबाईयां समान होंगी? उत्तर की व्याख्या कीजिये।



10. l और m दो समांतर रेखाएं हैं जिन्हें समांतर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेद करता है। दर्शाइये कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (इसे फ्लो चार्ट के द्वारा लिखिये)



11. चित्र में $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है तो दर्शाइये कि $BC = DE$

समद्विबाहु त्रिभुज के गुण (Property of Isosceles Triangle)

अब तक हमने त्रिभुजों की सर्वांगसमता से संबंधित नियमों का अध्ययन किया। आइये इन नियमों का प्रयोग त्रिभुज के कुछ गुणों के अध्ययन में करें।

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएं बराबर हो समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles) कहलाता है। आइए, समद्विबाहु त्रिभुज के गुणों को समझते हैं।

करके देखें

एक त्रिभुज की रचना कीजिये जिसकी दो भुजाओं का माप 4.5 सेमी. और अन्य भुजा 6 सेमी. की हो।

अब इन भुजाओं के सम्मुख बने कोणों को मापते हैं। क्या ये कोण बराबर हैं– हाँ

इसी प्रकार विभिन्न भुजाओं वाले अन्य समद्विबाहु त्रिभुज लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइये जिससे समद्विबाहु त्रिभुज का एक महत्वपूर्ण गुण प्रदर्शित होता है कि–

प्रमेय–10.3 : किसी भी बराबर भुजाओं वाले त्रिभुज में उनके सामने के कोण बराबर होते हैं।

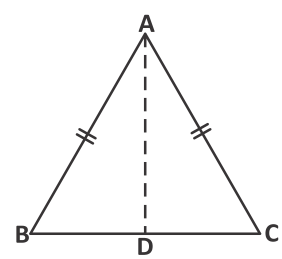
आइए, इस गणितीय कथन को सिद्ध करते हैं।

हमने एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC लिया है जिसमें भुजा $AB = AC$ है

हमें सिद्ध करना है कि $\angle B = \angle C$

इसके लिए हम $\angle A$ का कोणार्द्धक खींचते हैं जो कि BC भुजा को बिंदु D पर मिलती है। (चित्र)

कोणार्द्धक खींचने से हमें दो त्रिभुज दिखाई पड़ते हैं।



ΔBAD और ΔCAD को देखिये

इसमें $AB = AC$ (दिया है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (रचना से)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

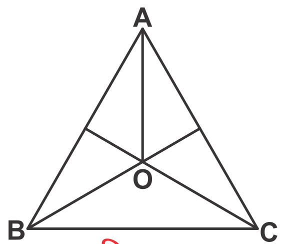
इसलिए, $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता नियम से)

इसलिए, $\angle ABD = \angle ACD$ क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण हैं।

$\therefore \angle B = \angle C$

अतः यह कथन प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज के लिए सत्य है, अब हम इसके विलोम पर विचार करते हैं।

प्रमेय–10.4 : (प्रमेय–10.3 का विलोम) यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होंगी।



चित्र–18

उदाहरण–9. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC है, ∠B और ∠C के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइये कि–

1. OB = OC 2. AO कोण A को समद्विभाजित करता है।

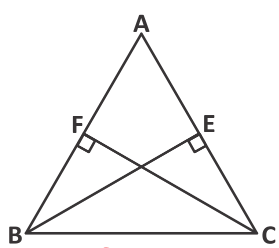
हल : 1. ΔABC में

कथन	कारण
AB = AC	दिया है
∴ ∠C = ∠B	बराबर सम्मुख भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं।
∴ ½ ∠B = ½ ∠C	
∠OCB= ∠OBC	
OB = OC	बराबर सम्मुख कोणों के सामने की भुजाएं बराबर होती हैं।

2. ΔABO और ΔACO में

कथन	कारण
AB = AC	दिया है
OB = OC	सिद्ध कर चुके हैं
∠OBA = ∠OCA	∵ ½∠C = ½∠B
∴ ΔABO ≅ ΔACO	SAS सर्वांगसमता से
⇒ ∠OAB = ∠OAC	C.P.C.T

अतः AO कोण A को समद्विभाजित करता है



चित्र–19

उदाहरण–10. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमशः शीर्ष लंब BE और CF खींचे गये हैं। दर्शाइये कि ये शीर्ष लंब बराबर हैं।

हल : दिया है– एक ΔABC में AB तथा AC बराबर है।

सिद्ध करना है शीर्ष लंब BE = CF

1. प्रत्येक कथन के लिये दिये गये कारणों में से सही कारण को चुनकर लिखिए–

बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं

प्रत्येक कोण 90° का है।

उभयनिष्ठ भुजा

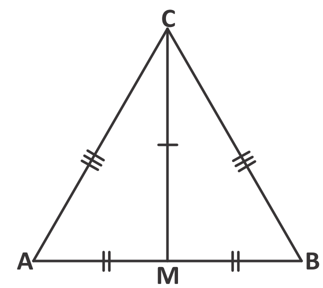
दिया है

ASA सर्वांगसमता से

सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत भाग बराबर होते हैं।

कथन	कारण
$AB = AC$	
$\angle ACB = \angle ABC$	
$\angle BFC = \angle BEC$	
$BC = BC$	
$\angle BEC = \angle CFB$	
$\therefore \Delta BEC \cong \Delta CFB$	
$BE = CF$	

उदाहरण–11. दिये गये चित्र में M, AB का मध्य बिंदु है तथा $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ तब सिद्ध कीजिए कि $\Delta ACM \cong \Delta BCM$



चित्र–20

हल : दिया है– M, AB का मध्य बिंदु है तथा $\overline{CA} \cong \overline{CB}$

सिद्ध करना है– $\Delta ACM \cong \Delta BCM$

M, AB का मध्य बिंदु है → दिया है

$AM = BM$ → मध्य बिंदु की परिभाषा से

$CM = CM$ → उभयनिष्ठ भुजा

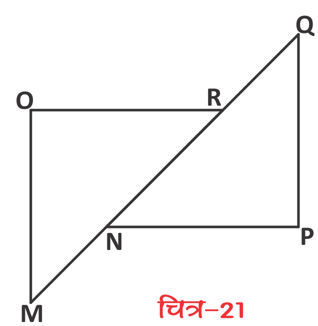
$\overline{CA} \cong \overline{CB}$ → दिया है

$\Delta ACM \cong \Delta BCM$ → भुजा–भुजा–भुजा SSS - सर्वांगसमता से

उदाहरण–12. दिया है $\angle O = \angle P = 90°$, $\overline{MN} \cong \overline{QR}$, $\overline{OM} \cong \overline{PQ}$ सिद्ध करना है $\Delta MOR \cong \Delta QPN$

हल :

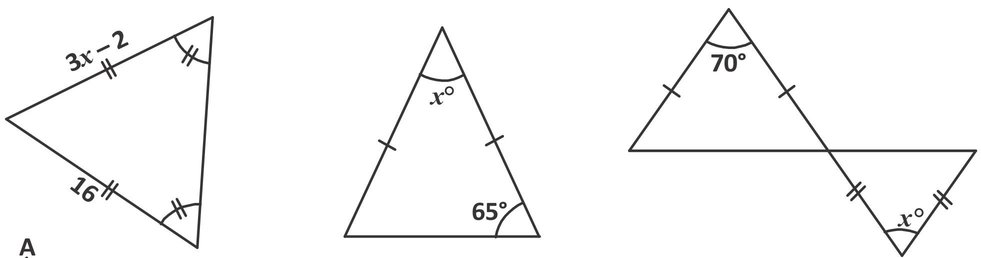
कथन	कारण
$\angle O = \angle P = 90°$	दिया है
$OM = PQ$	$OM \cong PQ$ (दिया है)
$MN = QR$	$MN \cong QR$ (दिया है)
$MN+NR = QR+NR$	दोनों पक्षों में NR जोड़ने पर
$MR = NQ$	चित्र में
$\Delta MOR \cong \Delta QPN$	RHS सर्वांगसमता प्रमेय से

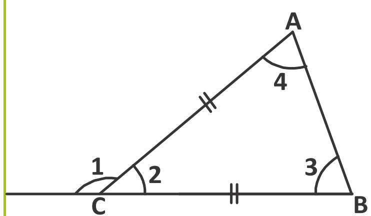


चित्र–21

करके देखें

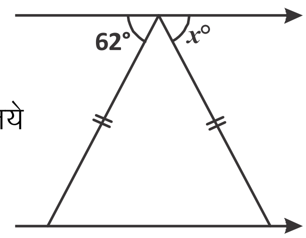
1. नीचे दिए गए समद्विबाहु त्रिभुजों में x का मान ज्ञात कीजिये।





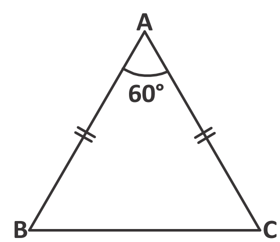
2. दिया है $BC \cong AC$ तथा $\angle 1 = 140°$ तो $\angle 2, \angle 3$ तथा $\angle 4$ का माप ज्ञात कीजिये

3. दिये गये चित्र में x का मान ज्ञात कीजिये



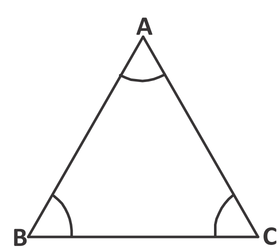
प्रश्नावली – 10.2

1. दिये गये चित्र में $AB = AC$ तथा $\angle A = 60°$ तो $\angle C$ का माप होगा।



(i) 35°
(ii) 45°
(iii) 60°
(iv) 180°

2. चित्र में यदि $\angle A = \angle B$ तो $AC : BC$ है



(i) 1:1 (ii) 1:2
(iii) 2:1
(iv) इनमें से कोई नहीं

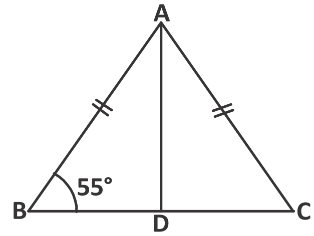
3. ΔABC में $AB = AC$ है यदि $\angle B = 50°$ हो तो $\angle A$ का माप होगा

(i) 50° (ii) 180° (iii) 100° (iv) 80°

4. ΔABC में यदि $\angle C = \angle A$ तथा $AB = 4$ सेमी., $AC = 5$ सेमी. है तो BC होगा

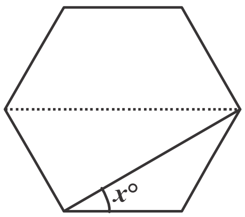
(i) 2 सेमी. (ii) 3 सेमी. (iii) 4 सेमी. (iv) 9 सेमी.

5. दिये गये चित्र में $\angle B = 55°$ है यदि D, BC का मध्यबिंदु हो तथा $AB = AC$ है तो $\angle BAD$ का माप होगा–

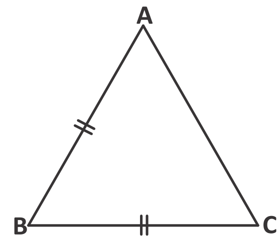


(i) 70° (ii) 55°

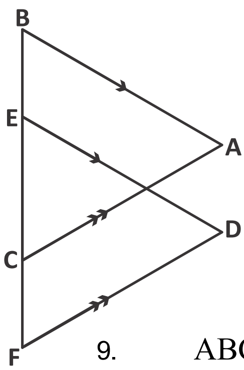
(iii) 35° (iv) 180°



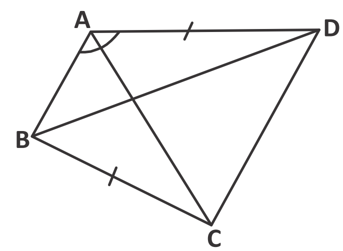
6. दिये गये समषटभुज के लिए x का मान ज्ञात कीजिए।



7. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AB = BC$ तथा आधार AC है तथा $\angle A = 2x + 8$. $\angle B = 4x – 20$ तो x का मान ज्ञात कीजिये तथा दर्शाइये कि यह त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज या अधिक कोण त्रिभुज है।

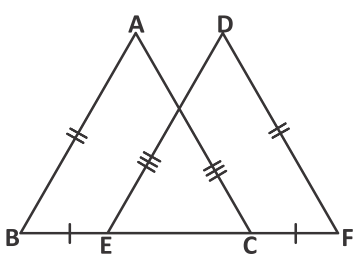


8. चित्र में दिया है $AB \parallel ED$, $CA \parallel FD$ तथा $BC \cong EF$ सिद्ध करना है $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



9. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें $AD = BC$ और $\angle DAB = \angle CBA$ है। सिद्ध कीजिये–

1. $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
2. $BD = AC$
3. $\angle ABD = \angle BAC$



10. यदि $AB = DF, AC = DE, BE = FC$ तो सिद्ध कीजिये कि $\Delta ABC \cong \Delta DFE$

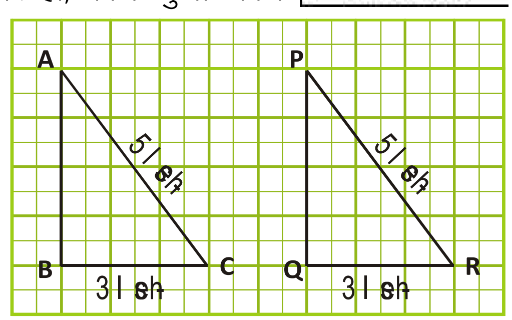
सर्वांगसमता के अनुप्रयोग (Application of Congruency)

समान साइज और समान आकृति वाली दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं। दो त्रिभुजों को सर्वांगसम कह पाने की कुछ शर्तें हैं– जैसे भुजा–भुजा–भुजा बराबर हों, कोण–भुजा–कोण बराबर हों इत्यादि। हम यहाँ सर्वांगसम आकृतियों की सर्वांगसमता व उनके क्षेत्रफल में संबंध को देखेंगे।

BKNHRU

सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल समान हैं?

ग्राफ पेपर पर बने त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR को देखें। क्या ये सर्वांगसम है? ये त्रिभुज सर्वांगसमता की कौनसी शर्त पूरी कर रहे हैं।



चित्र–22

ΔABC और ΔPQR में–

$\angle B = \angle Q = 90°, AC = PR$ और $BC = QR$

यानि RHS सर्वांगसमता प्रमेय के अनुसार ΔABC और ΔPQR सर्वांगसम है।

अब इस त्रिभुज का क्षेत्रफल पता करते हैं–

ΔABC में $BC = 3$ सेमी. और $AC = 5$ सेमी. है।

तब $AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2} = \sqrt{(5)^2 - (3)^2} = \sqrt{16} = 4$ सेमी. (क्यों है?)

$\therefore AB = 4$ सेमी.

यानि ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ सेमी.^{2}

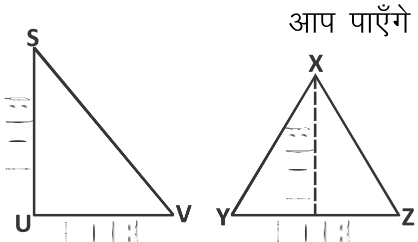
इसी तरह ΔPQR में $PQ = 4$ सेमी.

तब ΔPQR का क्षेत्रफल भी 6 सेमी.^{2} होगा।

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \Delta PQR$ का क्षेत्रफल

आप ΔABC और ΔPQR के सर्वांगसम कुछ और त्रिभुज बनाएँ। क्या इन सभी के क्षेत्रफल समान हैं?

आप पाएँगे कि सभी सर्वांगसम त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान है।



चित्र–23

अब चित्र–23 को देखें।

ΔSUV और ΔXYZ के क्षेत्रफल 15 सेमी. है। (कैसे?)

क्या ΔSUV और ΔXYZ सर्वांगसम हैं? ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं क्योंकि ये त्रिभुज समान आकृति और समान आकार के नहीं हैं।

आप 15 सेमी.^{2} क्षेत्रफल वाले और त्रिभुज बनाएँ और उनकी सर्वांगसमता जाँचें।

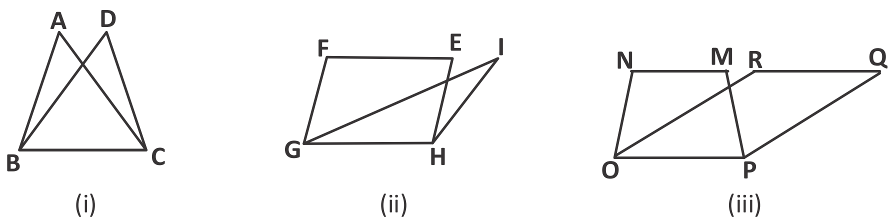
हम कह सकते हैं कि यदि दो आकृतियाँ सर्वांगसम हों तो उनके क्षेत्रफल समान होंगे परन्तु यदि आकृतियों के क्षेत्रफल समान हों तो वे सर्वांगसम हो भी सकते हैं और नहीं भी।

यह गुण केवल त्रिभुज तक ही सीमित नहीं है बल्कि विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों जैसे वृत्त, चतुर्भुज, पंचभुज इत्यादि में भी देखा जा सकता है।

सर्वांगसम आकृतियों के इस गुण का उपयोग हम विभिन्न संदर्भों में आकृतियों के क्षेत्रफल में संबंध ज्ञात करने के लिए करते हैं। अब हम कुछ ऐसी परिस्थितियों पर विचार करते हैं जहाँ इस गुण का उपयोग करने पर कुछ नई जानकारियाँ या कुछ नये संबंध प्राप्त होते हैं।

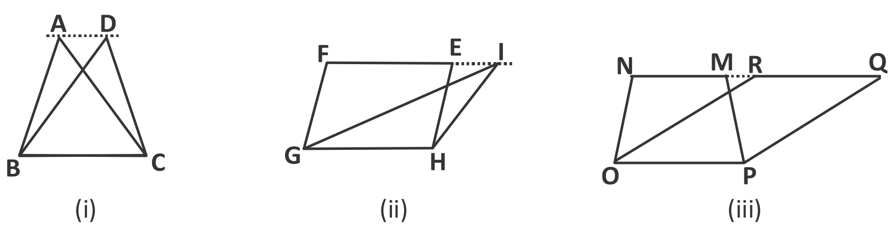
एक ही आधार व समान्तर रेखाओं के एक ही जोड़े के बीच बनी आकृतियाँ

नीचे बनी आकृतियों को देखिए–



चित्र–24

आप देखते हैं कि आकृति (i) में ΔABC व ΔDBC में उभयनिष्ठ आधार BC है। आकृति (ii) में चतुर्भुज EFGH व ΔIGH का भी उभयनिष्ठ आधार GH है। इसी प्रकार आकृति (iii) में समलंब चतुर्भुज MNOP व समांतर चतुर्भुज QROP में उभयनिष्ठ अर्थात् एक ही आधार OP है। अब यदि हम आकृति (i), (ii) व (iii) में कुछ रचनाएं करें तब हम कुछ नई स्थितियाँ प्राप्त करते हैं–

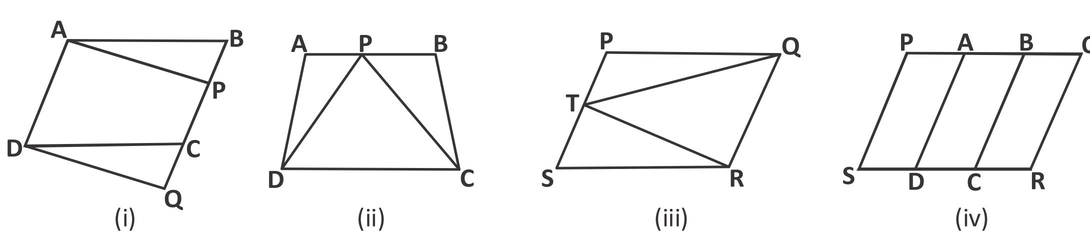


चित्र–25

रचना के पश्चात् हम देख रहे हैं कि आकृति (i) में AD□BC तथा ΔABC व ΔDBC एक ही आधार और समांतर रेखा AD व BC के बीच स्थित हैं इसी प्रकार EFGH व GHI भी समांतर रेखाओं FI व GH तथा समान आधार GH के मध्य स्थित हैं आकृति (iii) में समलंब चतुर्भुज MNOP व समांतर चतुर्भुज OPQR में समांतर रेखा NQ व OP व समान आधार OP के बीच स्थित हैं।

करके देखें

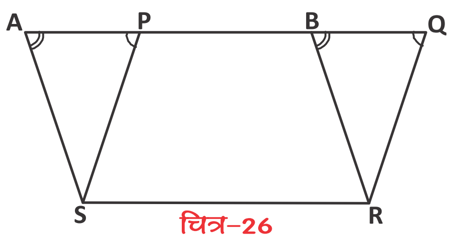
निम्न में से कौन सी आकृतियाँ एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित हैं?



एक ही आधार व समान्तर रेखाओं के एक ही जोड़े के बीच बनी आकृतियों का क्षेत्रफल

अब हम एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के बीच बनी आकृतियों के क्षेत्रफल में परस्पर संबंध को देखते हैं।

माना कि एक ही आधार SR पर और समान्तर रेखाएँ AQ व SR के बीच दो समान्तर चतुर्भुज ABRS व PQRS हैं।



चित्र-26

ΔAPS और ΔBQR में $AS||BR$ और AQ तिर्यक रेखा है।

$\angle SAP = \angle RBQ$ (संगतकोण)

और $PS||QR$ और AQ तिर्यक रेखा है तो

$\angle SPA = \angle RQB$ (संगतकोण)

तथा $AS = BR$ ($\because$ ABRS समान्तर चतुर्भुज है)

$\therefore \Delta APS \cong \Delta BQR$

फलतः ΔAPS का क्षेत्रफल $=$ ΔBQR का क्षेत्रफल

अब ABRS का क्षेत्रफल $= \Delta APS$ का क्षेत्रफल $+$ समलंब चतुर्भुज PBRS का क्षेत्रफल (क्यों?)

चतुर्भुज ABRS का क्षेत्रफल $= \Delta BQR$ का क्षेत्रफल $+$ समलंब चतुर्भुज PBRS का क्षेत्रफल

चतुर्भुज ABRS का क्षेत्रफल $=$ चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

स्पष्टतः यहाँ दो समांतर चतुर्भुज जो एक उभयनिष्ठ आधार पर व एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने हैं, क्षेत्रफल में बराबर हैं।

अतः एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के बीच बने समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं। स्पष्टतः यह एक प्रमेय है, जिसे निम्न प्रकार से लिखते हैं–

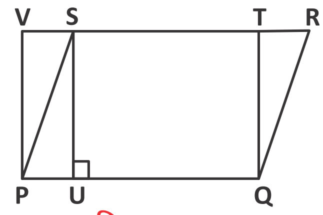
प्रमेय–10.5 : **एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के बीच बने समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।**

उदाहरण–13. PQRS एक समान्तर चतुर्भुज और PQTV आयत है SU, PQ पर लम्ब है सिद्ध कीजिए कि (i) PQRS का क्षेत्रफल $=$ PQTV का क्षेत्रफल

(ii) PQRS का क्षेत्रफल $= PQ \times SU$

हल : (i) आयत भी एक समान्तर चतुर्भुज होता है, तब सिद्ध करना है कि

समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल $=$ आयत PQTV का क्षेत्रफल



चित्र–27

क्या चित्र–27 की सहायता से हम यह सिद्ध कर पाएंगे?

हाँ, आप चित्र में देख पा रहे हैं कि समांतर चतुर्भुज PQRS व आयत PQTV का एक ही उभयनिष्ठ आधार PQ है व दोनों आकृतियाँ PQ व VR समांतर रेखाओं के मध्य बनी हैं।

हम यह जान चुके हैं कि एक ही आधार पर व एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है, अतः

समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल = आयत PQTV का क्षेत्रफल

(ii) PQRS का क्षेत्रफल = PQTV का क्षेत्रफल

= PQ $\times$ TQ

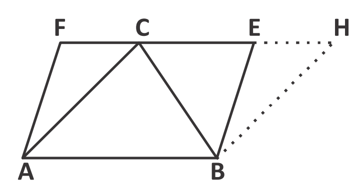
= PQ $\times$ SU (SU, PQ पर लम्ब है व SU= TR क्यों?)

इसलिए PQRS का क्षेत्रफल = PQ $\times$ SU

अतः समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसकी कोई समांतर भुजा और उसके सापेक्ष ऊँचाई का गुणनफल होता है।

उदाहरण–14. यदि त्रिभुज ABC और समान्तर चतुर्भुज ABEF एक ही आधार AB पर तथा समान्तर भुजाओं AB और EF के मध्य स्थित है तो सिद्ध कीजिए कि–

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ समांतर चतुर्भुज ABEF का क्षेत्रफल



चित्र–28

हल : प्रश्नानुसार एक ही आधार AB पर तथा समान्तर भुजाओं AB और EF के मध्य ΔABC व समांतर चतुर्भुज ABEF संलग्न चित्रानुसार बनेंगे।

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ समांतर चतुर्भुज ABEF का क्षेत्रफल

सिद्ध करने के लिए AC के समांतर BH खींचते हैं जो बढ़ाई गई FE को H पर स्पर्श करती है, रचना से हमें समांतर चतुर्भुज ABHC प्राप्त होता है। BC दूसरा एक कर्ण है जो इसे दो त्रिभुजों ΔABC व ΔBCH में विभाजित करता है।

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल = ΔBCH का क्षेत्रफल (क्यों)

आप जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभक्त करता है।

अतः समांतर चतुर्भुज ABHC का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔBCH का क्षेत्रफल

समांतर चतुर्भुज ABHC का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔABC का क्षेत्रफल

समांतर चतुर्भुज ABHC का क्षेत्रफल = 2 ΔABC का क्षेत्रफल

या $\frac{1}{2} \times$ समान्तर चतुर्भज ABHC का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल

यहाँ ABHC का क्षेत्रफल = ABEF का क्षेत्रफल (क्यों?)

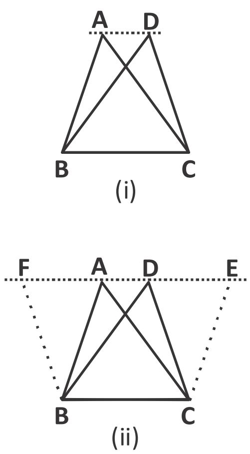
(क्योंकि ABHC व ABEF एक ही आधार व समांतर रेखाओं के मध्य बने हैं)

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ ABEF का क्षेत्रफल

एक ही आधार पर और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज

माना कि दो त्रिभुज ABC और DBC एक ही आधार BC पर और समान्तर रेखाओं AD व BC के बीच बने हैं।

अब हम CE||BA तथा BF||CD की रचना करें तब इस प्रकार हमें एक ही आधार BC पर और समान्तर रेखाओं BC व EF के बीच में समान्तर चतुर्भुज AECB और FDCB प्राप्त होंगे।



चित्र–29

जहाँ AECB का क्षेत्रफल = FDCB का क्षेत्रफल (क्यों?)

तब ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ AECB का क्षेत्रफल .... (1)

(समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभक्त करता है)

और ΔDBC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ FDCB का क्षेत्रफल

($\because$ AECB का क्षेत्रफल = FDCB का क्षेत्रफल)

ΔDBC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ AECB का क्षेत्रफल .... (2)

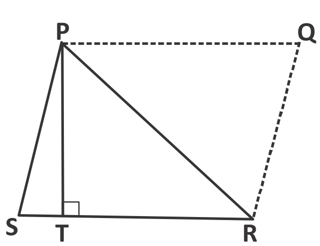
अतः समी. (1) व (2) से हमें पता चलता है कि

ΔABC का क्षेत्रफल = ΔDBC का क्षेत्रफल

स्पष्ट है कि एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज, क्षेत्रफल में बराबर होते हैं। यह भी एक प्रमेय है, इसे इस प्रकार लिखा जाता है–

प्रमेय–10.6 : एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज, क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

अब हम किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में उसके आधार व संगत ऊँचाई में संबंध पता करेंगे।



चित्र–30

माना कि PSR एक त्रिभुज है जिसमें SR आधार व PT ऊँचाई है। $PT \perp SR$ अब PQ व RQ की रचना इस प्रकार करते हैं कि PQ||RS व RQ||SP तब PQRS एक समांतर चतुर्भुज प्राप्त होता है जिसमें ΔPSR का क्षेत्रफल = ΔPQR का क्षेत्रफल (क्यों?)

(चूंकि समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभक्त करता है)

चतुर्भुज PQRS क्षेत्रफल = ΔPSR का क्षेत्रफल + ΔPQR का क्षेत्रफल

चतुर्भुज PQRS क्षेत्रफल = ΔPSR का क्षेत्रफल + ΔPSR का क्षेत्रफल

ΔPSR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ PQRS का क्षेत्रफल

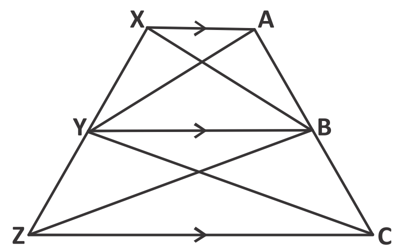
$= \frac{1}{2} \times SR \times PT$

स्पष्टतः **किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और उसकी संगत ऊँचाई के गुणनफल का आधा होता है।**

प्रमेय–10.7 : किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और उसकी संगत ऊँचाई के गुणनफल का आधा होता है।

हमने यह जाना कि एक ही आधार व एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं। तब क्या एक ही आधार पर बने दो समान क्षेत्रफल के त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच होंगे?

उदाहरण–15. चित्रानुसार $XA \parallel YB \parallel ZC$ सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल (ΔXBZ) = क्षेत्रफल (ΔAYC)



चित्र–31

हल : ΔXYB और ΔABY, XA व YB एक ही समांतर रेखाओं के बीच एक ही आधार YB पर स्थित है।

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔXYB) = क्षेत्रफल (ΔABY) .....(1)

इसी प्रकार,

ΔYBZ और ΔBYC एक ही समांतर रेखाओं YB व ZC के बीच एक ही आधार YB पर स्थित है।

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔYBZ) = क्षेत्रफल (ΔBYC) .....(2)

यहाँ क्षेत्रफल (ΔXBZ) = क्षेत्रफल (ΔXYB) + क्षेत्रफल (ΔYBZ)

तथा क्षेत्रफल (ΔAYC) = क्षेत्रफल (ΔAYB) + क्षेत्रफल (ΔBYC)

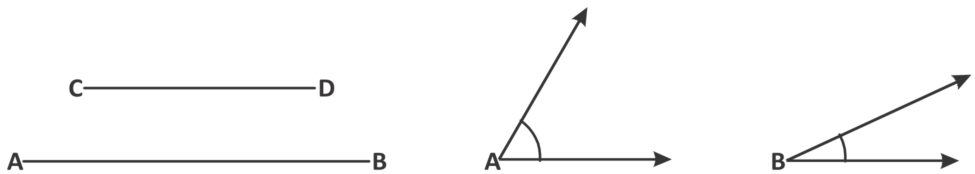
अब समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

क्षेत्रफल (ΔXYB) + क्षेत्रफल (ΔYBZ) = क्षेत्रफल (ΔABY) + क्षेत्रफल (ΔBYC)

अतः क्षेत्रफल (ΔXBZ) = क्षेत्रफल (ΔAYC)

त्रिभुजों में असमानता (Inequalities in Triangles)

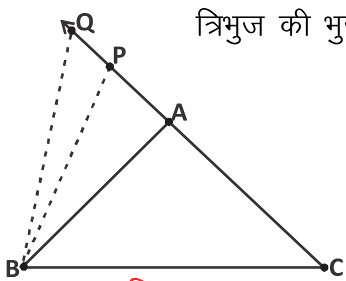
हम किसी त्रिभुज की समानताओं को भुजाओं और कोणों के संबंध में सीख चुके हैं परंतु बहुत सी ऐसी ज्यामिति रचनाएं भी होती हैं जो समान नहीं होतीं और हम उनकी तुलना करते हैं, जैसे AB रेखाखंड की लंबाई, रेखाखण्ड CD से अधिक है $\angle A$, $\angle B$ से बड़ा है।



चित्र–32

किसी त्रिभुज की असमान भुजाओं और कोणों के मध्य संबंधों को हम गतिविधि के माध्यम से सीखेंगे

गतिविधि– एक ड्राइंग बोर्ड पर दो बिंदु B और C पर दो पिन लगाइये इनको धागे से बांधकर त्रिभुज की भुजा BC बनाइये।



चित्र–33

एक अन्य धागे के एक सिरे को C पर लगाइये और दूसरे सिरे को एक पेंसिल से बांधिये। किरण $\overrightarrow{CQ}$ खींचे। पेंसिल से एक बिंदु A अंकित कीजिये। बिंदु A को B से मिलाइये। अब पेंसिल से इसी किरण पर एक अन्य बिंदु P अंकित कीजिये। P को B से मिलाइये और Q को B से मिलाइये। अब PC और AC की लम्बाइयों की तुलना कीजिए।

क्या $PC > AC$? हाँ ...... (लम्बाइयों की तुलना करने पर)

ΔABC व ΔPBC की तुलना करने पर $\angle PBC > \angle ABC$

इस प्रकार जब हम CA पर और बिंदु अंकित करके उन्हें B से मिलाते जायेंगे तो देखेंगे कि जैसे–जैसे AC भुजा बड़ी होती जाती है $\angle B$ का माप भी बढ़ता जाता है।

यह कुछ अन्य त्रिभुजों के साथ करके देखें। इस तरह हम त्रिभुज की कुछ और रोचक एवं महत्वपूर्ण असमानताओं को देख पाते हैं, जिन्हें नीचे प्रमेय के रूप में दिया गया है।

प्रमेय–10.8 : यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएं असमान हैं तो बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है।

प्रमेय–10.9 : किसी त्रिभुज में, बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।

प्रमेय–10.10 : एक त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

प्रमेय–10.10 को गतिविधि की सहायता से समझेंगे।

एक ड्राइंग बोर्ड पर तीन कीलें A, B तथा C इस प्रकार लगाइये की एक त्रिभुज की आकृति बने।

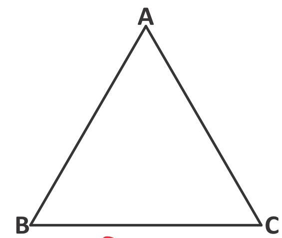
अब इन कीलों को धागे से बांधिये एक धागे के टुकड़े की तुलना अन्य दो धागों से कीजिये आप देखेंगे कि दो धागों की लंबाई तीसरे धागे से बड़ी है।

इसकी तीन भुजाएं AB, BC तथा CA मापकर विभिन्न युग्मों में दो भुजाओं के योग की तीसरी भुजा से तुलना कीजिए। आप देखेंगे कि–

(i) $AB + BC > CA$

(ii) $BC + CA > AB$

(iii) $CA + AB > BC$



चित्र–34

इसी तरह और भी परिणाम निकाले जा सकते हैं, जिन्हें प्रमेय के रूप में भी सिद्ध किया जा सकता है।

आइये, इन परिणामों पर आधारित कुछ उदाहरण देखें।

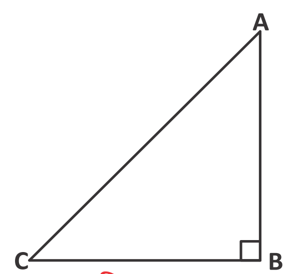
उदाहरण–16. सिद्ध कीजिये कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है।

हल : दिया है ΔABC में

$\angle B = 90°$

सिद्ध करना है $AC > AB$

और $AC > BC$



चित्र–35

ΔABC में

$\angle B = 90°$ (दिया है)

$\because$ $\angle A + \angle C = 90°$ (त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग दो समकोण होता है)

$\therefore$ $\angle A + \angle C = \angle B$

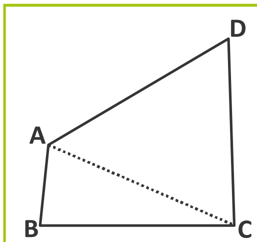
यानि $\angle A < \angle B$ और $\angle C < \angle B$

हम कह सकते हैं $\angle B$ त्रिभुज ABC का सबसे बड़ा कोण है।

हम जानते हैं कि त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।

अतः $AC > AB$ और $AC > BC$

सोचें एवं चर्चा करें



AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजाएँ है। दर्शाइए कि $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$ है।

उदाहरण–17. त्रिभुज ABC में सिद्ध करें– $\angle ABC > \angle ACB$

रचना– AC में D बिंदु इस प्रकार लें कि $AB = AD$, बिंदु B को D से मिलाएँ।

उपपत्ति– ΔABD में

$AB = AD$ (रचना से)

$\angle ABD = \angle ADB$ .....(1) (समान भुजाओं के सामने के कोण)

परंतु $\angle ADB$, ΔBCD का बहिष्कोण है

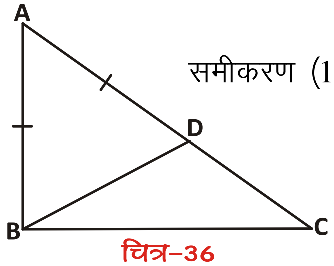
$\therefore \angle ADB > \angle BCD$ .....(2) (बहिष्कोण प्रमेय से)

समीकरण (1) और (2) से

$\angle ABD > \angle BCD$

$\angle ABC > \angle ABD$ (रचना से)

$\angle ABC > \angle ACB$



चित्र–36

करके देखें

सही विकल्प चुनिये

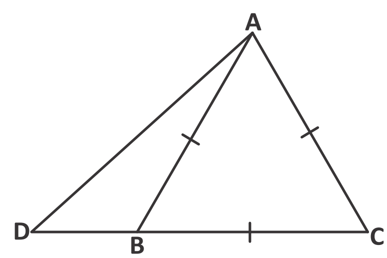
1. निम्नलिखित में से किन मापों से एक त्रिभुज की रचना की जा सकती है–
   (i) 10*cm.*, 5*cm.*, 4*cm.*, (ii) 8*cm.*, 6*cm.*, 3*cm.*
   (iii) 5*cm.*, 8*cm.*, 3*cm.* (iv) 14*cm.*, 6*cm.*, 7*cm.*

2. त्रिभुज ABC में यदि $\angle C > \angle B$ से तो निम्न में से कौनसा सत्य होगा–
   (i) $EF > DF$ (ii) $AB > AC$
   (iii) $AB < AC$ (iv) $BC > CA$

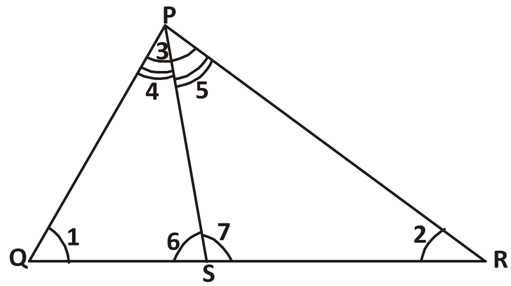
3. निम्नलिखित में से किन मापों से एक त्रिभुज की रचना संभव है–
   (i) 35°, 45°, 95° (ii) 40°, 50°, 100°
   (iii) 21°, 39°, 120° (iv) 110°, 80°, 20°

4. यदि एक ΔABC में AD माध्यिका है तो निम्न में से कौनसा कथन असत्य होगा।
   (i) $AB + BC > AD$ (ii) $AC + BC > AD$
   (iii) $AB + BC < AD$ (iv) $AB + BD > DC$

5. दिये गये चित्र में यदि $AB = AC = BC$ है तो निम्न में से कौनसा कथन सत्य है?
   (i) $AD = AC$
   (ii) $AD < AB$
   (iii) $BC = BD$
   (iv) $AD > AB$



उदाहरण–18. दिये गये चित्र में $PR > PQ$ और PS $\angle QPR$ का कोणार्द्धक है तो सिद्ध कीजिये कि $\angle PSR > \angle PSQ$



चित्र–37

हल : चूंकि $PR > PQ$

$\therefore \angle 1 > \angle 2$

ΔPQS में $\quad \angle 1 + \angle 4 + \angle 6 = 180° \quad .....(1)$

ΔPRS में $\quad \angle 2 + \angle 5 + \angle 7 = 180° \quad .....(2)$

अतः दोनों त्रिभुजों में

$\angle 4 = \angle 5 \quad .....(3)$ (कोण 3 के कोणार्द्धक)

$\angle 1 > \angle 2 \quad .....(4)$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad \angle 4 + \angle 1 > \angle 5 + \angle 2 \quad .....(5)$

समीकरण (1) से $\quad \angle 1 + \angle 4 = 180° - \angle 6$

समीकरण (2) से $\quad \angle 5 + \angle 2 = 180° - \angle 7$

अब समीकरण (5) में मान रखने पर

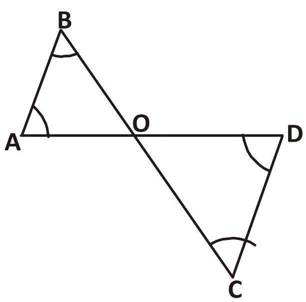
$180° - \angle 6 > 180° - \angle 7$

$-\angle 6 > -\angle 7$ (पक्षान्तर करने पर)

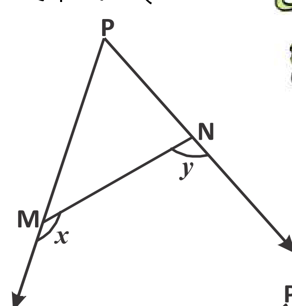
या $\quad \angle 7 > \angle 6$

$\therefore \angle PSR > \angle PSQ$

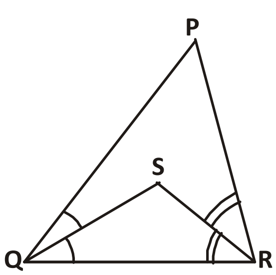
प्रश्नावली – 10.3



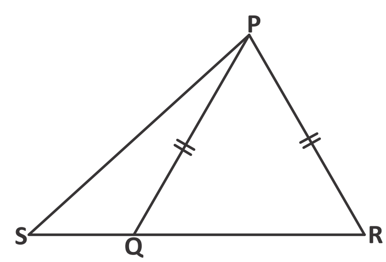
1. चित्र में $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है। दर्शाइये कि $AD < BC$ है।



2. दिये गये चित्र में यदि $x > y$ हो तो सिद्ध कीजिये कि $MP > NP$



3. दिये गये चित्र में $PQ > PR$ तथा $\angle Q$ और $\angle R$ के अर्धक क्रमशः QS और RS हैं। सिद्ध कीजिये कि $SQ > SR$



4. दिये गये चित्र में $PQ = PR$ हो तो सिद्ध कीजिये कि $PS > PQ$

सर्वांगसमता की उपयोगिता (Uses of Congruency)

सर्वांगसम आकृतियों व सर्वांगसमता का उपयोग हमारे वास्तविक जीवन में तो होता ही है साथ ही साथ इंजीनियरिंग के क्षेत्र में भी पुलों, भवनों और टावरों के निर्माण में भी सर्वांगसमता दिखाई पड़ती है।

हमने सीखा

1. ज्यामिति आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि उनके आकार व माप समान हों।
2. समान त्रिज्याओं के दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।
3. दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी भुजाओं के माप समान होते हैं।
4. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं जब उनके शीर्षों की संगतता इस प्रकार हो कि उनकी संगत भुजाएं व संगत कोण समान हों।
5. यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएं और बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और बीच के कोण बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (SAS)
6. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और बीच की भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों और बीच की भुजा के बराबर हों तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (ASA)
7. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हों तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (AAS)
8. त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
9. त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं।
10. दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएं दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
11. यदि दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (RHS)
12. किसी त्रिभुज में बड़ी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
13. किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।
14. किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।
15. किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण $60°$ का होता है।
16. यदि $\Delta ABC, \Delta PQR$ के सर्वांगसम हैं तो इसे इस प्रकार लिखते हैं– $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
17. सर्वांगसम त्रिभुज के संगत अवयव/भाग/अंग को स.त्रि.स.भ. या CPCT से प्रदर्शित करते हैं।

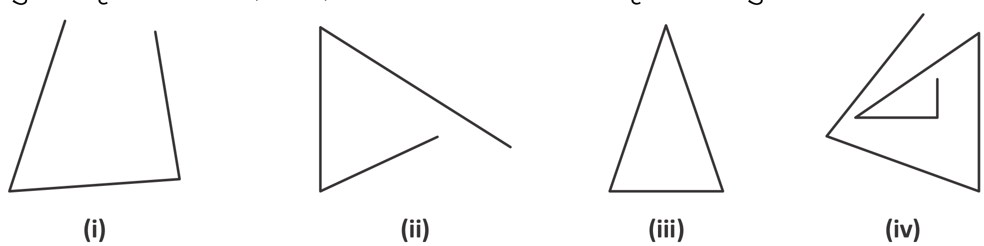
चतुर्भुज

[QUADRILATERALS]

BL7NV5

11

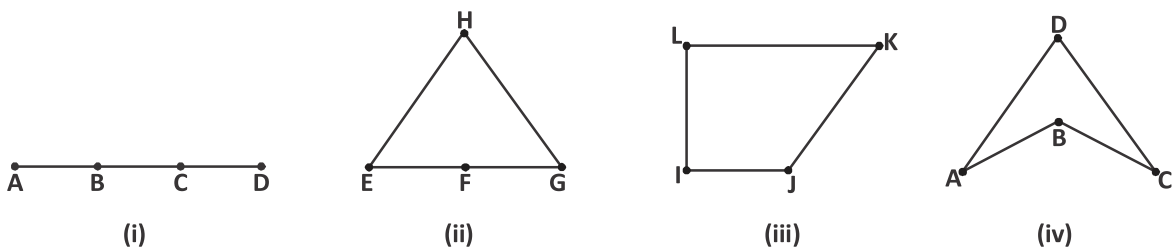
नीचे कुछ आकृतियाँ दी गई हैं, इनमें से कौन–कौन सी आकृतियाँ त्रिभुज हैं?



चित्र–1

तीन असंरेख बिंदुओं को मिलाने पर जो आकृति बनती है वह त्रिभुज कहलाती है। त्रिभुज, तीन रेखाखण्डों से घिरी आकृति है। इसमें तीन भुजाएँ, तीन कोण, तीन शीर्ष होते हैं। त्रिभुज के कौनसे अन्य गुण हैं, चर्चा करें।

यहाँ प्रत्येक चित्र में चार बिंदु दिए गए हैं जिन्हें मिलाने पर कुछ आकृतियाँ बन रही हैं।



चित्र–2

आकृति–2(i) में चारों बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हैं अतः इससे एक रेखाखण्ड प्राप्त होता है। आकृति–2(ii) में तीन बिंदु एक रेखा में हैं और चौथा बिंदु अलग है। इससे एक त्रिभुज बन रहा है।

क्या आकृति–2(iii) व (iv) में चतुर्भुज बन रहा है? यहाँ हम देख पाते हैं कि चतुर्भुज बनने के लिए चार बिंदुओं में से तीन बिंदुओं का असंरेख होना आवश्यक है।

> यदि किसी सतह पर चार बिंदुओं में से कोई भी तीन बिंदु एक रेखा पर स्थित न हों (अर्थात् असंरेख हों) तब इन बिंदुओं को एक क्रम से मिलाने पर चतुर्भुज बनेगा।

करके देखें

उपर्युक्त गुणों के आधार पर चतुर्भुज को परिभाषित कीजिए। आपस में चर्चा कर साथियों द्वारा लिखी गई परिभाषा भी देखिए।

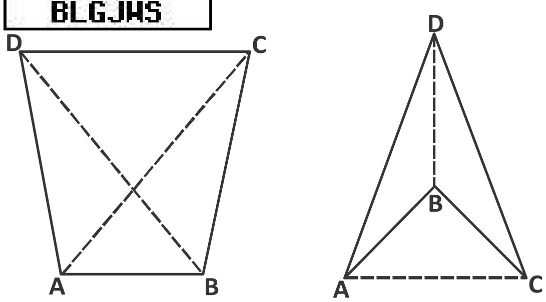
विद्यालय या कक्षा में ऐसी कौन–कौन सी वस्तुएँ हैं जिनकी कुछ सतहें चतुर्भुजाकार दिखती हैं? सूची बनाइए। जैसे– श्याम पट्ट, खिड़की का पल्ला, पुस्तक का पन्ना इत्यादि।

सोचें एवं चर्चा करें

हमारे आसपास दिखने वाली बहुत सी वस्तुएँ आयताकार हैं। आयत भी एक चतुर्भुज है। क्यों?

BLGJHS

चतुर्भुज के प्रकार (Types of Quadrilateral)



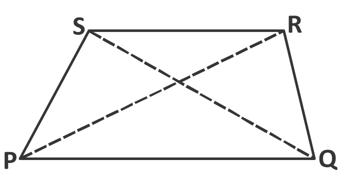
(i) (ii)

चित्र–3

आपने चित्र–2 की आकृतियों (iii) व (iv) को चतुर्भुज कहा। अब चित्र–3 की तरह इन चतुर्भुजों के विकर्ण खींचिए।

आपने देखा कि चित्र 3 (i) में दोनों विकर्ण अंदर की ओर बनते हैं जबकि चित्र 3(ii) में एक विकर्ण अंदर एवं एक विकर्ण बाहर बनता है। ऐसा क्यों?

जिस चतुर्भुज में दोनों विकर्ण अंदर की ओर बनते हैं उसका कोई भी कोण 180° से अधिक नहीं होता इस चतुर्भुज को उत्तल चतुर्भुज कहते हैं। जैसे PQRS (चित्र–4)

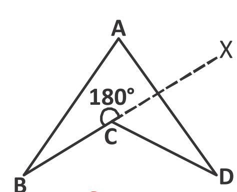


चित्र–4

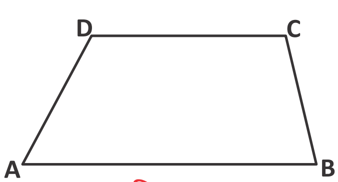
जिस चतुर्भुज में एक विकर्ण अन्दर एवं एक बाहर बनता है तथा चतुर्भुज का एक कोण 180° से अधिक होता है ऐसे चतुर्भुज को अवतल चतुर्भुज कहते हैं।

चित्र–5 में $\angle BCX = 180°$ है। अतः चतुर्भुज ABCD का अंतःकोण $\angle BCD$, 180° से अधिक है।

हम यहाँ चित्र–4 जैसे उत्तल चतुर्भुज का ही अध्ययन करेंगे।



चित्र–5

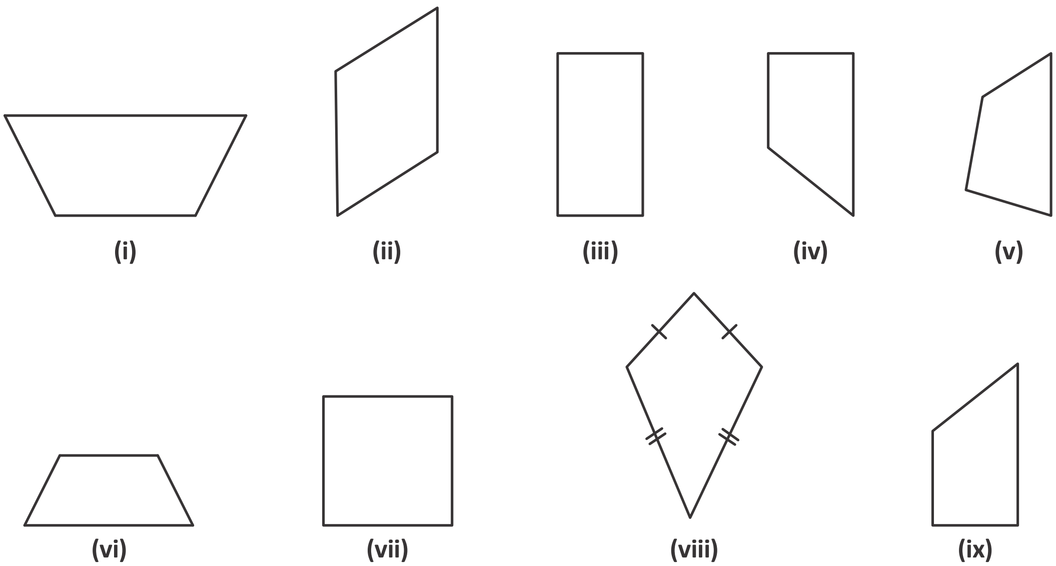


चित्र–6

चतुर्भुज ABCD में भुजा AB, भुजा DC के समांतर है।
यह समलंब चतुर्भुज है। यह कहा जा सकता है कि चतुर्भुज जिसका सम्मुख भुजाओं का केवल एक जोड़ा समांतर हो, समलंब चतुर्भुज (Trapezium) होता है।

करके देखें

नीचे बने चतुर्भुज में से कौन से समलंब चतुर्भुज नहीं है एवं क्यों?



समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)

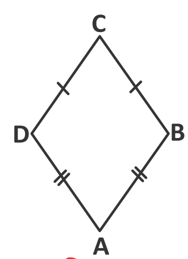
समलंब चतुर्भुज में भुजाओं का एक युग्म (जोड़ा) समांतर होता है, यदि चतुर्भुज में भुजाओं के दोनों युग्म (जोड़ा) समांतर अर्थात् आमने–सामने की भुजाएँ समांतर हों, तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज कहलाता है।

चित्र–7

BLQFYF

समचतुर्भुज (Rhombus)

यदि समांतर चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर हों तो वह समचतुर्भुज कहलाता है।



चित्र–8

सोचें एवं चर्चा करें

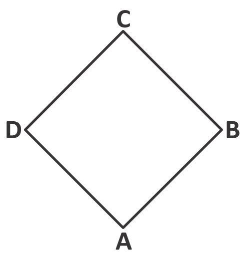
1. विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों में से कौन–कौन से चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज भी होते हैं?
2. क्या एक समांतर चतुर्भुज, एक समलंब चतुर्भुज भी है?

अब आप आयत व वर्ग बनाइए। क्या आयत व वर्ग भी समांतर चतुर्भुज हैं?

हाँ, आयत एक विशेष तरह का समांतर चतुर्भुज होता है जिसका प्रत्येक कोण 90° होता है।

करके देखें

1. क्या आयत, एक वर्ग भी है?
2. ऐसा समांतर चतुर्भुज बनाइए जिसके तीन कोण समकोण हों पर यह आयत न हो। क्या यह संभव है? चर्चा कीजिए।



चित्र–9

जब किसी आयत की चारों भुजाएँ समान हों तब वह कौन–सा चतुर्भुज होता है? यह चतुर्भुज वर्ग होता है। (चित्र–9)

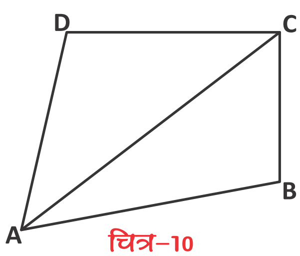
(i) क्या वर्ग एक आयत है?

(ii) क्या वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है?

(iii) क्या वर्ग एक समचतुर्भुज है?

(iv) क्या समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज भी है?

अब हम चतुर्भुज के कुछ गुणों एवं उनसे संबंधित प्रमेयों को सिद्ध करना सीखेंगे–



चित्र–10

हम जानते हैं कि चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो त्रिभुजों में बाँटता है।

माना ABCD एक चतुर्भुज है तथा AC उसका विकर्ण है। तब विकर्ण AC, चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ΔABC व ΔADC में विभक्त करता है (चित्र–10)।

हम त्रिभुज के कोण योग गुणधर्म से जानते हैं कि किसी त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180° होता है।

ΔADC में, $\angle ADC + \angle DCA + \angle CAD = 180^0$ ....(1)

इसी प्रकार ΔABC में, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$\angle ADC + \angle DCA + \angle CAD + \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0 + 180^0$

$\angle ADC + (\angle DCA + \angle BCA) + (\angle CAD + \angle CAB) + \angle ABC = 360^0$

$\angle ADC + \angle BCD + \angle BAD + \angle ABC = 360^0$

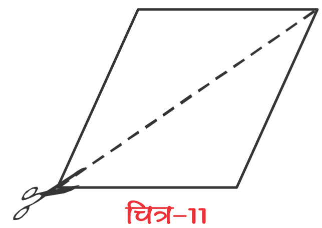
अतः चतुर्भुज ABCD के चारों अन्तःकोणों का योग 360^0 के बराबर है।

इसी तरह अन्य सभी चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों का योग भी 360^0 होता है।

करके देखें

1. एक चतुर्भुज के चारों अन्तःकोणों का अनुपात 3 : 5 : 7 : 9 है तो उसके प्रत्येक अन्तःकोण का मान ज्ञात कीजिए।
2. यदि चतुर्भुज के चारों कोण समान हों तो प्रत्येक कोण का माप कितना होगा?

अब कागज पर एक समांतर चतुर्भुज बनाइए। उसका कोई एक विकर्ण खींचिए। कैंची की सहायता से चित्रानुसार काटिए। काटे गए भागों को एक–दूसरे के ऊपर रखिए। क्या ये कटे भाग एक–दूसरे को ढँक पाते हैं?


चित्र–11

क्या इन भागों के एक–दूसरे को ढँक पाने में समांतर चतुर्भुज के किसी गुणधर्म का महत्व है?

हम यहाँ समांतर चतुर्भुज के कुछ गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे तथा उनका तार्किक सत्यापन करेंगे।

प्रमेय–11.1 : समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

उपपत्ति : माना ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। AC उसका एक विकर्ण है। (चित्र–12)

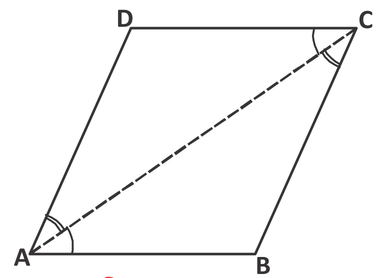
समांतर चतुर्भुज ABCD में–

$AB \| DC$ जहाँ AC एक तिर्यक रेखा है।

$\angle DCA = \angle CAB$ (एकांतर अंतः कोण)

इसी प्रकार $DA \| CB$ जहाँ AC तिर्यक रेखा है।

$\angle DAC = \angle BCA$



चित्र–12

अब ΔACD और ΔCAB में

$\angle DCA = \angle CAB$

$AC = CA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle DAC = \angle BCA$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता से)

अर्थात विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

स्पष्टतः समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

प्रमेय–11.2 : किसी समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

उपपत्ति : माना कि ABCD समांतर चतुर्भुज है। अब शीर्ष A को C से मिलाइए। यह विकर्ण AC है। विकर्ण AC चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ABC और ACD में बांटता है। (चित्र–13)

अब ΔABC और ΔACD में –

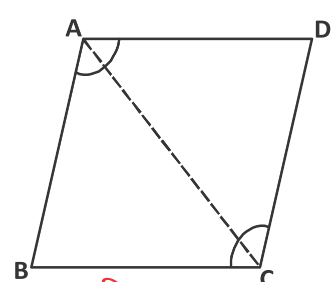
$\angle DAC = \angle BCA$ (एकांतर अंतः कोण)

$(AD \| BC)$

$AC = CA$ उभयनिष्ठ भुजा है।

इसी प्रकार, एकांतर अन्तः कोण से –

$\angle DCA = \angle BAC$ $(AB \| DC)$



चित्र–13

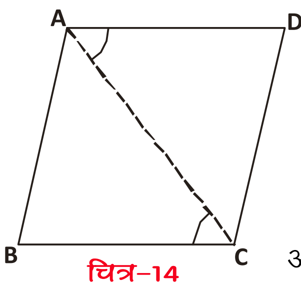
$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता से)

इसलिए $AD = BC$ तथा $AB = CD$

अर्थात समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। (सिद्ध हुआ)

प्रमेय–11.3 (विलोम) : यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर है, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।

उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD जिसमें $AB = CD$ तथा $BC = AD$ है। अब चतुर्भुज में विकर्ण AC खींचिए।



चित्र–14

ΔABC और ΔCDA में

$BC = AD$ (दिया हुआ है)

$AB = DC$ (दिया हुआ है)

$AC = CA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता से)

अतः $\angle BCA = \angle DAC$

अतः $AD \parallel BC$ ....(1)

जहाँ AC तिर्यक रेखा है।

चूंकि $\angle ACD = \angle CAB$,

क्योंकि CA तिर्यक रेखा है।

अतः $AB \parallel CD$ ....(2)

अतः (1) व (2) से चतुर्भुज ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

हमने देखा कि समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म बराबर होते हैं और विलोमतः यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म बराबर हों तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।

अब हम इसी तथ्य को उन चतुर्भुजों के लिए सिद्ध करते हैं जिनके सम्मुख कोणों के युग्म बराबर होते हैं।

प्रमेय–11.4 : समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD एक समांतर चतुर्भुज है (चित्र–15)

जिसमें $AB \parallel DC$

$\because$ रेखा AD समांतर रेखाओं AB व DC को प्रतिच्छेद करती है।

$\angle A + \angle D = 180^0$ (एक ही ओर के अन्तः कोण)

तथा DC रेखा AD व BC को प्रतिच्छेद करती है।

$\angle D + \angle C = 180^0$

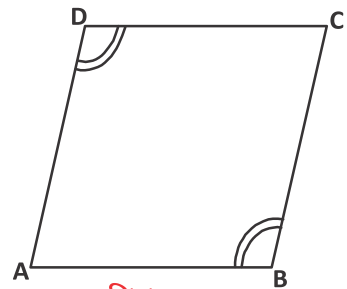
(एक ही ओर के अन्तः कोण)

अतः $\angle A + \angle D = \angle D + \angle C$

अर्थात $\angle A = \angle C$

इसी प्रकार $\angle B = \angle D$ भी सिद्ध किया जा सकता है।

स्पष्ट है कि समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।



चित्र–15

अब किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के बराबर होने पर उसके समांतर चतुर्भुज होने की संभावना का तार्किक रूप ज्ञात करेंगे।

प्रमेय–11.5 : (प्रमेय 11.4 का विलोम) किसी चतुर्भुज में यदि सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।

उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD में $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ (चित्र–16).....(1)

हम जानते हैं कि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 होता है।

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$$

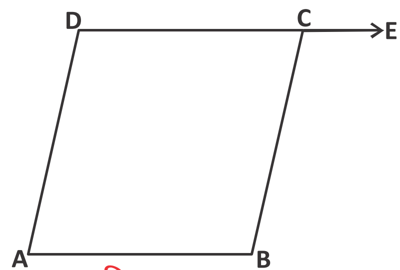
$$\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360^o \quad \text{(समीकरण (1) से)}$$

$$2\angle A + 2\angle B = 360^o$$

$$\angle A + \angle B = \frac{360^o}{2}$$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360^o}{2}$$

$$\therefore \angle C + \angle D = 180^o \quad .....(2)$$



चित्र–16

अब DC को E तक बढ़ाइए–

हम देखते हैं कि $\angle C + \angle BCE = 180^o$ .....(3)

अतः $\angle BCE = \angle ADC$ समीकरण (2) और (3) से

अब चूंकि $\angle BCE = \angle D$ तथा DC तिर्यक छेदी रेखा है।

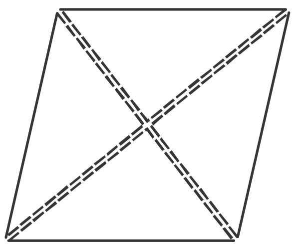
इसलिए $AD \parallel BC$

इसी प्रकार $AB \parallel DC$ अर्थात ABCD समांतर चतुर्भुज हैं।

समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के गुण
(Properties of Diagonals of Parallelogram)

समांतर चतुर्भुज का एक गुण और भी है।

कागज पर एक समांतर चतुर्भुज खींचिए, उसके दो विकर्ण खींचकर कैंची की सहायता



चित्र–17

से चित्रानुसार काटिए। क्या आपको ऐसा प्रतीत हो रहा है कि विकर्णों ने समांतर चतुर्भुज को समान भागों में बाँट दिया है। (चित्र–17)

आकृति में आपको चार त्रिभुज प्राप्त होते हैं और ये त्रिभुज दो सर्वांगसम त्रिभुजों के युग्म के रूप में होते हैं। क्या विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं?

आइए, हम उक्त कथन की सत्यता की जाँच करते हैं।

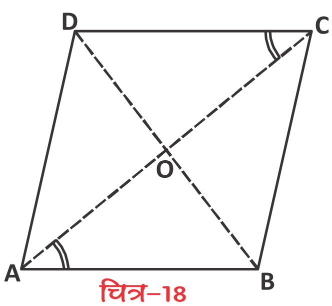
प्रमेय–11.6 : समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

उपपत्ति : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $AB = DC$ व $AB \parallel DC$

तथा $AD = BC$ और $AD \parallel BC$ (चित्र–18)

A को C से व B को D से मिलाया तब AC व BD एक–दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

ΔAOB व ΔCOD में



चित्र–18

$\angle OAB = \angle OCD$ .... (1)

($AB \parallel DC$ एवं AC तिर्यक रेखा काटती है।)

$\angle ABO = \angle ODC$ .... (2)

($AB \parallel DC$ एवं BD तिर्यक रेखा काटती है।)

$AB = CD$

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता)

$\therefore$ भुजा $AO = OC$ एवं $BO = OD$

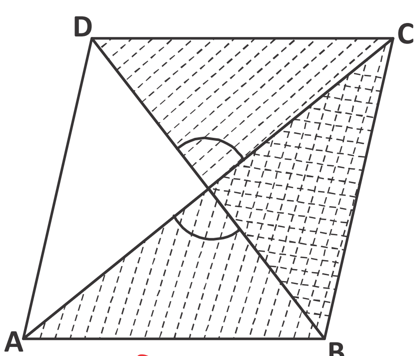
अतः हम कह सकते हैं कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

उदाहरण–1. यदि किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो वह आयत होता है।

उपपत्ति : माना कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें AC व BD विकर्ण हैं

तथा $AC = BD$ (चित्र–19)

अब ΔABC और ΔDCB में



चित्र–19

$AB = DC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$BC = CB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AC = BD$

$\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता)

फलतः $\angle ABC = \angle DCB$ ....(1)

चूंकि $\angle ABC$ और $\angle DCB$ समांतर रेखाओं AB और CD की तिर्यक प्रतिच्छेदी BC के एक ही ओर स्थित हैं। अतः

$$\angle ABC + \angle DCB = 180^\circ \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) और (2) से

$\angle ABC + \angle ABC = 180^\circ$

$2 \angle ABC = 180^\circ$

$\angle ABC = 90^\circ$

अर्थात $\angle DCB = 90^\circ$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि $\angle A = \angle D = 90^\circ$

इसलिए, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

अतः समांतर चतुर्भुज ABCD आयत है।

स्पष्ट है कि यदि किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो वह आयत होता है।

यही सिद्ध करना था।

करके देखें

इसी तरह आप सिद्ध कर सकते हैं कि यदि किसी समचतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह वर्ग होगा।

उदाहरण–2. यदि किसी समांतर चतुर्भुज में दोनों विकर्ण परस्पर लंबवत् हों तो वह समचतुर्भुज होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर लंबवत है, आपको सिद्ध करना है कि ABCD समचतुर्भुज है। (चित्र–20)

अब ΔAOD और ΔCOD में

$AO = CO$ (समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।)

$\angle AOD = \angle COD$ (प्रत्येक कोण समकोण)

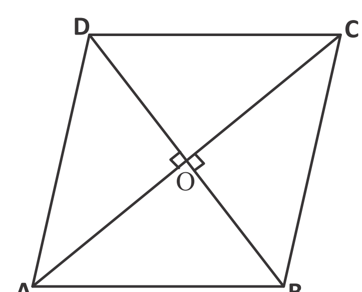
$OD = OD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\Delta AOD \cong \Delta COD$ (भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता)

फलतः $AD = CD$

$AB = CD$ तथा $AD = BC$

$\therefore AB = BC = CD = AD$



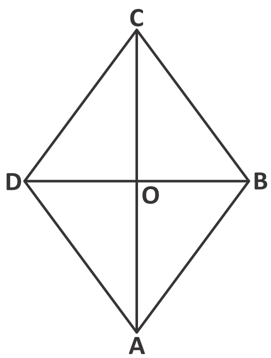
चित्र–20

स्पष्टतः समांतर चतुर्भुज ABCD एक समचतुर्भुज है। अतः कह सकते हैं कि यदि किसी समांतर चतुर्भुज में दोनों विकर्ण परस्पर लंबवत हों तो वह समचतुर्भुज होता है।

करके देखें

किसी समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबवत होते हैं।

उदाहरण–3. सिद्ध कीजिए कि एक समचुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं।



चित्र–21

उपपत्ति : समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। आइए, अब समचतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए। (चित्र–21) समचतुर्भुज ABCD में हम देख सकते हैं कि विकर्ण AC और BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं। हमें सिद्ध करना है कि AC रेखा BD पर लंब है।

Δ AOB और Δ BOC में,

AO = OC (समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।)

OB = OB (उभयनिष्ठ भुजा)

AB = BC (समचतुर्भुज की भुजाएँ)

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता से)

अतः $\angle AOB = \angle BOC$

अब चूंकि $\angle AOB + \angle BOC = 180^o$ (रैखिक युग्म कोण से)

$\therefore \angle AOB + \angle AOB = 180^o$

या $2\angle AOB = 180^o$

$$\angle AOB = \frac{180^\circ}{2}$$

$$\angle AOB = 90^o$$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^o$ इसलिए समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे पर लंब रहते हैं। यही सिद्ध करना था।

उदाहरण–4. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

उपपत्ति : चित्रानुसार ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। $\angle A, \angle B, \angle C$ और $\angle D$ के कोण समद्विभाजक P, Q, R, S पर प्रतिच्छेद करते हैं, जिससे एक चतुर्भुज PQRS बनता है। (चित्र–22)

Δ ASD में,

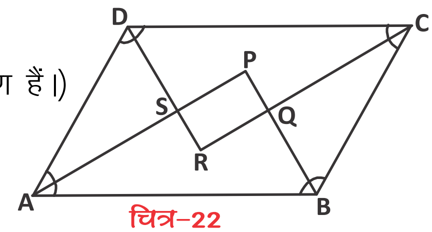
चूंकि DS कोण D को और AS कोण A को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए –

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ADC$$

$$= \frac{1}{2} (\angle A + \angle D)$$

(क्योंकि $\angle A$ और $\angle D$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोण हैं।)

$$= \frac{1}{2} \times 180^o = 90^o \quad ....(1)$$



चित्र–22

Δ ASD में,

$\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^o$ (क्यों?) ....(2)

समीकरण (1) व (2) से

$90^o + \angle DSA = 180^o$

$\angle DSA = 90^o$

अतः $\angle PSR = 90^o$ ($\angle DSA$ का शीर्षाभिमुख कोण)

इसी प्रकार $\angle BQC = \angle PQR$ होगा

अब ΔAPB में $\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^o$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

लेकिन $\angle PAB + \angle PBA = 90^o$ ($\angle A$ व $\angle B$ तिर्यक रेखा AB के एक ही ओर का अन्तःकोण का अर्द्धक है।)

$\therefore \angle APB = 90^o$ होगा।

इसी प्रकार $\angle SRQ = 90^o$ होगा। इसलिए PQRS एक ऐसा चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समकोण हैं। अतः चतुर्भुज PQRS एक आयत है।

सोचें एवं चर्चा करें

1. आयत के विकर्ण समान लंबाई के होते हैं।(संकेत – आयत एक समांतर चतुर्भुज है।)
2. वर्ग के विकर्ण समान और एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

उदाहरण–5. किसी समांतर चतुर्भुज ABCD में यदि विकर्णो का कटान बिंदु O हो और OA = 3 सेमी. और OB = 4 सेमी. हो तो रेखाखण्ड OC, OD, AC और BD की लंबाई ज्ञात कीजिए।

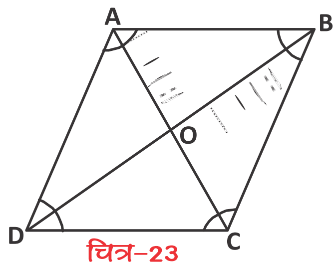
हल : ABCD एक समांतर चतुर्भुज जिसमें AC व BD का कटान बिंदु O है। (चित्र–23)

OA = 3 सेमी., OB = 4 सेमी.

चूंकि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण AC व BD एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

OC = OA

$\therefore$ OC = 3 सेमी.



चित्र–23

तथा $OD = OB$

$\therefore$ $OD = 4$ सेमी.

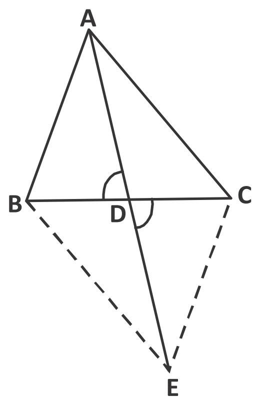
अब $AC = AO + OC = 3 + 3 = 6$ सेमी.

$BD = OB + OD = 4 + 4 = 8$ सेमी.

अतः स्पष्ट है कि $AC = 6$ सेमी., $BD = 8$ सेमी.

उदाहरण–6. त्रिभुज ABC में भुजा BC पर खींची गई माध्यिका AD है जो E तक इस प्रकार बढ़ाई गई है कि $AD = ED$। सिद्ध कीजिए कि ABEC एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : माना त्रिभुज ABC है, जिसकी माध्यिका AD है। (चित्र–24)



चित्र–24

AD को E तक इस प्रकार बढ़ाइए कि $AD = ED$

अब BE और CE को मिलाए।

ΔABD और ΔECD में

$BD = DC$ (जहाँ D, BC का मध्य बिंदु है)

$\angle ADB = \angle EDC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$AD = ED$ (दिया है।)

$\therefore$ $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता प्रमेय से)

तब $AB = CE$ (सर्वांगसम त्रिभुज की भुजाएँ)

तथा $\angle ABD = \angle ECD$

(रेखाएँ AB और CE के साथ तिर्यक रेखा BC द्वारा बने हुए एकांतर अन्तः कोण हैं।)

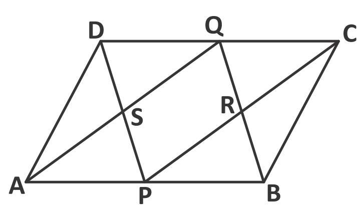
$\therefore AB \parallel CE$

इस प्रकार चतुर्भुज ABEC में

$AB \parallel CE$ और $AB = CE$

अतः ABEC एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रमेय–11.7 : **किसी चतुर्भुज में यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर हो और समांतर हो तो ऐसा चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है। सिद्ध कीजिए। (शिक्षक की मदद से करें।)**



चित्र–25

उदाहरण–7. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें P और Q क्रमशः सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्य बिंदु हैं, (चित्र–25) यदि AQ, DP को S पर प्रतिच्छेद करें और BQ, CP को R पर प्रतिच्छेद करें तो दर्शाइए कि–

(i) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) DPBQ एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) PSQR एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : (i) चतुर्भुज APCQ में

AP || QC (चूंकि AB || CD) ...(1)

$AP = \frac{1}{2} AB$

$CQ = \frac{1}{2} CD$ (दिया है)

चूंकि AB = CD

इसलिए AP = QC ....(2)

(1) व (2) से APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) इसी प्रकार चतुर्भुज DPBQ एक समांतर चतुर्भुज है, क्योंकि DQ || PB और DQ = PB है।

(iii) चतुर्भुज PSQR में

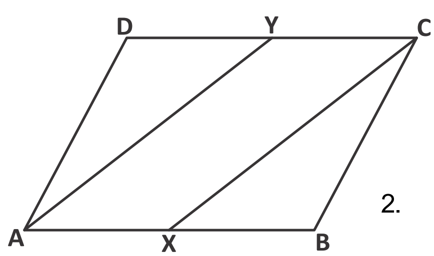
SP || QR

(जहाँ SP, DP का एक भाग है, और QR, QB का एक भाग)

इसी प्रकार SQ || PR है।

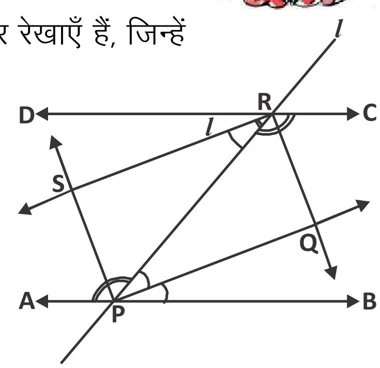
अतः PSQR एक समांतर चतुर्भुज है।

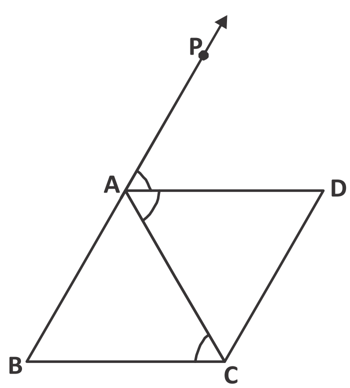
प्रश्नावली – 11.1



1. संलग्न समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB और CD के मध्य बिंदु क्रमशः x और y हैं, सिद्ध कीजिए कि AXCY समांतर चतुर्भुज है।

2. संलग्न चित्र में AB और DC दो समांतर रेखाएँ हैं, जिन्हें तिर्यक रेखा *l* रेखाखण्ड AB को P पर तथा रेखाखण्ड DC को R पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि अंतः कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

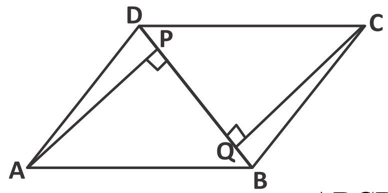




3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। AD बहिष्कोण PAC को समद्विभाजित करता है, और CD || BA है।

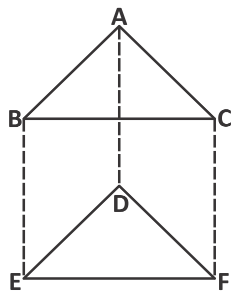
सिद्ध कीजिए कि–

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ (ii) क्या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है?



4. ABCD समांतर चतुर्भुज है। तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लंब हैं तो सिद्ध कीजिए कि–

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$ (ii) $AP = CQ$



5. ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोणों A और C को समद्विभाजित करता है। तो सिद्ध कीजिए कि

(i) ABCD एक वर्ग है।

(ii) विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है।

6. ABC और DEF इस प्रकार हैं कि AB और BC क्रमशः DE और EF के बराबर और समांतर हैं, सिद्ध कीजिए कि AC और DF बराबर और समांतर हैं।

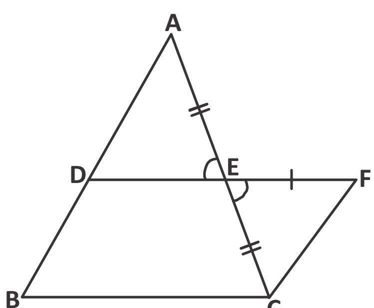
BLZC13

मध्य बिंदु प्रमेय (Mid Point Theorem)

आप त्रिभुज और चतुर्भुज के अनेक गुणों का अध्ययन कर चुके हैं। आइए त्रिभुज के एक अन्य गुण का अध्ययन करें जो त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदुओं से संबंधित है। आइए एक प्रमेय देखते हैं–

प्रमेय–11.8 : किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर और उसकी आधी होती है।

उपपत्ति : आइए इस कथन को सिद्ध करने के लिए ΔABC लें जिसमें D और E क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिंदु हैं। D और E को मिलाते हुए रेखाखण्ड DF इस प्रकार खींचें कि बिंदु E रेखाखण्ड DF का मध्य बिंदु हो तथा C को F से मिलाएँ। (चित्र–26)



चित्र–26

अब आप देख सकते हैं कि ΔADE और ΔCFE में

$AE = CE$ (भुजा AC का मध्य बिंदु E है।)

$\angle AED = \angle CEF$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$DE = EF$ (भुजा DF का मध्य बिंदु E है।)

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta CFE$ (भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता से)

$AD = CF$ तथा $\angle ADE = \angle CFE$ (सर्वांगसम त्रिभुज में)

अब $BD = AD$ तथा $AD = CF$

$\therefore BD = CF$ ....(1)

दो रेखाओं AD और CF को रेखा DF काटती है, तथा एकांतर अन्तः कोण $\angle ADE = \angle CFE$ बराबर है।

$\therefore AD \| CF$ ....(2)

(1) और (2) से चतुर्भुज DBCF में DB और FC बराबर व समांतर है। आप जानते हैं कि किसी भी चतुर्भुज में यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है। इसलिए चतुर्भुज DBCF एक समांतर चतुर्भुज है।

इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं (DF = BC) और बिंदु D, E, F एक रेखा पर हैं। तथा DE+EF = DF, DE = EF

$$\therefore BC = 2DE \quad \text{तथा} \quad DE = \frac{1}{2}BC$$

करके देखें

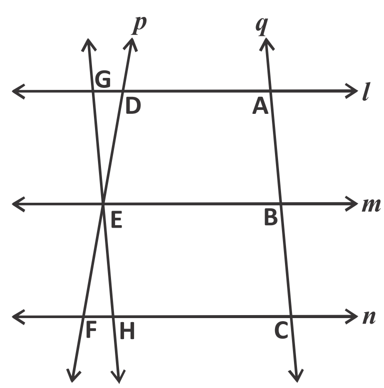
अब आप ऊपर दिए गए प्रमेय का विलोम लिखिए और उसका सत्यापन कीजिए।

प्रमेय–11.9 : **l, m और n तीन समांतर रेखाएँ हैं, जिन्हें तिर्यक रेखाएँ p और q इस प्रकार काटती हैं कि l, m और n रेखाएँ p पर समान अन्तः खण्ड DE और EF काटती हैं। दिखाइए कि l, m और n रेखाएँ q पर भी समान अन्तः खण्ड AB और BC काटती हैं।**

उपपत्ति : समांतर रेखाएँ l, m, n को तिर्यक रेखा p क्रमशः बिंदु D, E व F पर इस प्रकार काटती हैं कि DE = EF

तिर्यक रेखा q, समांतर रेखाओं l, m, n को क्रमशः बिंदु A, B व C पर काटती है तब हमें सिद्ध करना है कि AB = BC

अब इसे सिद्ध करने के लिए एक रेखा खींचेंगे जो q के समांतर हो व बिंदु E से गुजरते हुए l व n को क्रमशः G व H पर काटें।



चित्र–27

स्पष्ट है कि AG ∥ BE (क्योंकि l ∥ m, A, G व B,E उन पर स्थित बिंदु हैं)

GE ∥ AB (रचना से)

तब AG EB एक समांतर चतुर्भुज है। ....(1)

∴ AG = BE व GE = AB

इसी प्रकार BE ∥ CH (क्योंकि m ∥ n, B,E व C, H उन पर स्थित बिंदु हैं)

EH ∥ BC (रचना से)

तब BEHC एक समांतर चतुर्भुज है। ....(2)

∴ BE=CH व EH = BC

अब ΔGED व ΔHEF में

∠DGE = ∠EHF (एकांतर कोण)

DE = EF (ज्ञात है)

∠DEG = ∠HEF (शीर्षाभिमुखकोण)

∴ ΔGED ≅ ΔHEF (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता से)

अतः GE = EH

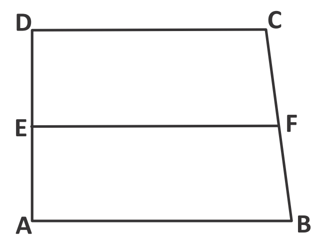
∵ GE = AB, EH = BC समीकरण (1) और (2) से

∴ AB = BC

यही सिद्ध करना था।

प्रश्नावली – 11.2

1. समलंब चतुर्भुज ABCD की भुजा AD का मध्य बिंदु E तथा AB||DC है। बिन्दु E से होकर AB के समांतर खींची गई रेखा BC को F पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि F रेखाखण्ड BC का मध्य बिंदु है।

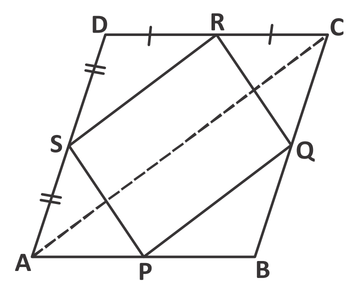


2. ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक आयत है।
3. ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्यबिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS समचतुर्भुज है।
4. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिंदु हैं AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि–

   (1) SR||AC और $SR = \frac{1}{2}AC$ है।

   (2) PQ = SR है।

   (3) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।



हमने सीखा

1. चतुर्भुज के चारों अंतःकोणों का योग 360° होता है।
2. किसी समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुज में बाँटता है।
3. चतुर्भुज निम्नलिखित प्रकार के होते हैं–

   (i) समांतर चतुर्भुज (ii) समचतुर्भुज (iii) समलंब चतुर्भुज

   (iv) आयत (v) वर्ग
4. एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होगा यदि

   (i) सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो या

(ii) सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो या

(iii) विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं या

(iv) सम्मुख भुजा का प्रत्येक युग्म बराबर और समांतर हो।

5. आयत के विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं व इसका विलोम भी।

6. वर्ग के विकर्ण एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं व इसका विलोम भी।

7. समचतुर्भुज के विकर्ण एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं व इसका विलोम भी।

8. किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर और उसकी आधी होती है।

BM982Q

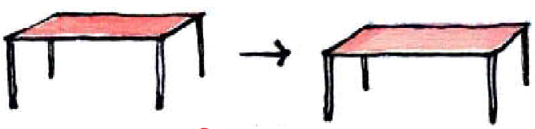
ज्यामितीय आकृतियों में परिवर्तन एवं सममिति

[Transformation and Symmetry in Geometrical Shapes]

12

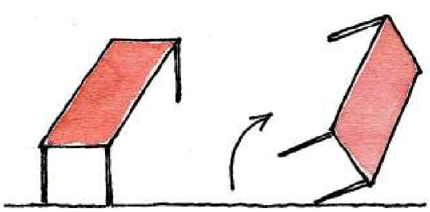
BHI44D

सलमा के दोस्त के घर जन्मदिन की पार्टी के लिए एक बड़ी टेबल की जरूरत पड़ी। सलमा ने कहा– "मेरे घर में एक बड़े आकार (साइज) की टेबल है। उसे यहाँ ला सकते हैं।"


चित्र–1(i)

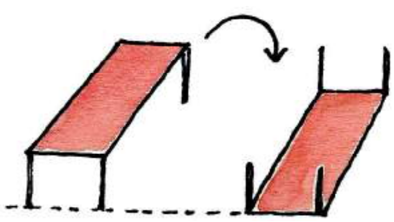
कमरे के कोने में रखी टेबल को पहले सलमा व दोस्तों ने कमरे के दरवाजे के पास खिसकाकर रखा।

अब वे सोचने लगे– "इस बड़ी टेबल को दरवाजे के बाहर कैसे निकालें?"


चित्र–1(ii)

इसके लिए उन्होंने टेबल को तिरछा किया, ताकि दरवाजे के बाहर निकाली जा सके और फिर अन्त में उन्होंने टेबल को गाड़ी पर उलटा रख दिया। इस पूरी प्रक्रिया में टेबल की स्थिति कई बार बदली।

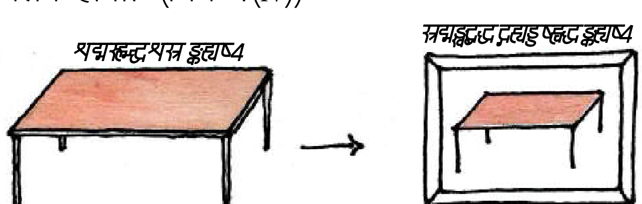
पहले चरण में टेबल को एक जगह से दूसरी जगह रखा गया। फिर दूसरे चरण में टेबल को घुमाया है और अन्त में टेबल को पलटा दिया।


चित्र–1(iii)

इस पूरी प्रक्रिया में टेबल की स्थिति तो बदली है किन्तु आकार (साइज) और आकृति में कोई अन्तर नहीं आया। यानी खिसकाने, घुमाने और पलटाने पर वस्तु के आकार (साइज) और आकृति नहीं बदलते।

अब मान लीजिए सलमा इसी टेबल का चित्र अपनी कॉपी में बनाती है–

क्या चित्र में टेबल का आकार (साइज), वास्तव में टेबल के आकार (साइज) से अलग होगा? (चित्र–1(iv))


चित्र–1(iv)

दोस्तों के साथ चर्चा करें।

इसी तरह के विभिन्न आकार जैसे– त्रिभुजाकार, वृत्ताकार, गोलाकार, आयताकार इत्यादि हम दैनिक जीवन में अपने चारों ओर देखते हैं। वास्तविक जीवन में तो सभी वस्तुएँ त्रिविमीय होती हैं परन्तु त्रिविमीय वस्तुओं को ठीक सामने, ऊपर और दायें या बायें से लम्बवत देखते हैं तो उनको द्विविमीय आकृति ही दिखाई देती है।

इसे करें

यहाँ कुछ ठोस वस्तुएँ दी गई हैं। इन वस्तुओं को ठीक ऊपर, सामने, दायें और बायें से देखें और उसके आधार पर नीचे दी गई तालिका को पूरा करें–

क्र.सं.	वस्तु का नाम	त्रिविमीय आकृति	विभिन्न आयामों से देखने पर		
			ठीक ऊपर	सामने	दायें/बायें
1.	पासा	घन	वर्ग	....	....
2.	टूथपेस्ट का डिब्बा	घनाभ	आयत	आयत	....
3.	टॉर्च का सेल	बेलन	....	....	....
4.	गेंद	गोला	....	....	....

परिवर्तन (Transformation)

अभी हमने देखा कि वस्तुएँ उलटने–पलटने पर, घुमाने पर, चित्र बनाने पर, तिरछा करने पर अलग–अलग दिखाई देती हैं। कुछ परिस्थितियों में वस्तुओं का वास्तविक आकार (साइज) बदलता है और कुछ में स्थिर रहता है। इन सभी क्रियाओं का उपयोग हम अपनी दिनचर्या की गतिविधियों में भी करते हैं।

दीप्ती ने एक उदाहरण दिया:– "मैं जब अपने कमरे का फर्नीचर व्यवस्थित करती हूँ तो सोफा, मेज, कुर्सी, पलंग को विभिन्न तरीके से घुमाकर, खिसकाकर देखती हूँ।"

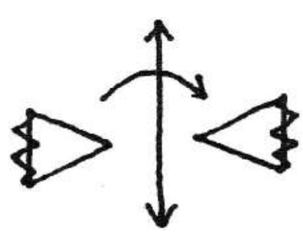
दीवार पर टंगी हुई तस्वीर की जगह बदलने के लिए तस्वीर को एक जगह से दूसरी जगह खिसकाते हैं।

अश्विन ने कहा:– ''रसोई में बर्तन का उपयोग करते समय बर्तन सीधा रखते हैं और बर्तन धोने के बाद उसे उलटा रख देते हैं।'' पलटने के पहले बर्तन की स्थिति, पलटने के बाद बर्तन की स्थिति से अलग है। दोनों स्थितियों में बर्तन अलग दिखता है।

आकांक्षा कहती है– ''जब मैं अपने स्कूल की इमारत का चित्र बनाती हूँ, तो चित्र में इमारत का ढांचा और आकृति तो वही रहती है पर साइज छोटा हो जाता है।

पासपोर्ट साइज से एक बड़ा फोटो बनवाने पर फोटो का आकार (साइज) बदलता है। क्या यह भी परिवर्तन है?

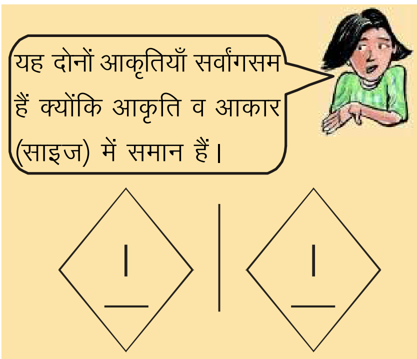
दीप्ती कुछ देर सोचकर बोली– "मैंने पाया कि कुछ परिस्थितियों में क्रिया के बाद मिली आकृति मूल आकृति, के जैसे दिखती है और सर्वांगसम भी होती है, पर कुछ अन्य परिस्थितियों में क्रिया के बाद आकार (साइज) बदल जाता है। अतः सर्वांगसमता नहीं दिखती। यानि मूल आकृति पर क्रिया करके उसकी स्थिति, आकृति या आकार (साइज) में बदलाव होने की प्रक्रिया को परिवर्तन (Transformation) कहा जाता है।"


चित्र–2(i)

चित्र–2(ii)

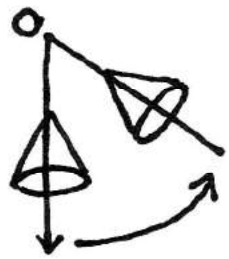
चित्र–2(i) व (ii) में हो रहे परिवर्तनों को देखिए–

चित्र–2(i) को देखिए। यदि पहली आकृति को रेखा l के आधार पर पलटाएँ तो दूसरी आकृति मिलेगी। चित्र–2(ii) में आकृति को एक स्थान से दूसरे स्थान तक खिसकाया है।

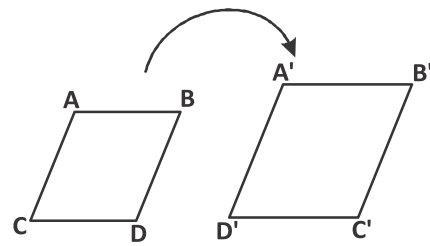


इन दोनों चित्रों में यदि मूल आकृति को दूसरी आकृति पर रखें तो क्या दोनों एक दूसरे को पूरी तरह ढंक लेगी?

हम जानते हैं कि समान आकृति और समान आकार (साइज) की आकृतियां सर्वांगसम होती हैं। यानी चित्र–2 (i) और (ii) में मूल आकृति और परिवर्तन के बाद मिली आकृति सर्वांगसम हैं।



चित्र–2(iii)



चित्र–2(iv)

अब बताइए चित्र–2 (iii) और (iv) में क्रमशः घुमाव और आकार (साइज) बढ़ाने के बाद मिल रही आकृतियां क्या अपनी मूल आकृतियों के सर्वांगसम हैं?

सोचें एवं चर्चा करें

ऐसे दो उदाहरण लिखिए जब आप अपने दैनिक जीवन में वस्तुओं के आकार (साइज), आकृति या स्थिति में परिवर्तन करते हों।

सोचिए और अपने दोस्तों के साथ चर्चा करके नीचे बनी तालिका पूरी कीजिए:–

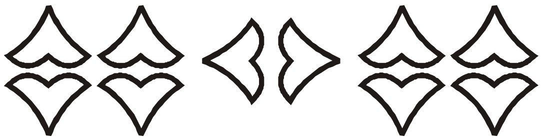
चित्र क्रं.	क्या हो रहा है	क्या दोनों आकृतियाँ आकार (साइज) में समान है?	क्या दोनों आकृतियों की आकृति समान हैं?	क्या दोनों आकृतियाँ सर्वांगसम हैं?
(i)	पलटाना	हाँ		
(ii)	खिसकाना		हाँ	
(iii)	घुमाना			हाँ
(iv)	बढ़ाना	नहीं	हाँ	नहीं

ऊपर बनी तालिका को पढ़कर आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

मारिया ने झट से कहा– ''चित्र–2 (i) पलटाना, (ii) खिसकाना और (iii) घुमाव में हो रहे परिवर्तन के दौरान दूसरी आकृति पहली आकृति के सर्वांगसम है, जबकि चित्र–2 (iv) बढ़ाव में साइज बदलने से सर्वांगसमता नहीं दिखती।''

ज्यामितीय आकृतियों के साथ खेलना

यह एक दीवार पर बने बॉर्डर का डिजाइन है, इसे आगे बढ़ाइए–



इस बॉर्डर की मूल आकृति है, जिसको घुमाकर, पलटाकर या खिसकाकर पूरी बॉर्डर बनाई जा सकती है। चलिए देखते हैं, कैसे?

मूल आकृति को पलटाने पर यह यानी बॉर्डर का पहला डिजाइन मिलता है। फिर मूल आकृति को क्रमशः खिसकाने और पलटाने पर दूसरा डिजाइन यानि मिलता है। अन्त में को घड़ी की सुई की उल्टी दिशा में 90° घुमाने पर मिलता है जिसे पुनः पलटाने पर मिलता है। अब इसी तरह बॉर्डर को और आगे बढ़ाएँ।

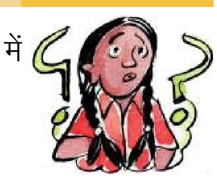
क्या आप इसी मूल आकृति से कोई दूसरा बॉर्डर डिजाइन बना सकते हैं? सोचे एवं बनाएँ।

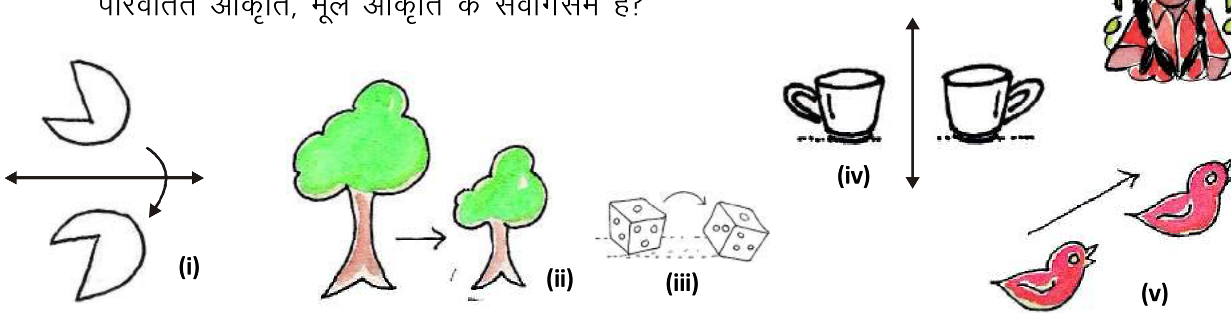
करके देखें

अपने मन से एक मूल आकृति चुनें और परिवर्तन का उपयोग करते हुए डिजाइन बनाएँ।

प्रश्नावली – 12.1

1. निम्न आकृतियों में क्या क्रिया हो रही है? देखिए और लिखिए कि कौन सी क्रिया में परिवर्तित आकृति, मूल आकृति के सर्वांगसम है?



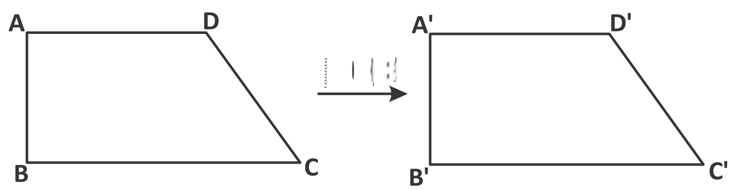


परिवर्तन के प्रकार (Types of Transformation)

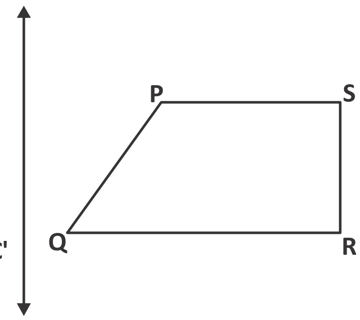
हम परिवर्तन के दो प्रकार देख सकते हैं–

1. **दृढ़ परिवर्तन (Rigid Transformation) :** ऐसी क्रियाएँ जिनमें मूल आकृति, परिवर्तित आकृति के सर्वांगसम होती है उसे दृढ़ परिवर्तन (rigid transformation) कहा जाता है।

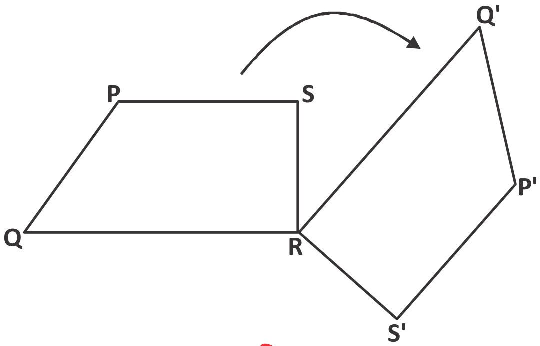
CF7UR7



चित्र–3(i)



चित्र–3(ii)



चित्र–3(iii)

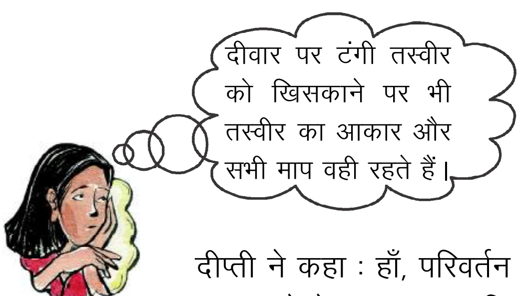
ऊपर बनी पंक्ति में चतुर्भुज ABCD को क्रमशः चित्र–3(i) खिसकाया, चित्र–3(ii) पलटाया और फिर चित्र–3(iii) घुमाया है। क्या यह सभी एक ही चतुर्भुज के चित्र है?

यहाँ एक ही आकृति पर क्रमशः तीन अलग–अलग क्रियाएँ की गई हैं। हम देख सकते हैं कि परिवर्तन की प्रत्येक क्रिया के बाद मूल आकृति की अपेक्षा परिवर्तित आकृति की स्थिति बदल जाती है।

हम जानते हैं कि दृढ़ परिवर्तन में क्रियाओं के बाद आकृतियों की आकृति और आकार (साइज) बदलते नहीं है।

(i) स्थानांतरण(Translation)

अब हम पहली क्रिया पर चर्चा करते हैं। चित्र–3(i) में हो रहे परिवर्तन को देखिए : चतुर्भुज ABCD को एक स्थान से 4 सेमी. क्षैतिज दिशा में खिसकाया है। क्या चतुर्भुज की सभी भुजाओं का माप स्थिर होगा? क्या चतुर्भुज के सभी कोणों का माप स्थिर होगा? हाँ (क्यों?)



सर्वांगसम आकृतियों से जुड़े हुए आधारों को याद कीजिए।

दीप्ती ने कहा : हाँ, परिवर्तन (i) में दोनों चतुर्भुज सर्वांगसम है, यानि संगत भुजाओं का माप और संगत कोणों का माप अपरिवर्तित रहेंगे।

$\therefore$ AB = A'B', BC = B'C', CD= C'D' और DA= D'A'

साथ ही संगत कोण भी बराबर होंगे–

$\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCD = \angle B'C'D'$, $\angle CDA = C'D'A'$

और $DAB = \angle D'A'B'$

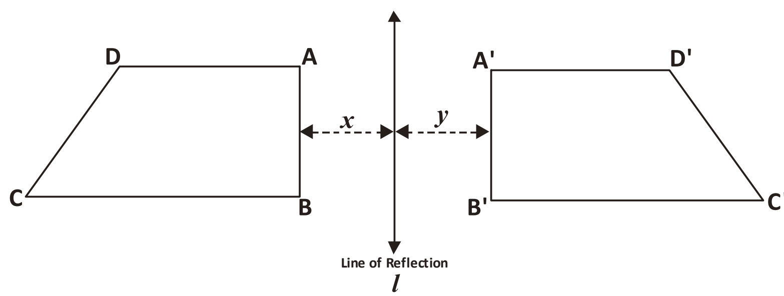
सोचें एवं चर्चा करें

क्या पलटाने और घुमाने पर भी चतुर्भुज की संगत भुजाएं और कोण बराबर होंगे? कारण सोचिए और चर्चा करके लिखिए।

चतुर्भुज की आकृति और आकार (साइज) खिसकाने की क्रिया के बाद अपरिवर्तित हैं इसलिए यह एक दृढ़ परिवर्तन है। ऐसी क्रिया जिसमें आकृति को एक स्थान से किसी निश्चित दूरी और निश्चित दिशा तय करके दूसरे स्थान तक ले जाया जाता है, को स्थानान्तरण (translation) कहते हैं।

(ii) परावर्तन(Reflection)

चित्र–4 में हो रही क्रिया को देखते हैं–



चित्र–4

यदि रेखा l पर एक दर्पण खड़ा कर दें तो चतुर्भुज ABCD का प्रतिबिंब कैसा दिखेगा?

क्या वह चतुर्भुज A'B'C'D' की तरह दिखेगा?

रवि कहता है कि यदि मैं ABCD को रेखा 'l' के आधार पर पलटाऊँ तो मुझे A'B'C'D' मिलता है।

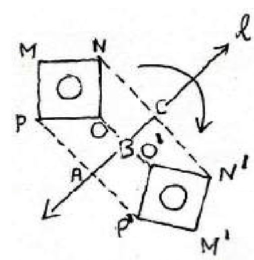
क्या आप रवि के तरीके से सहमत है? आप दूसरी आकृति बनाकर एक निश्चित रेखा के आधार पर पलटाकर देखें, कैसी आकृति मिलती है?

यह क्रिया परावर्तन (Reflection) कहलाती है और वह रेखा जिसके आधार पर परावर्तन करते हैं उसे परावर्तन की रेखा (Line of Reflection) कहते हैं जिसमें किसी आकृति को एक निश्चित रेखा के सापेक्ष पलटाकर परिवर्तित आकृति मिलती है।

यदि हम रेखा 'ℓ' से चतुर्भुज ABCD कि दूरी x माने और चतुर्भुज A'B'C'D' की दूरी को y माने, तो क्या $x = y$ मिलेगा? हाँ, वास्तविक आकृति और परावर्तन के बाद मिली आकृति रेखा 'ℓ' से समान दूरी पर होगी।

ध्यान दें कि यह परावर्तन का एक खास गुण है। चलिए, इसी बात को एक उदाहरण से समझते हैं–

यहाँ चित्र–5 में दिए गए वर्ग MNOP का परावर्तन करके वर्ग M'N'O'P' मिला है। अब आप दोनों वर्गों के संगत शीर्ष को मिलाइए। संगत शीर्ष को मिलाने वाली रेखाखण्ड PP',OO' और NN', रेखा 'ℓ' को क्रमशः बिंदु A, B और C पर काटती है।



चित्र–5

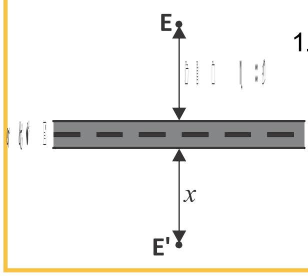
तो क्या हम कह सकते हैं कि PA=P'A?

साक्षी कहती है : "बिंदु A की शीर्ष P से जितनी दूरी होगी, शीर्ष P' बिंदु A से उतनी ही दूरी पर मिलेगा, मतलब PA=P'A।"

इसी तरह क्या OB=O'B और NC=N'C भी होगा? (क्यों)

इस चर्चा से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रेखा 'l' से दोनों वर्गों की दूरी समान है।

करके देखें

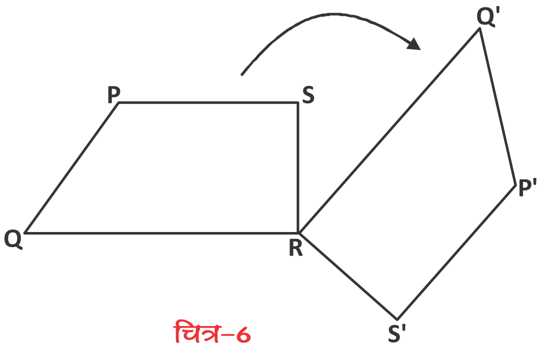


1. परावर्तन एक दृढ़ परिवर्तन है । क्यों? ग्रुप में चर्चा करके कारण सहित लिखें।

2. रोड के एक तरफ बिजली का खंभा (E) लगा है। खंभे की रोड से लम्बवत दूरी 120 मीटर है। रोड को परावर्तन की रेखा मानकर खंभे का परावर्तन (reflection) करें। अब बताइए परावर्तन के बाद रोड के दूसरी तरफ बने खंभे के प्रतिबिंब (E') की लम्बवत दूरी (x) कितनी होगी?

(iii) घुमाव (Rotation)

अब हम तीसरे तरीके के परिवर्तन पर चर्चा करते हैं।



चित्र-6

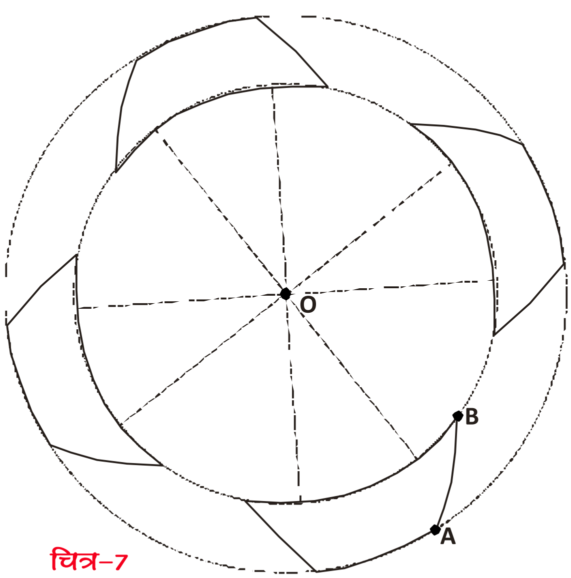
यहाँ चतुर्भुज PQRS को, बिन्दु 'R' को केन्द्र मानकर एक निश्चित माप के कोण में घड़ी की सुई की दिशा में घुमाया गया है। यह क्रिया घुमाव (rotation) है।

चित्र को देखिए और बताइए–

क्या चतुर्भुज PQRS ≅ चतुर्भुज P'Q'R'S' है?

(≅ सर्वांगसमता का चिह्न है।)

यानि घुमाव एक दृढ़ परिवर्तन है। क्यों?

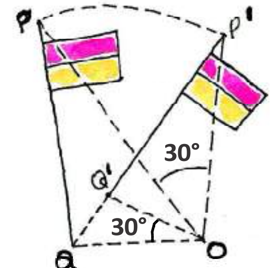


चित्र-7

आपने मेले में ऐसे झूले देखे होंगे जो वृत्ताकार घूमते हैं। इसी तरह का एक झूला चित्र में दिखाया है। यहाँ झूला बिंदु 'O' के सापेक्ष घूम रहा है। यानि बिंदु 'O' घुमाव का केंद्र है। यहाँ घुमाव का केंद्र वस्तु से बाहर स्थित है। यदि हम घूमते हुए झूले को देखें तो हम पाएंगे कि वह एक वृत्ताकार पथ में बिंदु 'O' के चारों ओर घूमता है (चित्र–7)। ध्यान से देखने पर आप पाएँगे कि झूले पर स्थित कोई भी बिंदु A या बिंदु B, भी वृत्ताकार पथ पर ही घूमेगा।

घुमाव की प्रक्रिया पर एक नये उदाहरण द्वारा चर्चा करते है–

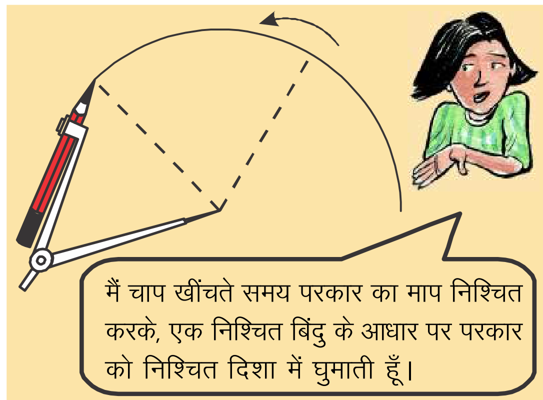
चित्र–8 को देखिए : यहाँ झण्डे PQ को बिन्दु 'O' के आधार पर 30°, घड़ी की सुई की दिशा में घुमाया है। यहाँ घुमाव का केन्द्र 'O' बाहर स्थित है।



चित्र–8

ऐसी स्थिति में आकृति को 30° घुमाने के लिए आकृति पर स्थित किसी बिंदु P अथवा Q से केंद्र O को जोड़ते हुए रेखा बनाएं। अब रेखा की लम्बाई को स्थिर रखते हुए घड़ी की दिशा में 30° का घुमाव करें। ध्यान दीजिए कि आकृति 30° घूमी है साथ ही आकृति पर स्थिति बिंदु P और बिंदु Q में 30° का घुमाव हुआ है।

घुमाव की क्रिया करने के लिए तीन बातों पर ध्यान देना होगा–

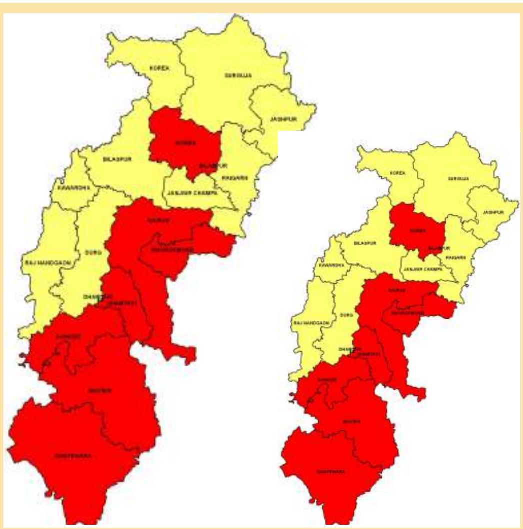


पहला– **घुमाव का केन्द्र (Centre of Rotation)** : वह बिन्दु जिसके आधार पर आकृति को घुमाएँगे। इस बिन्दु की स्थिति आकृति पर या आकृति के बाहर भी हो सकती है।

दूसरा– घुमाव की दिशा जो कि घड़ी की सुई की दिशा के समान या घड़ी की सुई की दिशा के विपरीत होगी।

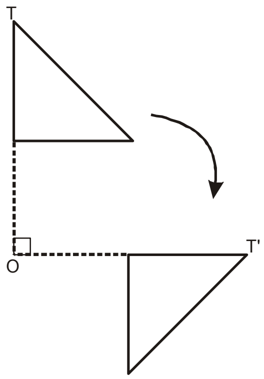
तीसरा – घुमाव के कोण का माप, घुमाव का केन्द्र और घुमाव की दिशा निर्धारित करने के साथ हमें तय करना होगा कि हम आकृति को कितने कोण से घुमाना चाहते हैं।

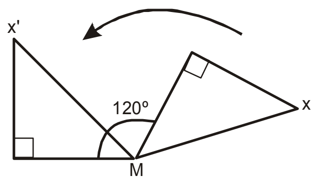
2. **अदृढ़ परिवर्तन (Non-rigid Transformation)** : जिसमें मूल आकृति, परिवर्तित आकृति के सर्वांगसम न हों, जैसे स्केलिंग, (बढ़ाना या घटाना) इस प्रकार के परिवर्तन को अदृढ परिवर्तन (non rigid transformation) कहते है।



यहाँ बने हुए छत्तीसगढ़ के दो नक्शों को देखें। दोनों नक्शों की आकृति समान है जबकि आकार (साइज) अलग–अलग है।

करके देखें

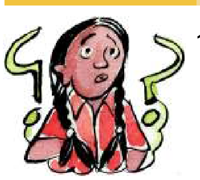




घुमाव को देखें और दोनों चित्रों में हो रहे परिवर्तन के लिए निम्न प्रश्नों के उत्तर अलग–अलग दें–

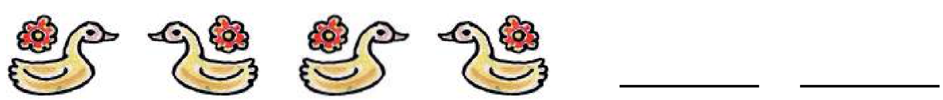
1. घुमाव के केन्द्र बिन्दु का नाम?
2. केन्द्र बिन्दु की स्थिति?
   (आकृति पर/आकृति के बाहर)
3. घुमाव की दिशा
4. घुमाव के कोण का माप?

प्रश्नावली – 12.2



1. आपको कमरे की दीवार के लिए बॉर्डर बनाना है।

   बॉर्डर कुछ इस तरह का है, इसे पूरा करें–



A B C D E F

पैटर्न के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दें।

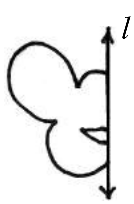
(i) यदि आपको सिर्फ आकृति A का चित्र दिया जाये तो क्या स्थानांतरण, घुमाव या परावर्तन द्वारा बॉर्डर का निर्माण कर सकते हैं?

(ii) कौन–सी आकृति पहली आकृति A से प्राप्त की जा सकती है? प्राप्त करने के लिए आप कौन–सी क्रिया का उपयोग करेंगे?

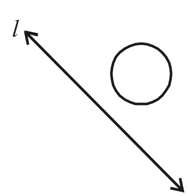
(iii) आकृति B से आकृति D प्राप्त करने के लिए कौनसी क्रिया का उपयोग करेंगे?

2. 'l' को परावर्तन की रेखा मानकर चित्र को पूरा करें–

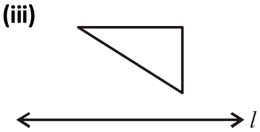
(i)



(ii)

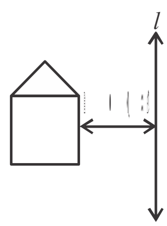


(iii)

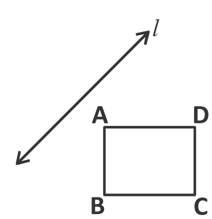


(iv)

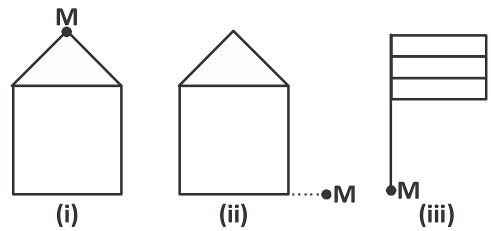
(v)



(vi)

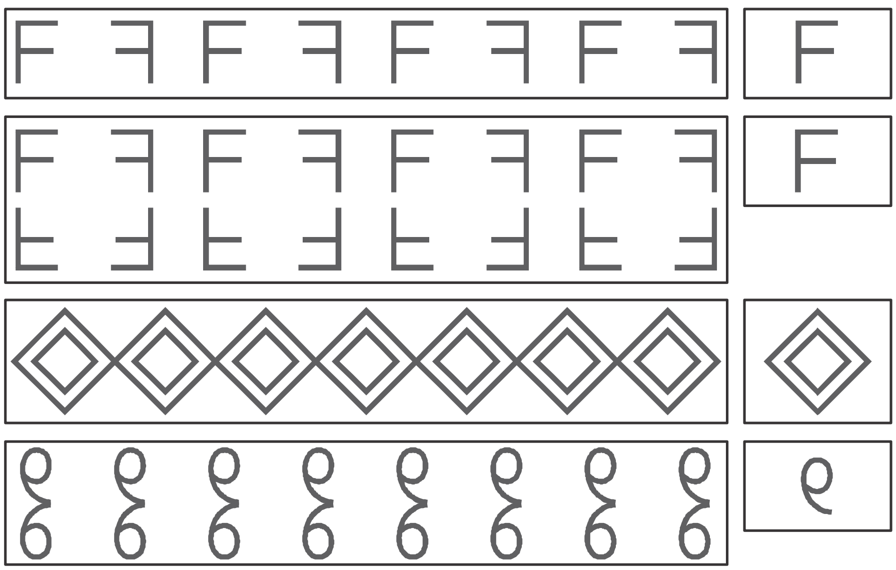


3. बिन्दु 'M' को घुमाव का केन्द्र मानकर, निम्न आकृति का निर्देशानुसार घुमाव करें–
   (i) 90° घड़ी की सुई की दिशा में
   (ii) 30° घड़ी की सुई की दिशा के विपरीत
   (iii) 60° घड़ी की सुई की दिशा में



4. अपने पसंद की एक आकृति चुनें। अब स्थानान्तरण, घुमाव और परावर्तन का उपयोग करते हुए टेबल को ढकने वाले कपड़े का बार्डर डिजाइन करें।

5. दी हुई मूल आकृति को परिवर्तित कर उसके आगे का पैटर्न बनाएं। हर पैटर्न में उपयोग होने वाले परिवर्तन की क्रियाओं का नाम लिखें।



सममिति (Symmetry)

चित्र–9

यहाँ बनी कुछ आकृतियाँ देखें यदि हम उन्हें ठीक आधे से मोड़ें तो दोनों ओर समान आकृतियाँ ही प्राप्त होंगी।

इस तरह की आकृतियों को हम क्या कहते हैं? उस रेखा को क्या कहेंगे जिस पर आकृतियाँ ठीक आधे में विभाजित होती हैं?

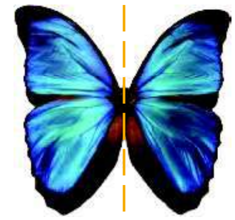
यह आकृतियाँ सममिति आकृतियाँ कहलाती है और जो रेखा आकृतियों को ठीक दो हिस्सों में विभाजित करें उसे सममित रेखा (Line of Symmetry) कहते हैं।

(i) रैखिक सममिति (Linear Symmetry)

हम आस–पास की कुछ वस्तुओं में, इमारतों में, ज्यामितीय आकृतियों में, प्राकृतिक संरचनाओं में सममिति को पहचान सकते हैं।

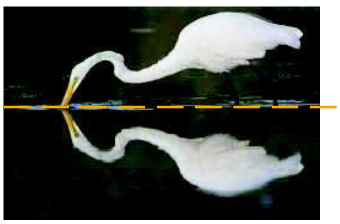
BYHCJX

चित्र–10 को देखो। इस चित्र पर एक ऐसी रेखा खींचें जो इसे दो सममित हिस्सों में बाँटती है। सममित रेखा के दोनों तरफ की आकृतियाँ समान है।



चित्र–10

आप ऐसे कुछ और चित्र सोचिए।

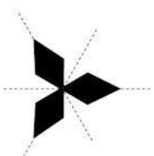


चित्र–11

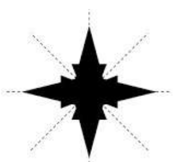
चित्र–11 देखिए। यहाँ सममित रेखा क्षैतिज है जिसके दोनों ओर पक्षी का चित्र समान है। इसे रैखिक सममिति कहते हैं।

क्या इन चित्रों में कोई और भी रेखा खींची जा सकती है, जो इन्हें सममित हिस्सों में बाँटे?

(ii) घूर्णन सममिति (Rotational Symmetry)



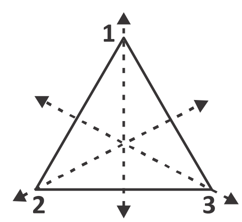
चित्र–12(i)

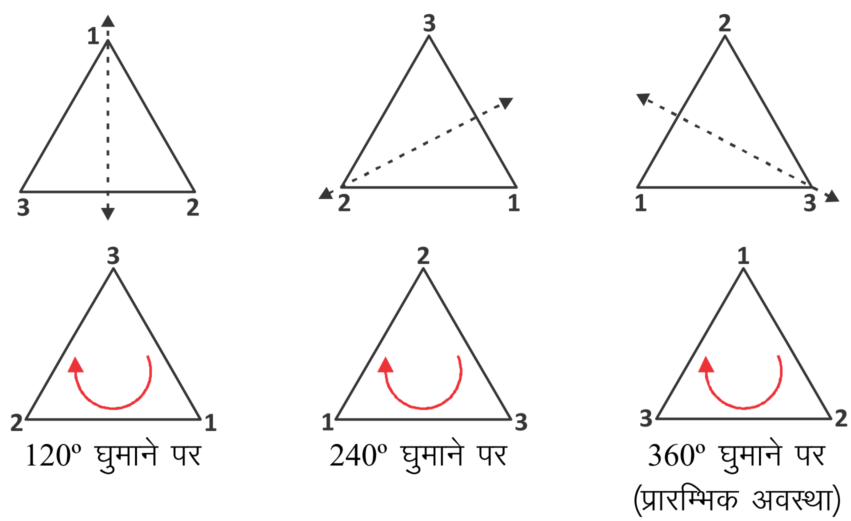


चित्र–12(ii)

चित्र–12(i) व (ii) को देखें। इनमें कितनी–कितनी सममित रेखाएँ हैं? आप पाएंगे कि एक बार के पूरे घुमाव में यह कम से कम एक बार अवश्य अपनी प्रारम्भिक स्थिति की तरह दिखेगा।

समबाहु त्रिभुज की चक्रीय सममिति पर चर्चा करते हैं। समबाहु त्रिभुज में सममित रेखाओं के तीन अक्ष होते हैं। जब हम किसी समबाहु त्रिभुज को घुमाते हैं तो वह तीन बार अपनी प्रारंभिक स्थिति की तरह दिखाई देता है। इस संख्या को **'घुमाव का क्रम'** (order of rotation) के नाम से जाना जाता है। इसी तरह चित्र–12 में बनी दोनों आकृतियों को घुमाएँ और इनके घुमाव का क्रम पता करें।





चित्र–13

अब तक की चर्चा के आधार पर तालिका पूर्ण करें–

आकृति	कितनी सममित रेखाएँ हैं?	एक घुमाव में आकृति कितनी बार पहले जैसी दिखी?	घुमाव का क्रम
सम पंचभुज			
समबाहु त्रिभुज	3	3	3
आयत			
वर्ग			
अंग्रेजी अक्षर U			
अंग्रेजी अक्षर M			

सोचें एवं चर्चा करें

समबहुभुज में कितनी सममित रेखाएँ होती हैं? क्या समबहुभुज की भुजाओं और घुमावों के क्रम में कोई संबंध होता है? वह क्या है?

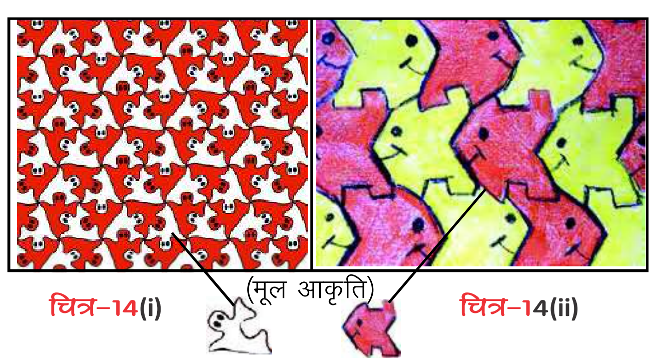
करके देखें

1. निम्नलिखित अंग्रेजी अक्षरों में कौन–कौनसी सममिति है? पहचानिए और लिखिए–

I F N H G A O

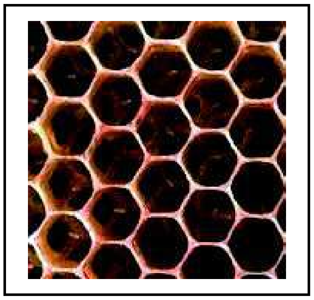
2. पहचानिए और बताइए कि निम्न चित्रों में कौन–कौन सी सममितता है?

सममितता और परिवर्तन के कुछ अनुप्रयोग



चित्र–14(i) चित्र–14(ii)

आस–पास फर्श, दीवार, वाल पेपर, साड़ी, कपड़े आदि पर कई तरह के पैटर्न व डिजाइन देखे जा सकते हैं। इसमें कई तरह की सममितता होती है और यह कई बार एक या दो मूल आकृति (Motif) के परिवर्तन स्वरूपों से बनते हैं। जैसे चित्र–14(i) में आप



चित्र–15(i)

चित्र–15(ii)

मूल आकृति को जगह–जगह पहचान सकते हैं। इसी तरह 14(ii) में भी।

अब चित्र–15(i) और चित्र–15(ii) को ध्यान से देखें एवं मूल आकृति की पहचान करें और बनाएँ।

प्रश्नावली – 12.3

1. कुछ वस्तुओं के चित्र बनाइए जिनमें–
   (i) रैखिक सममिति पाई जाती है।
   (ii) घूर्णन सममिति पाई जाती हो।
2. आप अपने पसंद की एक आकृति लें व उसे मूल आकृति मानकर एक पैटर्न डिजाइन करें।
3. अंग्रेजी के अक्षर लिखे जिनमें :
   (i) दो सममित रेखाएँ है।
   (ii) सममित रेखाएँ नहीं है।
   (iii) घूर्णन सममिति है।

BZ68LK

हमने सीखा

1. यदि समान आकृतियों को पलटाया, घुमाया या खिसकाया जाए तो उनकी सर्वांगसमता बनी रहती है।
2. परिवर्तन जिसमें क्रिया के बाद मिली आकृति, मूल आकृति के सर्वांगसम होती है, उसे दृढ़ परिवर्तन कहते हैं।
3. दृढ़ परिवर्तन में तीन क्रियाएँ की जाती है– स्थानांतरण, परावर्तन और घुमाव।
4. स्थानांतरण के लिए दिशा और दूरी तय करना आवश्यक है।
5. घुमाव करने के लिए घुमाव का केंद्र, घुमाव का कोण और घुमाव की दिशा पता होना चाहिए।
6. परावर्तन की रेखा से मूल आकृति और परावर्तित आकृति समान दूरी पर होती हैं।
7. दो तरह की सममिति के बारे में पढ़ा– रैखिक सममिति, घूर्णन सममिति।
8. किसी मूल आकृति को समतल पर बिना खाली स्थान छोड़े या बिना एक दूसरे के ऊपर रखे, दोहराते हुए व्यवस्थित करते हुए पैटर्न बनाया जा सकता है।

ज्यामितीय रचनाएँ

[GEOMETRICAL CONSTRUCTIONS]

BZF4N8

13

हमने स्केल से रेखाखंड, परकार व चाँदे से कोण बनाना सीखा है। अब हम कुछ बंद आकृतियाँ बनाना सीखेंगे।

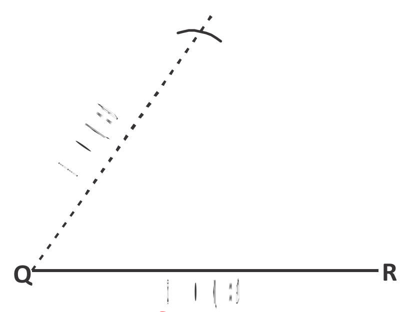
आइए रचना करें

यदि तीन रेखाखण्डों की लम्बाई दी गई हो और त्रिभुज की रचना करनी हो तो क्या यह हमेशा किया जा सकता है? आपस में चर्चा करें।

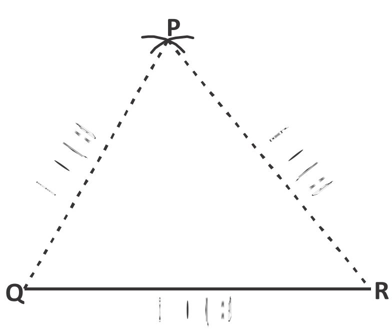
यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ 5 सेमी., 6 सेमी., 7 सेमी. हों तो त्रिभुज की रचना कैसे होगी? आइए, करके देखें–

चित्र–1(i)

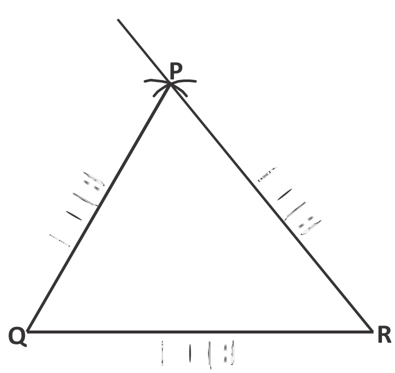
1. 6 सेमी. का एक रेखाखंड QR बनाएं। (चित्र–1(i))
2. परकार की भुजाओं को 5 सेमी. फैलाकर नोक को Q पर रखें। QR के एक ओर एक चाप काटें। (चित्र–1(ii))
3. परकार की भुजाओं को 7 सेमी. फैलाकर नोक को R पर रखें। एक और चाप काटें जो पहले चाप को काटता हो (चित्र–1(iii))
4. कटान बिंदु को 'P' नाम दें।
5. P को R और Qसे जोड़ें।
6. इस प्रकार एक त्रिभुज PQR की रचना हुई। (चित्र–1(iv))



चित्र–1(ii)

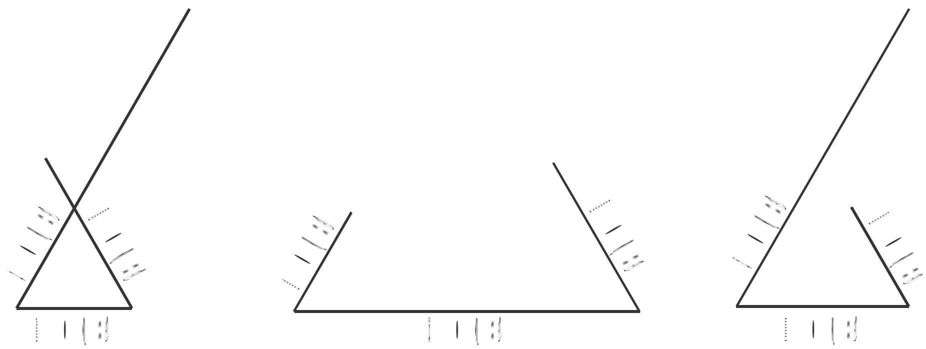


चित्र–1(iii)



चित्र–1(iv)

जयंत ने 2 सेमी., 3 सेमी. व 6 सेमी. की भुजा लेकर त्रिभुज बनाने की कोशिश की



क्या इस माप से त्रिभुज बन पा रहे हैं? क्यों?

करके देखें

क्या दी गई मापों से त्रिभुज बनाना संभव है?

(i)	(2 सेमी., 3 सेमी., 4 सेमी.)	(ii)	(3 सेमी., 4 सेमी., 5 सेमी.)
(iii)	(2 सेमी., 4 सेमी., 8सेमी.)	(iv)	(4 सेमी., 5 सेमी., 6 सेमी.)

दी गई मापों से त्रिभुज तभी बन पाएँगे जब दो छोटी भुजाओं की मापों का योग सबसे बड़ी भुजा की माप से अधिक हो।

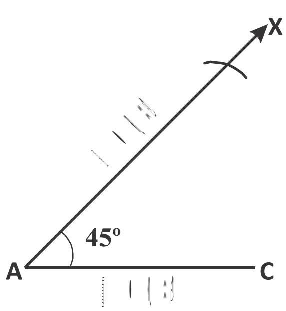
कुछ और रचनाएँ

<u>रचना (निर्मेय–1)</u> : एक त्रिभुज की रचना करना, जब दो भुजाओं की माप और उनके बीच के कोण की माप दी गई हो।

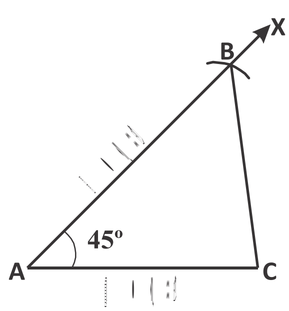
उदाहरण–1. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें AB=5 सेमी., AC = 4 सेमी., $\angle A = 45°$ है।

रचना के पद

1. 4 सेमी. माप का रेखाखंड AC खींचिए।



चित्र–2(i)



चित्र–2(ii)

2. बिंदु A पर किरण AX खींचिए जो AC के साथ 45° का कोण बनाए।
3. A को केंद्र मानकर 5 सेमी. त्रिज्या का एक चाप खींचिए, जो AX को बिंदु B पर काटता हो। (चित्र–2(i))
4. बिंदु B और C को मिलाते हुए रेखाखंड BC खींचिए। इस प्रकार ΔABC प्राप्त होता है। (चित्र–2(ii))

यह भी करके देखें

इस त्रिभुज में AB = 5 सेमी., AC = 4 सेमी., और $\angle A = 45°$ हैं। हम चाहें तो पहले AB = 5 सेमी. का रेखाखंड खींच कर उस पर AB के साथ 45° का कोण बनाती हुई किरण AY खींच सकते हैं।

अब A से AC के लिए 4 सेमी. का चाप काटें।

क्या यह त्रिभुज ACB पहले बने त्रिभुज जैसा है?

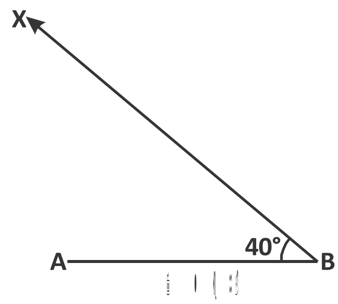
इसे भी करें

नीचे दिए गए मापों से त्रिभुज की रचना करें–

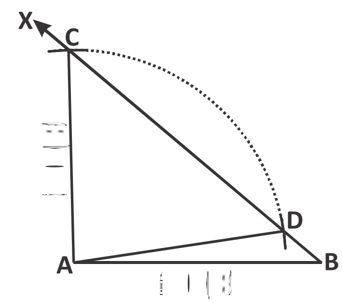
AB = 7 सेमी., AC = 6 सेमी., $\angle B = 40°$

रचना के पद

1. सर्वप्रथम 7 सेमी. लंबाई का रेखाखंड AB खींचिए।
2. बिंदु B पर किरण BX खींचिए, जो AB के साथ 40° का कोण बनाए। (चित्र–3(i))
3. A को केंद्र मानकर 6 सेमी. त्रिज्या वाला एक चाप खींचिए। यह किरण BX को दो बिंदुओं, क्रमशः C और D पर काटता है। (चित्र–3(ii))



चित्र–3(i)



चित्र–3(ii)

आप यह देख सकते हैं कि दी गई शर्तों के लिए किरण BX पर दो बिंदु C और D प्राप्त होते हैं। इसलिए यह कह सकते हैं कि दी गई मापों से त्रिभुज के दो बिंदु A और B तो अद्वितीय रूप से निर्धारित किए जा सकते हैं, परंतु तीसरे बिंदु को हम C अथवा D दोनों मान सकते हैं। चूंकि तीसरा बिंदु C या D कोई भी हो सकता है अतः एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना करने के लिए दी गई माप पर्याप्त नहीं है।

करके देखें

दी गई मापों से त्रिभुज की रचना कर अपने साथियों के साथ चर्चा करें:–

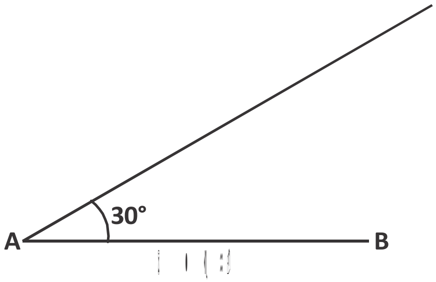
(i) AB = 7 सेमी., AC = 6 सेमी., $\angle C = 40°$

(ii) AB = 3 सेमी., BC = 4 सेमी., $\angle A = 60°$

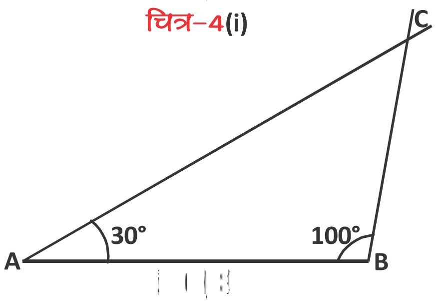
(iii) PR = 6 सेमी., PQ = 5 सेमी., $\angle Q = 75°$

(iv) AB = 4.5 सेमी., AC = 6.3 सेमी., $\angle A = 55°$

आपने देखा कि एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है, जब उसकी दो भुजाओं की माप और उनके बीच के कोण की माप दी गई हो?



चित्र–4(i)



चित्र–4(ii)

रचना (निर्मेय–2) : त्रिभुज की रचना करना, जब एक भुजा और उसके सिरों के दो कोणों की माप दी गई हो–

उदाहरण–2. किसी त्रिभुज ABC में AB = 6 सेमी. ; $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 100°$ हों तो त्रिभुज की रचना कीजिए।

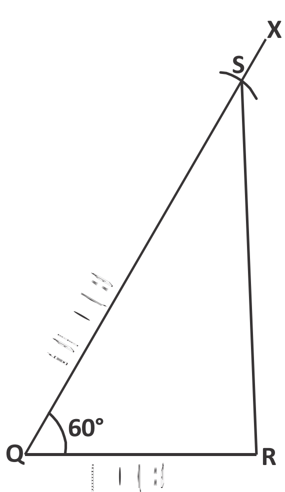
रचना के पद

1. AB = 6 सेमी. का रेखाखंड खींचिए।
2. AB रेखाखंड के बिंदु A पर चाँदे से 30° का कोण बनाइए। (चित्र–4(i))
3. बिंदु B पर चाँदे से 100° का कोण बनाइए।
4. दोनों कोणों की भुजाओं को बढ़ाने पर जो कटान बिंदु मिला उसे C नाम दीजिए।
5. इस प्रकार त्रिभुज ABC प्राप्त हुआ। (चित्र–4(ii))

करके देखें

1. दी गई मापों से त्रिभुज की रचना कर अपने साथियों से चर्चा करें कि ये किस प्रकार के त्रिभुज हैं–
   (i) ΔPQR में PQ = 5 सेमी., $\angle P = 90°$, $\angle Q = 30°$
   (ii) ΔMNP में MN = 6 सेमी., $\angle M = 90°$, $\angle N = 30°$
2. रचना करके देखें कि क्या दी गई मापों से त्रिभुज बनाना संभव है?
   (i) PQ = 3.5 सेमी., ; $\angle Q = 45°$; $\angle R = 50°$
   (ii) XY = 7.5 सेमी., ; $\angle Z = 70°$; $\angle Y = 40°$

विशेष प्रकार के त्रिभुज (Special Type of Triangles)



चित्र–5(i)

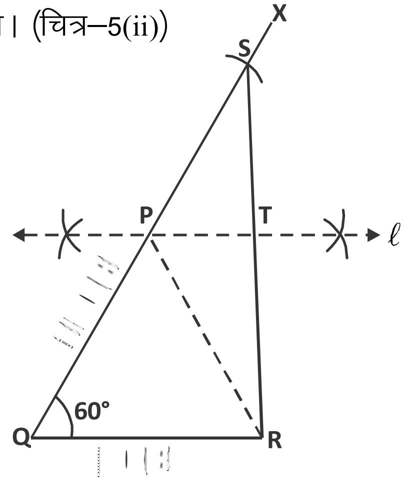
रचना (निर्मेय–3) : ऐसे त्रिभुज की रचना करना जिसका आधार, आधार का एक कोण और शेष दो भुजाओं का योग दिया है।

उदाहरण–3. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें आधार QR = 4 सेमी. PQ + PR = 7.5 सेमी. एवं $\angle PQR = 60°$

रचना के पद

1. एक रेखाखंड QR = 4 सेमी. खींचिए और बिंदु Q पर $\angle XQR = 60°$ बनाइए।
2. बिंदु Q को केंद्र मानते हुए 7.5 सेमी. (QP + PR = 7.5 सेमी.) त्रिज्या लेकर किरण QX पर एक चाप खींचिए जो उसे बिंदु S पर काटता हो, RS को मिलाइए। (चित्र–5(i))

3. परकार की सहायता से RS का लंब समद्विभाजक ℓ खींचिए जो QS को बिंदु P पर तथा SR को T पर काटता हो। (चित्र–5(ii))

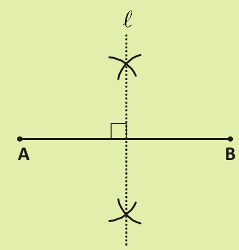


चित्र–5(ii)

लंब समद्विभाजक (Perpendicular bisector) : अर्थात् वह रेखा जो किसी दिए गए रेखाखंड पर समकोण बनाते हुए उसे दो बराबर भागों में बाँटती है।

लंब समद्विभाजक की रचना :

1. परकार की भुजाओं में रेखाखंड की लंबाई के आधे से अधिक का अंतर लीजिए।
2. अब परकार की नोंक को बिंदु A पर रखकर रेखाखंड के दोनों और चाप काटें, फिर बिंदु B पर परकार रखकर यही प्रक्रिया दोहराएँ।
3. चापों की कटान बिंदुओं को स्केल की सहायता से मिलाएँ।



यह रेखा 'ℓ', रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक है।

4. PR को मिलाइए। (चित्र–5(iii))

$\Delta PTS \cong \Delta PTR$ बनेंगे। (क्यों?)

$\therefore$ PS = PR

QP + PS = QP + PR (=7.5 सेमी.)

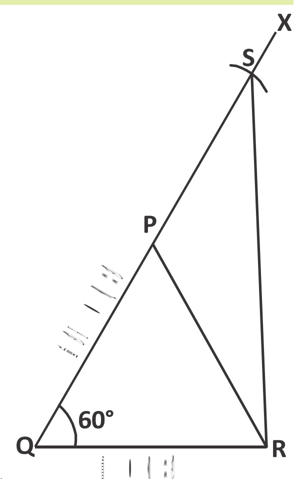
अतः ΔPQR अभीष्ट त्रिभुज है।

पद 3 की रचना ऐसी ही क्यों?

भुजा QS पर एक बिंदु P इस प्रकार चाहिए कि PS = PR हो।

ऐसा करने का एक तरीका यह हो सकता है कि इन दोनों रेखाखंडों को दो सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाओं के रूप में देखा जाए।

SR का लंब समद्विभाजक दो ऐसे बिंदु P और T देता है जो रेखाखंड PT के द्वारा ΔPSR को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटता है।



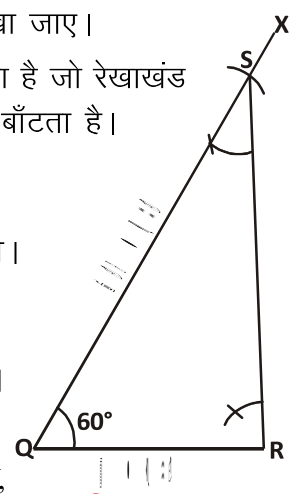
चित्र–5(iii)

वैकल्पिक विधि

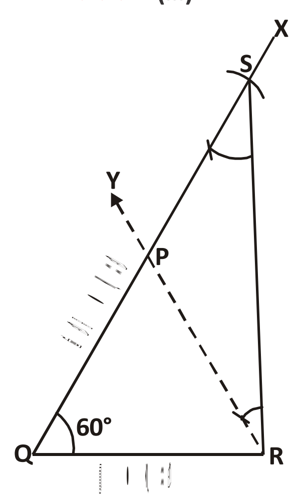
इसी त्रिभुज PQR की रचना अब हम अन्य प्रकार से करेंगे।

रचना के पद

1. उपर्युक्त चरण 1 व 2 की पुनरावृत्ति कीजिए। (चित्र–6(i) के अनुसार)
2. $\angle$QSR के बराबर कोण $\angle$SRY बनाइए। किरण RY, QX को बिंदु P पर काटेगी। (चित्र–6(ii))



चित्र–6(i)



चित्र–6(ii)

PS = PR (क्यों?)

QP + PS = QP + PR = 7.5 सेमी.

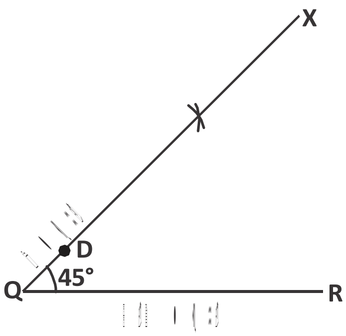
∴ PQR अभीष्ट त्रिभुज है।

समान कोणों के सामने की भुजाएँ समान होती हैं।

करके देखें

त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 6 सेमी., ∠B = 60° एवं AB+AC = 11 सेमी.

<u>रचना (निर्मेय–4)</u> : ऐसे त्रिभुज की रचना करना जिसका आधार, आधार का एक कोण और शेष दो भुजाओं का अंतर दिया है।



चित्र–7(i)

उदाहरण–4. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें आधार QR = 5.2 सेमी. ∠PQR = 45° और PQ – PR = 1 सेमी. है।

रचना के पद

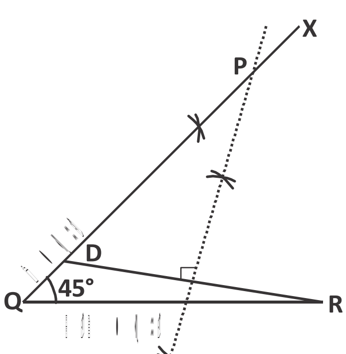
1. रेखाखंड QR = 5.2 सेमी. खींचिए।
2. बिंदु Q पर $\angle XQR = 45°$ बनाइए। QX पर एक बिंदु D इस प्रकार लीजिए कि QD = 1 हो। (PQ – PR = 1 सेमी.) (चित्र–7(i))

अब आगे क्या करें?

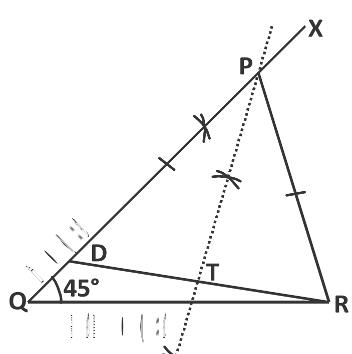
मैं बताती हूँ!

हमें QX पर एक ऐसा बिंदु P चाहिए जिसमें PD = PR हो जाए (तभी PQ और PR का अंतर 1 सेमी. होगा।)

PD = PR करने के लिए इन्हें दो सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाओं के रूप में देखें। DR का लंब समद्विभाजक खींचने से हमें दो ऐसे सर्वांगसम त्रिभुज PDT और PRT मिलते हैं।



चित्र–7(ii)



चित्र–7(iii)

3. बिंदु R को D से मिलाइए एवं भुजा RD का लंब समद्विभाजक खींचिए जो किरण QX को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करता है। (चित्र–7(ii))

4. बिंदु P को R से मिलाइए। इस प्रकार अभीष्ट ΔPQR की रचना हुई। (चित्र–7(iii))

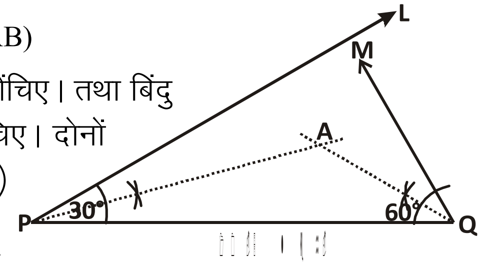
<u>रचना (निर्मेय–5)</u> : एक ऐसे त्रिभुज की रचना करना जिसका परिमाप तथा दोनों आधार कोण दिए हैं।

उदाहरण–5. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = 30°, \angle C = 60°$ एवं AB + BC + CA = 10.5 सेमी. हैं।

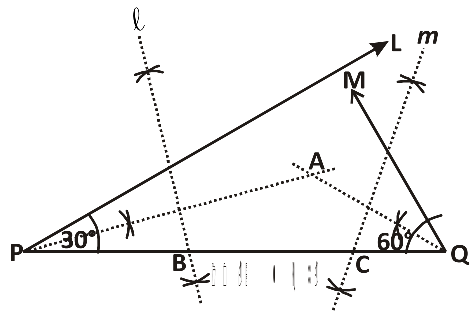
रचना के पद

1. एक रेखाखंड PQ = 10.5 सेमी. खींचिए। (PQ = BC + CA + AB)

2. बिंदु P पर दिए गए $\angle B$ का मान 30° बनाते हुए उसका अर्द्धक खींचिए। तथा बिंदु Q पर दिए गए $\angle C$ का मान 60° बनाते हुए उसका अर्द्धक खींचिए। दोनों कोणों के अर्द्धक एक दूसरे को बिंदु A पर काटेंगे। (चित्र–8(i))

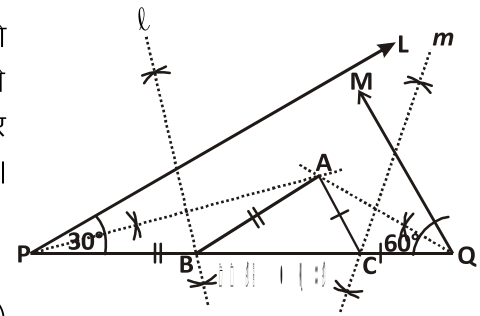


चित्र–8(i)



चित्र–8(ii)

3. अब PA एवं QA के लंब समद्विभाजक ℓ और m खींचिए। जो रेखाखंड PQ को बिंदु B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं। (चित्र–8(ii))



चित्र–8(iii)

4. बिन्दु B को A से, तथा बिंदु C को A से मिलाइए। (चित्र–8(iii)) इस प्रकार ΔABC की रचना हुई।

करके देखें

आपके द्वारा बनाए गए त्रिभुज की तीनों भुजाओं को नापिए और उनका योग कीजिए। क्या AB + BC + CA = 10.5 सेमी. प्राप्त हुआ।

यदि त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाए तो इस प्रकार निर्मित बहिष्कोण सुदूर अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।

प्रश्नावली–13.1

1. नीचे कुछ त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों की माप दी गई हैं इनसे त्रिभुजों की रचना कीजिए।

क्र.	त्रिभुज	दी गई मापें		
(i)	ΔDEF	DE = 4.5 cm.	EF = 5.5 cm.	DF = 4 cm.
(ii)	ΔPQR	$\angle Q = 30°$	$\angle R = 30°$	QR = 4.7 cm.
(ii)	ΔABC	$\angle B = 60°$	BC = 5 cm.	AB + AC = 8 cm

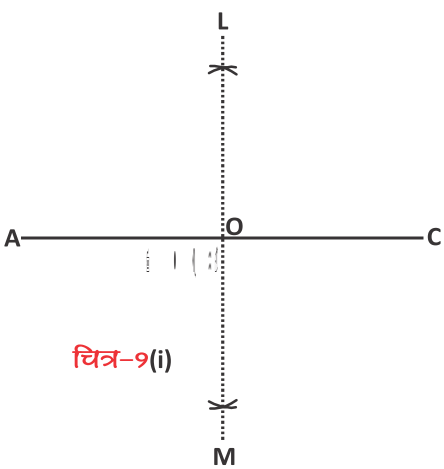
2. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 4 सेमी. एवं कर्ण और दूसरी भुजा का योग 8 सेमी. हो।
3. एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें QR = 7 cm., $\angle Q = 45°$ और PQ – PR = 2 सेमी. हो।
4. एक त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए जिसमें $\angle XYZ = 50°$, YZ = 5 cm. और XZ – XY = 2.5 cm. हो।
5. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB + BC + CA = 13 cm. एवं $\angle B = 45°$, $\angle C = 70°$ हो।

BZNZPV

चतुर्भुज की रचना (Construction of Quadrilateral)

अब तक आपने चतुर्भुजों की रचना अलग–अलग स्थितियों में की है। आइए, अब हम कुछ नई परिस्थितियों में चतुर्भुज की रचना करेंगे।

रचना (निर्मेय–6) : समांतर चतुर्भुज की रचना करना जब उसके दो विकर्ण और उनके बीच के कोण दिए हुए हों।

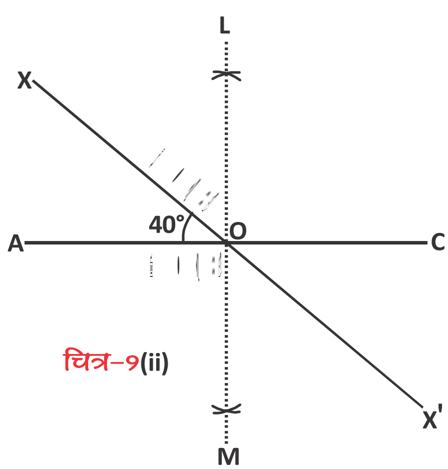


चित्र–9(i)

उदाहरण–6. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AC = 7cm. और BD=6 cm. और इनके बीच का एक कोण 40° हो।

रचना के पद

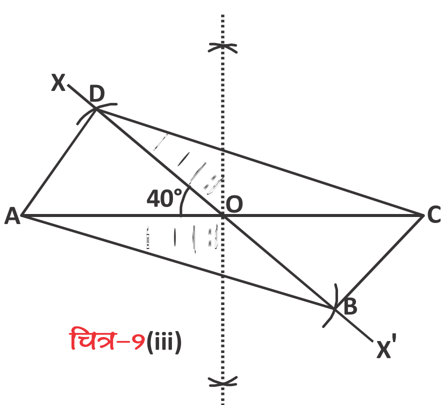
1. रेखाखंड AC = 7 सेमी. खींचिए।
2. रेखाखंड AC का लंब समद्विभाजक LM खींचिए जो AC को O पर प्रतिच्छेद करे। (चित्र–9(i))
3. किरण OX खींचिए जिसमें $\angle AOX = 40°$ का हो। फिर किरण OX को बढ़ाकर रेखा XOX' खींचिए। (चित्र–9(ii))



चित्र–9(ii)

4. बिंदु O को केंद्र मानकर 3 सेमी. (दूसरे विकर्ण BD = 6 सेमी. की लंबाई का आधा) का चाप लेकर XOX' पर दो चाप B व D खींचिए। B व D दोनों को A व C से मिलाइए। (चित्र–9(iii))

इस प्रकार अभीष्ट समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना हुई।



चित्र–9(iii)

ध्यान रहे– समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। अतः हमने AC का लंब समद्विभाजक खींचा जिसमें AC का मध्य बिंदु O प्राप्त हुआ एवं बिंदु O पर $\angle AOX = 40°$ पर $OB = OD = 3$ सेमी. बनाया।

करके देखें

क्या इसी प्रकार आप आयत एवं वर्ग की रचना भी कर सकते हैं।

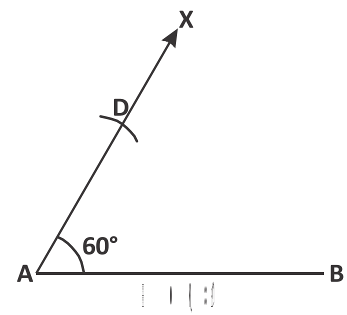
अपने साथियों से चर्चा कीजिए और उन पर आधारित दो सवाल बनाकर रचना कीजिए?

<u>रचना (निर्मेय–7)</u> : समलंब चतुर्भुज की रचना करना जब दो आसन्न भुजाएँ एवं इनके बीच का कोण तथा समांतर भुजाओं का पता हो।

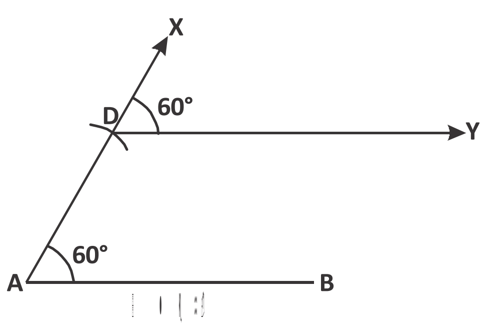
उदाहरण–7. समलंब चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए यदि AB = 5 सेमी., BC = 2.8 सेमी. AD = 3 सेमी., A = 60° और AB || CD

रचना के पद

1. AB = 5 सेमी. का रेखाखंड खींचिए।
2. बिंदु A पर 60° का कोण बनाते हुए AX रेखा खींचिए।
3. AD = 3 सेमी. का चाप AX पर काटिए जिससे हमें D बिंदु प्राप्त होगा। (चित्र–10(i))

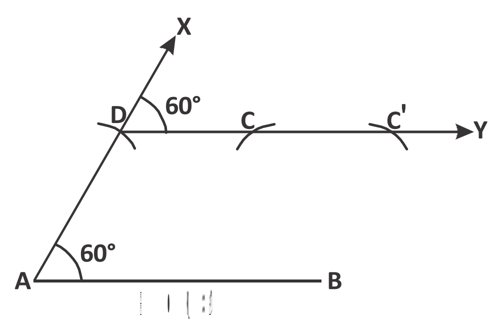


चित्र–10(i)



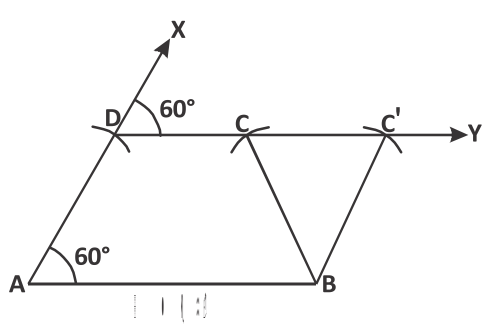
चित्र–10(ii)

4. बिंदु D पर 60° को कोण बनाते हुए DY किरण खींचिए। (चित्र–10(ii))



चित्र–10(iii)

5. बिंदु B से किरण DY पर BC = 2.8 सेमी. का चाप काटिए। जो DY को C व C' पर काटता है। (चित्र–10(iii))



चित्र–10(iv)

6. B से C व C' को मिलाइए। (चित्र–10(iv)) इस प्रकार अभीष्ट समलंब चतुर्भुज ABCD एवं समांतर चतुर्भुज ABC'D प्राप्त होगा।

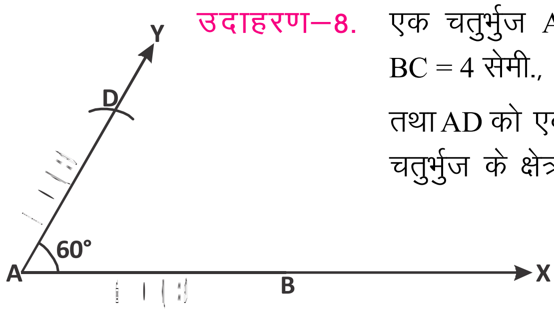
प्रश्नावली – 13.2

1. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, यदि AD = 4 सेमी., AB =6 सेमी. और $\angle A = 65°$ हो।
2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4 सेमी., AD = 3 सेमी. और विकर्ण AC = 4.5 सेमी. हो।
3. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 3 सेमी. एवं विकर्ण 5 सेमी. हो।
4. एक सम चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसके दो विकर्ण क्रमशः 4.5 सेमी और 6 सेमी. हैं।
5. एक समलंब चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB || CD, AB = 5 सेमी. BC = 3 सेमी., AD = 3.5 सेमी. और समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 2.5 सेमी. हो।

<u>रचना (निर्मेय–8)</u> : दिए गए चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर त्रिभुज की रचना करना।

उदाहरण–8. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 7 सेमी., CD = 6 सेमी., BC = 4 सेमी., AD = 5 सेमी. और $\angle BAD = 60°$ हो।

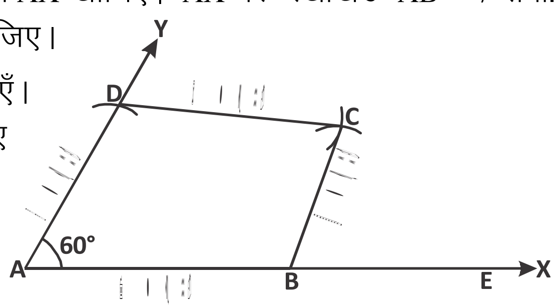
तथा AD को एक भुजा मानकर एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका क्षेत्रफल, चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर हो।



चित्र–11(i)

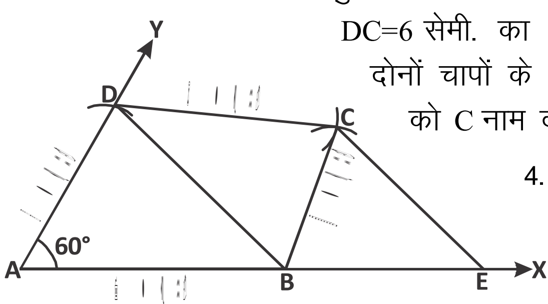
रचना के पद

1. रेखा AX खींचिए। AX पर रेखाखंड AB = 7 सेमी. लीजिए।



चित्र–11(ii)

2. बिंदु A पर 60° का कोण $\angle BAY$ बनाएँ। AY पर AD = 5 सेमी. का चाप काटिए जो बिंदु D पर काटेगा। (चित्र–11(i))
3. बिंदु B से BC=4 सेमी. एवं बिंदु D से DC=6 सेमी. का चाप काटिए। दोनों चापों के प्रतिच्छेद बिंदु को C नाम दीजिए।

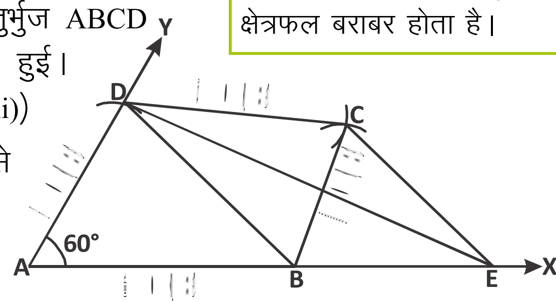


चित्र–11(iii)

4. BC, CD को मिलाइए। अभीष्ट चतुर्भुज ABCD की रचना हुई। (चित्र–11(ii))

एक ही आधार एवं दो समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है।

5. अब BD को मिलाइए। बिंदु C से BD || CE खींचें जो AX को E पर काटती है। (चित्र–11(iii)) E से D को मिलाइए। (चित्र–11(iv))



चित्र–11(iv)

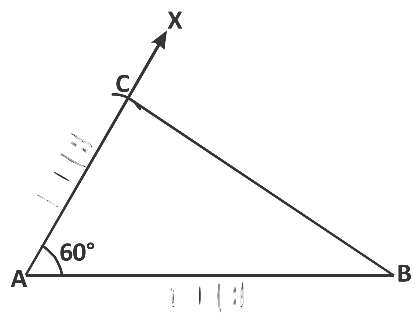
इस प्रकार अभीष्ट त्रिभुज ADE प्राप्त हुआ जिसका क्षेत्रफल चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल के बराबर है।

सोचें एवं चर्चा करें

ΔADE का क्षेत्रफल, चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल के बराबर है, कैसे?

<u>रचना (निर्मेय–9)</u> : एक त्रिभुज के बराबर क्षेत्रफल वाले, समांतर चतुर्भुज एवं आयत की रचना करना।

उदाहरण–9. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 9 सेमी. AC = 5 सेमी. तथा कोण $\angle CAB = 60°$ हो इस त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर एक समांतर चतुर्भुज की रचना कीजिए।

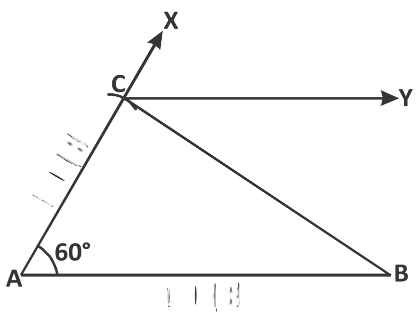


चित्र–12(i)

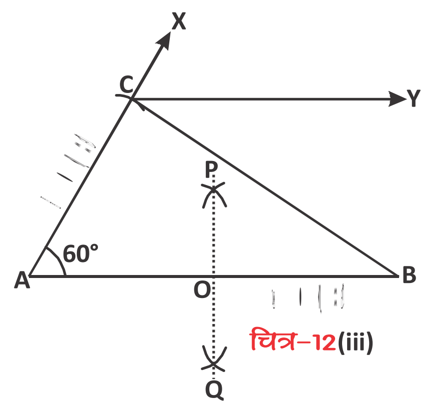
रचना के पद

1. रेखाखंड AB = 9 सेमी. खींचिए। बिंदु A पर 60° का कोण $\angle BAX$ बनाइए।
2. रेखा AX पर AC = 5 सेमी. का चाप काटिए। बिंदु C प्राप्त होगा। BC को मिलाइए। अभीष्ट त्रिभुज ABC प्राप्त होगा। (चित्र–12(i))
3. बिंदु C से AB के समांतर CY रेखा खींचिए। (चित्र–12(ii))
4. AB का लंब समद्विभाजक PQ खींचिए जो AB को O पर समद्विभाजित करता है। (चित्र–12(iii))
5. बिंदु O से AC $\parallel$ OD खींचिए। (चित्र–12(iv))

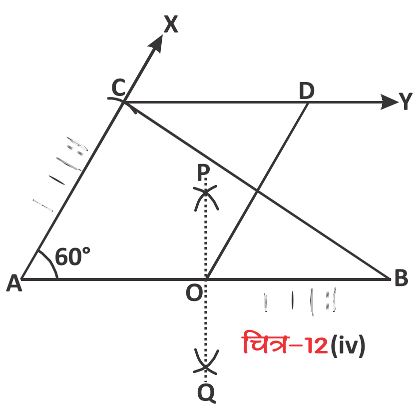
इस प्रकार अभिष्ट समांतर चतुर्भुज AODC प्राप्त हुआ जिसका क्षेत्रफल ΔABC के बराबर है।



चित्र–12(ii)



चित्र–12(iii)



चित्र–12(iv)

प्रश्नावली – 13.3

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी., BC = 6 सेमी., CD = 7 सेमी. तथा $\angle B = \angle C = 90°$। फिर AB को एक भुजा मानकर ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए जो क्षेत्रफल में, चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर हो।
2. एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 6 सेमी. तथा एक कोण 60° का हो। फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका क्षेत्रफल बनाए गए समचतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर हो।

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 6 सेमी. तथा आधार पर कोण $70°$ हो, तो इस त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज एवं आयत की रचना कीजिए।

4. एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें $PQ = 8$ सेमी., $PR = 6$ सेमी., $\angle QPR = 65°$ हो, इस त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल के समांतर चतुर्भुज की रचना कीजिए।

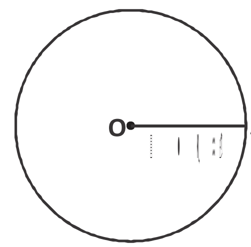
BZXVRI

किसी वृत्त के अंतर्गत एवं बहिर्गत समबहुभुज की रचना करना

<u>रचना (निर्मेय–10)</u> : 3 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के अंतर्गत एक सम पंचभुज की रचना कीजिए।

रचना के पद

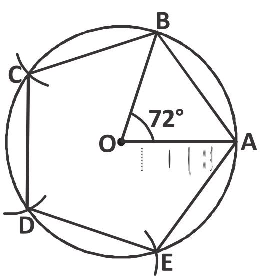
1. 3 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए जिसका केंद्र O है। O को परिधि से मिलाइए व प्राप्त बिंदु को A नाम दीजिए।(चित्र–13(i))



चित्र–13(i)

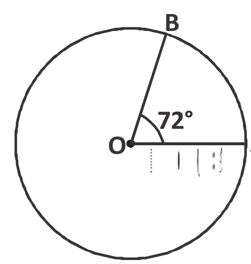
2. हमें एक सम पंचभुज बनाना है अतः वृत्त को केन्द्र पर पाँच समान भागों में बाँटना होगा।

केंद्र पर एक कोण का मान $= \dfrac{360°}{5} = 72°$ होगा।



चित्र–13(iv)

3. त्रिज्या OA के बिंदु O पर $72°$ का कोण बनाते हुए OB खींचिए जो परिधि को B पर काटता है। (चित्र–13(ii))

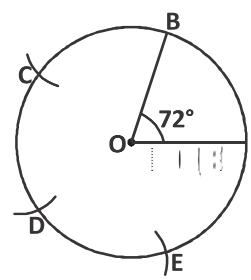


चित्र–13(ii)

4. अब AB चाप के बराबर परकार से B से परिधि पर चाप काटे तो C मिलेगा। इसी प्रकार C से D व E बिंदु प्राप्त होंगे। (चित्र–13(iii))

5. A को B, B को C, C को D, D को E व E को A से मिलाइए। (चित्र–13(iv))

इस प्रकार अभीष्ट समपंचभुज ABCDE प्राप्त होता है।



चित्र–13(iii)

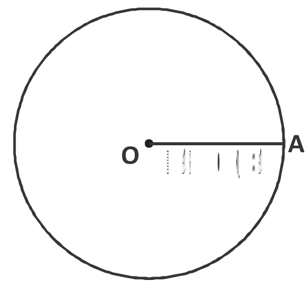
इसी प्रकार वृत्त के अंतर्गत किसी भी समबहुभुज की रचना की जा सकती है।

सोचें एवं चर्चा करें

पंचभुज के लिए केंद्र पर एक कोण $\dfrac{360°}{5}$ है और षटभुज के लिए $\dfrac{360°}{6}$ है। क्या n भुज के लिए $\dfrac{360°}{n}$ हो सकता है?

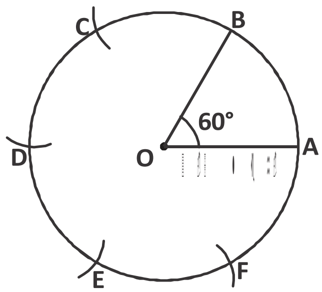
रचना (निर्मेय–11) : 3.5 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के बहिर्गत एक सम षट्भुज की रचना कीजिए।

रचना के पद



चित्र–14(i)

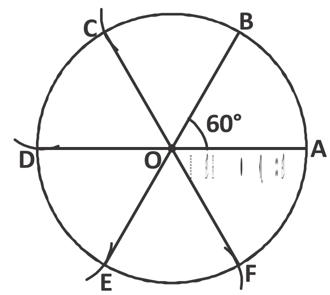
1. 3.5 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए जिसका केंद्र O है। वृत्त की परिधि पर कोई बिंदु A लीजिए तथा केंद्र O मिलाइए। (चित्र–14(i))



चित्र–14(ii)

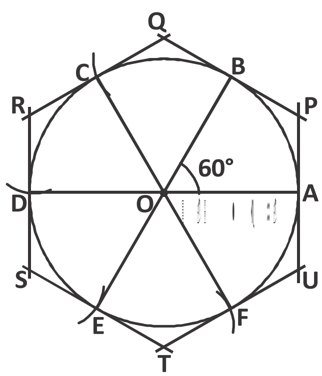
2. समषट्भुज के लिए वृत्त के केंद्र पर अंतरित कोण का मान = $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ होगा। त्रिज्या OA पर बिंदु O से 60° का कोण बनाते हुए OB खींचिए।

3. रचना–10 की तरह AB चाप के बराबर परिधि पर बिंदु C, D, E व F प्राप्त कीजिए। (चित्र–14(ii))



चित्र–14(iii)

4. बिंदुओं C, D, E व F को केंद्र O से मिलाइए। (चित्र–14(iii))



चित्र–14(iv)

5. OA, OB, OC, OD, OE एंव OF पर क्रमशः लंबवत् रेखा UAP, PBQ, QCR, RDS, SET एवं TFU खींचिए। (चित्र–14(iv))

इस प्रकार अभीष्ट षट्भुज PQRSTU प्राप्त हुआ जो दिए गए वृत्त के बहिर्गत है।

इसी प्रकार किसी भी वृत्त के बहिर्गत/परिगत एक समबहुभुज की रचना की जा सकती है।

प्रश्नावली – 13.4

1. एक 2 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के अंतर्गत सम चतुर्भुज की रचना कीजिए।
2. एक 3 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के अंतर्गत समअष्टभुज की रचना कीजिए।
3. एक 2.5 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के बहिर्गत समपंचभुज की रचना कीजिए।
4. एक 3 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के बहिर्गतसमअष्टभुज की रचना कीजिए।

C17RT6

हमने सीखा

1. एक त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है जब–
   (i) त्रिभुज में दो छोटी भुजाओं की मापों का योग सबसे बड़ी भुजा की माप से अधिक होता है।
   (ii) दो भुजाओं की माप और उनके बीच बने कोण की माप दी गई हो।
   (iii) एक भुजा और उसके सिरों पर बने दो कोणों की माप दी गई हो।
   (iv) त्रिभुज का आधार, आधार का कोई एक कोण और शेष दो भुजाओं का योग दिया हो।
   (v) त्रिभुज का आधार, आधार का एक कोण और शेष दो भुजाओं का अंतर दिया हो।
   (vi) त्रिभुज का परिमाप और आधार के दोनों कोण दिए हों।
2. एक समांतर चतुर्भुज की रचना की जा सकती है जब उसके दो विकर्ण और उनके बीच का कोण दिया हो।
3. समलंब चतुर्भुज की रचना की जा सकती है जब दो आसन्न भुजाएँ, उनके बीच का कोण तथा समांतर भुजाओं का पता हो।
4. एक ही आधार एवं दो समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है।
5. n भुजा वाले बहुभुज के केंद्र पर प्रत्येक भुजा द्वारा बनने वाला कोण $\frac{360°}{n}$ होता है।
6. वृत्त के परिगत एवं अंतर्गत बहुभुज की रचना की जा सकती है।

क्षेत्रमिति

MENSURATION

इकाई – 6

आओ क्षेत्रमिति का इतिहास जानें

प्रायः गणितीय विचार दैनिक जीवन के अनुभवों से ही उजागर होते हैं। प्राचीन काल में लोग भूमि, दीवारों की ऊँचाई, कुएँ की गहराई आदि के मापन के लिए 'बित्ता' 'हाथ' इत्यादि के माप का प्रयोग करते थे। इन्हीं मापकों की सहायता से बड़े–बड़े राजप्रासादों, भवनों, किलों, तालाबों, सड़कों, नहरों, नालियों इत्यादि का निर्माण किया जाता था।

खेती के क्षेत्र का माप उसमें बोए बीजों की मात्रा के आधार पर, वजन का माप पत्थर व अन्य प्राकृतिक वस्तुओं को इकाई मान कर, आयतन का माप लोटे, गिलास आदि के रूप में होता था। इन मापों में घट–बढ़ के चलते इन मापों को एक ही इकाई से मापने की प्रथा बनी। भारत की सिंधु घाटी में ईसा से 5 शताब्दी पूर्व लंबाई मापने व वजन करने की मानकीकृत व्यवस्था थी। अलग–अलग माप के मानक/बाट थे, महँगी वस्तुओं के लिए छोटे और ज्यादा मात्रा में दी जाने वाली वस्तुओं के लिए बड़े बाट। ज्यादातर बाट घनाकार थे। यहाँ दो पलड़े वाली तराजू भी बनती थी, इस तरह लंबाई मापने के लिए भी मानक पैमाने थे, जो 1/16 इंच तक माप सकते थे। भारत से इनमें से कई, मापन के ढंग ईरान व मध्य एशिया में भी गए। आज की क्षेत्रमिति इन सबके आधार पर विकसित हुई। इसमें अनेक तरह के संदर्भ आते हैं। इनमें से कुछ हैंः–

1. किसी खेत के चारों ओर काँटेदार तार लगाने की लागत।
2. किसी कुएँ के जगत के निर्माण में लगने वाली ईंटों या पत्थरों की लागत।
3. किसी कमरे का क्षेत्रफल।
4. किसी टंकी का आयतन।
5. फर्श पर लगाए जाने वाले टाइल्स की संख्या व लागत।
6. खेत की जुताई या फसल कटाई का व्यय आदि का अनुमान लगाने में।

इनके लिए हमें बंद द्विआयामी आकृतियों के परिमाप, क्षेत्रफल तथा ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करने पड़ते हैं। क्षेत्रमिति में हम त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त, घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोला जैसे रेखागणितीय आकारों व आकृतियों के परिमाप, क्षेत्रफल, पृष्ठीय क्षेत्रफल, आयतन ज्ञात करना सीखते हैं।

भारतीय गणितज्ञों ने रेखागणितीय आकारों व आकृतियों के लिए कई सूत्र दिए जो वर्तमान में प्रचलित सूत्रों जैसे हैं। उदाहरण के लिए वृत्त के क्षेत्रफल के लिए आर्यभट्ट ने निम्नलिखित सूत्र दिया –

'समपरिणाहस्यार्थं विष्कंभार्धहतमेव वृत्तफलम्'

अर्थात्– वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (परिधि) $\times$ $\frac{1}{2}$ (व्यास)

$= \pi r^2$

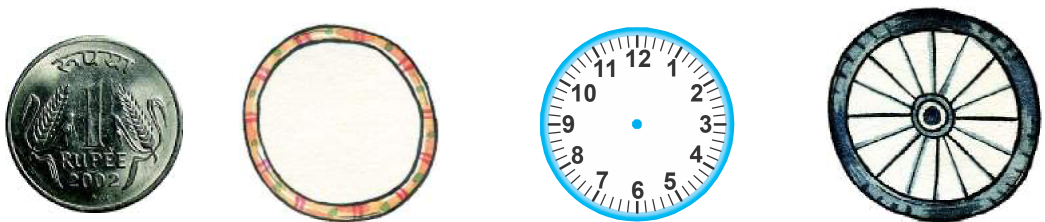
जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

ये जानकारियाँ अलग–अलग ग्रंथों से संकलित कर प्रस्तुत की गई हैं। शिक्षक एवं विद्यार्थी अन्य स्रोतों से क्षेत्रमिति के संबंध में और भी जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं।

वृत्त का त्रिज्याखण्ड एवं चाप की लम्बाई

[Sector of a Circle and Length of Arc] 14

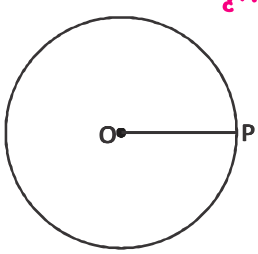
C1GHUT



चित्र–1

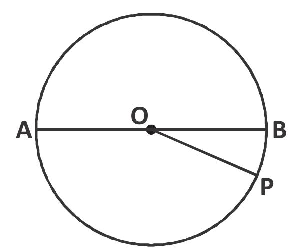
सिक्का, साइकिल का पहिया, घड़ी का डायल सभी वृत्ताकार हैं। इनके अलावा बहुत सी और चीजों के तल भी वृत्ताकार होते हैं। कुछ और ऐसी चीजों के नाम सोचें? इस अध्याय में हम वृत्त व उसके गुणों का अध्ययन करेंगे।

वृत्त का व्यास (Diameter of Circle)



चित्र–2

वृत्त से आप परिचित हैं। चित्र–2 में O वृत्त का केंद्र तथा OP वृत्त की त्रिज्या हैं। वृत्त का व्यास वह रेखाखण्ड है जिसके अंत बिंदु वृत्त की परिधि पर हों तथा वह वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती हो। वृत्त का व्यास त्रिज्या का दुगुना होता है। चित्र–3 में AOB व्यास है।



चित्र–3

वृत्त का व्यास = 2 $\times$ त्रिज्या

वृत्त की परिधि (Circumference of Circle)

अलग–अलग त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि और उनके संगत व्यास का अनुपात निश्चित होता है। इस अनुपात को ग्रीक अक्षर π (पाई) से व्यक्त करते हैं।

अतः $\dfrac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

वृत्त की परिधि $= \pi \times$ व्यास

$= \pi \times$ (2 $\times$ त्रिज्या) ($\because$ व्यास = 2 $\times$ त्रिज्या)

यदि वृत्त की त्रिज्या r हो, तो

वृत्त की परिधि $= \pi \times (2 \times r)$

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

करके देखें

अपने आस–पास अलग–अलग आकार की वृत्ताकार वस्तुएँ खोजकर उनकी परिधि व व्यास का अनुपात निकालिए। क्या यह अनुपात निश्चित है? यदि हाँ तो कितना है?

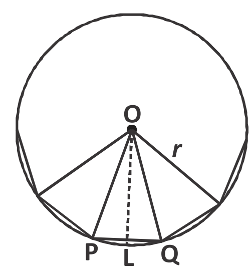
वृत्त का क्षेत्रफल (Area of Circle)

C1QIWG

माना कि O वृत्त का केंद्र है, जिसकी त्रिज्या r है। वृत्त के अंतर्गत n भुजा वाला समबहुभुज बनाइए। इस समबहुभुज के शीर्षों को केंद्र से मिलाकर त्रिभुजों की रचना कीजिए।

ऐसे एक त्रिभुज OPQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ PQ $\times$ OL

$= \frac{1}{2}$ भुजा $\times$ केंद्र से भुजा पर डाला गया लंब



चित्र–4

चूँकि केंद्र O से प्रत्येक भुजा पर डाला गया लंब बराबर है। अतः प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल समान होगा।

$\therefore$ n त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$= n \times \frac{1}{2}$ भुजा $\times$ केंद्र से भुजा पर डाला गया लंब

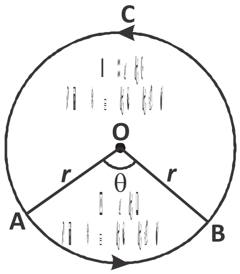
यदि भुजाओं की संख्या अनंत कर दी जाए तो बहुभुज का परिमाप वृत्त की परिधि के बराबर होगा तथा बहुभुज का क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होगा। इस स्थिति में केंद्र से भुजा पर डाला गया लंब त्रिज्या के बराबर होगा।

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ परिधि $\times$ त्रिज्या

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$

$= \pi r^2$

वृत्त का त्रिज्याखण्ड (Sector of Circle)



चित्र-5

किसी वृत्त का त्रिज्याखण्ड वह क्षेत्र है, जो दो त्रिज्याओं तथा दोनों के अंतरस्थ चाप (परिधि का टुकड़ा) द्वारा घिरा होता है। चित्र में एक वृत्त है जिसका केंद्र O तथा त्रिज्या r है इस वृत्त की परिधि पर तीन बिंदु A, B व C हैं। A और B को वृत्त के केंद्र O से मिलाने पर त्रिज्याओं OA और OB के द्वारा वृत्त दो क्षेत्रों OAB और OBCA में विभक्त हो जाता है। इन क्षेत्रों को त्रिज्याखण्ड कहते हैं।

इन दोनों त्रिज्याखण्डों की परिसीमाएँ वृत्त का चाप होती है। यहाँ, त्रिज्याखण्ड OAB की परिसीमा $\overset{\frown}{AB}$ तथा त्रिज्याखण्ड OBCA की परिसीमा $\overset{\frown}{BCA}$ है।

माना चाप $\overset{\frown}{AB}$ केंद्र पर θ कोण अंतरित करती है तब ज्यामिति से चाप की लम्बाई उसके द्वारा केंद्र पर अन्तरित कोण के समानुपाती होती है।

$$\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की परिधि}} = \frac{\text{चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण}}{\text{वृत्त द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण}}$$

$$\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की परिधि}} = \frac{\theta}{360^o}$$

$$\text{चाप की लम्बाई} = \frac{\theta}{360^o} \times \text{वृत्त की परिधि}$$

$$\text{त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई} = \frac{\theta}{360^o} \times 2\pi r$$

इसी प्रकार त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल त्रिज्याओं के मध्य अंतरस्थ चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण के समानुपाती होता है।

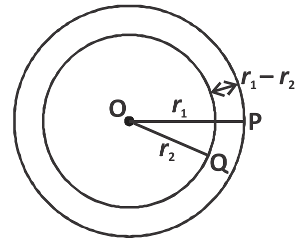
$$\therefore \frac{\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\text{चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण}}{\text{वृत्त द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण}}$$

$$\frac{\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\theta}{360^o}$$

$$\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^o} \times \text{वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$$

वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल (Area of Circular Path)



चित्र–6

वृत्ताकार मार्ग दो संकेन्द्री वृत्तों से बना होता है। यदि इन दोनों बाह्य एवं आंतरिक oÙkkd h f=T; k ¡Øe' k%r_1 और r_2 हों तब

वृत्ताकार मार्ग की चौड़ाई = बाह्य त्रिज्या – आंतरिक त्रिज्या

$$= r_1 - r_2$$

वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल = बाह्य वृत्त का क्षेत्रफल – आंतरिक वृत्त का क्षेत्रफल

$$= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$$

$$= \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल = $\pi(r_1^2 - r_2^2)$

उदाहरण–1. एक वृत्त का व्यास 14 सेमी. है वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त का व्यास $2r = 14$ सेमी.

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $r = \frac{14}{2} = 7$ सेमी.

अतः वृत्त की परिधि = $2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44 \text{ सेमी.}$$

और वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 7^2 = 154 \text{ वर्ग सेमी.}$$

उदाहरण–2. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 176 सेमी. है।

हल : यहाँ वृत्त की परिधि = 176 सेमी.

$$\therefore 2\pi r = 176$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 176$$

$$r = \frac{176 \times 7}{2 \times 22} = 28 \text{ सेमी.}$$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times (28)^2 = 2464 \text{ वर्ग सेमी.}$$

उदाहरण–3. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 सेमी. और 6 सेमी. हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

हल : यहाँ यदि प्रथम वृत्त की त्रिज्या $r_1 = 8$ सेमी.

द्वितीय वृत्त की त्रिज्या $r_2 = 6$ सेमी.

तथा अभीष्ट वृत्त की त्रिज्या $R = ?$

तब अभीष्ट वृत्त का क्षेत्रफल = प्रथम वृत्त का क्षेत्रफल + द्वितीय वृत्त का क्षेत्रफल

$$\pi R^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$
$$\pi R^2 = \pi(r_1^2 + r_2^2)$$
$$R^2 = r_1^2 + r_2^2$$
$$R^2 = 8^2 + 6^2$$
$$R^2 = 64 + 36$$
$$R^2 = 100$$
$$R = 10 \text{ सेमी.}$$

उदाहरण–4. एक वृत्तीय मैदान की त्रिज्या 35 मीटर है। एक लड़का उसके चारों ओर 5 किमी. प्रति घंटा की चाल से 10 चक्कर कितनी देर में लगा सकेगा?

हल : वृत्तीय मैदान की त्रिज्या $r = 35$ मीटर

एक चक्कर में लड़के द्वारा तय की गयी दूरी (परिधि) $= 2\pi r$

$\therefore$ 10 चक्कर में तय की गयी दूरी $= 10 \times 2\pi r$

$$= 10 \times 2 \times \frac{22}{7} \times 35$$

$= 2200$ मीटर = 2.2 कि.मी.

5 किमी. तय करने में लड़के को लगा समय = 60 मिनट

$\therefore$ 2.2 किमी. तय करने में लगा समय $= \dfrac{60 \times 2.2}{5} = 26.4$ मिनट

या 26 मिनट 24 सैकण्ड

उदाहरण–5. उस वृत्ताकार मार्ग की चौड़ाई ज्ञात कीजिए जिसकी बाह्य और अंतः परिधियों की मापें क्रमशः 110 मीटर और 88 मीटर हैं।

हल : माना वृत्ताकार मार्ग की बाह्य त्रिज्या $= r_1$ मीटर

और वृत्ताकार मार्ग की आंतरिक त्रिज्या $= r_2$ मीटर

वृत्ताकार मार्ग की बाह्य परिधि = 110 मीटर

अतः $2\pi r_1 = 110$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r_1 = 110$$

$$r_1 = \frac{110 \times 7}{2 \times 22} = 17.5 \text{ मीटर}$$

और वृत्ताकार मार्ग की अंतः परिधि = 88 मीटर

$$2\pi r_2 = 88$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r_2 = 88$$

$$r_2 = \frac{88 \times 7}{2 \times 22} = 14 \text{ मीटर}$$

अतः वृत्ताकार मार्ग की चौड़ाई $= r_1 - r_2$

$= 17.5 - 14 = 3.5$ मीटर

उदाहरण–6. एक 7 मीटर चौड़ी सड़क एक वृत्ताकार बगीचे को घेरती है। बगीचे की परिधि 352 मीटर है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना वृत्ताकार मार्ग की बाह्य त्रिज्या $= r_1$

और वृत्ताकार मार्ग की आंतरिक (बगीचे) की त्रिज्या $= r_2$

बगीचे की परिधि = 352 मीटर

अतः $2\pi r_2 = 352$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r_2 = 352$$

$$r_2 = \frac{352 \times 7}{2 \times 22} = 56 \text{ मीटर}$$

अतः वृत्ताकार मार्ग की बाह्य त्रिज्या $r_1 = 56 + 7 = 63$ मीटर

$\therefore$ वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल $= \pi(r_1^2 - r_2^2)$

$$= \frac{22}{7} \times \left[(63)^2 - (56)^2\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times (63 + 56)\,(63 - 56)$$

$$= \frac{22}{7} \times 119 \times 7 = 2618 \text{ वर्ग मीटर}$$

उदाहरण–7. एक 21 सेमी. के त्रिज्या वाले वृत्त से एक त्रिज्याखण्ड काटा गया है, जो केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करता है। त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ वृत्त की त्रिज्या $r = 21$ सेमी.

त्रिज्याखण्ड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण $\theta = 120^\circ$

अतः त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई $= \dfrac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

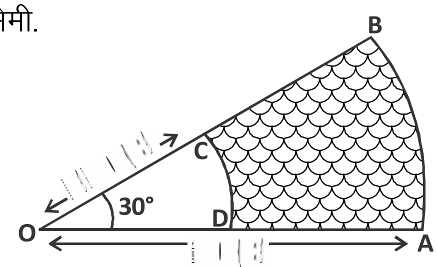
$= 44$ सेमी.

और त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (21)^2$$

$= 462$ वर्ग सेमी.

उदाहरण–8. दी गई आकृति के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



चित्र–7

हल : छायांकित भाग ABCD का क्षेत्रफल

= त्रिज्याखण्ड OAB का क्षेत्रफल − त्रिज्याखण्ड OCD का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi (OA)^2 - \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi (OD)^2$$

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi \left[(OA)^2 - (OD)^2\right]$$

$$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times \left[(7)^2 - (3.5)^2\right]$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times (7 + 3.5) \times (7 - 3.5)$$

$$= \frac{11}{6 \times 7} \times 10.5 \times 3.5$$

$= 9.625$ वर्ग सेमी.

प्रश्नावली – 14.1

1. उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 17.5 सेमी. है।
2. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 4.2 सेमी. है।
3. घास के मैदान में एक घोड़ा 14 मीटर लम्बी रस्सी से बँधा हुआ है। बताइए वह मैदान के कितने क्षेत्रफल की घास चर सकता है?
4. एक साइकिल के पहिये की त्रिज्या 35 सेमी. है, 500 पूरे चक्कर लगाने में यह कितनी दूरी तय करेगा?
5. एक वृत्त की त्रिज्या 3 मीटर है, दूसरे वृत्त की त्रिज्या क्या होगी जिसका क्षेत्रफल पहले वृत्त के क्षेत्रफल से 9 गुना है?
6. एक वृत्ताकार मार्ग की आंतरिक परिधि 440 मीटर है। मार्ग की चौड़ाई 14 मीटर है। मार्ग के बहिर्गत वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।
7. एक वृत्ताकार घास के मैदान की त्रिज्या 50 मीटर है इसके अंदर की ओर चारों तरफ 5 मीटर चौड़ा रास्ता है। 30 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से रास्ते में टाईल्स लगाने का खर्च बताइये?
8. उस त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो उस वृत्त के केंद्र पर 70° का कोण बनाता है एवं जिसकी त्रिज्या 21 सेमी. है।
9. वृत्त के एक त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल, वृत्त के क्षेत्रफल का $\frac{1}{6}$ है, तो त्रिज्याखण्ड का कोण ज्ञात कीजिए।
10. किसी त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल 1540 वर्ग सेमी. है। वह केंद्र पर 50° का कोण अंतरित करता है, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

C1ZEY4

हमने सीखा

1. वृत्त का व्यास (2×त्रिज्या), वृत्त की परिधि ($2\pi r$), वृत्त का क्षेत्रफल (πr^2), वृत्त के त्रिज्याखण्ड के बारे में जाना।
2. वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल $= \pi(r_1^2 - r_2^2)$; जहाँ r_1 व r_2 क्रमशः बाह्य एवं आंतरिक त्रिज्याएँ हैं।

घन और घनाभ

[Cube and Cuboid]

C29AZR

15

हम अपने आस–पास कई वस्तुएँ देखते हैं जैसे– किताब, पेन, पेंसिल रबर आदि। इन ठोस आकारों में यानि त्रिविमीय (3D) आकारों में हम द्विविमीय (2D) आकृतियाँ जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त आदि देख सकते हैं। 3D वस्तुओं के फलक (पृष्ठ), किनारे और शीर्ष द्विविमीय आकृतियों के संयोजन से बनते हैं। अब हम त्रिविमीय वस्तुओं जैसे– घन, घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन पता करेंगे। इसके लिए हम द्विविमीय आकृतियों व उनके क्षेत्रफल की अवधारणा का उपयोग करेंगे।

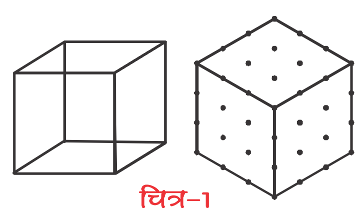
त्रिविमीय आकारों का चित्रण

हम द्विविमीय आकृतियों (त्रिभुज, चतुर्भुज एवं वृत्त आदि) का चित्रण सही–सही माप के साथ कागज पर कर सकते हैं।

क्या त्रिविमीय आकारों का भी चित्रण कागज पर सही–सही माप के साथ किया जा सकता है?

घन का चित्रण

3D आकार को बनाने में हम उसके सामने के फलक के साथ–साथ पीछे के फलकों को दिखाने का प्रयास करते हैं। घन अथवा घनाभ में 6 फलकें होती हैं। इनमें 8 शीर्ष होते हैं। इसमें किनारे कितने होते हैं?

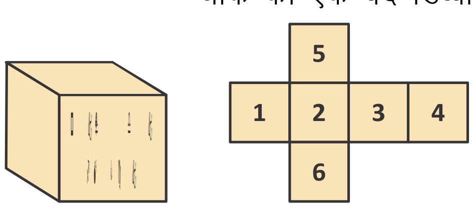


चित्र–1

त्रिविमीय आकारों को द्विविमीय आकृति में खोलना

1. घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

चॉक का एक बंद डिब्बा लीजिए और उसे चित्रानुसार खोलिए।



(I) चित्र–2 (ii)

अब इसमें फलक, किनारों व शीर्षों की संख्या लिखिए। क्या इसके सभी पृष्ठ सर्वांगसम दिखते हैं?

हम पाते हैं कि चॉक के डिब्बे में प्रत्येक फलक का माप समान है अर्थात् प्रत्येक फलक सर्वांगसम होंगे। इस प्रकार का आकार **घन** होता है।

यदि वर्गाकार पृष्ठ की एक भुजा की लम्बाई a है, तो उसके वर्गाकार पृष्ठ का क्षेत्रफल a^2 होगा। क्या आप सभी पृष्ठों का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

हमीद– मैं सभी छः फलकों का क्षेत्रफल जोड़कर घन के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल निकाल सकता हूँ।

घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$

$= 6\ a^2$

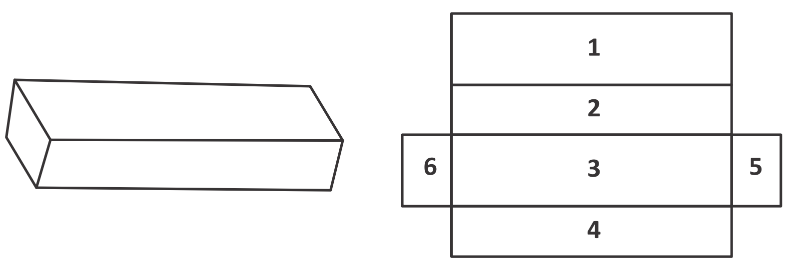
करके देखें

1. गत्ते की एक शीट लें, उससे 8 सेमी. भुजा वाला एक घन के आकार का डिब्बा बनाएँ, जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 8 सेमी. हो।
2. घन के कोर की लम्बाई 4 सेमी. है। उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना गुना बढ़ जाएगा, जब इसके कोर की लम्बाई 8 सेमी. कर दी जाए।

2. घनाभ

एक टूथपेस्ट का डिब्बा लीजिए और अब इसे चित्रानुसार खोलिए।

चित्र–3(i)



चित्र–3(ii)

अब इसमें फलकों, किनारों व शीर्षों की संख्या लिखिए?

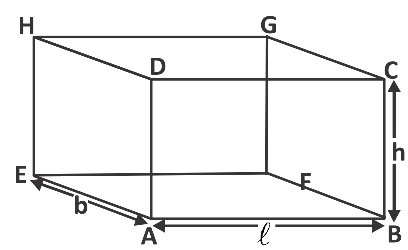
क्या फलक 1 व 3, 2 व 4 और 5 व 6 की लंबाई और चौड़ाई समान दिखती है?

हमने देखा कि टूथपेस्ट के डिब्बे में प्रत्येक आमने–सामने के फलक का माप समान होता है अर्थात् यहाँ प्रत्येक आमने–सामने के फलक सर्वांगसम होंगे। इस प्रकार का आकार घनाभ होता है।

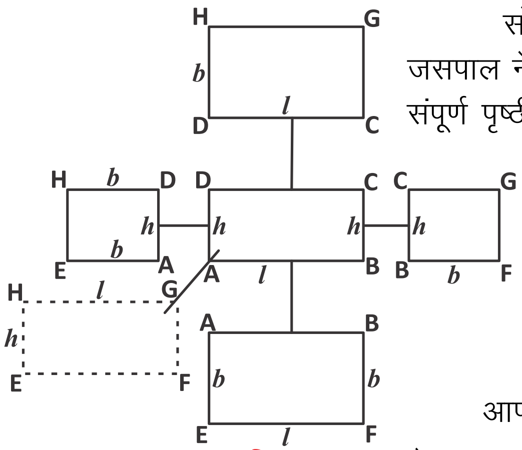
घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल (Surface Area of Cuboid)

अपने आसपास घनाभ के आकार की कुछ वस्तुएँ ढूँढ़िए और उनके चित्र अपनी कापी पर खींचिए। इनके शीर्षों को नामांकित कीजिए।

इसमें भुजाओं(किनारा या कोर) की संख्या कितनी है? कौन–कौन से फलक आपस में बराबर और आयताकार हैं?



चित्र–4



चित्र–5

सोचिए कि घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कैसे ज्ञात कर सकते हैं? जसपाल ने कहा कि सभी आयताकार पृष्ठों के क्षेत्रफल जोड़ने पर घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

नेहा ने जूते का डिब्बा लेकर उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने का प्रयास किया।

लम्बाई के लिए ℓ, चौड़ाई के लिए b और ऊँचाई के लिए h सभी पृष्ठों पर लिखा। फिर सभी पृष्ठों को अलग–अलग क्षेत्रफल निकाल कर उन्हें जोड़ दिया। (चित्र–5)

आप भी उक्त गतिविधि को अपनी कक्षा में कीजिए।

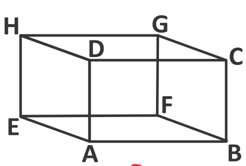
तो घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= h\ell + \ell b + h\ell + \ell b + hb + hb$

$= 2\,\ell b + 2\,\ell h + 2\,bh$

$= 2\,(\ell b + \ell h + bh)$

करके देखें

1. घनाभ के संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल के सूत्र से घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कैसे प्राप्त करेंगे?
2. यदि घनाभ की लम्बाई 6 से.मी., चौड़ाई 3 से.मी. और ऊँचाई 2 से.मी. हो तो उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना है?



चित्र–6

क्या आप बता सकते हैं कि घनाभ के पार्श्व पृष्ठ कौन–कौन से हैं?

घनाभ के चारों किनारों के पृष्ठ (ऊपर और नीचे के पृष्ठों को छोड़कर) पार्श्व पृष्ठ कहलाते हैं।

घनाभ के पार्श्व पृष्ठों का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे?

अजीत – मैं सभी पार्श्व पृष्ठों ABCD, EFGH, BFGC और AEHD का क्षेत्रफल जोड़कर घनाभ के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल निकाल सकता हूँ।

मोनिका – हाँ, इस तरह से जोड़ने पर घनाभ के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2h\ell + 2\,hb$

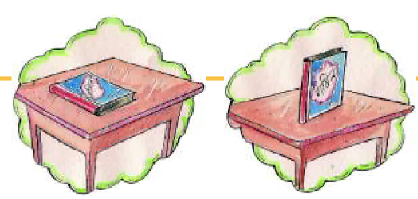
$= 2\,h\,(\ell + b)$

क्या अब आप घन के पार्श्व पृष्ठों का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

घन के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4\,a^2$ (कारण बताइए)।

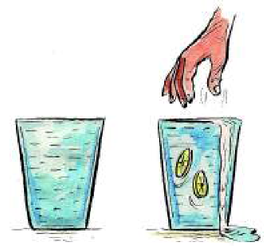
सोचें एवं चर्चा करें

दिखाए गए चित्रों की तरह अपनी गणित की पुस्तक रखिए और उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



ठोस वस्तुओं का आयतन

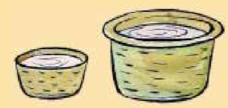
एक काँच का गिलास लें और उसे ऊपर तक पानी से भर दें। अब उसमें 2 नींबू के टुकड़े डालें। आपने क्या देखा? गिलास से कुछ पानी बाहर आ जाएगा। इससे यह पता चलता है कि नींबू ने गिलास के अंदर कुछ जगह घेरी। इसी तरह सभी ठोस वस्तुएँ जगह घेरती हैं। यही वस्तु का आयतन होता है।



चित्र–7

यदि वस्तुएँ खोखली हों और उनमें यदि किसी तरल पदार्थ जैसे– हवा, पानी को भरा जाए तो वह उस वस्तु का आकार ले लेते हैं। इस स्थिति में उस पदार्थ का आयतन वस्तु की धारिता या वस्तु की क्षमता कहलाती है।

दूध के बर्तन में कटोरी की अपेक्षा ज्यादा दूध भरा जा सकता है। क्या दूध के बर्तन की धारिता कटोरी से ज्यादा है?



घनाभ का आयतन (Volume of Cuboid)

क्या किसी कमरे के अंदर रखी हुई अलमारी की तुलना में कमरे का आयतन अधिक है? या फिर आपके पेंसिल बॉक्स का आयतन व इसके अंदर रखे पेंसिल और मिटाने वाली रबर के आयतन में से कौन अधिक है? क्या आप इसमें से किसी भी वस्तु का आयतन माप सकते हैं?

C2S342

हम किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं। यहाँ हम ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का उपयोग करेंगे क्योंकि घन सबसे अधिक सुविधाजनक ठोस आकार है। क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम क्षेत्र को वर्ग इकाइयों में विभाजित करते हैं, इसी प्रकार किसी ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हमें उस ठोस को घन इकाइयों में विभाजित करने की आवश्यकता होती हैं।

1 घन सेमी. $= 1\ \text{cm} \times 1\ \text{cm} \times 1\ \text{cm} = 1\ \text{cm}^3$

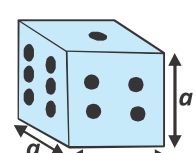
1 घन मी. $= 1\ \text{m} \times 1\ \text{m} \times 1\ \text{m} = 1\ \text{m}^3$

घनाभ का आयतन = आयताकार आधार फलक द्वारा घिरा क्षेत्र $\times$ घनाभ की ऊँचाई

$= A \times h = \ell \times b \times h$ घन इकाई

यहाँ A आधार फलक का क्षेत्रफल और h घनाभ की ऊँचाई है।

घन का आयतन (Volume of Cube)



चित्र–8

हम जानते हैं कि घन एक विशेष प्रकार का घनाभ होता है जिसमें लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई के मान बराबर होते हैं। अर्थात् $\ell = b = h = a$ (माना)

घन का आयतन = भुजा $\times$ भुजा $\times$ भुजा $= a \times a \times a$

$= a^3$ घन इकाई

जहाँ a घन की भुजा है।

ठोस वस्तु का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का उपयोग सबसे अधिक सुविधा जनक है। आयतन में घन इकाई का अर्थ उसमें सम्मिलित इकाई लम्बाई के घनों की संख्या से है।

उदाहरण–1. एक कमरा घनाभ के आकार का है, जिसकी लम्बाई 12 मीटर, चौड़ाई 8 मीटर और ऊँचाई 4 मीटर हैं यदि पुताई कराने की दर 7 रुपये प्रति वर्ग मीटर है, तो कमरे की चारों दीवारों और छत की पुताई करवाने में कितने रुपये खर्च होंगे?

हल : मान लीजिए कमरे की लम्बाई $= \ell = 12$ मी., चौड़ाई $= b = 8$ मी. एवं ऊँचाई $= h = 4$ मी.

कमरा घनाभ के आकार का है, इसलिए,

कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप $\times$ कमरे की ऊँचाई

$= 2(\ell + b) \times h$

$= 2(12 + 8) \times 4 = 160$ वर्ग मीटर

छत का क्षेत्रफल $= 12 \times 8 = 96$ वर्ग मीटर

$\therefore$ कुल क्षेत्रफल जिसमें पुताई करवाना है $= 160 + 96 = 256$ वर्ग मीटर

पुताई की दर 7 रुपये प्रति वर्ग मीटर है, अतः छत सहित कमरे की पुताई कराने का खर्च

= कुल क्षेत्रफल जिसमें पुताई करवाना है $\times$ 7

$= 256 \times 7 = 1792$ रुपये

करके देखें

कुछ मित्रों के साथ अपनी कक्षा की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई को माप कर ज्ञात कीजिए कि–

(i) कमरे की खिड़कियों, दरवाजों के क्षेत्रफल छोड़कर कमरे की दीवारों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(ii) इस कमरे में पुताई करवाना हो तो कुल कितने क्षेत्रफल की पुताई करानी होगी?

(iii) आपके शहर/गाँव में पुताई की दर कितनी है? उस दर से कमरे की दीवारों पर पुताई कराने में कितना खर्च करना पड़ेगा?

उदाहरण–2. अनवर ने अपने घर की छत पर एक घनाकार पानी की टंकी (ढक्कन सहित) बनवाई, जिसके बाहरी किनारे की लम्बाई 1.8 मीटर है। वह इसके आधार के पृष्ठ को छोड़कर शेष सभी पृष्ठों पर 30 सेमी. भुजा वाली वर्गाकार टाईल्स लगवाना चाहता है। यदि एक दर्जन टाईल्स लगवाने में 396 रुपये खर्च होते हैं, तो अनवर को कितने रुपये खर्च करने पड़ेंगे।

हल : चूँकि अनवर को पानी की टंकी के पाँच बाहरी पृष्ठों पर टाईल्स लगवानी हैं, इसलिए लगने वाली टाईल्स की संख्या का पता लगाने के लिए, इन पृष्ठों का कुल क्षेत्रफल ज्ञात करना पड़ेगा।

घनाकार टंकी के बाह्य किनारे की लम्बाई a = 1.8 मी. = 180 सेमी.

$\therefore$ घनाकार टंकी के पाँच पृष्ठों का क्षेत्रफल $= 5\ a^2$

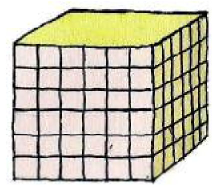
$= 5 \times 180 \times 180$ वर्ग सेमी. .... (1)

प्रत्येक वर्गाकार टाईल का क्षेत्रफल = भुजा $\times$ भुजा

$= 30 \times 30$ वर्ग सेमी. .... (2)

$\therefore$ टाईल्स की संख्या $= \dfrac{\text{टंकी के 5 पृष्ठों का क्षेत्रफल}}{\text{प्रत्येक टाईल का क्षेत्रफल}}$

$= \dfrac{5 \times 180 \times 180}{30 \times 30} = 180$

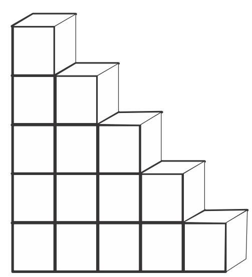


एक दर्जन टाईल्स लगवाने पर खर्च = 396 रुपये

$\therefore$ एक टाईल लगवाने पर खर्च $= \dfrac{396}{12} = 33$ रुपये

इसलिए 180 टाईल्स लगवाने पर खर्च $= 180 \times 33 = 5940$ रुपये

उदाहरण–3. कुछ घनाकार टुकड़ों (blocks) से खेलते हुए विलियम ने चित्रानुसार एक संरचना बनाई। यदि प्रत्येक घन के किनारे की लम्बाई 4 सेमी. हो, तो विलियम द्वारा बनाए गए संरचना का आयतन ज्ञात कीजिए।



हल : चूँकि प्रत्येक घन के किनारे की लम्बाई a = 4 सेमी.

$\therefore$ प्रत्येक घन का आयतन $= a \times a \times a$

$= 4 \times 4 \times 4$

$= 64$ घन सेमी.

संरचना में लगे घनों की संख्या = 15

$\therefore$ संरचना का आयतन $= 64 \times 15 = 960$ घन सेमी.

करके देखें

अपनी पुस्तक के किसी आयताकार पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। अब पुस्तक की ऊँचाई मापकर पुस्तक का आयतन ज्ञात कीजिए। अपने स्कूल के पुस्तकालय की अलमारी के किसी खाने (shelf) में आपकी पुस्तकों जैसी आकार वाली कितनी पुस्तकें रखी जा सकती हैं? क्या आप विद्यालय में प्रतिदिन समाचार पत्र पढ़ते हैं? पुस्तक के स्थान पर पिछले कुछ दिनों के इकट्ठे किए गए समाचार पत्रों के साथ उपर्युक्त गतिविधि कर बताइए कि पुस्तकालय की अलमारी कितने दिनों के समाचार पत्र से भर जायगी?

प्रश्नावली – 15.1

1. एक घन के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल 1350 वर्ग मीटर है, तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए?
2. एक घनाभ का आयतन 1200 घन सेमी. है। इसकी लम्बाई 15 सेमी. और चौड़ाई 10 सेमी. है। इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक घनाकार डिब्बे का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना होगा यदि–
   (i) प्रत्येक भुजा को दोगुना किया जाए?
   (ii) प्रत्येक भुजा को तीन गुना किया जाए?
   (iii) प्रत्येक भुजा को n गुना किया जाए?
4. प्रियंका के घर के सबसे बड़े कमरे के फर्श का परिमाप 250 मीटर है। इस कमरे के चारों दीवारों की पुताई 10 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कराने पर 15000 रुपये खर्च होते हैं, तो कमरे की ऊँचाई कितनी है? (संकेत– चारों दीवारों का क्षेत्रफल = पार्श्वपृष्ठीय क्षेत्रफल)
5. एक घनाकार पेटी के कोर की लम्बाई 10 सेमी. है। एक दूसरे घनाभ के आकार की पेटी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई, क्रमशः 12.5 सेमी., 10 सेमी. और 8 सेमी. है।
   (i) किस पेटी का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है और कितना अधिक?
   (ii) किस पेटी का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कम है और कितना कम?
6. एक गाँव की जनसंख्या 4000 है। इस गाँव में रहने वाले प्रत्येक व्यक्ति को प्रतिदिन 150 लीटर पानी की आवश्यकता पड़ती है। गाँव में पानी की एक टंकी है, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 20 मीटर, 15 मीटर और 6 मीटर है यदि इस टंकी को पूरा भर दिया जाय तो गाँव की कितने दिनों की पानी की आवश्यकता पूरी हो जाएगी?
   (संकेत – 1 घन मीटर = 1000 लीटर)
7. एक 3 मीटर गहरी और 40 मीटर चौड़ी नदी 2 किमी. प्रति घंटे की दर से बह रही है। क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि एक मिनट में नदी का कितना पानी समुद्र में गिर रहा है?
8. एक घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 3328 वर्ग मीटर है। यदि घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई में अनुपात 4 : 3 : 2 हो, तो घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।
9. तीन घन जिनमें प्रत्येक का आयतन 125 घन सेमी. है, को किनारों से जोड़कर एक घनाभ बनाया गया। इस प्रकार बने घनाभ के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. एक जलाशय घनाभ के आकार का है, इसकी लंबाई 20 मीटर है। यदि जलाशय में से 18 किलोलीटर पानी निकाल लिया जाय तो पानी का स्तर 15 सेमी. नीचे चला जाता है। जलाशय की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
    (संकेत– 1 किलोलीटर = 1 घन मीटर)

11. एक खुले मैदान में 10 मीटर लंबी एक दीवार का निर्माण किया जाना है। दीवार की ऊँचाई 4 मी. और मोटाई 24 सेमी. है। यदि इस दीवार को 24 सेमी. $\times$ 12 सेमी. $\times$ 8 सेमी. विमाओं वाली ईंटों से बनाया जाना है, तो इसके लिए कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी?

12. 8 मीटर लंबा 6 मीटर चौड़ा और 3 मीटर गहरा एक घनाभाकार गड्ढ़ा खुदवाने में 30 रुपये प्रति घन मीटर की दर से होने वाला व्यय ज्ञात कीजिए।

13. किसी गोदाम की माप 60 मीटर $\times$ 25 मीटर $\times$ 10 मीटर है। इस गोदाम में 1.5 मीटर $\times$ 1.25 मीटर $\times$ 0.5 मीटर की माप वाले लकड़ी के कितने अधिकतम क्रेट (crate) रखे जा सकते हैं?

14. 12 सेमी. भुजा वाले एक ठोस घन को बराबर आयतन वाले 8 घनों में काटा जाता है। नए घन की भुजा क्या होगी? साथ ही, इन दोनों घनों के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

15. मैरी अपने क्रिसमस वृक्ष को लकड़ी के एक घनाभाकार बॉक्स के अंदर रखकर रंगीन कागज से ढकना चाहती है। मैरी जानना चाहती है कि उसे कितना कागज खरीदना चाहिए। यदि उपर्युक्त बॉक्स की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 80 सेमी., 40 सेमी. एवं 20 सेमी. है, तो उसे 40 सेमी. भुजा वाली कागज की कितनी वर्गाकार शीटों की आवश्यकता होगी?

C31Y5P

हमने सीखा

1. घन एक नियमित सम षट्फलक ठोस आकृति है जिसमें 4 पार्श्व फलक और 8 शीर्ष हैं।
2. यदि घन के किनारे की लंबाई 'a' हैं, तब

   घन के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 6a^2$

   घन के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4a^2$

   घन का आयतन $= a^3$

3. यदि घनाभ की लंबाई 'l', चौड़ाई 'b' और ऊँचाई 'h' है तब

   घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + lh)$

   घनाभ का पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2h\,(\ell + b)$

   घनाभ का आयतन $= \ell bh$
4. ठोस वस्तुएँ जिनका आयतन अधिक होता है वे अधिक जगह घेरती हैं।

सांख्यिकी
STATISTICS

इकाई – 7

आओ सांख्यिकी का इतिहास जानें

भारत में प्राचीनकाल से ही सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता रहा है। लगभग 321 ई.पू. से 296 ई.पू. के आसपास कौटिल्य द्वारा लिखित ग्रंथ 'अर्थशास्त्र' में आँकड़ों के संग्रह का वर्णन मिलता है। इस ग्रंथ में मौर्यकालीन शासकों द्वारा कृषि, ग्रामीण और नगरीय जनसंख्या और अर्थव्यवस्था के आँकड़े एकत्रित करने के संबंध में विस्तृत वर्णन किया गया है। आँकड़े एकत्रित करने की प्रक्रिया मुगल शासक अकबर के समय भी जारी रही, जिसका उल्लेख 1596–1957 ई. के आसपास अबुल फजल ने अपने ग्रंथ 'आइने–अकबरी' में किया है।

ब्रिटिश काल में, ईस्ट इण्डिया कम्पनी को अपने खातों का लेखा–जोखा और अपने अधिगृहित प्रदेशों के बारेमें विस्तृत जानकारी प्राप्त करने की आवश्यकता महसूस हुई। सन्1807 में कम्पनी ने अपने प्रांतों में सर्वे कराया। इस सर्वे में 60,000 वर्ग मील के क्षेत्र में रहने वाले 1 करोड़ 50 लाख लोगों को शामिल किया गया। इसकी रिपोर्ट में कई महत्वपूर्ण बिंदुओं पर जानकारियाँ शामिल थीं, जिनमें कुछ प्रमुख है– प्रत्येक जिले की भौगोलिक स्थिति, निवासियों के धर्म, रीति–रिवाज, देश की प्राकृतिक संपदा, मत्स्य पालन, खेती की स्थिति, उद्योगों की स्थिति। सन् 1848 में सरकारी अधिकारी ए. शेक्सपीयर ने पहली जनगणना रिपोर्ट प्रस्तुत की, जो उत्तर–पश्चिमी प्रांत के प्रत्येक परगना (जिला) के क्षेत्र और राजस्व से संबंधित थी। भारत की जनसंख्या के विस्तृत आँकड़े इकट्ठा करने का पहला व्यवस्थित प्रयास सन् 1867 से 1872 के मध्य किया गया। सर्वप्रथम 1881 में पूरे देश में एक साथ जनगणना हुई और तब से ही प्रत्येक 10 वर्ष में पूरे देश में जनगणना की जा रही है।

स्वतंत्रता के पश्चात् देश के आर्थिक और सामाजिक विकास के लिए एक उपयुक्त सांख्यिकी ढाँचे की आवश्यकता महसूस की गई। प्रोफेसर पी.सी. महालनवीस को सन् 1949 में भारत सरकार के कैबिनेट के प्रथम सांख्यिकी सलाहकार (Statistical Advisor) नियुक्त किया गया। भारत में सांख्यिकी के विकास में इनका योगदान अविस्मरणीय है। प्रोफेसर महालनवीस भारतीय सांख्यिकी संस्थान (Indian Statistical Institute) के संस्थापक संचालक थे, जिसकी स्थापना कोलकाता में 1932 में की गई थी। इस संस्थान को भारतीय संसद द्वारा 1959 में राष्ट्रीय महत्त्व की संस्था घोषित किया गया। इसके अलावा 1949 में केंद्रीय सांख्यिकी संगठन (Central Statistical Organisation) की स्थापना की गई। 20वीं शताब्दी से अब तक सांख्यिकी को विकसित करने की विधियों, सिद्धांतों और अनुप्रयोगों पर कार्य हो रहे हैं।

ऐसा प्रतीत होता है कि सांख्यिकी के समानार्थी अंग्रेजी शब्द 'Statistics' की व्युत्पत्ति लैटिन भाषा के शब्द 'Status' से हुई है, जिसका अर्थ राजनीतिक राज्य या शासन है।

आँकड़ा प्रबंधन व विश्लेषण

[Data Handling and Analysis]

CEF7L9

16

अपने जीवन में हम जाने–अनजाने आँकड़ों का उपयोग करते हैं। इसमें हम अपने पुराने अनुभवों के आधार पर जानकारी को व्यवस्थित कर उससे निष्कर्ष निकालते हैं। जैसे– जुलाई के महीने में आकाश में बादल हों और हवा पूर्व से आ रही हो तो हम यह कहते हैं कि आज बारिश होगी। इसी तरह जो लोग यात्रा करते हैं वे जानते हैं कि कुछ रेलगाड़ियाँ अक्सर समय पर आती हैं और कुछ अक्सर देर से आती हैं। हम दाल, चावल, गेहूँ आदि खरीदते समय कुछ हिस्सा जांच कर यह तय कर लेते हैं कि इसे खरीदना उपयुक्त है या नहीं। हम क्रिकेट के खेल में देख सकते हैं कि किस दर से रन बने हैं और किस दर से आगे बनाने हैं आदि। हर रोज अखबार में अधिकतम तापमान, न्यूनतम तापमान, औसत आर्द्रता, सूर्योदय, सूर्यास्त आदि का समय देखते हैं। इन सभी आँकड़ों को देखना, समझना व उससे निष्कर्ष निकाल पाना हमें बेहतर विश्लेषण करने में मदद करता है।

हर व्यक्ति, परिवार, पंचायत, प्रदेश की सरकार, भारत की सरकार व इसी तरह हर ढाँचा फैसले लेने व योजना बनाने के लिये आँकड़ों का उपयोग करता है। जितने बेहतर ढंग से हम आँकड़े ले सकेंगे, उन्हें नियोजित कर सकेंगे और इनका विश्लेषण कर सकेंगे उतने ही अच्छे हमारे निर्णय होंगे व उनका क्रियान्वयन भी उतना ही बेहतर होगा।

आँकड़ों का संग्रहण एवं प्रस्तुतीकरण (Data Collection and Representation)

मान लीजिए आपकी कक्षा में 30 विद्यार्थी हैं और आपको निम्न आँकड़े एकत्रित करने को दिए जाएँ तो ये आप कैसे करेंगे?

1. आपकी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी के रक्त समूह की जानकारी।
2. कक्षा में उन विद्यार्थियों की संख्या जो पैदल या अन्य साधनों से विद्यालय आते हैं?

एक कक्षा के विद्यार्थियों ने दो समूहों में यह कार्य शुरू किया। प्रत्येक समूह ने विद्यार्थियों के पास जाकर उनके रक्त समूह व साधन के बारे में पूछा और समूह–1 ने निम्न सारणी बनाई–

सारणी–1

A		B		AB		O	
Rh^+	Rh^-	Rh^+	Rh^-	Rh^+	Rh^-	Rh^+	Rh^-
卌	|||	卌 ||||	||||	|||	||	|||		

समूह–2 ने भी निम्न सारणी बनाई–

सारणी–2

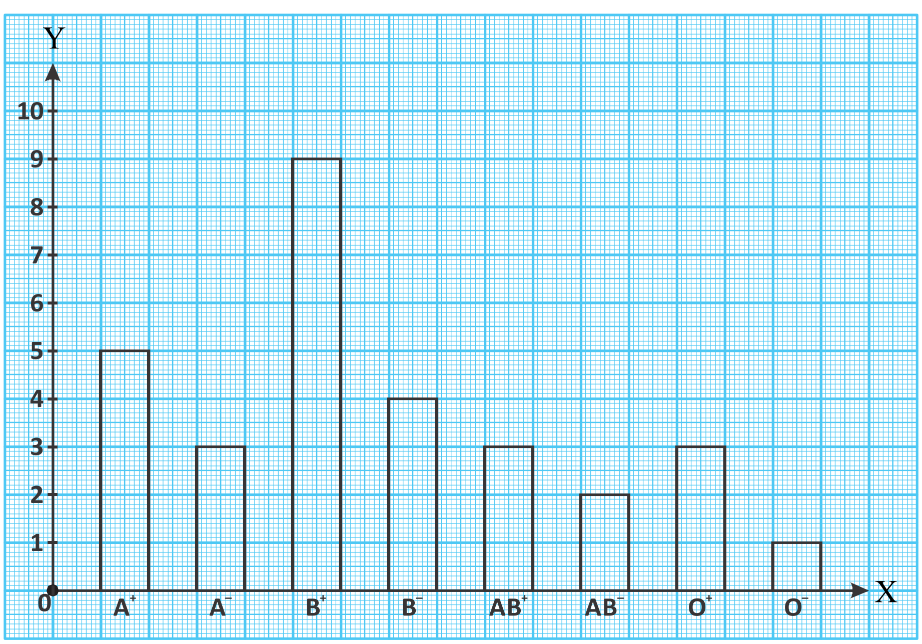
पैदल	साईकिल	स्कूटर	बस	अन्य
卌 ||	|||	卌 卌	卌 |||	||

बारंबारता सारणी

समूह–1 ने एकत्रित किए गए आँकड़ों को व्यवस्थित करने व ठीक तरह से समझने के लिए सारणी–3 की तरह लिखा–

सारणी–3

रक्त समूह	गणना चिह्न या मिलान चिह्न के रूप में	संख्यात्मक रूप में
A^+	卌	5
A^-	|||	3
B^+	卌 ||||	9
B^-	||||	4
AB^+	|||	3
AB^-	||	2
O^+	|||	3
O^-	|	1
योग		30



इस सारणी में गणना चिह्न के साथ–साथ संख्यात्मक मान भी दर्शाया गया है, जैसे B^+ के सामने लिखी संख्या 9 बताती है कि इस कक्षा में 9 लोग ऐसे हैं जिनका रक्त समूह B^+ है ऐसे ही अन्य संख्याएँ भी। ये संख्याएँ अपने सामने लिखे रक्त समूह की 'बारम्बारता' बताती हैं। इस प्रकार बनी सारणी बारम्बारता सारणी कहलाती है। समूह ने फिर इस सारणी को दंडालेख के रूप में भी दर्शाया।

करके देखें

1. अब आप इस दंडालेख से 5 निष्कर्ष लिखिए।
2. इसी तरह समूह–2 से मिले आँकड़ों को भी दंडालेख के रूप में प्रस्तुत करें?
3. अपनी कक्षा के विद्यार्थियों की जनवरी माह की उपस्थिति के आँकड़ों से बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए और बताइए–
   (i) किस दिन उपस्थिति सर्वाधिक रही।
   (ii) किस दिन सबसे कम उपस्थिति रही। (iii) कुछ और निष्कर्ष भी लिखें?
4. आपकी कक्षा के विद्यार्थियों को हॉकी, क्रिकेट, कबड्डी, फुटबाल, वॉलीबाल में से कौनसा खेल सबसे अधिक पसंद है। इसके लिए आँकड़े इकट्ठे कीजिए। एक बारम्बारता सारणी बनाकर इन प्रश्नों के हल ढूंढ़िए–
   (i) कौनसा खेल कक्षा में सर्वाधिक लोकप्रिय है?
   (ii) कौनसा खेल कम छात्र पसंद करते हैं?

घटते–बढ़ते क्रम में रखना

कभी–कभी हमें ऐसे आँकड़े मिलते हैं जिनमें बारम्बारता हो भी सकती है और नहीं भी। यदि आँकड़ों की संख्या अधिक न हो तो इन्हें घटते–बढ़ते क्रम में जमाकर भी कुछ निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं, जैसे–

किसी कक्षा के 15 विद्यार्थियों ने गणित विषय की परीक्षा में 100 में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किए–

45, 35, 56, 22, 99, 71, 80, 63, 42, 36, 18, 77, 54, 82, 41

बढ़ते क्रम (आरोही क्रम) में लिखने पर–

18, 22, 35, 36, 41, 42, 45, 54, 56, 63, 71, 77, 80, 82, 99

घटते क्रम (अवरोही क्रम) में लिखने पर–

99, 82, 80, 77, 71, 63, 56, 54, 45, 42, 41, 36, 35, 22, 18

अब आप बता सकते हैं कि–

1. सबसे अधिक और सबसे कम प्राप्तांक क्या हैं? 2. इनका अंतर कितना है?

अपने साथियों से चर्चा करें कि इन आँकड़ों से क्या कुछ और निष्कर्ष भी निकाले जा सकते हैं?

वर्गीकृत बारम्बारता सारणी

1. समावेशी वर्ग (Inclusive Class)

जब संकलित आँकड़े अधिक हों और उनके न्यूनतम व अधिकतम मान का अंतर भी ज्यादा हो तो उनकी बारम्बारता सारणी भी बहुत बड़ी बनती है। ऐसी स्थिति में हम एक संख्या की

बारम्बारता न निकालकर संख्याओं के छोटे–छोटे समूहों की बारम्बारता निकालते हैं। (इन समूहों को हम वर्ग कहेंगे)।

उदाहरण–1. 50 ओवर के एक दिवसीय क्रिकेट मैच में किसी टीम के द्वारा प्रत्येक ओवर में बनाए गए रनों की संख्या निम्नानुसार है।

7, 8, 2, 5, 7, 12, 6, 20, 18, 9, 11, 5, 19, 10, 3, 6, 12, 8, 16, 0, 12, 7, 8, 11, 15,
13, 4, 7, 1, 22, 2, 17, 1, 6, 21, 4, 9, 15, 0, 5, 1, 9, 26, 10, 14, 3, 16, 2, 6, 8

इन आँकड़ों से यदि पहले की तरह बारम्बारता सारणी बनानी हो तो हमें देखना पड़ेगा कि 'ऐसे कितने ओवर हैं जिनमें शून्य रन बना? ऐसे कितने ओवर हैं जिनमें एक रन बना? आदि। ऐसा करते हुए हमें 26 तक जाना होगा क्योंकि पूरे मैच में एक ओवर ऐसा भी है जिसमें 26 रन बने हैं। सोचिए कितनी बड़ी सारणी बनेगी?

क्या ऐसी स्थिति में हम इस तरह सोच सकते हैं–

ऐसे कितने ओवर हैं जिनमें 1–6 तक रन बने? ऐसे कितने ओवर है जिनमें 7–12 तक रन बने?

इसी तरह 13–18, 19–24, 25–30 तक रन आदि। इन संख्या समूहों को हम वर्ग (Class) कहते हैं। वर्ग हमारी आवश्यकतानुसार छोटे या बड़े हो सकते हैं। इस उदाहरण में आप (1–4), (5–8), (9–12) या (1–5), (6–10), (11–15) या कोई और वर्ग भी चुन सकते हैं।

इन वर्गों की बारम्बारता कैसे मालूम करें?

ऊपर बताए गए वर्गों में कोई एक प्रकार का वर्ग चुनें। अब हर ओवर में बने रनों की संख्या को क्रमशः देखें। यह संख्या जिस वर्ग में आती हो उसमें एक गणना चिह्न लगाएँ। ऐसा सभी पचास ओवरों की रन संख्या के लिए करें। आपको निम्न बारम्बारता सारणी मिलेगी–

सारणी–4

रनों की संख्या	गणना चिह्न (टेली चिह्न)	ओवरों की संख्या (बारम्बारता)
0–4	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
5–9	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||	18
10–14	~~||||~~ ||||	09
15–19	~~||||~~ ||	07
20–24	|||	03
25–29	|	01
		योग = 50

ऐसी सारणियों का उपयोग करते समय हम कुछ शब्दों का उपयोग करते हैं जैसे वर्ग अंतराल, वर्ग की निम्न सीमा, उच्च सीमा, वर्गांक(मध्य बिन्दु), समावेशी वर्ग, असमावेशी वर्ग आदि। आइए इन्हें समझते हैं।

ऊपर के उदाहरण में 0–4, 5–9, 10–14 आदि सभी वर्ग हैं।

इस बारम्बारता सारणी के किन्हीं दो वर्गों को ध्यान से देखें। आप पाएँगे कि एक वर्ग की उच्च सीमा जहाँ खत्म होती है, अगले वर्ग की निम्न सीमा उसके बाद शुरू होती है, वहीं से नहीं। अर्थात् किसी वर्ग की उच्च सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा के बराबर नहीं है। ऐसे वर्ग **समावेशी वर्ग** कहलाते हैं, क्योंकि वर्ग की निम्न और उच्च सीमा दोनों उसी वर्ग में समाहित होती है। वर्ग 0–4 में 0, 1, 2, 3, 4 रन बनने वाले ओवर शामिल है। याने 5 परिस्थितियाँ। अतः इस वर्ग का अंतराल 5 है। इसी प्रकार 5–9 में 5, 6, 7, 8, 9 रन वाले ओवर शामिल हैं, यहाँ भी वर्ग अंतराल 5 है। अब देखिए जो पहला वर्ग (0–4) है इसमें निम्न सीमा 0 तथा उच्च सीमा 4 है। इसी तरह आप देखेंगे कि बाकी जो वर्ग है उनकी निम्न सीमा क्रमशः 5, 10, 15, ... है और उच्च सीमा क्रमशः 9, 14, 19, ... है। हर वर्ग में उच्च व निम्न सीमा का अंतर 4 है।

इसी तरह वर्ग 0–4 का वर्गांक (मध्य बिन्दु) $= \frac{0+4}{2} = 2$

इसी प्रकार 5–9 का वर्गांक $= \frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$

इसी प्रकार अन्य वर्गों का वर्गांक निकाला जा सकता है।

अब नीचे बनी बारम्बारता सारणी को देखिए। इसमें व्यक्तियों के एक समूह की ऊँचाइयों को समावेशी वर्ग में लिखा गया है–

सारणी–5

वर्गान्तराल (ऊँचाई सेमी. में)	141–150	151–160	161–170	171–180	योग
बारम्बारता	9	11	15	10	**45**

अब निम्न प्रश्नों पर साथियों से चर्चा कीजिए–

1. इस बारम्बारता सारणी में कितने वर्ग हैं?
2. 180 किस वर्ग की उच्च सीमा है?
3. वर्ग 151–160 की निम्न सीमा और उच्च सीमा क्या हैं?
4. किस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है?
5. पहले वर्ग की बारम्बारता क्या है?
6. "171–180 वर्ग की बारम्बारता 10 है"; इस कथन का क्या अर्थ है?
7. क्या ये वर्ग समावेशी हैं? कारण सहित उत्तर दें।

ऐसी सारणी से आंकड़े सरल एवं संक्षिप्त रूप में हमारे सामने आ जाते हैं और हम एक ही नजर में आंकड़ों के मुख्य लक्षणों को देख लेते हैं। इस प्रकार की सारणी को वर्गीकृत बारम्बारता सारणी (grouped frequency distribution table) कहा जाता है।

2. अपवर्जी वर्ग (Exclusive Class)

ऊपर दी गई सारणी–5 में आपने देखा कि 141 से 150 सेमी. ऊँचाई वाले व्यक्तियों की संख्या 9 है। 151 से 160 सेमी. ऊँचाई वाले व्यक्तियों की संख्या 11 है। यदि इन समूहों में किसी व्यक्ति की ऊँचाई 150 से 151 सेमी. के बीच याने 150.5 सेमी. हो तो आप इसे किस वर्ग में रखते?

ऐसे ही यदि किसी व्यक्ति की ऊँचाई 160.4 या 160.6 सेमी. हो तो उसे किस वर्ग में रखते?

इसके लिए हमें अपने वर्ग बनाने के तरीके पर फिर से सोचना होगा। क्या हम ऐसा कर सकते हैं कि जो एक वर्ग की उच्च सीमा हो वही अगले वर्ग की निम्न सीमा भी हो, बीच में कोई अंतर न छूटे? जैसे–

उदाहरण–2. कक्षा–9 के बच्चों का वजन नापा गया। प्राप्त आँकड़ों की बारम्बारता सारणी इस प्रकार से बनी–

वर्ग (वजन किग्रा. में)	30–33	33–36	36–39	39–42	42–45
बारम्बारता (बच्चों की संख्या)	4	9	12	7	3

उदाहरण–3. किसी गाँव के सभी परिवारों की मासिक आय निम्नलिखित हैः–

वर्ग (आय रुपयों में)	0–1000	1000–2000	2000–3000	3000–4000
बारम्बारता (परिवारों की संख्या)	12	30	13	5

वर्ग के ये उदाहरण **अपवर्जी या असमावेशी वर्ग (Exclusive Class)** कहलाते हैं। यहाँ एक समस्या आती है– उदाहरण–2 में यदि किसी परिवार की आय 2000 रु. है तो उसे किस वर्ग में रखेंगे, दूसरे या तीसरे वर्ग में? ऐसे ही उदाहरण–1 में यदि किसी बच्चे का वजन ठीक 39 किलोग्राम है तो उसे किस वर्ग में रखेंगे?

ऐसी परिस्थिति में यह मान लिया जाता है कि यदि कोई मान किसी वर्ग की उच्च सीमा के बराबर है तो उसे अगले वर्ग में रखा जाएगा। इस आधार पर यह कहा जा सकता है कि जिस परिवार की आय 2000 रु. है वह वर्ग–3 (2000–3000) में रखा जाएगा। 39 किलोग्राम वाले बच्चों की गिनती वर्ग–4 (39–42) में की जाएगी।

समावेशी वर्गों को अपवर्जी वर्गों में बदलना

जब समावेशी वर्ग को अपवर्जी वर्ग में बदला जाता है तब समावेशी वर्ग के एक वर्ग की उच्च सीमा और उससे ठीक अगले वर्ग की निम्न सीमा के अन्तर के आधे को सभी वर्गों की निम्न सीमा से घटाते हैं तथा उच्च सीमा में जोड़ते हैं।

सारणी–6

समावेशी वर्ग		अपवर्जी वर्ग	
वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
6–10	8	5.5–10.5	8
11–15	11	10.5–15.5	11
16–20	10	15.5–20.5	10
21.–25	15	20.5–25.5	15
26–30	6	25.5–30.5	6

जैसे कि निम्न उदाहरण में पहले वर्ग की उच्च सीमा 10 तथा दूसरे वर्ग की निम्न सीमा 11 के बीच का अन्तर 1 है। इसके आधे याने 0.5 को सभी वर्ग की निम्न सीमा से घटाया गया और सभी वर्ग की उच्च सीमा में जोड़ा गया है। अर्थात पहले वर्ग की निम्न सीमा 5.5 तथा उच्च सीमा 10.5 हुई। इसी प्रकार अंतिम वर्ग की निम्न सीमा 25.5 तथा उच्च सीमा 30.5 हुई। यहाँ वर्ग अन्तराल 5 ही रहेगा।

करके देखें

अब आप सारणी–5 के समावेशी वर्ग को अपवर्जी वर्ग में बदलिए और 150.5 सेमी., 160.8 सेमी. लंबाई के दो लोगों को उपयुक्त वर्ग में जोड़िए।

उदाहरण–4. किसी वितरण के वर्गांक 104, 114, 124, 134, 144, 154, तथा 164 है। वर्ग का आकार तथा वर्ग की सीमा ज्ञात कीजिए।

हल : वर्ग का आकार दो समीपवर्ती वर्गों के वर्गांकों का अंतर होता है,

इसलिए वर्ग का आकार = 114–104=10

हमें आकार 10 के वर्ग चाहिए जिनके क्रमानुसार वर्ग के मध्य बिन्दु 104, 114, 124, 134, 144, 154 तथा 164 है।

$\therefore$ प्रथम वर्ग की निम्नसीमा $=\left(104-\frac{10}{2}\right)=99$

प्रथम वर्ग की उच्च सीमा $=\left(104+\frac{10}{2}\right)=109$

इसी प्रकार अन्य वर्ग की वर्ग सीमाएँ निम्नानुसार होंगी।

99–109, 109–119, 119–129, 129–139, 139–149, 149–159, 159–169

प्रश्नावली – 16.1

1. निम्नलिखित शब्दों का अर्थ समझाइए।
   वर्गान्तर, वर्ग का आकार, वर्गांक, वर्ग की आवृत्ति, वर्ग सीमाएँ
2. समावेशी वर्ग एवं अपवर्जी वर्ग में अन्तर बताइए।
3. मौसम विभाग द्वारा दिल्ली के लिए अगस्त माह का अधिकतम तापमान निम्नानुसार दिया गया है। इन आँकड़ों से बारंबारता सारणी बनाइए।

   32.5, 33.3, 33.8, 31.0, 28.6, 33.9, 33.3, 32.4, 30.4, 32.6, 34.7, 34.9, 31.6, 35.2, 33.3, 33.3, 36.4, 36.6, 37.0, 34.5, 32.5, 31.4, 34.4, 33.6, 37.3, 37.5, 36.9, 37.0, 36.3, 36.9, 36.9.

4. 40 शिक्षकों की उनके आवास से कार्यस्थल की दूरियाँ (किलोमीटर में) निम्नानुसार हैं।

7, 9, 5, 3, 7, 8, 10, 20, 3, 5, 11, 25, 15, 12, 7, 13, 18, 12, 11, 3

12, 6, 12, 14, 7, 2, 9, 15, 6, 15, 17, 2, 16, 32, 19, 10, 12, 17, 18, 11

वर्ग माप 5 वाली बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

5. π का मान दशमलव के 50 वें स्थान तक नीचे दिया गया है

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) दशमलव बिन्दु के बाद 0 से 9 तक आने वाले अंकों की एक बारंबारता सारणी बनाइए।

(ii) सबसे कम बार आने वाला अंक कौनसा है?

(iii) सबसे अधिक बार आने वाला अंक कौनसा है और इससे क्या निष्कर्ष निकलता है?

6. एक गाँव के 40 खेतों में प्रति हेक्टेयर धान उत्पादन (क्विंटल में) निम्नानुसार है। एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइये।

31, 20, 25, 18, 28, 20, 18, 26, 15, 12, 25, 16, 30, 20, 22, 24, 45, 28, 30, 16,

30, 40, 20, 30, 20, 30, 28, 47, 40, 35, 28,45, 20, 35, 32, 18, 20, 26, 23, 16,

आप इस बारंबारता बंटन सारणी से क्या–क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं, लिखिए।

7. 40 बच्चों से यह पूछा गया कि पिछले सप्ताह उन्होंने कितने घंटों तक टी.वी. प्रोग्राम देखे। प्राप्त परिणाम ये रहेः–

1, 5, 6, 2, 7, 4, 10, 12, 5, 8, 10, 12, 36, 22, 6, 15, 3, 1, 2, 4,21, 16, 17,

13, 14, 2, 7, 9, 23, 26, 31, 33, 5, 35, 25, 26, 29, 30, 9, 31

(i) वर्ग माप 5 वाली बारम्बारता सारणी बनाइए।

(ii) प्रथम वर्गान्तर की निम्न सीमा लिखिए।

(iii) चौथे वर्गान्तर की वर्ग सीमा बताइए।

(iv) सातवें वर्गान्तर का वर्गांक बताइए।

(v) कितने बच्चों ने उस सप्ताह में 20 या अधिक घंटों तक टेलीविजन देखा।

आँकड़ों का आलेखीय निरूपण

एक कहावत है कि "एक चित्र हजार शब्दों से भी उत्तम होता है।" प्रायः अलग–अलग आँकड़ों की तुलनाओं को आलेख की सहायता से अच्छी तरह से दर्शाया जा सकता है। यहाँ हम निम्नलिखित आलेखीय निरूपण करेंगे।

(i) आयत चित्र (Histograms)

(ii) आवृत्ति (बारंबारता) बहुभुज (Frequency polygons)

(iii) संचयी आवृत्ति वक्र (तोरण) (Cumulative frequency curve or ogive)

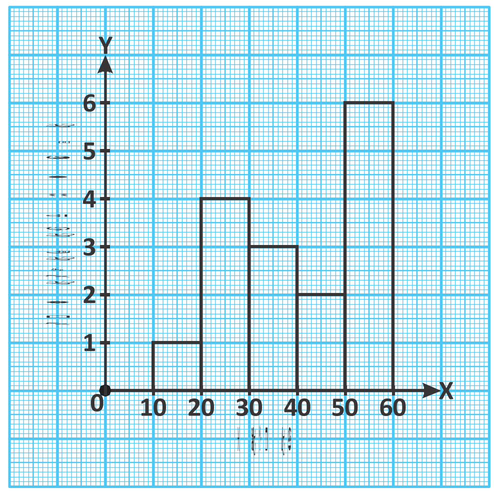
CEP3HH

आयत चित्र (Histrogram)

आवृत्ति वितरण के आलेखीय निरूपण की यह सरल एवं उत्तम विधि है। इसे बनाते समय वर्ग अन्तराल (स्वतंत्र चर) को X–अक्ष एवं आवृत्तियों (आश्रित चर) को Y–अक्ष पर प्रदर्शित करते हैं। इस विधि में प्रत्येक वर्ग अन्तराल के ऊपर आवृत्तियों के बराबर ऊँचाई का आयत बनाते हैं। अतः आयतों की एक श्रृंखला सी दिखाई देती है। इन आयतों के क्षेत्रफल उनकी संगत बारम्बारताओं के समानुपाती होते हैं।

उदाहरण–5. किसी कक्षा के 16 विद्यार्थियों द्वारा परीक्षा में प्राप्त किए गए अंक निम्नानुसार हैंः–

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
10–20	1
20–30	4
30–40	3
40–50	2
50–60	6



इन आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र खींचिए।

हल : हम आयत चित्र खींचने के लिए निम्न चरणों का अनुसरण करते हैं–

चरण–1 एक आलेख कागज (ग्राफपेपर) पर दो लांबिक रेखाएँ खींचिए तथा उन्हें X–अक्ष और Y–अक्ष द्वारा निरूपित कीजिए।

चरण–2 क्षैतिज अक्ष के अनुदिश, हम वर्ग (प्राप्तांक) को प्रदर्शित करेंगे। यहाँ हमने 1 सेमी. में 1 वर्ग को दिखाया है।

चरण–3 उर्ध्वाधर अक्ष पर बारम्बारताओं (विद्यार्थियों की संख्या) को निरूपित करेंगे। इसके लिए उपयुक्त स्केल (यहाँ 1 विद्यार्थी = 1 सेमी.) लिया है।

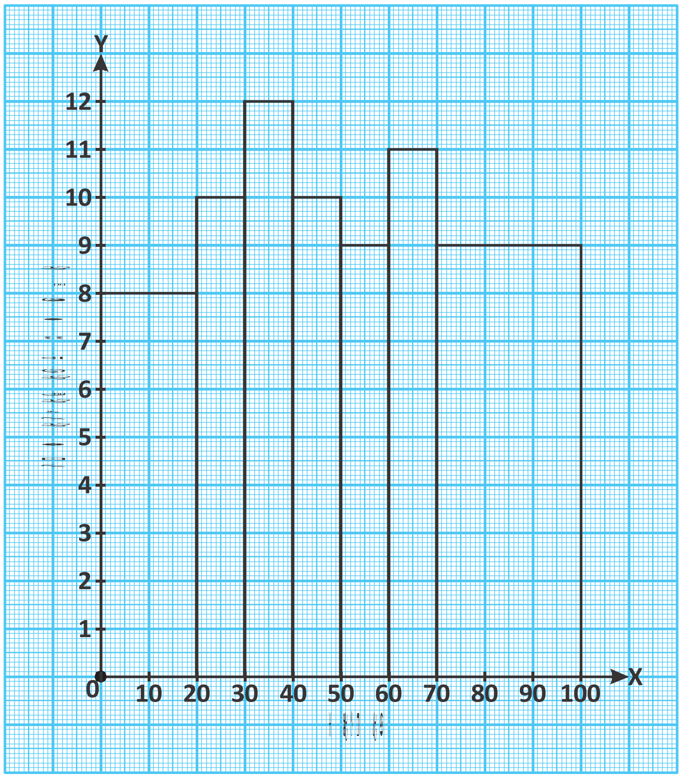
यह अभीष्ट आयत चित्र है।

असमान वर्ग अंतराल के लिए आयत चित्र

अब हम एक अलग स्थिति पर विचार करते हैं यहाँ एक कक्षा में विज्ञान विषय में 100 अंकों में से विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नानुसार हैंः–

सारणी–7

अंक	0–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70 और उससे अधिक
विद्यार्थियों की संख्या	08	10	12	10	09	11	09



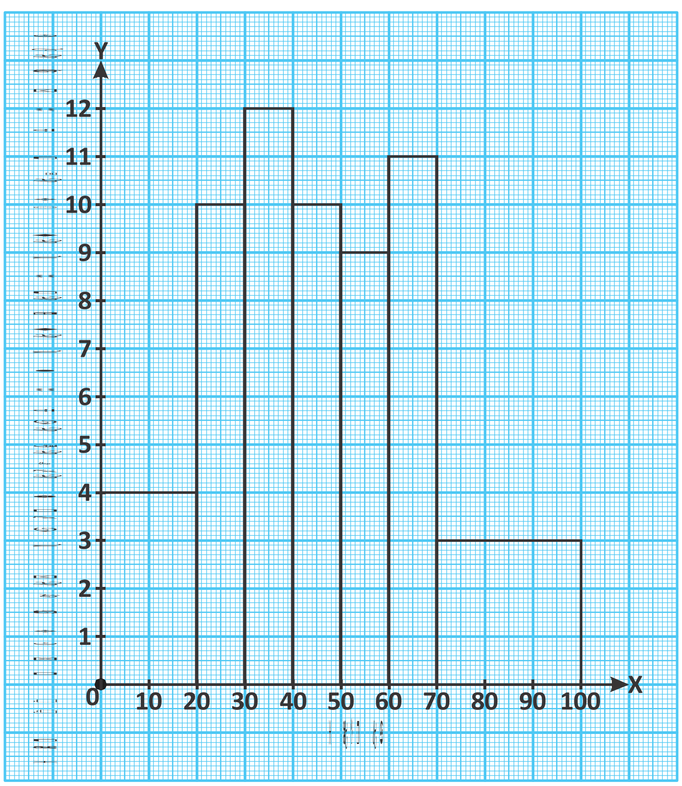
दी गई सारणी से स्पष्ट है, कि 20 से कम अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या 8 एवं 70 और उससे अधिक अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या 9 है। यहाँ आँकड़े विभिन्न माप वाले वर्ग अन्तराल में दिए गए हैं। प्रथम वर्ग अन्तराल की माप 20, अंतिम की 30 तथा शेष अंतराल की 10 हैं। अब कोई विद्यार्थी इस सारणी का आयत चित्र निम्नानुसार बनाता है। क्या यह आयत चित्र ठीक है?

यहाँ वर्ग अंतराल असमान है तो हमें आयत चित्र बनाते समय उन्हें समान वर्ग अंतराल में बदलना पड़ेगा, जैसे– प्रथम वर्ग हेतु

जब वर्ग अंतराल 20 है तो आयत की लम्बाई 8 है

$\therefore$ वर्ग अंतराल 10 है तो आयत की लम्बाई

$$= \frac{8}{20} \times 10 \quad = 4$$



इसी प्रकार अंतिम आयत का वर्ग अंतराल 30 है। तो आयत की लंबाई $= \frac{9}{30} \times 10 = 3$ होगी व शेष वर्ग का अंतराल 10 ही है तो हमें कोई परिवर्तन करने की आवश्यकता नहीं है। अतः हम किसी भी आयत की लंबाई निम्न तरीके से बदल सकते हैं–

आयत की लंबाई

$$= \frac{\text{बारंबारता}}{\text{वर्ग की चौड़ाई}} \times \frac{\text{वर्ग की}}{\text{न्यूनतम चौड़ाई}}$$

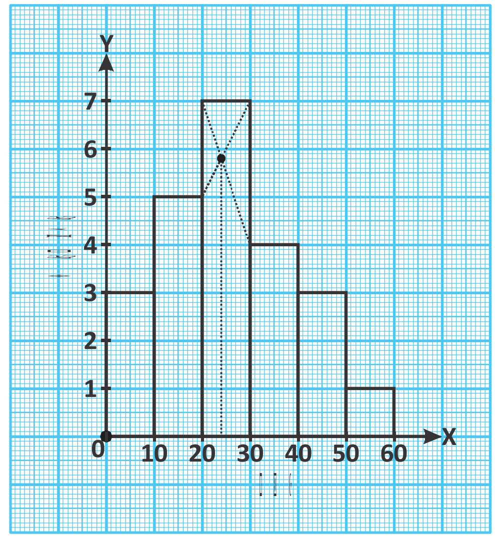
इस प्रकार हमें प्रत्येक स्थिति में 10 वर्ग अन्तराल पर आयत की लम्बाई प्राप्त हुई। अतः परिवर्तित लम्बाई वाला सही आयत चित्र निम्नानुसार होगा।

बहुलक निर्धारण की बिन्दु रेखीय विधि
(Graphical method to Locate Mode)

आयत चित्र के माध्यम से असमावेशी (अपवर्जी वर्ग) के आँकड़ों के लिये बहुलक का निर्धारण भी किया जाता है, जैसे–

सारणी–8

वर्ग	आवृत्ति
0–10	3
10–20	5
20–30	7
30–40	4
40–50	3
50–60	1



चरण–1 दिए गए आँकड़ों से आयत चित्र बनाइए।

चरण–2 सबसे अधिक ऊँचाई वाले आयत को बहुलक वर्ग का आयत माना जाता है।
बहुलक वर्ग के आयत के ऊपरी बायें कोने को उसके अगले आयत के बायें कोने से मिलाइए, इसी प्रकार बहुलक वर्ग के आयत के ऊपरी दायें कोने को इससे पहले आयत के ऊपरी दायें कोने से मिलाइए।

चरण–3 : चरण–2 में दर्शाए गए दोनों मिलान रेखाएँ जिस बिंदु पर कटती हैं, उस बिंदु से X–अक्ष पर लंब खींचिए।

चरण–4 : लंब रेखा, X–अक्ष को जिस बिंदु पर मिलती है वह बहुलक का मान होता है। यहाँ यह मान 24 प्राप्त हो रहा है। अतः आँकड़ों के बहुलक का मान 24 होगा।

आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)

एक वर्गीकृत बारंबारता (आवृत्ति) बंटन को आलेख रूप से निरूपित करने की एक अन्य विधि आवृत्ति बहुभुज है। आवृत्ति बहुभुज की रचना के लिए प्रत्येक वर्गान्तर पर आयत चित्र बनाया जाता है और आयत की ऊपरी भुजा के मध्य बिंदुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिला दिया जाता है। इसमें अनेक भुजाएँ होती हैं इसी कारण इसे आवृत्ति बहुभुज कहते हैं। आवृत्ति बहुभुज दो प्रकार से बनाए जाते हैं।

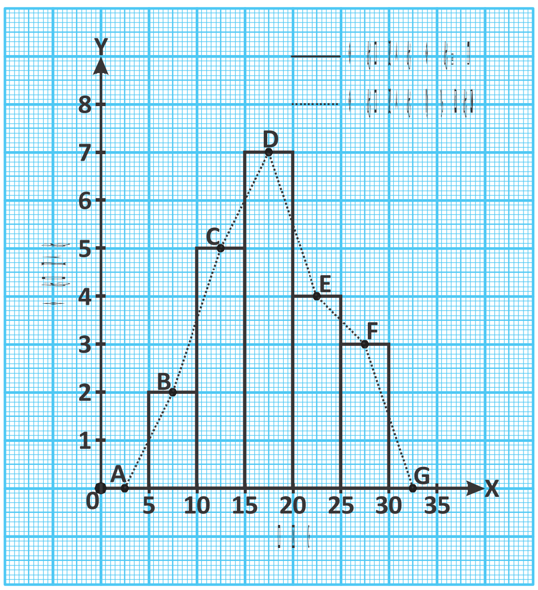
1. आवृत्ति आयत चित्र की सहायता से (By Histogram)
2. प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

1. आवृत्ति आयत चित्र की सहायता से आवृत्ति बहुभुज बनाना (**Constructing Frequency Polygon by Histogram**))

सारणी–9

वर्ग	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
आवृत्ति	2	5	7	4	3

इस विधि में निम्न चरण हैं–



चरण–1 सर्वप्रथम आवृत्ति वितरण से आयत चित्र बनाइए।

चरण–2 प्रत्येक आयत के उपरी भाग के मध्य बिंदु क्रमशः B, C, D, E, F अंकित कीजिए। सरल रेखाओं की सहायता से मध्यबिंदुओं को क्रमशः मिलाइए।

चरण–3 अब X–अक्ष पर आयत चित्र के दोनों ओर एक–एक कल्पित वर्ग लीजिए और उनके मध्य बिंदुओं को पूर्व प्राप्त मध्य बिंदुओं से जोड़िए। यहाँ पहला वर्ग 5–10 है अतः इससे पहले आने वाला कल्पित वर्ग (0–5) का मध्य बिन्दु (2.5) होगा इसी प्रकार अंतिम वर्ग 25–30 है इसके बाद आने वाला कल्पित वर्ग 30–35 का मध्यबिन्दु (32.5) होगा। ABCDEFG अभीष्ट आवृत्ति बहुभुज है।

सोचें एवं चर्चा करें

आवृत्ति बहुभुज का क्षेत्रफल व आयत चित्र का क्षेत्रफल बराबर होता है क्यों? (संकेत : सर्वांगसम त्रिभुज के गुणों का प्रयोग करें)

2. प्रत्यक्ष विधि द्वारा आवृत्ति बहुभुज बनाना (**Constructing Frequency Polygon by Direct Method**)

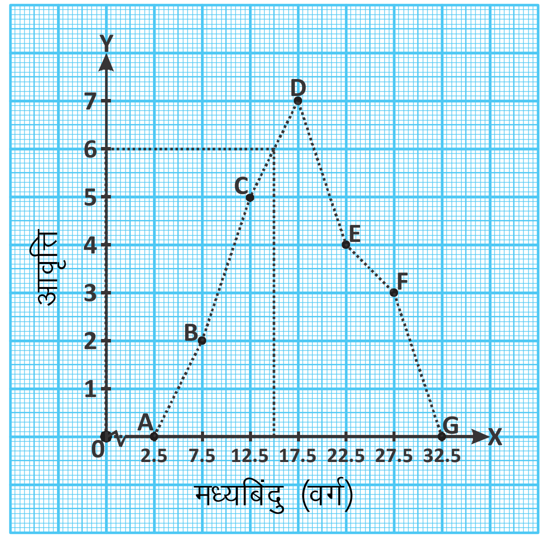
सारणी–10

वर्ग	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
आवृत्ति	2	5	7	4	3

इस विधि में निम्न चरण हैं–

चरण–1 सर्वप्रथम प्रत्येक वर्गान्तरों के मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए।

वर्ग	आवृत्ति	मध्य बिंदु
5–10	2	7.5
10–15	5	12.5
15–20	7	17.5
20–25	4	22.5
25–30	3	27.5



चरण–2 X–अक्ष में इन मध्य बिंदुओं एवं Y–अक्ष में इनकी आवृत्तियों को अंकित कीजिए

चरण–3 प्रत्येक मध्य बिंदु के संगत आवृत्तियों को ग्राफ पर प्रदर्शित कीजिए। BCDEF बिंदु मिलेंगे।

चरण–4 प्रथम वर्ग के पहले काल्पनिक वर्ग 0–5 के मध्य बिंदु 2.5 को X–अक्ष पर प्रदर्शित कीजिए। (बिंदु A)। इसी तरह अंतिम वर्ग के बाद एक और काल्पनिक वर्ग 30–35 के मध्य बिंदु 32.5 को X–अक्ष पर प्रदर्शित कीजिए (बिंदु G)। इन्हें X–अक्ष पर लेने का अर्थ है, इनकी बारंबारताएँ शून्य हैं।

चरण–5 आवृत्तियों के अंकित बिंदुओं को सरल रेखा से मिलाइए।

चरण–6 इस प्रकार बनी आकृति ABCDEFG आवृत्ति बहुभुज कहलाती है।

नोटः– आवृत्ति बहुभुज द्वारा मूल्य वृद्धि एवं गिरावट का स्पष्ट संकेत मिलता है। इसके माध्यम से वर्ग के किसी भी मान के लिए आवृत्ति का अनुमान लगाया जा सकता है। जैसे X–अक्ष में 15 के लिए आवृत्ति का मान 6 होगा।

आयत चित्र एवं आवृत्ति बहुभुज में अंतर (Difference Between Histogram and Frequency Polygon)

आयत चित्र	आवृत्ति बहुभुज
1. आयत चित्र केवल आवृत्ति को दण्डों द्वारा प्रदर्शित करता है।	1. आवृत्ति बहुभुज अधिक उपयोगी है यह आँकड़ों में मूल्य वृद्धि एवं गिरावट का भी संकेत देता है। इसमें आवृत्ति को बहुभुज के रूप में प्रदर्शित किया जाता है।
2. आवृत्तियों को पूरे वर्गांतर में फैला हुआ माना जाता है।	2. किसी वर्ग की सभी आवृत्तियों को उस वर्ग के मध्य बिंदु पर केंद्रित माना जाता है।
3. इसकी रचना समान और असमान वर्ग चौड़ाई के लिए की जा सकती है।	3. केवल समान वर्ग चौड़ाई के लिए बनाया जाता है।

ओजाइव अथवा संचयी आवृत्ति वक्र (Ogive or Cumulative Frequency Curve)

सांख्यिकी में वर्ग और उसके संगत संचयी आवृत्ति के लेखा–चित्र का प्रदर्शन संचयी आवृत्ति वक्र या ओजाइव कहलाता है। जिस प्रकार आवृत्ति बहुभुज का लेखाचित्र बनाया जाता है उसी प्रकार संचयी आवृत्ति वक्र का भी लेखा चित्र बनाया जाता है।

संचयी आवृत्ति वक्र बनाने की दो विधियाँ हैं–

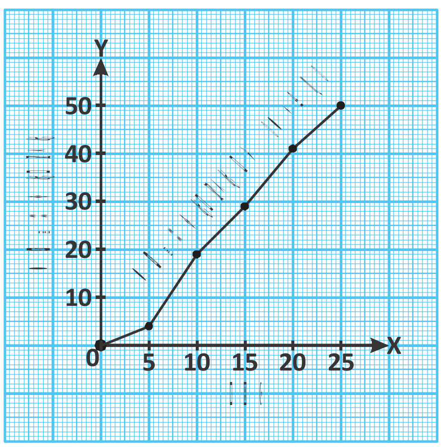
1. "से कम" विधि 2. "और अधिक" विधि

1. **"से कम विधि"**:– किसी वर्ग की संचयी आवृत्ति, उस वर्ग की आवृत्ति और उस वर्ग से पहले के सभी वर्गों की आवृत्तियों का योगफल होता है।

अब निम्न सारणी के आधार पर "से कम" संचयी आवृत्ति वक्र बनाने का प्रयास करें–

सारणी–11

वर्ग	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
आवृत्ति	4	15	10	12	09

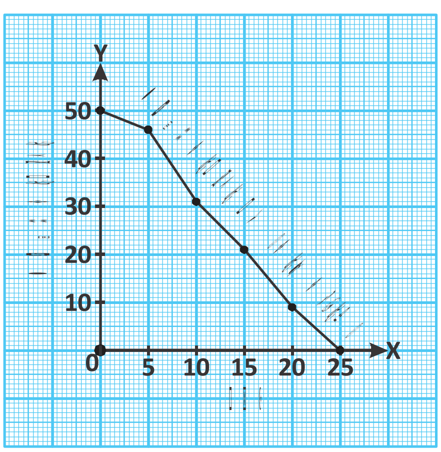


हल : "से कम" की संचयी आवृत्ति

वर्ग	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
0 से कम	0	0
5 से कम	4	4
10 से कम	15	19=(15+4)
15 से कम	10	29=(10+15+4)
20 से कम	12	41=(12+10+15+4)
25 से कम	9	50=(9+12+10+15+4)

2. **"और अधिक" विधि**:– किसी वर्ग की संचयी आवृत्ति, उस वर्ग की आवृत्ति और उसके बाद के सभी वर्गों की आवृत्तियों का योगफल होता है।

अब इसे निम्न सारणी के आधार पर "और अधिक" संचयी आवृत्ति वक्र बनाते हैं।



वर्ग	संचयी आवृत्ति
0 और अधिक	50=(4+15+10+12+9+0)
5 और अधिक	46=(15+10+12+9+0)
10 और अधिक	31=(10+12+9+0)
15 और अधिक	21=(12+9+0)
20 और अधिक	09=(9+0)
25 और अधिक	0

संचयी आवृत्ति वक्र या ओजाइव का महत्त्व

संचयी आवृत्ति वक्र या ओजाइव का उपयोग आँकड़ों के अध्ययन में कई जगहों पर होता है, जैसे–

1. जब आँकड़ों के अध्ययन में एक दिए हुए मूल्य से कम या अधिक ज्ञात करना हो।
2. ओजाइव का प्रयोग तुलनात्मक अध्ययन के लिए किया जाता है।
3. ओजाइव का प्रयोग केंद्रीय प्रवृत्ति के माप जैसे– माध्यिका, चतुर्थक, शतमक आदि की गणना में किया जाता है।
4. विशिष्ट संचयी आवृत्ति में चर का कौनसा मूल्य शामिल है, वह भी ज्ञात किया जा सकता है।

प्रश्नावली – 16.2

1 निम्न में से सही विकल्प का चयन कीजिए।

(i) एक समावेशी श्रेणी में–

a) दोनों सीमाएँ अलग–अलग वर्ग अंतराल में शामिल होती है।

b) दोनों सीमाएँ एक ही वर्ग अंतराल में होती हैं।

c) दोनों सीमाएँ किस वर्ग में होगी, कुछ निश्चित नहीं होता है।

d) इनमें से कोई नहीं।

CEXYPJ

(ii) संचयी बारम्बारता सारणी के लिए विधि है–

a) से कम b) और अधिक

c) उक्त दोनों d) इनमें से कोई नहीं।

(iii) आयत चित्र के माध्यम से ज्ञात किया जा सकता है–

a) बहुलक b) माध्यिका

c) माध्य d) इनमें से कोई नहीं।

(iv) संचयी आवृत्ति वक्र से ज्ञात किया जा सकता है–

a) बहुलक b) माध्यिका

c) माध्य d) इनमें से कोई नहीं।

(v) आयत चित्र पर आयत की चौड़ाई निर्भर करती है–

a) वर्ग की माप पर b) वर्ग की संख्या पर

c) आवृत्ति की संख्या पर d) उपरोक्त सभी पर

2. 25 छात्रों में से प्रत्येक द्वारा एक प्रश्न को हल करने में लिया गया समय (सेकण्ड में) इस प्रकार है–

16, 20, 26, 27, 28, 30, 33, 37, 38, 40, 42, 43, 46, 46, 46, 48, 49, 50, 53, 58, 59, 60, 64, 52, 20

(i) 10 सेकण्ड वर्गांतर लेकर इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए।

(ii) इस आवृत्ति वितरण को दर्शाने के लिए एक आवृत्ति आयत चित्र बनाइए।

(iii) आयत चित्र की सहायता से आवृत्ति बहुभुज बनाइए।

3. किसी पौधे के 30 पत्तियों की लंबाई मिलीमीटर में निम्न सारणी में दी गई है–

पत्तियों की लंबाई (मिलीमीटर में)	111–120	121–130	131–140	141–150	151–160	161–170
पत्तियों की संख्या	3	5	7	9	4	2

(i) आवृत्ति वितरण को दर्शाने के लिए एक आयत चित्र बनाइए।
(संकेत– वर्ग अंतराल को सतत् कीजिए।)

(ii) प्रत्यक्ष विधि से आवृत्ति बहुभुज बनाएँ?

(iii) किस अंतराल के पत्तियों की संख्या अधिक होगी?

4 एक क्रिकेट मैच में दो टीमों A और B द्वारा 10 ओवर (60 बॉल) में बनाए गए रन निम्नानुसार हैं:–

गेंदों की संख्या	टीम–A	टीम–B
1–6	3	6
7–12	2	6
13–18	7	1
19–24	8	10
25–30	3	6
31–36	8	5
37–42	5	3
43–48	11	4
49–54	6	7
55–60	2	11

उपर्युक्त आँकड़ों से एक ही ग्राफ पेपर पर आवृत्ति बहुभुज बनाइए।

(संकेत– सर्वप्रथम वर्ग अंतराल को सतत् कीजिए)

5. 100 छात्रों के प्राप्तांकों का आवृत्ति वितरण निम्नानुसार है–

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	योग
छात्र संख्या	7	10	23	51	6	3	100

उपर्युक्त आँकड़ों से संचयी आवृत्ति वक्र बनाइए।

6. निम्न के लिए बारंबारता सारणी एवं संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

अंक	छात्र संख्या
10 से कम	3
20 से कम	8
30 से कम	12
40 से कम	19
50 से कम	31
60 से कम	42
70 से कम	60

7. कक्षा 9वीं के दो समूहों की जाँच परीक्षा में प्राप्तांकों का वितरण निम्नानुसार है–

वर्गान्तर	समूह–A	समूह–B
50–52	4	8
47–49	10	9
44–46	15	10
41–43	18	14
38–40	20	12
35–37	12	17
32–34	13	22
योग	92	92

एक ही ग्राफ पेपर पर प्रत्येक समूह के लिए एक आवृत्ति बहुभुज बनाइए।

हमने सीखा

1. प्रारम्भिक रूप से उद्देश्य विशेष को लेकर एकत्रित किए गए प्रेक्षण आँकड़े कहलाते हैं।
2. जब प्रेक्षणों की संख्या अधिक होती है तो उनकी बारम्बारताओं को ज्ञात करने के लिए हम मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हैं।

3. दिए हुए आँकड़ों में कोई विशेष प्रेक्षण जितनी बार आता है उस संख्या को प्रेक्षण की बारंबारता कहते हैं।

4. आँकड़ों के विभिन्न प्रेक्षणों की बारंबारताओं को दर्शाने वाली सारणी बारंबारता बंटन सारणी या बारंबारता सारणी कहलाती है।

5. जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत अधिक होती है तो हम आँकड़ों को समूहों में संगठित करते हैं, जिन्हें वर्ग कहते हैं। इस प्रकार प्राप्त आँकड़े वर्गीकृत आँकड़े कहलाते हैं।

6. आयत चित्र वर्गीकृत आँकड़ों का एक आलेखीय निरूपण होता है जिसमें प्रत्येक वर्ग के लिए एक आयत खींचा जाता है, जहाँ X–अक्ष में वर्ग अंतराल एवं Y–अक्ष में ऊंचाई संगत बारंबारता से निर्धारित की जाती है।

7. वर्ग के मध्य बिंदु को X–अक्ष तथा आवृत्तियों को Y–अक्ष में लेकर बनाया गया बहुभुज, आवृत्ति बहुभुज कहलाता है।

8. दिये गए आँकड़ों के लिए किसी विशेष वर्गान्तर की निम्न सीमा के बराबर या उससे अधिक निरीक्षणों की कुल संख्या होने पर अवरोही संचयी बारम्बारता मिलेगी।

9. समूहबद्ध बारम्बारता बंटन में यदि वर्गान्तर भिन्न है तो सोपान आलेख में बारम्बारता घनत्व के आधार पर आयतों की रचना करनी होगी।

$$\text{बारम्बारता घनत्व} = = \frac{\text{श्रेणी की बारम्बारता}}{\text{वर्ग की लंबाई}} \times \text{ आँकड़ों की न्यूनतम श्रेणी}$$

10. समान आँकड़ों का बारम्बारता बहुभुज और संचयी आलेख का क्षेत्रफल समान होता है।

उत्तरमाला

[Answer Key]

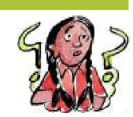
प्रश्नावली – 1.1

1. सही जोड़ी

भारतीकृष्णतीर्थ – वैदिक गणित
वराहमिहिर – पंच सिद्धांत
ब्रह्मगुप्त – ब्रह्मस्फुट सिद्धांत
भास्कराचार्य – सिद्धांत शिरोमणि
आर्यभट – आर्यभटीय

2. (1) खं (2) 10^{53}
3. आर्यभट, आर्यभटीय
4. बीजगणित
5. 16

प्रश्नावली – 1.2



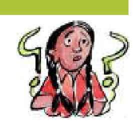
2. 6, 2, 7, 9, 7, 3, 1, 2, 4, 4,

3. 2, 3, 5, 7

प्रश्नावली – 1.3

1. 736	2. 2288	3. 3404	4. 3025
5. 39483	6. 96048	7. 311472	8. 367836

प्रश्नावली – 1.4



1. 5643	2. 43775622	3. 86913	4. 34499655
5. 432	6. 9447543		

प्रश्नावली – 1.5

1. 221	2. 616	3. 1224	4. 9009	5. 1225
6. 2016	7. 5616	8. 9021	9. 11024	10. 11025

11. 42021 12. 164025 13. 255016 14. 366021 15. 497024
16. 819025 17. 38021 18. 87016 19. 156016 20. 245025

प्रश्नावली – 1.6

1. 169 2. 10608 3. 11130 4. 9212
5. 12444 6. 10272 7. 1016048 8. 972052 9. 1013968.

प्रश्नावली – 1.7

225, 625, 1225, 2025, 3025, 5625, 7225, 9025, 11025, 13225.

प्रश्नावली – 1.8

(1) 1156 (2) 361 (3) 2916 (4) 4096 (5) 8464.

प्रश्नावली – 1.9

114, 196, 10404, 11025, 11664, 8836, 992016

प्रश्नावली – 1.10

(1) 97 (2) 87 (3) 91 (4) 57

प्रश्नावली – 1.11

(1) $4x^2 + 21x + 5$ (2) $12x^2 + 18xy + 6y^2$ (3) $x^2 - 9y^2$
(4) $x^2 + 4x + 16$ (5) $x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 11x + 4$
(6) $6x^4 + 17x^2y - 2x^2 + 12y^2 - y - 20$

प्रश्नावली – 2.1

1. (i) 1 (ii) शून्य (iii) शून्य (नोटः– (i) व (iii) के कई उदाहरण हो सकते हैं)

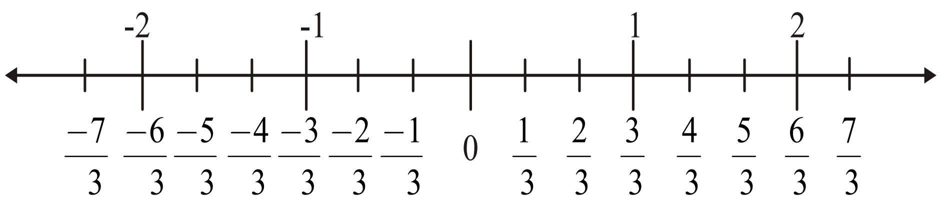
2. $\frac{25}{4}, \frac{26}{4}, \frac{27}{4}$ 3. $\frac{25}{42}, \frac{26}{42}, \frac{27}{42}, \frac{28}{42}, \frac{29}{42}$

4. $\frac{33}{48}, \frac{34}{48}, \frac{35}{48}$

5. $\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5} \ldots\ldots \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$ के बीच की कोई भी चार संख्याएँ

6. $\frac{21}{40} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{35}{40}$ के बीच की कोई भी तीन संख्याएँ।

7.



8. (i) 25.2 (सांत दशमलव) (ii) 20.9375 (सांत दशमलव)
(iii) 3.14285714....(असांत आवर्ती) (iv) –39.33...(असांत आवर्ती)

9. (i) $\frac{53}{100}$ (ii) $\frac{84}{5}$ (iii) $\frac{421}{4}$ (iv) $\frac{184}{25}$

10. (i) $\frac{70}{99}$ (ii) $\frac{277}{33}$ (iii) $\frac{563}{180}$ (iv) $\frac{5120}{999}$

प्रश्नावली – 2.2

1. (i) $18\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt{7}$

2. $7\sqrt{2}+\sqrt{5}$

3. $3\sqrt{7}-8\sqrt{5}$

4. (i) 1 (ii) 20 (iii) $7+3\sqrt{6}$ (iv) $10-2\sqrt{21}$

5. (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (iii) $\frac{\sqrt{7}}{1}$

6. (i) $a=\frac{13}{11};\ b=\frac{4}{11}$ (ii) $a=4,\ b=1$

7. (i) $20+3\sqrt{3}$ (ii) $16-\sqrt{3}$

8. 6

प्रश्नावली – 3.1

1. (i) 32 (ii) 81 (iii) 16

2. (i) 8 (ii) 625 (iii) –9765625

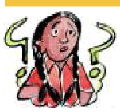
3. (i) $128t^3$ (ii) -1

5. (i) 8.52×10^{-12} (ii) 8.02×10^{15} (iii) 4.196×10^{10}

6. (i) 0.00000502 (ii) 0.00000007 (iii) 1000010000

7. (i) 7×10^{-6} मी. (ii) 1.2756×10^{7} (iii) 8×10^{-2} मी.

प्रश्नावली – 3.2



1. (i) 4 (ii) 3 (iii) 5

2. (i) 529 (ii) 1,331 (iii) 441 (iv) $\frac{1}{15}$

3. (i) $\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{4}{3}}$ (ii) $\left(\frac{13}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) 243

4. (i) $\sqrt[9]{512} < \sqrt[3]{64} < \sqrt{81}$ (ii) $\sqrt[4]{625} < \sqrt[3]{343} < \sqrt{100}$

(iii) $\sqrt[5]{243} < \sqrt[3]{216} < \sqrt{64}$ (iv) $\sqrt[7]{128} < \sqrt[4]{256} < \sqrt[3]{1000}$

5. (i) करणी (ii) नहीं (iii) करणी

(iv) नहीं (v) करणी

प्रश्नावली – 4.1

1. (i) बहुपद है, क्योंकि चर की घात पूर्ण संख्या है।

(ii) बहुपद नहीं है, क्योंकि $z + \frac{3}{z}$ को लिखेंगे $z + 3z^{-1}$

अर्थात् z की घात पूर्ण संख्या नहीं है।

(iii) बहुपद नहीं है; क्योंकि $\sqrt{y} + 2y + 3$ को लिखेंगे $y^{\frac{1}{2}} + 2y + 3$

अर्थात् y की घात $\frac{1}{2}$ है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है।

(iv) बहुपद है, क्योंकि चर की घात पूर्ण संख्या है।

(v) बहुपद है, क्योंकि चर की घात पूर्ण संख्या है।

2. (i) 5 (ii) 3 (iii) -5 (iv) $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{1}{4}$

3. (i) $\frac{1}{5}, 5$ (ii) $\sqrt{2}, 7$ (iii) 0, 2

4. (i) $x^4 + 3, 3x^4 + 4$ आदि (ii) $y^6 + 3y + 3, t^6 + 3t - 5$ आदि
   (iii) $3x^5, z^5, 11z^5$ आदि

5. (i) 3 (ii) 9 (iii) 4
   (iv) 3 (v) 1 (vi) 0

6. अचर (vi), (x), (xii) रैखिक (iv), (ix), (xi)
   द्विघातीय (iii), (vii), (viii) त्रिघातीय (i), (ii), (v)

प्रश्नावली – 4.2

1. (i) -2 (ii) 4 (iii) -56

2. (i) 2, 3, 36, 119 (ii) $-1, 0, 3, 8$
   (iii) $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{16}{3}$ (iv) 1, 0, 9, 28 (v) 2, 1, 4, 5

3. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) हाँ
   (v) नहीं (vi) हाँ (vii) हाँ

4. (i) -6 (ii) 6 (iii) 0 (iv) 0 (v) $\frac{-d}{c}$
   (vi) 2 (vii) $-\frac{3}{2}$ (viii) $\sqrt{5}$ (ix) $\frac{4}{3}$

प्रश्नावली – 4.3

1. (i) $5x^2 + 5x + 6$ (ii) $3p^3 + 8p^2 - 7p + 11$ (iii) $2x^3 + 7x^2 - 8x - 1$

2. (i) $4y^2 + 9y$ घात 2 (ii) $-r^2 + 4r + 17$ घात 2
   (iii) $3x^3 + 4x^2 + 8$ घात 3

3. (i) $7t^3 - 4t^2 + 5t$ (ii) $-4p^3 + 7p^2 + 8p - 12$ (iii) $7z^3 - 10z^2 + 9z + 17$

4. $2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 11x + 4$ 5. 5

6. $-x^3 + 4x^2 - x - 2$ 7. $-u^7 + 4u^6 - 4u^2 - u - 6$

8. $-3y^2 - y + 1$ 9. $-t^3 - 2t - 11$

10. (i) $21x^3 + 34x^2 + 11x + 4$ (ii) $15x^5 - 45x^4 + 36x^3 - 18x^2 + 12x$
    (iii) $p^7 - 5p^5 + p^4 + 3p^3 - 5p^2 + 3$

11. $2x^6 + 14x^4 + 3x^3 - 21x - 9$ 12. 5

प्रश्नावली – 5.1

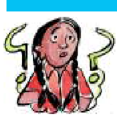
1. (i) $x + (x + 1) = 11$ (ii) $2y + y = 30$ (iii) $2z + 2z + z = 40$
   (iv) $2[(w + 3) + w] = 15$ (v) $2x + 3x + 4x = 18$

2. (i) $x = 3$ (ii) $p = \frac{23}{5}$ (iii) $x = 2$
   (iv) $t = -\frac{1}{9}$ (v) $z = 1$ (vi) $x = \frac{2}{7}$

3. (i) किसी संख्या में 3 जोड़ने पर 27 प्राप्त होता है।
   (ii) स्नेहा की उम्र, राजीव की उम्र की आधी है तथा दोनों की उम्र का योग 18 है।
   (iii) किसी संख्या में 2 जोड़ने के पश्चात्, उसी संख्या में भाग देने पर 30 प्राप्त होता है।

4. (i) $\frac{-6}{5}$ (ii) $k = 4$ (iii) $p = 5$
   (iv) $x = -\frac{68}{25}$ (v) $m = \frac{7}{5}$ (vi) $t = 2$
   (vii) $x = \frac{27}{10}$ (viii) $x = \frac{35}{33}$ (ix) $y = -8$

प्रश्नावली – 5.2



1. 6 मीटर 2. 15 सेमी., 10 सेमी. 3. $35^{o}, 50^{o}, 95^{o}$
4. 3, 5, 7 5. 20 सेमी. 6. 35
7. 28 व 20 वर्ष 8. 15 9. 80, 120
10. 180, 185, 190 11. रोहित = 39 वर्ष, प्रदीप = 17 वर्ष
12. 22 कि.मी./घंटा

प्रश्नावली – 6.1

1. (i) A = 6, B = 9 (ii) X = 5, Y = 6
   (iii) L = 0, M=1, N = 8 (iv) Z = 5
   (v) X = 1, Y = 4 (vi) P = 4, Q = 7
   (vii) M = 7, L = 4

प्रश्नावली – 6.2

1. 5 के गुणज = 9560, 205, 800, 10 के गुणज = 9560, 800
2. 1, 4, 7
3. P = 0 या 5
4. A, B के सभी जोड़े जिनके लिए A + B = 9 या 18 हो जबकि 0 ≥ A, B ≥ 9

5.	(i)	हाँ	(ii)	नहीं	(iii)	हाँ	(iv)	हाँ
6.	(i)	हाँ	(ii)	नहीं	(iii)	हाँ	(iv)	हाँ
7.	(i)	हाँ	(ii)	हाँ	(iii)	हाँ	(iv)	नहीं

प्रश्नावली – 7.1

1.	15800 रुपये	2.	2 : 3	3.	190 रुपये और 20%
4.	8050 रुपये	5.	139100 रुपये	6.	1900 रुपये
7.	समान	8.	(i) 210 रुपये	(ii)	157.50 रुपये
9.	5000 रुपये	10.	9500 रुपये		

प्रश्नावली – 7.2

1. (i) च. ब्याज = 3248.70 रुपये, मिश्रधन = 10248.70 रुपये
   (ii) च. ब्याज = 1590 रुपये, मिश्रधन = 7840 रुपये
   (iii) च. ब्याज = 2522 रुपये, मिश्रधन = 18522 रुपये
2. राशि = 175616 रुपये, ब्याज की राशि = 50616 रुपये

3.	16125 रुपये	4.	3.15 रुपये	5.	80 रुपये
6.	374.59 रुपये	7.	741.90 रुपये	8.	544.69 रुपये
9.	30250 रुपये	10.	609 रुपये	11.	6000 रुपये
12.	16000 रुपये	13.	4%	14.	5%
15.	3 वर्ष	16.	$1\frac{1}{2}$ वर्ष	17.	16000 रुपये

प्रश्नावली – 7.3

1.	33.80 रुपये	2.	33.8%	3.	673.11 रुपये
4.	8302.075 रुपये	5.	639.35 रुपये	6.	6250 रुपये
7.	4840 रुपये	8.	1313.30 रुपये	9.	12696 रुपये

प्रश्नावली – 8.1

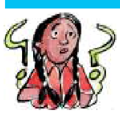
1. (i) $\sin A = \frac{4}{5}, \cos C = \frac{4}{5}, \tan A = \frac{4}{3}$

(ii) $\sin A = \frac{5}{13}, \cos C = \frac{5}{13}, \tan A = \frac{5}{12}$

(iii) $\sin A = \frac{12}{13}, \cos C = \frac{12}{13}, \tan A = \frac{12}{5}$

(iv) $\sin A = \frac{12}{15}, \cos C = \frac{12}{15}, \tan A = \frac{12}{9}$

प्रश्नावली – 8.2



1. (i) $\sin\theta = \frac{3}{5}, \cos\theta = \frac{4}{5}, \cot\theta = \frac{4}{3}, \sec\theta = \frac{5}{4}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$

(ii) $\cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \sec\theta = \frac{13}{12}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

(iii) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1}, \cot\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \sec\alpha = 3, \operatorname{cosec}\alpha = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

(iv) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan\theta = 1, \sec\theta = \sqrt{2}, \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$

(v) $\sin A = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{3}{5}, \tan A = \frac{4}{3}, \cot A = \frac{3}{4}, \sec A = \frac{5}{3}$

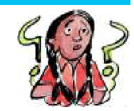
(vi) $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2}, \tan\beta = \sqrt{3}, \cot\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec}\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(vii) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos A = \frac{3}{\sqrt{10}}, \tan A = \frac{1}{3}, \cot A = 3, \sec A = \frac{\sqrt{10}}{3}$

2. $\frac{420}{841}$ 3. $\frac{22}{45}$ 4. $\frac{8}{31}$

5. $\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$ 6. 1 7. 7 8. $\frac{1}{2}$

प्रश्नावली – 8.3



1. (i) c (ii) c

2. (i) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{\frac{2}{3}}+2$ या $2+\frac{\sqrt{6}}{3}$ या $\frac{6+\sqrt{6}}{3}$ (iii) 3

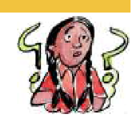
(iv) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ (v) 4 (vi) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (vii) $\frac{1}{3}$ (viii) $\frac{3}{2}$

3. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) सत्य

प्रश्नावली – 8.4

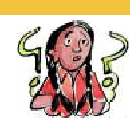
1.	45°	2.	60°	3.	30°	4.	30°
5.	60°	6.	0°	7.	60°	8.	60°
9.	60°	10.	0°	11.	30°		

प्रश्नावली – 9.1



1. $x = 130^\circ$, $y = 50^\circ$
2. $\angle QOT = 30^\circ$ एवं प्रतिवर्ती $\angle ROT = 250^\circ$
3. $z = 126^\circ$
5. $a + b = c + d$ एक सरल रेखा पर होंगे तभी $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ होगा
7. $\angle ABY = 122^\circ$, प्रतिवर्ती $\angle YBX = 302^\circ$

प्रश्नावली – 9.2



1. (i) $x = 36^\circ$, $y = 108^\circ$
   (ii) $x = 29^\circ$, $y = 87^\circ$
   (iii) $x = 95^\circ$, $y = 35^\circ$
2. $x = 126^\circ$ 3. $\angle AGE = 126^\circ$, $\angle GEF = 36^\circ$, $\angle FGE = 54^\circ$
4. 60° 5. $x = 50^\circ$, $y = 77^\circ$ 6. $x = 80^\circ$, $y = 100^\circ$
7. (i) $x = 59^\circ$, $y = 60^\circ$ (ii) $x = 40^\circ$, $y = 40^\circ$
   (iii) $x = 18^\circ$, $y = 60^\circ$ (iv) $x = 20^\circ$, $y = 63^\circ$

8. (i) 140^o (ii) 100^o (iii) 250^o

10. दर्पण से टकराकर $\angle ABC = \angle BCD$ एकान्तर कोण बनाती है अतः $AB \parallel CD$

प्रश्नावली – 9.3

1. $\angle ACB = 17^o$, $\angle ABC = 129^o$, $\angle DBC = 51^o$

2. (i) $x = 40^o$, $y = 70^o$ (ii) $x = 50^o$, $y = 20^o$

(iii) $x = 51^o$, $y = 35^o$ (iv) $x = 30^o$, $y = 75^o$

3. $\angle 1 = 60^o$ 4. $\angle PRQ = 65^o$ 5. $\angle OZY = 32^o$, $\angle YOZ = 121^o$

6. $\angle DCE = 92^o$ 7. $\angle SQT = 60^o$ 8. $x = 53^o$, $y = 37^o$

प्रश्नावली – 10.1

1. b 2. b 3. c 4. b 5. c

6. (i) R.H.S. (ii) SAS (iii) ASA

(iv) AAS (v) SSS

7. 25 8. 160 मीटर (SSS सर्वांगसमता नियम)

9. हाँ (यह एक आयताकार आकृति है एवं आयत में आमने–सामने की भुजा समान होती है)।

10. ΔABC व ΔACD से BC = AD और AB = CD

तो AC = CA (उभयनिष्ठ भुजा)

$\Delta ABC \cong \Delta ACD$

प्रश्नावली – 10.2

1. (iii) 2. (i) 3. (iv) 4. (iii) 5. (iii)

6. 30^o 7. 23^o, न्यूनकोण त्रिभुज

8. ΔABC व ΔDEF से

BC = EF, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

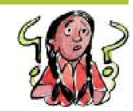
9. ΔABD व ΔABC से

AD = BC, $\angle A = \angle B$, $AB = BA$

$\Delta ABD \cong \Delta ABC$

$\therefore BD = AC$, $\angle ABD = \angle BAC$

प्रश्नावली – 10.3



1. $\angle B < \angle A \quad \therefore AO < BO$ ...... (1)

$\angle C < \angle D \quad \therefore OD < OC$ ...... (2)

समीकरण (1) + (2)

$\therefore AO + OD < BO + OC$

$AD < BC$

2. $\angle x > \angle y$

$\therefore \angle PMN = 180^\circ - \angle x, \quad \angle PNM = 180^\circ - \angle y$

$\therefore \angle PNM > \angle PMN$ (बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है)

$\therefore PM > NP$

3. $PQ > PR$

$\angle PRQ > \angle PQR$

$\angle QRS > \angle RQS$

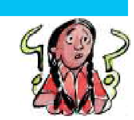
$SQ > SR$

4. $\angle PQR = \angle PRQ$

$\therefore \angle PQS > \angle PRQ$

$\therefore PS > PQ$

प्रश्नावली – 11.1



2. सरल रेखा AB व CD के बिंदु P व R पर बनने वाले कोण 180° का अर्द्धक 90° होगा। अतः सम्मुख कोण समान हैं जो एक आयत बनाता हैं।

3. (i) एकान्तर कोण (ii) ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

4. $\angle P = \angle Q = 90^\circ$

$DP = QB$

$AB = DC$

$\therefore \Delta APB \cong \Delta CQD$

प्रश्नावली – 14.1

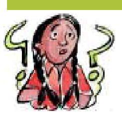
1. 110 सेमी. 2. 55.44 वर्ग सेमी. 3. 616 वर्ग मी.

4.	1100 मीटर	5.	9 मीटर	6.	168 मीटर
7	44,785.71 रुपये	8.	25.6 सेमी., 269.5 वर्ग सेमी.		
9.	$\theta = 60°$	10.	$42\sqrt{2}$ सेमी.		

प्रश्नावली – 15.1

1. 3375 घन मीटर
2. 8 सेमी.
3. (i) 4 गुना (ii) 9 गुना (iii) $n \times n$ गुना या n^2 गुना
4. 6 मीटर
5. (i) घनाकार पेटी का, 40 वर्ग सेमी. (ii) घनाकार पेटी का, 10 वर्ग सेमी.
6. 3 दिन
7. 4000 घन सेमी.
8. 12288 घन मीटर
9. 350 वर्ग सेमी.
10. 6 मीटर
11. 4167 ईंटे
12. 4320 रुपये
13. 16000
14. 6 सेमी., 4 : 1
15. 7 शीट

प्रश्नावली–16.1



1. वर्गान्तर – वर्ग का अन्तर
   वर्ग का आकार – दो समीपवर्ती वर्गों के वर्गांको का अन्तर
   वर्गांक – वर्ग का मध्य बिंदू
   वर्ग की आवृत्ति – बारम्बारता
   वर्ग सीमाएँ – किसी वर्ग की उच्च व निम्न सीमा, वर्ग की सीमाएँ होती है।

2. समावेशी वर्ग – किसी वर्ग की उच्च सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा के बराबर न हो।
   अपवर्जी वर्ग – किसी वर्ग की उच्च सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा भी हो।

3.

अधिकतम तापमान (माह अगस्त)	गणना चिह्न	बारम्बारता
28.5 – 29.5	|	1
29.5 – 30.5	|	1
30.5 – 31.5	||	2
31.5 – 32.5	||	2
32.5 – 33.5	卌 ||	7
33.5 – 34.5	||||	4
34.5 – 35.5	||||	4
35.5 – 36.5	||	2
36.5 – 37.5	卌 ||	7
37.5 – 38.5	|	1

4.

दूरी (कि.मी. में)	गणना चिह्न	बारम्बारता
0 – 5	卌	5
5 – 10	卌 卌 |	11
10 – 15	卌 卌 ||	12
15 – 20	卌 ||||	9
20 – 25	|	1
25 – 30	|	1
30 – 35	|	1

5.(i)

अंक	गणना चिह्न	बारम्बारता
0	||	2
1	卌	5
2	卌	5
3	卌 |||	8
4	||||	4
5	卌	5
6	||||	4
7	||||	4
8	卌	5
9	卌 |||	8

(ii) शून्य (iii) 3 व 9

6.

उत्पादन (क्वि. में)	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50
बारम्बारता	1	7	10	8	7	2	2	3

7.(i)

टी.वी. कार्यक्रम के घंटे	गणना चिह्न	बारम्बारता
0 – 5	卌 |||	8
5 – 10	卌 卌	10
10 – 15	卌 |	6
15 – 20	|||	3
20 – 25	|||	3
25 – 30	||||	4
30 – 35	||||	4
35 – 40	||	2

(ii) 0 (iii) 15-20 (iv) 32.5 (v) 13

प्रश्नावली-16.2

1. (i) b (ii) c (iii) c
   (iv) b (v) a

2.(i)

समय (सैकण्ड में)	बारम्बारता
15 — 25	3
25 — 35	5
35 — 45	5
45 — 55	8
55 — 65	4

(ii) —— आवृत्ति आयत

(iii) .... आवृत्ति बहुभुज