संख्या पद्धति
(Number System)

❑ अंकगणित संख्याओं का विज्ञान है, अतः जरूरी है कि हम अंकगणित के अध्ययन की शुरुआत करते समय संख्या के गुण-धर्म, विभाज्यता, संख्याओं के व्यवहार, संख्याओं के वर्गीकरण इत्यादि से परिचित हो लें। ये सभी जानकारियां संख्या पद्धति अध्याय के अंतर्गत प्रस्तुत किए जाने की परंपरा है। इसीलिए अंकगणित की प्रत्येक पुस्तक में यह अध्याय सर्वप्रथम प्रस्तुत किया जाता है।

यहां हम इस बात का उल्लेख करना परम आवश्यक समझते हैं कि संख्या पद्धति के तहत संख्याओं की परिभाषा, गुण-धर्म, वर्गीकरण इत्यादि जानने की बात सर्वप्रथम तो हो सकती है और यह उचित एवं जरूरी है किंतु यह अनिवार्य नहीं है कि इस अध्याय पर आधारित सभी प्रश्नों को हल करने की क्षमता प्रारंभ में ही अर्जित कर लेना संभव हो जाए। इसका कारण यह है कि इस अध्याय के अंतर्गत बहुत से ऐसे प्रश्न होते हैं जिसमें अंकगणित के दूसरे अध्यायों से संबंधित व्यवहार की जानकारी अपेक्षित होती है। संख्याओं के व्यवहार से यहां आशय यह है कि औसत, अनुपात-समानुपात, प्रतिशत, भिन्न तथा घातांक इत्यादि के प्रश्नों में संख्याएं किस प्रकार व्यवहार करती हैं?

❑ दाशमिक प्रणाली (Decimal System)

हमारे दैनिक कार्यों में जिस संख्या पद्धति का प्रयोग होता है उसे लिखने के लिए हम 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का प्रयोग करते हैं। इसलिए इस संख्या पद्धति को 'दाशमिक संख्या प्रणाली' कहते हैं। इसे '**हिन्दू-अरैबिक प्रणाली**' भी कहते हैं।

☞ **दाशमिक प्रणाली की विशेषताएं**—दाशमिक प्रणाली की निम्नलिखित प्रमुख विशेषताएं हैं—

(i) इसमें संख्याओं को लिखने के लिए दस प्रतीकों का प्रयोग होता है (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7,8, 9)।

(ii) इसमें संख्याओं को लिखने के लिए दाईं से बाईं ओर क्रमशः इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार, दस हजार, लाख इत्यादि स्थान होते हैं।

4	5	6	3	7	0
↓	↓	↓	↓	↓	↓
लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

⟵ दाईं से बाईं ओर

- दाईं ओर से पहला स्थान अर्थात इकाई का अंक = 0
- दाईं ओर से दूसरा स्थान अर्थात दहाई का अंक = 7
- दाईं ओर से तीसरा स्थान अर्थात सैकड़ा का अंक = 3

(iii) इसमें इकाई से बाईं ओर क्रमशः जितना आगे बढ़ते हैं उतना ही अंकों के मान में दस गुना वृद्धि होती जाती है।

❑ अंकों के मान

किसी भी संख्या में प्रयुक्त प्रत्येक अंक के कुल दो मान होते हैं— **(i)** वास्तविक मान एवं **(ii)** स्थानीय मान।

(i) वास्तविक मान—जो कभी नहीं बदलता है। किसी भी संख्या का वास्तविक मान हमेशा स्थिर होता है। इसे '**जातीय मान**' या '**अंकित मान**' अथवा **शुद्ध मान** भी कहा जाता है।

जैसे—संख्या 8768 में अंक '8' के दोनों स्थानों का वास्तविक मान 8 होगा।

(ii) स्थानीय मान—किसी अंक का वह मान जो उसके स्थान विशेष के कारण होता है, '**स्थानीय मान**' कहलाता है।

जैसे—संख्या 8768 में एक आठ का स्थानीय मान **8000** तथा दूसरे आठ का स्थानीय मान **8** है।

```
8768
|  |
|  8
8000
```

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि संख्या में एक से अधिक बार आए अंक का वास्तविक मान समान होगा जबकि स्थानीय मान भिन्न-भिन्न होंगे।

संख्या के प्रकार—संख्याओं का विभिन्न संदर्भों में और अनेक प्रकारों से प्रयोग किया जाता है। संख्याओं के निम्नलिखित प्रकार हैं—

● **परिमेय संख्याएं (Rational Number)**— $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखी जाने वाली संख्याएं 'परिमेय संख्याएं' कहलाती हैं जहां p तथा q पूर्णांक हों, q शून्य न हो $(q \neq 0)$ ।

जैसे— $\frac{0}{1} = 0, \frac{4}{1} = 4, \frac{4}{7}, \frac{9}{2}, \frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}, ...$आदि।

सभी धन, ऋण, शून्य, सम, विषम, भाज्य, अभाज्य तथा क्रमागत आदि पूर्ण संख्याएं परिमेय संख्याएं होती हैं क्योंकि हर के स्थान पर 1 लिख देने से वे $\frac{p}{q}$ के रूप में परिवर्तित हो जाती हैं। एक परिमेय संख्या को अनंत रूपों में लिखा जा सकता है और अनंत रूपों में लिखी गई प्रत्येक परिमेय संख्या का मान समान होता है।

जैसे— $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = ...\infty$

परिमेय संख्या को सीमित दशमलव

(जैसे- $\frac{2}{4} = 0.5, \frac{1}{8} = 0.125$) तथा आवर्त दशमलव संख्या

(जैसे— $\frac{4}{3} = 1.3333......., \frac{1}{7} = 0.142857142857........$) के

रूप में लिखा जा सकता है। दुहराव वाली दशमलव संख्या/संख्याएं 'आवर्तक संख्या' कहलाती हैं।

☞ **नोट :—** दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्याएं होती हैं।

जैसे $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{3}$ के बीच की अनंत परिमेय संख्याएं $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ …….. इत्यादि हैं।

● **अपरिमेय संख्या (Irrational Number)—** जो संख्याएं $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखी जा सकती हैं उन्हें 'अपरिमेय संख्या' कहते हैं, जहां p, q धन पूर्णांक हों तथा q शून्य न हो $(q \neq 0)$। जैसे– $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \pi$ इत्यादि। अपरिमेय संख्या को न तो सीमित दशमलव और न आवर्त दशमलव संख्या के रूप में लिखा जा सकता है। किसी भी धन पूर्णांक संख्या (जो पूर्ण वर्ग न हो) का वर्गमूल अपरिमेय संख्या होगी क्योंकि उसमें न तो सीमित दशमलव और न आवर्त दशमलव होते हैं।

☞ **नोट :—** π =3.14159…… एक अपरिमेय संख्या है जो वृत्त की परिधि तथा व्यास का अनुपात है। उसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है, किंतु गणना की सुविधा के लिए इसका मान $\frac{22}{7}$ प्रयोग में लेते हैं जो π का सटीक मान नहीं है। इसलिए $\frac{22}{7}$ एक परिमेय संख्या है किंतु π एक अपरिमेय संख्या है।

● **वास्तविक संख्याएं (Real Numbers) —**सभी परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएं 'वास्तविक संख्याएं' कहलाती हैं। जैसे– 3, 0, 7, $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}$, π, $\sqrt{3}$, –1, $\sqrt{7}$ आदि **'वास्तविक संख्याएं'** हैं।

● **प्राकृतिक संख्याएं (Natural Numbers)—** गणना संख्याएं जो एक से शुरू होकर अनंत तक होती हैं, **'प्राकृतिक संख्याएं'** कहलाती हैं। इन्हें सूक्ष्माक्षर में N अथवा n से प्रदर्शित करते हैं।

यथा– N = 1, 2, 3,……….. ∞

● **पूर्ण संख्याएं (Whole Numbers)—** प्राकृतिक संख्याओं के समूह में शून्य को शामिल करने के बाद संख्याओं का जो समूह बनता है, उसे **'पूर्ण संख्याओं का समूह'** कहते हैं। पूर्ण संख्याओं के समूह को W से प्रदर्शित किया जाता है।

यथा– W = 0,1,2, 3, 4, 5,……….. ∞

● **पूर्णांक संख्याएं (Integers Numbers)—** ऋण पूर्णांक (–1, –2, –3,………. ∞), शून्य (0) और धन पूर्णांक (1,2, 3, ………. ∞) के समूह को एक साथ **'पूर्णांक संख्याएं'** कहा जाता है। इन्हें I से प्रदर्शित किया जाता है।

यथा– I = (∞…… –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …….. ∞)

● **धन पूर्णांक संख्याएं (Positive Integers Numbers)—** प्राकृतिक संख्याओं (1, 2, 3, …….. ∞) को 'धन पूर्णांक' भी कहा जाता है। इन्हें Z^+ से प्रदर्शित करते हैं।

यथा– $Z^+ = 1, 2, 3, \ldots\ldots \infty$

● **ऋण पूर्णांक संख्याएं (Negative Integers Numbers)—** ऋण चिह्नयुक्त प्राकृतिक संख्याओं (–1, –2,– 3, …….. ∞) को 'ऋण पूर्णांक' कहा जाता है। इन्हें Z^- से प्रदर्शित करते हैं।

यथा– $Z^- = -1, -2, -3, \ldots\ldots -\infty$

☞ **नोट :—** ऋण पूर्णांक में सबसे छोटी संख्या $-\infty$ है जो प्राप्त नहीं की जा सकती है तथा सबसे बड़ी संख्या –1है।

● **शून्य (Zero)—**इसका संकेत 0 है तथा यह सबसे छोटा अंक है। किसी संख्या में शून्य जोड़ने तथा घटाने पर संख्या के मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। परंतु गुणा करने पर गुणनफल हमेशा शून्य आता है। शून्य को किसी संख्या के बाएं लिखने पर संख्या के मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है लेकिन दाहिने लिखने पर संख्या का मान दस गुना बढ़ जाता है।

☞ **नोट :—** शून्य का शून्य से गुणनफल तथा भागफल **अपरिभाषित** है।

0×0 = अपरिभाषित

$0 \div 0$ = अपरिभाषित

● **सम संख्याएं (Even Numbers)—**वे संख्याएं जो 2 से पूर्णतः विभाजित हो जाती हैं, **'सम संख्याएं'** कहलाती हैं। यह दो प्रकार की होती हैं– ∞

(i) धन सम संख्याएं (Positive Even Numbers)—2, 4, 6, 8, 10, 12,…………. ∞

(ii) ऋण सम संख्याएं (Negative Even Numbers)—

–2, – 4, –6, …….., – ∞

सम संख्याओं को E_n से प्रदर्शित किया जाता है। सम संख्याएं पूर्ववर्ती से 2 अधिक तथा परवर्ती से 2 कम होती हैं।

जैसे– 2, 4, 6, 8, 10, 12, ……. में 10 अपने **परवर्ती 12** से दो कम तथा अपने पूर्ववर्ती 8 से दो अधिक है।

☞ **नोट :—** प्रत्येक पूर्णांक अपने पूर्ववर्ती पूर्णांक से 1 अधिक तथा परवर्ती से 1 कम होता है। किसी पूर्णांक में 1 जोड़ देने पर ठीक अगला तथा 1 घटा देने पर ठीक पूर्व वाला पूर्णांक प्राप्त होता है। क्रमागत पूर्णांकों में 1 का अंतर होता है।

● **विषम संख्याएं (Odd Numbers)—**वे संख्याएं जो 2 से पूर्णतः विभाजित नहीं होती हैं, **'विषम संख्याएं'** कहलाती हैं। यह भी दो प्रकार की होती हैं–

(i) धन विषम संख्याएं (Positive Odd Numbers)— 1, 3, 5, ……. ∞

(ii) ऋण विषम संख्याएं (Negative Even Numbers)—

–1, – 3, – 5, ……., ∞

विषम संख्याओं को O_n से प्रदर्शित किया जाता है। इनके भी बीच अपने पूर्ववर्ती तथा परवर्ती से दो-दो का अंतर होता है।

● **भाज्य संख्याएं (Composite Numbers)**—वे धन संख्याएं जो 1 तथा स्वयं के अलावा भी किसी अन्य संख्या से पूर्णतः विभाजित हो जाए उन्हें '**भाज्य संख्याएं**' कहते हैं। इन्हें '**संयुक्त संख्याएं**' भी कहते हैं। जैसे– 6, 8, 9, 10 12 ये सभी भाज्य संख्याएं हैं क्योंकि ये स्वयं तथा 1 के अतिरिक्त संख्याओं से भी पूर्णतः विभाजित होती हैं। भाज्य संख्याओं के लिए आवश्यक यह है कि वे कम से कम तीन संख्याओं से अवश्य विभाजित हों। इन्हें **'यौगिक संख्याएं'** भी कहते हैं।

● **अभाज्य संख्याएं (Prime Numbers)**—वे धन संख्याएं जो स्वयं तथा 1 के अलावा किसी अन्य संख्या से पूर्णतः विभाजित न हों, **'अभाज्य संख्याएं'** कहलाती हैं। जैसे– 2, 3,5, 7, 11..... आदि। अभाज्य संख्याओं के लिए यह आवश्यक है कि वे केवल दो संख्याओं से विभाजित हों। 2 एक ऐसी अभाज्य संख्या है जो सम है। यह सबसे छोटी अभाज्य संख्या भी है। **संख्या 1 केवल स्वयं से विभाजित होती है। अतः यह न तो भाज्य संख्या है और न अभाज्य संख्या है।**

● **सह अभाज्य संख्याएं (Co-Prime Numbers)**—संख्याओं के ऐसे जोड़े जिनमें 1 के अतिरिक्त कोई अन्य गुणनफल उभयनिष्ठ न हो, तो ऐसे जोड़े की दो संख्याएं **परस्पर अभाज्य** संख्याएं अथवा **सह-अभाज्य** संख्याएं कहलाएंगी। जैसे–(7,3) में 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। अतः 3 और 7 परस्पर अभाज्य या सह-अभाज्य संख्याएं हैं। कुछ और सह-अभाज्य संख्याएं (4,7), (16,25) (15,17), (27, 32) इत्यादि हैं। दूसरे शब्दों में सह-अभाज्य संख्याएं, संख्याओं का वह समूह है जिसका म.स.प. 1 होता है। सह अभाज्य संख्याएं होने के लिए कम से कम दो संख्याएं होना अति आवश्यक है। समूह की संख्याएं भाज्य अथवा अभाज्य दोनों ही तरह की हो सकती हैं।

☞ **शून्य संख्या के कुछ सामान्य नियम—**

सिद्धांत	नियम	उदाहरण
जोड़	$x+0=x$	$3+0=3$
घटाना	$x-0=x$	$3-0=3$
गुणा	$x\times 0=0$	$3\times 0=0$
भाग	$\frac{0}{x}=0$ (जब $x\neq 0$)	$\frac{0}{3}=0$
	$\frac{x}{0}$ = अपरिभाषित	$\frac{3}{0}$ = अपरिभाषित
घातांक	$0^x=0$ $x^0=1$	$0^3=0$ $3^0=1$
वर्गमूल	$\sqrt{0}=0$	
Sine	$\sin 0^0=0$	
Cosine	$\cos 0^0=1$	
Tangent	$\tan 0^0=0$	

किसी संख्या में शून्य से गुणा करने पर शून्य ही प्राप्त होता है।

माना $x=1, 2, 3...$ रखने पर–

$$\frac{0}{1}=0\Rightarrow 0=0\times 1=0$$

$$\frac{0}{2}=0\Rightarrow 0=0\times 2=0$$

$$\frac{0}{3}=0\Rightarrow 0=0\times 3=0$$

अतः शून्य में किसी संख्या से भाग देने पर शून्य प्राप्त होता है।

☞ **माना $\frac{3}{0}=A$**

$=0\times A.........(i)$

शून्य का A में गुणा करने पर शून्य ही प्राप्त होगा। अतः समीकरण (i) में A का ऐसा कोई मान नहीं हो सकता जो इस समीकरण को संतुष्ट कर सके क्योंकि किसी संख्या में शून्य से गुणा करने पर शून्य ही प्राप्त होता है। अतः $\frac{x}{0}$ अपरिभाषित है।

☞ **$x^0=1$**

यदि किसी संख्या की घात शून्य हो तो उसका मान 1 होता है, इस प्रकार से–

$$\frac{x^2}{x^2}=x^{2-2}=x^0 ....(i)$$

$$\frac{x^2}{x^2}=1 ....(ii)$$

समीकरण (i) = समीकरण (ii)

अतः $x^0=1$

किसी संख्या की घात शून्य हो, तो उसका दूसरा अर्थ उस संख्या को उसी संख्या से भाग देना है। जिसका प्रतिफल सदैव 1 प्राप्त होगा।

☞ **नोट :**—किसी संख्या का उसी संख्या में भाग देने पर प्रतिफल 1 प्राप्त होता है लेकिन शून्य का शून्य में भाग अपरिभाषित है क्योंकि यदि

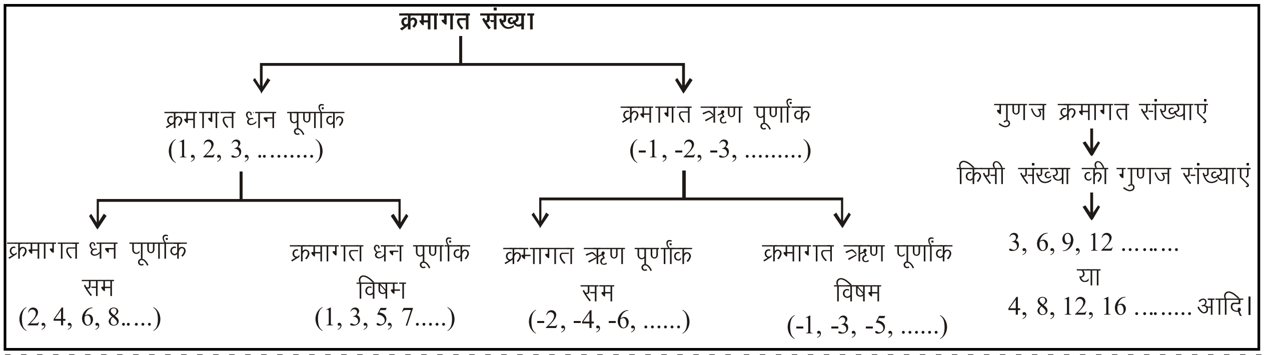
$$\frac{0}{0}=1\Rightarrow 0=1\times 0=0,\ \frac{0}{0}=2\Rightarrow 0=2\times 0=0$$

यदि $\frac{0}{0}=3\Rightarrow 0=3\times 0=0$, अतः प्रत्येक स्थिति में शून्य ही प्राप्त होता है।

● **क्रमागत संख्याएं (Consecutive Numbers)**

वे संख्याएं जो एक-दूसरे के बाद एक निर्धारित क्रमानुसार आती रहती हैं, क्रमागत संख्याएं कहलाती हैं।

जैसे– 1, 2, 3, 4, ...



❑ संख्याओं की विभाज्यता की जांच

- हम ऐसा प्रतिरूप (पैटर्न) ज्ञात कर सकते हैं, जिससे बता सकें कि कोई संख्या 2,3,4,5,6,7,8,9,10 या 11 से विभाज्य है या नहीं।

☞ **2 से विभाज्यता :**

वे सभी संख्याएं दो से विभाजित होंगी जिसकी इकाई का अंक 0 या सम संख्या होगी।

जैसे- 510, 98, 9784, 786 .... आदि।

☞ **3 से विभाज्यता :**

वे सभी संख्याएं तीन से विभाजित होंगी जिनके अंकों का योग 3 से विभाजित होता है।

जैसे- 1431, 525, 729................ आदि।

संख्या 1431 के अंकों का योग = 1 + 4 + 3 + 1 ⇒ 9

9, संख्या 3 से विभाज्य है, अतः 1431, 3 से विभाज्य होगी।

☞ **4 से विभाज्यता :**

वे सभी संख्याएं 4 से विभाजित होंगी जिनका अंतिम दो अंक (इकाई व दहाई) चार से विभाजित हो या दोनों अंक शून्य हों।

जैसे- 2724, 1936, 600, 340, ... आदि

2724 में अंतिम दो अंक = 24 जो 4 से विभाज्य है।

अतः संख्या 2724, 4 से विभाज्य होगी।

☞ **5 से विभाज्यता :**

वे सभी संख्याएं 5 से विभाजित होंगी जिनके इकाई का अंक 0 या 5 हो।

जैसे- 775, 910, 1890 .... आदि

☞ **6 से विभाज्यता :**

वे सभी 6 से विभाजित होंगी जो 2 और 3 दोनों से एक साथ विभाजित होती हों।

जैसे 96, 252, 2040, ... आदि

☞ **7 से विभाज्यता :**

वे सभी संख्याएं 7 से विभाजित होंगी जो 6 अंकों की पुनरावृत्ति से बनी हों।

जैसे- 5 5 5 5 5 5, 19 19 19 19 19 19

नोट : (i) यदि संख्या 6 की गुणज अर्थात 6 बार, 12 बार, ... हो, तो भी वह संख्या 7 से विभाज्य है।

(ii) यदि दो अंकों की संख्या की पुनरावृत्ति तीन बार हो तो वह संख्या 7 के अलावा 13 और 37 से भी विभाज्य होगी।

☞ **8 से विभाज्यता :**

वे सभी संख्याएं 8 से विभाजित होंगी जिनके अंतिम तीन अंक शून्य हों या अंतिम तीन अंक 8 से विभाजित हों।

जैसे- 95488, 7000

☞ **9 से विभाज्यता :**

वे सभी संख्याएं 9 से विभाजित होंगी जिनके अंकों का योग 9 से विभाजित हो।

जैसे- 468, 8883, 68454, ... आदि।

संख्या 8883 का योग = 8 + 8 + 8 + 3 = 27

27, 9 से विभाज्य है। इसलिए 8883 संख्या 9 से विभाजित होगी।

☞ **10 से विभाज्यता :**

वे संख्याएं 10 से विभाजित होंगी जिनमें इकाई का अंक शून्य (0) हो।

जैसे- 1860, 1970, ... आदि।

☞ **11 से विभाज्यता :**

(i) वे सभी संख्याएं 11 से विभाजित होंगी जिनके एक ही अंक की पुनरावृत्ति सम बार हो।

जैसे- 33, 7777, ... आदि।

(ii) ऐसी संख्या जिसके दाहिने तरफ से सम एवं विषम स्थानों पर स्थित अंकों के योग का अंतर शून्य हो या अंतर 11 से विभाजित हो, तो वह संख्या भी 11 से विभाजित होगी।

जैसे- 932789, 1551, ...

संख्या 932789 के विषम स्थानों का योग = 9 + 7 + 3 ⇒ 19

संख्या 932789 के सम स्थानों का योग = 8 + 2 + 9 ⇒ 19

दोनों का अंतर = 19 – 19 ⇒ 0

अतः संख्या 932789, संख्या 11 से विभाज्य है।

❑ प्राकृतिक संख्याओं के औसत एवं योग पर प्रश्न

1. 1 से 100 तक की प्राकृतिक संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए ।
2. 1 से 100 तक की प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए ।
3. 1 से 100 तक की सम संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।
4. 1 से 100 तक की सम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए ।
5. 1 से 100 तक की विषम संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

6. 1 से 100 तक की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल 1. सूत्र विधि-1

$1+2+3+...........+99+100$

सूत्र : n प्राकृतिक संख्या का योग = $\frac{n(n+1)}{2}$

n प्राकृतिक संख्या का औसत = $\frac{\text{n प्राकृतिक संख्या का योग}}{\text{कुल संख्या}}$

1 से 100 तक प्राकृतिक संख्या का योग = $\frac{100(100+1)}{2}$

$= 50 \times 101$

$= 5050$

औसत = $\frac{5050}{100} \Rightarrow 50.50$

सूत्र विधि-2

$1+2+3+........+99+100$

सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

जहां n = पदों की संख्या, a= पहला पद,

S_n = n पदों का योग

यहां n = 100, a = 1 तथा d = 1 है।

$1+2+3+...........+99+100$

$S_{100} = \frac{100}{2}[(2\times1+(100-1)1]$

$= 50(2+99) = 50\times 101 \Rightarrow 5050$

औसत = $\frac{5050}{100} \Rightarrow 50.50$

औसत विधि-प्रायः देखा गया है कि इस प्रकार के प्रश्नों को हल करते समय परीक्षार्थी परीक्षा भवन में जूझते रहते हैं और विभिन्न प्रकार के नियमों व समीकरणों का प्रयोग करके हल करने का प्रयास करते हैं जिससे उनका काफी समय ऐसे प्रश्नों को हल करने के प्रयास में ही नष्ट हो जाता है। ऐसे प्रश्नों को एक निश्चित नियम का प्रयोग करके कम समय एवं सरलतम ढंग से हल किया जा सकता है।

औसत = $\frac{\text{प्रथम संख्या + अंतिम संख्या}}{2}$

योग = औसत × जितनी बार संख्या हो अर्थात जितनी संख्या हो।

हल 1. औसत = $\frac{1+100}{2} = \frac{101}{2} \Rightarrow 50.5$

हल 2. योग = औसत × संख्या

$= 50.5 \times 100$

$= 5050$

(1 से 100 तक की औसत = 50.5 तथा 1 से 100 तक में कुल संख्या = 100)

हल 3. 1 से 100 तक में प्रथम सम संख्या = 2 तथा अंतिम सम संख्या = 100 होगी

औसत = $\frac{2+100}{2} = \frac{102}{2} \Rightarrow 51$

हल 4. योग = औसत × संख्या

$= 51 \times 50$

$= 2550$

(**नोटः** 1 से 100 तक में 50 सम संख्या तथा 50 विषम संख्याएं होंगी)

हल 5. 1 से 100 तक में प्रथम विषम संख्या = 1 तथा अंतिम विषम संख्या = 99 होगी।

औसत = $\frac{1+99}{2} = \frac{100}{2} \Rightarrow 50$

हल 6. योग = औसत × संख्या

$= 50 \times 50$

$= 2500$

(**नोटः** 1 से 100 तक में 50 विषम संख्याएं होंगी)

❑ पैरों एवं सिरों की संख्या के आधार पर प्रश्न :

प्रश्न- मोहन के फार्म में मुर्गियों एवं सुअरों की कुल संख्या 37 है तथा उनके पैरों की संख्या 98 है, तो मोहन के फार्म में मुर्गियों एवं सुअरों की संख्या ज्ञात कीजिए?

हल :

माना सुअरों की संख्या x है तथा मुर्गियों की संख्या y है, तो

प्रश्नानुसार $x + y = 37$ ....(i)

सुअरों के पैरों की संख्या $= 4x$

तथा मुर्गियों की पैरों की संख्या = 2y होंगी।

प्रश्नानुसार $4x + 2y = 98$ ......(ii)

समीकरण (i) व समीकरण (ii) को हल करने पर

$2 \times (x+y) = 37 \times 2$

$2x + 2y = 74$

$4x + 2y = 98$

$-2x = -24$

$x = 12$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

y = 25

अतः सुअरों की संख्या = 12

तथा मुर्गियों की संख्या = 25

समीकरण विधि–

यदि सुअरों की संख्या x एवं मुर्गियों की संख्या $(37-x)$ हो, तो पैरों की संख्या = $4 \times x$ तथा $2 \times (37-x)$ होगी।

प्रश्नानुसार $4x + 74 - 2x = 98$

$2x = 98 - 74 = 24$

$x = 12$ (जो कि सुअरों की संख्या है)

तथा $37 - x = 37 - 12 = 25$ (जो कि मुर्गियों की संख्या है)

अतः सुअरों की संख्या = 12

तथा मुर्गियों की संख्या = 25

परीक्षोपयोगी प्रश्न

1. कुछ प्राकृत संख्याओं का औसत 15 है। यदि पहली संख्या में 30 जोड़ दिया जाए और अंतिम संख्या से 5 घटा दिया जाए, तो औसत 17.5 रहता है। प्राकृत संख्याओं की संख्या कितनी है?

(a) 15 (b) 30

(c) 20 (d) 10

उत्तर—(d)

माना प्राकृतिक संख्याओं की संख्या n है तथा संख्याएं क्रमशः a_1, $a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ हैं।

प्रश्नानुसार

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = 15$$

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = 15n \quad \ldots\ldots\ldots(i)$$

तथा $$\frac{a_1 + 30 + a_2 + \ldots\ldots + a_n - 5}{n} = 17.5$$

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + 25 = 17.5n \quad \ldots\ldots\ldots(ii)$$

समीकरण (ii) में $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = 15n$ रखने पर

$$15n + 25 = 17.5n$$

$$2.5n = 25$$

$$n = \frac{25}{2.5} \Rightarrow 10$$

अतः प्राकृतिक संख्याओं की संख्या 10 है।

2. एक संख्या को 2736 से विभाजित करने पर शेष 75 रहता है। यदि उसी संख्या को 24 से विभाजित किया जाए, तो शेष कितना रहेगा?

(a) 12 (b) 0

(c) 23 (d) 3

उत्तर—(d)

संख्या 2736 से किसी संख्या को विभाजित करने पर शेष 75 रहता है अर्थात वह संख्या 2736 की कोई गुणज से 75 अधिक होगी।

संख्या $= 2736 \times 1 + 75 \Rightarrow 2811$

अब संख्या 2811 को 24 से विभाजित करने पर

$\frac{2811}{24} = 117$ भागफल, 3 शेष

अतः उसी संख्या को 24 से भाग देने पर 3 शेष रहेगा।

3. दो संख्याओं के घनों का योग 793 है। संख्या का योग 13 है, तो दोनों संख्याओं का अंतर बताइए।

(a) 7 (b) 5 (c) 8 (d) 6

उत्तर—(b)

माना दोनों संख्याएं क्रमशः a और b हैं।

प्रश्नानुसार $a^3 + b^3 = 793$

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) = 793$$

$$(13)^3 - 3ab(13) = 793$$

$$2197 - 39ab = 793$$

$$39ab = 2197 - 793$$

$$ab = \frac{1404}{39} \Rightarrow 36$$

अर्थात दोनों संख्या का गुणनफल 36 है, तो संख्याएं होंगी

$$= (36, 1), (9, 4), (18, 2), (6, 6)$$

प्रश्न में दिया है दोनों संख्याओं का योग 13 है अर्थात संख्याएं 9 एवं 4 होंगी।

अतः दोनों संख्याओं का अंतर $= 9 - 4 \Rightarrow 5$

4. 6 संख्याएं अवरोही क्रम में व्यवस्थित की गई हैं। प्रथम पांच संख्याओं का औसत 30 है और अंतिम पांच संख्याओं का औसत 25 है। प्रथम और अंतिम संख्याओं का अंतर क्या है?

(a) 20 (b) 5 (c) 25 (d) 30

उत्तर—(c)

माना 6 संख्याएं क्रमशः a, b, c, d, e एवं f हैं। इनका अवरोही क्रम f, e, d, c, b एवं a है।

प्रथम पांच संख्याओं का औसत = 30

$$\therefore \frac{f+e+d+c+b}{5} = 30$$

$$f + e + d + c + b = 30 \times 5 = 150 \ldots\ldots\ldots (i)$$

तथा अंतिम पांच संख्याओं का औसत = 25

$$\frac{e+d+c+b+a}{5} = 25$$

$$e + d + c + b + a = 25 \times 5 = 125 \ldots\ldots\ldots(ii)$$

समी. (i) में से समी. (ii) घटाने पर

$$f - a = 150 - 125$$

$$f - a = 25$$

अतः प्रथम एवं अंतिम संख्याओं का अंतर 25 है।

5. 2055 में कौन-सी लघुत्तम संख्या जोड़ी जानी चाहिए जिससे वह 27 से ठीक-ठीक विभाज्य हो?

(a) 28 (b) 31 (c) 27 (d) 24

उत्तर—(d)

संख्या 2055 में 27 से भाग देने पर $= \frac{2055}{27} \Rightarrow 76.11$

$\therefore 27 \times 76 < 2055 < 27 \times 77$

$\therefore$ संख्या $27 \times 77 = 2079$

अतः जोड़ी जाने वाली संख्या $= 2079 - 2055 \Rightarrow 24$

द्वितीय विधि-
विकल्पों के अनुसार सबसे छोटी संख्या जोड़ने पर

$$2055 + 24 = 2079$$

जो कि 27 से पूर्णतः विभाजित है। अतः विकल्प (d) सही है।

6. तीन संख्याओं में से पहली संख्या दूसरी की चौगुनी है और तीसरी की तिगुनी है। यदि तीनों संख्याओं का औसत 95 है, तो तीसरी संख्या कितनी है?

(a) 76 (b) 130
(c) 57 (d) 60

उत्तर—(d)

माना पहली संख्या = x है।

$\therefore$ दूसरी संख्या = $\frac{x}{4}$ तथा तीसरी संख्या = $\frac{x}{3}$

प्रश्नानुसार

$$\frac{x+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}}{3}=95$$

$$\therefore \quad x+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=285$$

$$\therefore \quad \frac{12x+3x+4x}{12}=285$$

$$\therefore \quad \frac{19x}{12}=285$$

$$\therefore \quad x=\frac{285\times12}{19}\Rightarrow 180$$

$\therefore$ तीसरी संख्या = $\frac{x}{3} \Rightarrow \frac{180}{3}=60$

7. 11 संख्याओं का औसत 36 है, जबकि उनमें से 9 का औसत 34 है। यदि शेष दो संख्याओं का अनुपात 2 : 3 हो, तो लघुत्तम संख्या का (शेष दो संख्याओं के बीच) का मान बताइए।

(a) 45 (b) 54
(c) 36 (d) 48

उत्तर—(c)

11 संख्याओं का औसत = 36

$\therefore$ 11 संख्याओं का योग = $11 \times 36 \Rightarrow 396$ होगा

$\therefore$ इनमें से 9 संख्याओं का औसत = 34 है

$\therefore$ इन 9 संख्याओं का योग = $34 \times 9 \Rightarrow 306$

अतः शेष दो संख्याओं का योग = $396 - 306 \Rightarrow 90$

$\because$ शेष दो संख्याएं 2 : 3 के अनुपात में हैं।

इस प्रकार इनमें से पहली संख्या = $90 \times \frac{2}{2+3}$

$$= 90\times\frac{2}{5} \Rightarrow 36$$

तथा दूसरी संख्या = $90 \times \frac{3}{5} \Rightarrow 54$ होगी

अतः इन दो संख्याओं में लघुत्तम संख्या = 36

8. यदि किसी संख्या में 21 को जोड़ा जाए, तो वह अपनी तिगुनी संख्या से 7 कम हो जाती है। तदनुसार, वह संख्या कितनी है?

(a) 14 (b) 16
(c) 18 (d) 19

उत्तर—(a)

माना संख्या x है।
प्रश्नानुसार

$$3x - 7 = x + 21$$
$$3x - x = 21 + 7$$
$$2x = 28$$
$$x = \frac{28}{2} \Rightarrow 14$$

9. 1500 और 2000 के बीच वह संख्या कौन-सी है जो 36 तथा 102 से विभाज्य हो?

(a) 1632 (b) 1734
(c) 1836 (d) 1944

उत्तर—(c)

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$102 = 2 \times 3 \times 17$

36 एवं 102 का ल.स. = $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 17$
$= 36 \times 17$
$= 612$

अब 36 एवं 102 से विभाज्य संख्याएं = 612, 1224, 1836

अतः स्पष्टतः 1500 से 2000 के मध्य 36 एवं 102 से विभाज्य संख्या 1836 होगी।

10. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या 11 का गुणक है?

(a) 978626 (b) 447355
(c) 112144 (d) 869756

उत्तर—(a)

विकल्प (a) से $\frac{978626}{11} = 88966$

जबकि अन्य विकल्पों में दी गई संख्याएं 11 से भाज्य नहीं हैं।

द्वितीय विधि-
कोई भी संख्या 11 की गुणक तभी होगी जब सम स्थानों पर दी गई संख्याओं का योग विषम स्थानों पर दी गई संख्याओं के योग के बराबर हो अर्थात

$$9 + 8 + 2 = 7 + 6 + 6$$
$$19 = 19$$

अतः विकल्प (a) सही है।

11. तीन क्रमिक प्राकृतिक संख्याओं (नेचुरल नंबर) के वर्गों का जोड़ 194 है। संख्याओं का जोड़ क्या होगा?

(a) 24 (b) 27
(c) 21 (d) 30

उत्तर—(a)

माना तीन क्रमिक संख्याएं x, $x+1$ तथा $x+2$ हैं।

प्रश्नानुसार

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=194$

$\therefore$ $x^2+x^2+1+2x+x^2+4x+4=194$

$3x^2+6x+5=194$

$3x^2+6x=194-5$

$3x^2+6x=189$

$\therefore$ $x^2+2x=63$

$\therefore$ $x^2+2x-63=0$

$\therefore$ $x^2+9x-7x-63=0$

$x(x+9)-7(x+9)=0$

$(x+9)(x-7)=0$

$\therefore$ $x=7, -9$ (अमान्य)

अतः दी गई संख्याएं $= x, x+1, x+2$

$=7, 7+1, 7+2,$

$=7, 8, 9$

$\therefore$ तीनों संख्याओं का योग $= 7+8+9 \Rightarrow 24$

12. चार संख्याओं का योग 48 है। जब पहली दो संख्याओं में 5 और 1 जोड़ा जाए और तीसरी और चौथी संख्याओं में से 3 और 7 घटाया जाए, तो संख्याएं समान हो जाएंगी। वे संख्याएं हैं-

(a) 4, 12, 12, 20 (b) 6, 10, 14, 18
(c) 9, 7, 15, 17 (d) 5, 11, 13, 19

उत्तर—(b)

विकल्प (b) से

$6+10+14+18=48$

तथा पहली एवं दूसरी संख्या में क्रमशः 5 एवं 1 जोड़ा जाए

$6+5=11$
$10+1=11$

तीसरी एवं चौथी संख्या में क्रमशः 3 एवं 7 घटाया जाए-

$14-3=11$
$18-7=11$

सभी स्थितियों में समान संख्या 11 प्राप्त होती है जो प्रश्न को संतुष्ट करता है। अतः विकल्प (b) की अभीष्ट संख्याएं होंगी।

13. यदि n सम हो, तो (6^n-1) विभाज्य है-

(a) 37 (b) 35 (c) 30 (d) 6

उत्तर—(b)

$n=2, 4, 6, \ldots\ldots$ रखने पर

($\because$ n एक सम संख्या है)

$\therefore$ $n=2$ रखने पर संख्या $=6^2-1$

$=36-1 \Rightarrow 35$

$n=4$ रखने पर संख्या $=6^4-1=1296-1$

$=1295$

$=37\times35$

अतः (6^n-1) संख्या 35 से विभाज्य है।

14. चार अभाज्य संख्याएं आरोही क्रम में हैं। उनमें प्रथम तीन का गुणनफल 455 है और अंतिम तीन का 1729 है। तदनुसार, उनमें सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है-

(a) 7 (b) 13
(c) 19 (d) 23

उत्तर—(c)

माना अभाज्य संख्याएं आरोही क्रम में a, b, c एवं d हैं।

अतः प्रश्न से-

$abc=455$

तब $bc=\frac{455}{a}$ ....(i)

तथा $bcd=1729$

$bc=\frac{1729}{d}$ ....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से-

$\frac{455}{a}=\frac{1729}{d}$

या $\frac{d}{a}=\frac{1729}{455}\Rightarrow\frac{19}{5}$

अतः सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी अभाज्य संख्याएं क्रमशः 19 एवं 5 होंगी।

15. 2 संख्याओं का गुणनफल 1575 है और उनका भागफल 9/7 है, तो संख्याओं का योगफल है-

(a) 74 (b) 78 (c) 80 (d) 90

उत्तर—(c)

माना संख्याएं x व y हैं।

अतः $xy=1575$ .... (i)

एवं $\frac{x}{y}=\frac{9}{7}$ .... (ii)

समीकरण (i) में समीकरण (ii) से गुणा करने पर—

$xy\times\frac{x}{y}=1575\times\frac{9}{7}$

$x^2=225\times9$

$x=15\times3$

$=45$

$\therefore$ $y=\frac{1575}{45}=35$

अतः $x+y=45+35\Rightarrow80$

अतः संख्याओं का योग 80 होगा।

16. मेरे पास x गोलियां हैं। मेरे बड़े भाई के पास मुझसे 3 अधिक गोलियां हैं जबकि मेरे छोटे भाई के पास मुझसे 3 कम गोलियां हैं। यदि गोलियों की कुल संख्या 15 है, तो मेरे पास कितनी गोलियां हैं?

(a) 3 (b) 5 (c) 8 (d) 7

उत्तर—(b)

मेरे बड़े भाई के पास गोलियों की संख्या = $x + 3$
मेरे छोटे भाई के पास गोलियों की संख्या = $x - 3$
प्रश्नानुसार

$x + x + 3 + x - 3 = 15$
$3x = 15$
$\therefore x = 5$

अतः मेरे पास गोलियों की संख्या = 5

17. 3957 में 5349 को जोड़ा जाता है। प्राप्त राशि में से 7062 को घटाया जाता है। परिणामी संख्या किससे विभाज्य नहीं होगी?

(a) 4 (b) 3 (c) 7 (d) 11

उत्तर—(c)

परिणामी संख्या $= 3957 + 5349 - 7062$
$= 9306 - 7062$
$= 2244$

विकल्प (a) से $\frac{2244}{4} = 561$ (भाज्य)

विकल्प (b) से $\frac{2244}{3} = 748$ (भाज्य)

विकल्प (c) से $\frac{2244}{7} = 320\frac{4}{7}$ (अभाज्य)

विकल्प (d) से $\frac{2244}{11} = 204$ (भाज्य)

अतः विकल्प (c) अन्य से भिन्न है।

18. जब n को 5 से विभजित किया जाता है, तो शेषफल 2 आता है। तदनुसार, n^2 को 5 से विभाजित करने पर शेषफल कितना होगा?

(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 4

उत्तर—(d)

माना n = 7

अतः प्रश्नानुसार $\frac{n}{5}$ या $\frac{7}{5}$ करने पर शेषफल 2 आता है

अतः $\frac{n^2}{5}$ करने पर

$\frac{7^2}{5} = \frac{49}{5} \Rightarrow 9$ तथा शेषफल 4

द्वितीय विधि-

चूंकि n को 5 से विभाजित करने पर शेषफल 2 आता है। अतः n निश्चित रूप से 5 से विभाजित होने वाली संख्या में 2 जोड़ने पर प्राप्त होगा।

अतः माना कि n = 12 रखने पर

$\frac{12}{5} = 2$ तथा शेषफल 2

तथा n^2 अर्थात $\frac{12^2}{5} = \frac{144}{5} \Rightarrow 28$ तथा शेषफल 4 होगा।

19. वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो $(n^3 - n)(n - 2)$ के रूप वाली प्रत्येक संख्या को पूर्णतः विभाजित करेगी, जहां n कोई 2 से बड़ी प्राकृत संख्या है।

(a) 6 (b) 12 (c) 24 (d) 48

उत्तर—(c)

प्रश्नानुसार

$(n^3 - n)(n - 2) = n(n - 1)(n + 1)(n - 2)$

$\therefore$ n = 3 लेने पर

संख्या $= 3 \times 2 \times 4 \times 1 \Rightarrow 24$

20. यदि n कोई भी 1 से बड़ी प्राकृतिक संख्या हो, तो $n^2(n^2 - 1)$ के नीचे दी गई संख्याओं में से किस संख्या से सदैव विभाजित होगी?

(a) 16 (b) 12 (c) 10 (d) 8

उत्तर—(b)

$n^2(n^2 - 1)$ विभाजित करने के लिए n = 2 लेने पर

$2^2(2^2 - 1) = 4 \times 3 \Rightarrow 12$

21. यदि x अभाज्य संख्या नहीं है और $-1 \le \frac{2x-7}{5} \le 1$ है, तो x की मान संख्या है-

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 5

उत्तर—(a)

$\because -1 \le \frac{2x-7}{5} \le 1$

$-5 \le 2x - 7 \le 5$
$-5 + 7 \le 2x \le 5 + 7$
$2 \le 2x \le 12$
$1 \le x \le 6$

इस प्रकार x का मान 1 से 6 के बीच में होगा। जिसमें 2, 3 और 5 क्रमशः अभाज्य संख्याएं हैं। अतः x का मान 4 होगा जो कि एक भाज्य संख्या है।

22. यदि $2^{x-1} + 2^{x+1} = 320$, तो x का मान है-

(a) 5 (b) 7 (c) 6 (d) 8

उत्तर—(b)

$2^{x-1} + 2^{x+1} = 320$ ($x-1$ और $x+1$ में 2 का अंतर होगा

$2^{x-1}(1+4) = 320$ अतः 2^{x-1} कॉमन लेने पर)

$2^{x-1}(5) = 320$

$2^{x-1} = 64$

$2^{x-1} = 2^6$

घातांकों की तुलना करने पर

$x - 1 = 6$

$x = 7$

23. तीन संख्याओं का योग 91 है। दूसरी संख्या पहली से $33\frac{1}{3}\%$ अधिक है और तीसरी संख्या पहली एवं दूसरी संख्याओं के योग से 60% अधिक है। सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।

(a) 15 (b) 17

(c) 13 (d) 14

उत्तर—(a)

माना पहली संख्या x है।

$\therefore$ दूसरी संख्या = $x + x$ का $33\frac{1}{3}\%$

$= x + x \times \frac{100}{3}\%$

$= x + x \times \frac{100}{3 \times 100}$

$= x + \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{4x}{3}$

तीसरी संख्या = $\left(x + \frac{4x}{3}\right) \times \frac{160}{100}$

$= \frac{7x}{3} \times \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{56x}{15}$

अब प्रश्न से

$x + \frac{4x}{3} + \frac{56x}{15} = 91$

$15x + 20x + 56x = 91 \times 15$

$91x = 91 \times 15$

$\therefore x = 15$

$\therefore$ सबसे छोटी संख्या = 15

24. 5 क्रमिक विषम धनात्मक पूर्णांक का औसत 9 है। उनमें से सबसे छोटा क्या है?

(a) 5 (b) 3

(c) 1 (d) 7

उत्तर—(a)

माना 5 क्रमिक विषम धनात्मक पूर्णांक $x, x+2, x+4, x+6$ और $x+8$ है।

प्रश्नानुसार

$\frac{x + x + 2 + x + 4 + x + 6 + x + 8}{5} = 9$

$\therefore 5x + 20 = 45$

$\therefore 5x = 25$

$\therefore x = 5$

$\therefore$ सबसे छोटा धन पूर्णांक 5 है।

25. यदि $\frac{a}{b}$ का भागफल धनात्मक है, तो निम्नलिखित में से क्या सही होना चाहिए?

(a) $a > 0$ (b) $b > 0$

(c) $ab > 0$ (d) $a + b > 0$

उत्तर—(c)

यदि $\frac{a}{b}$ का मान धनात्मक है।

$\therefore$ a, b या तो दोनों धनात्मक होंगे या दोनों ऋणात्मक होंगे।

अतः ab हमेशा 0 से बड़ा होगा।

26. 3842 का $\frac{1}{2}$ + ? का 15% = 2449

(a) 3520 (b) 3250

(c) 3350 (d) 3540

उत्तर- (a)

माना ? = x

$3842 \times \frac{1}{2} + x \times \frac{15}{100} = 2449$

$1921 + \frac{x \times 15}{100} = 2449$

$\frac{3x}{20} = 2449 - 1921$

$\frac{3x}{20} = 528$

$x = \frac{528 \times 20}{3} = 3520$

27. 7^{105} में इकाई का अंक कितना होगा?

(a) 5 (b) 7

(c) 9 (d) 1

उत्तर- (b)

हम जानते हैं- $7^4 = 2401$

अर्थात् (7^4) में इकाई का अंक =1

अतः $7^{105} = (7^4)^{26} \times 7$

$(7^4)^{26}$ में इकाई का अंक = 1

अतः 7^{105} में इकाई का अंक $= 1 \times 7 = 7$