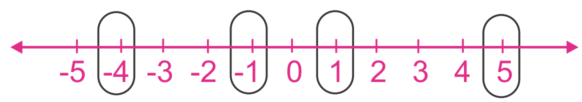
अध्याय 1

पूर्णांक

1.1 कक्षा VI में पूर्ण संख्याओं व पूर्णांकों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं, हम जानते हैं कि पूर्णांक में ऋणात्मक एवं पूर्ण संख्याओं का संग्रह है। इस अध्याय में हम पूर्णांकों के गुण एवं संक्रियाओं के बारे में विस्तृत अध्ययन करेंगे। नीचे संख्या रेखा पर पूर्णांकों को प्रदर्शित किया गया है।



उक्त पूर्णांकों को आरोही (बढ़ते) क्रम में लिखें।

हम यह जानते हैं कि संख्या रेखा में दाईं ओर जाने पर संख्याएँ बढ़ती है।

अतः $-4 < -1 < 1 < 5$

साथ ही कक्षा 6 में हमने यह भी पढ़ा है कि किसी संख्या रेखा पर जब हम

1. एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं तो दाईं ओर चलते हैं।
2. एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं तो बाईं ओर चलते हैं।
3. एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं तो बाईं ओर चलते हैं।
4. एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं तो दाईं ओर चलते हैं।

करो और सीखो

1. -5 को जोड़ने के लिए संख्या रेखा पर किस ओर जाएँगे ?
2. 3 में से (-5) को घटाने के लिए संख्या रेखा पर किस ओर जाएँगे तथा किस संख्या पर पहुँचेंगे ?

   $3 - (-5) =$ ....
3. 3 में 5 जोड़ने के लिए किस ओर जाएँगे एवं किस संख्या पर पहुँचेंगे ?
4. -3 में से $+5$ घटाने के लिए किस ओर चलना होगा तथा कहाँ पहुँचेंगे ?

बताइए निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है और कौन सा कथन असत्य है ?

1. जब दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। (   )
2. जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।(   )
3. जब एक धनात्मक पूर्णांक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है तब सदैव ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। (   )
4. पूर्णांक (8) का योज्य प्रतिलोम (-8) है। (   )
5. $(-7) + 3 = 7 - 3$ (   )
6. $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$ (   )

उपर्युक्त कथनों की सत्यता की जाँच निम्नानुसार करते हैं।

(1) कथन 1 सत्य है, उदाहरण के लिए

(i) 7+4 = 11 (ii) 4 + 11 = 15 (iii) 6 + 7 = 13 आदि

(2) कथन 2 असत्य है, उदाहरण के लिए

(i) (-6) + (-3) = (-9)

जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ते है तो सदैव एक ऋणात्मक पूर्णांक ही प्राप्त होता है।

(3) कथन 3 असत्य है,

उदाहरण के लिए $-10 + 15 = 5$ जो कि ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है।

इस हेतु सही कथन है कि एक ऋणात्मक एवं एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ने पर हम उनका अंतर लेते हैं और बड़े पूर्णांक के चिह्न को अंतर के पहले रखा जाता है। बड़े पूर्णांक का चयन करते समय पूर्णांक के चिह्न नहीं देखे जाएँगे।

उदाहरण के लिए

(1) $(-50) + (70) = 20$ (2) $12 + (-20) = -8$

(3) $16 + (-7) = 9$ (4) $(-14) + (10) = -4$

(4) कथन सत्य है क्योंकि

$-8 + (8) = 0 = 8 + (-8)$

योज्य प्रतिलोम का योग करने पर योज्य तत्समक 0 प्राप्त होता है। आप भी इस प्रकार के उदाहरण और दीजिए।

अतः किसी पूर्णांक a का योज्य प्रतिलोम (-a) तथा (-a) का योज्य प्रतिलोम (a) है।

(5) कथन असत्य है क्योंकि

$(-7) + 3 = -4$

तथा $7 + (-3) = 4$

(6) कथन सत्य है क्योंकि

$8 + (-7) - (-4) = 5$

तथा $8 + 7 - 4 = 11$

अतः $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$

1.2 पूर्णांकों के जोड़ एवं घटाव के गुणधर्म

1.2.1 योग के लिए संवृत गुणधर्म

पूर्ण संख्याओं के समूह में हमने देखा है कि किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या ही होती है और हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याएँ योग के लिए संवृत होती है।

क्या पूर्णांक भी योग संक्रिया के लिए संवृत है आइए जाँच करे।

क्र.सं.	पूर्णांक 1	पूर्णांक 2	योगफल	योगफल पूर्णांक है/नहीं
1.	+2	+5	+7	है
2.	−3	+7		
3.	−4	+4		
4.	3	−5		

भिन्न–भिन्न पूर्णांकों को लेकर जाँच कीजिए क्या यह केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए सत्य है या ऋणात्मक के लिए भी सत्य है। सारणी से हम यह पाते हैं कि **सभी पूर्णांक चाहे वह ऋणात्मक हो अथवा धनात्मक, योग हेतु संवृत है।** क्या आप ऐसे दो पूर्णांक बता सकते हैं जिनका योग पूर्णांक न हो ? पूर्णांक a तथा b के लिए (a + b) भी सदैव पूर्णांक होगा।

1.2.2 घटाव के अंतर्गत संवृत गुणधर्म

जब हम एक पूर्णांक में से दूसरे पूर्णांक को घटाते हैं तो क्या होता है ? क्या उनका अंतर भी पूर्णांक ही प्राप्त होता है। निम्नलिखित सारणी को देखकर उसे पूरा कीजिए।

कथन	प्रेक्षण
1. 7 – 5 = 2	परिणाम एक पूर्णांक है।
2. 4 – 9 = –5	....
3. (–4) – (–5) = ...	परिणाम एक पूर्णांक है।
4. (–18) – (–18) = ...	....
5. 17 – 0 = ...	....

आप क्या देखते हैं ? क्या हम ऐसा कोई पूर्णांक युग्म ज्ञात कर सकते हैं जिसका अंतर पूर्णांक नहीं हो ? क्या हम यह कह सकते हैं कि पूर्णांक घटाव के अंतर्गत संवृत है ? हाँ, हम यह कह सकते हैं कि **पूर्णांक घटाव के अंतर्गत संवृत है।**

अतः पूर्णांक a तथा b के लिए (a - b) भी सदैव पूर्णांक ही प्राप्त होता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य बात है कि पूर्ण संख्याएँ घटाव के लिए संवृत नहीं होती है।

1.2.3 क्रम विनिमेय गुणधर्म

हम जानते हैं कि 2 + 4 = 4 + 2 = 6 अर्थात् पूर्ण संख्याओं के योग में क्रम बदलने से परिणाम में कोई परिवर्तन नहीं आता है अतः क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन होता है।

क्या इसी प्रकार पूर्णांक में भी क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन होता है ?

आइए जाँच करें।

क्या निम्नलिखित समान है

(–8) + (–4) व (–4) + (–8)

(–2) + 5 व 5 + (–2)

12 + 0 व 0 + 12

आप भी अन्य इसी प्रकार के योग अलग–अलग पूर्णांकों के साथ करें तथा देखें कि क्या ऐसा कोई युग्म है जिसमें क्रम बदलने से परिणाम में कोई परिवर्तन आता है।

हमने यह देखा कि क्रम बदलने से योग में कोई परिवर्तन नहीं आता है अर्थात् **पूर्णांक योग संक्रिया के लिए क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन करते हैं।**

व्यापक रुप में, दो पूर्णांकों a तथा b के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + b = b + a$$

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए घटाव की संक्रिया में क्रम विनिमेय गुणधर्म लागू नहीं होता है। पूर्णांकों के लिए घटाव की संक्रिया में क्रम विनिमेयता लागू होती है अथवा नहीं ? कोई दो पूर्णांक (–6) और (+4) लीजिए।

क्या (–6) – (+4) एवं (+4) – (–6) समान है ?

नहीं क्योंकि

–6 – (+4) = –10 एवं +4 + 6 = +10

एवं –10, +10 बराबर नहीं होता है।

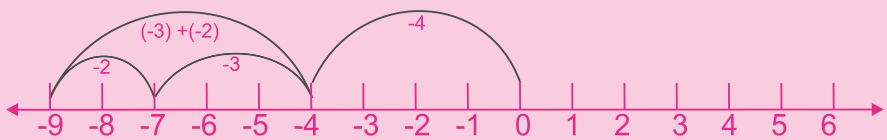
अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि **घटाव पूर्णांकों के लिए क्रम विनिमेय नहीं है।**

1.2.4 साहचर्य गुणधर्म

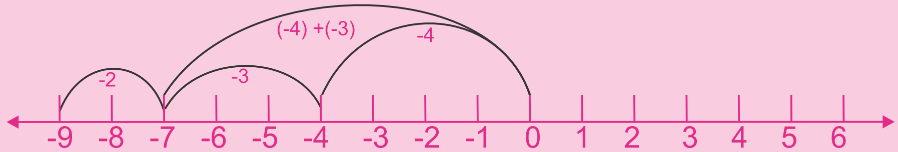
पूर्णांकों –4, –3 व –2 के लिए साहचर्य गुणधर्म की जाँच

-4 + [(-3) +(-2)] और [(-4) + (-3)] +(-2) की गणना कीजिए।

-4 + [(-3) +(-2)] का अर्थ है पहले -3 व (-2) का योग कर परिणाम को (-4) के साथ जोड़ना।



[(-4) + (-3)] +(-2) का अर्थ है पहले (–4) व –3 का योग कर परिणाम में –2 को जोड़ना।



दोनों ही परिस्थितियों में परिणाम (–9) ही प्राप्त होता है। इस प्रकार के 3 उदाहरण और दीजिए। आप ऐसा कोई उदाहरण नहीं पाएँगे जिसके लिए यह योगफल अलग–अलग प्राप्त हो। यह दर्शाता है कि **पूर्णांकों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है।** अर्थात्

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.2.5 योज्य तत्समक

निम्नलिखित को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

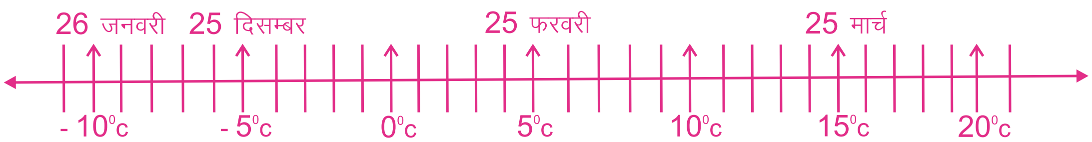
(i) (-4) + 0 = -4 (ii) 7 + 0 = 7 (iii) 0 + (-14) = -----------

(iv) - 8 + --------- = -8 (v) ----------- + 0 = 15 (vi) -23 + ---------- = -23

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि किसी भी पूर्णांक में 0 जोड़ने से योगफल वही पूर्णांक प्राप्त होता है **अतः '0' पूर्णांकों के लिए योज्य तत्समक है।** आप कुछ और उदाहरण लेकर उक्त तथ्य की पुष्टि कीजिए।

प्रश्नावली 1.1

1. चुरु का तापमान अलग–अलग समय में अंकित कर डिग्री सेन्टिग्रेड (C^0) में संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया गया है।



(i) संख्या रेखा को देखकर निम्न दिनांकों पर चुरु का तापमान बताइए।

(a) 26 जनवरी .... (b) 25 दिसम्बर ....

(c) 25 फरवरी .... (d) 25 मार्च ....

(ii) सबसे गर्म व सबसे ठण्डे दिन के तापमान में कितना अंतर है ?

(iii) 26 जनवरी का तापमान, 25 फरवरी के तापमान से कितना कम है ?

(iv) क्या हम कह सकते हैं 25 दिसम्बर और 25 फरवरी के तापमान का योग 26 जनवरी के तापमान से अधिक है ?

2. शीला डाकघर में 5000 रुपये जमा करती है। एक महीने बाद 3700 रुपये निकाल लेती है। यदि निकाली हुई रकम ऋणात्मक संख्या के रुप में लिखी जाए तो जमा की गई राशि किस रुप में निरुपित करेंगे ? निकासी के पश्चात कितनी राशि खाते में शेष रहेगी ?

3. हल कीजिए– (i) (-4) + (-3) (ii) 15 - 8 + (-9)
(iii) 400 + (-1000) + (-500) (iv) 23 - 41 - 11
(v) -27 + (-3) + 30

4. निम्न कथनों में बॉक्स में उपयुक्त चिन्ह (<, >, =) लगाइए।

(i) -14 + 11 + 5 ☐ 14 - 11 - 5
(ii) 30 + (-5) + (-8) ☐ (-5) + (-8) + 30
(iii) 7 + 11 + (-5) ☐ (-7) - 11 + 5
(iv) (-14) + 11 + (-12) ☐ 14 + 11 + 12
(v) 6 + 7 - 13 ☐ 6 + 7 + (-13)

5. ऐसे दो पूर्णांक लिखिए जिनका

(i) योग (-7) हो। (ii) अंतर 4 हो। (iii) योग 0 हो । (iv) अंतर - 2 हो।

6. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) (-3) + 5 = 5 + ---------------
(ii) 17 + ------------- = 17
(iii) ----------- + (-5) = 0
(iv) -11 + [(-12) + 4) = [(-11) + (-12)] + ...

7. नीचे पूर्णांकों के कुछ गुणधर्म एवं उनके उदाहरण दिए जा रहे हैं। उदाहरणों को सही गुणधर्म से मिलान कीजिए।

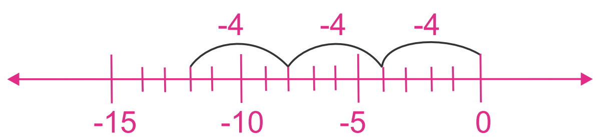
उदाहरण	गुणधर्म
(i) (a + b) + c = a + (b + c)	(a) तत्समक
(ii) 3 + 4 = 4 +3	(b) साहचर्य
(iii) (-4) + 0 = (-4)	(c) क्रम विनिमेय

1.3 पूर्णांकों का गुणन

1.3.1 धनात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से गुणन

3 x 4 = 4 + 4 + 4 = 12

3 x (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12



इसी प्रकार 5 x (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15

करो और सीखो

हल कीजिए।

(i) 4 x (-8) = ... = ...   (ii) 3 x (-3) = ... = ...

(iii) 5 x (-9) = ... = ...

इस विधि का उपयोग करते हुए हमने पाया कि धनात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। परन्तु क्या होता है जब ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से गुणा करते हैं ?

निम्न पैटर्न को देखिए।

3 x 4 = 12

2 x 4 = 8 = 12 - 4

1 x 4 = 4 = 8 - 4

0 x 4 = 0 = 4 - 4

-1 x 4 = -4 = 0 - 4

-2 x 4 = -8 = - 4 - 4

-3 x 4 = -12 = - 8 - 4

हम पहले ही प्राप्त कर चुके हैं कि 3 x (-4) = -12

अतः हम जानते हैं कि (-3) x 4 = -12 = 3 x (-4)

इसी प्रकार हम (-5) x 3 = -15 = 3 x (-5) भी प्राप्त कर सकते हैं।

करो और सीखो

(1) ज्ञात कीजिए –

(i) 15 x (-5) (ii) 27 x (-10)
(iii) -12 x 12 (iv) -7 x 4

1.3.2 दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणन

निम्नलिखित को देखिए

-3 x 4 = -12
-3 x 3 = -9 = -12 – (-3)
-3 x 2 = -6 = -9 – (-3)
-3 x 1 = -3 = -6 – (-3)
-3 x 0 = 0 = -3 – (-3)
-3 x -1 = 3 = 0 – (-3)
-3 x -2 = 6 = 3 – (-3)

इसी प्रकार निम्न को पूरा कीजिए

(i) -3 x -3 = ... (ii) -3 x -4 = ...

इसी प्रकार आप इन गुणनफल को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

-5 x 3 = -15
-5 x 2 = -10 = -15 - (-5)
-5 x 1 = -5 = -10 - (-5)
-5 x 0 = 0 = ...
-5 x -1 = ... =
-5 x -2 = ... =
-5 x -3 = ... =

उक्त पैटर्न को देखकर हम यह कह सकते हैं कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को पूर्ण संख्याओं के रुप में गुणा करते हैं तथा गुणनफल के पूर्व में (+) का चिन्ह लगाते हैं।

उदाहरणतः (-10) x (-14) = 140, (-5) x (-6) = 30

व्यापक रुप में दो धनात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए

(-a) x (-b) = a x b

करो और सीखो

निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) (-12) x (-15) (ii) (-25) x (-4) (iii) (-17) x (-11)

1.3.3 तीन अथवा अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल

हमने देखा कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है। तीन या तीन से अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा ? आइए निम्न उदाहरणों को देखते हैं।

(i) (-2) x (-3) = 6

(ii) (-2) x (-3) x (-4) = [(-2) x (-3)] x (-4) = (6) x (-4) = -24

(iii) (-2) x (-3) x (-4) x (-5) = [(-2) x (-3)] x [(-4) x (-5)] = 6 x 20 = 120

(iv) (-2) x (-3) x (-4) x (-5) x (-6) = [(-2) x (-3)] x [(-4) x (-5)] x (-6)
= 6 x 20 x (-6)
= 120 x (-6)
= -720

उक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि

(i) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

(ii) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

(iii) चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(iv) पाँच ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या है ?

(v) इसी क्रम में छः ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा ?

उक्त उदाहरणों के परिणाम से हम इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि यदि ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम (2,4,6,....) हो तब उनका गुणनफल धनात्मक पूर्णांक एवं ऋणात्मक पूर्णांक की संख्या विषम (1,3,5,7,................) होने की स्थिति में परिणाम ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

करो और सीखो

हल कीजिए।

(i) (-1) x (-1) x (-1) = ... (ii) (-1) x (-1) x (-1) x (-1) = ...

1.3.4 शून्य से गुणन

नीचे दिए गए पैटर्न को देखिए एवं रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

- 4 x 3 = -12, - 4 x 2 = - 8 = -12 - (- 4)

- 4 x 1 = - 4 = - 8 - (-4), - 4 x 0 = 0 = - 4 - (- 4)

हम पाते हैं कि - 4 x 0 = 0 इसी प्रकार आप भी अन्य संख्याओं के साथ पैटर्न बनाएँ एवं जाँच करें

पुनः 3 x (- 5) = -15
2 x (- 5) = -10 = -15 - (- 5)
1 x (- 5) = - 5 = - 10 - (- 5)
0 x (- 5) = 0 = - 5 - (- 5)

उक्त पैटर्न से हम यह कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक को शून्य से गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है।

व्यापक रुप में हम कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक a के लिए

a x 0 = 0 = 0 x a

1.4 पूर्णांकों का विभाजन

हम जानते हैं कि विभाजन गुणन की विपरीत प्रक्रिया है। उदाहरण के लिए 4 x 5 = 20 , 20 ÷ 4 = 5 या 20 ÷ 5 = 4 । इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि पूर्णांकों के प्रत्येक गुणन कथन के लिए एक विभाजन कथन है।

गुणन कथन	संगत भाग कथन
3 x (-5) = (-15)	(-15) ÷ (3) = -5 , (-15) ÷ (-5) = 3
(-3) x 4 = (-12)	(-12) ÷ (-3) = 4 , (-12) ÷ 4 = -3
(-2) x (-7) = 14 ...	14 ÷ (-7) = -2 ,...............
(-4) x 5 = (-20)	(-20) ÷ (-4) = 5 ,...............
5 x (-9) = -45 ...... ,	.... ,...............
(-6) x 5 = ,...............	.... ,...............
(+5) x (+2) = ,...............	.... ,...............

सारणी के भाजन के कथनों को देखिए तथा इस आधार पर निम्न कथनों की जाँच कीजिए [✓ अथवा x] चिह्न लगाइए।

(1) ऋणात्मक पूर्णांक ÷ धनात्मक पूर्णांक = ऋणात्मक पूर्णांक ( )

(2) धनात्मक पूर्णांक ÷ ऋणात्मक पूर्णांक = ऋणात्मक पूर्णांक ( )

(3) धनात्मक पूर्णांक ÷ धनात्मक पूर्णांक = धनात्मक पूर्णांक ( )

(4) ऋणात्मक पूर्णांक ÷ ऋणात्मक पूर्णांक = धनात्मक पूर्णांक ( )

पूर्णांकों का भाग भी पूर्ण संख्याओं के भाग की तरह ही करते हैं। केवल हमें यह ध्यान रखना होता है कि परिणाम धनात्मक होगा अथवा ऋणात्मक।

व्यापक रुप में, a ÷(-b) = (-a) ÷ (b) (जहाँ b, -b शून्य नहीं हो)

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) (-3) x 4
   (ii) (-1) x 24
   (iii) (-30) x (-24)
   (iv) (-214) x 0
   (v) (-15) x (-7) x 6
   (vi) (-5) x (-7) x (-4)
   (vii) (-3) x (-2) x (-1) x (-5)
2. (-1) x 5 से आरम्भ कर पैटर्न द्वारा दर्शाइए कि (-1) x (-1) = +1
3. किसी प्रशीतक में तापमान कम होने की दर 3^0c प्रति मिनट है। एक वस्तु जिसका तापमान 25^0c है को प्रशीतक में रखा जाता है। कितने मिनट बाद उस वस्तु का तापमान -2^0c होगा।
4. एक खेल में नीला कार्ड चुनने पर 2 गोटियाँ देनी पड़ती है तथा लाल कार्ड चुनने पर 3 गोटियाँ मिलती है। शीतल के पास 27 गोटियाँ थी, खेल के दौरान लगातार 9 नीले कार्ड आते हैं। बताइए उसके पास कितनी गोटियाँ है ?

5. निम्न भाग के सवालों को हल कीजिए।

(i) (-35) ÷ 7 (ii) 15 ÷ (-3)
(iii) -25 ÷ (-25) (iv) 25 ÷ (-1)
(v) 0 ÷ (-3) (vi) 15 ÷ [(-2) +1]
(vii) [(-6) + 3] ÷ [(-2) + 1]

6. एक दुकानदार को 1 पेन बेचने पर 1 रुपये का लाभ तथा 1 पेंसिल बेचने पर 50 पैसे की हानि होती है। लाभ, हानि को पूर्णांकों के रुप में प्रदर्शित कीजिए।

(i) एक माह में उसे 5 रुपये की हानि होती है। यदि उसने 45 पेन बेचे तो उस माह उसके द्वारा बेची जाने वाली पेंसिलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(ii) दूसरे माह उसे कोई नुकसान या लाभ नहीं हुआ। यदि उसने 70 पेन बेचे हो तो बेची गई पेंसिलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. पूर्णांकों का गुणा कर निम्न सारणी को भरिए।

x	2	3	- 4	- 2	1
3					
-2					
-1					
4					
2					

8. एक 60 फीट ऊँची बहुमंजिला इमारत में लिफ्ट में ऊपर जाने को धनात्मक पूर्णांक से दर्शाया जाए तो–

(i) 60 फीट ऊपर स्थित फ्लैट की ऊँचाई कैसे दर्शाएँगे ?

(ii) 15 फीट नीचे स्थित पार्किंग को पूर्णांक से दर्शाइए।

(iii) लिफ्ट 5 फीट प्रति सैकण्ड से ऊपर की ओर जाती है तो + 5 और विपरीत आती है तो उसके उतरने को किस पूर्णांक से दर्शाएँगे।

1.4 पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म

1.4.1 गुणन में संवृतता

पूर्णांक – 1	पूर्णांक –2	गुणनफल	गुणनफल पूर्णांक हैं/नहीं
2	-3	-6	पूर्णांक है।
-3	4	-12	पूर्णांक है।
-2	-3	......	....
5	4	......	....
-5	3	......	....

आप क्या देखते हैं ? क्या आप ऐसे कोई दो पूर्णांक ज्ञात कर सकते हैं जिनका गुणनफल एक पूर्णांक नहीं हो ?

नहीं। अतः हम यह कह सकते हैं कि दो पूर्णांकों का गुणनफल भी एक पूर्णांक ही प्राप्त होता है। अर्थात् **पूर्णांक गुणन संक्रिया के लिए संवृत गुणधर्म का पालन करते हैं।**

1.4.2 क्रम विनिमेयता

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं में गुणन क्रम विनिमेय होता है। क्या पूर्णांक के लिए भी गुणन क्रम विनिमेय है ?

नीचे दी गई सारणी को देखिए ओर इसे पूरा कीजिए।

पूर्णांक युग्म	गुणन	गुणन क्रम बदलकर	निष्कर्ष
5, -4	5 x (-4) = -20	-4 x 5 = -20	5 x -4 = -4 x 5
-10, 12	(-10) x 12 = ……	12 x (-10) = ……	
-3, -4	(-3) x (-4) =		
-5, -7		(-7) x (-5) =	
+8, -3	(+8) x (-3)		

आप क्या देखते हैं ? आप पाएँगे पूर्णांकों का गुणनफल उनके क्रम पर निर्भर नहीं करता है, अतः **पूर्णांकों के गुणन क्रम विनिमेय है।** व्यापक रुप में किन्हीं दो पूर्णांकों के लिए

$$a \times b = b \times a$$

1.4.3 गुणात्मक तत्समक

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक 1 है। पूर्णांकों के लिए जाँच कीजिए।

(-3) x 1 = -3	1 x 5 = 5
(-4) x 1 =	1 x 8 =
1 x (-5) =	3 x 1 =
1 x (-6) =	7 x 1 =

यह दर्शाता है कि 1 पूर्णांकों के लिए भी गुणात्मक तत्समक है।
व्यापक रुप में किसी भी पूर्णांक के लिए

$$a \times 1 = a = 1 \times a$$

यदि किसी पूर्णांक में -1 से गुणा किया जाए तो क्या होगा ? -3 x (-1) = 3
3 x -1 = -3
-6 x -1 = 6
-1 x 13 = -13
क्या -1 पूर्णांकों के लिए गुणात्मक तत्समक है ?

1.4.4 गुणन का साहचर्य गुणधर्म

3, -4, -2 को लीजिए।

[3 x (-4)] x (-2)
पहले 3 एवं -4 का गुणन करेंगे। तत्पश्चात प्राप्त गुणनफल को (-2) से गुणा करेंगे।
= (-12) x (-2) = 24

(3) x [(-4) x (-2)] पर विचार कीजिए।
सर्वप्रथम (-4) व (-2) का गुणा करेंगे।
तत्पश्चात गुणनफल को 3 से गुणा करेंगे।
= 3 x (+8) = 24

अतः [3 x (-4)] x (-2) = 3 x [(-4) x (-2)]

आप ऐसे ही तीन अन्य पूर्णांकों के समूह लीजिए व उपर्युक्त गतिविधि दोहराइए। क्या पूर्णांकों के विभिन्न प्रकार के समूहों से गुणनफल प्रभावित होता है ? व्यापक रुप में किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

1.4.5 वितरण गुण

पूर्ण संख्याओं के लिए वितरण का गुणधर्म हमने देखा

a (b + c) = a x b + a x c

क्या यह पूर्णांकों के लिए भी सत्य है आइए जाँच करें।

(i) (-7) x [2 + (-5)] = (-7) x (-3) = +21	(-7) x 2 + (-7) x (-5) -14+35 = +21
(ii) (-4) x [(-3) + (-7)] = (-4)x(-10) = 40	(-4) x (-3) + (-4)x(-7) 12 + 28 = 40
(iii) (-8) x [(-2) + (-1)] = (-8) x (-3) = 24	(-8) x (-2) + (-8)x(-1) = +16 +8 = 24

क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी योग पर गुणन का वितरण नियम सत्य है ? हाँ।

व्यापक रुप में a x (b + c) = a x b + a x c

1.4.6 पूर्णांक के भाग के गुण

निम्न सारणी को देखकर इसे पूरा कीजिए।

कथन	निष्कर्ष	कथन	निष्कर्ष
(-8) ÷ (-2) = 4	परिणाम एक पूर्णांक है	(-8) ÷ 4	----------
(-2) ÷ (-8) = $\frac{-2}{-8}$	परिणाम एक पूर्णांक नहीं है	(3) ÷ (-8) = $\frac{3}{-8}$	----------

आप क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि **पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं है** अर्थात् दो पूर्णांकों का भाग भी एक पूर्णांक हो ऐसा आवश्यक नहीं है।

क्रम विनिमेयता – हम यह जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं है। आइए, पूर्णांक के लिए इसकी जाँच करें आप ऊपर दी गई सारणी में देख सकते हैं कि

$$(-8) \div (-2) \neq (-2) \div (-8)$$

क्या [(-6) ÷ 2] एवं [2 ÷ (-6)] एक समान है?

अतः हम यह कह सकते हैं कि **पूर्णांकों के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं है।**

प्रश्नावली 1.3

1. नीचे पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म दिए हैं तथा सामने उदाहरण दिया गया है। सही उदाहरण को सही गुणधर्म से मिलाइए।

(i) (-4) x (5) = 5 x (-4)	(a) साहचर्य गुणधर्म
(ii) (-4) x [(-3) +(-2)] = (-4) x (-3) + (-4) x (-2)	(b) क्रम विनिमेय
(iii) -4 एक पूर्णांक,+7 दूसरा पूर्णांक, गुणनफल (-4) x (+7) = (-28) भी पूर्णांक	(c) वितरण गुण
(iv) (-4) x [(-7) x (5)] = [(-4) x (-7)] x (5)	(d) संवृत गुण

2. पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म को ध्यान में रख कर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) 26 x (-48) = (-48) x	क्रमविनिमेय
(ii) (-6) x [(-2) + (-1)] = (-6) x (-2) + (-6) x	वितरण गुण
(iii) 100 x [(-4) x (-52)] = [100 x ....] x (-52)	साहचर्य

3. उचित गुणधर्मों का प्रयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 26 x (-48) + (-48) x (-56) (ii) 8 x (78) x (-125)
   (iii) 9 x (50-2) (iv) 999 x 45
4. सही/गलत बताइए। गलत कथनों को सही करके लिखिए।
   (i) पूर्णांकों का गुणन संवृत है।
   (ii) पूर्णांकों में भाग संवृत होता है।
   (iii) पूर्णांकों में भाग क्रम विनिमेय नहीं होता जबकि गुणन में क्रम विनिमेयता होती है।
   (iv) पूर्णांकों का गुणा योग पर वितरित होता है।
   (v) पूर्णांकों का भाग घटाव पर वितरित होता है।

हमने सीखा

1. पूर्णांक, संख्याओं का एक विशाल संग्रह है जिसमें पूर्ण संख्याएँ और उनके ऋणात्मक सम्मिलित हैं।
2. दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ने पर धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है तथा दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
3. हमने योग एवं घटाव द्वारा संतुष्ट होने वाले गुणों का अध्ययन किया है।
   (i) पूर्णांक संख्याएँ योग एवं घटाव दोनों के लिए संवृत हैं। अर्थात् a + b और a - b दोनों पुनः पूर्णांक होते हैं, जहाँ a और b कोई भी पूर्णांक है।
   (ii) पूर्णांकों के लिये योग क्रमविनिमेय है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए
   a + b = b + a
   (iii) पूर्णांकों के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a, b तथा c के लिए
   (a + b) + c = a + (b + c) होता है।
   (iv) योग के अंतर्गत पूर्णांक शून्य तत्समक है, किसी विपरीत चिन्ह के पूर्णांकों के योग में पूर्णांकों के परिमाणों का घटाव होता है। परिणाम धनात्मक होगा यदि धनात्मक पूर्णांक का परिमाण ज्यादा होगा और ऋणात्मक होगा यदि ऋणात्मक पूर्णांक का परिमाण अधिक होगा।
4. हमने यह भी सीखा कि पूर्णांकों का गुणा कैसे होता है। हमने पाया कि एक धनात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है तथा ऋणात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर गुणनफल के रूप में धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
5. पूर्णांक गुणन के अन्तर्गत कुछ गुण दर्शाते है –
   (i) पूर्णांक गुणन के अन्तर्गत संवृत होते हैं। यदि a तथा b पूर्णांक हैं तो a x b भी पूर्णांक होंगे।
   (ii) पूर्णांकों के लिए गुणन क्रम विनिमेय होता है। यदि a तथा b पूर्णांक है तो a x b = b x a
   (iii) गुणन के अन्तर्गत पूर्णांक 1, तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक के लिए a x 1 = 1 x a
   (iv) पूर्णांकों के लिए गुणन साहचर्य होता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों के लिए
   (a x b) x c = a x (b x c)
6. योग एवं गुणन के लिए पूर्णांक वितरण गुण दर्शाते हैं। अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए
   a x (b + c) = a x b + a x c
7. योग एवं गुणन के अन्तर्गत क्रम विनिमेयता, सहचारिता एवं वितरण गुण हमारे परिकलन को आसान बनाते हैं।
8. हमने यह भी सीखा कि पूर्णांकों का भाग कैसे होता है। हमने पाया कि (a) धनात्मक पूर्णांकों को ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाए या ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाए तो भागफल ऋणात्मक होगा। (b) एक ऋणात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देने पर भागफल धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
9. किसी भी पूर्णांक a के लिए, हम पाते हैं कि (i) a ÷ o परिभाषित नहीं है।
   (ii) a ÷ 1 = a है।