अध्याय 12

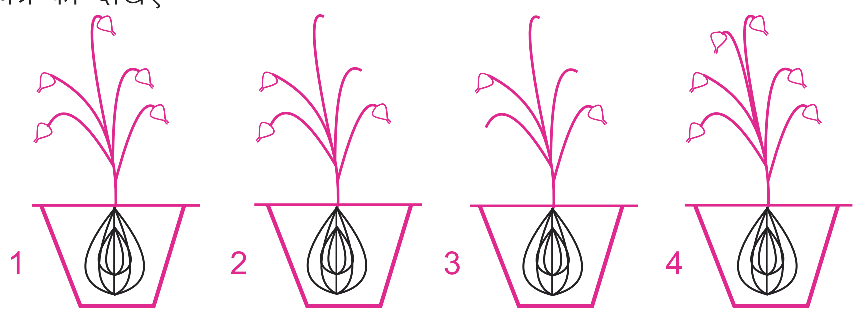
बीजगणित

12.1 पूर्व में हमने अंक गणित में 0,1,2,3,.........8,9 अंको के द्वारा बनी विभिन्न संख्याएँ और उन पर विभिन्न संक्रियाओं का अध्ययन किया है। अपने दैनिक जीवन की अधिकांश समस्याओं को हल करने में संख्याओं का उपयोग हम देख चुके हैं। संख्याओं से संबंधित जटिल समस्याओं का हल कई बार अंकगणितीय विधियों से नहीं हो पाता अथवा समस्याओं के हल को प्रभावशाली ढंग से प्रस्तुत करने हेतु अन्य तरीकों की आवश्यकता होती है।

अतः अंकगणित के व्यापकीकरण के लिए बीजीय राशियों का प्रयोग किया जाता है। यहाँ हम इन संख्याओं को अलग तरीके से लिखने के बारे में अध्ययन करेंगे, जिसमें संख्याओं को दर्शाने के लिए हिन्दी अक्षरों जैसे –(क, ख, ग, घ, य, र, ल,...) अथवा अंग्रेजी अक्षरों (a, b, c, x, y, z...) आदि का उपयोग करते है। इन्हें **बीज या बीजांक** कहते है।

12.2 चर की अवधारणा

निम्न चित्र को देखिए–



चित्र में कुछ बीजों को रोपा गया है। हर बीज से प्राप्त फलों की संख्या निम्न प्रकार है –

बीज 1	फल संख्या = 5
बीज 2	फल संख्या = 3
बीज 3	फल संख्या = 2
बीज 4	फल संख्या = 6

यदि हम प्राप्त फलों की संख्या को अंग्रेजी के वर्णाक्षर x से प्रदर्शित करें तो–

बीज 1 के लिए	$x = 5$
बीज 2 के लिए	$x = 3$
बीज 3 के लिए	$x = 2$
बीज 4 के लिए	$x = 6$

इस प्रकार x का मान (फलों की संख्या) विभिन्न बीजों के लिए भिन्न–भिन्न प्राप्त होता है। जिसे चर (परिवर्तनशील) राशि कहते हैं।

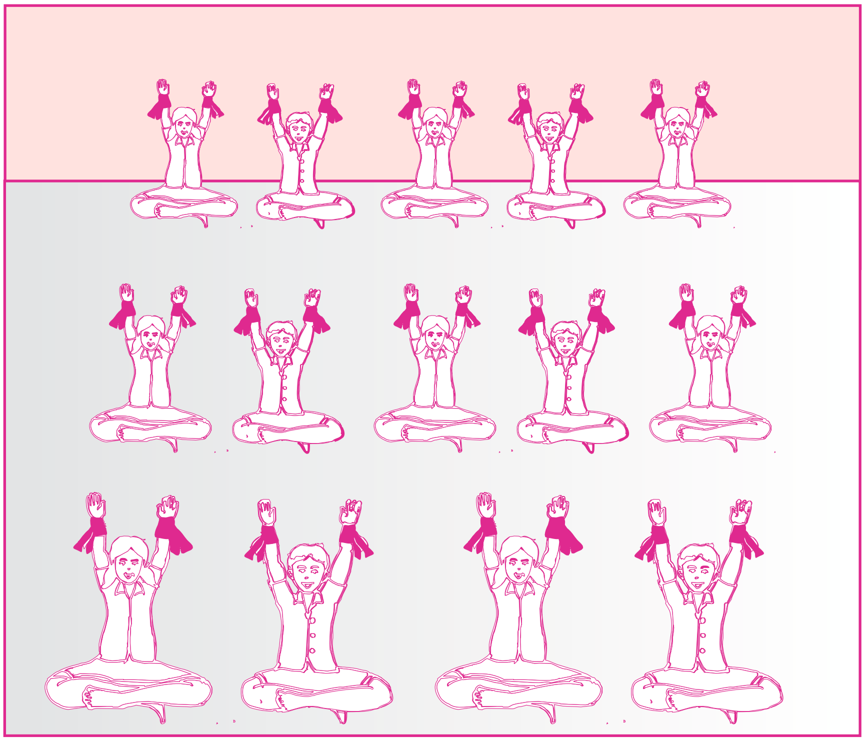
इस प्रकार अलग–अलग परिस्थितियों में जिसका मान बदलता हैं उसे **चर राशि** तथा अंकगणितीय संख्याओं (जिनका मान स्थिर होता है) को **अचर राशि** कहा जाता है।

करो और सीखो

1. यदि उम्र को हम y वर्षों में व्यक्त करें तो अपने 10 साथियों की उम्र के लिए y का मान लिखिए।

12.2.1 योग की कक्षा

आप के विद्यालय में योग का कालांश हो रहा है। सभी बच्चों के हाथ में एक–एक रिबन बंधा है तथा सभी बच्चे हाथ ऊपर करके योग कर रहे हैं। एक विद्यार्थी के दोनों हाथों में 2 रिबन है। अतः चित्र की सहायता से तालिका में भरिए।



बच्चों की संख्या	1	2	3	4	5						
रिबन की संख्या	2	4	6	8	10						

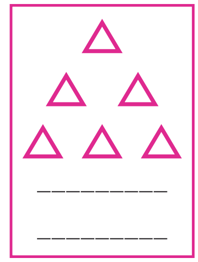
तालिका 12.1

10 बच्चों के पास कितने रिबन होंगे?
सारणी के अनुसार 2 x 10 होंगे।
अतः रिबन की संख्या = 2 x बच्चों की संख्या

यदि बच्चों की संख्या n हो तो
रिबनों की संख्या 2 x n
n =1, 2, 3, 4, ---------------------------
सारणी के अनुसार जैसे–जैसे n का मान बढ़ता है, रिबन की संख्या भी बढ़ती जाती है।

12.2.2 पैटर्न में सामान्यीकरण के रूप में

माचिस की तीलियों का खेल पिछली कक्षा में हमने कुछ प्रतिरूप देखे थे और चीनू और छोटू माचिस की तीलियों के प्रतिरूप बना रहे हैं। उन्होंने त्रिभुज की आकृतियाँ बनाने का निर्णय लिया। उन्होंने दो त्रिभुज बनाए उनको देख वहाँ रामू आया और तीसरा त्रिभुज बनाया। उसने चीनू से कहा कि आगे के त्रिभुजों के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता पड़ेगी ? आगे एक सारणी बनाते हैं–



आकृति 12.1

त्रिभुजों की संख्या	1	2	3	4	5	6
तीलियों की संख्या	3	6	9	12	15	18

तालिका 12.2

इसी प्रकार 8 त्रिभुज का प्रतिरूप बनाने के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी?

अर्थात् तीलियों की संख्या = 3 x त्रिभुजों की संख्या

यदि त्रिभुजों की संख्या T हो तो

तीलियों की संख्या = 3 x T

यहाँ T चर राशि का एक उदाहरण है जिसका मान स्थिर नहीं है।

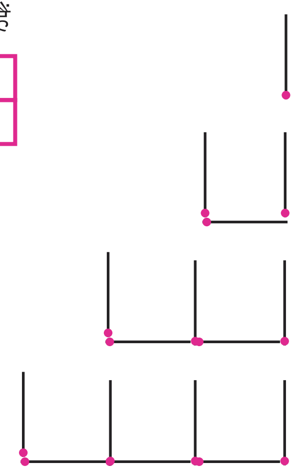
T = 1, 2, 3, 4 ...

12.3 बीजीय व्यंजक

तीलियों का खेल– राजू ने टेबल पर एक तीली लगाई। पप्पू ने दो तीली और लगाकर एक खुला डिब्बा बनाया। कविता ने भी पप्पू की तरह दो और तीली लगाई और दूसरा खुला डिब्बा साथ में बनाया। इसी प्रकार संजू ने भी कविता की तरह दो तीली लगाई। तीसरा खुला डिब्बा बन गया। इसी तरह 8 डिब्बे बनाने में कितनी तीलियाँ चाहिए आओ सारणी बनाते हैं

डिब्बों की संख्या	1	2	3	4	--	n
तिलियों की संख्या	3	5	7	---	--	---

तालिका 12.3



आकृति 12.2

इस प्रकार हमें प्रत्येक नये डिब्बे के लिये 2 तीलियाँ जोड़नी पड़ी जैसे–

पहला डिब्बा = 1 + 2 x 1
दूसरा डिब्बा = 1 + 2 x 2
तीसरा डिब्बा = 1 + 2 x 3

n डिब्बों के लिए = 1 + 2 x n = 1 + 2 n यहाँ n चर राशि है।

(1+2n) एक बीजीय व्यंजक का उदाहरण है जब बीजांकों की जोड़, घटा, गुणा व भाग किया जाता है जैसे (1+2n) व्यंजक में n का 2 से गुणा कर 1 जोड़ा गया है, तो बीजीय व्यंजक बनता है। कोई चर या अचर संख्या या समूह मौलिक गणितीय संक्रियाओं के चिह्नों से युक्त होने पर वह कथन बीजीय व्यंजक कहलाता है। ये एक पदीय, द्विपदीय आदि बहुपदीय होते हैं।

नीचे आने वाली कुछ पंक्तियों में हम देखेंगे कि कैसे व्यंजक बनाए जाते हैं?

	व्यंजक	कैसे बनाया गया
(i)	2 + 7	2 में 7 जोड़ने पर
(ii)	$x + 9$	x में 9 जोड़ने पर
(iii)	$P + q$	P में q जोड़ने पर
(iv)	a - 3	a में 3 घटाने पर
(v)	3 - b	3 में b घटाने पर
(vi)	$x - y$	x में y घटाने पर
(vii)	$3 \times x$	3 में x का गुणा करने पर
(viii)	$\frac{13}{a}$	13 में a का भाग देने पर
(ix)	$\frac{x}{y}$	x में y का भाग देने पर

इसी प्रकार के दस अन्य सरल व्यंजक लिखिए और बताइए कि वे किस प्रकार बनाए गए हैं ?

करो और सीखो

1. बीजीय व्यंजक के रूप में लिखिए।
   (i) 5 और किसी संख्या का योग ____________
   (ii) किसी संख्या और 7 का अंतर ____________
   (iii) किसी संख्या का 3 गुना ____________
   (iv) किसी संख्या के 6 गुने में से 12 कम ____________
   (v) किसी संख्या का आधा ____________
   (vi) किसी संख्या के एक तिहाई में से 200 कम ____________
2. श्वेता के गणित में 75 अंक हैं विज्ञान के अंक पता नहीं है उन्हे x मानकर कुल अंक बताइए ....
3. साक्षी के पास कुछ टॉफियाँ है और आशु के पास उससे चार गुनी टॉफियाँ है तो दोनों के पास कुल कितनी टॉफियाँ हैं? ....

कथन दिए जाने पर व्यंजक बनाना–

	कथन	व्यंजक
(i)	z में से 7 घटाने पर	z - 7
(ii)	p में 4 घटाने पर	p - 4
(iii)	a में 16 घटाने पर	a - 16
(iv)	y में 3 का भाग देने पर	$\frac{y}{3}$

	कथन	व्यंजक
(v)	m में 7 का गुणा करने पर	7 m
(vi)	x में 3 का गुणा करने पर	3 x
(vii)	5 में x का गुणा करने पर	5 x

करो और सीखो

नीचे कुछ बीजीय व्यंजक एवं उनके सामने उनकी परिस्थितियाँ दी गई है प्रत्येक बीजीय व्यंजक के लिए उपर्युक्त परिस्थितियों से मिलान किजिए।

(i)	$x + 4$	(A)	प्रशान्त के पास कमली से 4 गुना धन है।
(ii)	$x - 4$	(B)	मालती के पास सीमा से 4 रू. अधिक है।
(iii)	$4 - x$	(C)	मेरा भार नन्हे के भार से चार किग्रा कम है।
(iv)	4y	(D)	मेरे पास 4 रूपये थे उसमें से कुछ रूपये खर्च हो गए तो मेरे पास धन शेष बचा।
(v)	$\frac{y}{4}$	(E)	बंशी के पास कुछ कंचे थे उन्हें उसने 4 दोस्तों में बराबर बाँट दिए तो प्रत्येक को मिले कंचों की संख्या।

प्रश्नावली 12.1

1. नीचे दिए गए वर्णों के प्रतिरूप तीलियों की सहायता से बनाइए। प्रतिरूप के चित्र अपनी कॉपी में बनाइए। प्रत्येक प्रतिरुप में तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए नियम बनाइए (आप नियम बनाने के लिए बीजांकों का उपयोग कर सकते हैं यथा a, b, x, y आदि)
   (i) T का प्रतिरूप T, TT, ...
   (ii) N का प्रतिरुप N, NN, ...
   (iii) W का प्रतिरूप W, WW, ...

2. वृक्षारोपण कार्यक्रम में विद्यालय में पौधे लगाए जाने हैं। प्रत्येक पंक्ति में चार पौधे लगते हैं तो पौधों की संख्या को पंक्तियों के पदों में लिखिए।
3. रानू, लीला से 5 वर्ष छोटी है।
   (i) लीला की आयु x लेकर रानू की आयु x के पदों में लिखिए।
   (ii) रानू की आयु P लेते हुए लीला की आयु P के पदों में लिखिए।
4. एक पेन का मूल्य 5 रु. है, मदन के पास कुछ धन हैं वह उस समस्त धन से पेन खरीदता है। पेनों की संख्या को धन के पदों में व्यक्त कीजिए।

5. निम्न तालिका को पूर्ण कीजिए।

x	1	2	3	4	5	---	---
$2x$ +3	5	7	---	---	--	15	---

12.4 बीजीय व्यंजकों के नियम

12.4.1 क्रम विनिमेयता

(i) योग में :– हम जानते हैं किन्हीं भी दो पूर्ण संख्याओं का योगफल क्रम बदलने से नहीं बदलता है।

$$2 + 5 = 5 + 2$$

संख्याओं का यह गुण योग की क्रम विनिमेयता कहलाता है अर्थात् संख्याओं का क्रम बदलने से उनका योगफल वही रहता है इसी प्रकार यदि x तथा y दो चर संख्याएँ हैं तो

$$x + y = y + x$$

(ii) गुणन में :– इसी प्रकार दो संख्याओं के गुणन के लिए

$$5 \times 2 = 2 \times 5 = 10$$

अर्थात् दो संख्याओं के गुणा में संख्याओं का क्रम बदलने से गुणनफल पर कोई फर्क नहीं पड़ता यह गुणन की क्रम विनिमेयता कहलाती है।

$$x \times y = y \times x$$

12.4.2 वितरणता– मान लीजिए हमें 8 x 35 को ज्ञात करना है और हमें 35 का पहाड़ा नहीं आता है, तो इसकी गणना निम्न प्रकार कर सकते है –

8 x 35 = 8 x (30 + 5)
= 8 x 30 + 8 x 5
= 240 + 40
= 280

इसी प्रकार व्यापक रूप में चरों x, y व z के लिए

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

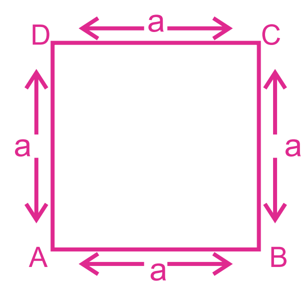
यह नियम संख्याओं के योग पर गुणन की वितरणता कहलाती है।

12.4.3 ज्यामिति के नियम (बीजीय रूप में)

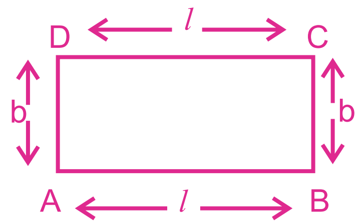
हम क्षेत्रमिति में वर्ग एवं आयत के परिमाप भी बीजीय व्यंजक के रूप में लिख सकते हैं। हम जानते हैं कि किसी भी बहुभुज का परिमाप उसकी सभी भुजाओं का योग होता है।

(i) **वर्ग का परिमाप**

वर्ग ABCD का परिमाप
= AB + BC + CD + DA
= a + a + a + a
= 4a
= 4 x भुजा



(ii) आयत का परिमाप :– आयत में आमने सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं। AB व CD को हम लम्बाई l तथा BC व DA को चौड़ाई b ले तो



अतः आयत का परिमाप

= AB की लम्बाई +BC की लम्बाई

+CD की लम्बाई +AD की लम्बाई

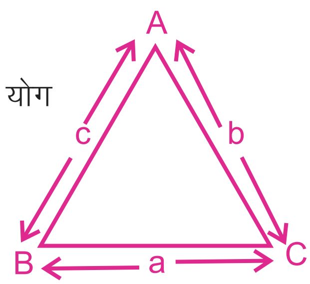
अतः आयत का परिमाप $p = l + b + l + b$

$= 2l + 2b$

$= 2(l + b)$

जहाँ l व b चर है जिनका मान अलग–अलग आयत में अलग–अलग होता है

(iii) त्रिभुज का परिमाप



त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं की लम्बाईयों का योग

= BC + AC + AB

= a + b + c

प्रश्नावली 12.2

1 संख्या 3, 7 और 4 से संख्यात्मक व्यंजक बनाइए।

(i) केवल जोड़ एवं घटाव के चिह्नों का प्रयोग करते हुए

(ii) केवल गुणा व जोड़ का प्रयोग करते हुए

2. नीचे दिए व्यंजकों में से प्रत्येक के लिए बताइए कि वे बीजीय व्यंजक हैं या संख्यात्मक व्यंजक।

(i) $3x + 5$ (ii) $5 \times 4 + 7$ (iii) $3 + 4 \times 3 + 5$ (iv) $2x + 1$ (v) $\frac{x}{2} + 5 - x$ (vi) $3x$

3. निम्न व्यंजकों को ध्यान में से देखिए तथा बताइए प्रत्येक को बनाने में जोड़, घटा, गुणा और भाग में से किन–किन संक्रियाओं का प्रयोग हुआ है। सम्बन्धित संक्रिया वाले स्तम्भ में सही/गलत का निशान लगाइए।

क्र.स.	व्यंजक	जोड़	घटाव	गुणा	भाग
1	$x + 5$				
2	$7m + 3$				
3	$y - 3x$				
4	$x - y - z$				
5	$3x - 10 - \frac{z}{5}$				
6	$\frac{y}{17}$				

4. निम्नलिखित स्थितियों के लिए बीजीय व्यंजक लिखिए।

(i) a में 7 जोड़ना (ii) b में से 10 घटाना (iii) x का 4 से गुणा

(iv) x में 4 से भाग (v) 7 में से x घटाना (vi) 10 में q का भाग

5. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक लिखिए।

(i) 2n में 15 जोड़ना (ii) $2x$ में 15 घटाना

(iii) p के दुगुने में 3 जोड़ना (iv) q के दुगुने में 3 घटाना

(v) y को 5 से गुणा कर उसमें से 11 घटाना

(vi) z को -3 से गुणा कर उसमें 11 जोड़ना

6. q, 5 व -3 का प्रयोग करते हुए बीजीय व्यंजक लिखिए।

7. यदि नाथू के पास x रुपये हैं, तो बताइए –

(i) बीना के पास नाथू के धन से दुगना धन है तो उसके पास कितना धन है ?

(ii) नाथू ने 150 रुपयों की पुस्तकें खरीदी उसके पास कितना धन बचा ?

(iii) नाथू के प्रारम्भिक धन का आधा सीमा के पास है सीमा के पास कितने रुपये हैं ?

(iv) मिली के पास नाथू के धन से 3 गुना धन है।

8. एक त्रिभुज की ऊँचाई उसके आधार के दुगुने से 5 अधिक है। उसकी ऊँचाई क्या होगी यदि आधार b है।

9. यदि विमल की वर्तमान आयु p वर्ष है, तो बताइए –

(i) आज से 10 वर्ष पूर्व उसकी उम्र क्या थी ?

(ii) 5 वर्ष पश्चात् विमल की आयु क्या होगी ?

(iii) विमल की चाची उससे 3 गुना उम्र की है। चाची की उम्र क्या होगी ?

(iv) विमल की आयु के दुगुने से 5 कम करने पर विमल की माँ की आयु प्राप्तहोती है। माँ की आयु क्या होगी?

12.5 समीकरण से परिचय

सीमा ने एक पपीता खरीदा जिसे फल बेचने वाले ने तराजू के एक पलड़े में रखा और दूसरे पलडे में 2 किग्रा का बाट रखने पर तुला संतुलित हुई तो उसने पपीते का तौल 2 किग्रा बताया। उस पपीते का तौल चर राशि x मानकर हम इसे एक गणितीय वाक्य $x = 2$ के रूप में लिख सकते हैं।

निम्न स्थितियों में गणितीय वाक्य देखिए।

Y= 2+1 P+1=5

ये गणितीय वाक्य समीकरण कहलाते हैं।

12.5.1 कथन से समीकरण

निम्नलिखित कथनों से बने समीकरण देखिए।

किसी संख्या का दुगुना 10 है	2n = 10
किसी संख्या के तीन गुने से पाँच अधिक, 17 है।	3n + 5 = 17
किसी संख्या के आधे से 3 कम 6 है।	$\frac{x}{2} - 3 = 6$
किसी संख्या के दुगने में 15 जोड़ने पर 51 हो जाता है।	------------

12.5.2 समीकरण से कथन

$3x = 21$	किसी संख्या का तीन गुना 21 है।
$2x - 7 = 19$	किसी संख्या के दुगुने से 7 कम 19 होता है।
$23 = 4x + 3$	23 किसी संख्या के चार गुने से 3 अधिक है।
$3x - 7 = 11$	....

अत: चर एवं अचरों में सम्बन्ध जिसमें गणितीय संक्रियाओं के साथ–साथ "=" का प्रयोग किया जाता है **समीकरण** कहलाता है। समीकरण में दो पक्ष **बायाँ पक्ष** एवं **दायाँ पक्ष** होते हैं जिनको समता के चिह्न से पृथक किया जाता है।

12.5.3 समीकरण का हल

निम्नलिखित समीकरण में x के स्थान पर क्या मान रखें कि समीकरण संतुलित हो जाए। आओ करके देखें।

बायाँ पक्ष → $x + 1 = 5$ ← दायाँ पक्ष

x का मान	बायाँ पक्ष	दायाँ पक्ष	निष्कर्ष
0	0 + 1 = 1	5	बराबर नहीं
1	1 + 1 = 2	5	बराबर नहीं
2	2 + 1 = 3	5	बराबर नहीं
3	3 + 1 = 4	5	बराबर नहीं
4	4 + 1 = 5	5	बराबर

अतः x का मान 4 रखने पर बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाता है अतः x का मान 4 रखने पर समीकरण संतुष्ट हो जाता है।

एक और समीकरण $3x - 2 = 2x + 1$ पर विचार करते हैं

x का मान	बायाँ पक्ष	दायाँ पक्ष	निष्कर्ष
0	3x0-2=-2	2x0+1=1	बराबर नहीं
1	3x1-2=3-2=1	2x1+1=2+1=3	बराबर नहीं
2	3x2-2=6-2=4	2x2+1=4+1=5	बराबर नहीं
3	3x3-2=9-2=7	2x3+1=6+1=7	बराबर

अतः समीकरण में चर के संभावित मान रखने पर जो मान उसको संतुष्ट करता है वह समीकरण का हल कहलाता है। इस विधि को हम प्रयत्न एवं भूल विधि कहते हैं।

प्रश्नावली 12.3

1. नीचे कुछ गणितीय कथन लिखे गए हैं। बताइए इनमें से कौन–कौन समीकरण हैं। यह भी बताइए कि जो समीकरण हैं उनमें चर क्या है?

   (i) $5x = 0$ (ii) $t - 7 > 5$ (iii) $4 \div 2 = 2$

   (iv) $2x - 1 < 5$ (v) $7 = 14 \times 2 + q$ (vi) $15000 = 2t + 3500$

2. समीकरण $10y = 50$ में चर के मान $y=10$, $y = 8$ तथा $y = 5$ रख कर देखिए किस मान से समीकरण सन्तुष्ट होता हैं।

3. नीचे समीकरण के संभावित हल दिए गए हैं समीकरण में मान रखकर देखिए क्या यह दिए गए चर के मान के लिए सन्तुष्ट है ?

   (i) $3x - 7 = 5$ $x = 5$ (ii) $3p + 2 = 8$ $p = 2$

4. दिए गए समीकरण के लिए सारणी को पूरा कीजिए व समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

   (i) $3x = 15$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$3x$	0	3						

   (ii) $\frac{P}{3} = 4$

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{P}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$									

(iii) $x - 3 = 5$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x - 3$	-2	-1	0								

हमने सीखा

1. हमने तीलियों की सहायता से प्रतिरूप बनाना सीखा। हमने किसी आकार को कई बार बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के व्यापक नियम बनाए।
2. चर राशियाँ कई मान ग्रहण करती हैं। इनका मान स्थिर नहीं रहता है जैसे वृत्त की त्रिज्या कुछ भी ले सकते हैं परन्तु एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग एक अचर राशि है यह परिवर्तित नहीं होता है।
3. चर राशियों को हम x, y, z, p, q आदि द्वारा प्रदर्शित करते हैं।
4. हमने चर राशियों एवं अचर राशियों में संक्रियाओं का उपयोग कर व्यंजक बनाए।

   जैसे $x + 4$, $x - 3$, $3p$, $4q$ आदि।
5. चर राशियों में क्रमविनिमेयता योग एवं गुणन में लागू होती है।

   $a + b = b + a$ एवं $a \times b = b \times a$
6. समीकरण चर पर एक प्रतिबन्ध होता है इसे एक चर वाला व्यंजक बराबर एक स्थिर संख्या के रूप में भी ले सकते हैं।

   जैस $x + 4 = 8$ है।
7. एक चर वाले समीकरणों को प्रयत्न एवं भूल विधि द्वारा हल करना सीखा।

   इसमें हम चर को विभिन्न मान तब तक देते हैं जब तक वह सही मान प्राप्त न कर लें जो समीकरण को संतुष्ट करता है।